

ZEITSCHRIFT
FÜR
MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896),
B. WITZSCHEL (1856—1859), M. CANTOR (1859—1896), E. KAHL (1860—1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND **DR. M. CANTOR.**

44. BAND.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 6 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.		Seite
Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmannschen Ausdehnungslehre. Von Emil Müller		28
Sur les „Tables des chiffres constants“ de M. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions. Par G. C. Baravelli		50
Eine Determinantenformel. Von E. Schulze		167
Beitrag zur Auflösung der Gleichung vierten Grades. Von H. Heilermann		234
Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist. Von W. Heymann		280
Die Interpolation. Von W. Veltmann		303
Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen. Von Ad. Schmidt		327
Erweiterungen des Faktoriellensatzes. Von Louis Saalschütz		340
On a functional equation treated by Abel. By P. Hayashi		346
 Geometrie. 		
Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden. Von Friedrich Schur		62
Über perspektive Affinität zweier Räume. Von A. Beck		85
Über Pseudotrochoiden. Von E. Wölffing		139
Elementares über die Dupinschen Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie. Von G. Holzmüller		194
Über doppelt zentrische Vierecke. Von Chr. Beyel		237
Über Winkelteilung mittels Araneiden. Von W. Heymann		263
Über die Wellenfläche. Von O. Böklen		289
On a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations. By P. Hayashi		349
Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. Von D. Sintzow		351
 Graphisches und mechanisches Rechnen. Graphische Darstellungen. 		
Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von E. Czuber		41
Beispiele graphischer Tafeln, mit Bemerkungen über die Methode der flucht-rechten Punkte. Von R. Mehmke		56
Über eine Veranschaulichung von Funktionen einer komplexen Variablen. Von L. Heffter		235
 Mechanik (einschl. Kinematik). 		
Zur Bestimmung der Achse der Schraubung, durch die ein starrer Körper aus einer gegebenen Lage in eine zweite gebracht werden kann. Von R. Mehmke		176

	Seite
Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Von Fr. Schilling	214
Neue Konstruktion für den Umfangs-Schwerpunkt eines Dreiecks. Von L. Geusen	339
Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist. Von H. Liebmann	355

Physik.

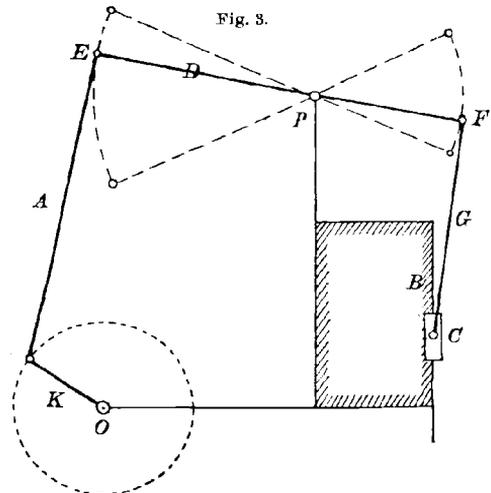
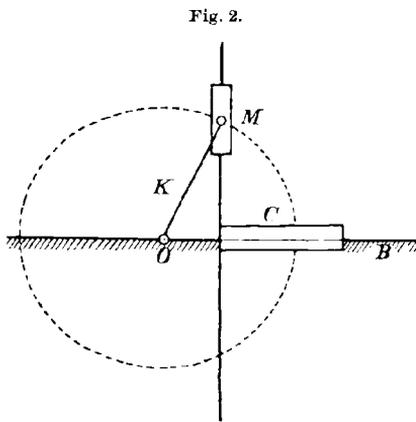
Einführung in die geometrische Optik. Von F. Meisel	298
--	-----

Angewandte Mathematik und Physik.

Dynamik der Kurbelgetriebe. Von Hans Lorenz	1, 65, 177
Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogram- metrie. Von Karl Heun	18
Über die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Be- stimmung der Mitschwingung. Von R. Schumann	102
Zum Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen. Von E. Hammer	228

Beilage zu Heft 2 und 3: Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten
Mathematik, die im Jahre 1898 in technischen Zeitschriften erschienen
sind. Zusammenestellt von **R. Mehmke**.

man nur den Drehpunkt O der Kurbel K in die Verlängerung der Gleitbahn B zu verlegen und das Gleitstück C durch ein an ihm drehbares Zwischenglied A , die sogenannte Schubstange mit dem Kurbelzapfen M zu verbinden. Den auf diese Weise entstandenen, bei weitem am häufigsten vorkommenden Mechanismus bezeichnet man als Schubkurbelgetriebe. Giebt man die hier festgehaltene Gleitbahn frei und hält statt ihrer das Zwischenglied A fest, so entsteht daraus das sogenannte oscillierende Kurbelgetriebe, welches jetzt nur noch selten Anwendung findet. Denkt man sich dagegen das Zwischenglied unendlich lang, bzw. seinen Drehpunkt auf dem Gleitstück C unendlich weit von O entfernt, so kann man auch den Kurbelzapfen M mittelst eines Gleitstückes auf einer mit C fest verbundenen senkrecht



zur ursprünglichen Geradföhrung BB stehenden Gleitbahn bewegt denken (Fig. 2). Diese Verbindung bezeichnet man alsdann als Kurbelschleife und demnach das Ganze als Kurbelschleifengetriebe.

Verschiebt man nun unter Festhaltung des Kurbelmittels O in Figur 1 die Gleitbahn B parallel zu sich selbst, so erhält man Getriebe, in denen der Hub des Gleitstückes immer kleiner ausfallen wird als der Durchmesser des Kurbelkreises. Ausserdem ergeben sich hierbei, wenn die Verschiebung nicht klein gegen die Länge der Schubstange ist, sehr ungünstige Stellungen derselben, welche in der Praxis leicht zu Klemmungen föhren. Will man sich hiervon unabhängig machen und zugleich bezüglich des Verhältnisses zwischen dem Hube des Gleitstückes und dem Kurbeldurchmesser volle Freiheit bewahren, so schaltet man nach Figur 3 einen Schwinghebel oder Balancier D mit einer am Gleitstück angreifenden Schubstange G zwischen dieses und die ursprüngliche Schubstange. Der Abstand des Balancierdrehpunktes P von seinen beiden Endpunkten E und F bestimmt hier

das erwähnte Verhältnis, natürlich mit Rücksicht auf die Schubstangenlängen A und G . Da bei diesen Balanciergetriebe die kinematischen Beziehungen schon ziemlich verwickelt ausfallen, andererseits seine Bedeutung gegen das Schubkurbelgetriebe zurücktritt, so werden wir dasselbe nur unter der vereinfachenden Annahme behandeln, dass die beiden Schubstangen A und G durch Kurbelschleifen, ähnlich wie in Figur 2, ersetzt sind.

Die bisher betrachteten Kurbelgetriebe sind sämtlich ebene Mechanismen; verbindet man nun mehrere in parallelen Ebenen liegende Getriebe, die übrigens verschiedenen Gattungen angehören können, durch eine gemeinsame Welle, so entstehen sogenannte Mehrkurbelgetriebe, welche in Verbindung mit mehreren Dampfcylindern insbesondere für Lokomotiven und Schiffe eine grosse Bedeutung erlangt haben. Die bei solchen Mehrkurbelmaschinen auftretenden Erscheinungen und deren Rückwirkung auf die Schiffskörper waren auch die Veranlassung zu einem erneuten Studium der Dynamik der Kurbelgetriebe überhaupt, nachdem sich herausgestellt hatte, dass die bisherige Auffassung der Vorgänge, welche in Radinger* ihren klassischen Vertreter gefunden hat, dem modernen Bedürfnis nach grösserer Schärfe nicht mehr entsprach.

Entsprechend ihrer praktischen Verwendung setzen wir nun für unsere Getriebe voraus, dass durch eine am Gleitstück angreifende mit der Bahn desselben gleichgerichtete Kraft ein Widerstandsmoment am Kurbelzapfen oder umgekehrt durch Einwirkung eines Drehmomentes an diesem ein am Gleitstück angreifender Widerstand überwunden werden soll. Erfolgt dies sehr langsam, so kann man unter Vernachlässigung der kinetischen Energie der einzelnen Getriebeteile die Aufgabe rein statisch, also etwa durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen behandeln. Für die jetzt gebräuchlichen Geschwindigkeiten, mit denen durch solche Getriebe oft ganz enorme Energiemengen hindurch geleitet werden, ist diese Methode indessen ganz unzulässig, auch wenn man sich auf die Untersuchung der Mechanismen im Beharrungszustande beschränkt. Dieser ist nämlich, wie man ohne weiteres erkennt, ein periodischer, indem nach Vollziehung einer Kurbelumdrehung alle Teile in dieselbe Lage zurückkehren und die ursprüngliche Geschwindigkeit wieder erlangen. Während einer Umdrehung aber ändert sich nicht nur die Lage, sondern auch die Geschwindigkeit aller Getriebeteile, welche hiernach Verzögerungen und Beschleunigungen unterworfen sind. Die von diesen Geschwindigkeitsänderungen herrührenden Kräfte, welche entweder bei stationären Maschinen von der Fundamentplatte aufgenommen werden oder bei beweglicher Unterlage derselben (auf Fahrzeugen) diese in Schwing-

* Siehe dessen Buch: „Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“, 2. Aufl., Wien 1892.

ungen versetzen, bezeichnet man, da ihre Grösse neben den Beschleunigungen wesentlich von den Massen der Getriebeteile abhängt, als Massenwirkungen. Da dieselben insbesondere bei hohen Umdrehungszahlen auf Lokomotiven und Schiffen sehr lästig werden, ja bis zu einer Gefährdung der Stabilität und des Zusammenhangs des ganzen Systems anwachsen können, so musste man auf eine Herabminderung bezw. Ausgleichung derselben bedacht sein. Wir werden im ersten Kapitel der nachstehenden Untersuchung kennen lernen, auf welche Weise und in welchem Umfange dies gelungen ist.

Andererseits aber beeinflussen die Massenwirkungen auch das Drehmoment an der Kurbel und damit die Umdrehungsgeschwindigkeit. Sind die rotierenden Massen sehr gross gegen die hin- und hergehenden, bezw. schwingenden Teile des Getriebes, oder steht die Welle in irgend einer Weise (z. B. Riementrieb) mit erheblichen im gleichen Sinne bewegten Massen im Zusammenhang, so wird dieser Einfluss nur gering sein, sodass die Annahme einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit der Kurbel, wie sie Radinger seiner Behandlung des Problems nach dem Vorgange rein kinematischer Betrachtungen zu Grunde legte, gerechtfertigt erscheint. Trifft indessen diese Voraussetzung wie z. B. bei Dampfmaschinen in direkter Kuppelung mit Dynamos, in denen relativ bedeutenden Gestängemassen wenige rotierende Teile mit kleinem Trägheitsmoment gegenüber stehen, nicht zu, so muss die Annahme einer konstanten Winkelgeschwindigkeit fallen gelassen und die Behandlung des Problems, wie aus dem zweiten Kapitel hervorgehen wird, auf eine allgemeinere Basis gestellt werden.

Auf diese Weise werden wir auch die Mittel an die Hand bekommen, die erwähnten Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit bei mehrkurbeligen Maschinen auf ein Minimum zu reduzieren.

Kapitel I.

Die Massenwirkungen und ihr Ausgleich.

1. Die Bewegungen im Schubkurbelgetriebe. Die Untersuchung des Kräftespiels an einem Mechanismus und die aus demselben hervorgehenden Energieänderungen setzt die Kenntnis der Bewegungen der einzelnen Getriebeteile zu einander voraus, aus denen dann die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abzuleiten sind. Da nun, wie aus der Betrachtung der obigen Figuren ohne weiteres erhellt, jeder Kurbelstellung eine eindeutig bestimmte Lage des Gleitstückes entspricht, umgekehrt aber jeder Lage des letzteren im allgemeinen zwei Kurbelstellungen zugehören, so empfiehlt es sich, als unabhängige Veränderliche die Kurbelstellung, gemessen durch ihren Anschlagswinkel gegen eine ihrer Endlagen (sogenannte Totlagen bezw. Totpunkte) zu wählen. Wir gehen dabei von dem dem Gleitstück zugewendeten sogenannten inneren Totpunkte aus und bezeichnen

den erwähnten Kurbelwinkel mit φ (siehe Fig. 4), dem alsdann ein Anschlagswinkel β der Schubstange aus ihrer Mittellage entspricht. Bezeichnen wir nun den Kurbelradius mit r , die Schubstangenlänge mit l und die momentane Entfernung des Kreuzkopfzapfens C von der Hubmitte mit x , so haben wir für x die Beziehung

$$1) \quad x + l = r \cos \varphi + l \cos \beta,$$

welche wegen

$$2) \quad r \sin \varphi = l \sin \beta$$

übergeht in

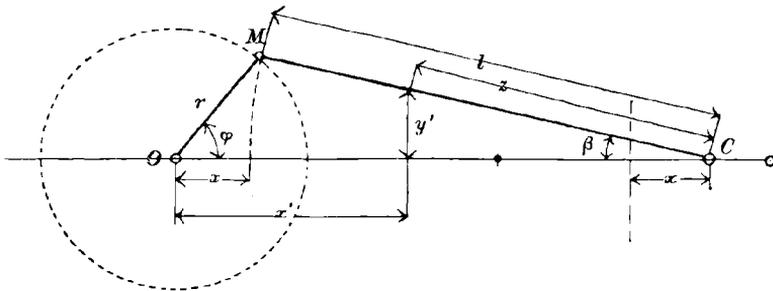
$$1a) \quad x + l = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}.$$

Dieser Ausdruck ist für die weitere Behandlung recht unbequem; wir wollen daher die Wurzel in eine Reihe entwickeln und erhalten, nachdem noch l auf beiden Seiten weggehoben ist,

$$1b) \quad \frac{x}{r} = \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \frac{r^4}{l^4} \sin^4 \varphi + \dots \right).$$

Bei der starken Konvergenz dieser Reihe wird man sich ohne Zweifel mit nur wenigen Gliedern begnügen dürfen. Die Glieder werden

Fig. 4.



sämtlich am grössten mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$, auch ist dann ihr Einfluss auf das Gesamtergebnis ein Maximum, da hierfür $\cos \varphi = 0$ wird. In der Praxis kommen nun vorwiegend Verhältnisse des Kurbelradius zur Schubstangenlänge vor, welche zwischen 1:4 und 1:5 liegen. Für diese Grössen haben wir aber die folgenden Werte:

$\frac{r}{l}$	$\frac{1}{2} \frac{r}{l}$	$\frac{1}{4} \frac{r^2}{l^2}$	$\frac{1}{8} \frac{r^4}{l^4}$
1:4	0,125	0,0156	0,0005
1:5	0,100	0,0100	0,0002

Daraus folgt, dass man sich in den meisten Fällen mit der Annäherungsformel:

$$1c) \quad \frac{x}{r} = \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \varphi$$

begnügen kann. Für das Kurbelschleifengetriebe verschwinden, da hier $r:l=0$ zu setzen ist, in 1b) naturgemäss alle Glieder bis auf $\cos \varphi$, sodass sich die Bewegungsverhältnisse dieses Mechanismus besonders einfach gestalten.

Die Geschwindigkeit des Gleitstückes ergibt sich durch Differentiation von 1) nach der Zeit, also mit Rücksicht auf 2):

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \left(1 + \frac{d\beta}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -r \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \right) \frac{d\varphi}{dt}$$

Entwickeln wir auch hier den Ausdruck

$$1 : \cos \beta = \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe, so geht 3) über in

$$3a) \quad \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \left\{ 1 + \frac{r}{l} \cos \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} \frac{r^4}{l^4} \sin^4 \varphi + \dots \right) \right\},$$

worin wir wieder die Glieder mit höheren Potenzen von $r:l$ vernachlässigen dürfen, sodass nur noch

3b) $\frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l} \cos \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt} = -r \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right) \frac{d\varphi}{dt}$ als Näherungswert übrig bleibt. Diesen Ausdruck hätten wir auch sogleich durch Differentiation von 1c) erhalten können. Durch Vergleich dieser Formel mit 3) erkennt man übrigens, dass unsere Vernachlässigungen in der Kleinheit des Winkels β beruhen, dessen Kosinus deshalb niemals sehr von 1 abweichen wird. Genau zu demselben Ergebnis wären wir auch gelangt, wenn wir aus demselben Grunde $\sin \beta \sim \beta$, mithin $\frac{d\beta}{d\varphi} \sim \frac{r}{l} \cos \varphi$ gesetzt hätten.

Durch eine weitere Differentiation geht schliesslich aus 3) die Beschleunigung des Gleitstückes hervor, die wir indessen, da sich dieselben Überlegungen hier wiederholen, unmittelbar aus 3b) ableiten wollen. Wir führen nur noch eine Abkürzung für die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ein, indem wir

$$4) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon$$

setzen, und erhalten dann für die Beschleunigung

$$5) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = -r \varepsilon^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right) - r \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right),$$

welche sich für das Kurbelschleifengetriebe vereinfacht in

$$5a) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = -r \left(\varepsilon^2 \cos \varphi + \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \right).$$

In allen bisherigen Behandlungen der Mechanik des Kurbelgetriebes, insbesondere derjenigen von Radinger, wird nun das mit der Winkel-

beschleunigung $\frac{d\varepsilon}{dt}$ behaftete Glied vernachlässigt und damit eine Vereinfachung erzielt, welche indessen in zahlreichen, gerade in neuerer Zeit wichtig gewordenen Fällen auf Widersprüche führt.

Während das Gleitstück sich nur in einer Richtung bewegt, sind für die einzelnen Punkte der Schubstange immer zwei Komponenten zu berücksichtigen. Wir wollen der Einfachheit halber uns die Elemente der Schubstange auf die Verbindungslinie zwischen dem Kreuzkopf- und Kurbelzapfen, die sogenannte Axe, reduziert denken und einen von ersterem um z entfernten Punkt ins Auge fassen (Fig. 4). Die Lage dieses Punktes bestimmen wir einerseits durch seinen Abstand x' von O gemessen in der Bewegungsrichtung des Gleitstückes und seine Entfernung y' von dieser Linie, und erhalten hierfür:

$$6) \quad x' = r \cos \varphi + (l - z) \cos \beta,$$

$$7) \quad y' = z \cdot \sin \beta = z \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Von diesen Gleichungen lässt sich 6) durch die schon oben angewandte Vernachlässigung unter gleichzeitiger Elimination von β überführen in

$$6a) \quad \frac{x' - l + z}{r} = \cos \varphi + \frac{l - z}{2l} \cdot \frac{r}{l} \sin^2 \varphi.$$

Durch Elimination von φ aus 6a) und 7) gelangt man weiter zur Gleichung der Bahnkurve des betrachteten Punktes, die uns indessen hier um so weniger interessiert, als sich deren Eigenschaften viel einfacher mit graphischen Methoden verfolgen lassen. Die Formel 6a) entspricht in ihrer Bauart genau der Gleichung 1c) für die Bewegung des Gleitstückes, sie geht auch für $z = 0$ in diese über, wenn wir nur die Abscisse statt auf O , auf die Hubmitte beziehen. Für $z = l$, also den Kurbelzapfen erhalten wir dann die der Kreisbewegung entsprechende Formel:

$$6b) \quad x'_0 = r \cos \varphi.$$

In ganz derselben Weise, wie oben, ergeben sich nunmehr auch die Geschwindigkeiten des betrachteten Punktes nach beiden Richtungen zu

$$8) \quad \frac{dx'}{dt} = -r\varepsilon \left(\sin \varphi + \frac{l - z}{2l} \cdot \frac{r}{l} \sin 2\varphi \right),$$

$$9) \quad \frac{dy'}{dt} = +z \frac{r}{l} \cdot \varepsilon \cos \varphi$$

und schliesslich die Beschleunigungen in beiden Richtungen:

$$10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt^2} = -r\varepsilon^2 \left(\cos \varphi + \frac{l - z}{l} \cdot \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right) \\ \quad \quad \quad - r \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{l - z}{2l} \cdot \frac{r}{l} \cdot \sin 2\varphi \right), \end{cases}$$

$$11) \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = -r \frac{z}{l} \left(\varepsilon^2 \sin \varphi - \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \varphi \right).$$

Sehr einfach gestalten sich endlich die Bewegungsgleichungen des dritten Gliedes, der Kurbel, deren einzelne Punkte sämtlich Kreise beschreiben. Hat z. B. der ins Auge gefasste Punkt den Abstand ϱ vom Drehungsmittelpunkt O , so sind die beiden Koordinaten desselben:

$$12) \quad x'' = \varrho \cos \varphi,$$

$$13) \quad y'' = \varrho \sin \varphi,$$

mithin die Geschwindigkeitskomponenten:

$$14) \quad \frac{dx''}{dt} = -\varrho \varepsilon \sin \varphi,$$

$$15) \quad \frac{dy''}{dt} = +\varrho \varepsilon \cos \varphi,$$

und die Beschleunigungen:

$$16) \quad \frac{d^2x''}{dt^2} = -\varrho \left(\varepsilon^2 \cos \varphi + \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \right),$$

$$17) \quad \frac{d^2y''}{dt^2} = -\varrho \left(\varepsilon^2 \sin \varphi - \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \varphi \right),$$

Diese letzten Formeln gelten naturgemäss auch unverändert und streng für das Kurbelschleifengetriebe, für welches Gleichung 10) sich auf 5a) reduziert, seitliche Bewegungen von anderen Teilen ausser der Kurbel, wie sie durch Gleichung 9) und 11) charakterisiert sind, dagegen ganz wegfallen.

2. Die Massendrücker am Schubkurbelgetriebe. Den im vorigen Paragraphen ermittelten Beschleunigungen entsprechen nun Reaktionen der einzelnen Massen, die wir als Massendrücker bezeichnen wollen. Die in die x -Richtung fallenden Komponenten X dieser Reaktionen summieren sich, wenn wir von der Reibung im ganzen Getriebe absehen, im Kurbellager O und werden dort von der Fundamentplatte aufgenommen, während die hierzu senkrechten Komponenten Y teils im Kurbellager O , teils auch am Kreuzkopfpapfen C auftreten.

Die Massendrücker ergeben sich dabei einfach als die Summe der Produkte der einzelnen Massenelemente mit ihren Beschleunigungen. Es sei nun P das Gewicht des lediglich geradlinig bewegten Gleitstückes, g die Beschleunigung der Schwere, dann ist der durch seine Bewegung wachgerufene Massendruck nach Gleichung 5):

$$18) \quad \begin{cases} X = -\frac{P}{g} \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{P}{g} r \varepsilon^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right) \\ \quad + \frac{P}{g} r \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right), \end{cases}$$

In derselben Richtung wirkt auch der Beschleunigungsdruck X' der Schubstange, deren Gewichtselement wir mit dG bezeichnen wollen. Wir haben also mit 10):

$$19) \quad \begin{cases} dX' = -\frac{dG}{g} \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{dG}{g} r \varepsilon^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi - \frac{2r}{l^2} \cos 2\varphi \right) \\ \quad + \frac{dG}{g} r \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi - \frac{2r}{2l^2} \cdot \sin 2\varphi \right), \end{cases}$$

woraus sich der Gesamtdruck durch Integration über die ganze Schubstangenlänge ergibt. Führen wir nunmehr den Schwerpunktsabstand s' der Schubstange vom Kreuzkopfpapfen ein, und bezeichnen mit G das Gesamtgewicht derselben, so ist offenbar

$$\int_0^l z dG = G s'$$

und wir erhalten aus 19):

$$20) \quad \begin{cases} X' = \frac{G}{g} r \varepsilon^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi - \frac{s' r}{l^2} \cos 2\varphi \right) \\ \quad + \frac{G}{g} r \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi - \frac{s' r}{2l^2} \sin 2\varphi \right). \end{cases}$$

Endlich wirkt auch noch die Kurbel in derselben Richtung, und zwar ein Element dK derselben nach Gleichung 16) mit der Kraft:

$$21) \quad dX'' = -\frac{dK}{g} \frac{d^2x''}{dt^2} - \frac{dK}{g} \varrho \left(\varepsilon^2 \cos \varphi + \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \right),$$

woraus sich der Gesamtdruck mit dem Schwerpunktsabstand der Kurbel s'' und ihrem Totalgewicht K zu

$$22) \quad X'' = \frac{K}{g} s'' \varepsilon^2 \cos \varphi + \frac{K}{g} s'' \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi$$

ergibt. Die Welle und das Schwungrad tragen ihrer symmetrischen Anordnung um die Drehaxe wegen zu den Massendrücken nichts bei. Dasselbe würde auch für die Kurbel gelten, wenn dieser gegenüber auf der Welle ein Gegengewicht von demselben statischen Moment in Bezug auf die Drehaxe aufgekeilt wäre. In diesem Falle sprechen wir von einer ausgeglichenen Kurbel.

Durch Zusammenfassen der Einzeldrücke X , X' , X'' folgt dann der totale Massendruck in der x -Richtung zu

$$23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma X &= \frac{\varepsilon^2}{g} \left\{ (P + G)r \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right) + K s'' \cos \varphi - G \frac{r^2}{l^2} s' \cos 2\varphi \right\} \\ &+ \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \left\{ (P + G)r \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right) + K s'' \sin \varphi - G \frac{r^2}{2l^2} s' \sin 2\varphi \right\}. \end{aligned} \right.$$

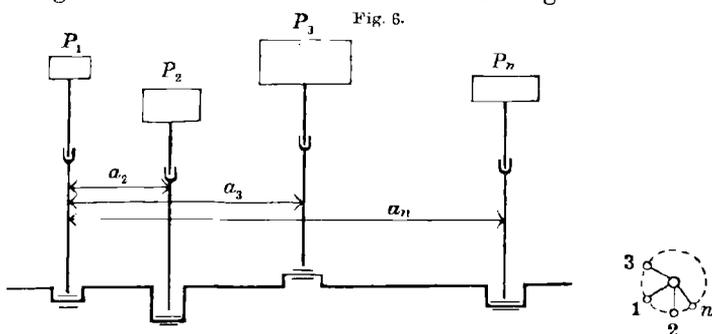
Auf dieselbe Weise ergibt sich der Massendruck in der y -Richtung mit Hilfe von 11) und 17) zu

$$24) \quad \Sigma Y = \frac{1}{g} \left(G \frac{r}{l} s' + K s'' \right) \left(\varepsilon^2 \sin \varphi - \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \varphi \right).$$

Die Verteilung dieses Druckes auf die beiden Punkte O und C kann leicht mit Hilfe des Momentensatzes ermittelt werden; für unsern Zweck ist dieselbe indessen ohne Bedeutung. Dagegen ist die Bemerkung wichtig, dass eine zahlenmäßige Auswertung dieser Drücke,

3. Die Ausgleichung der Massendrucke bei mehrkurbligen Maschinen. Wir betrachten nunmehr einen Mechanismus, der aus n in parallelen Ebenen nebeneinander, aber an derselben Welle O angreifenden Kurbelgetrieben besteht. Ausserdem mögen sich sämtliche Gleitstücke in einer Ebene bewegen, in der gleichzeitig auch die Welle liegt. Die einzelnen Kurbelradien seien $r_1 r_2 r_3 \dots r_n$, die Gewichte der einzelnen Getriebeteile und ihre Schwerpunktsabstände mögen ebenfalls unter Beibehaltung der früheren Benennungen durch diese Indices bezeichnet sein (Fig. 6).

Steht dann die erste Kurbel im inneren Totpunkte, so sei die zweite Kurbel in der Drehrichtung bereits um einen Winkel α_2 , die dritte um α_3 , die n^{te} um α_n vorangeeilt. Ausserdem sei der Abstand der Bewegungsebenen der einzelnen Getriebe von derjenigen des ersten mit a_2, a_3, a_n bezeichnet. Die in jedem Moment infolge der starren Verbindung der Kurbeln mit der Welle allen gemeinsame Winkel-



geschwindigkeit sei wieder ε . Da sämtliche Getriebe durch die Welle verbunden sind, also eine gemeinsame Fundamentplatte besitzen, so können wir auch ihre augenblicklichen Massendruckkomponenten addieren und erhalten, wenn wir diese Summen der Kürze halber mit X und Y bezeichnen, hierfür bei der Stellung φ der ersten Kurbel:

$$27) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\varepsilon^2}{g} \left\{ \sum (Pr + Gr + Ks'') \cos(\varphi + \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \sum \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \cos 2(\varphi + \alpha) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \left\{ \sum (Pr + Gr + Ks'') \sin(\varphi + \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \sin 2(\varphi + \alpha) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$28) \quad \left\{ \begin{aligned} Y &= \frac{\varepsilon^2}{g} \sum \left(G \frac{r}{l} s' + Ks' \right) \sin(\varphi + \alpha) \\ &\quad - \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \sum \left(G \frac{r}{l} s' + Ks' \right) \cos(\varphi + \alpha). \end{aligned} \right.$$

Durch Auflösung der Winkelfunktionen und Vorsetzen der \sin und \cos des für alle Getriebe gleichzeitig maßgebenden einfachen bzw. doppelten Winkels φ vor die Summenzeichen wird hieraus:

$$27a) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\varepsilon^2}{g} \cos \varphi \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \cos \alpha \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{g} \sin \varphi \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \sin \alpha \\ \quad + \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \varphi \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \sin \alpha \\ \quad + \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \cos \alpha \\ \quad + \frac{\varepsilon^2}{g} \cos 2\varphi \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \cos 2\alpha \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{g} \sin 2\varphi \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \sin 2\alpha \\ \quad + \frac{1}{2g} \frac{d\varepsilon}{dt} \cos 2\varphi \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \sin 2\alpha \\ \quad + \frac{1}{2g} \sin 2\varphi \Sigma \left(Pr + Gr + G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

$$28a) \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{\varepsilon^2}{g} \sin \varphi \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \cos \alpha + \frac{\varepsilon^2}{g} \cos \varphi \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \sin \alpha \\ \quad + \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \sin \alpha - \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \varphi \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen diese resultierenden Drücke ganz oder teilweise für beliebige Stellungen φ der ersten Kurbel und beliebige Winkelgeschwindigkeiten, bezw. Beschleunigungen zum Verschwinden gebracht werden können.

Da die vor den Summenzeichen stehenden Produkte aus Winkel-funktionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ebenso willkürlich sind wie diese selbst, so kann ein allgemeines Verschwinden offenbar nur eintreten, wenn gleichzeitig alle Summen zu Null werden, d. h. wenn

$$29) \quad \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \cos \alpha = 0, \quad \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \sin \alpha = 0,$$

$$30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \cos 2\alpha = 0, \\ \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \sin 2\alpha = 0, \end{array} \right.$$

$$31) \quad \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \cos \alpha = 0, \quad \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \sin \alpha = 0.$$

Durch Subtraktion der beiden letzten von den ersten Gleichungen kann man übrigens sofort die Kurbelmomente aus 29) eliminieren und schreiben:

$$29a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \cos \alpha = 0, \\ \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \sin \alpha = 0; \end{array} \right.$$

Hierin ist aber mit Rücksicht auf unsere schon früher angewandten Vernachlässigungen für die erste Kurbel:

$$\begin{aligned} \delta h &= \delta x \cdot \sin \gamma = -r \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right) \delta \varphi \cdot \sin \gamma, \\ h' &= - (r \cos \varphi + l \cos \beta) \sin \gamma - s' \sin (\gamma - \beta) \\ \text{also} \quad \left\{ \begin{aligned} \delta h' &= -r \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right) \delta \varphi \cdot \sin \gamma \\ &+ s' \frac{r}{l} \cos \varphi \cdot \cos \gamma \delta \varphi + s' \frac{r^2}{2l^2} \sin 2\varphi \delta \varphi, \\ h'' &= s'' \sin (\varphi + \gamma), \\ \delta h'' &= -s'' \sin \varphi \sin \gamma \delta \varphi + s'' \cos \varphi \cos \gamma \delta \varphi. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Führen wir diese Werte in 32) ein, und ersetzen gleichzeitig φ durch den für eine beliebige Kurbel giltigen Winkel $\varphi + \alpha$, so erhalten wir

$$33) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \sin \gamma \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \sin (\varphi + \alpha) \\ & - \frac{\sin \gamma}{2} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} \sin 2(\varphi + \alpha) \\ & + \cos \gamma \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) \cos (\varphi + \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Lösen wir auch hierin die Winkelfunktionen auf und setzen die allen gemeinsamen Werte $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ vor die Summenzeichen, so erkennen wir, dass die Gleichung 33) nur bestehen kann, wenn die einzelnen mit den Funktionen von φ behafteten Summen sämtlich verschwinden. Diese Summen aber sind identisch mit den sechs Ausdrücken 29) bis 31), so dass unsere Massendruckausgleichung nichts anderes besagt, als dass in einem System von n Kurbelgetrieben mit gemeinsamer Welle der Gesamtschwerpunkt seine Lage nicht ändern darf, wobei die Neigung der gemeinsamen Bewegungsebene aller Gleitstücke ganz willkürlich ist.

Bei einer einkurbeligen Maschine rufen die Massendrucke nur dann Momente in einer durch die Welle und die Bewegungsrichtung des Gleitstückes bestimmten, sowie einer senkrecht hierzu stehenden Ebene hervor, wenn die Kurbel nicht durch zwei gleichweit entfernte Lager zu beiden Seiten gestützt ist. Jedenfalls wird dann die Kurbel im anderen Falle dem nächsten Lager thunlichst genähert, sodass die von ihrer seitlichen Lage herrührenden Momente nur klein sind. Bei mehrkurbeligen Maschinen dagegen können sie ganz erhebliche Werte annehmen, so dass hier die Frage nach der Möglichkeit einer Ausgleichung gerechtfertigt erscheint. Zu diesem Zwecke wählen wir als Pol einen auf der Welle um a von der ins Auge gefassten Kurbel entfernten Punkt und erhalten durch Multiplikation dieses Abstandes mit den beiden Massendruckkomponenten Gleichung 23) und 24) die fraglichen Momente. Führen wir statt des Winkels φ in diese Gleich-

ungen dann noch den allgemeineren Winkel $\varphi + \alpha$ ein und verstehen unter a die Entfernung der dem Winkel α entsprechenden Kurbel von der ersten (Fig. 6), so können wir alle in denselben Ebenen wirkenden Momente summieren und erhalten für die resultierenden Momente die Ausdrücke:

$$34) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(Xa) &= \frac{\varepsilon^2}{g} \left\{ \Sigma(Pr + Gr + Ks'') a \cos(\varphi + \alpha) \right. \\ &\quad + \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} a \cos 2(\varphi + \alpha) \left. \right\} \\ &\quad + \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \left\{ \Sigma(Pr + Gr + Ks'') a \sin(\varphi + \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{2l} a \sin 2(\varphi + \alpha) \right\} \end{aligned} \right.$$

$$35) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(Ya) &= \frac{\varepsilon^2}{g} \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) a \sin(\varphi + \alpha) \\ &\quad - \frac{1}{g} \frac{d\varepsilon}{dt} \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) a \cos(\varphi + \alpha). \end{aligned} \right.$$

Diese Momente (Kräftepaare) suchen nun das ganze System um seinen Schwerpunkt zu drehen und würgen, wenn sie nicht ausgeglichen sind, vermöge ihrer Veränderlichkeit zu Schwingungen (Pendelungen) um zwei zur gemeinsamen Welle senkrechte Axen Anlass geben. Ein weiteres Drehmoment, welches vorwiegend von der Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeit herrührende Schwingungen um die Welle selbst zur Folge hat, werden wir später kennen lernen.

Als Bedingung für das Verschwinden der Werte 34) und 35) ergeben sich nunmehr in genau derselben Weise wie oben die Gleichungen:

$$36) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(Pr + Gr + Ks'') a \cos \alpha &= 0, \\ \Sigma(Pr + Gr + Ks'') a \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$37) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} a \cos 2\alpha &= 0, \\ \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} a \sin 2\alpha &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) a \cos \alpha &= 0, \\ \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + Ks'' \right) a \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \right.$$

oder auch übersichtlicher:

$$36a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) a \cos \alpha &= 0, \\ \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) a \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$37a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} a \cos 2\alpha &= 0, \\ \Sigma \left(Pr + Gr - G \frac{r}{l} s' \right) \frac{r}{l} a \sin 2\alpha &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$38a) \quad \begin{cases} \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + K s'' \right) a \cos \alpha = 0, \\ \Sigma \left(G \frac{r}{l} s' + K s'' \right) a \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Für ein System von Kurbelschleifengetrieben gehen diese Gleichungen über in:

$$36b) \quad \Sigma P r a \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P r a \sin \alpha = 0,$$

$$38b) \quad \Sigma K s'' a \cos \alpha = 0, \quad \Sigma K s'' a \sin \alpha = 0.$$

Eine recht übersichtliche Form gewinnen unsere Ergebnisse übrigens, wenn wir abkürzungsweise:

$$39) \quad P r + G r - G \frac{r}{l} s' = Q,$$

$$40) \quad G \frac{r}{l} s' + K s'' = R$$

setzen. Wir wollen diese Ausdrücke als die reduzierten Momente der hin- und hergehenden bzw. rotierenden Massen bezeichnen und können dann unsere Bedingungen für das Verschwinden der Massendrucke und Massendruckmomente in drei Gruppen ausschreiben:

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \quad \begin{cases} \Sigma Q \cos \alpha = 0, & \Sigma Q \sin \alpha = 0, \\ \Sigma Q a \cos \alpha = 0, & \Sigma Q a \sin \alpha = 0, \\ \Sigma R \cos \alpha = 0, & \Sigma R \sin \alpha = 0, \\ \Sigma R a \cos \alpha = 0, & \Sigma R a \sin \alpha = 0, \\ \Sigma Q \frac{r}{l} \cos 2\alpha = 0, & \Sigma Q \frac{r}{l} \sin 2\alpha = 0, \\ \Sigma Q \frac{r}{l} a \cos 2\alpha = 0, & \Sigma Q \frac{r}{l} a \sin 2\alpha = 0, \end{cases}$$

Von diesen* bezieht sich die Gruppe I ausschliesslich auf die Wirkung der hin- und hergehenden Massen, die Gruppe II unabhängig davon auf die rotierenden, wobei von der Schubstange der Betrag $G \left(1 - \frac{s'}{l} \right)$ als lediglich hin- und hergehend, der Rest $G \frac{s'}{l}$ dagegen als im Kurbelzapfen konzentriert und mit diesem rotierend angesehen werden darf. Es sind dies auch die beiden sich zu dem der Schubstange ergänzenden Gewichte, mit denen diese statisch den Kreuzkopf bzw. den Kurbelzapfen belastet. Die Gruppen I und II sind nun ganz ebenso gebaut, wie die Bedingungen für den Ausgleich von Kurbelschleifengetrieben; wir wollen sie in der Folge die Ausgleichsbedingungen erster Ordnung nennen. Im Gegensatz hierzu stehen die in Gruppe III vereinigten Ausgleichsbedingungen zweiter Ordnung, für welche die rotierenden Massen keine Rolle mehr spielen. Hätten wir übrigens aus unseren Reihenentwicklungen z. B. 8a) noch Glieder mit höheren

* Wir werden später untersuchen, inwieweit diese Gleichungen mit einander verträglich sind, bzw. unabhängig von einander bestehen können.

Potenzen von $r:l$ bezw. der Winkelfunktionen herangezogen, so würden wir auch hier noch Bedingungen für Massenausgleiche höherer Ordnung erhalten haben, denen aber bei der relativen Kleinheit der eintretenden Grössen keine praktische Bedeutung mehr zukommt.

Die hier entwickelte Theorie des Massenausgleichs hat nun in der Praxis des Schiffbaues — allerdings in vereinfachter Form — eine weitgehende Anwendung erfahren. Auf ihre theoretische Möglichkeit, wenigstens für Kurbelschleifengetriebe, wies zuerst der amerikanische Ingenieur Taylor 1891* hin, indem er die Ausdrücke 29b) und 36b) graphisch durch geschlossene Polygone darstellte. Taylor bezweifelte indes die praktische Durchführbarkeit, da er die Schräkungswinkel α , die Cylinderabstände und auch die Gestängegewichte als durch andere Rücksichten, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen, für festgelegt ansah und schlug nur die Einführung einer neuen hin- und hergehenden Masse vor. Diese kann aber bei sonst gegebenen Maschinen-dimensionen die vier Gleichungen 29b) und 36b) nicht gleichzeitig erfüllen, da sie selbst und ihre Anordnung schon durch drei Grössen, nämlich das Produkt Pr , den Abstand a und den Schräkungswinkel α bestimmt ist. Dagegen erkannte der englische Schiffbauer Yarrow 1892** die Möglichkeit, dies durch Einführung zweier Massen zu erreichen, verlies aber seine Methode sofort, nachdem der deutsche Ingenieur Otto Schlick 1893*** die praktische Erfüllung der Bedingungen eines Ausgleiches erster Ordnung durch die Massen und Anordnung der arbeitenden Getriebe selbst, ohne Zuhilfenahme neuer toter Gewichte, gezeigt hatte. Dem Vorgange von Yarrow in der Annahme des Schlickschen Verfahrens schlossen sich seitdem rasch die namhaftesten Fabriken des In- und Auslandes an, während sich Schlick selbst in Anlehnung an die praktischen Ergebnisse bemühte, die bald erkannte Möglichkeit auch des Ausgleiches zweiter Ordnung für die Industrie nutzbar zu machen. Aus diesen Bestrebungen, an denen sich u. a. der Verfasser beteiligte, ist auch die vorliegende Arbeit hervorgegangen.

* Taylor: „The causes of vibrations of screw steamers“, Journ. of the American Society of Naval Engineers Vol. III. 1891.

** Englisches Patent Nr. 5321/1892.

*** Deutsches Patent Nr. 80974, 1893.

(Fortsetzung folgt.)

Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie.

Von

KARL HEUN

in Berlin.

Vor zwei Jahren wurde ich — bei Gelegenheit der internationalen Wolkenmessungen, die vorwiegend auf photographischem Wege erfolgten — angeregt, eine analytische Lösung der Grundaufgabe der Photogrammetrie für eine ganz beliebige Orientierung der Platten zu versuchen, die hier im ersten Abschnitte mitgeteilt ist.

Die grossen Fortschritte der photographischen Aufnahmetechnik, welche ich bei Gelegenheit der sogenannten kinematographischen Vorführungen der Gebr. Lumière u. a. sah, gaben den Anlass zur Aufstellung und Durchführung des naheliegenden phoronomischen Problems der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbestimmung rasch bewegter Objekte auf diesem Wege.

Zu einer praktischen Ausbildung des Verfahrens ist allerdings mehr nötig als die Aufstellung einiger Formeln, die bei ihrer Handhabung doch noch mancherlei Vereinfachungen verlangen werden. Nicht geringe Schwierigkeiten werden namentlich die Bildmessungen bei dem kleinen Plattenformat, welches bei Serienaufnahmen notwendig ist, verursachen. Aber es scheint mir verfrüht, jetzt schon auf Einzelheiten hinzuweisen, die sich dem Problem in der Praxis ungesucht aufdrängen werden. Hier ist eine Fassung und allgemeine Lösung desselben vom Standpunkte des Mathematikers mitgeteilt, nicht mehr.

A. Beziehungen zwischen den Raumkoordinaten und den Plattenkoordinaten eines Punktes.

1. Setzen wir ein photographisches Objektiv voraus, welches winkelgetreue Abbildungen liefert, so kann das Bild eines Raumpunktes, welches auf der Platte entsteht — abgesehen von der sphärischen und astigmatischen Abweichung — als eine Centralprojektion desselben betrachtet werden. Als projizierender Strahl ist der optische Hauptstrahl des betreffenden Punktes anzusehen, welcher

in den ersten Hauptpunkt eintritt, aus dem zweiten mit einer Parallelverschiebung austritt und die Platte in dem Bildpunkt durchsticht. Der vordere Hauptpunkt erscheint hiernach als Centrum der Projektion und die Bildebene liegt um den Abstand der Hauptpunkte parallel verschoben vor der Platte. Eine Gerade, welche durch das Centrum geht und die Bildebene senkrecht durchschneidet, soll in üblicher Weise als Hauptaxe bezeichnet werden.

2. Den Raumpunkt P beziehen wir auf ein festes rechtwinkliges Axensystem und nennen die hierauf bezüglichen Koordinaten x, y, z . Die entsprechenden Koordinaten des Projektionscentrums C^* seien a, b, c . Bildet nun die Hauptaxe mit den Raumaxen die Winkel α, β, γ , so sind ihre Gleichungen:

$$\frac{x-a}{\cos \alpha} = \frac{y-b}{\cos \beta} = \frac{z-c}{\cos \gamma}.$$

Auf dieser Geraden errichten wir eine normale Ebene, welche durch C^* geht und von der zu ihr parallelen Bildebene den Abstand h hat. In dieser Ebene denken wir uns ferner zwei zu einander senkrechte Geraden durch C^* gezogen, welche mit den Raumaxen bezw. die Winkel $\alpha' \beta' \gamma'$ und $\alpha'' \beta'' \gamma''$ einschliessen. Hierdurch erhalten wir mit Hinzunahme der Hauptaxe ein zweites Axenkreuz, auf welches wir den Punkt P beziehen können. Die entsprechenden Koordinaten seien x', y', z' . Beide Koordinatensysteme sind durch die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x' = (x-a) \cos \alpha + (y-b) \cos \beta + (z-c) \cos \gamma \\ y' = (x-a) \cos \alpha' + (y-b) \cos \beta' + (z-c) \cos \gamma' \\ z' = (x-a) \cos \alpha'' + (y-b) \cos \beta'' + (z-c) \cos \gamma'', \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x-a = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' + z' \cos \alpha'' \\ y-b = x' \cos \beta + y' \cos \beta' + z' \cos \beta'' \\ z-c = x' \cos \gamma + y' \cos \gamma' + z' \cos \gamma'' \end{cases} \end{aligned}$$

analytisch verknüpft.

Da sich die abbildenden Strahlen im Centrum kreuzen, so bestehen zwischen den Axenwinkeln die Relationen der Orthogonalität in der Form:

$$3) \quad \begin{cases} \cos \alpha'' = \cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma' \\ \cos \beta'' = \cos \gamma' \cos \alpha - \cos \gamma \cos \alpha' \\ \cos \gamma'' = \cos \alpha' \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta'. \end{cases}$$

Es ist nun sehr leicht, zu den Grundformeln der Photogrammetrie zu gelangen. Bezeichnen wir nämlich die Centralprojektion des Punktes P mit P' und setzen zugleich $C^*P = e$, $C^*P' = e'$, so folgt aus der perspektivischen Lage

$$x' : h = y' : v = z' : w = e : e' = \sigma,$$

wenn v und w die rechtwinkligen Plattenkoordinaten des Bildpunktes P' bedeuten. Die Gleichungen 1) und 2) gehen jetzt über in:

$$4) \quad \begin{cases} \sigma h = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \cos \beta + (z - c) \cos \gamma = F \\ \sigma v = (x - a) \cos \alpha' + (y - b) \cos \beta' + (z - c) \cos \gamma' = F' \\ \sigma w = (x - a) \cos \alpha'' + (y - b) \cos \beta'' + (z - c) \cos \gamma'' = F'' \end{cases}$$

und

$$5) \quad \begin{cases} x - a = \sigma (h \cos \alpha + v \cos \alpha' + w \cos \alpha'') = \sigma A \\ y - b = \sigma (h \cos \beta + v \cos \beta' + w \cos \beta'') = \sigma B \\ z - c = \sigma (h \cos \gamma + v \cos \gamma' + w \cos \gamma'') = \sigma C. \end{cases}$$

Die Gleichungen 4) geben zur Bestimmung der Plattenkoordinaten (d. h. der rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunktes in der Bildfläche) die Formeln:

$$6) \quad v = \frac{F''}{F'} h \quad \text{und} \quad w = \frac{F''}{F'} h.$$

Aus den Gleichungen 5) folgt unmittelbar:

$$7) \quad \frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C},$$

also die Gleichungen des projizierenden Strahls PP' .

Hat man zwei centralprojektivische Bilder desselben Punktes P mit den Bildkoordinaten v_0, w_0 und v_1, w_1 , welche zu den Orientierungskonstanten

$$\begin{aligned} a_0 b_0 c_0 \quad \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \quad \alpha'_0 \beta'_0 \gamma'_0 \quad \alpha''_0 \beta''_0 \gamma''_0 \quad h_0 \\ a_1 b_1 c_1 \quad \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \quad \alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1 \quad \alpha''_1 \beta''_1 \gamma''_1 \quad h_1 \end{aligned}$$

gehören, dann dienen die Gleichungen:

$$8) \quad \begin{cases} \frac{x - a_0}{A_0} = \frac{y - b_0}{B_0} = \frac{z - c_0}{C_0} \\ \frac{x - a_1}{A_1} = \frac{y - b_1}{B_1} = \frac{z - c_1}{C_1} \end{cases}$$

zur eindeutigen Bestimmung des Punktes P .

Hiermit ist die Grundaufgabe der Photogrammetrie erledigt.

3. Nur selten wird man jedoch die Formeln 8) in ihrer vollständigen Allgemeinheit d. h. bei ganz beliebiger Orientierung der Platten zur Anwendung bringen. Die Axe der v -Koordinaten kann man fast immer horizontal legen. Dann ist

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' = 0$$

und

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' = 1,$$

also

$$\cos \alpha' = \sin \beta'.$$

Hiernach wird

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}, \quad \cos \beta' = -\frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}, \quad \cos \gamma' = 0$$

und wegen der Gleichung 3):

$$\cos \alpha'' = -\cos \alpha \operatorname{ctg} \gamma, \quad \cos \beta'' = -\cos \beta \operatorname{ctg} \gamma, \quad \cos \gamma'' = \frac{1}{\sin \gamma}.$$

Erfolgen die Aufnahmen durch einen Phototheodolithen, der es gestattet, das Azimuth ξ und die Höhe η der Hauptaxe zu bestimmen, dann ist:

$$9) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos \eta \cos \xi, & \cos \beta = \cos \eta \sin \xi, \\ \cos \alpha' = \sin \xi, & \cos \beta' = -\cos \xi \\ \cos \alpha'' = -\sin \eta \cos \xi, & \cos \beta'' = -\sin \eta \sin \xi, \\ \cos \gamma = \sin \eta, \\ \cos \gamma' = 0, \\ \cos \gamma'' = \cos \eta, \end{cases}$$

und demnach:

$$10) \quad \begin{cases} A = h \cos \eta \cos \xi + v \sin \xi - w \sin \eta \cos \xi, \\ B = h \cos \eta \sin \xi - v \cos \xi - w \sin \eta \sin \xi, \\ C = h \sin \eta + w \cos \eta, \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} A = h' \cos \xi + v \sin \xi \\ B = h' \sin \xi - v \cos \xi \\ C = h \sin \eta + w \cos \eta \end{cases} \quad h' = h \cos \eta - w \sin \eta.$$

Für die graphische Durchführung konstruiert man, nach den vorstehenden Gleichungen, zunächst h' und C aus h , w und η und darauf B und A aus h' , v und ξ . Hat man so die Richtungskonstanten für jede Platte gefunden, so kennt man die Projektionen der Geraden $C^*_0 P$ und $C^*_1 P$, deren Durchschnitte den Grundriss und Aufriss des gesuchten Raumpunktes P liefern (cf. die vorstehenden Figuren 1 und 2).

In manchen Fällen mag die rechnerische Durchführung — wegen der Erreichung grösserer Genauigkeit — vorzuziehen sein.

B. Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Raumpunktes und seiner Centralprojektion.

4. Bisher haben wir uns den Punkt P im Raume ruhend vorgestellt. Wir wollen nun annehmen, er besitze eine stetige Bewegung, so dass auch der Bildpunkt P' eine gesetzmässige Bewegung in der Bildebene erhält. Die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitskomponenten beider Punkte ergeben sich am einfachsten, indem wir die Gleichungen 5) nach der Zeit differentiiieren. Die entsprechenden Derivierten sollen durch übergesetzte Punkte bezeichnet werden. So erhalten wir:

$$11) \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\sigma} A + \sigma \dot{A} \\ \dot{y} = \dot{\sigma} B + \sigma \dot{B} \\ \dot{z} = \dot{\sigma} C + \sigma \dot{C}. \end{cases}$$

sind die Komponenten der Sektorengeschwindigkeit des Vektors C^*P . Die Komponenten der Plattengeschwindigkeit \dot{v} und \dot{w} verschwinden gleichzeitig mit den Grössen p, q, r . Ist die Sektorengeschwindigkeit konstant — wie bei der Centralbewegung —, so sind auch die Grössen $\sigma^2 \dot{v}$ und $\sigma^2 \dot{w}$ konstant, d. h. die Plattengeschwindigkeit

$$\sqrt{\dot{v}^2 + \dot{w}^2}$$

ist dem Quadrat von σ umgekehrt proportional.

6. Wir setzen nun voraus, dass man aus zwei Centren C^*_0 und C^*_1 zwei Serien photographischer Momentaufnahmen desselben in Be-

Fig. 3.

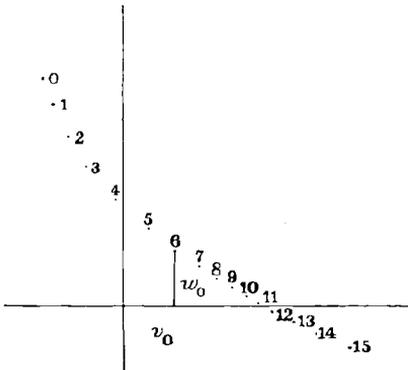
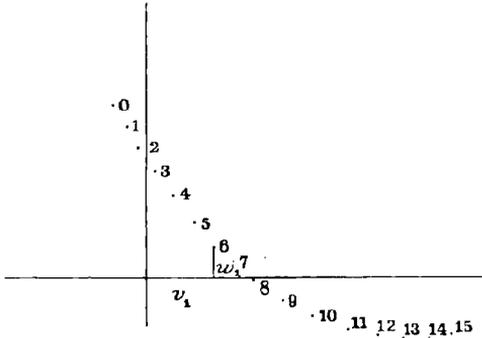


Fig. 4.



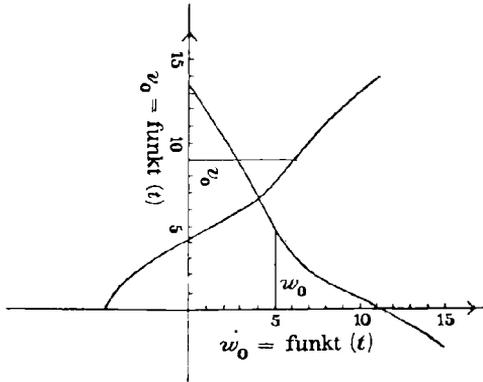
wegung befindlichen Punktes P besitze, die synchron und in gleichen Zeitabschnitten hergestellt sind. Ist das Objekt den Apparaten so nahe, dass seine Abstände von den Platten nicht sehr grosse Vielfache der Brennweiten der Objektive betragen, so werden auch die Bildweiten h_0 und h_1 für die verschiedenen Aufnahmen nicht konstant bleiben können. Bei den sehr rasch aufeinander folgenden Aufnahmen der Bilderreihen für die sogenannten kinematographischen Vorführungen vermeidet man diese Schwierigkeit, indem man Objektive mit verhältnismässig kleiner Brennweite verwendet und die Aufnahmen abbricht, sobald das Objekt nicht mehr die hinreichende Entfernung vom Apparat hat. Für die Lösung unseres Problems wollen wir demnach ebenfalls konstante Bildweiten annehmen.

Aus den beiden Aufnahmereihen greifen wir zunächst die Plattenkoordinaten (v, w) heraus, tragen sie in ein Axenkreuz ein und erhalten so zwei diskrete Punktreihen, welche den in gleichen Zeitabschnitten aufeinander folgenden Lagen (cf. Fig. 3 und 4) des Objektpunktes entsprechen.

Nun wähle man für das konstante Zeitintervall eine gewisse Längeneinheit und stelle die Koordinaten v und w einzeln als Funktionen der Zeit dar, wie die Figuren 5 und 6 zeigen.

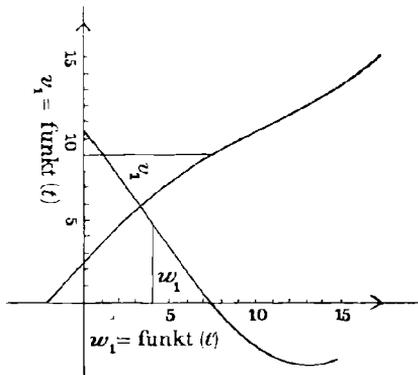
Bei stetigen Bewegungen — um die es sich hier allein handelt —, kann man durch die Endpunkte der Koordinaten v und w eine Kurve

Fig. 5.



legen, so dass die Tangenten in den einzelnen Punkten ohne weiteres die Grössen \dot{v} und \dot{w} darstellen. In den meisten Fällen wird es je-

Fig. 6.



doch vorzuziehen sein, die Differentialquotienten nach der Zeit t durch Interpolation aus einer bestimmten Ordinatenzahl numerisch zu finden und die gefundenen Werte von \dot{v} und \dot{w} in der Zeichnung darzustellen. Für drei Ordinaten v', v'', v''' , welche den Abscissen t', t'', t''' entsprechen, hat man die einfachen Interpolationsformeln ($t''' - t' = t''' - t'' - \Delta t$):

$$2\Delta t \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t'} = -3v' + 4v'' - v''',$$

$$2\Delta t \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t''} = -v' + v''',$$

$$2\Delta t \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t'''} = v' - 4v'' + 3v'''.$$

Die erste und dritte gelten für die Grenzpunkte, die zweite für die Zwischenpunkte. Hiernach sind die Figuren 7 und 8 aus den vorstehenden abgeleitet.

Fig. 7.

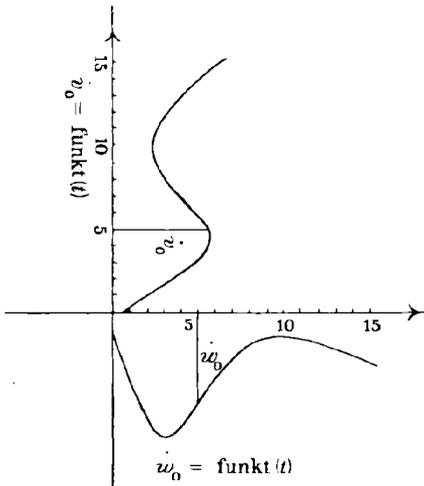
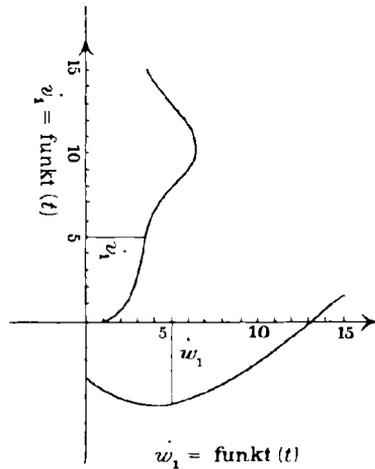


Fig. 8.



In den Gleichungen 13) sind jetzt die Grössen $\sigma \dot{A}$, $\sigma \dot{B}$, $\sigma \dot{C}$ für jeden Wert t des in Betracht kommenden Zeitintervalls bekannt. Setzen wir also

$$\sigma \dot{A} = a', \quad \sigma \dot{B} = b', \quad \sigma \dot{C} = c',$$

so ist die Gerade mit den laufenden Koordinaten \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , deren Gleichungen:

$$\frac{\dot{x} - a'}{A} = \frac{\dot{y} - b'}{B} = \frac{\dot{z} - c'}{C}$$

sind, für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Punktes P noch nicht ausreichend. Nehmen wir aber zwei solcher Geraden, die sich auf die Centren C^*_0 und C^*_1 beziehen:

$$16) \quad \begin{cases} \frac{\dot{x} - a'_0}{A_0} = \frac{\dot{y} - b'_0}{B_0} = \frac{\dot{z} - c'_0}{C_0} \\ \frac{\dot{x} - a'_1}{A_1} = \frac{\dot{y} - b'_1}{B_1} = \frac{\dot{z} - c'_1}{C_1} \end{cases}$$

so können die Komponenten \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} genau so gefunden werden, wie die Koordinaten x , y , z aus den Gleichungen 8), also auch nach dem in Figur 2 erläuterten graphischen Verfahren. Hiermit ist die Geschwindigkeit des Raumpunktes P für einen bestimmten Wert der Zeit gefunden, ohne dass wir seine vorangehenden und nachfolgenden Lagen im Raume zu kennen brauchen.

C. Die Beschleunigung.

7. Die Bestimmung der Beschleunigung des Raumpunktes bietet nach dem Vorstehenden nichts neues. Wir haben die Gleichungen 11) nochmals nach der Zeit zu differenzieren und die zweite Derivierte von σ nach der Zeit $\ddot{\sigma}$ zu eliminieren. So folgt aus den Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\sigma} A + 2\dot{\sigma} \dot{A} + \sigma \ddot{A} \\ \ddot{y} &= \ddot{\sigma} B + 2\dot{\sigma} \dot{B} + \sigma \ddot{B} \\ \ddot{z} &= \ddot{\sigma} C + 2\dot{\sigma} \dot{C} + \sigma \ddot{C}, \end{aligned}$$

indem wir

$$\begin{aligned} 2\dot{\sigma} \dot{A} + \sigma \ddot{A} &= a'' \\ 2\dot{\sigma} \dot{B} + \sigma \ddot{B} &= b'' \\ 2\dot{\sigma} \dot{C} + \sigma \ddot{C} &= c'' \end{aligned}$$

setzen, das System

$$17) \quad \frac{\ddot{x} - a''}{A} = \frac{\ddot{y} - b''}{B} = \frac{\ddot{z} - c''}{C},$$

welches wieder für die Orientierungen aus den Centren C^*_0 und C^*_1 gilt und dann zur Auffindung von \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} ausreicht.

Aus den Gleichungen 11) kennt man jetzt σ , denn durch Quadrieren und Addieren erhalten wir

$$\begin{aligned} (\dot{x} - \sigma \dot{A})^2 + (\dot{y} - \sigma \dot{B})^2 + (\dot{z} - \sigma \dot{C})^2 &= \dot{\sigma}^2 (A^2 + B^2 + C^2), \\ \text{oder} \\ 18) \quad \dot{\sigma} &= \frac{\sqrt{(\dot{x} - a')^2 + (\dot{y} - b')^2 + (\dot{z} - c')^2}}{\sqrt{h^2 + v^2 + w^2}}, \end{aligned}$$

sodass in der Gleichung 17) alle Grössen bekannt sind, sobald man die Beschleunigungskomponenten \ddot{v} und \ddot{w} aus den graphischen Darstellungen (Figur 7 und Figur 8) entwickelt hat.

Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmannschen Ausdehnungslehre.

Von

EMIL MÜLLER

in Königsberg i. Pr.

Schon H. Hankel hat in seinem Werke „Theorie der komplexen Zahlen“* an einigen Beispielen gezeigt, mit welcher Leichtigkeit sich Determinantensätze mit Hilfe der Grassmannschen Ausdehnungslehre ableiten lassen, und Herr V. Schlegel spricht geradezu die Behauptung aus, „dass die Lehre von den äusseren Produkten zur wissenschaftlichen Begründung der Determinantentheorie unentbehrlich sei.“** Auch von anderen Seiten wurde wiederholt auf die Vorteile hingewiesen, welche die Auffassung jeder Determinante als äusseres Produkt gewährt.*** Ich bin nun der Meinung, dass jedes Gebiet der Mathematik, in dem Determinanten zu häufiger Anwendung kommen, sich überhaupt kürzer und anschaulicher mit Benützung des Grassmannschen Kalküls darstellen lasse. Bisher sind nur erst wenige Versuche in dieser Richtung gemacht worden. Aus einer Durcharbeitung der verschiedenen mathematischen Disziplinen mit Benützung der Ausdehnungslehre zöge auch diese bedeutenden Nutzen; denn immer werden dabei Schwierigkeiten auftreten, zu deren Überwindung entweder neue Begriffsbildungen oder wenigstens Erweiterungen vorhandener Begriffe und Sätze erforderlich sein werden.

Arbeitet man z. B. die Lehre von den Determinanten im Sinne der Ausdehnungslehre durch, so stösst man bei der Ableitung der Sätze über Unterdeterminanten auf Schwierigkeiten. Während vorher stets nur Determinanten aus n^2 Elementen auftraten, die sich als äussere Produkte von n Grössen erster Stufe eines Hauptgebietes n^{ter} Stufe darstellen liessen, treten jetzt daneben noch Determinanten höherer Grade auf. Man bewegt sich also nicht mehr in einem Gebiete n^{ter} Stufe, sondern hat es mit Beziehungen zwischen diesem und Gebieten höherer Stufen zu thun. Ich zeige nun im nachfolgenden

* Leipzig 1867.

** Raumlehre II, Teil S. 126. Leipzig 1875.

*** Die darauf bezügliche Litteratur findet man vollständig angegeben in dem wertvollen Aufsätze von Herrn V. Schlegel: „Die Grassmannsche Ausdehnungslehre“, im 41. Jahrgange dieser Zeitschrift.

(§§ 2—4), wie man sich diese Erscheinung dadurch zurecht legen kann, dass man die Grössen r^{ter} Stufe eines Hauptgebietes n^{ter} Stufe als Grössen erster Stufe eines Hauptgebietes $\binom{n}{r}^{\text{ter}}$ Stufe betrachtet. Es ergeben sich dann leicht und übersichtlich jene Sylvesterschen Sätze über Unterdeterminanten, deren Beweis Herr Netto gegeben hat.* Hingegen gelang es mir noch nicht, die weiteren Sätze, welche Sylvester in dem Aufsätze: „Sur les déterminants composés“** anführt, zu beweisen. Im § 1 zeige ich, wie aus einem allgemeinen Satze über das Produkt mehrerer Determinanten sowohl der Laplacesche Determinantensatz, als auch dessen von Herrn Netto gegebenen Erweiterungen folgen, wenn man sich der Grassmannschen Methoden bedient.

Mit A_2 citiere ich im folgenden die Ausdehnungslehre von 1862, wie sie als zweiter Teil des ersten Bandes der „Gesammelten Werke“ Grassmanns vorliegt (herausgegeben von Fr. Engel, Leipzig 1896).

§ 1.

Satz über das Produkt mehrerer Determinanten. — Verallgemeinerter Laplacescher Determinantensatz.

In einem Hauptgebiete n^{ter} Stufe, dessen ursprüngliche Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n heissen mögen, seien a_1, a_2, \dots, a_n n von einander unabhängige Grössen erster Stufe;

$$\Delta = [a_1 a_2 \dots a_n]$$

sei ihr äusseres Produkt oder die aus ihren n^2 Ableitungszahlen gebildete Determinante und

$$B = [b_1 b_2 \dots b_r]$$

ein Produkt von r anderen Grössen erster Stufe desselben Gebietes. Bildet man nun aus a_1, a_2, \dots, a_n die $\binom{n}{r} = \mu$ möglichen äusseren Produkte r^{ter} Stufe A_1, A_2, \dots, A_μ , so lässt sich B aus ihnen ableiten, etwa

$$1) \quad B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_\mu A_\mu.$$

Um den Koeffizienten α_i zu bestimmen, multipliziere man diese Gleichung mit dem Produkte C_i der in A_i nicht vorkommenden Faktoren a_1, a_2, \dots, a_n , wobei diese in C_i so geordnet sein mögen, dass

$$[C_i A_i] = [a_1 a_2 \dots a_n] = \Delta$$

wird. Da $[C_i A_k] = 0$ für $i \geq k$ ist, so geht durch diese Multiplikation Gleichung 1) in:

* Journal für Mathematik Band 114.

** Journal für Mathematik Band 88. Den Satz auf S. 56 hat Sylvester nachher bekanntlich zurückgezogen. Vergl. die Bemerkungen Borchardts zu diesem Aufsätze im 89. Bande S. 82.

$$[C_i B] = \alpha_i [C_i A_i] = \alpha_i \Delta$$

über, woraus

$$\alpha_i = \frac{[C_i B]}{\Delta}$$

folgt. Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung 1) erhält sie die Form:

$$2) \quad \Delta B = \sum_1^{\mu} [C_i B] A_i^*$$

Bezeichnen jetzt

$a'_{1}, a'_{2}, \dots, a'_{n}; a''_{1}, a''_{2}, \dots, a''_{n}; \dots; a^{(p)}_{1}, a^{(p)}_{2}, \dots, a^{(p)}_{n}$
 p Gruppen von je n und $B', B'', \dots, B^{(p)}$ p Produkte von je
 $r', r'', \dots, r^{(p)}$

Größen erster Stufe, und setzt man

$$\begin{aligned} \Delta' &= [a'_{1} \ a'_{2} \ \dots \ a'_{n}] \\ \Delta'' &= [a''_{1} \ a''_{2} \ \dots \ a''_{n}] \\ &\vdots \\ \Delta^{(p)} &= [a^{(p)}_{1} \ a^{(p)}_{2} \ \dots \ a^{(p)}_{n}], \end{aligned}$$

so wird analog mit 2):

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta' B' &= \sum_1^{\mu} [C'_i B'] A'_i \\ \Delta'' B'' &= \sum_1^{\mu} [C''_j B''] A''_j \\ &\vdots \\ \Delta^{(p)} B^{(p)} &= \sum_1^{\mu} [C^{(p)}_k B^{(p)}] A^{(p)}_k \end{aligned} \right.$$

sein. Bezeichnet $B^{(p+1)}$ noch eine Grösse $r^{(p+1)}$ ter Stufe und ist:

$$r' + r'' + \dots + r^{(p+1)} = n,$$

dann stellt

$$[B' B'' \dots B^{(p+1)}] = \Delta$$

die aus den Ableitungszahlen der n Faktoren erster Stufe der Größen $B', \dots, B^{(p+1)}$ gebildete Determinante dar. Multipliziert man nun alle Gleichungen 3) miteinander und mit $B^{(p+1)}$, so folgt:

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta' \Delta'' \dots \Delta^{(p)} \Delta &= \Sigma [C'_i B'] [C''_j B''] \dots \\ &\quad [C^{(p)}_k B^{(p)}] [A'_i A''_j \dots A^{(p)}_k B^{(p+1)}], \end{aligned} \right.$$

wo die Summe über alle möglichen Kombinationen i, j, \dots, k auszudehnen ist und jede der Klammern, als äusseres Produkt von n Größen erster Stufe, eine Determinante darstellt. Dies giebt eine

* Diese Gleichung hätte auch unmittelbar aus dem Satze A_2 Nr. 113 gefolgert werden können.

Verallgemeinerung eines von Sylvester herstammenden Satzes, die man folgendermaßen aussprechen kann:

„Es seien $(p + 1)$ Determinanten n^{ter} Ordnung

$$\Delta', \Delta'', \dots, \Delta^{(p)}, \Delta$$

gegeben und die letzte in $p + 1$ Gruppen von je

$$r', r'', \dots, r^{(p)}, r^{(p+1)}$$

Reihen zerlegt gedacht; vereinigt man nun die p ersten dieser Gruppen bezw. mit $n - r', n - r'', \dots, n - r^{(p)}$ Reihen von $\Delta', \Delta'', \dots, \Delta^{(p)}$ zu je einer, die übrigbleibenden Reihen dieser Determinanten aber mit der letzten Gruppe von Δ zu einer Determinante und multipliziert sie mit einander, so ist die Summe aller möglichen auf diese Weise gebildeten Produkte gleich dem Produkte der $(p + 1)$ gegebenen Determinanten.“

Wendet man diesen Satz auf zwei Determinanten an, so erhält man den bekannten Sylvesterschen Satz.*

Setzt man in Gleichung 4):

$$\Delta' = \Delta'' = \dots = \Delta^{(p)} = [e_1 e_2 \dots e_n] = 1,$$

so kann man bei den Grössen C_i und A_i die oberen Indices weglassen und die Gleichung in der Form:

$$5) \quad \Delta = \Sigma [C_i B'] [C_j B''] \dots [C_k B^{(p)}] [A_i A_j \dots A_k B^{(p+1)}]$$

schreiben. Da die Grössen C und A jetzt Produkte von Einheiten sind, so sind die Produkte

$$[C_i B'], [C_j B''], \dots, [C_k B^{(p)}], [A_i A_j \dots A_k B^{(p+1)}]$$

Unterdeterminanten von Δ , die aus je $r', r'', \dots, r^{(p)}, r^{(p+1)}$ Reihen entnommen sind. Das letzte Produkt hat aber nur dann einen von Null verschiedenen Wert, wenn in $[A_i A_j \dots A_k]$ keine der Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n zweimal vorkommt oder, was dasselbe sagt, wenn die Unterdeterminanten $[C_i B'], [C_j B''], \dots, [C_k B^{(p)}]$

lauter verschiedenen Kolonnengruppen entnommen sind. Gleichung 5) spricht daher den Laplaceschen Determinantensatz aus.

Setzt man jetzt in Gleichung 4) $n + m$ statt n , also

$$\Delta = [B' B'' \dots B^{(p+1)}] = [b_1 b_2 \dots b_{n+m}],$$

ferner

$$\Delta' = \Delta'' = \dots = \Delta^{(p)} = [e_1 e_2 \dots e_n b_{n+1} \dots b_{n+m}],$$

dann erhält sie die Form:

$$6) \quad \Delta'^p \Delta = \Sigma [C_i B'] [C_j B''] \dots [C_k B^{(p)}] [A_i A_j \dots A_k B^{(p+1)}],$$

worin C_i, C_j, \dots, C_k sowie $[A_i A_j \dots A_k]$ Produkte der Grössen

bezeichnen. $e_1, e_2, \dots, e_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m}$

* Vergl. Baltzer, „Determinanten“, 5. Aufl. § 4, 4. Leipzig 1881.

Wählt man ferner

$$B^{(p+1)} = [b_{n+1} b_{n+2} \dots b_{n+m}],$$

so muss, um auf der rechten Seite der Gleichung 6) von Null verschiedene Summanden zu erhalten,

$$[A_i A_j \dots A_k] = [e_1 e_2 \dots e_n],$$

demnach

$$[A_i A_j \dots A_k B^{(p+1)}] = \Delta'$$

sein. Gleichung 6) kann also in der Form:

$$6^*) \quad \Delta'^{p-1} \Delta - \Sigma [C_i B'] [C_j B''] \dots [C_k B^{(p)}]$$

geschrieben werden.

Um das hierin enthaltene Gesetz leichter zu erkennen, nehme man eine einfache Umformung vor. Nach der Definition der Grösse C_i z. B. soll $[C_i A_i] = \Delta'$ sein; da A_i bloss r' der Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n enthält, muss C_i ausser $n - r'$ dieser Einheiten alle Grössen

$$b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}$$

als Faktoren besitzen. Denkt man sich nun die in C_i enthaltenen Einheiten in einer solchen Reihenfolge zu einem äusseren Produkte E_i vereinigt, dass

$$[E_i A_i] = [e_1 e_2 \dots e_n]$$

wird, so muss, wegen $[C_i A_i] = \Delta' = [e_1 e_2 \dots e_n b_{n+1} \dots b_{n+m}]$,

$$[C_i A_i] = [E_i A_i b_{n+1} \dots b_{n+m}]$$

sein. Das Produkt $[C_i A_i]$ ändert demnach sein Vorzeichen nicht, wenn man A_i über die Faktoren b_{n+1}, \dots, b_{n+m} hinwegschreibt und statt der in C_i vorkommenden Einheiten E_i als ersten Faktor setzt. Da B' dieselbe Anzahl Faktoren wie A_i besitzt, so wird auch

$$[C_i B'] = [E_i B' b_{n+1} \dots b_{n+m}]$$

sein. Dasselbe gilt für alle anderen Produkte

$$[C_j B''], \dots, [C_k B^{(p)}].$$

Gleichung 6*) kann deshalb in der Form:

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta'^{p-1} \Delta = \Sigma [E_i B' \cdot b_{n+1} \dots b_{n+m}] [E_j B'' \cdot b_{n+1} \dots b_{n+m}] \dots \\ \quad [E_k B^{(p)} \cdot b_{n+1} \dots b_{n+m}] \end{array} \right.$$

geschrieben werden.

Wären b_1, b_2, \dots, b_n nur aus n Einheiten abgeleitet, also

$$\Delta = [b_1 b_2 \dots b_n] = [B' B'' \dots B^{(p)}]$$

eine Determinante n^{ter} Ordnung, so gäbe ihre Entwicklung nach dem Laplaceschen Satze [vergl Gleichung 5)],

$$\Delta = \Sigma [E_i B'] [E_j B''] \dots [E_k B^{(p)}].$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung 7), so kann man den von Herrn Netto gefundenen Satz ablesen:

„Aus jeder durch die Laplacesche Zerlegung gegebenen Formel für Determinanten n^{ter} Ordnung, bei welcher die Elemente der Produktsummen durch Subdeterminanten ausgedrückt sind, kann man eine ähnliche Formel für die Determinante $(n + m)^{\text{ter}}$ Ordnung herleiten, indem man der Determinante Δ den Faktor Δ'^{p-1} hinzufügt. Δ' bezeichnet dabei diejenige Determinante, welche aus Δ durch Unterdrückung der n ersten Reihen und Kolonnen hervorgeht, und p gibt die Zahl der Faktoren an, welche jedes einzelne Glied der Produktensumme enthält.“*

§ 2.

Die Grössen r^{ter} Stufe eines Gebietes g als Grössen erster Stufe eines Gebietes G .

Die aus den ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n eines Gebietes n^{ter} Stufe gebildeten $\binom{n}{r} - \mu$ äusseren Produkte r^{ter} Stufe sollen in irgend einer Reihenfolge mit

$$E_1^{(r)}, E_2^{(r)}, \dots, E_i^{(r)}, \dots, E_\mu^{(r)}$$

bezeichnet und die *Einheiten r^{ter} Stufe* genannt werden. Sind

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

wieder irgend n Grössen erster Stufe desselben Gebietes, das g heissen möge, so sollen deren äussere Produkte r^{ter} Stufe mit

$$A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \dots, A_i^{(r)}, \dots, A_\mu^{(r)}$$

derart bezeichnet werden, dass $A_i^{(r)}$ in $E_i^{(r)}$ übergeht, wenn man jeden Faktor a_k durch e_k ersetzt. Bezeichne ferner $E_k^{(n-r)}$ die $E_k^{(r)}$ ergänzende Einheit $(n - r)^{\text{ter}}$ Stufe, d. h. das äussere Produkt aller in $E_k^{(r)}$ nicht vorkommenden Einheiten und zwar in solcher Reihenfolge genommen, dass

$$[E_k^{(r)} E_k^{(n-r)}] = 1$$

ist. Dann lässt sich jede Grösse $A_i^{(r)}$ durch die Grössen $E_k^{(r)}$ ebenso ausdrücken, wie sich in Gleichung 2) die Grösse B durch die Grössen A_i ausdrücken liess, nämlich:

$$8) \quad A_i^{(r)} = \sum_1^\mu [A_i^{(r)} E_k^{(n-r)}] E_k^{(r)}.$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Koeffizienten

$$[A_i^{(r)} E_k^{(n-r)}]$$

sind die aus r bestimmten Reihen von $\Delta - [a_1 a_2 \dots a_n]$ entnommenen Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung. Ist nämlich:

* Netto a. a. O. S. 348.

$$A_i^{(r)} = [a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}]$$

und

$$E_k^{(n-r)} = [e_{k_1} e_{k_2} \dots e_{k_{n-r}}],$$

so stellt $[A_i^{(r)} E_k^{(n-r)}]$ jene Unterdeterminante von Δ dar, die aus den Reihen i_1, i_2, \dots, i_r durch Unterdrückung der Kolonnen

$$k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$$

hervorgeht.

Zu einer einfachen und den Methoden der Ausdehnungslehre entsprechenden Ableitung der auf die Unterdeterminanten von Δ bezüglichen Sätze gelangt man, wenn man die Einheiten r^{ter} Stufe $E_k^{(r)}$ des Gebietes g als ursprüngliche Einheiten eines neuen Gebietes G von μ^{ter} Stufe betrachtet. Dies ist erlaubt, da die Grössen $E_k^{(r)}$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Die Produkte $A_i^{(r)}$, als aus diesen Einheiten abgeleitet, gehören dann G an. Die auf das Gebiet G bezüglichen äusseren Produkte sollen zum Unterschiede von den früheren, auf das Gebiet g bezüglichen, durch geschweifte Klammern $\{ \}$ gekennzeichnet werden. Setzt man nun das äussere Produkt der μ Einheiten $E_k^{(r)}$ gleich eins, also

$$9) \quad \{ E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_\mu^{(r)} \} = 1,$$

dann ist jedes äussere Produkt von μ Grössen erster Stufe des Gebietes G gleich der aus ihren Ableitungszahlen gebildeten Determinante μ^{ter} Ordnung. Der Gleichung 8) zufolge ist insbesondere

$$10) \quad \Delta^{(r)} = \{ A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)} \} = [A_i^{(r)} E^{(n-r)}], \quad i, k = 1, 2, \dots, \mu$$

d.h. gleich der aus den Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung von Δ gebildeten Determinante μ^{ter} Ordnung.

Das Produkt
$$\Delta^{(r)} = \{ A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)} \}$$

lässt sich aber noch in anderer Form darstellen. Setzt man in Δ statt a_i die Grösse

$$b = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n$$

und bezeichnet die aus

$$a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n$$

gebildeten äusseren Produkte r^{ter} Stufe den früheren Produkten entsprechend mit $A_1^{(r)'}, A_2^{(r)'}, \dots, A_\mu^{(r)'}$, so enthalten

$$\binom{n-1}{r-1} = \tau$$

dieser Grössen das Element b . Ist $A_k^{(r)'}$ eine solche Grösse, und ersetzt man darin b durch obigen Ausdruck, so zerfällt $A_k^{(r)'}$ in eine Vielfachensumme von Grössen $A_j^{(r)'}$, worunter sich auch $A_k^{(r)'}$ befindet und zwar mit dem Koeffizienten b_j versehen.

Bildet man daher das Produkt

$$\{A_1^{(r)'} A_2^{(r)'} \dots A_\mu^{(r)'}\},$$

so können von $A_k^{(r)'}$ alle Glieder $A_j^{(r)}$, ausgenommen $A_k^{(r)}$, weggelassen werden, da sie als andere Faktoren vorkommen. Statt jedes Faktors $A_k^{(r)'}$, der b enthält, ist demnach in dem letzten Produkte $b_i A_k^{(r)}$ zu setzen. Da diejenigen Faktoren $A_j^{(r)'}$, welche b nicht enthalten, ohnedies mit den $A_j^{(r)}$ identisch sind, so muss

$$\{A_1^{(r)'} A_2^{(r)'} \dots A_\mu^{(r)'}\} = b_i^\tau \{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}$$

sein. Nun folgt aber aus der Gleichung für b , indem man mit

$$[a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n]$$

multipliziert, $[a_1 a_2 \dots a_n] b_i = [a_1 a_2 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n]$

oder, wenn man die Determinante rechts mit Δ' bezeichnet,

$$b_i = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Benutzt man dies, so lässt sich die obige Gleichung in der Form:

$$11) \quad \frac{\{A_1^{(r)'} A_2^{(r)'} \dots A_\mu^{(r)'}\}}{\Delta'} = \frac{\{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}}{\Delta^\tau}$$

schreiben. Daraus schliesst man, dass diese Gleichung auch dann besteht, wenn alle Grössen a_i durch beliebige, aus ihnen abgeleitete Grössen ersetzt werden und Δ' das äussere Produkt dieser neuen Grössen bezeichnet oder, anders ausgedrückt, dass

$$\frac{\{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}}{\Delta^\tau}$$

gegenüber den linearen Transformationen des Gebietes g invariant ist. Setzt man nun in diesem Ausdruck insbesondere statt der Grössen a_i die Einheiten e_i , so wird er wegen $[e_1 e_2 \dots e_n] = 1$ und Gleichung 9) gleich 1. Gleichung 11) kann also auch in der Form:

$$12) \quad \{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\} = \Delta^\tau$$

geschrieben werden, wodurch ein zweiter Ausdruck für das Produkt der Grössen $A_i^{(r)}$ gefunden ist.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 10) und 12), so folgt

$$13) \quad \Delta^{(r)} = \Delta^{\binom{n-1}{r-1}}.$$

Diese Gleichung spricht den von Sylvester* gefundenen Satz aus, dass die aus den Unterdeterminanten r 'ter Ordnung einer Determinante n 'ter Ordnung Δ gebildete Determinante die $\binom{n-1}{r-1}$ te Potenz von Δ ist.

* Phil. Mag. 1851 und Journal für Mathematik Bd. 88 S. 51. — Vergl. auch Baltzer, Determinanten, § 7, 6.

§ 3.

Die Grössen $(\mu - 1)$ ter Stufe des Gebietes G .

Nach dem allgemeinen Begriffe der Ergänzung (vergl. A_2 , Nr. 89) ist in dem Gebiete G , zufolge Gleichung 9), unter $\{E_i^{(r)}\}$ das Produkt aller Einheiten r ter Stufe mit Ausnahme von $E_i^{(r)}$ zu verstehen und zwar die Faktoren in solcher Reihenfolge genommen, dass

$$\{E_i^{(r)} | E_i^{(r)}\} = 1$$

wird. Aus dieser Festsetzung ergibt sich unmittelbar, dass

$$\{E_i^{(r)} | E_k^{(r)}\} = 0$$

für alle von i verschiedenen Indices k sein muss. Nun war im Gebiete g

$$[E_i^{(r)} E_i^{(n-r)}] = 1,$$

$$[E_i^{(r)} E_k^{(n-r)}] = 0.$$

Man gelangt daher zu demselben Zahlwert, ob man das Produkt

$$[A^{(r)} B^{(n-r)}]$$

zweier Grössen r ter und $(n - r)$ ter Stufe im Gebiete g bildet, oder ob man $A^{(r)}$ als Grösse erster Stufe und $B^{(n-r)}$, indem man

$$14) \quad E_i^{(n-r)} = E_i^{(r)}$$

setzt, als Grösse $(\mu - 1)$ ter Stufe des Gebietes G ansieht und das auf dieses Gebiet bezügliche Produkt

$$\{A^{(r)} B^{(n-r)}\}$$

bildet. Man kann mithin jede Grösse $(n - r)$ ter Stufe des Gebietes g durch Anwendung von Gleichung 14) als Grösse $(\mu - 1)$ ter Stufe des Gebietes G betrachten.

Daraus folgt insbesondere, dass jede Unterdeterminante

$$[A_i^{(r)} E_k^{(n-r)}]$$

von Δ stets in der Form

$$\{A_i^{(r)} | E_k^{(r)}\}$$

geschrieben werden darf.

Von jetzt an sollen die Grössen $A_i^{(n-r)}$, wenn sie mit anderen durch geschweifte Klammern umschlossen sind, stets, der Gleichung 14) entsprechend, als Grössen $(\mu - 1)$ ter Stufe des Gebietes G betrachtet werden.

$$\text{Da} \quad [E_i^{(r)} E_i^{(n-r)}] = [e_1 e_2 \dots e_n]$$

und

$$[E_i^{(r)} E_k^{(n-r)}] = 0$$

ist, so wird, der Definition der Grössen $A_i^{(r)}$ und $A_i^{(n-r)}$ in § 2 entsprechend:

und $[A_i^{(r)} A_i^{(n-r)}] = [\alpha_1 a_2 \dots a_n] = \Delta$

oder $[A_i^{(r)} A_k^{(n-r)}] = 0$

15)
$$\begin{cases} \{A_i^{(r)} A_i^{(n-r)}\} = \Delta \\ \{A_i^{(r)} A_k^{(n-r)}\} = 0 \quad \text{für } i > k \end{cases}$$

sein. Die letzte Gleichung sagt aus, dass die $\mu - 1$ von $A_k^{(r)}$ verschiedenen Grössen $A_i^{(r)}$ dem durch $A_k^{(n-r)}$ bestimmten Gebiete $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe angehören oder (A_2 , Nr. 84), dass $A_k^{(n-r)}$ dem Produkte der $\mu - 1$ Grössen $A_i^{(r)}$ kongruent ist, also eine Gleichung von der Form:

$$A_i^{(n-r)} = \alpha \{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_{i-1}^{(r)} A_{i+1}^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}$$

besteht. Zur Bestimmung des Koeffizienten α multipliziere man diese Gleichung mit $A_i^{(r)}$. Man erhält dann

$$\{A_i^{(r)} A_i^{(n-r)}\} = \alpha (-1)^{i-1} \{A_1^{(r)} A_2^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}$$

oder mit Beachtung der ersten Gleichung 15) und der Gleichung 12):

$$\alpha = \frac{(-1)^{i-1}}{\Delta^{\tau-1}}$$

Die Gleichung für $A_i^{(n-r)}$ lautet daher

16)
$$A_i^{(n-r)} = \frac{(-1)^{i-1}}{\Delta^{\tau-1}} \{A_1^{(r)} \dots A_{i-1}^{(r)} A_{i+1}^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\}.$$

Aus ihr erhält man unmittelbar einen Determinantensatz, wenn man sie etwa mit $E_k^{(r)}$ multipliziert; es ist dann

$$[E_k^{(r)} A_i^{(n-r)}] \Delta^{\tau-1} = \{A_1^{(r)} \dots A_{i-1}^{(r)} E_k^{(r)} A_{i+1}^{(r)} \dots A_\mu^{(r)}\},$$

und diese Gleichung spricht den Satz aus:

„Die mit $\Delta^{\tau-1}$ multiplizierte Unterdeterminante $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung von Δ , die durch Weglassung der i^{ten} Zeilen- und k^{ten} Kolonnenkombination entsteht, ist gleich derjenigen Unterdeterminante von $\Delta^{(r)}$, die durch Weglassung der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne entsteht.“

Dieser Satz ist nur ein Spezialfall eines allgemeineren, der sich auf ganz dieselbe Art wie dieser ableiten lässt. Bezeichnet man die Zahlen $1, 2, \dots, \mu$ in irgend einer anderen Reihenfolge mit i_1, i_2, \dots, i_μ , so schliesst man aus Gleichung 16) [vergl. A_2 , Nr. 112], dass das äussere Produkt von irgend k Grössen $A_{i_j}^{(n-r)}$, z. B.:

$$\{A_{i_1}^{(n-r)} A_{i_2}^{(n-r)} \dots A_{i_k}^{(n-r)}\}$$

kongruent ist dem Produkte

$$\{A_{i_{k+1}}^{(r)} A_{i_{k+2}}^{(r)} \dots A_{i_\mu}^{(r)}\}$$

aus denjenigen $(\mu - k)$ Grössen $A_i^{(r)}$, deren Indices in dem obigen Produkte nicht vorkommen, dass also eine Gleichung von der Form

$$17) \quad \left\{ A_{i_1}^{(n-r)} A_{i_2}^{(n-r)} \dots A_{i_k}^{(n-r)} \right\} = \alpha \left\{ A_{i_{k+1}}^{(r)} A_{i_{k+2}}^{(r)} \dots A_{i_\mu}^{(r)} \right\}$$

besteht. Zur Ermittlung von α multipliziert man diese Gleichung mit

$$\left\{ A_{i_1}^{(r)} A_{i_2}^{(r)} \dots A_{i_k}^{(r)} \right\}.$$

Dann folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ A_{i_1}^{(r)} A_{i_2}^{(r)} \dots A_{i_k}^{(r)} \cdot A_{i_1}^{(n-r)} A_{i_2}^{(n-r)} \dots A_{i_k}^{(n-r)} \right\} \\ = \alpha \left\{ A_{i_1}^{(r)} A_{i_2}^{(r)} \dots A_{i_\mu}^{(r)} \right\} = \alpha \Delta^r, \end{array} \right.$$

wenn die Reihenfolge von i_1, i_2, \dots, i_μ so gewählt ist, dass sie aus $1, 2, \dots, \mu$ durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen hervorgeht, oder, da das Produkt links zufolge A_2 , Nr. 175*:

$$\left\{ A_{i_1}^{(r)} A_{i_1}^{(n-r)} \right\} \left\{ A_{i_2}^{(r)} A_{i_2}^{(n-r)} \right\} \dots \left\{ A_{i_k}^{(r)} A_{i_k}^{(n-r)} \right\} = \Delta^k$$

ist,

$$\alpha = \frac{1}{\Delta^{r-k}}.$$

Den allgemeineren Determinantensatz erhält man jetzt aus Gleichung 17), indem man sie mit dem Produkte von irgend k Einheiten r ter Stufe, z. B.:

$$\left\{ E_{j_1}^{(r)} E_{j_2}^{(r)} \dots E_{j_k}^{(r)} \right\}$$

multipliziert. Sie geht dadurch über in

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ E_{j_1}^{(r)} E_{j_2}^{(r)} \dots E_{j_k}^{(r)} \cdot A_{i_1}^{(n-r)} A_{i_2}^{(n-r)} \dots A_{i_k}^{(n-r)} \right\} \\ = \frac{1}{\Delta^{r-k}} \left\{ E_{j_1}^{(r)} E_{j_2}^{(r)} \dots E_{j_k}^{(r)} A_{i_{k+1}}^{(r)} \dots A_{i_\mu}^{(r)} \right\}. \end{array} \right.$$

Da die linke Seite diejenige Unterdeterminante von

$$\Delta^{(n-r)} = \left\{ A_1^{(n-r)} A_2^{(n-r)} \dots A_\mu^{(n-r)} \right\}$$

darstellt, die aus den Zeilen i_1, i_2, \dots, i_k und den Kolonnen j_1, j_2, \dots, j_k entnommen ist, das Produkt rechts hingegen jene Unterdeterminante von $\Delta^{(r)}$, die durch Unterdrückung der Zeilen i_1, i_2, \dots, i_k und der Kolonnen j_1, j_2, \dots, j_k hervorgeht, so spricht sie den Frankeschen Satz aus:

„Eine Unterdeterminante k ten Grades von $\Delta^{(n-r)}$ hat zur Adjunkte der entsprechenden Unterdeterminante von $\Delta^{(r)}$ das Verhältnis $\Delta^k : \Delta^r$.“**

* Diesen Satz so aufgefasst, wie ich ihn in dem Aufsätze „Anwendung der Grassmannschen Methoden etc.“, Journal für Mathematik Bd. 115, S. 236, ausgesprochen habe.

** Siehe Baltzer, § 7, 7.

§ 4.

Beweis des Sylvesterschen Satzes.

In einem Hauptgebiete g von $(m+n)^{\text{ter}}$ Stufe seien e_1, e_2, \dots, e_{m+n} wieder die ursprünglichen Einheiten, a_1, a_2, \dots, a_{m+n} ($m+n$) von einander unabhängige Grössen erster Stufe:

$$\Delta = [a_1 a_2 \dots a_{m+n}]$$

und

$$\Delta_1 = [e_1 e_2 \dots e_m a_{m+1} \dots a_{m+n}];$$

dann ist Δ_1 die zu den m ersten Reihen und Zeilen gehörige Unterdeterminante von Δ .

Bildet man ferner aus a_1, a_2, \dots, a_m die äusseren Produkte $(m-r)^{\text{ter}}$ Stufe und multipliziert jedes mit

$$[a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+n}],$$

so erhält man $\binom{m}{m-r} = \binom{m}{r}$ Grössen von der Stufenzahl

$$s = m + n - r,$$

die mit

$$A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_{\binom{m}{r}}^{(s)}$$

bezeichnet werden sollen.

Betrachtet man jetzt wie in § 2 die Grössen r^{ter} Stufe des Gebietes g als Grössen erster Stufe eines Gebietes G und setzt

$$A = \{ A_1^{(s)} A_2^{(s)} \dots A_{\binom{m}{r}}^{(s)} \},$$

so kann man ähnlich wie dort zeigen, dass

$$\frac{A}{\Delta \binom{m-r}{r}}$$

ungeändert bleibt, wenn die Grössen a_1, a_2, \dots, a_m durch andere Grössen erster Stufe des Gebietes g ersetzt werden.

Setzt man dafür insbesondere die Einheiten e_1, e_2, \dots, e_m und nennt

$$B, B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \dots, B_{\binom{m}{r}}^{(s)}$$

die durch diese Substitution aus

$$A, A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_{\binom{m}{r}}^{(s)}$$

hervorgehenden Grössen, so besteht demnach die Gleichung:

$$(18) \quad \frac{A}{\Delta \binom{m-r}{r}} = \frac{B}{\Delta_1 \binom{m-r}{r}}.$$

Bezeichnen nun noch

$$E_1^{(r)}, E_2^{(r)}, \dots, E_{\binom{m}{r}}^{(r)}$$

die aus e_1, e_2, \dots, e_m gebildeten äusseren Produkte r^{ter} Stufe derart, dass $E_i^{(r)}$ alle in $B_i^{(s)}$ nicht auftretenden Einheiten und zwar in solcher Reihenfolge enthält, dass:

$$[E_i^{(r)} B_i^{(s)}] = \Delta_1$$

oder nach § 3:

$$\{E_i^{(r)} B_i^{(s)}\} = \Delta_1$$

ist, so folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} \{E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_{(r)}^{(r)} \cdot B\} = \{E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_{(r)}^{(r)} \cdot B_1^{(s)} B_2^{(s)} \dots B_{(m)}^{(s)}\} \\ \quad - \{E_1^{(r)} B_1^{(s)}\} \{E_2^{(r)} B_2^{(s)}\} \dots \{E_{(r)}^{(r)} B_{(r)}^{(s)}\} = \Delta_1^{(m)}. \end{array} \right.$$

Gleichung 18) geht also durch Multiplikation mit

$$\{E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_{(r)}^{(r)}\}$$

über in

$$\frac{1}{\Delta_1^{(m-r-1)}} \{E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_{(r)}^{(r)} \cdot A_1^{(s)} A_2^{(s)} \dots A_{(m)}^{(s)}\} = \frac{\Delta_1^{(m)}}{\Delta_1^{(m-r-1)}} = \Delta_1^{(m-1)},$$

oder

$$19) \quad \{E_1^{(r)} E_2^{(r)} \dots E_{(r)}^{(r)} \cdot A_1^{(s)} A_2^{(s)} \dots A_{(m)}^{(s)}\} = \Delta_1^{(m-1)} \Delta_1^{(m-1)}.$$

Entwickelt man das Produkt linker Hand nach dem früher angeführten Satze A_2 , Nr. 175 in die Determinante $\binom{m}{r}^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\left| \{E_i^{(r)} A_k^{(s)}\} \right|,$$

so sind deren Glieder jene Unterdeterminanten von Δ , die zu den Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung eines aus Δ herausgeschnittenen Quadrates von m^2 Elementen gehören. Gleichung 19) stimmt daher mit der von Sylvester, Journal für Mathematik Bd. 88 S. 52, angeführten, sowie mit der von Herrn Netto a. a. O. bewiesenen letzten Gleichung auf S. 352 überein.

Mit der Ableitung der Sylvesterschen Sätze mittels der Ausdehnungslehre hat sich auch Herr v. Escherich gelegentlich beschäftigt, aber bisher meines Wissens nichts darüber veröffentlicht. Vergl. diesbezüglich die Anmerkung zu seinem Aufsätze: „Die Determinanten höheren Ranges“, Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Klasse, Bd. 43, Wien 1882.

Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Prof. E. CZUBER

in Wien.

Die folgenden Ausführungen betreffen eine bisher nicht bemerkte Eigenschaft des Systems der Linienelemente und der Integralkurven einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, welche ausser dem theoretischen Interesse in manchen Fällen auch ein Mittel darbietet, einzelne Elemente zu konstruieren und den Lauf einer einzelnen Integralkurve mit genügendem Grade der Genauigkeit festzustellen.

1. Es sei

$$1) \quad y' + Py = Q$$

die vorgelegte Gleichung, unter P, Q eindeutige Funktionen von x verstanden.

Sind $x_1 y'_1, x_2 y'_2$ zwei Linienelemente, welche der Gleichung genügen und in der Abscisse x ihrer Punkte übereinstimmen, so gelten die Gleichungen:

$$\alpha) \quad \begin{cases} y'_1 + P y_1 = Q \\ y'_2 + P y_2 = Q, \end{cases}$$

durch deren Subtraktion sich ergibt:

$$2) \quad y'_1 - y'_2 + P(y_1 - y_2) = 0.$$

Ist nun $\xi | \eta$ der Punkt, in welchem sich die Geraden dieser beiden Elemente schneiden, so hat man die Beziehungen:

$$\beta) \quad \begin{cases} \frac{y_1 - \eta}{x - \xi} = y'_1 \\ \frac{y_2 - \eta}{x - \xi} = y'_2, \end{cases}$$

welche mittels Subtraktion zu der weiteren führen:

$$3) \quad \frac{y_1 - y_2}{x - \xi} = y'_1 - y'_2.$$

Die Verbindung von 2) mit 3) aber liefert:

$$4) \quad \xi = x + \frac{1}{P}.$$

Aus β) und 4) folgert man

$$\begin{aligned} \text{andererseits ist vermöge } \alpha): \quad & y'_1 = -P(y_1 - \eta), \\ & y'_1 = -Py_1 + Q; \end{aligned}$$

die Vergleichung der rechten Seiten ergibt:

$$5) \quad \eta = \frac{Q}{P}.$$

In Zusammenfassung der Resultate: Die Geraden der beiden Elemente schneiden sich in dem Punkte

$$6) \quad \begin{cases} \xi = x + \frac{1}{P}, \\ \eta = \frac{Q}{P}, \end{cases}$$

der nur von dem gemeinsamen x abhängt. Dies führt zu dem Satze: Alle Linienelemente der Gleichung 1), deren Punkte auf einer zur y -Axe parallelen Geraden liegen, strahlen von einem Punkte aus.

Mit veränderlich gedachtem x repräsentieren die Gleichungen 6) eine Kurve S , deren Bedeutung für die Differentialgleichung sich zunächst in dem Satze ausdrückt: Die Linienelemente einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung strahlen von den Punkten einer gewissen Kurve S aus und zwar so, dass die Träger der von einem Punkte ausstrahlenden Elemente auf einer der y -Axe parallelen Geraden liegen.

Für das System der Integralkurven einer solchen Gleichung ergibt sich daraus die folgende Eigenschaft: Schneidet man die Integralkurven von 1) durch eine der y -Axe parallele Gerade, so laufen die in den Schnittpunkten an die Kurven geführten Tangenten durch einen Punkt.

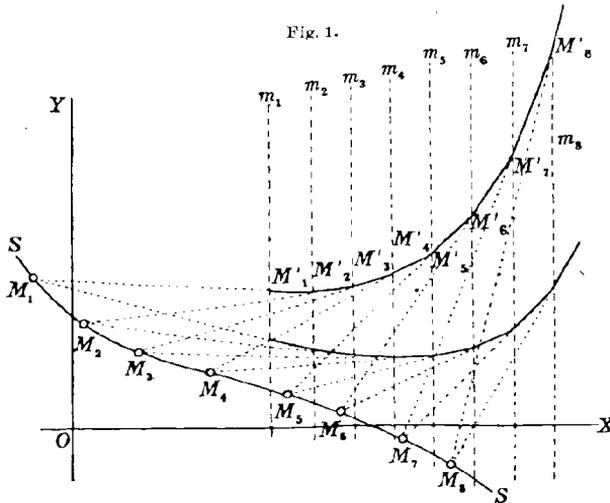
2. Hiernach gehört zu jeder Gleichung der Form 1) eine Kurve S , und zwischen den zur y -Axe parallelen Geraden und den Punkten dieser Kurve besteht eine eindeutige Korrespondenz, die im allgemeinen durch die Gleichung 4) geregelt wird.

Von diesem Zusammenhange kann der folgende konstruktive Gebrauch gemacht werden.

Ist ein Punkt der Ebene gegeben und soll das zu ihm gehörige Linienelement verzeichnet werden, so bestimme man den zu der Abscisse x dieses Punktes gehörigen Punkt von S und verbinde ihn mit dem gegebenen.

Um den Verlauf einer Integralkurve zu verfolgen, konstruiere man eine genügend dichte und ausgebreitete Schar von Parallelen zur y -Axe und bestimme die korrespondierenden Punkte auf S . Die Parallelen mögen in der Reihenfolge von links nach rechts mit m_1, m_2, m_3, \dots , die zugehörigen Punkte auf S mit M_1, M_2, M_3, \dots bezeichnet werden. Man verbinde einen beliebigen Punkt M'_1 von m_1 mit M_1 und führe diese Gerade bis an m_2 ; verbinde den so erhaltenen Punkt M'_2 mit M_2 und führe diese Gerade bis an m_3 ; den so erhaltenen Punkt M'_3 verbinde man mit M_3 u. s. w. Das Polygon $M'_1 M'_2 M'_3 \dots$ bezeichnet um so genauer den Lauf einer Integralkurve, je enger m_1, m_2, m_3, \dots beisammen liegen (Fig. 1).

Es braucht nicht erklärt zu werden, wie man vorzugehen hätte, um die durch einen gegebenen Punkt verlaufende Integralkurve zu konstruieren.



3. Während zu einer vorgelegten Gleichung 1) nur eine bestimmte Kurve S gehört, giebt es zu einer gegebenen Kurve S unendlich viele ihr entsprechende Differentialgleichungen.

Aus der Gleichung

$$7) \quad \eta = f(\xi)$$

der Kurve S entspringt nämlich eine Gleichung zwischen den Koeffizienten der zugehörigen Differentialgleichung:

$$\frac{Q}{P} = f\left(x + \frac{1}{P}\right);$$

die letztere lautet also

$$8) \quad y' + Py = Pf\left(x + \frac{1}{P}\right);$$

und da für P jede eindeutige Funktion genommen werden kann, so gehören zu 7) unbegrenzt viele Differentialgleichungen.

4. Von besonderem Interesse sind diejenigen Differentialgleichungen, für welche die Kurve S zu einer Geraden wird. Zunächst sei es eine zu den Axen geneigte Gerade und

$$9) \quad \eta = \alpha \xi + \beta$$

ihre Gleichung; dann ist vermöge 8):

$$y' + Py = P \left[\alpha \left(x + \frac{1}{P} \right) + \beta \right]$$

oder

$$10) \quad y' + P(y - \alpha x - \beta) = \alpha$$

die zugeordnete Differentialgleichung.

Die Integralkurven dieser Gleichung sind affin in Bezug auf die Gerade 9) als Affinitätsaxe; die Affinitätsrichtung ist der y -Axe parallel.

Sind nämlich x, y, X, Y zwei vermöge dieser Affinität einander zugeordnete Punkte der Ebene, so besteht die Beziehung:

$$11) \quad \frac{y - \alpha x - \beta}{Y - \alpha X - \beta} = \kappa,$$

wenn κ das Affinitätsverhältnis ist; aus derselben ergibt sich

$$y = \kappa(Y - \alpha X - \beta) + \alpha X + \beta,$$

$$y' = \kappa(Y' - \alpha) + \alpha;$$

die Eintragung dieser Ausdrücke in 10) führt auf

$$\kappa(Y' - \alpha) + \alpha + \kappa P(Y - \alpha X - \beta) = \alpha$$

oder

$$\kappa Y' + \kappa P(Y - \alpha X - \beta) = \kappa \alpha,$$

d. h. die Differentialgleichung 10) ist der affinen Transformation 11) gegenüber invariant. Damit ist aber der obige Satz bewiesen.

Die Gerade 9) gehört selbst zu dem Integralsystem von 10), wie dies aus der in 2. erklärten Konstruktion oder aus der blossen Substitution $y = \alpha x + \beta$ in 10) hervorgeht.

Ist S eine zur x -Axe parallele Gerade, so kommt

$$\eta = \beta,$$

— β eine Konstante —, mithin auch

$$\frac{Q}{P} = \beta,$$

und die Differentialgleichung lautet

$$y' + Py = \beta P$$

oder

$$12) \quad y' + P(y - \beta) = 0;$$

dieselbe lässt sich durch die Transformation $x = x, y = Y + \beta$ auf die homogene Gleichung:

$$13) \quad Y' + PY = 0$$

zurückführen, für welche die S -Kurve mit der x -Axe zusammenfällt. Die Affinität ist jetzt eine orthogonale.

Soll schliesslich S eine der y -Axe parallele Gerade sein, so muss

$$\xi = x + \frac{1}{P} = \alpha$$

konstant sein; daraus ergibt sich für P die Bestimmung:

$$P = \frac{1}{\alpha - x}$$

und für die Differentialgleichung die Form:

$$14) \quad y' + \frac{y}{\alpha - x} = Q$$

mit beliebigem Q . Ist hier $Q = 0$, so treffen die beiden letzten Fälle zusammen und reduziert sich die Kurve S auf den Punkt $\alpha|0$; in der That ist nun das Integralsystem das Geradenbüschel durch diesen Punkt.

Die Affinität besteht fort, die Affinitätsrichtung ist der Affinitätsaxe parallel. Die betreffende Transformation lautet:

$$Y - y = \kappa(x - \alpha)$$

und giebt

$$y = Y + \kappa(\alpha - x)$$

$$y' = Y' - \kappa;$$

die Einführung dieser Werte in 14) liefert:

$$Y' + \frac{Y}{\alpha - x} = Q,$$

also die nämliche Differentialgleichung.

5. Aus den Gleichungen 6) folgt:

$$d\xi = \left(1 - \frac{P'}{P^2}\right) dx$$

$$d\eta = \frac{PQ' - P'Q}{P^2} dx;$$

daraus ergibt sich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{PQ' - P'Q}{P^2 - P'},$$

wodurch die Richtung der Tangente an S im Punkte $\xi|\eta$ bestimmt ist.

Bedeutet x_0 eine Lösung der Gleichung:

$$P = 0$$

so liegt der zu x_0 gehörige Punkt $\xi|\eta$ von S im Unendlichen. Die Tangenten an jene Punkte der Integralkurven, für welche $x = x_0$ ist, sind hiernach parallel. Die Richtung dieser Tangenten ergibt sich aus der Differentialgleichung 1) und ist bestimmt durch

$$y'_0 = Q_0,$$

wenn Q_0 das Resultat der Substitution $x = x_0$ in Q vorstellt. Dies ist also zugleich die Richtung nach dem in Rede stehenden unendlich

fernen Punkte von S ; die Ursprungsordinate der dieser Richtung entsprechenden Asymptote von S , wenn eine solche vorhanden ist, ergibt sich als das Resultat der Substitution $x = x_0$ in den Ausdruck

$$\eta = Q\xi, \quad \text{d. i.} \quad \frac{Q}{P} = Q\left(x + \frac{1}{P}\right),$$

hat also, vorausgesetzt, dass Q_0 eine endliche Grösse bedeutet, den Wert $-x_0 Q_0$; mithin ist

$$\eta = Q_0(\xi - x_0)$$

die Gleichung der Asymptote, welcher zu entnehmen ist, dass die Asymptote durch den Punkt $x_0 | 0$ hindurchgeht.

Wird Q an der Stelle $x^{(0)}$ unendlich, P aber weder unendlich noch Null, so hat der zugehörige Punkt von S ein endliches ξ , ein unendliches η . Die Tangenten an jene Punkte der Integralkurven, deren $x = x^{(0)}$, sind parallel der Ordinatenaxe. Die Kurve S hat die Asymptote

$$\xi = x^{(0)} + \frac{1}{P^{(0)}}.$$

Ist \bar{x} eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

und $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{Q}{P}$ ein bestimmter Wert $= m$, so sind die Tangenten in jenen Punkten der Integralkurven, für welche $x = \bar{x}$, der Abscissenaxe parallel, und die Kurve S hat die Gerade $\eta = m$ zur Asymptote.

6. Zur Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen.

α) Die Differentialgleichung:

$$y' + \frac{y}{x} = x$$

hat zur S -Kurve die Parabel (Fig. 2):

$$\eta = \frac{1}{4} \xi^2,$$

und weil $\xi = 2x$ ist, so strahlen die Elemente mit der Abscisse x aus dem Parabelpunkte von der Abscisse $2x$ aus; dies giebt eine einfache Konstruktion der Linienelemente und angenäherter Integralkurven, welche letztere Linien dritter Ordnung sind, dargestellt durch

$$x^3 - 3xy + C = 0.$$

β) Die Differentialgleichung:

$$y' = ax + by + c,$$

in welcher a, b, c gegebene Konstanten bedeuten, gehört zu denjenigen, deren S -Kurve eine Gerade ist (Fig. 3); man kann sie nämlich auf die Form:

$$y' - b\left(y + \frac{a}{b}x + \frac{a+bc}{b}\right) = -\frac{a}{b}$$

bringen und diese stimmt mit 10) überein.

Fig. 2.

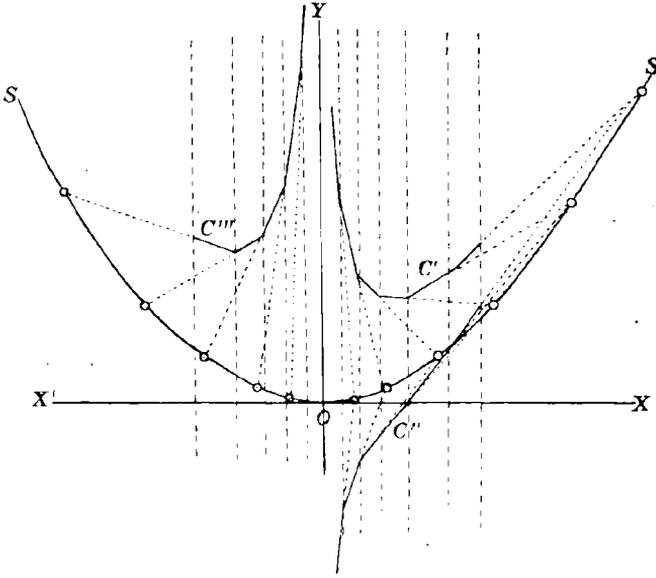
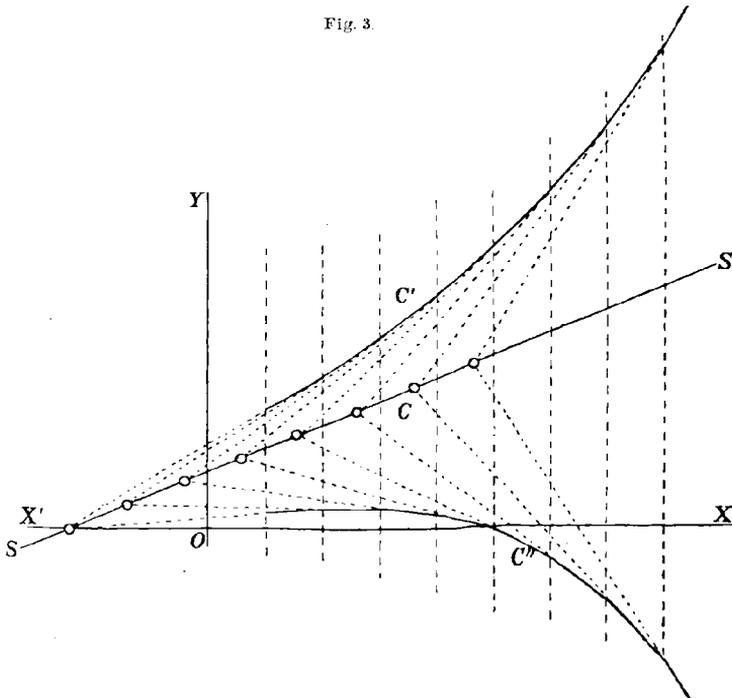


Fig. 3.



Hiernach ist

$$\eta = -\frac{a}{b}\xi - \frac{a+bc}{b}$$

die Gleichung jener Geraden S , bezüglich welcher die Integralkurven affin sind und die auch selbst ein partikuläres Integral darstellt. Andere Integralkurven können näherungsweise mit Hilfe dieser Geraden und auf Grund der Relation:

$$\xi = x - \frac{1}{b}$$

konstruiert werden, wonach sich ξ von dem zugeordneten x um die Konstante $-\frac{1}{b}$ unterscheidet.

Es verdient bemerkt zu werden, dass hier transcendente Kurven als Grenzresultat einer linear durchgeführten Konstruktion erscheinen; denn das allgemeine Integral lautet

$$y = C e^{bx} - \frac{a}{b}x - \frac{a+bc}{b^2}.$$

γ) Als einen speziellen Fall zu 13), der ein besonderes Interesse bietet, führen wir die Gleichung:

$$y' + \frac{2x}{a^2}y = 0$$

an. Für sie ist

$$\xi = x + \frac{a^2}{2x} = x + \eta,$$

wenn $\frac{a^2}{2x} = \eta$ gesetzt wird; es kann also das zu einem

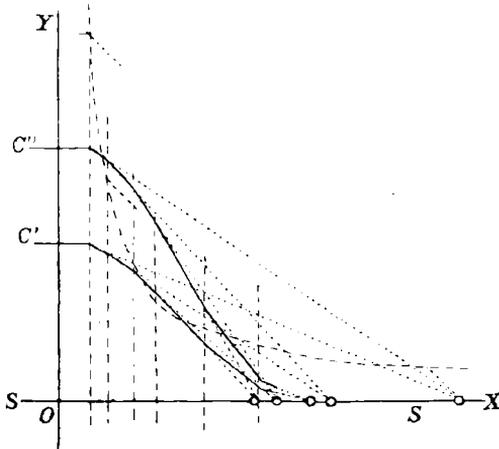
x gehörige ξ mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbel

$$x\eta = \frac{a^2}{2}$$

konstruiert werden (Fig. 4); man braucht nur den Punkt, in welchem die Hyperbel von der im Abstände x parallel zur y -Axe gezogenen Geraden getroffen wird, durch einen Strahl auf die x -Axe zu projizieren, welcher der Halbierungslinie von YOX' parallel läuft. Durch eine Reihe linearer Konstruktionen kann also ein Polygon verzeichnet werden, das mit genügender Genauigkeit den Verlauf einer Integralkurve anzeigt; die Grenze dieses Polygons bei beständig zusammenrückenden Ordinatenlinien wäre eine Integralkurve selbst, und zwar eine transcendente Kurve, enthalten in der Gleichung:

$$y = C e^{-\frac{x^2}{a}}$$

FIG. 4.



für ein entsprechend gewähltes C . Man erkennt leicht, dass auf den Ordinatenlinien, welche durch die Scheitel der Hyperbel gehen, die Wendepunkte der affinen Kurven liegen.

δ) In der Gleichung $y' = Q$

ist $P = 0$, daher ξ wie η unendlich; die Tangenten an Punkte mit gleicher Abscisse sind demnach parallel. In der That hat eine Gleichung von der vorliegenden Form ein Integralsystem, das den Translationen parallel zur y -Axe gegenüber invariant ist.

ε) Die Gleichung:

$$y' + \frac{y}{\alpha - x} = \frac{1}{\beta - x}$$

gehört unter die Form 14); ihre S -Kurve ist die Gerade

$$\xi = \alpha;$$

da ferner

$$\eta = \frac{\alpha - x}{\beta - x},$$

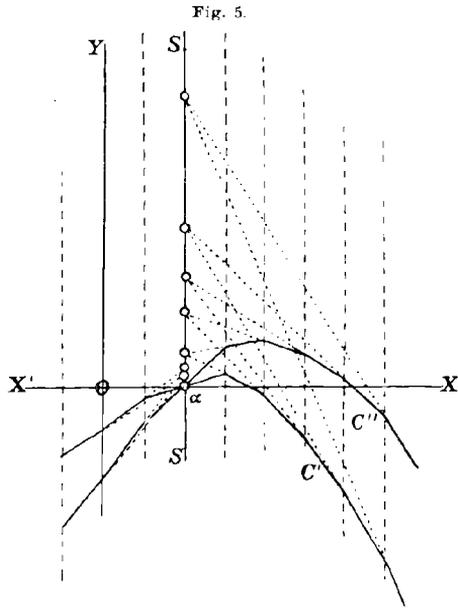
so besteht zwischen dem Büschel der Ordinatenlinien und den zugeordneten Punkten von S Projektivität. Die Integralkurven, transcendente Linien von der Gleichungsform:

$$y = C(x - \alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \ln \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

erscheinen demnach wieder als Grenzresultat einer linear geführten Konstruktion. Ihre Tangenten im unendlich fernen Punkte gehen durch den festen Punkt:

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x}{\beta - x} = 1$$

von S ; dieser Punkt ist also der Träger des Büschels der Asymptoten der Integralkurven (Fig. 5).



Sur les „Tables des chiffres constants“ de M. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions.

Par

M. G. C. BARAVELLI,

Ingénieur à Rome.

Les tables numériques dont on se sert plus généralement lorsqu'on a un grand nombre de multiplications ou de divisions à faire, et surtout lorsqu'on doit opérer sur des nombres ayant beaucoup de chiffres, ne sont que des tables de produits, telles que la Table de Pythagore. Les plus connues parmi les tables de ce genre sont celles qui ont été publiées par le Dr. Crelle et qui contiennent les produits de tous les nombres de trois chiffres.

La manière de se servir de ces tables est simple; et l'avantage qu'on en tire consiste essentiellement en ce qu'elles permettent d'exécuter les multiplications et les divisions par la simple transcription des produits partiels et par l'exécution d'additions ou de soustractions.

Les tables des Quarts de carrés de M. Blater sont aussi en usage et présentent un avantage réel pour la multiplication et pour l'extraction des racines carrées.

Nous donnons ci-après, avec le consentement de M. F. Calza qui en est l'auteur, un spécimen d'une nouvelle série de tables, qui permettent d'exécuter, avec une facilité et une rapidité tout-à-fait remarquables, les multiplications et les divisions.*

Ces tables, que l'auteur a appelées *Tavole delle cifre costanti*, sont au nombre de 989, pour les nombres compris entre 11 et 999; elles donnent immédiatement les quotients et les restes de toute division, quand le diviseur a quatre chiffres au plus. Pour les diviseurs de 5 à 12 chiffres on fait usage de petites tables auxiliaires. Elles donnent aussi immédiatement les produits par tout nombre de trois chiffres.

La table que l'on trouvera ci-après sert à multiplier par 247 et à effectuer les divisions par 247 et par 2471 à 2479.

Division: diviseur de trois chiffres. On cherche dans la première colonne les nombres les plus proches, par défaut, des dividendes successifs; la deuxième colonne donne les quotients correspondants et le premier chiffre (centaines) des restes; le chiffre des unités du reste se trouve dans la colonne qui porte en tête un 0 et le chiffre des

* Un spécimen de ces tables a été publié par l'auteur, à Naples. Une description en a été donnée dans une Nota su alcuni aiuti all' esecuzione dei calcoli numerici, publiée dans les *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani*. Rome 1895.

dizaines est représenté par la colonne vide entre les deux: on l'obtient en retranchant du dividende le nombre approché par défaut qu'on a trouvé dans la première colonne. Exemple: $13674919 : 247$.

On cherche dans la colonne des dividendes la première tranche de trois chiffres* (en comptant de gauche à droite) du dividende (136); le nombre qui en approche le plus par défaut (134) donne le quotient 5 et le reste 1·5; en retranchant 134 de 136 on obtient 2, qui est le chiffre des dizaines du reste: le reste est donc 125. On ajoute à ce nombre le quatrième chiffre du dividende (7) et on obtient 132, qu'on cherche dans la colonne des dividendes. Le nombre le plus rapproché par défaut est 124, qui donne 5 au quotient et ·5 de reste; et puisque $132 - 124 = 8$, le reste est 85. On ajoute à ce nombre le cinquième chiffre (4) du dividende et on obtient 89. À la colonne des dividendes on a $85 = 89 - 4$: le quotient est 3 et le reste 1|4|9, et ainsi de suite.

L'opération est arrêtée à l'avant dernier chiffre (de droite) du dividende. On dispose le calcul de la manière suivante:

$$\begin{array}{r}
 13674919 : 247 \\
 \text{Quotient} \dots 55364 \cdot \\
 \text{Reste} \dots \dots 11
 \end{array}$$

Le reste de la division est la somme du reste (2) correspondant au dernier chiffre du quotient et du dernier chiffre du dividende.

Il est à remarquer que les neuf lignes entre filets, qui partagent la table en tranches horizontales, correspondent aux multiples du diviseur: 247, 494, etc. Si au cours de la division on tombe sur un de ces multiples, et si son dernier chiffre n'est pas plus fort que le chiffre suivant du dividende, on obtient à la fois deux chiffres du quotient; et la différence donne les dizaines du reste, dont le chiffre des unités est 0.

Exemple: $12364 \dots : 247$. On trouve que 1235 est un multiple; et comme on a au dividende 1236 on peut mettre 50 au quotient et on a le reste $6 - 5 = 1$ dizaine, c'est-à-dire 10, qu'on ajoute au chiffre suivant (4) du dividende, et ainsi de suite. Si le dividende était 12334... on ne pourrait pas s'arrêter au multiple 1235; on devrait reculer au 119, qui donnerait le quotient 5 et le reste 242; pour $242 + 3 = 245$ on aurait le quotient 9 et le reste 227, etc.

Il va sans dire qu'on peut continuer la division et calculer le quotient avec autant de décimales qu'on veut, en supposant qu'un nombre correspondant de zéros soient ajoutés au dividende.

Diviseur de quatre chiffres. Le procédé de calcul est semblable; seulement, au lieu de chercher le dernier chiffre des restes

* Si le nombre formé des trois chiffres était plus fort que le diviseur, il faudrait n'en prendre que deux. Ainsi si le dividende est 275... on devra chercher dans la colonne des dividendes le nombre approchant de 27.

dans la colonne intitulée 0, on le cherche dans la colonne désignée par le dernier chiffre du diviseur. Le chiffre à droite, en haut, doit être écrit au-dessus du dividende en avançant de deux rangs vers la droite. Les chiffres écrits au dessus du dividende sont à ajouter aux chiffres correspondants du dividende. Exemple: $1443642 : 2473$.

Pour le 144 la colonne des dividendes donne 144; le quotient est 5 et le reste 2[0]3; on écrit un 5 au-dessus du 6 du dividende. Pour $203 + 3 = 206$ on trouve 198; le quotient est 8 et le reste [8]1; on écrit un 6 au-dessus du 4 du dividende. Pour $81 + 6 + 5 = 92$ on trouve 85; le quotient est 3 et le reste 1[7]8; on écrit 1 au-dessus du 2 du dividende. L'opération est terminée au deuxième chiffre avant le dernier du dividende; on obtient le reste en ajoutant au reste trouvé (178) décuplé les deux derniers chiffres du dividende et les chiffres écrits au-dessus: $1780 + 42 + 61 = 1883$.

On dispose le calcul ainsi:

$$\begin{array}{r}
 561 \\
 1443642 : 2473 \\
 \text{Quotient} \quad \dots 583 \\
 \hline
 178 \cdot \\
 \hline
 \text{Reste} \dots \dots 1883
 \end{array}$$

Quand un trait — est superposé au chiffre des unités du reste on doit retrancher 10 du reste. Ainsi pour $21142 \dots : 2477$ on trouve 208; le chiffre du quotient est 8 et le reste 138 doit être réduit à 128. Si on tombe sur l'un des multiples on peut, comme pour le diviseur de trois chiffres, écrire à la fois deux chiffres du quotient: il faut ajouter au reste, avec leur signes, les nombres qui se trouvent entre les filets, à la rencontre de la ligne du multiple et de la colonne désignée par le dernier chiffre du diviseur. Si le résultat qu'on obtient est négatif on devra remonter, dans la première colonne, au dividende précédent. Exemple: $148313 : 2472$. On a le multiple 148_2 qui donnerait 60 au quotient et 1 dizaine, ou 10 unités, de reste. Mais il faut ajouter au reste $+ 8 - 20$ ce qui donnerait un résultat négatif; par conséquent il faut reculer, dans la colonne des dividendes, au nombre précédent (144) et on trouve que le quotient est 59.

Il est aussi à remarquer que les nombres à gauche des multiples, qui leur correspondent exactement (122_{15} est l'équivalent de 123_5 , etc.) aident quelquefois à abrégier les calculs. Exemple: $11379 \dots : 2473$. On a pour 113 le quotient 4 et le reste 140; on écrit un 8 au-dessus du 9 du dividende. On a ensuite $140 + 7 = 147$, et on trouve à gauche du multiple 148_2 les chiffres 147_{12} , et comme on a au dividende $9 + 8 = 17$ on peut marquer 60 au quotient. On a pour le reste $17 - 12 = 5$ dizaines, auxquelles il faut ajouter avec leurs signes les nombres entre filets à la colonne 3; ainsi on a $50 - 20 + 2 = 32$, qui est le reste.

Diviseur de cinq à douze chiffres. Les tables auxiliaires qu'on doit employer, forment un cahier à part comprenant les nombres entre 11 et 9999. La table auxiliaire de chaque nombre donne les compléments des neuf premiers multiples du nombre aux multiples de l'unité suivie d'autant de zéros que le nombre a de chiffres. Ainsi la table auxiliaire de 742 est la suivante:

	742
1	258
2	516
3	774
4	032
5	290
6	548
7	806
8	064
9	322

Soit 864319 : 247742: le quotient aura évidemment un seul chiffre entier. Dans la table principale (247) on trouve, pour 86, 3 119; dans la table auxiliaire on a, pour le quotient 3, 3 774 et on écrit

$$\begin{array}{r} 864319 \\ 3 \end{array}$$

Les chiffres qu'on écrit au-dessus du dividende sont à additionner; ceux qu'on écrit au-dessous sont à retrancher. En continuant on pose la virgule au quotient, et comme le reste est $119 + 4 - 3 = 120$ on trouve, sur la table principale, 4 212 et sur la table auxiliaire, pour le quotient

$$\begin{array}{r} 032 \\ 774 \\ 864319 \\ 33 \end{array}$$

Le reste est $212 + 3 + 7 - 3 = 219$ qui donne, dans la table principale, 8 214 et dans la table auxiliaire, pour le quotient 8, 6 064. Si on s'arrête à ce point on obtient le reste de la division d'une manière analogue à celle qui a été indiquée précédemment. Si on trace une ligne verticale à droite du chiffre du dividende qui correspond au nombre demandé de décimales, on peut limiter à cette ligne les chiffres à écrire au-dessus du dividende. Le calcul est disposé de la manière suivante:

$$\begin{array}{r|l} 0 & . . \\ 77 & . \\ 86431 & 9 \\ \hline 336 & \\ \hline \text{Quotient } 3,488 & \end{array}$$

Cette disposition rappelle le procédé de la division abrégée effectuée par les méthodes ordinaires,* mais le résultat est obtenu d'une manière bien plus rapide et le nombre des chiffres à écrire est aussi limité que possible.

La juxtaposition de deux tables auxiliaires permet d'arriver aux diviseurs de 12 chiffres; la convenance de l'emploi de ces tables est surtout très grande quand on a à effectuer plusieurs divisions par un même diviseur.

* Vieille, Théorie générale des approximations numériques.

Multiplication. Chaque tranche horizontale de la table donne, dans chacune des colonnes qui portent au haut l'un des chiffres 1...9, les produits de 247 par les nombres 11 à 99. Chacun de ces multiples est partagé en deux sections, dont l'une est au bas et l'autre au haut de la tranche, ce qui empêche toute confusion avec les nombres inscrits au milieu de la tranche, qui servent pour la division.

Le procédé est le suivant. Soit

$$\begin{array}{r} 769532 \times 247 \\ \hline 190074404 \end{array}$$

En comptant de droite à gauche on a d'abord 32 au multiplicande: à la tranche 3 et à la colonne 2 on trouve 04, qu'on marque au produit, et 79 qu'on retient. 5 étant le troisième chiffre (de droite à gauche) du multiplicande, on cherche dans la tranche 5 le reste qui approche le plus de 79; on trouve [7]5, qui correspond au dividende $124 + 7 = 131$: on retient 131 et on marque $79 - 75 = 4$ au produit. Pour le quatrième chiffre (9) du multiplicande on trouve, dans la neuvième tranche, 1[2]7 et le dividende $233 + 2 = 235$, qu'on retient; on marque au produit $131 - 127 = 4$. Pour le 6 on a 2[2]8 et le dividende $169 + 2 = 171$; on marque $235 - 228 = 7$. Pour le 7 du multiplicande on a 1[7]1 et le dividende $183 + 7 = 190$: on marque $171 - 171 = 0$ et, à gauche, 190.

L'application de ce procédé est beaucoup plus simple que sa description; les petites additions et soustractions sont faites mentalement et l'on n'a à écrire que les chiffres du produit, tandis qu'avec toute autre table de produits partiels on devrait, au moins, transcrire un de ces produits pour chaque tranche de trois chiffres du multiplicande, et additionner ces produits partiels convenablement disposés. Si le multiplicateur a plus de trois chiffres, l'avantage est aussi grand; car on obtient les produits partiels du multiplicande tout entier par chaque section de trois chiffres du multiplicateur.

Extraction des racines carrées. Chaque table porte en tête l'indication du quart du carré du nombre qui la désigne, ce qui rend très aisée l'effectuation de l'opération par le méthode ordinaire, puisqu'on a immédiatement les premiers chiffres de la racine. La table aide à la rapidité de l'effectuation des divisions successives, dont les diviseurs commencent toujours par les mêmes chiffres.

Conclusion. On voit qu'à l'aide des tables de M. Calza on peut effectuer avec une plus grande facilité et d'une manière plus prompte les calculs pour lesquels on a employé jusqu'à présent les tables des produits ou les tables tétragonométriques; on peut dire aussi que les résultats sont plus sûrs puisque le calculateur n'a pas à transcrire machinalement des résultats, mais doit les trouver à l'aide de calculations mentales excessivement simples, qui tiennent son esprit en éveil.

$$a = 247 \frac{a^2}{4} = 15252 \cdot 25$$

				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23 17	24 7	10		0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
	25	1	} 3	17	64	11	58	05	52	99	46	93	
	35	1 1		2 ⁹	2 ⁸	2 ⁷	2 ⁶	2 ⁵	2 ⁴	2 ³	2 ²	2 ¹	
	45	1 2		27	29	32	34	37	39	41	44	46	
48 14	49 4	20		0	-2	-4	-6	-8	-10	+8	+6	+4	+2
	50	2	} 6	87	34	81	28	75	22	69	16	63	
	60	2 1		5 ⁸	5 ⁵	5 ⁴	5 ²	5 ⁰	4 ⁸	4 ⁶	4 ⁴	4 ²	
	70	2 2		51	54	56	59	61	64	66	69	71	
73 11	74 1	30		0	-3	-6	-9	+8	+5	+2	+9	+6	+3
	75	3	} 9	57	04	51	98	45	92	39	86	33	
	85	3 1		8 ⁷	8 ⁴	8 ¹	7 ⁸	7 ⁵	7 ²	6 ⁹	6 ⁶	6 ³	
	95	3 2		76	79	81	83	86	88	91	93	96	
97 18	98 8	40		0	-4	-8	+8	+4	-20	+6	+2	+8	+4
	99	4	} 2	27	74	21	68	15	62	09	56	03	
	109	4 1		1 ⁶	1 ²	0 ⁸	0 ⁴	0 ⁰	9 ⁶	9 ²	8 ⁸	8 ⁴	
	119	4 2		101	103	106	108	111	113	116	118	121	
122 15	123 5	50		0	-5	-10	+5	-20	+5	-30	+5	-40	+5
	124	5	} 5	97	44	91	38	85	32	79	26	73	
	134	5 1		4 ⁵	4 ⁰	3 ⁵	3 ⁰	2 ⁵	2 ⁰	1 ⁵	1 ⁰	0 ⁵	
	144	5 2		125	128	130	133	135	138	140	143	145	
147 12	148 2	60		0	-6	+8	+2	+6	-30	+4	+8	+2	+6
	149	6	} 8	67	14	61	08	55	02	49	96	43	
	159	6 1		7 ⁴	6 ⁸	6 ²	5 ⁶	5 ⁰	4 ⁴	3 ⁸	3 ²	2 ⁶	
	169	6 2		150	153	155	158	160	163	165	167	170	
171 19	172 9	70		0	-7	+6	+9	+2	+5	+8	+1	+4	+7
	173	7	} 1	37	84	31	78	25	72	19	66	13	
	183	7 1		0 ³	9 ⁶	8 ⁹	8 ²	7 ⁵	6 ⁸	6 ¹	5 ⁴	4 ⁷	
	193	7 2		175	177	180	182	185	187	190	192	195	
196 16	197 6	80		0	-8	+4	+6	+8	-40	+2	+4	+6	+8
	198	8	} 4	07	54	01	48	95	42	89	36	83	
	208	8 1		3 ²	2 ⁴	1 ⁶	0 ⁸	0 ⁰	9 ²	8 ⁴	7 ⁶	6 ⁸	
	218	8 2		200	202	205	207	209	212	214	217	219	
221 13	222 3	90		0	-9	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
	223	9	} 7	77	24	71	18	65	12	59	66	53	
	233	9 1		6 ¹	5 ²	4 ³	3 ⁴	2 ⁵	1 ⁶	0 ⁷	9 ⁸	8 ⁹	
	243	9 2		224	227	229	232	234	237	239	242	244	

Dividendes
Quotients
Restes

Beispiele graphischer Tafeln, mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte.

Von

R. MEHMKE

in Stuttgart.

Hierzu drei Tafeln.

Die mannigfachen unbestreitbaren Vorzüge graphischer Darstellungen gegenüber numerischen Tabellen sind bekannt. Während aber die nächstliegende Methode, eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen in einer Ebene darzustellen, nämlich (unter Deutung der Veränderlichen als Cartesischer Koordinaten eines Punktes) durch Höhenkurven der zugehörigen Fläche, längst zum Gemeingut der Mathematiker, Physiker und Techniker aller Richtungen geworden ist, hat die „Methode der fluchtrechten Punkte“* trotz ihrer besonderen Vorzüge und trotzdem ihre Spuren vielleicht in Deutschland am weitesten zurückverfolgt werden können,** bei uns noch wenig Ver-

* Ich gebe so die neuerdings von Maurice d'Ocagne im Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXVI, p. 31, 1898, vorgeschlagene Bezeichnung „méthode des points alignés“ wieder. In der Sprache der Baulcute und Feldmesser ist „Flucht“ gleichbedeutend mit dem französischen „alignement“, „einflichten“ oder „nach der Flucht einrichten“ mit „aligner“, daher darf man wohl „fluchtrecht“, d. h. nach der Flucht eingerichtet oder in einer geraden Linie liegend, für das französische „aligné“ setzen, wie ja auch wagerecht, senkrecht oder lotrecht genannt wird, was nach der (Setz- oder Wasser-) Wage, dem Senkel oder Lot eingerichtet ist.

** Das älteste mir bekannte Beispiel für die Anwendung der fraglichen Methode findet sich in einer Abhandlung von Möbius aus dem Jahre 1841 (Crelles Journal, Bd. 22, S. 280, Fussnote, oder Möbius' Gesammelte Werke, Bd. 4, S. 620). Es heisst dort: „Man könnte hiernach eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden, beide auf die oben beschriebene Weise eingeteilt, auch als Multiplikationsmaschine benützen. Ein Lineal, gelegt durch die Teilpunkte der Parabel, an welchen die Faktoren stehen, würde die Gerade in dem Teilpunkt des Produktes treffen. Bei dieser Gelegenheit mag noch bemerkt werden, dass zu demselben Zweck statt der Parabel auch zwei Geraden, die eine für den einen, die andere für den anderen Faktor, angewendet werden könnte...“. Ein anderes Beispiel, auf das ich schon früher hingewiesen habe und das ich damals für das älteste hielt (siehe W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, Nachtrag, München 1893, S. 17, Nr. 43a), ist die Tafel zur Geschwindigkeitsformel von Ganguillet und Kutter (Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, 21. Jahrgang, 1869, Figur 13 auf Blatt Nr. 9; abgedruckt im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. 4, und in verschiedenen Auflagen des Taschenbuchs des Ingenieurs, herausgegeben vom Verein „Hütte“).

breitung gefunden. Ich habe mir deshalb die Aufgabe gestellt, durch Veröffentlichung gebrauchsfertiger, den verschiedensten Anwendungsgebieten entnommener Tafeln, die nach dieser Methode konstruiert sind, zum Bekanntwerden der letzteren nach Möglichkeit beizutragen.*

Es erscheint mir zweckmässig, des Vergleiches wegen in erster Linie solche Beispiele zu wählen, die bereits nach der älteren Methode, um deren Entwicklung sich bekanntlich Léon Lalanne** und Chr. A. Vogler*** besonders verdient gemacht haben, behandelt worden sind.

Zur Kennzeichnung der hier in Rede stehenden Methode sei folgendes mitgeteilt. Ist zwischen drei veränderlichen Grössen x , y und z eine durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ dargestellte Beziehung vorhanden, so wird diese geometrisch zum Ausdruck gebracht, indem man (siehe Fig. 1) drei (im allgemeinsten Falle krummlinige) Skalen von der Beschaffenheit konstruiert, dass zu drei in einer Geraden liegenden Teilpunkten derselben immer solche Zahlenwerte von x , y und z ge-

* Ausser der in der vorhergehenden Anmerkung genannten Tafel von Ganguillet und Kutter (1869) sind mir noch folgende im deutschen Sprachgebiete veröffentlichte Anwendungen der Methode der fuchtrechten Punkte bekannt:

R. Mehmke, Graphische Tafel zur Bestimmung der Korrektion des Barometerstandes, welche bei der Reduktion auf 0° wegen der Temperaturexstension des Quecksilbers und des Maßstabes nötig ist, Annalen der Physik und Chemie, neue Folge, Bd. 41, Tafel VII (Text S. 892), 1890. R. Mehmke, Graphische Tafel zur Ermittlung der Leistungen von Lokomotiven, Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 1890, S. 418. Hans Maurer, Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke, Inaugural-Dissertation, Strassburg (Druck von Hammerich & Lesser in Altona) 1894; es sind vier meteorologische Tafeln (für die Korrektion des Barometerstandes wegen der Wärmeausdehnung des Quecksilbers und des Maßstabes, für die Reduktion des Barometerstandes auf Meeresniveau und auf die geographische Breite von 45° , allgemeine Barometertafel, Psychometertafel) und fünf physikalische Tafeln (für die Berechnung der Luftdichtigkeit und die Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm Druck, die Reduktion einer Skalenablesung auf ihren Winkelwert, die Reduktion von Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen, die Bestimmung des Brechungsverhältnisses eines Prismas, die Bestimmung der Dispersion mit dem Abbeschen Refraktometer) gegeben.

Auf der mathematischen Ausstellung in München im Herbst 1893 haben sich 14 im Jahre 1889 von mir entworfene graphische Tafeln der fraglichen Art (darunter die hier vorgelegten) befunden, siehe W. Dycks Katalog, Nachtrag, München 1893, Nr. 40d, S. 9 und Nr. 44b, S. 19.

Über die zahlreichen Anwendungen der Methode, die seit 1891 namentlich in Frankreich und Italien veröffentlicht worden sind, findet man einen interessanten Bericht von M. d'Ocagne in der Revue générale des sciences, 9^e année, 1898, p. 116.

** Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique..., Annales des Ponts et Chaussées, 2^{ème} série, t. 11, 1^{er} semestre 1846, p. 1.

*** Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877.

hören, die jene Gleichung befriedigen.* Setzt man an Stelle einer dieser Skalen eine einfach-unendliche Schar von solchen, so wird damit eine neue Veränderliche eingeführt, nämlich der Parameter, der die Lage des Trägers einer einzelnen dieser Skalen bestimmt. Auf diese Weise ist es möglich, das Verfahren auf Gleichungen zwischen 4, 5 oder 6 Veränderlichen auszudehnen.**

Mit M. d'Ocagne wollen wir von den sogenannten Parallelkoordinaten einer geraden Linie Gebrauch machen. Darunter sind

* Damit eine solche Darstellung möglich sei, wozu gehört, dass die Funktion F sich auf die Form:

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \psi_1(x) & 1 \\ \varphi_2(y) & \psi_2(y) & 1 \\ \varphi_3(z) & \psi_3(z) & 1 \end{vmatrix}$$

bringen lässt, muss F einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügen, deren Aufstellung und nähere Untersuchung noch aussteht. Es hat aber kürzlich M. E. Duporcq im Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, t. 22, p. 287, 1898, einen Weg gezeigt, um auch ohne jene Differentialgleichung, nur mit Hilfe notwendiger und hinreichender Funktionalgleichungen, die Funktion F zu prüfen und ihr, wenn es möglich ist, die fragliche Form zu geben. Aus Mangel an Raum kann hier auf diese Untersuchungen nicht eingegangen werden, es soll dies aber bei nächster Gelegenheit geschehen.

** In geschichtlicher Beziehung ist folgendes zu sagen. Bei den in der zweiten Anmerkung auf S. 56 erwähnten vereinzelt Anwendungen von Möbius (1841) sowie Ganguillet und Kutter (1869) ist noch nicht davon die Rede, dass es sich um eine allgemeine Methode, Funktionen mehrerer Veränderlichen geometrisch darzustellen, handelt, wengleich Möbius tiefer in die Sache eingedrungen sein mag, als seine oben wiedergegebenen kurzen Bemerkungen erkennen lassen. Es hat dann 1884 M. d'Ocagne in den Annales des Ponts et Chaussées, 6. série, t. 8, p. 531, aus den von Lalanne 1846 u. a. O. zur Auflösung trinomischer Gleichungen vorgeschlagenen Tafeln durch Vertauschung von Parallelkoordinaten mit Linienkoordinaten neue, demselben Zwecke dienende Tafeln abgeleitet, welche zu den „abaques à alignement“ gehören, aber er hat es damals unterlassen, das allgemeine Prinzip der Methode der fluchtrecten Punkte auszusprechen und dies erst 1890 nachgeholt (Génie civil, t. XVII, p. 343). Inzwischen hatte das jedoch, 1886, August Adler (Berichte der Wiener Akademie, Bd. 94, 2. Abtlg., S. 404), ebenfalls an Lalanne anknüpfend, aber offenbar ohne Kenntnis der ersten Arbeit von M. d'Ocagne, bereits gethan. Die speziellen, von Adler angegebenen Tafeln zur Auflösung numerischer Gleichungen u. s. w. sind mit denen von M. d'Ocagne kollinear verwandt, aber nicht identisch, weil Adler andere Linienkoordinaten benützt als M. d'Ocagne. Ich selbst bin auf die fragliche, alle wesentlichen Gesichtspunkte enthaltende Arbeit von Adler erst in neuester Zeit aufmerksam geworden; unabhängig davon hatte ich 1889 ebenfalls die Methode ausgebildet, einzelnen meiner Schüler mitgeteilt und viele Anwendungen von ihr gemacht. Es scheint Adler auf die Sache nicht wieder zurückgekommen zu sein, während M. d'Ocagne in zahlreichen Veröffentlichungen diese wie andere Methoden der „Nomographie“ gefördert und in seinen letzten Arbeiten (siehe namentlich: Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXVI, p. 16, 1898) das Ganze in ein System gebracht hat.

Die Ausdehnung der Methode der fluchtrecten Punkte auf den Raum betreffend vergleiche man die Mitteilung: „Über einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern“ am Schlusse des vorhergehenden Bandes dieser Zeitschrift.

(siehe Fig. 2) die Abschnitte u und v zu verstehen, welche die Gerade auf zwei zu einander parallelen Axen von beliebigem Abstand bildet, jeder Abschnitt von dem willkürlichen Nullpunkt der betreffenden Axe an gemessen und mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen, je nachdem er dem positiven oder negativen Teile dieser Axe angehört.*

Legt man den Nullpunkten o_1 und o_2 der u - und v -Axe die Gewichte λ und μ bei, zieht man ferner durch ihren Schwerpunkt q eine Parallele zu den Axen und bezeichnet das auf ihr durch die betrachtete Gerade abgeschnittene Stück mit w , so sind die parallel zu den Axen gemessenen schiefen Abstände u, v, w der Punkte o_1, o_2 und q von jener Geraden proportional den zugehörigen senkrechten Abständen h_1, h_2, h , zwischen denen bekanntlich die homogene lineare Gleichung:

$$\lambda h_1 + \mu h_2 - (\lambda + \mu) h = 0$$

besteht. Folglich ist auch

$$1) \quad \lambda u + \mu v - (\lambda + \mu) w = 0.$$

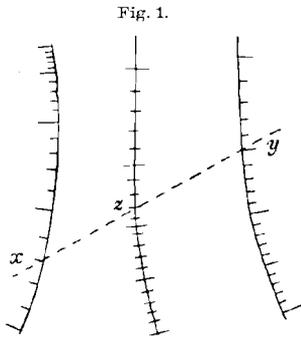


Fig. 1.

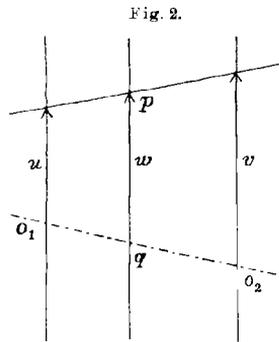


Fig. 2.

Es leuchtet ein, dass jede Gerade, deren Parallelkoordinaten u, v dieser Gleichung genügen, durch den Punkt p geht, der durch die Zahlen λ, μ (bezw. deren Verhältnis) und den Abschnitt w bestimmt ist. Daher kann 1) die Gleichung dieses Punktes genannt werden. Um den Punkt zu einer gegebenen Gleichung zu finden, kann man zwei (oder zur Probe noch mehr) Geraden konstruieren, deren Koordinaten die Gleichung befriedigen, indem man etwa jedesmal eine Koordinate beliebig wählt, die andere aus 1) berechnet; es lässt sich auch der Umstand benutzen, dass

$$\overline{o_1 q : q o_2} = \mu : \lambda.$$

* Schon zehn Jahre vor M. d'Ocagne hat Herr K. Schwering (im Jahresbericht für 1874 des Westfälischen Provinzialvereins, S. 149) Parallelkoordinaten benutzt, wenn auch zu anderen Zwecken. Herr Schwering nimmt die Verbindungslinie der Nullpunkte beider Axen senkrecht zu letzteren an. Oft ist es aber von grösstem Wert, von dieser Beschränkung frei zu sein. Dagegen kann man beiden Axen stets die gleiche positive Richtung geben, was im folgenden geschehen soll.

Lässt sich nun die darzustellende Gleichung $F(x, y, z) = 0$ auf die Form

$$2) \quad \alpha(z) \varphi(x) + \beta(z) \psi(y) + \gamma(z) = 0$$

bringen — ein sehr häufiger besonderer Fall, auf den wir uns hier beschränken wollen —, so kann Gleichung 1) dadurch mit 2) identisch gemacht werden, dass man:

$$3) \quad u = a \varphi(x),$$

$$4) \quad v = b \psi(y)$$

setzt, wo a und b beliebige Konstanten bezeichnen, und ferner

$$5) \quad \lambda = \frac{\alpha(z)}{a}, \quad \mu = \frac{\beta(z)}{b}, \quad w = - \frac{\gamma(z)}{\frac{\alpha(z)}{a} + \frac{\beta(z)}{b}}$$

Werden in 3) dem x verschiedene, eine arithmetische Reihe bildende Werte erteilt, an die Endpunkte der zugehörigen u die betreffenden Werte von x geschrieben, so ergibt sich die Skala der x , die hier also geradlinig ist und die u -Axe zum Träger hat. Ebenso liefert 4) die y -Skala mit der v -Axe als Träger. Endlich gehört vermöge 5) auch zu jedem Werte von z ein bestimmter Punkt, was zu einer dritten Skala, derjenigen der z , Veranlassung giebt. Diese wird im allgemeinen krummlinig sein, dagegen als Träger eine Parallele zu den Axen haben, wenn a und β Konstanten sind.

Dass zwischen den drei Skalen der gewünschte Zusammenhang besteht, ist klar. Die Gerade durch irgend drei zusammengehörige Punkte wird man in der Regel nicht zu zeichnen brauchen, sondern z. B. durch einen mit den Händen gespannten Faden herstellen können. Auch ein Lineal aus Hartglas oder Zellhorn mit einer unterwärts eingeritzten feinen Linie ist zweckmässig.

Beispiele.

1. Zustand-Tafel für 1 kg atmosphärische Luft (Tafel I). Diese Tafel ist die Umwandlung einer nach der älteren Methode entworfenen von G. Herrmann.* Die zwischen dem Druck p , dem Volumen V und der Temperatur t nach dem Mariotte-Gay Lussacschen Gesetz vorhandene Beziehung $pV = 29,268(273 + t)$

wurde durch Logarithmieren auf die Form 2) gebracht, nämlich:

$$\log p + \log V - \log [29,268(273 + t)] = 0.$$

Es konnte dann $u = a \log p$, $v = a \log V$,

gesetzt werden, d. h. für den Druck und das Volumen sind logarithmische Skalen gleicher Längeneinheit genommen, wodurch $\lambda = \mu$ wurde

* Zur graphischen Behandlung der mechanischen Wärmetheorie, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 28, 1884, Textblatt 4 vor S. 901.

oder die Skala für die Temperatur in die Mitte zwischen die Axen fiel. Bei adiabatischer Zustandänderung ist bekanntlich:

$$p V^{1.41} = \text{const}, \quad \text{was} \quad u + 1,41 v - \text{const} = 0$$

giebt. Dies ist die Gleichung eines Punktes auf einer (in der Tafel gezeichneten) Parallelen zu den Axen, welche deren Abstand im Verhältnis 1,41 : 1 teilt. Die gestrichelten Linien zeigen die Lösung der Aufgabe: Wie tief sinkt die Temperatur einer Luftmenge von 20°C. Temperatur und 6 atm. Druck bei adiabatischer Ausdehnung bis auf atmosphärische (1 atm.) Spannung? Die Tafel giebt ungefähr -100° C.

2. Tafel II entspricht der auf der älteren Methode beruhenden Kurventafel zur Berechnung der von künstlichen Lichtquellen indizierten Helligkeit von Leonhard Weber.*

Für die Helligkeit H eines wagerechten Flächenelementes, das durch eine Lichtquelle von 100 Normalkerzen mit nach allen Richtungen gleicher Emission beleuchtet wird, hat man, wenn das Flächenelement die wagerechte Entfernung x und die senkrechte Entfernung z (in cm ausgedrückt) von der Lichtquelle besitzt:

$$H = \frac{10^6 z}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Wir stellen (nach Erheben beider Seiten auf die Potenz $\frac{2}{3}$) die Form

$$x^2 - 10^4 z^{\frac{2}{3}} H^{-\frac{2}{3}} + z^2 = 0$$

her, die mit der von 2) übereinstimmt, wenn y statt H geschrieben wird. Wir haben dann gemäss 3) und 4) zu setzen:

$$u = a x^2, \quad v = b H^{-\frac{2}{3}}.$$

Die von irgend einem Punkte der x -Skala an den Träger der z -Skala gezogene Tangente trifft die H -Skala offenbar in dem Punkte, an welchem die grösste, beim wagerechten Abstand x zu erzielende Helligkeit des Flächenelementes steht, und an dem (schätzungsweise zu bestimmenden) Berührungspunkte jener Tangente kann die Höhe z abgelesen werden, in welcher die Lichtquelle sich befinden muss, damit die Helligkeit den fraglichen Grösstwert annimmt. (In der Tafel ist $b = -10^5 a$ und a ungefähr $\frac{1}{100}$ mm. Der in der Tafel nicht angegebene, dem Werte $H = \infty$ entsprechende Nullpunkt der v -Axe liegt weit oben. Würde man b dasselbe Vorzeichen geben wie a , so würden die Werte von H von oben nach unten wachsen, also umgekehrt wie diejenigen von x , und der Träger der z -Skala würde nicht zwischen die Axen fallen.)

* Elektrotechn. Zeitschr., 6. Jahrg., 1885, S. 55. Die Tafel ist mit Fig. 3 bezeichnet.

3. Bei der Berechnung von Wasserleitungen wird oft die einfache Dupuitsche Formel $400000 Jd^5 = Q^2$ angewendet, worin J das Gefälle in m/km, Q die durchfliessende Wassermenge in cbm/sec, d den lichten Rohrdurchmesser in Meter bezeichnet. Für die Durchfluss-Geschwindigkeit V in m/sec hat man ausserdem $Q = \frac{\pi}{4} Vd^2$. Die durch Logarithmieren hieraus hervorgehenden Gleichungen schreiben wir in der Form

$$\log J + 5 \log d - 6 \left(\frac{1}{3} \log Q + \text{const} \right) = 0$$

und

$$\log V + 2 \log d - 3 \left(\frac{1}{3} \log Q + \text{const} \right) = 0.$$

Der ersten Gleichung entsprechend sind in Tafel III zwei logarithmische Skalen mit derselben Längeneinheit für J und d vorhanden und eine logarithmische Skala für Q , deren Längeneinheit nur $\frac{1}{3}$ so gross ist und deren Träger den Abstand der beiden anderen im Verhältnis 5:1 teilt. Um auch der letzten Gleichung zu genügen, wurde eine logarithmische Skala für die V im Maßstabe der erstgenannten in solcher Lage hinzugefügt, dass der Träger der Q -Skala den Abstand der Träger der V - und d -Skala im Verhältnis 2:1 teilt. Die V -Skala liegt so in der Mitte zwischen der J - und d -Skala. Sind von vier zusammengehörigen Werten J , Q , V , d irgend zwei gegeben, so liefert die Tafel augenblicklich die beiden anderen. Die gestrichelte Gerade der Tafel entspricht dem Zahlenbeispiel $J = 60$ m/km, $Q = 500$ l/sec; man erhält $d = 0,4$ m und $V = 3,9$ m.*

(Die Beispiele werden fortgesetzt werden.)

Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden.

Von Friedrich Schur in Karlsruhe.

Im Jahre 1873 fand Herr Henrici** den folgenden Satz:

„Wenn man die Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids als starre Geraden betrachtet, die überall, wo sie sich treffen, fest verbunden sind, aber so, dass an jedem Schnitt-

* Eine ähnliche, von M. G. Dariès konstruierte, auf der Formel von M. Lévy beruhende Tafel neueren Datums findet man in den *Nouvelles Annales de la Construction*, 5^e série, t. IV, 1897, pl. 33.

** Vergl. den Katalog mathem. Modelle, herausgegeben von Walter Dyck, München 1892, S. 261.

punkte eine freie Bewegung der einen um die andere möglich bleibt, so ist die Fläche nicht starr, sondern erlaubt noch eine Deformation in eine einfach unendliche Anzahl anderer Hyperboloide.“

Obwohl dieser Satz schon mehrfach Gegenstand von Publikationen* gewesen ist, so ist seine Stellung im Systeme der Geometrie noch kaum zu einem hinreichend einfachen Ausdrucke gebracht worden. Hat man es doch bisher nicht einmal der Erwähnung für wert gehalten, dass derselbe Satz auch für das hyperbolische Paraboloid gilt. Der Satz ergibt sich aber ganz von selbst, wenn man nach denjenigen Geraden des Raumes fragt, denen bei einer räumlichen Affinität ihnen kongruente Geraden entsprechen.

Denn zwei Flächen, von denen die eine aus der anderen nach der im Satze angegebenen Vorschrift entstanden ist, stehen ja sicher in affiner Verwandtschaft zu einander, in derjenigen nämlich, welche dadurch bestimmt ist, dass irgend einem windschiefen Vierseit der einen Fläche das aus ihm hervorgehende Vierseit der anderen als entsprechend zugeordnet wird. Durch diese Affinität müssten also alle Geraden der ersten Fläche in ihnen kongruente Geraden übergeführt werden.

Besitzt nun eine Gerade g die Eigenschaft, durch eine Affinität \mathfrak{A} in eine ihr kongruente Gerade g' übergeführt zu werden, so gilt dasselbe offenbar von allen zu g parallelen Geraden. Denn jedes Parallelogramm $ABCD$, von dem eine Seite AB auf g liegt, wird dann durch \mathfrak{A} in ein solches Parallelogramm $A'B'C'D'$ übergeführt, dass

$$C'D' = A'B' = AB = CD$$

ist. Will man also alle Geraden kennen, denen bei irgend einer Affinität \mathfrak{A} ihnen kongruente Geraden entsprechen, so braucht man nur die Geraden durch einen Punkt M zu suchen, denen diese Eigenschaft zukommt.

Nun entspricht doch irgend einer Kugel \varkappa um M als Mittelpunkt ein Ellipsoid \varkappa' mit dem entsprechenden Punkte M' als Mittelpunkt, und die gemeinsamen Durchmesser desselben mit einer zu \varkappa kongruenten Kugel ε' um M' erfüllen, sofern sie überhaupt reell sind, einen Kegel zweiten Grades α' , der auch in zwei Ebenen zerfallen kann. Das Original α dieses Kegels besteht offenbar aus lauter Geraden, die durch die Affinität \mathfrak{A} in ihnen kongruente Geraden übergeführt werden, und jede Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende den Kanten dieses Kegels parallel sind, wird durch \mathfrak{A} in dem geforderten Sinne deformiert.

Ist umgekehrt ein einschaliges Hyperboloid mit dem Mittelpunkte M und dem Asymptotenkegel α gegeben, und ist ε irgend ein Ellipsoid durch den sphärischen Kegelschnitt, den α auf irgend einer Kugelfläche um M ausschneidet, so führt jede Affinität \mathfrak{A} , bei welcher das Ellipsoid ε in eine

* Cayley in Messenger of Math., t. 8, p. 51 (1878), Darboux in Despeyroux-Darboux's Mechanik, t. II, p. 522 (1886), Mannheim in Principes et développements de géométrie cinématique, p. 189 (1894).

zu x kongruente Kugel ε' übergeht, das Hyperboloid in ein solches mit entsprechend kongruenten Geraden über. Jede dieser Affinitäten setzt sich offenbar aus einer solchen, bei welcher das Axenkreuz des Ellipsoids in ein auf dasselbe fallendes rechtwinklig-gleichschenkliges Axenkreuz übergeht, und einer Bewegung zusammen. Es ist leicht zu beweisen, dass die Affinitäten der ersten Art das Hyperboloid in die konfokalen überführen.

Ist nämlich:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung des Hyperboloids, so ist durch:

$$2) \quad x^2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{\lambda}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{\lambda}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{\lambda}{c^2} \right) = 1$$

eins der Ellipsoide dargestellt, sobald nur λ so gewählt ist, dass die Koeffizienten von x^2 , y^2 und z^2 positiv sind. Durch

$$3) \quad x' = \frac{\sqrt{a^2 + \lambda d^2}}{a} x, \quad y' = \frac{\sqrt{b^2 + \lambda d^2}}{b} y, \quad z' = \frac{\sqrt{c^2 - \lambda d^2}}{c} z$$

ist folglich die Affinität dargestellt, die das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius d verwandelt; diese selbe Affinität führt also das Hyperboloid in das andere:

$$4) \quad \frac{x'^2}{a^2 + \lambda d^2} + \frac{y'^2}{b^2 + \lambda d^2} - \frac{z'^2}{c^2 - \lambda d^2} = 1$$

über, das dem gegebenen konfokal ist. Hiermit ist zugleich gezeigt, dass nur die einem gegebenen einschaligen Hyperboloide konfokalen und die aus ihm durch Bewegung entstehenden Hyperboloide der Forderung des Henrichschen Satzes genügen.

Handelt es sich um ein hyperbolisches Paraboloid, so ist der Asymptotenkegel nur durch ein Paar von Ebenen zu ersetzen, denen die Erzeugenden des Paraboloids parallel sind. Ist:

$$5) \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

die Gleichung des Paraboloids, so kann man eins der Ellipsoide in der Form:

$$6) \quad x^2 \left(1 + \frac{\lambda}{a} \right) + y^2 \left(1 - \frac{\lambda}{b} \right) + z^2 = d^2$$

annehmen, die Affinität folglich in der Form:

$$7) \quad x = x' \sqrt{\frac{a}{a+\lambda}}, \quad y = y' \sqrt{\frac{b}{b-\lambda}}, \quad z = z'.$$

Verbindet man mit ihr noch die Translation:

$$8) \quad x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' + \frac{\lambda}{2},$$

so geht das gegebene Paraboloid in das konfokale:

$$9) \quad \frac{x''^2}{a+\lambda} - \frac{y''^2}{b-\lambda} - 2z'' + \lambda$$

über, so dass die Analogie vollkommen ist.

Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. HANS LORENZ

in Halle a. S.

Fortsetzung.

4. Diskussion der Ausgleichsbedingungen. Die von uns entwickelten acht Gleichungen für den Massenausgleich erster Ordnung und vier Gleichungen für einen solchen zweiter Ordnung enthalten ausser den Winkeln $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ der einzelnen Kurbeln gegen die erste noch die reduzierten Momente Q der hin- und hergehenden, sowie R der rotierenden Massen, die Abstände $a_2 a_3 \dots a_n$ der einzelnen Getriebeebenen von derjenigen des ersten und schliesslich die Schubstangenverhältnisse $r:l$ jedes Getriebes. Dividieren wir nun unsere Gleichungen mit Q_1 bzw. R_1 , so erkennen wir, dass sie als Variable nur die Verhältnisse der fraglichen Momente enthalten, die wir abkürzungsweise

$$41) \quad \frac{Q_2}{Q_1} = q_2, \quad \frac{Q_3}{Q_1} = q_3 \dots \frac{Q_n}{Q_1} = q_n,$$

$$42) \quad \frac{R_2}{R_1} = \varrho_2, \quad \frac{R_3}{R_1} = \varrho_3 \dots \frac{R_n}{R_1} = \varrho_n$$

setzen wollen. Dasselbe Verfahren können wir auch mit den Grössen a wiederholen und deren Verhältnisse

$$43) \quad \frac{a_3}{a_2} = k_3, \quad \frac{a_4}{a_2} = k_4 \dots \frac{a_n}{a_2} = k_n$$

setzen. Endlich wollen wir auch noch die Verhältnisse der Quotienten $r:l$ bilden und schreiben:

$$44) \quad \frac{r_2 l_1}{l_2 r_1} = \lambda_2, \quad \frac{r_3 l_1}{l_3 r_1} = \lambda_3 \dots \frac{r_n l_1}{l_n r_1} = \lambda_n.$$

Alsdann lauten unsere Gleichungen in entwickelter Form, da $\alpha_1 = 0$:

$$\text{Ia) } \begin{cases} 1 + q_2 \cos \alpha_2 + q_3 \cos \alpha_3 + \dots + q_n \cos \alpha_n = 0, \\ q_2 \sin \alpha_2 + q_3 \sin \alpha_3 + \dots + q_n \sin \alpha_n = 0, \\ q_2 \cos \alpha_2 + q_3 k_3 \cos \alpha_3 + \dots + q_n k_n \cos \alpha_n = 0, \\ q_2 \sin \alpha_2 + q_3 k_3 \sin \alpha_3 + \dots + q_n k_n \sin \alpha_n = 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{II a)} \left\{ \begin{array}{l}
 1 + q_2 \cos \alpha_2 + q_3 \cos \alpha_3 + \dots + q_n \cos \alpha_n = 0, \\
 q_2 \sin \alpha_2 + q_3 \sin \alpha_3 + \dots + q_n \sin \alpha_n = 0, \\
 q_2 \cos \alpha_2 + q_3 k_3 \cos \alpha_3 + \dots + q_n k_n \cos \alpha_n = 0, \\
 q_2 \sin \alpha_2 + q_3 k_3 \sin \alpha_3 + \dots + q_n k_n \sin \alpha_n = 0;
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{III a)} \left\{ \begin{array}{l}
 1 + q_2 \lambda_2 \cos 2\alpha_2 + q_3 \lambda_3 \cos 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n \cos 2\alpha_n = 0, \\
 q_2 \lambda_2 \sin 2\alpha_2 + q_3 \lambda_3 \sin 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n \sin 2\alpha_n = 0, \\
 q_2 \lambda_2 \cos 2\alpha_2 + q_3 \lambda_3 k_3 \cos 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n k_n \cos 2\alpha_n = 0, \\
 q_2 \lambda_2 \sin 2\alpha_2 + q_3 \lambda_3 k_3 \sin 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n k_n \sin 2\alpha_n = 0.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Diese zwölf Gleichungen enthalten mithin je $n-1$ Winkel α , Momentenverhältnisse q und r , Doppelverhältnisse λ und $n-2$ Abstandsverhältnisse k , zusammen also $5n-6$ Variable, woraus man schliessen darf, dass eine weniger als vierkurbelige Maschine überhaupt nicht ausgleichbar (und zwar gleichzeitig von erster und zweiter Ordnung) wäre, für eine vier- und mehrkurbelige dagegen noch über wenigstens vier Grössen willkürlich verfügt werden könne. Ein ganz ähnliches Resultat würde sich ergeben, wenn man vom Ausgleich zweiter Ordnung absieht; es fallen dann die vier Bedingungen IIIa) und die $n-1$ Grössen λ weg, so dass acht Gleichungen noch $4n-5$ Veränderliche entsprechen. Bei vier Kurbeln hätte man alsdann noch eine frei verfügbare Grösse.

Diese Schlussfolgerungen setzen indessen voraus, dass unsere zwölf Gleichungen für jedes n mit einander praktisch verträglich, bezw. von einander unabhängig sind. Als praktisch unannehmbar wäre z.B. eine Lösung zu bezeichnen, bei der einer der Werte von $k=1$ würde, da dies ein Zusammenfallen zweier Getriebe-Ebenen bedeutet. Ebenso unzulässig ist die Bedingung, dass einer der Winkel α , bezw. eine Differenz $\alpha_m - \alpha_k = 0$ oder $=180^\circ$ wird, da alsdann die Totpunkte zweier Getriebe zusammenfallen, so dass die Gefahr entsteht, dass die Maschine nicht in jeder Lage anspringt, d.h. sich von selbst durch den Dampfdruck in Bewegung setzt. Um zu entscheiden, ob und wann diese Fälle eintreten, wollen wir zunächst einmal die mit dem Index 2 behafteten Glieder* eliminieren.

Wir erhalten so durch Subtraktion der dritten von der ersten bezw. der vierten von der zweiten Gleichung in Ia) bis IIIa):

$$\begin{array}{l}
 \text{I b)} \left\{ \begin{array}{l}
 1 + q_3 (1 - k_3) \cos \alpha_3 + \dots + q_n (1 - k_n) \cos \alpha_n = 0, \\
 q_3 (1 - k_3) \sin \alpha_3 + \dots + q_n (1 - k_n) \sin \alpha_n = 0;
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II b)} \left\{ \begin{array}{l}
 1 + q_3 (1 - k_3) \cos \alpha_3 + \dots + q_n (1 - k_n) \cos \alpha_n = 0, \\
 q_3 (1 - k_3) \sin \alpha_3 + \dots + q_n (1 - k_n) \sin \alpha_n = 0;
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

* Selbstverständlich hätten wir auch die mit einem anderen Index behafteten Glieder eliminieren können, da doch die Reihenfolge ganz willkürlich gewählt ist.

$$\text{IIIb) } \begin{cases} 1 + q_3 \lambda_3 (1 - k_3) \cos 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n (1 - k_n) \cos 2\alpha_n = 0, \\ q_3 \lambda_3 (1 - k_3) \sin 2\alpha_3 + \dots + q_n \lambda_n (1 - k_n) \sin 2\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Hierin lassen sich noch die entsprechenden Gleichungen der Gruppen Ia) und IIa) vereinigen zu

$$45) \quad (q_3 - \varrho_3)(1 - k_3) \cos \alpha_3 + \dots + (q_n - \varrho_n)(1 - k_n) \cos \alpha_n = 0,$$

$$46) \quad (q_3 - \varrho_3)(1 - k_3) \sin \alpha_3 + \dots + (q_n - \varrho_n)(1 - k_n) \sin \alpha_n = 0,$$

während für IIIb) keine weitere Vereinfachung möglich ist. Diese beiden Formeln gehen für eine Vierkurbelmaschine über in

$$45a) \quad (q_3 - \varrho_3)(1 - k_3) \cos \alpha_3 + (q_4 - \varrho_4)(1 - k_4) \cos \alpha_4 = 0,$$

$$46a) \quad (q_3 - \varrho_3)(1 - k_3) \sin \alpha_3 + (q_4 - \varrho_4)(1 - k_4) \sin \alpha_4 = 0.$$

Sind hierin q_3 und ϱ_3 , bzw. q_4 und ϱ_4 von einander verschieden, so müsste

$$47) \quad \text{tg } \alpha_3 = \text{tg } \alpha_4,$$

h. $\alpha_4 = \alpha_3$ oder $= 180 + \alpha_3$ sein. Dies besagt aber, dass die Kurbeln 3 und 4 entweder einander gleich oder gerade entgegengesetzt gerichtet sein sollen, eine praktisch unbrauchbare Anordnung. Mithin wird 47) hinfällig,* und es können, da k_3 und k_4 niemals $= 1$ werden, die Gleichungen 45a) und 46a) nur bestehen, wenn

$$q_3 = \varrho_3 \quad \text{und} \quad q_4 = \varrho_4$$

wird. Dies hat weiter, wie man aus Ia) und IIa) erkennt, die Gleichheit von $q_2 = \varrho_2$ zur Folge und führt wegen 41) und 42) auf den praktisch wichtigen Satz, dass bei ausgeglichenen Vierkurbelmaschinen die Momente der rotierenden Massen in allen Getrieben denjenigen der hin- und hergehenden proportional sein müssen.

* Auf ganz ähnliche Verhältnisse führt der Ausgleich von Dreikurbelmaschinen, der übrigens auch theoretisch nur in erster Ordnung, d. h. ohne Rücksicht auf IIIa) durchführbar ist. Auch hier muss zunächst $q_3 = \varrho_3$, $q_2 = \varrho_2$ sein, weiter aber erhält man aus Ia) zweite und vierte Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{mithin} \quad & \sin \alpha_3 = k_3 \sin \alpha_3, \\ & \alpha_3 = 0 \quad \text{oder} \quad = \pi \end{aligned}$$

und, da wegen der zweiten Gleichung dann auch $\sin \alpha_2 = 0$ sein muss,

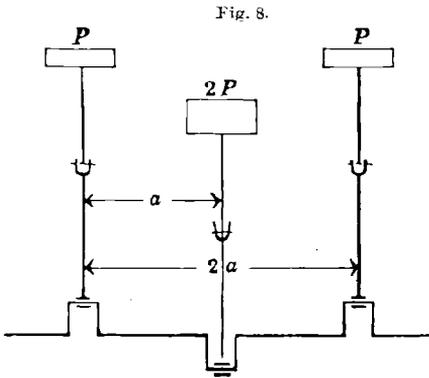
$$\cos \alpha_3 = +1 = -\cos \alpha_2.$$

Die Maschinenanordnung ist mithin bestimmt durch:

$$\begin{aligned} 1 - q_2 + q_3 &= 0, \\ q_2 - q_3 k_3 &= 0, \end{aligned}$$

was bei symmetrischer Anordnung (also $k = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 2$) auf die in Fig. 8 skizzierte Form führt. Diese ist indessen praktisch unbrauchbar, weil alle Totlagen der drei Kurbeln zu gleicher Zeit eintreten.

Diese Bedingung würde nun z. B. für die Niederdruckkurbeln an Schiffsmaschinen auf ganz enorme Gewichte führen, deren Unterbringung nicht immer möglich sein dürfte. Um in solchem Falle nicht durch mangelhaften Ausgleich schädliche Massendrücke im



ganzen System zu behalten, erscheint es zweckmässig, für die rotierenden Teile allein auf die schon oben erwähnte gewöhnliche Ausgleichung zurückzugreifen, also z. B. an den beiden Enden der Maschinenwelle rotierende Ausgleichsgewichte anzubringen, die Kurbeln selbst aber lediglich nach konstruktiven Erwägungen zu dimensionieren. Alsdann werden unsere Ausdrücke II) bzw. IIa) erst durch Hinzutreten der von

den Momenten B' und B'' der Ausgleichsgewichte herrührenden Glieder zum Verschwinden gebracht. Nennen wir die Entfernungen derselben von der Anfangskurbel (gemessen in der Richtung der gemeinsamen Drehaxe) b' und b'' und die Winkel ihrer Radien (d. i. der Verbindungslinien der Gewichtsschwerpunkte mit der Axe) mit der Anfangskurbel α' und α'' , so haben wir jetzt statt II):

$$\text{IIc)} \quad \begin{cases} B' \cos \alpha' + B'' \cos \alpha'' + \Sigma R \cos \alpha = 0, \\ B' \sin \alpha' + B'' \sin \alpha'' + \Sigma R \sin \alpha = 0, \\ B' b' \cos \alpha' + B'' b'' \cos \alpha'' + \Sigma R a \cos \alpha = 0, \\ B' b' \sin \alpha' + B'' b'' \sin \alpha'' + \Sigma R a \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst die Entfernungen b' und b'' als gegeben an, so folgt:

$$48) \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{b'' \Sigma R \sin \alpha - \Sigma R a \sin \alpha}{b' \Sigma R \cos \alpha - \Sigma R a \cos \alpha},$$

$$49) \quad B' = \frac{b' \Sigma R \sin \alpha - \Sigma R a \sin \alpha}{(b' - b'') \sin \alpha'} = \frac{b' \Sigma R \cos \alpha - \Sigma R a \cos \alpha}{(b' - b'') \cos \alpha'}$$

und ebenso $\operatorname{tg} \alpha''$ und B'' durch Vertauschen der Indices von b und a . Man erkennt hieraus, dass die Momente B und damit die Ausgleichsgewichte selbst um so kleiner ausfallen, je grösser ihre Entfernung von einander ist. Hiermit aber ist man nicht unbeschränkt, da die neuen Ausgleichsgewichte, um lediglich innerhalb des Maschinensystems zur Wirkung zu gelangen, auch innerhalb desselben angebracht werden müssen. Es ist deshalb nicht angängig, dieselben etwa auf Verlängerungen der Maschinenwelle zu setzen, da diese sonst, um nicht durch die Centrifugalkraft der Gewichte ausgebogen zu werden, ausser-

halb gelagert werden müsste. Auf diese Lager würde sich dann ein Teil der Wirkung unserer Ausgleichsgewichte übertragen und nur mehr der Rest in die Maschine gelangen. Schlick schlägt deshalb einfach vor, diese Gewichte an den beiden äussersten Kurbeln, selbstverständlich mit den ihnen zugehörigen Winkeln α' und α'' und einem passend gewählten Radius anzubringen.

Es ist nun evident, dass man dieses Verfahren, die als lediglich rotierend zu betrachtenden Massen für sich auszugleichen, auch auf mehr als vierkurbelige Maschinen ausdehnen kann. In der ausführenden Technik ist man hierzu sogar gezwungen, da man auf die Dimensionierung dieser Teile nach Festigkeitsrücksichten nicht verzichten darf. Alsdann aber fällt die ganze Gruppe II) bzw. IIa) aus unseren Rechnungen fort und wird durch vier für sich zu behandelnde Formeln IIc) ersetzt. Für das ursprüngliche Ausgleichsproblem bleiben mithin nur noch die acht Gleichungen Ia) und IIa) mit den Unbekannten q , α , k und λ . Setzt man, wie es in der Praxis aus Herstellungsgründen und mit Rücksicht auf den Raum für die Maschinen immer geschieht, die Verhältnisse $r:l$ alle einander gleich, so werden sämtliche $\lambda = 1$, und die Zahl der Unbekannten reduziert sich bei einer Maschine mit n Kurbeln auf $3n - 4$. Hiernach würden für die Fünfkurbelmaschine noch drei Grössen frei verfügbar bleiben, während eine Vierkurbelmaschine gerade durch unsere acht Gleichungen bestimmt wäre. Wir werden bei der analytischen Behandlung der letzteren sogleich die Notwendigkeit einer noch weiteren Einschränkung für den letztgenannten Fall kennen lernen.

5. Analytische Behandlung der Vierkurbelmaschine. Nach den letzten Bemerkungen brauchen wir uns nur noch mit dem Ausgleich der hin- und hergehenden Teile an der Vierkurbelmaschine zu beschäftigen, welche praktisch überhaupt die grösste Bedeutung besitzt. Für dieselbe haben wir zunächst aus der zweiten Gleichung Ib):

$$50) \quad q_3(k_3 - 1) \sin \alpha_3 + q_4(k_4 - 1) \sin \alpha_4 = 0.$$

Multiplizieren wir noch die dritte Gleichung Ia) mit $\sin \alpha_2$ und die vierte Gleichung mit $\cos \alpha_2$, so ergibt die Subtraktion beider

$$51) \quad q_3 k_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + q_4 k_4 \sin(\alpha_4 - \alpha_2) = 0.$$

Durch Verbindung von 50) und 51) folgt schliesslich:

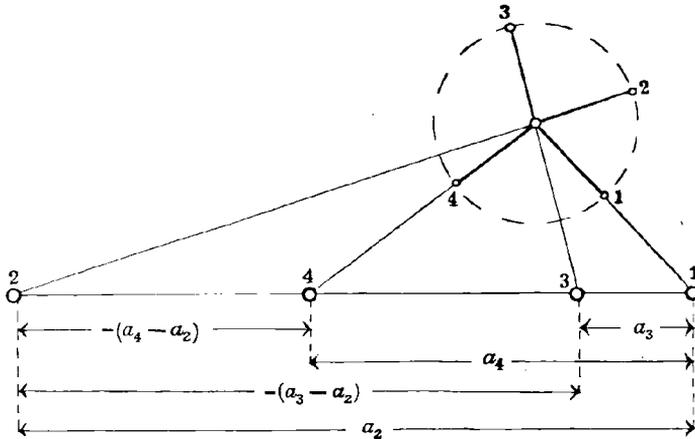
$$\frac{k_3(k_4 - 1)}{k_4(k_3 - 1)} = \frac{\sin \alpha_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sin \alpha_4 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

oder, wenn wir wieder für die k ihre Werte 43) einsetzen,

$$52) \quad \frac{a_3(a_4 - a_2)}{a_4(a_3 - a_2)} = \frac{\sin \alpha_3 \cdot \sin(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sin \alpha_4 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Diese von Prof. Schubert (Hamburg) aufgedeckte Beziehung* lehrt, dass zwischen den Abständen a der einzelnen Getriebe einer Vierkurbelmaschine dann dasselbe Doppelverhältnis wie zwischen den Sinus der entsprechenden Kurbelwinkel besteht, wenn die Maschine in erster Ordnung (nach Schlickscher Methode) ausgeglichen ist. Trägt man also, wie es in Figur 9 geschehen ist, die Abstände a der einzelnen Getriebe von einem Punkte aus gerechnet auf einer Geraden ab, so kann diese Gerade in eine solche (perspektivische) Lage gebracht werden, dass die Endpunkte der Abstände von den Verlängerungen der entsprechenden mit ihren Winkeln um einen Punkt gruppierten Kurbelradien geschnitten werden. Die Aufzeichnung der Figur 9 bildet nun nicht nur ein Kriterium für den Massenausgleich erster Ordnung bei vier Kurbeln, sie lehrt auch

Fig. 9.



durch den Augenschein, dass keiner der Winkel $\alpha = 0$ oder $=\pi$ werden darf, da sonst die Ebenen zweier Getriebe zusammenfallen. Aus diesem Grunde ist auch eine vollkommen symmetrische Anordnung aller Kurbeln in Kreuzform mit den Winkeln:

$$\alpha_2 = 90^\circ, \quad \alpha_3 = 180^\circ, \quad \alpha_4 = 270^\circ$$

(siehe Fig. 10) mit unseren Bedingungen unvereinbar, während der Verwendung zweier rechter Winkel so lange nichts im Wege steht, als sie im Kurbelkreis (wie in Fig. 11) nicht unmittelbar aufeinander folgen. Soll nun eine Vierkurbelmaschine auch noch einem Massenausgleich zweiter Ordnung unterworfen sein, so müssen ausser Ia) und IIa) auch die vier Gleichungen IIIa) erfüllt sein. Aus diesen lassen sich aber die Grössen $q\lambda$ ebenso eliminieren, wie die q aus Ia), und

* H. Schubert, Zur Theorie des Schlickschen Problems. Mitteilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg. 1898.

wir erhalten als Ergebnis das der Gleichung 52) genau entsprechende Doppelverhältnis:

$$53) \quad \frac{a_3(a_4 - a_2)}{a_4(a_3 - a_2)} = \frac{\sin 2\alpha_3 \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sin 2\alpha_4 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_2)}$$

Es fragt sich nun, ob diese beiden Doppelverhältnisse überhaupt mit einander vereinbar sind. Setzen wir sie einander gleich und lösen die Sinus der Doppelwinkel in 53) auf, so bleibt:

$$\cos \alpha_3 \cos(\alpha_4 - \alpha_2) = \cos \alpha_4 \cos(\alpha_3 - \alpha_2),$$

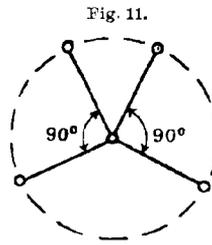
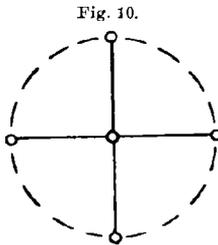
oder nach Ausführung:

$$(\operatorname{tg} \alpha_4 - \operatorname{tg} \alpha_3) \sin \alpha_2 = 0,$$

bezw., da $\sin \alpha_2$ nicht verschwinden darf:

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \operatorname{tg} \alpha_3,$$

wie in 47). Die praktische Unmöglichkeit dieser Bedingung haben wir aber schon oben erkannt, so dass wir jetzt den Satz erhalten,



dass ein vollständiger gleichzeitiger Ausgleich erster und zweiter Ordnung bei Vierkurbelmaschinen unmöglich ist.* Es fragt sich nun, ob man auf Grund dieser Thatsache für diese Maschinengattung auf den Ausgleich zweiter Ordnung überhaupt verzichten soll. Dann besteht immerhin für Schiffe die Gefahr, dass beim Zusammenfallen der Umdrehungszahl der Maschine mit der Schwingungszahl des Schiffskörpers (als elastischer Träger betrachtet) durch die sich summierenden Impulse der Massendrucke zweiter Ordnung Durch-

* Auch diesen Satz hat Schubert (siehe a. a. O.) zuerst, wenn auch auf etwas anderem Wege wie oben bewiesen. Es lässt sich übrigens leicht zeigen, dass der Grund für die Unvereinbarkeit der Gleichungsgruppe Ia) und IIIa) für Vierkurbelmaschinen praktisch allein auf der Unvereinbarkeit der Ausgleichsbedingungen erster und zweiter Ordnung für die Momente beruht. Eliminiert man nämlich aus den beiden letzten Gleichungen Ia) und IIIa) das Verhältnis q_2 , bzw. $q_2 \lambda_2$, so bleibt:

$$q_3 k_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_3) + q_4 k_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_4) = 0,$$

$$q_3 k_3 \lambda_3 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + q_4 k_4 \lambda_4 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_4) = 0,$$

oder, da weder $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ noch $\sin(\alpha_2 - \alpha_4)$ verschwinden darf:

$$\lambda_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) = \lambda_4 \cos(\alpha_2 - \alpha_4).$$

Werden nun die Grössen λ , wie es praktisch immer aus baulichen Gründen geschieht, einander gleich angenommen, so müsste wieder, wie oben, $\alpha_3 = \alpha_4$ werden. Deshalb muss man für die Vierkurbelmaschine auf den Ausgleich der Momente in der zweiten Ordnung verzichten.

biegungen von unzulässiger Grösse hervorgerufen werden, während die Momente keine so erhebliche Rolle spielen. Man wird also jedenfalls die Massendrucke vollständig auszugleichen suchen. Wir werden demnach neben den Gleichungen Ia) von unseren Gleichungen IIIa) nur mehr die beiden ersten benutzen und diese durch die der praktischen Ausführung durchaus gleichher Kurbelradien und Schubstangenlängen entsprechende Annahme:

$$54) \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

vereinfachen. Man erkennt nun sofort, dass man aus den beiden ersten Gleichungen von Ia) einerseits und IIIa) andererseits die Verhältnisse q eliminieren kann, woraus eine Beziehung zwischen den Winkeln resultiert. Umgekehrt kann man auch die drei Winkel eliminieren und behält sodann eine Beziehung zwischen den drei Verhältnissen q_2, q_3, q_4 .

Wir wollen die erstere Elimination, welche einfacher ist, durchführen. Hierfür lautet unser Gleichungssystem wegen 54):

$$55) \quad 1 + q_2 \cos \alpha_2 + q_3 \cos \alpha_3 + q_4 \cos \alpha_4 = 0,$$

$$56) \quad q_2 \sin \alpha_2 + q_3 \sin \alpha_3 + q_4 \sin \alpha_4 = 0,$$

$$57) \quad 1 + q_2 \cos 2\alpha_2 + q_3 \cos 2\alpha_3 + q_4 \cos 2\alpha_4 = 0,$$

$$58) \quad q_2 \sin 2\alpha_2 + q_3 \sin 2\alpha_3 + q_4 \sin 2\alpha_4 = 0.$$

Eliminiert man z. B. q_2 aus 55) und 56) bzw. 57) und 58), so bleibt:

$$59) \quad \begin{cases} \sin \alpha_2 + q_3 \sin (\alpha_2 - \alpha_3) + q_4 \sin (\alpha_2 - \alpha_4) = 0, \\ \sin 2\alpha_3 + q_3 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + q_4 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_4) = 0. \end{cases}$$

Ebenso erhalten wir durch Elimination von q_3 und q_4 die Gruppen:

$$60) \quad \begin{cases} \sin \alpha_3 + q_2 \sin (\alpha_3 - \alpha_2) + q_4 \sin (\alpha_3 - \alpha_4) = 0, \\ \sin 2\alpha_3 + q_2 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_2) + q_4 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) = 0. \end{cases}$$

$$61) \quad \begin{cases} \sin \alpha_4 + q_2 \sin (\alpha_4 - \alpha_2) + q_3 \sin (\alpha_4 - \alpha_3) = 0, \\ \sin 2\alpha_4 + q_2 \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2) + q_3 \sin 2(\alpha_4 - \alpha_3) = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man nun diese sechs Gleichungen bzw. mit

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha_3 - \alpha_4), \quad \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4), \quad \sin(\alpha_4 - \alpha_2), \quad \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2), \\ & \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \quad \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3), \end{aligned}$$

was darum erlaubt ist, weil keiner der Winkel zwischen zwei Kurbeln verschwinden darf, und addiert, so verschwinden die Faktoren von q_2, q_3 und q_4 , und es bleibt:

$$62) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sin \alpha_2 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 2\alpha_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \\ & + \sin \alpha_3 \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2) + \sin 2\alpha_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2) \\ & + \sin \alpha_4 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2\alpha_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned} \right\} = 0,$$

oder nach Auflösung der Funktionen der Doppelwinkel:

$$62a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_2 \sin (\alpha_3 - \alpha_4) [\cos (\alpha_3 - \alpha_4) + \cos \alpha_2] \\ + \sin \alpha_3 \sin (\alpha_4 - \alpha_2) [\cos (\alpha_4 - \alpha_2) + \cos \alpha_3] \\ + \sin \alpha_4 \sin (\alpha_2 - \alpha_3) [\cos (\alpha_2 - \alpha_3) + \cos \alpha_4] \end{array} \right\} = 0.$$

Setzt man hierin die Produkte

$$\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2} \cos (u - v) - \frac{1}{2} \cos (u + v),$$

sowie die Summen

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$$

und beachtet ferner, dass

$$\cos^2 u = 2 \cos^2 \frac{u}{2} - 1,$$

so ergibt sich, wenn wir schliesslich der Einfachheit halber schreiben:

$$\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}{2} = \xi,$$

$$\cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}{2} = \eta,$$

$$\cos \frac{-\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = \xi,$$

aus 62a):

$$62b) \quad (\xi^2 - \eta^2) \xi \eta + (\eta^2 - \xi^2) \eta \xi + (\xi^2 - \xi^2) \xi \xi = 0,$$

oder

$$62c) \quad (\xi - \eta)(\eta - \xi)(\xi - \xi)(\xi + \eta + \xi) = 0.$$

Hierin dürfen aber die Ausdrücke:

$$\xi - \eta = 2 \sin \frac{\alpha_3}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2},$$

$$\eta - \xi = 2 \sin \frac{\alpha_3}{2} \sin \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{2},$$

$$\xi - \xi = 2 \sin \frac{\alpha_4}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_3}{2}$$

nicht verschwinden, damit nicht zwei Kurbeln zusammenfallen, bezw. sich gerade gegenüberstehen, so dass sich unsere Elimination auf

$$62d) \quad \xi + \eta + \xi = 0$$

reduziert. Führt man schliesslich noch die aufeinanderfolgenden Kurbelwinkel ein, setzt also (siehe Fig. 12):

$$\alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = \beta, \quad \alpha_4 - \alpha_3 = \gamma, \quad \alpha_4 = 360^\circ - \delta,$$

so wird:

$$63) \quad \xi = \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \eta = \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}, \quad \xi = -\cos \frac{\beta - \delta}{2},$$

und unser Ergebnis lautet:

$$64) \quad \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} + \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = \cos \frac{\beta - \delta}{2},$$

oder

$$64a) \quad 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\beta - \delta}{2}.$$

Infolge der Vertauschbarkeit der Winkel kann man natürlich auch diese Gleichung in der Form:

$$64b) \quad 2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

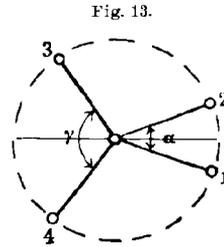
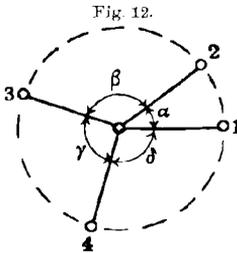
schreiben.

Die ebenfalls von Schubert* zuerst aufgestellte Formel 64) ermöglicht uns, aus zwei gegebenen Winkeln z. B. β und δ die andern beiden so zu bestimmen, dass unsere Gleichungen 55) bis 58) erfüllt bleiben. Für eine Neuberechnung einer soweit als möglich ausgeglichenen Vierkurbelmaschine wird demnach 64) den Ausgangspunkt bilden.

Dabei verfährt man am einfachsten so, dass man z. B. bei gegebenen gegenüber liegenden Winkeln β und δ mit

$$\alpha + \gamma = 360^\circ - (\beta + \delta)$$

die Differenz $\alpha - \gamma$ aus 64) ermittelt, woraus sich dann α und γ einzeln ergeben. Sind dagegen zwei anliegende Winkel, z. B. α und β



gegeben, so empfiehlt es sich, von 64a) auszugehen und daraus für die Berechnung von γ den vierten Winkel

$$\delta = 360^\circ - (\alpha + \beta) - \gamma$$

zu eliminieren. Von grosser praktischer Bedeutung ist der Spezialfall $\beta = \delta$, für den Schlick** die aus 64c) folgende Gleichung:

$$65) \quad \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

* In seiner schon angeführten Abhandlung deutet Schubert nur an, dass er zur Gleichung 64) durch Zerlegung der Eliminationsdeterminante der Gleichung 55) bis 58) gelangt. In dem mir brieflich mitgeteilten ausführlichen Beweis führt dann Schubert, nachdem er durch Anwendung des Laplaceschen Satzes Gleichung 62) bzw. 62a) erhalten hat, sofort die Winkel zwischen den Pleuellagern $\alpha\beta\gamma\delta$ durch Gleichung 64) ein, nur mit dem Unterschiede, dass er auch

$$\cos \frac{\beta - \delta}{2} = + \xi$$

setzt. Hierdurch werden die Formeln 62b) und 62c) unsymmetrisch für ξ, η, ζ . Aus diesem Grunde habe ich die Einführung der Winkel $\alpha\beta\gamma\delta$ bis zum Schluss verschoben.

** Schlicks darauf bezügliche eigene Untersuchungen sind bisher nicht veröffentlicht, sondern nur in einer als Manuskript gedruckten Anweisung für die Maschinenfabriken, welche seine Ausgleichungsmethode anwenden, enthalten.

schon vor Schubert aufgestellt hatte. Derselbe ergibt nämlich, wie aus Figur 13 hervorgeht, eine symmetrische Anordnung der Kurbeln im Kreise und zwar zu einem Durchmesser, welcher die Winkel α und γ halbiert. Um zu erkennen, welche weiteren Folgen diese Symmetrie hat, wollen wir zunächst die Verhältnisse $q_2 q_3 q_4$ bestimmen. Es geschieht dies nach dem Vorgange von Schlick am bequemsten, indem man in den Gleichungen 55) bis 58) zwei Glieder auf die andere Seite bringt und quadriert. Auf diese Weise ergibt sich aus 55) und 56):

$$1 + 2q_2 \cos \alpha_2 + q_2^2 \cos^2 \alpha_2 = q_3^2 \cos^2 \alpha_3 + 2q_3 q_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + q_4^2 \cos^2 \alpha_4,$$

$$q_2^2 \sin^2 \alpha_2 = q_3^2 \sin^2 \alpha_3 + 2q_3 q_4 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 + q_4^2 \sin^2 \alpha_4,$$

und hieraus durch Addition:

$$1 + 2q_2 \cos \alpha_2 + q_2^2 = q_3^2 + q_4^2 + 2q_3 q_4 \cos(\alpha_3 - \alpha_4).$$

Ebenso folgt aus 57) und 58):

$$1 + 2q_2 \cos 2\alpha_2 + q_2^2 = q_3^2 + q_4^2 + 2q_3 q_4 \cos 2(\alpha_3 - \alpha_4).$$

Diese Formeln besagen lediglich, dass sich die Resultanten von je zwei Vektoren, also 1 und q_2 bzw. q_3 und q_4 aufheben. Aus ihnen geht durch Subtraktion hervor:

$$q_2(\cos \alpha_2 - \cos 2\alpha_2) = q_3 q_4 [\cos(\alpha_3 - \alpha_4) - \cos 2(\alpha_3 - \alpha_4)],$$

oder auch

$$66) \quad q_2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{3}{2} \alpha_2 = q_3 q_4 \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2} \sin \frac{3}{2} (\alpha_3 - \alpha_4).$$

Hätte man andere Glieder auf die andere Seite gebracht, d. h. die Vektoren q anders gruppiert, so würde man noch die Gleichungen:

$$67) \quad q_3 \sin \frac{\alpha_3}{2} \sin \frac{3}{2} \alpha_3 = q_4 q_2 \sin \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{2} \sin \frac{3}{2} (\alpha_4 - \alpha_2),$$

$$68) \quad q_4 \sin \frac{\alpha_4}{2} \sin \frac{3}{2} \alpha_4 = q_2 q_3 \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \sin \frac{3}{2} (\alpha_2 - \alpha_3)$$

erhalten. Durch Multiplikation je zweier dieser Formeln 66) bis 68) ergeben sich nunmehr direkt die Werte von q_2^2 , q_3^2 und q_4^2 , und zwar in einer Form, die für ihre logarithmische Berechnung aus den Winkel-funktionen recht bequem ist. Setzt man nun im Schlickschen Spezialfalle $\beta = \delta$, bzw. $\alpha_3 - \alpha_2 = 360 - \alpha_4$, so wird:

$$69) \quad q_2 = 1 \quad \text{und} \quad q_3 = q_4 = q.$$

Setzen wir dies in eine unserer oben quadrierten Gleichungen ein, so folgt, mit $\alpha_2 = \alpha$ und $\alpha_4 - \alpha_3 = \gamma$:

$$\text{also} \quad 2 + 2 \cos \alpha = 2q^2 + 2q^2 \cos \gamma,$$

$$70) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = q \cos \frac{\gamma}{2},$$

Durch Kombination mit der für denselben Fall giltigen Formel 65) ergibt sich weiter

$$71) \quad q = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{oder} \quad 1 = 2q \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

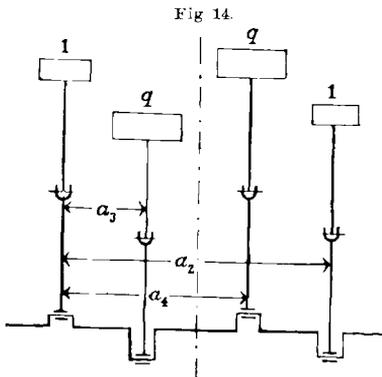
Setzen wir schliesslich die hier ermittelten Spezialbeziehungen in die Gleichungen 50) und 51) für die Abstandsverhältnisse k_3 und k_4 ein und multiplizieren beide, so folgt:

$$72) \quad k_3 + k_4 = 1$$

oder mit Rücksicht auf 43):

$$72a) \quad a_3 + a_4 = a_2, \text{ bzw. } a_3 = -a_2,$$

d.h. die dritte Getriebe-Ebene ist von der ersten ebenso weit entfernt, wie die zweite von der vierten. Damit aber, und hierin liegt die grosse praktische Bedeutung dieser von Schlick vorgeschlagenen Anordnung, wird das ganze System insofern symmetrisch, als die beiden Getriebe mit den relativen Momenten 1 in der Mitte, die anderen mit den Momenten q in gleichen Entfernungen von diesen ausserhalb liegen (Fig. 14). Beachtenswert ist hierbei noch, dass die im Kurbelkreis (Fig. 13) aufeinander folgenden Getriebe nicht auch in derselben Folge sich auf der Welle aneinanderreihen, eine Thatsache, die



übrigens schon aus Figur 9 für den allgemeinen Fall der Vierkurbelmaschine geschlossen werden konnte.

Die zuletzt ermittelte Beziehung 72) war durch Multiplikation der zwei Gleichungen 51) und 52) erhalten worden; beide für sich behandelt hätten aber mit Rücksicht auf 69) und 71) auch die Werte k_3 und k_4 getrennt ergeben. Hätten wir umgekehrt den Wert von $k_3:k_4$, oder was dasselbe ist, das Verhältnis des Abstandes der beiden äusseren zum Abstände der beiden inneren Getriebe-Ebenen festgesetzt, so würde man aus diesen Gleichungen im Verein mit 65) die Winkel und schliesslich aus 71) die Grösse q bestimmen können.

Beispiel.

Wir wollen als Beispiel den praktisch wichtigen Spezialfall betrachten, für welchen alle Getriebe-Ebenen gleich weit von einander entfernt sind, d.h. wir setzen (Fig. 14) voraus, dass

$$73) \quad a_2 = 3a_3 = 2(a_4 - a_3) \quad \text{oder} \quad a_4 = 2a_3.$$

Da hiermit auch $k_4 = 2k_3$ wird, so geht Gleichung 51) wegen $q_3 = q_4 = q$ über in

$$\sin(\alpha_3 - \alpha_2) + 2\sin(\alpha_4 - \alpha_2) = 0.$$

Mit $\alpha_3 - \alpha_2 = \beta$ und $\alpha_4 - \alpha_2 = 360 - (\alpha + \delta) = \beta + \gamma$ können wir aber hierfür schreiben:

$$74) \quad \sin\beta + 2\sin(\beta + \gamma) = 0.$$

Andererseits haben wir, da nach Schlicks Vorschlag $\beta = \delta$ sein soll, auch

$$\beta = 180 - \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad \text{und} \quad \beta + \gamma = 180 - \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

sowie aus 64)

$$75) \quad \cos \beta + \cos(\beta + \gamma) = -1.$$

Die Formeln 74) und 75) führen nun auf quadratische Gleichungen für $\cos \beta$ bzw. $\cos(\beta + \gamma)$, von deren Wurzeln nur diejenigen brauchbar sind, welche zwischen $+1$ und -1 liegen. Es sind dies die Werte

$$\cos \beta = -0,131 \quad \text{und} \quad \cos(\beta + \gamma) = -0,869,$$

woraus

$$\beta = 97^{\circ} 25' \quad \text{und} \quad \gamma = 112^{\circ} 5'$$

folgt. Wegen $\delta = \beta$ ist noch

$$\alpha = 52^{\circ} 45',$$

wodurch die Anordnung der Kurbeln im Kreise eindeutig bestimmt ist. Schliesslich folgt noch mit

$$\frac{\gamma}{2} = 56^{\circ} 2,5' \quad \text{und} \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 0,311$$

aus Gleichung 71) $q = 1,61$.

Hätten wir z. B. eine vertikal stehende doppeltwirkende Schiffsmaschine mit vierfacher (d. h. auf vier Cylinder verteilter) Expansion von zusammen 3- bis 4000 Pferdestärken zu konstruieren, deren jeder Cylinder dieselbe Arbeit leisten soll, so werden die Dimensionen der arbeitenden Teile bei gegebenem Dampfdruck (13—15 kg/qcm absolut) im Kessel um so kleiner ausfallen, je rascher die Maschine läuft, also je grösser ihr Hub und ihre Umdrehungszahl ist. Infolge der gleichen Arbeitsverteilung werden die mittleren Kolbendrücke bei demselben Hub ganz gleich ausfallen und auch die maximale Differenz der Dampfdrücke auf beiden Kolbenseiten in allen Cylindern keine erheblichen Unterschiede aufweisen. Hieraus ergeben sich weiterhin bei gleichen Schubstangenlängen aus Festigkeitsrücksichten für alle Cylinder dieselben Dimensionen der Kolbenstange, des Kreuzkopfes, der Schubstange und schliesslich der Kurbeln, während allein die Kolben um so schwerer ausfallen, je grösser die Cylinderdurchmesser sind. Für unsere Maschine* betrage nun der gemeinsame Hub (d. i. der doppelte Kurbelradius) 1,4 m, die Umdrehungszahl 75 pro Minute und die Schubstangenlänge überall 3 m. Alsdann würde die Festigkeitsrechnung auf solche Dimensionen führen, dass eine Kolbenstange ca. 500 kg, ein Kreuzkopf 650 kg, die Schubstange 1650 kg und schliesslich eine Kurbel 2400 kg wiegt. Liegt der Schwerpunkt der Schubstange 2 m vom Kreuzkopfbzapfen entfernt, so trägt dieselbe [siehe oben unsere Gleichung 39) und 40)] zu den hin- und hergehenden Gewichten

$$1650 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 550 \text{ kg}$$

bei, während als rotierend der Rest von 1100 kg aufzufassen ist. Damit beträgt das Gewicht der hin- und hergehenden Teile ausser dem Kolben für alle Getriebe

$$500 + 650 + 550 = 1700 \text{ kg},$$

das der rotierenden dagegen

$$2400 + 1100 = 3500 \text{ kg}.$$

Das Moment der letzteren wird dann, wenn wir um den Schwerpunkt der Kurbelmasse (was mit der Wirklichkeit genügend gut übereinstimmt) im Kurbelzapfen selbst denken, $0,7 \cdot 3500 \text{ m/kg}$. Für die Dimensionierung der Kolben wollen

* Die obenstehenden Werte stimmen ungefähr mit denen der Maschinen des vom „Vulkan“ in Stettin gebauten Postdampfers „Friedrich der Grosse“ überein. Die Ausführung der Festigkeitsrechnungen habe ich, da nicht zu unserem Gegenstand gehörig, fortgelassen.

wir nun unsere oben aus den Schlickschen Ausgleichsbedingungen erhaltenen Werte benutzen, indem wir voraussetzen, dass die Cylinder alle 2 m von einander entfernt sind. Diese Bedingungen besagen aber lediglich, dass die hin- und hergehenden Teile der beiden inneren Getriebe, je 1,61 mal so schwer sein sollten als die jedes der äusseren Getriebe. Wir müssen mithin wenigstens das vollständige Gewicht eines Getriebes kennen und wählen hierzu das des ersten Mitteldruckcylinders. Für diesen würde sich aus Festigkeitsgründen ein Kolbengewicht von etwa 600 kg ergeben. Dann ist hierfür unter Wiedereinführung unserer früheren Bezeichnung Q [siehe Gleichung 39]:

$$\frac{Q_2}{r} = 1700 + 600 = 2300 \text{ kg}$$

und wegen 69):

$$\frac{Q_1}{r} = 2300 \text{ kg,}$$

$$\frac{Q_3}{r} = \frac{Q_4}{r} = 2300 \cdot 1,61 = 3700 \text{ kg,}$$

so dass der sonst etwas kleinere Kolben des Hochdruckcylinders ebenfalls 600 kg, die beiden anderen aber je 2000 kg wiegen müssten. Sollten diese letzteren Gewichte wegen des grossen Durchmessers des Niederdruckcylinders etwa auf zu schwache Kolbendimensionen führen, so müsste überhaupt von diesem ausgegangen werden.

Nunmehr bleibt uns noch die Ausgleichung der Massenwirkung der lediglich als rotierend anzusehenden Teile übrig, die, wie in § 4 gezeigt wurde, getrennt von der oben für sich und zweckmässig durch zwei an den äussersten beiden Kurbeln anzubringende Gegengewichte durchzuführen ist. Wir erhalten zunächst die unausgeglichenen Momente, da alle R und r gleich sind, zu

$$\Sigma R \cos \alpha = 0,7 \cdot 3500 (1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4),$$

$$\Sigma R \sin \alpha = 0,7 \cdot 3500 (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4),$$

$$\Sigma Ra \cos \alpha = 0,7 \cdot 3500 (a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos \alpha_4),$$

$$\Sigma Ra \sin \alpha = 0,7 \cdot 3500 (a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4).$$

Hierin ist nach unseren obigen Ergebnissen:

$$\alpha_2 = \alpha = 52^\circ 45', \quad \alpha_3 = \alpha + \beta = 150^\circ 20', \quad \alpha_4 = -\delta = -97^\circ 35',$$

$$\cos \alpha_2 = 0,605, \quad \cos \alpha_3 = -0,869, \quad \cos \alpha_4 = -0,131,$$

$$\sin \alpha_2 = 0,796, \quad \sin \alpha_3 = +0,495, \quad \sin \alpha_4 = -0,991,$$

$$a_2 = 6 \text{ m,} \quad a_3 = 2 \text{ m,} \quad a_4 = 4 \text{ m,}$$

und damit wird:

$$\Sigma R \cdot \cos \alpha = 0,605 \cdot 2450, \quad \Sigma R \sin \alpha = 0,300 \cdot 2450,$$

$$\Sigma Ra \cos \alpha = 1,368 \cdot 2450, \quad \Sigma Ra \sin \alpha = 1,802 \cdot 2450.$$

Denken wir uns nach Schlicks Vorgehen die Gegengewichte, welche diese Momente auszugleichen haben, an den beiden äussersten Kurbeln (siehe Fig. 14) angebracht, so sind ihre Abstände von der ersten Kurbel:

$$b' = 0 \quad \text{und} \quad b'' = a_2 = 6 \text{ m,}$$

und wir erhalten aus unseren Gleichungen 48) und 49):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{a_2 \Sigma R \sin \alpha - \Sigma Ra \sin \alpha}{a_2 \Sigma R \cos \alpha - \Sigma Ra \cos \alpha} = \frac{6 \cdot 0,3 - 1,802}{6 \cdot 0,605 - 1,368} = -0,00121,$$

$$\alpha' = 179^\circ 56';$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{-\Sigma Ra \sin \alpha}{-\Sigma Ra \cos \alpha} = \frac{1,802}{1,368} = +1,317,$$

$$\alpha'' = 232^\circ 47';$$

$$B' = \frac{a_2 \Sigma R \sin \alpha - \Sigma R a \sin \alpha}{-a_2 \sin \alpha'} = \frac{6 \cdot 0,3 - 1,802}{-6 \cdot 0,00121} \cdot 2450 = 0,275 \cdot 2450 \text{ m/kg,}$$

$$B'' = \frac{-\Sigma R a \sin \alpha}{a_2 \sin \alpha''} = \frac{1,802}{6 \cdot 0,796} = 0,377 \cdot 2450 \text{ m/kg.}$$

Die beiden Winkel unterscheiden sich aber nur um wenige Bogenminuten von den Werten 180° und $\alpha_2 + 180^\circ$, so dass die gesuchten Gegengewichte den beiden äussersten Kurbeln fast genau gegenüber stehen müssen. Ihre Grösse ist aus B' und B'' ebenfalls sofort mit 674 kg und 924 kg zu entnehmen, wenn man sich dieselben auf den Kurbelradius reduziert denkt. Man erkennt übrigens, dass sie nur kleine Bruchteile der auf den Kurbelradius bezogenen rotierenden Massen darstellen, so dass ihre Unterbringung keine Schwierigkeiten verursacht.

Damit ist unsere Vierkurbelmaschine soweit ausgeglichen, als dies überhaupt erreichbar ist. Unausgeglichen bleibt allein das Moment zweiter Ordnung, welches Drehungen in der gemeinsamen Ebene aller Getriebeaxen und der Welle hervorzurufen bestrebt ist. Die Grösse dieses Momentes berechnet sich aus 34) zu

$$76) \quad \begin{cases} \Sigma(X\alpha) = \left(\varepsilon^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dt} \sin 2\varphi \right) \frac{r}{gl} \Sigma Q a \cos 2\alpha \\ - \left(\varepsilon^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dt} \cos 2\varphi \right) \frac{r}{gl} \Sigma Q a \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Hierin ist aber nach unseren obigen Ermittlungen:

$$Q_1 = Q_2 = 0,7 \cdot 2300 = 1610 \text{ m/kg,}$$

$$Q_3 = Q_4 = 0,7 \cdot 3700 = 2590 \text{ m/kg,}$$

und bei einer Stangenlänge von 3 m wird:

$$\frac{r}{l} = \frac{0,7}{3,0} = 0,233, \quad \frac{r}{gl} = 0,0238.$$

Weiter ist

$$2\alpha_2 = 105^\circ 45', \quad 2\alpha_3 = 300^\circ 40', \quad 2\alpha_4 = 164^\circ 50',$$

$$\cos 2\alpha_2 = -0,271, \quad \cos 2\alpha_3 = +0,510, \quad \cos 2\alpha_4 = -0,965,$$

$$\sin 2\alpha_2 = -0,962, \quad \sin 2\alpha_3 = -0,860, \quad \sin 2\alpha_4 = +0,262,$$

$$\alpha_2 = 6 \text{ m,} \quad \alpha_3 = 2 \text{ m,} \quad \alpha_4 = 4 \text{ m,}$$

mithin

$$\frac{r}{gl} \Sigma Q a \cos 2\alpha = 0,0238 [6 \cdot 0,271 \cdot 1610 + (2 \cdot 0,510 - 4 \cdot 0,965) 2590] = -237,4,$$

$$\frac{r}{gl} \Sigma Q a \sin 2\alpha = 0,0238 [6 \cdot 0,962 \cdot 1610 - (2 \cdot 0,860 - 4 \cdot 0,262) 2590] = +179,8.$$

Um nun eine Vorstellung über die Bedeutung des ganzen Momentes zu gewinnen, wollen wir die Umdrehungsgeschwindigkeit zunächst einmal als unveränderlich* voraussetzen; dann ist die Winkelgeschwindigkeit bei 75 Umdrehungen in der Minute $\varepsilon = \frac{75 \cdot \pi}{30} = 7,854$ und $\varepsilon^2 = 61,685$, und wir haben statt 76)

$$76a) \quad \Sigma(X\alpha) = -14640 \cos 2\varphi + 11090 \sin 2\varphi.$$

Dieser Ausdruck erreicht ein absolutes Maximum von etwa 18400 m/kg vier Mal während jeder Umdrehung, und zwar bei den Ausschlagswinkeln $\varphi = 71,5^\circ$, $161,5^\circ$, $251,5^\circ$ und $341,5^\circ$ der ersten Kurbel aus ihrer Anfangslage.

* Es sei ausdrücklich bemerkt, dass diese bisher immer bei der Behandlung der Massendruckprobleme gemachte Annahme mit der Wirklichkeit nur annähernd vereinbar ist (siehe Vorbemerkung).

Da die (schon ausgeglichenen) absoluten Momente der einzelnen hin- und hergehenden Gewichte, bezogen auf die erste Kurbel,

$$M = \frac{e^2}{g} Q a$$

sich zu $M_2 = 59760 \text{ m/kg}$, $M_3 = 32040 \text{ m/kg}$ und $M_4 = 64080 \text{ m/kg}$

ergeben, so erkennt man, dass das nicht ausgeglichene Moment $\Sigma(Xa)$ mit obigem Maximalwerte jedenfalls nicht zu vernachlässigen ist. Es hat, wie schon in § 3 erwähnt, das Bestreben, Pendelungen des ganzen Systems um eine zur Welle und den einzelnen Cylinderaxen senkrechte Axe hervorzurufen, deren Grösse ausser durch die Gesamtmasse der Maschine und des mit derselben fest verbundenen Körpers (z. B. des Schiffs- oder Lokomotivgestells) noch durch das Beharrungsvermögen (Deviationswiderstand) der als Kreislauf aufzufassenden Welle und aller mit ihr rotierenden Teile bestimmt wird.

6. Graphische Behandlung der Vierkurbelmaschine. Die unserer analytischen Behandlung des Ausgleichsproblems zu Grunde liegenden Formeln I), II), III) bzw. Ia, IIa, IIIa) können in einfacher Weise verdeutlicht werden, wobei die Eigenschaften des Kurbelgetriebes und damit

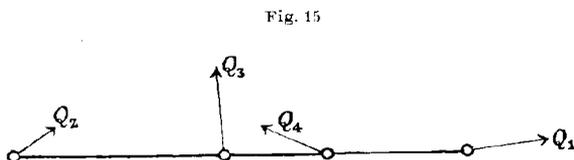


Fig. 15

ihr Ursprung ganz aus der Betrachtung herausfällt. Fasst man nämlich die Grössen Q bzw. R als Kräfte auf und lässt sie an der Welle dort, wo die entsprechenden Kurbeln sitzen, mit den Schränkungswinkeln

derselben senkrecht zur Welle angreifen (Fig. 15), so drücken unsere Gleichungen I) und II) nur aus, dass die fraglichen Kräfte an der starren Welle sich im Gleichgewichte befinden. Die Gruppe III) bedeutet schliesslich, dass dieses Gleichgewicht noch bestehen bleibt, wenn wir statt der Kräfte Q solche vom Betrage $Q \frac{r}{l}$ an denselben Stellen, aber mit doppelten Schränkungswinkeln angreifen lassen.

Gleichgewichtsprobleme dieser Gattung lassen sich nun verhältnismässig leicht auf rein graphischem Wege durchführen, wozu man sich zweckmässig der in der graphischen Statik üblichen Darstellung der Kräfte und Momente durch Strecken bedient. Schwierigkeiten entstehen im vorliegenden Falle lediglich dadurch, dass von vornherein nicht alle Winkel gegeben sind, die Ermittlung derselben etwa aus zwei willkürlich gewählten dagegen zu weitläufigen Konstruktionen führt. Für die Vierkurbelmaschine, mit der wir uns hier allein eingehend beschäftigen wollen, fällt diese Unbequemlichkeit, wenigstens für den Fall, dass zwei einander gegenüberliegende Winkel gegeben sind, fort, wenn wir auf die Schubertsche Fundamentalformel 64) zurückgreifen und aus dieser selbst die Konstruktion der Winkel ableiten.

In einem Kreise (Fig. 16) mit dem Radius 1 sei

$$\sphericalangle AOD = \delta \quad \text{und} \quad \sphericalangle BOD = \delta,$$

dann erhält man sofort

$$\sphericalangle AOJ = \delta - \beta \quad \text{und} \quad \sphericalangle AOK = \frac{\delta - \beta}{2},$$

mithin

$$OH = \cos \frac{\delta - \beta}{2}.$$

Halbiert man nun den Winkel

$$AOB = 360 - (\beta + \delta) = (\gamma + \alpha),$$

so erhält man:

$$\sphericalangle AOC = \frac{\gamma + \alpha}{2} \quad \text{und} \quad OF = \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Trägt man nun OF nach links an H an, macht also $GH = OF$, so ist:

$$OG = \cos \frac{\delta - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

oder wegen 64):

$$OG = \cos \frac{\gamma - \alpha}{2},$$

mithin $\sphericalangle AOD' = \frac{\gamma - \alpha}{2}$. Daraus folgt aber sofort

$$\sphericalangle COD' = \frac{\gamma + \alpha}{2} - \frac{\gamma - \alpha}{2} = \alpha$$

und, wenn wir noch

$$\sphericalangle COE = \frac{\gamma - \alpha}{2} = AOD'$$

an OC antragen,

$$\sphericalangle AOE = \frac{\gamma + \alpha}{2} + \frac{\gamma - \alpha}{2} = \gamma.$$

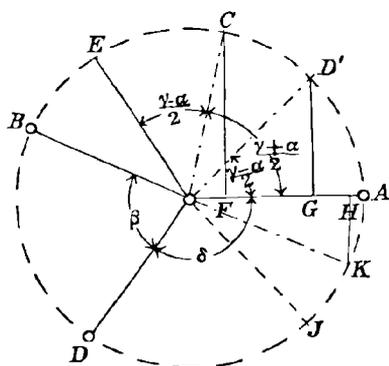
Eine Kontrolle giebt die Bedingung, dass

$$\sphericalangle EOB = 360 - (\delta + \beta + \gamma) = \alpha = \sphericalangle COD'$$

Die so ermittelten Winkel sind nun hinreichend, um das Polygon der Grössen q_k , also der Momente zu verzeichnen, da dieses, bezogen auf eine der Kurbeln, für welche dann $k=0$ wird, in ein Dreieck übergeht, dessen drei Seiten proportional der Grössen $q_2, q_3 \cdot k_3$ und $q_3 \cdot k_4$ sind. Die wirklichen Werte dieser Grössen lassen sich dagegen erst feststellen, wenn wenigstens eine derselben gegeben ist, so dass uns das Polygon der Momente nicht weiterbringt. Auch das Polygon der hier als Kräfte aufgefassten q lässt sich nur verzeichnen, wenn wir wenigstens zwei dieser Grössen kennen, also ausser dem immer als Einheit benutzten $q_1 = 1$ einer der anderen drei Werte oder das Verhältnis zwischen zwei derselben bestimmt ist. Ein solches Verhältnis, z. B. $q_3 : q_4$ lässt sich nun leicht graphisch ermitteln. Eliminieren wir nämlich aus unseren Gleichungen 56) und 58) q_2 durch Multiplikation der ersteren mit $2 \cos \alpha_2$ und Subtraktion, so ergibt sich sofort

$$\frac{q_3}{q_4} = - \frac{\sin \alpha_4 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_4)}{\sin \alpha_3 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_3)}.$$

Fig. 16.



Tragen wir (Fig. 17) die oben aus Figur 16 ermittelten Kurbelwinkel in ihrer wahren Aufeinanderfolge in einem Kreis vom Radius 1 ein, so entsprechen die Punkte $ABCD$ den Kurbelzapfen von $q_1 = 1$, q_2 , q_3 , q_4 . Projizieren wir nunmehr diese Punkte auf die erste Kurbel, so ist zunächst:

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha = OB', \quad \cos \alpha_3 = \cos(\alpha + \beta) = C'O,$$

$$\cos \alpha_4 = \cos \delta = \cos(\alpha + \beta + \gamma) = D'O,$$

$$\sin \alpha_3 = CC', \quad \sin \alpha_4 = DD',$$

und daraus mit Rücksicht auf die Vorzeichen von $\cos \alpha_3$ und $\cos \alpha_4$:

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = B'C',$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_4 = B'D',$$

also

$$\sin \alpha_3 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_3) = CC' \cdot B'C',$$

$$\sin \alpha_4 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_4) = DD' \cdot B'D'.$$

Diese Produkte sind aber nichts anderes als die doppelten Flächen der in Figur 17 schraffierten Dreiecke $B'CC'$ und $B'DD'$, welche

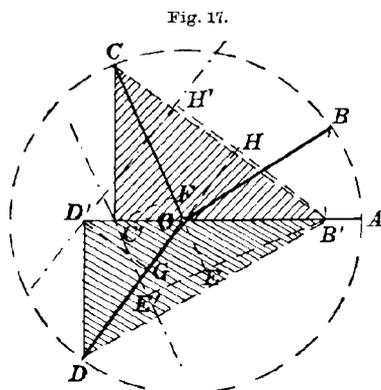


Fig. 17.

durch die zugehörigen Kurbelradien OC und OD je in zwei Teile zerlegt werden. Füllen wir nun auf diese Radien Lote von B' , C' und D' , so wird, wenn $C'E' \perp OC$ und $D'H' \perp OD$,

$$CC' \cdot B'C' = OC \cdot (B'E' + C'F) \\ = OC \cdot B'E',$$

$$DD' \cdot B'D' = OD \cdot (B'H' + D'G) \\ = OD \cdot B'H'$$

und, da $OC = OD$:

$$\frac{q_3}{q_4} = \frac{B'H'}{B'E'}$$

Man braucht also nur durch die Fusspunkte der Lote von C und D auf OA Parallelen zu OC und OD zu ziehen, so verhalten sich die Lote von B' auf diese Parallelen umgekehrt wie die Grössen q_3 und q_4 .

Nunmehr können wir an die Konstruktion des Polygons der Grössen q selbst herantreten, indem wir zunächst in Figur 17 mit $AB = q_1 = 1$ ein Viereck $ABC'D'$ zeichnen, welches ohne Rücksicht auf die anderen Werte q unsere Winkel $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ enthält. In demselben tragen wir von D' aus auf AD' und AC' die oben gefundenen Strecken $B'E' = D'E'$ sowie $B'H' = D'H'$ ab und verbinden E' mit H' . Ziehen wir um AC' $E'H'$ und $CD \parallel C'D'$, so ist ohne weiteres $ABCD$ das gesuchte Polygon mit den Seiten $AB = 1$, $BC = q_2$, $CD = q_3$ und $DA = q_4$. Konstruieren wir schliesslich noch das

Parallelogramm $ABCF$ und ziehen $FG \parallel CD$, so stellt AFG das Polygon der Werte $q_2, k_3 q_3$ und $k_4 q_4$ dar. Die Abstandsverhältnisse der Getriebe-Ebenen

$$k_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad \text{und} \quad k_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2}$$

sind in dieser Figur einfach durch

$$k_3 = \frac{F'G}{CD} \quad \text{und} \quad k_4 = \frac{AG}{AD}$$

gegeben und damit alle für den Massenausgleich einer Vierkurbelmaschine nötigen Grössen bestimmt.

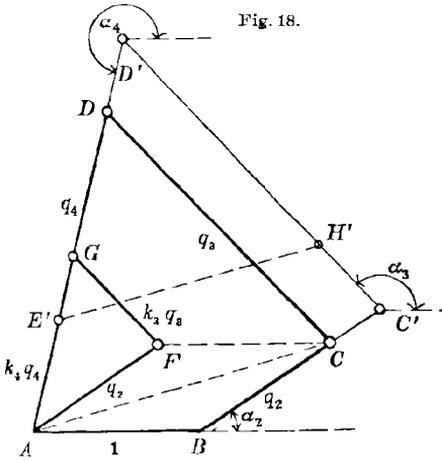


Fig. 18.

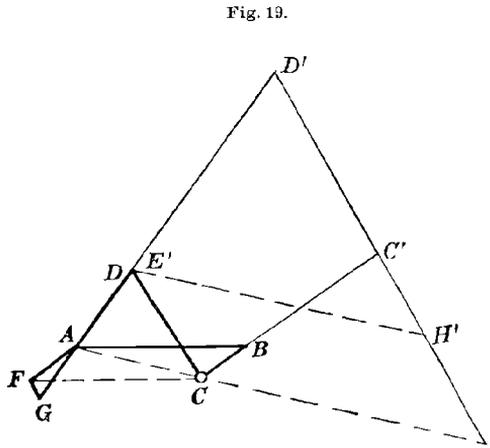


Fig. 19.

Bei ungeschickter Wahl der beiden Winkel β und δ kann auch der Fall eintreten, dass, wie in Figur 19 dargestellt ist, die Parallele von A aus zu $E'H'$ die Linie BC' diesseits von B , also bei C schneidet, wodurch das Polygon der q die gekreuzte Form $ABCD$ annimmt und das der kq nämlich AFG ausserhalb $ABCD$ zu liegen kommt. Es bedeutet dies indessen nur, dass in diesem Falle die der Grösse q_2 entsprechende Kurbel in Figur 17 nicht mit OB , sondern mit der über O hinausgehenden Fortsetzung zusammenfällt.

Die vorstehenden Konstruktionen sind so einfach, dass es sich empfiehlt, sie jedenfalls vor der analytischen Rechnung durchzuführen, da man gerade durch das Auftreten des zuletzt erwähnten Umstandes ein Bild über die Zweckmässigkeit der anfangs gewählten Winkel gewinnt und keinerlei Vorzeichenfehlern ausgesetzt ist.

Die von uns benutzte graphische Darstellung der Ausgleichsbedingungen durch geschlossene Polygone ist auf den schon am Schlusse von § 3 erwähnten amerikanischen Ingenieur Taylor zurückzuführen. Indessen gab derselbe im Gegensatz zu Schlick kein Verfahren an, welches von bestimmten Annahmen ausgehend die Ermittlung aller in Betracht kommenden Grössen ermöglichte. Ebenso lag ihm die Berücksichtigung der Ausgleichsbedingungen zweiter Ordnung voll-

ständig fern. Auf der von Taylor gegebenen Grundlage hat dann der Ingenieur C. Fränzel ein Probiervverfahren* ausgebildet, welches — wieder unter Vernachlässigung der Ausgleichsbedingungen zweiter Ordnung — darauf hinausläuft, an einer zunächst unausgeglichenen vorliegenden Maschine durch successive Änderung einzelner Bestimmungsstücke derselben die beiden ursprünglich offenen Polygone zum Schlusse zu bringen. Dass durch solche Methoden das Wesen der Sache nicht erschöpft wird, ist ja einleuchtend, so dass es begreiflich erscheint, wenn Fränzel, der die Arbeiten von Schlick geflissentlich ignoriert,** den allgemeinen Fall der Vierkurbelmaschine überhaupt nur durch Interpolation für lösbar erklärt. Etwas weiter als Fränzel war schon vorher der österreichische Ingenieur R. Knoller*** gelangt, der wenigstens die infolge der endlichen Schubstangenlänge auftretenden Kräfte und Momente (nach unserer Bezeichnung zweiter Ordnung) durch Korrektion an den Elementen der beiden Polygone berücksichtigt.

* C. Fränzel: „Das Taylorsche Verfahren zur Ausbalanzierung von Schiffsmaschinen“, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1898, S. 907.

** Es hängt dies offenbar mit einem Rechtsstreite über das Schlicksche Patent zusammen, der im Juni 1898 durch Entscheidung des Reichsgerichtes erledigt wurde. Dieser Prozess, zu dem sich zahlreiche Fachleute in Deutschland und Österreich gutachtlich geäußert hatten, lief im wesentlichen auf die Frage hinaus, ob in der älteren Taylorschen Abhandlung das Schlicksche Verfahren des Massenausgleiches vorweggenommen sei oder nicht. Das Reichsgericht hat diese Frage unter Betonung der präzisen Vorschriften des Schlickschen Patentes, welche erst eine praktische Verwendung des Ausgleiches ermöglichten, verneint und daraufhin das vom deutschen Patentamt schon für nichtig erklärte Patent wieder hergestellt. Die auch für wissenschaftliche Kreise hochbedeutsame Urteilsbegründung ist in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1898, S. 1053, abgedruckt, während ebenda S. 1313 Professor Riedler einen Überblick über den Verlauf des Prozesses giebt.

*** R. Knoller: „Die Massenwirkungen der Dampfmaschinen und ihre Balanzierung“. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, 1897, Nr. 18.

(Fortsetzung folgt.)

Über perspektive Affinität zweier Räume.

Von

Dr. A. BECK,

Professor am Polytechnikum in Riga.

Im Folgenden soll zunächst die Beziehung aufgestellt werden, welche zwischen den Kantenlängen zweier einander entsprechenden Tetraeder besteht, wenn diese beiden Tetraeder in solche Lage gebracht werden können, dass die Verbindungslinien der vier Paare entsprechender Ecken parallel zu einander sind. Die affine räumliche Beziehung, welche durch die beiden Tetraeder bestimmt ist, heisst bei dieser Lage perspektiv. Die Richtung der Verbindungslinien entsprechender Punkte soll Affinitätsrichtung heissen; je zwei entsprechende Gerade oder Ebenen schneiden sich auf der Affinitäts-ebene.

I.

Man darf annehmen, dass ein Paar entsprechender Ecken, z. B. D, D_1 , im Koordinatenanfangspunkt zusammenfallen, und dass die z -Axe des rechtwinkligen Koordinatensystems parallel zur Affinitätsrichtung sei. Die Kantenlängen seien:

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b, \quad DA = f, \quad DB = g, \quad DC = h,$$

$$A_1 B_1 = c_1 \text{ etc.}$$

Die Koordinaten von A seien x_1, y_1, z_1 ; diejenigen von A_1 x_1, y_1, ξ_1 ; diejenigen von B x_2, y_2, z_2 etc. Dann hat man:

$$1) \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = f^2, & x_1^2 + y_1^2 + \xi_1^2 = f_1^2, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = g^2, & x_2^2 + y_2^2 + \xi_2^2 = g_1^2, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = h^2, & x_3^2 + y_3^2 + \xi_3^2 = h_1^2, \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = c^2, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = a^2, \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = b^2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 = c_1^2, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 = a_1^2, \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2 = b_1^2. \end{cases}$$

Durch Subtraktion erhält man hieraus unter Anwendung der neuen Bezeichnungen $a^2 - a_1^2 = A$ etc.:

$$3) \quad \begin{cases} z_1^2 - \xi_1^2 = f^2 - f_1^2 = F, & z_2^2 - \xi_2^2 = g^2 - g_1^2 = G, \\ z_3^2 - \xi_3^2 = h^2 - h_1^2 = H, \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} z_1^2 - \xi_1^2 + z_2^2 - \xi_2^2 - 2(z_1 z_2 - \xi_1 \xi_2) = c^2 - c_1^2 = C, \\ z_2^2 - \xi_2^2 + z_3^2 - \xi_3^2 - 2(z_2 z_3 - \xi_2 \xi_3) = a^2 - a_1^2 = A, \\ z_3^2 - \xi_3^2 + z_1^2 - \xi_1^2 - 2(z_3 z_1 - \xi_3 \xi_1) = b^2 - b_1^2 = B. \end{cases}$$

Aus den Systemen 3), 4) ergibt sich weiter:

$$5) \quad \begin{cases} z_1 z_2 - \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{2}(F + G - C), \\ z_2 z_3 - \xi_2 \xi_3 = \frac{1}{2}(G + H - A), \\ z_3 z_1 - \xi_3 \xi_1 = \frac{1}{2}(H + F - B). \end{cases}$$

Indem man nun je eine Gleichung 3) und zwei geeignete Gleichungen 5) zusammen nimmt und sie wie lineare Gleichungen in resp. $z_1, \xi_1; z_2, \xi_2; z_3, \xi_3$ behandelt, erhält man die Eliminationsgleichungen:

$$6) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} z_1 & \xi_1 & F & \\ z_2 & \xi_2 & \frac{1}{2}(F + G - C) & \\ z_3 & \xi_3 & \frac{1}{2}(H + F - B) & \end{array} \right) = 0, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} z_2 & \xi_2 & G & \\ z_1 & \xi_1 & \frac{1}{2}(F + G - C) & \\ z_3 & \xi_3 & \frac{1}{2}(G + H - A) & \end{array} \right) = 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} z_3 & \xi_3 & H & \\ z_2 & \xi_2 & \frac{1}{2}(G + H - A) & \\ z_1 & \xi_1 & \frac{1}{2}(H + F - B) & \end{array} \right) = 0.$$

Dies sind drei homogene lineare Gleichungen in den drei Grössen:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \xi_1 \\ z_2 & \xi_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_2 & \xi_2 \\ z_3 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_3 & \xi_3 \\ z_1 & \xi_1 \end{vmatrix}$$

und durch Elimination dieser drei Grössen erhält man die gesuchte Bedingungsleichung in der Form:

$$7) \quad \begin{vmatrix} 2F & F + G - C & H + F - B \\ F + G - C & 2G & G + H - A \\ H + F - B & G + H - A & 2H \end{vmatrix} = 0.$$

Nach bekannter Umformung dieser Determinante kann man die Gleichung auch in der Form schreiben:

$$8) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & F & G & H \\ 1 & F & 0 & C & B \\ 1 & G & C & 0 & A \\ 1 & H & B & A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II.

Zweite Ableitung der Bedingungsgleichung 8). Man betrachte die beiden Matrizen:

$$9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_1^2 - \xi_1^2 & -2z_1 & 2\xi_1 & 1 \\ z_2^2 - \xi_2^2 & -2z_2 & 2\xi_2 & 1 \\ z_3^2 - \xi_3^2 & -2z_3 & 2\xi_3 & 1 \\ z_4^2 - \xi_4^2 & -2z_4 & 2\xi_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & z_1 & \xi_1 & z_1^2 - \xi_1^2 \\ 1 & z_2 & \xi_2 & z_2^2 - \xi_2^2 \\ 1 & z_3 & \xi_3 & z_3^2 - \xi_3^2 \\ 1 & z_4 & \xi_4 & z_4^2 - \xi_4^2 \end{vmatrix}.$$

$z_1, \dots, z_4, \xi_1, \dots, \xi_4$ sind die z -Koordinaten der Tetraederecken und die z -Axe sei parallel zur Affinitätsrichtung. Lässt man die Ecken D, D_1 nicht zusammenfallen, so treten an Stelle der Gleichungen 3) allgemeinere Gleichungen von der Form 4) mit z_4, ξ_4 .

Da in obigen beiden Matrizen die Zahl der Zeilen grösser ist als die Zahl der Kolonnen, so muss das nach Zeilen gebildete Produkt der beiden Matrizen eine Determinante vom Wert Null sein.

Die zweite Zeile der ersten Matrix giebt z. B. mit der dritten Zeile der zweiten Matrix das Element des Produktes:

$$z_1^2 - \xi_1^2 - 2z_1z_2 + 2\xi_1\xi_2 + z_2^2 - \xi_2^2.$$

Dies ist aber nach 4) = C.

Man erhält auf diese Weise durch Multiplikation der beiden Matrizen 9) sofort die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$10) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & C & B & F \\ 1 & C & 0 & A & G \\ 1 & B & A & 0 & H \\ 1 & F & G & H & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

von welcher man leicht erkennt, dass sie mit 8) identisch ist.

Bezeichnet man die Tetraederecken A, \dots, D mit $1, \dots, 4$, die Quadrate der Kantenlängen mit $a^2 = d_{23}, a_1^2 = \delta_{23}$ etc., endlich die Differenzen $d_{ik} - \delta_{ik}$ mit D_{ik} , so lautet die Bedingungsgleichung:

$$11) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ 1 & D_{21} & 0 & D_{23} & D_{24} \\ 1 & D_{31} & D_{32} & 0 & D_{34} \\ 1 & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $D_{ik} = D_{ki}$ ist.

Den Fall, wo die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsebene ist, bezeichnen wir als orthogonale perspektive Affinität. Für diesen Fall erhält man eine weitere Bedingungsgleichung, indem man

winkelpaare der beiden entsprechenden Strahlbüschel, welche die Scheitel O, O' haben und in der Ebene liegen, die durch OO' senkrecht zur Affinitätsebene gelegt werden kann.

Soll es also möglich sein, zwei affine Räume in perspektive Lage zu bringen, so muss für eine der drei Hauptachsenrichtungen das Ähnlichkeitsverhältnis den Wert 1 haben. In dem speziellen Fall der orthogonalen perspektiven Affinität haben zwei Hauptachsenrichtungen das Ähnlichkeitsverhältnis 1; sie sind zur Affinitätsebene parallel und die dritte Hauptachsenrichtung ist die Affinitätsrichtung.

Stellt man in der angegebenen Weise zwei entsprechende Punktepaare der affinen Räume durch die Koordinaten

$$x_i, \dots, \xi_i, \dots, x_k, \dots, \xi_k, \dots$$

dar, so hat man für die Differenz D_{ik} der Quadrate d_{ik}, δ_{ik} entsprechender Strecken:

$$13) \begin{cases} D_{ik} = d_{ik} - \delta_{ik} = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - \xi_i^2 - \eta_i^2 - \zeta_i^2 \\ \quad - \xi_k^2 - \eta_k^2 - \zeta_k^2 - 2(x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k) \\ \quad \quad \quad + 2(\xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k + \zeta_i \zeta_k), \end{cases}$$

oder nach 12):

$$13a) \begin{cases} D_{ik} = x_i^2(1 - a^2) + y_i^2(1 - b^2) + z_i^2(1 - c^2) + x_k^2(1 - a^2) \\ \quad + y_k^2(1 - b^2) + z_k^2(1 - c^2) - 2x_i x_k(1 - a^2) \\ \quad - 2y_i y_k(1 - b^2) - 2z_i z_k(1 - c^2). \end{cases}$$

Setzt man:

$$13b) \begin{cases} 1 - a^2 = p, & 1 - b^2 = q, & 1 - c^2 = r, \\ p x_i^2 + q y_i^2 + r z_i^2 = P_i, \end{cases}$$

so wird:

$$13c) \quad D_{ik} = P_i + P_k - 2p x_i x_k - 2q y_i y_k - 2r z_i z_k.$$

Nun bilde man das Produkt nach Zeilen der beiden Matrizen:

$$14) \begin{vmatrix} P_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ P_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ P_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & P_0 & -2p x_0 & -2q y_0 & -2r z_0 \\ 1 & P_1 & -2p x_1 & -2q y_1 & -2r z_1 \\ 1 & P_2 & -2p x_2 & -2q y_2 & -2r z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Unter Benutzung von 13c) ergibt sich für dieses Produkt die Determinante:

$$14a) \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & D_{02} & \dots \\ D_{10} & 0 & D_{12} & \dots \\ D_{20} & D_{21} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (D_{ik} = D_{ki}).$$

Je nach der Anzahl der Zeilen in den beiden Matrizen erhält man für die resultierende Determinante verschiedene Sätze:*

* Vergl. Baltzer, Determinanten, § 16, 11, 5. Aufl. (1881).

a) Ist die Anzahl der Zeilen grösser als die der Kolonnen, so verschwindet die Determinante

$$15) \quad \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & \dots & D_{05} \\ D_{10} & 0 & \dots & D_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{50} & D_{51} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Beziehung zwischen sechs Paaren entsprechender Punkte in einer räumlichen Affinität.

Die sechs Punkte des zweiten Systems fallen alle unendlich nahe zusammen, wenn vier derselben zusammenfallen. Indem dann

$$\delta_{ik} = 0, \quad D_{ik} = d_{ik}$$

wird, erhält man die Beziehung:

$$15a) \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & \dots & d_{05} \\ d_{10} & 0 & \dots & d_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{50} & d_{51} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zwischen den von sechs beliebigen Punkten des Raumes begrenzten Strecken.

b) Ist die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Kolonnen, so wird:

$$16) \quad \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & D_{02} & D_{03} & D_{04} \\ D_{10} & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{40} & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 8pqr \begin{vmatrix} P_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ P_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}^2.$$

c) Ist die Anzahl der Zeilen kleiner als die der Kolonnen, so erhält man:

$$17) \quad \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & D_{02} & D_{03} \\ D_{10} & 0 & D_{12} & D_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{30} & D_{31} & D_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -4pq |P_0 \ 1 \ x_0 \ y_0|^2 - 4pr |P_0 \ 1 \ x_0 \ z_0|^2 \\ -4qr |P_0 \ 1 \ y_0 \ z_0|^2 \\ -16pqr |P_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0| \cdot |1 \ x_0 \ y_0 \ z_0|. \end{matrix}$$

Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$\begin{vmatrix} P_0 & 1 & x_0 & y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = |P_0 \ 1 \ x_0 \ y_0|.$$

Bei der perspektiven Lage der beiden Räume muss nun nach dem oben Gesagten eine der drei Zahlen a, b, c in 12), 13a), 13b) den Wert ± 1 haben, also eine der drei Zahlen p, q, r verschwinden. Für diesen Fall der perspektiven Lage folgt also aus 16):

$$18) \quad \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & D_{02} & D_{03} & D_{04} \\ D_{10} & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{40} & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In dem speziellen Fall der orthogonalen Affinität folgt aus 17), da zwei der Zahlen p, q, r verschwinden:

$$19) \quad \begin{vmatrix} 0 & D_{01} & D_{02} & D_{03} \\ D_{10} & 0 & D_{12} & D_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{30} & D_{31} & D_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung kann in der Form geschrieben werden:

$$19a) \quad (\sqrt{D_{01} \cdot D_{23}} + \sqrt{D_{02} \cdot D_{13}} + \sqrt{D_{03} \cdot D_{12}})(- + +)(+ - +)(+ + -) = 0.$$

Die rechte Seite in 16) verschwindet aber auch dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} P_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet und dies geschieht offenbar, wenn die fünf Punkte 0, 1, 2, 3, 4 in einer Ebene liegen. Man hat also für fünf Punktepaare zweier affinen ebenen Systeme die Beziehung 18).

Nimmt man dabei an, dass im zweiten System die fünf Punkte der Ebene zusammenfallen, indem drei derselben zusammenfallen, so erhält man für fünf beliebige Punkte einer Ebene:

$$19b) \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{10} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{40} & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe Beziehung besteht nach Cayley allgemeiner zwischen fünf Punkten einer Kugel.

IV.

An Stelle der beiden Matrizen 14) betrachte man die folgenden:

$$20) \quad \left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ P_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & P_1 & -2p x_1 & -2q y_1 & -2r z_1 \\ 1 & P_2 & -2p x_2 & -2q y_2 & -2r z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \right\|$$

Das Produkt derselben nach Zeilen ist die Determinante:

$$21) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & D_{12} & \dots & \dots \\ 1 & D_{21} & 0 & \dots & \dots \\ 1 & D_{31} & D_{32} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Je nach der Anzahl der Zeilen in den beiden Matrizen erhält man die folgenden Sätze:

$$22) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies gilt für fünf Punktepaare zweier affinen räumlichen Systeme. Fallen die fünf Punkte des zweiten Systems zusammen, so erhält man für fünf beliebige Punkte des Raumes die bekannte Beziehung zwischen den sie verbindenden Strecken:*

$$23) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & \dots & \dots & d_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_{51} & d_{52} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bei fünfzeiligen Matrizen erhält man:

$$24) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 8 p q r \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}^2$$

und bei vierzeiligen:

$$25) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & D_{31} & D_{32} & 0 \end{vmatrix} = -4 p q |1 x_1 y_1|^2 - 4 p r |1 x_1 z_1|^2 - 4 q r |1 y_1 z_1|^2.$$

Die rechte Seite in 24) verschwindet in zwei Fällen:

a) Eine der Zahlen p, q, r werde $= 0$. Dies ist der Fall der perspektiven Affinität und giebt wieder die schon in 8) und 11) gefundene Bedingungsgleichung für zwei perspektiv-affine Tetraeder.

Ist die perspektive Affinität speziell orthogonal, so besteht nach 25) infolge des gleichzeitigen Verschwindens zweier der drei Zahlen p, q, r noch die weitere Beziehung:

* Cayley, Cambr. math. Journ., vol. 2, 1841.

$$26) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} \\ 1 & D_{21} & 0 & D_{23} \\ 1 & D_{31} & D_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung kann in die Form gebracht werden:

$$27) \quad (\sqrt{D_{12}} + \sqrt{D_{23}} + \sqrt{D_{31}})(- + +)(+ - +)(+ + -) = 0.$$

b) Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet, so liegen die vier Punkte des ersten Systems in einer Ebene. Man hat also für vier Punktepaare zweier affinen ebenen Systeme die Beziehung:

$$28) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

analog zu der Beziehung 22) zwischen fünf Punktepaaren zweier affinen Räume. Fallen die vier Punkte des zweiten Systems zusammen, so ergibt sich für vier beliebige Punkte einer Ebene die bekannte Beziehung zwischen ihren Strecken:

$$29) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das Affinitätsverhältnis. Bekanntlich ist für vier beliebige Punkte:

$$29a) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 288 V^2,$$

wo V das Volumen des Tetraeders der vier Punkte bezeichnet. Bei affinen Räumen ist das Verhältnis entsprechender Volumen konstant. Wenn die Affinität perspektiv ist, so ist dieses Verhältnis entsprechender Volumen gleich dem Verhältnis der Abstände zweier entsprechenden Punkte von der Affinitätsebene.

V.

Die Aufgabe, zwei affine ebene Systeme in perspektive Lage zu bringen, ist bekanntlich vom zweiten Grad. Der Übergangsfall

von reellen zu imaginären Lösungen ist offenbar derjenige der orthogonalen Affinität, wo die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsaxe ist. Die Bedingung hierfür ist in 26) ausgedrückt. Haben die zwei entsprechenden Dreiecke, durch welche die affine Beziehung bestimmt ist, zwei entsprechende Seiten gleich, so wird die perspektive Lage dadurch reell herbeigeführt, dass man diese beiden Seiten zur Deckung bringt. Sei z. B.:

$$d_{23} = \delta_{23}, \text{ also } D_{23} = 0,$$

so nimmt die Determinante in 26) den Wert $(D_{12} - D_{23})^2$ an, welcher immer positiv ist. Die Aufgabe, zwei gegebene Dreiecke in parallelperspektive Lage zu bringen, hat also zwei reelle verschiedene oder zusammenfallende oder zwei imaginäre Lösungen, je nachdem

$$30) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} \\ 1 & D_{21} & 0 & D_{23} \\ 1 & D_{31} & D_{32} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

ist. Dieses Kriterium stimmt überein mit dem von Möbius gefundenen (Baryc. Calcul, § 328).

Sind die zwei Dreiecke rechtwinklig mit d_{23} und δ_{23} als Hypotenusenquadraten, so findet man aus 30) leicht, dass die Lösungen reell getrennt, zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem

$$-4(d_{12} \delta_{12})(d_{13} - \delta_{13}) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

ist. Daraus folgt: Zwei affine ebene Systeme können nur dann reell in perspektive Lage gebracht werden, wenn von den Ähnlichkeitsverhältnissen, die zu den beiden Hauptaxenrichtungen gehören, das eine ≥ 1 , das andere ≤ 1 ist.

Für zwei affine Räume ergibt sich hieraus in Verbindung mit dem Früheren: Zwei affine Räume können dann und nur dann reell in perspektive Lage gebracht werden, wenn von den zu den drei Hauptaxenrichtungen gehörenden Ähnlichkeitsverhältnissen das mittlere den Wert 1 hat.

Endlich hat man hieraus den Satz: Zwei affine Räume können immer reell in perspektive Lage gebracht werden, nachdem man den einen mit einem gewissen reellen, positiv oder negativ genommenen Faktor multipliziert, d. h. direkt oder invers ähnlich verändert hat. Der Faktor ist derjenige, durch welchen das mittlere der drei Hauptähnlichkeitsverhältnisse auf den Wert 1 gebracht wird. Sind für das eine Vorzeichen dieses Faktors die beiden perspektiven Systeme gleichsinnig, so sind sie für das andere ungleichsinnig.

Hat man das eine System mit dem betreffenden Faktor multipliziert, so wird die perspektive Lage herbeigeführt, indem man zwei

entsprechende ebene Systeme, die in zwei zu den mittleren Hauptachsenrichtungen senkrechten entsprechenden Ebenen liegen, in einer Ebene in perspektive Lage bringt, wobei aber die Punktreihen, die auf zwei entsprechenden mittleren Hauptachsen liegen, gleichsinnig sein müssen.

Diejenigen beiden anderen reellen Faktoren, durch welche das grösste und das kleinste der drei Hauptähnlichkeitsverhältnisse auf den Wert 1 gebracht werden, geben keine reellen Lösungen in Bezug auf die perspektive Lage der beiden Räume.

Die Aufgabe, ein Tetraeder zu konstruieren, das einem gegebenen Tetraeder ähnlich ist und zu einem zweiten gegebenen Tetraeder in parallel-perspektiver Lage sich befindet, ist also vom dritten Grad, da sie die Konstruktion der drei Hauptachsen für zwei projektive Strahlbündel erfordert.

Sie führt auf die Gleichung:

$$31) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & 0 & . & f^2 - x^2 f_1^2 \\ 1 & c^2 - x^2 c_1^2 & . & g^2 - x^2 g_1^2 \\ 1 & b^2 - x^2 b_1^2 & . & h^2 - x^2 h_1^2 \\ 1 & f^2 - x^2 f_1^2 & . & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche für x^2 vom dritten Grad ist. Indem man im zweiten System von einer gleichschenkligen dreieckigen Ecke mit der Kantenlänge 1 ausgeht, nimmt die Gleichung die Form an:

$$31a) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & 0 & . & f^2 - x^2 \\ 1 & c^2 - 2x^2 & . & g^2 - x^2 \\ 1 & b^2 - 2x^2 & . & h^2 - x^2 \\ 1 & f^2 - x^2 & . & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach 7):

$$32) \quad \begin{vmatrix} 2f^2 - 2x^2 & f^2 + g^2 - c^2 & h^2 + f^2 - b^2 \\ f^2 + g^2 - c^2 & 2g^2 - 2x^2 & g^2 + h^2 - a^2 \\ h^2 + f^2 - b^2 & g^2 + h^2 - a^2 & 2h^2 - 2x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

VI.

Die behandelten Aufgaben über affine Räume führen offenbar auf Aufgaben über das Ellipsoid, indem man das Ellipsoid des ersten Raumes betrachtet, welches einer Kugel des zweiten Raumes entspricht. Die perspektive Lage ist reell möglich, wenn der Radius der Kugel gleich ist dem Radius der reellen Diametalkreisschnitte des Ellipsoides, welches die Strecken f, g, h zu konjugierten Halbmessern hat.

Indem man die Verbindungsstrecken a, b, c durch f, g, h und die von letzteren eingeschlossenen Winkel ausdrückt, erhält man leicht aus 32) die entwickelte Gleichung:

$$33) \quad x^6 - (f^2 + g^2 + h^2)x^4 + 4(\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c) - 36V^2 = 0,$$

wo die Δ die Flächeninhalte der von den Kanten gha, hfb, fgc gebildeten Dreiecke darstellen und V das Volumen des Tetraeders ist.

Man ersieht daraus z. B., dass für alle Tripel von konjugierten Halbmessern eines Ellipsoides die Summe der Quadrate konstant ist, weil sie die Summe der Quadrate der halben Hauptaxen darstellt.

Der Pohlke'sche Satz der Axonometrie sagt aus, dass drei von einem Punkt ausgehende, nach Richtung und Länge willkürliche Strecken f, g, h einer Bildebene immer als schiefe Parallelprojektionen von drei zu einander senkrechten gleichlangen Axen angesehen werden können. Die Aufgabe, die Länge dieser Originalaxen zu bestimmen, ist dann ein spezieller Fall der vorigen Aufgabe, indem die vier Ecken des ersten Tetraeders in einer Ebene liegen.* Man hat also zu setzen $V=0$, wodurch in 33) eine Wurzel $x^2=0$ wird und sich für die beiden andern die Gleichung ergibt:

$$34) \quad x^4 - (f^2 + g^2 + h^2)x^2 + 4(\Delta_a^2 + \Delta_b^2 + \Delta_c^2) = 0.$$

Das Ellipsoid ist in diesem Falle unendlich flach, begrenzt durch eine Umrissellipse, deren halbe Axen die Wurzeln der letzten Gleichung sind.

Von diesen beiden Halbaxen hat nur die kleinere, d. h. die mittlere von den dreien, praktische Bedeutung, da nur sie zu einer reellen Lage des Axenkreuzes führt.

Aus 34) folgt: Die Summe der Quadrate der Halbaxen der Umrissellipse ist $= f^2 + g^2 + h^2$, also nur von den Längen, nicht von den Richtungen der drei Bildaxenstrecken abhängig. Der Flächeninhalt der Umrissellipse ist

$$= 2\pi \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2 + \Delta_c^2}.$$

Für orthogonale Axonometrie erhält man die Bedingungsgleichung:

$$(f^2 + g^2 + h^2)^2 = 16(\Delta_a^2 + \Delta_b^2 + \Delta_c^2),$$

und die Originalaxenlänge ergibt sich in diesem Fall aus

$$2x^2 = f^2 + g^2 + h^2.$$

VII.

Für die Aufgabe, zwei beliebig gegebene Dreiecke $ABC, A'B'C'$ in parallel-perspektive Lage zu bringen, möge hier noch folgende Lösung mitgeteilt werden. Auf $BC, B'C'$ sind zwei entsprechende

* Vergl. meinen Aufsatz: „Über die Fundamentalaufgabe der Axonometrie“. Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 106.

Punkte D, D' zu bestimmen, für welche $AD = A'D'$ ist. Diese beiden Strecken $AD, A'D'$ müssen dann in der perspektiven Lage der beiden Dreiecke zusammenfallen. Wir multiplizieren das Dreieck $A'B'C'$ mit dem Faktor $\frac{BC}{B'C'}$, so dass es in das Dreieck

$$A''B''C'' \sim A'B'C'$$

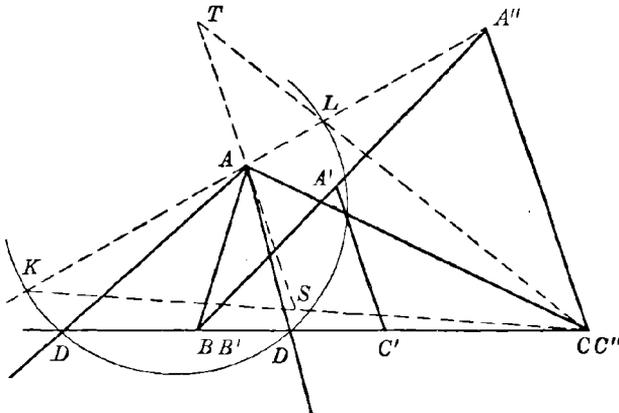
übergeht und $B''C'' = BC$ ist. Dann legen wir die Dreiecke $ABC, A''B''C''$ in einer Ebene so aneinander, dass B'' auf B, C'' auf C fällt. Nun ist auf BC der Punkt D so zu bestimmen, dass

$$AD = A'D' = A''D \cdot \frac{B'C'}{BC}$$

ist. Als Ort solcher Punkte D , für welche

$$AD : A''D = B'C' : BC$$

ist, erhält man aber einen leicht zu konstruierenden Kreis desjenigen Kreisbüschels, welches die Punkte A, A'' zu Nullkreisen hat. Die



Schnittpunkte dieses Kreises mit BC sind die gesuchten Punkte D , welche, indem man sie mit A verbindet, die Affinitätsaxe geben. In der Figur beachte man, dass

$$B'C' : BC = A'C' : A''C.$$

Hiernach werden die zwei Punkte K, L des Kreises gefunden, indem man auf der durch A gehenden Parallelen zu $A'C'$ die letztere Strecke von A aus nach beiden Seiten aufträgt und die Endpunkte S, T mit C verbindet. Man kann nach dieser Methode auch überhaupt solche Richtungen in den beiden affinen ebenen Systemen bestimmen, für welche das Ähnlichkeitsverhältnis einen beliebig gegebenen Wert hat.

Richtungen von konstantem Ähnlichkeitsverhältnis bei affinen Räumen. Was bilden alle durch einen Punkt O gehenden Strahlen des ersten Raumes, für welche das Ähnlichkeitsverhältnis mit

den entsprechenden Strahlen einen konstanten Wert hat? Wir multiplizieren das zweite System mit dem geeigneten Faktor λ , um die Systeme in perspektive Lage bringen zu können. Bei dieser perspektiven Lage ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von O , O'' einen gegebenen Wert $OP:O''P = \mu$ hat, eine Kugel K , deren Mittelpunkt auf OO'' liegt, und welche die Strecke OO'' aussen und innen im Verhältnis μ teilt. Diese Kugel schneidet die Affinitätsebene in einem Kreis k . Alle Geraden durch O , für welche das Ähnlichkeitsverhältnis in der ursprünglichen Affinität den Wert $\lambda \cdot \mu$ hat, bilden also den Kegel, dessen Leitlinie der Kreis k ist. Lassen wir μ variieren, so bilden alle Kugeln K ein Kugelbüschel mit den Nullkugeln O , O'' ; die Kreise k bilden ein Kreisbüschel, dessen Nullkreise diejenigen Punkte der Affinitätsebene sind, nach welchen in der Projektivität der beiden Bündel O , O'' zwei Hauptaxen von jedem der beiden Bündel und zwei Hauptaxen von jedem der Kegel Ok gehen. Die Kegel Ok bilden also ein Büschel von concyklischen Kegeln.

Wenn einem zum ersten System gehörenden gleichschenkligen Dreieck, dessen Spitze in O liegt, wieder ein gleichschenkliges Dreieck entspricht, dessen Spitze in O' liegt, so müssen die beiden Schenkel des ersten Dreiecks in zwei Erzeugende eines der Kegel Ok fallen. Indem man zur Grenze übergeht, wo die beiden gleichen Schenkel unendlich benachbart sind, erhält man die Sätze: Eine Gerade durch O gibt eine der beiden Hauptaxenrichtungen für dasjenige ebene System, welches längs jener Geraden den durch sie gehenden Kegel des concyklischen Büschels Ok berührt. Eine beliebige Ebene durch O wird von zwei Kegeln dieses Büschels in zwei zu einander senkrechten Geraden berührt, welche die Hauptaxenrichtungen für das ebene System angeben. Jeder der beiden Nullkegel giebt die eine Hauptaxenrichtung für jede durch ihn gehende Ebene an, also eine der Hauptaxenrichtungen des räumlichen Systems und zu diesen beiden Richtungen gehören der grösste und der kleinste Wert der überhaupt vorkommenden Ähnlichkeitsverhältnisse. Die Strahleninvolution, in welcher die Kegel des Büschels durch eine Ebene durch O geschnitten werden, ist samt ihrer entsprechenden symmetrisch. In zwei entsprechenden gleichschenkligen Dreiecken sind die beiden entsprechenden Basen die eine Hauptaxenrichtung für die Ebenen der Dreiecke.

VIII.

Bekanntlich ist es im allgemeinen nicht möglich, zwei kollineare Räume in perspektive Lage zu bringen und zwar auch dann noch nicht, wenn man den einen derselben ähnlich verändert. Dagegen besteht für solche kollineare Räume allgemeiner Art der Satz: „Wenn die rechtwinkligen Ordinaten aller Punkte des ersten Raumes in Bezug auf die eine oder andere von zwei gewissen zu einander senk-

rechten Ebenen beziehungsweise mit dem einen oder anderen von zwei gewissen zu einander reziproken Faktoren multipliziert werden, so kann das so veränderte erste System zu dem zweiten in perspektive Lage gebracht werden, wobei die Kollineationsebene auf der Schnittlinie jener beiden Ebenen senkrecht steht und das Kollineationscentrum auf dieser Schnittlinie liegt.“

Die Geraden des zweiten Raumes und ihre Normalebene geben nämlich auf der unendlich fernen Ebene V' des zweiten Raumes ein Polarsystem, welchem im ersten Raum ein Polarsystem in der Gegenenebene V entspricht. Der Mittelpunkt O dieses letzteren Polarsystems entspricht dem unendlich fernen Punkt in der Richtung senkrecht zur Gegenebene U' des zweiten Raumes. Nach Henry J. S. Smith ist nun die perspektive Lage nur dann möglich, wenn das Polarsystem in der Ebene V (und damit auch das analog gebildete in der Ebene U') ein cirkuläres ist.* Dies kann nun durch eine orthogonale perspektiv-affine Verwandlung des ersten Systems immer erreicht werden. Die beiden Affinitätsebenen gehen durch die beiden Axen OX und OY des Polarsystems in V und stehen auf V senkrecht. Die beiden zu einander reziproken Affinitätsverhältnisse werden durch eine sehr einfache Konstruktion gefunden, wenn man in dem Polarsystem V ausser den Axen noch zu einem Punkt P die Polare p kennt. Ist S der Schnittpunkt von p mit OX , so bestimmt man mit Hilfe eines Halbkreises über OS sofort diejenige orthogonale Affinität mit der Axe OX , in welcher den beiden Geraden OP und p zwei zu einander senkrechte Gerade OP'' und p'' entsprechen.

Dabei ist leicht zu erkennen, dass die Lösungen nie imaginär werden können, indem man beachtet, dass die durch P und p auf OX und OY bestimmten Involutionen harmonischer Pole notwendig elliptisch sein müssen.

Statt der oben genannten beiden Ebenen kann man auch jede zu ihnen parallele Ebene als Affinitätsebene nehmen und zwar mit demselben Affinitätsverhältnis; dann liegt aber das Kollineationscentrum nicht mehr in der Affinitätsebene.

Man kann den vorigen Gegenstand noch in anderer Weise behandeln, indem man von demjenigen Kriterium für die Möglichkeit der perspektiven Lage zweier kollinearen Räume ausgeht, welches Herr G. Hauck angegeben hat.**

Man betrachte drei durch einen Punkt O gehende Gerade des ersten Raumes und die entsprechenden durch O' gehenden Geraden des zweiten Raumes. Auf den ersten drei Geraden liegen drei Gegenpunkte V_1, V_2, V_3 , auf den letzten drei Gegenpunkte U'_1, U'_2, U'_3 , entsprechend den unendlich fernen Punkten der entsprechenden Geraden.

* Collected math. papers, vol. I, 599.

** Diese Zeitschrift, Bd. 21, S. 413.

Nun ist die perspektive Lage der beiden kollinearen Räume dann und nur dann möglich, wenn das Dreieck $V_1 V_2 V_3$ ähnlich ist dem Dreieck $U'_1 U'_2 U'_3$.

Bei der allgemeinen Kollineation sind diese beiden Dreiecke einander nicht ähnlich, aber man kann das Dreieck V durch eine orthogonale perspektive Affinität in der Gegenebene V immer so verändern, dass es dem Dreieck U' ähnlich wird. Zur Konstruktion kann man die in VII. erwähnte Methode benutzen, wo der Kreis jetzt die Gerade BC berühren muss.

Man sieht ohne weitere Konstruktion sofort ein, dass die Axen der orthogonalen Affinitäten parallel sein müssen zu den Hauptachsenrichtungen derjenigen affinen Beziehung, welche durch die entsprechenden Dreiecke V, U' bestimmt ist. Eine orthogonale Affinität, welche eines der Dreiecke V zu einem entsprechenden Dreieck U' ähnlich macht, muss jedes Dreieck V zu jedem zugehörigen Dreieck U' ähnlich machen.

Zu jedem Dreieck V gehören ∞^3 Dreiecke U' . Zieht man durch einen Punkt O des ersten Raumes alle Geraden, so gehören zu ihren Punkten V bestimmte Punkte U'_1 und man sieht leicht ein, dass diese Beziehung zwischen den Punkten V und U' Affinität ist; denn der unendlich fernen Punktreihe der Gegenebene V entspricht hierbei die unendlich ferne Punktreihe der Gegenebene U' nach der Kollineation der beiden Räume. Da die Projektivität dieser beiden Punktreihen unverändert bleibt, wenn die Scheitel O, O' der beiden entsprechenden Bündel geändert werden, so folgt, dass in allen den ∞^3 Affinitäten, welche zu den ∞^3 Punkten O gehören, immer dieselben Paare von Richtungen einander entsprechen; also sind für alle die affinen Beziehungen die Hauptachsenrichtungen dieselben und alle Dreiecke U' , die zu einem Dreieck V gehören, sind zu einander ähnlich.

Mit Hilfe von 26) kann man leicht die beiden Affinitätsverhältnisse v für die orthogonalen perspektiven Affinitäten ableiten, durch welche die Dreiecke V zu den Dreiecken U' ähnlich gemacht werden. Man findet die Gleichung:

$$v^2 - \frac{v}{8F'\Phi} [\delta_{12}(d_{13} + d_{23} - d_{12}) + \delta_{13}(d_{12} + d_{23} - d_{13}) + \delta_{23}(d_{12} + d_{13} - d_{23})] + 1 = 0.$$

Dabei bedeuten d und δ die Quadrate der Seiten zweier zusammengehörigen Dreiecke V, U' und F, Φ die Flächeninhalte dieser Dreiecke. Für alle die ∞^9 Paare von zusammengehörigen Dreiecken V, U' ist der Faktor von v eine konstante Grösse.

Es möge noch eine Eigenschaft affiner räumlicher Beziehung abgeleitet werden, die sich auf den Fall bezieht, wo die beiden räumlichen Systeme so gelegt sind, dass die Hauptachsenrichtungen des einen parallel sind zu den entsprechenden Hauptachsenrichtungen des andern. Der Satz ist eine Erweiterung eines von Smith mit Hilfe des ima-

ginären Kugelkreises im Unendlichen bewiesenen Satzes über zwei projektive Strahlbündel.*

„Wenn zwei affine Räume so gelegt werden, dass die entsprechenden Hauptachsenrichtungen parallel zu einander sind, und man legt durch einen Punkt P des ersten Raumes die Senkrechte p zu einer Ebene des zweiten Raumes und durch den entsprechenden Punkt P' des zweiten Raumes die Senkrechte p' zu der entsprechenden Ebene des ersten Raumes, so entspricht der Geraden p des ersten Raumes die Gerade p' des zweiten.“

Beweis: Die Beziehung der beiden Räume ist dargestellt durch die drei Gleichungen $\xi = ax$, $\eta = by$, $\xi = cz$, wobei P, P' die Mittelpunkte der beiden entsprechenden rechtwinkligen Koordinatensysteme sind. Wenn nun eine Ebene E des ersten Raumes auf den Axen desselben die Abschnitte x_e, y_e, z_e erzeugt, so gehören zu der entsprechenden Ebene E' im zweiten Koordinatensystem die Abschnitte:

$$\xi_e = ax_e, \quad \eta_e = by_e, \quad \xi_e = cz_e.$$

Man verschiebe nun das zweite System, bis P' mit P zusammenfällt. Das Perpendikel p von P auf E' habe die Länge q und den Fusspunkt Q mit den Koordinaten x_q, y_q, z_q im ersten System; das Perpendikel p' von P' auf E habe die Länge r und den Fusspunkt R mit den Koordinaten ξ_r, η_r, ζ_r im zweiten System. Dann ist

$$\begin{aligned} q^2 &= x_q \cdot \xi_e = y_q \cdot \eta_e = z_q \cdot \xi_e \\ &= ax_q \cdot x_e = by_q \cdot y_e = cz_q \cdot z_e, \\ r^2 &= \xi_r \cdot x_e = \eta_r \cdot y_e = \zeta_r \cdot z_e. \end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn man $r^2 : q^2 = \mu$ setzt:

$$\begin{aligned} \xi_r &= r^2 : x_e = \mu \cdot a \cdot x_q, \\ \eta_r &= r^2 : y_e = \mu \cdot b \cdot y_q, \\ \zeta_r &= r^2 : z_e = \mu \cdot c \cdot z_q. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass dem Perpendikel p des ersten Raumes das Perpendikel p' des zweiten Raumes entspricht, wobei aber die Fusspunkte einander nicht entsprechen.

* Collected math. papers, vol. I, p. 571.

Über die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung.

Von

Dr. R. SCHUMANN

in Potsdam.

Einleitung.

Für relative Schweremessungen nach der Methode des Herrn Oberst v. Sterneck sind in neuerer Zeit mehrfach Pendelstative gebaut worden, die so beschaffen sind, dass mehrere Sternecksche Pendel zugleich schwingen können. Ist dabei Fürsorge getroffen, dass die Schneiden zweier Pendel einander parallel sind, während die Schwingungsebenen zusammenfallen, so kommt zu den Vorzügen solcher Stative, als: gewisse, bessere Temperaturverhältnisse, Abkürzung der Beobachtungsdauer durch Wegfall des häufigen Aus- und Einpackens der Pendel, noch der einer Möglichkeit, den Einfluss der Mitschwingung von Stativ und Untergrund in der Schwingungsrichtung innerhalb einiger Minuten mit ausreichender Genauigkeit bestimmen zu können. Dies ausführlich darzulegen, ist der Zweck der vorliegenden, von Herrn Geheimrat Helmholtz angeregten Arbeit.

Zusammenstellungen der hierher gehörigen theoretischen und praktischen Untersuchungen findet man bei von Oppolzer,* bei Zörn,** in besonders ausführlicher Weise bei Helmholtz***

Die hier darzulegende Methode der Mitschwingungsbestimmung ist aus dem im Königl. Preuss. Geodätischen Institute ausgearbeiteten

* Verhandlungen der siebenten allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung, Beilage VIa.

** Das Pendel und seine Verwendung. Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresberichte des Königl. Gymnasiums zu Plauen i. V., Ostern 1897.

*** Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Institutes und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung. Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Potsdam 1898. Diese Publikation erschien, als die vorliegende Arbeit bereits zur Veröffentlichung eingesandt war; sie überall in genügender Weise zu berücksichtigen, war bei der Kürze der Zeit nicht mehr möglich.

„Wippverfahren“* hervorgegangen; dabei leitete mich der Wunsch, erstens den individuellen, unkontrollierbaren Rhythmus in der Handhabung des Dynamometers von seiten des Beobachters zu ersetzen durch den mathematisch besser verfolgbaren einer mechanischen Vorrichtung in Gestalt eines zweiten Pendels, und zweitens, die einer Kraft von mehreren Kilogramm entsprechende Einwirkung des Dynamometers auf den Pfeiler zu ersetzen durch die einer beschränkten Zahl von Grammen. Eine solche geringe Kraft entspricht einmal derjenigen besser, die die Schneide eines invariablen Pendels auf ihre Unterlage ausübt; zweitens kann man sie ohne Bedenken auf das Stativ selbst einwirken lassen, im Gegensatz zu der grossen Kraft des Dynamometers. Wegen der in den meisten Fällen sehr geringen Grösse des Mitschwingens ist es wesentlich für das gute Gelingen des Versuches, dem zweiten Pendel ein etwas grösseres Gewicht zu geben.

Nachträglich fand ich, dass Herr Lorenzoni** schon im Jahre 1886 mit einem Fadenpendel bei seiner Bestimmung der absoluten Schwere dieselbe Methode angewendet hatte, ohne allerdings ihre ganze Genauigkeit auszunutzen.

Der ihr zu Grunde liegende Vorgang*** ist kurz folgender: von zwei Pendeln mit nahezu gleicher Schwingungszeit wird das eine auf einen Ausschlag zwischen 15' und 40' gebracht, und das andere so vollkommen als möglich beruhigt; ist dies erreicht, so wird das erste freigelassen. Die stetig anwachsende Amplitude des zweiten (des getriebenen) Pendels und die langsam abnehmende des ersten (des treibenden) Pendels werden dann einige Minuten hindurch nach den Schlägen eines Chronometers abwechselnd beobachtet; bei einiger Übung kann man die Beobachtung nach rund vier Minuten abbrechen und einen neuen Versuch anstellen.

Das Anwachsen der Amplitude des getriebenen Pendels giebt ein Maß für die Grösse des Mitschwingens von Stativ und Untergrund.

In den drei ersten Abschnitten des folgenden, theoretischen Teiles soll dieser Zusammenhang, unter gewissen Voraussetzungen, mathematisch verfolgt werden, während der vierte Abschnitt Vergleiche mit analogen Entwicklungen Anderer enthält; der zweite Teil enthält in drei weiteren Abschnitten die Beschreibung einer provisorischen mechanischen Vorrichtung zum Wippen des Stativs, einen Vergleich zwischen Theorie und Praxis und einen Auszug aus den Ergebnissen einer Reihe von Versuchen über die Stabilität von Pfeilern und Stativen.

* Astronomische Nachrichten Nr. 3353.

** Associazione Geodetica Internazionale: Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio Astronomico di Padova per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi. Seite 65—72.

*** Vergl. auch: Zeitschrift für Instrumentenkunde, 17. Jahrgang, 1. Heft.

1. Theoretische Untersuchungen.

I. Ableitung der Bewegungsgleichungen.

Nennt man φ und ψ die als kleine Grössen erster Ordnung anzunehmenden Amplituden des treibenden und des getriebenen Pendels, l_1 und l_2 deren mathematische Längen, k_1 und k_2 gewisse mit Schneidenreibung und Luftwiderstand zusammenhängende Konstanten, g die Schwere, t die Zeit, stellen ferner $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die Schneidenbewegungen dar, so lauten die Bewegungsgleichungen für φ und ψ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & l_1 \cdot \varphi'' + k_1 \cdot \varphi' + g \cdot \varphi = -x_1'', \\ 2) \quad & l_2 \cdot \psi'' + k_2 \cdot \psi' + g \cdot \psi = -x_2''. \end{aligned}$$

Ruhen beide Pendelschneiden auf einer gemeinsamen, mitschwingenden Unterlage und ist das Stück zwischen ihren Schneiden starr, so kann man annehmen, dass die Unterlage sehr nahe dieselbe Bewegung wie die Schneiden hat. Die Bewegung der Unterlage wird durch die der Pendel verursacht, ist also selbst unbekannt. In erster Annäherung wird aber nach dem Vorgange der Herren Cellérier,* C. S. Peirce,** v. Oppolzer,*** General v. Orff† bei nur einem Pendel die Bewegung der Unterlage dargestellt durch:

$$x(t) = \text{const} \cdot \varphi;$$

die Konstante ist von der Ordnung der Grösse 0.005.

Nimmt man weiter, wie die Herren†† Cellérier und Peirce, in Anbetracht der Kleinheit dieser Bewegungen, für zwei gleichzeitig

* Verhandlungen der fünften allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung in Stuttgart 1877, Beilage Ia: Note sur le mouvement simultané . . .

** Ebenda, Beilage Ib: De l'influence de la flexibilité . . .

*** Ebenda, Beilage Ic: Erste Note zu Herrn Peirce's Mitteilung . . .

† Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen, Seiten 112 und 120.

†† Verhandlungen der sechsten allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung in München 1880, Beilage II: Rapport sur la question du pendule . . ., Seite 7, und: The American Journal of science and arts, Vol. XVIII, 1879: On a Method of swinging Pendulums, Seite 114.

Herr Cellérier setzt bei der hier angenommenen Anordnung der Pendel: $\alpha = \beta$, während Herr Peirce noch die Möglichkeit bedenkt, dass wie der ganze Apparat, so auch das Stück zwischen den beiden Schneiden sich während der Bewegung der Pendel verbiege; mit obiger Bezeichnung erhält er statt 3):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi, \\ x_2(t) &= \beta \cdot \varphi + \alpha \cdot \psi. \end{aligned}$$

Vergleiche hierbei die Berechnung von β aus α im VI., und die Bemerkungen über das „Gleiten“ der Schneiden im VII. Abschnitte der vorliegenden Arbeit.

Übrigens wird die den Gleichungen 1) und 2) analoge Gleichung für die Bewegung der Unterlage durch die Annahme 3) bis auf Grössen dritter Ordnung befriedigt. Vergl. hierüber Peirce in den: Verhandlungen der fünften allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung zu Stuttgart 1877, Seite 172 bis 177; sowie Helmholtz a. a. O. Seite 67--73.

schwingende Pendel an, dass die von ihnen der Unterlage erteilten Impulse superponiert werden dürfen, so kann man nach dem Vorhergehenden setzen:

$$3) \quad x_1(t) = x_2(t) = \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi,$$

worin α und β Konstanten sind.

Mit Hilfe von 3) erhält man für φ und ψ die beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$4) \quad (l_1 + \alpha) \cdot \varphi'' + k_1 \cdot \varphi' + g \cdot \varphi = -\beta \cdot \psi'',$$

$$5) \quad (l_2 + \beta) \cdot \psi'' + k_2 \cdot \psi' + g \cdot \psi = -\alpha \cdot \varphi''.$$

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten dienen die Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = z, \quad \varphi'(0) = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0.$$

Aus 4) und 5) erkennt man α und β als Verlängerungen der Pendellängen, oder es sind:

$$l_1 + \alpha = L \quad \text{und} \quad l_2 + \beta = l$$

gestörte Pendellängen, die sich für das eine Pendel ergeben würden, wenn das andere arretiert wäre.

Differentiiert man 4) und 5) zweimal nacheinander nach t , so ergibt sich:

$$6) \quad \begin{cases} L \cdot \varphi'' + k_1 \cdot \varphi' + g \cdot \varphi = -\beta \cdot \psi'' , \\ L \cdot \varphi''' + k_1 \cdot \varphi'' + g \cdot \varphi' = -\beta \cdot \psi''' , \\ L \cdot \varphi'''' + k_1 \cdot \varphi''' + g \cdot \varphi'' = -\beta \cdot \psi'''' , \\ l \cdot \psi'' + k_2 \cdot \psi' + g \cdot \psi = -\alpha \cdot \varphi'' , \\ l \cdot \psi''' + k_2 \cdot \psi'' + g \cdot \psi' = -\alpha \cdot \varphi''' , \\ l \cdot \psi'''' + k_2 \cdot \psi''' + g \cdot \psi'' = -\alpha \cdot \varphi'''' . \end{cases}$$

Aus der dritten und der sechsten Gleichung lässt sich leicht je eine Differentialgleichung für ψ und für φ aufstellen. Bezeichnet man mit $F(\varphi)$ den Ausdruck:

$$(L \cdot l - \alpha \cdot \beta) \cdot \varphi'''' + (L \cdot k_2 + l \cdot k_1) \cdot \varphi''' + [g \cdot (L + l) + k_1 \cdot k_2] \varphi'' + g \cdot (k_1 + k_2) \cdot \varphi' + g^2 \cdot \varphi,$$

so erhält man zunächst statt 4) und 5) die beiden Gleichungen:

$$\frac{F(\psi)}{\beta} = 0 = \frac{F(\varphi)}{\alpha},$$

die sich, so lange α und β verschieden von Null sind, auf die eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten reducieren:

$$7a) \quad F(\varphi) = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung hat die Form:

$$7b) \quad \varphi = \sum_1^4 c_i \cdot e^{r_i t} \quad \left(\text{und analog: } \psi = \sum_1^4 f_i \cdot e^{r_i t} \right).$$

Die Anfangswerte von φ'' , φ''' , ψ'' und ψ''' ergeben sich aus 6). Setzt man φ oder ψ in 7a) ein, so findet man, dass r_1, r_2, r_3, r_4 die Wurzeln der Gleichung vierten Grades sind:

$$8) \left\{ \begin{aligned} (L \cdot l - \alpha \cdot \beta) \cdot r^4 + (L \cdot k_2 + l \cdot k_1) \cdot r^3 + [g \cdot (L + l) + k_1 \cdot k_2] \cdot r^2 \\ + g \cdot (k_1 + k_2) \cdot r + g^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Aus der Form der Koeffizienten kann man auf die Möglichkeit einer Vereinfachung schliessen; man erhält eine solche, wenn man, von rechts anfangend, durch Addition und Subtraktion identischer Glieder Quadrate bildet, und zusammenzieht. Man findet dann statt 8):

$$9) \left\{ \begin{aligned} r^2 \cdot \left[\alpha \cdot \beta \cdot r^2 + \left(\frac{L-l}{2} \cdot r + \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \right] \\ = \left(\frac{L+l}{2} \cdot r^2 + \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot r + g \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Eine geschlossene Auflösung von 8) oder 9) führt zu praktisch unbequemen Resultaten; 9) reducirt sich in den erwähnenswerten Fällen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad k_1 = k_2$$

auf quadratische Gleichungen, und lässt dann verhältnismässig einfache, geschlossene Lösungen zu. Da nach 7b) die r immer mit der Zeit t multipliciert auftreten, so erschien es mir gut, Entwicklungen so lange als möglich zu vermeiden, gewisser kleiner Nenner wegen.

Der Fall $\alpha = 0$ (oder $\beta = 0$) trifft für das Fadenpendel zu, für dessen Bewegung bereits die Herren v. Orff* und Lorenzoni** Gleichungen bei Gelegenheit absoluter Schweremessungen aufgestellt haben, während Herr Kühnen*** eine Anwendung für relative Schweremessungen gab; vergleiche hierüber Abschnitt IV.

Hier soll die Berechnung von φ und ψ geschlossen durchgeführt werden für $k_1 = k_2 = k$, welcher Fall in der Praxis sehr nahe zutrifft; wegen der speciellen Form der Anfangsbedingungen ist zur Berechnung der c und f das in Sturms „Cours d'Analyse“, I. Bd. Nr. 582 angegebene Verfahren eingeschlagen worden.

Setzt man:

$$\rho = \frac{r^2}{k \cdot r + g},$$

so gilt für ρ die quadratische Gleichung:

$$(L \cdot l - \alpha \cdot \beta) \cdot \rho^2 + (L + l) \cdot \rho + 1 = 0.$$

Man erhält, wenn

$$\text{gesetzt wird:} \quad R = \sqrt{(L - l)^2 + 4 \alpha \cdot \beta}$$

* a. a. O. S. 119—122.

** a. a. O. S. 70.

*** Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Institutes: Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe, S. 251—258.

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = \frac{-2}{L+l+R}, \quad \varrho_2 = \frac{-2}{L+l-R}, \\ r_1 = -M_1 + i \cdot N_1, \quad c_1 = \frac{z \cdot \alpha}{R} \left(-\frac{1}{2} + i \cdot v_1 \right), \\ r_2 = -M_1 - i \cdot N_1, \quad c_2 = \frac{z \cdot \alpha}{R} \left(-\frac{1}{2} - i \cdot v_1 \right), \\ r_3 = -M_2 + i \cdot N_2, \quad c_3 = \frac{z \cdot \alpha}{R} \left(+\frac{1}{2} - i \cdot v_2 \right), \\ r_4 = -M_2 - i \cdot N_2, \quad c_4 = \frac{z \cdot \alpha}{R} \left(+\frac{1}{2} + i \cdot v_2 \right), \\ f_1 = \frac{z \cdot (L-l-R)}{2R} \left(-\frac{1}{2} + i \cdot v_1 \right), \\ f_2 = \frac{z \cdot (L-l-R)}{2R} \left(-\frac{1}{2} - i \cdot v_1 \right), \\ f_3 = \frac{z \cdot (L-l+R)}{2R} \left(+\frac{1}{2} - i \cdot v_2 \right), \\ f_4 = \frac{z \cdot (L-l+R)}{2R} \left(+\frac{1}{2} + i \cdot v_2 \right). \end{array} \right.$$

Hierin ist:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{-k \cdot \varrho_1}{2} = \frac{+k}{L+l+R}, \\ M_2 = \frac{-k \cdot \varrho_2}{2} = \frac{+k}{L+l-R}, \\ N_1 = \sqrt{-g \cdot \varrho_1 - \frac{k^2 \cdot \varrho_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{2g(L+l+R) - k^2}}{L+l+R}, \\ N_2 = \sqrt{-g \cdot \varrho_2 - \frac{k^2 \cdot \varrho_2^2}{4}} = \frac{\sqrt{2g(L+l-R) - k^2}}{L+l-R}, \\ 2v_1 = k \cdot \sqrt{\frac{-\varrho_1}{4g+k^2 \cdot \varrho_1}} = \frac{k}{\sqrt{2g(L+l+R) - k^2}}, \\ 2v_2 = k \cdot \sqrt{\frac{-\varrho_2}{4g+k^2 \cdot \varrho_2}} = \frac{k}{\sqrt{2g(L+l-R) - k^2}}. \end{array} \right.$$

Substituiert man diese Werte in 7b) und setzt noch zur Abkürzung:

$$P(t) = e^{-M_1 t} \cdot [\cos(N_1 t) + 2v_1 \cdot \sin(N_1 t)],$$

$$Q(t) = e^{-M_2 t} \cdot [\cos(N_2 t) + 2v_2 \cdot \sin(N_2 t)],$$

so findet man folgende Formeln, die also bei Gleichheit der Widerstände die Bewegungen beider Pendel als Funktionen der Zeit t darstellen:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{z \cdot \alpha}{R} \cdot [Q(t) - P(t)], \\ \varphi = \frac{z}{2} \cdot \left\{ Q(t) + P(t) + \frac{L-l}{R} [Q(t) - P(t)] \right\}. \end{array} \right.$$

II. Die Gleichungen der Maxima-Kurven.

Die Gleichungen 12) geben die Werte von ψ und φ für jeden Zeitpunkt; bei der Beobachtung von Amplituden werden indessen nur Maximalausschläge abgelesen. Die Beobachtung lehrt, dass ausser

den kurzen Schwingungen von rund einer Sekunde Dauer auch solche auftreten, deren Perioden Grössen von der Ordnung einer Stunde sind; ferner, dass die Grössen der Maxima Maximorum langsam abnehmende Reihen bilden. Es ist wünschenswert, in 12) die rasch veränderlichen Glieder von den langsam veränderlichen zu trennen. In der Zwischenzeit zwischen zwei aufeinander folgenden, gleichgerichteten Durchgängen durch die Ruhelage muss jede der beiden Pendelgleichungen nahezu die Gestalt haben:

$$A \cdot \cos(mt) + B \cdot \sin(mt),$$

welchen Ausdruck man auch schreiben kann:

$$\pm \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos\left(mt - \arctg \frac{B}{A}\right);$$

A , B und m bedeuten hier Konstanten.

Die Gleichungen 12) lassen sich leicht auf diese Form bringen, wenn man setzt:

$$N_1 = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2},$$

$$N_2 = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2},$$

eine Substitution, die durch die Symmetrie zwischen den Grössen mit den Indices 1 und 2 nahegelegt wird. $N_1 - N_2$ ist eine kleine Grösse; entwickelt man in 12) und zieht die Glieder mit

$$\cos\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right),$$

sowie jene mit

$$\sin\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right)$$

zusammen, so erhält man für ψ und φ Gleichungen der Form:

$$\psi = A_1(t) \cdot \cos\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right) + B_1(t) \cdot \sin\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right),$$

$$\varphi = A_2(t) \cdot \cos\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right) + B_2(t) \cdot \sin\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t\right),$$

worin $A_1(t)$, $B_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)$ ausser Konstanten noch die langsam veränderlichen Glieder enthalten. Nimmt man diese zwar veränderlich von Oscillation zu Oscillation, aber als konstant für die Dauer einer einzelnen Oscillation an, so kann man weiter schreiben:

$$12a) \quad \begin{cases} \psi = \pm \sqrt{A_1^2(t) + B_1^2(t)} \cdot \cos\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t - \arctg \frac{B_1(t)}{A_1(t)}\right), \\ \varphi = \pm \sqrt{A_2^2(t) + B_2^2(t)} \cdot \cos\left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t - \arctg \frac{B_2(t)}{A_2(t)}\right). \end{cases}$$

Dann stellen aber die Funktionen:

$$\Psi = \pm \sqrt{A_1^2(t) + B_1^2(t)},$$

$$\Phi = \pm \sqrt{A_2^2(t) + B_2^2(t)},$$

Kurven dar, die nahe durch die Maxima der aufeinander folgenden Schwingungen kurzer Periode gehen.

Vor Ausführung dieser Operation wird zweckmässigerweise die Substitution gemacht:

$$2 \nu_1 = \operatorname{tg} \varepsilon_1, \quad 2 \nu_2 = \operatorname{tg} \varepsilon_2;$$

die ε sind hier, wie die ν , sehr kleine Grössen.

Man erhält dann:

$$13) \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \\ \pm \frac{z \cdot \alpha}{R} \cdot \sqrt{\left[\frac{e^{-M_1 t}}{\cos \varepsilon_1} - \frac{e^{-M_2 t}}{\cos \varepsilon_2} \right]^2 + 4 \cdot \frac{e^{-(M_1 + M_2) \cdot t}}{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2} \cdot \sin^2 \frac{(N_2 - N_1) \cdot t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}}, \\ \\ \Phi = \\ \pm \frac{z}{2} \cdot \sqrt{\left[\frac{e^{-M_1 t}}{\cos \varepsilon_1} + \frac{e^{-M_2 t}}{\cos \varepsilon_2} - \frac{l - L}{R} \cdot \left(\frac{e^{-M_1 t}}{\cos \varepsilon_1} - \frac{e^{-M_2 t}}{\cos \varepsilon_2} \right) \right]^2 - \frac{16 \alpha \beta}{R^2} \cdot \frac{e^{-(M_1 + M_2) \cdot t}}{\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2} \cdot \sin^2 \frac{(N_2 - N_1) \cdot t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}}. \end{array} \right.$$

Da bei dieser Operation die Veränderungen der langsam veränderlichen Glieder während einer Zeitsekunde vernachlässigt werden, so ist damit der Weg strenger Rechnung verlassen worden; hier seien, zum Zwecke weiterer Vernachlässigungen, zugleich die Ordnungen aller in der Rechnung vorkommenden Grössen festgesetzt.

$$14) \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Grössen sind:} \\ l_1, l_2, l, L, g, \varrho_1, \varrho_2, r_1, r_2, r_3, r_4, N_1, N_2; \\ \text{kleine Grössen erster Ordnung sind:} \\ \varphi, \psi, z, \Psi, \Phi; \\ \text{kleine Grössen zweiter Ordnung sind:} \\ k_1, k_2, k, \alpha, \beta, M_1, M_2, \varrho_1 - \varrho_2, \nu_1, \nu_2, l_1 - l_2, \\ L - l, R, N_1 - N_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2; \\ \text{die Grössen } M_1 - M_2, \nu_1 - \nu_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \text{sind von höherer als der zweiten Ordnung.} \end{array} \right.$$

Auf die mit der Zeit t multiplicierten Grössen ist besonders zu achten.

III. Darstellung von ψ , φ , Ψ und Φ für den Anfang der Bewegung.

Für den Anfang der Bewegung ($t < 300$ sec) treten in 12) und 13) bedeutende Vereinfachungen ein; während der ersten Sekunden erhält man aus 12):

$$\psi = \operatorname{const} \cdot t \cdot \cos \left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\varphi = z \cdot \cos \left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \right).$$

Demnach schwingt das treibende Pendel φ im Anfange so, als ob das getriebene Pendel ψ nicht vorhanden wäre; dieses folgt ihm um den vierten Teil einer ganzen Oscillation* nach, während seine Amplitude von Null an proportional mit der Zeit anwächst.

Für Ψ , auf das es hier besonders ankommt, kann man schreiben:

$$\Psi = \pm \frac{z \cdot \alpha}{R} \cdot e^{-\left(\frac{M_1 + M_2}{2}\right) \cdot t} \cdot \sqrt{\left[\frac{e^{\frac{M_2 - M_1}{2} \cdot t}}{\cos \varepsilon_1} - \frac{e^{-\frac{M_2 - M_1}{2} \cdot t}}{\cos \varepsilon_2} \right]^2 + \frac{4}{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2} \cdot \sin^2 \frac{(N_2 - N_1) \cdot t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}}$$

Vernachlässigt man hierin die kleinen Winkel ε_1 und ε_2 und entwickelt unter der Wurzel nach Potenzen von t , so erhält man für das erste Glied des Radikanden angenähert:

$$+ k^2 \cdot \left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2 \cdot t^2 + \dots$$

und für das zweite Glied ebenso:

$$- \frac{g}{\varrho_1} \cdot \left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2 \cdot t^2;$$

nach den Festsetzungen 14) ist ersteres um vier Ordnungen kleiner als letzteres.

In Φ kommt derselbe Ausdruck noch mit dem echten, endlichen Bruche $\frac{l-L}{R}$ multipliciert vor, seine Grössenordnung bleibt dieselbe; das Gleiche gilt von dem Sinusgliede, da auch $\frac{\alpha \cdot \beta}{R^2}$ ein echter endlicher Bruch ist. Nimmt man auch hier $e^{-\frac{M_1 + M_2}{2} \cdot t}$ vor die Wurzel und entwickelt nach t , so findet man, dass dann das erste Glied des Radikanden bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich 4, also von nullter Ordnung ist, während das zweite Glied für $t = 300$ sec von der ersten Ordnung ist.

Da nach 11)

$$N_2 - N_1 = \frac{R}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} + \dots$$

ist, so werden die Gleichungen 13) einfach:

$$15) \quad \begin{cases} \Psi = \pm \frac{z \cdot \alpha}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t \cdot e^{-\frac{M_1 + M_2}{2} \cdot t}, \\ \Phi = \pm z \cdot e^{-\frac{M_1 + M_2}{2} \cdot t}; \end{cases}$$

daraus folgt:

$$16) \quad \frac{\Psi}{\Phi} = \pm \frac{\alpha}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t,$$

oder man kann, und zwar mit einer für die vorliegende Methode der Mitschwingungsbestimmung völlig ausreichenden Genauigkeit, das

* Lorenzoni, a. a. O., S. 66.

Verhältnis der Amplituden beider Pendel als lineare Funktion der Zeit ansetzen, so lange t eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet.

IV. Vergleiche mit Entwicklungen Anderer.

Im Gegensatz zu den vorigen Abschnitten wird es hier teilweise nötig, der Variablen t grössere Werte als bisher beizulegen; möglicherweise treten dabei die Folgen gewisser Vernachlässigungen bereits hervor.

1. Die Herren* Cellérier und Peirce hatten schon vor dem Jahre 1880, teils einem Auftrage der permanenten Kommission der Europäischen Gradmessung folgend, teils angeregt durch einen Vorschlag des Herrn Faye,** die Bewegung zweier gleichzeitig an einem Stative schwingender Pendel, und zwar unter ganz speciellen Anfangsbedingungen, untersucht, kamen aber bei der Durchführung des Fayeschen Vorschlags zu praktisch unbrauchbaren Ergebnissen;*** keine von beiden Arbeiten enthält Beobachtungen oder praktische Anwendungen. Beide hatten ihr Augenmerk darauf gerichtet, den Einfluss des Mitschwingens aus den zu beobachtenden mittleren Schwingungszeiten zwischen zwei gleichzeitigen Durchgängen beider Pendel durch die Ruhelage zu ermitteln.

Diese mit der Zeit veränderlichen Schwingungsdauern $T_1(t)$ und $T_2(t)$ der Pendel kann man unter denselben Voraussetzungen, die zu den Gleichungen 12a) geführt haben, folgendermaßen berechnen. Von einem bestimmten Zeitpunkte t ab gezählt ist eine ganze Oscillation beendet, wenn

$$\frac{N_1 + N_2}{2} [t + T_1(t)] - \arctg \frac{B_1 [t + T_1(t)]}{A_1 [t + T_1(t)]} - \left(\frac{N_1 + N_2}{2} \cdot t - \arctg \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \right) = 2\pi$$

ist. $T_1(t)$ ist immer nahe gleich einer Sekunde und kann für grosse Werte von t als eine kleine Grösse angesehen werden; danach ergibt sich durch Entwicklung nach Taylor:

$$T_1(t) = \frac{2\pi}{\frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{d \left(\arctg \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \right)}{dt}}$$

* Verhandlungen der sechsten allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung, Annexe II: Rapport sur la question du Pendule, par C. Cellérier; und: The American Journal of Science and Arts, Vol. XVIII S. 112: On a method of swinging Pendulums for the determination of Gravity, proposed by M. Faye; by C. S. Peirce. Darnach hat auch der Vater des Letzteren, Professor Benjamin Peirce, die gegenseitige Beeinflussung zweier Pendel studiert.

** Derselbe Rapport, S. 5 fg.

*** Ebenda, S. 16 und 17; vergleiche auch Oppolzers Bericht in den Verhandlungen der siebenten allgemeinen Konferenz, Annexe VIa, S. 16.

Eine analoge Gleichung erhält man für $T_2(t)$, und es ist leicht zu sehen, wie daraus die für die Zeit zwischen zwei beliebigen Momenten t_1 und t_2 stattfindende mittlere Oscillationsdauer oder auch, wie die Veränderung der Phase abzuleiten ist; darauf soll nicht näher eingegangen werden, da keine Notwendigkeit dazu vorliegt. Dass die Anwendbarkeit der Methode, aus der Zeitdauer zwischen gleichzeitigen Durchgängen durch die Ruhelage das Mitschwingen zu bestimmen, innerhalb enger Grenzen liegt, geht aus folgendem hervor. Aus den Gleichungen 12a), 13) und aus obiger Formel für $T_1(t)$ erkennt man, dass in den Veränderungen der Amplituden, der Schwingungsdauern und der Phase ein Cyklus vorhanden ist, dessen Dauer C in erster Annäherung die Form hat:

$$C = \frac{\text{const}}{\sqrt{(L-l)^2 + 4\alpha\beta}};$$

der Zähler der rechten Seite ist bekannt.

Bei bekannter Pendellängendifferenz lässt sich hieraus $4\alpha\beta$ berechnen, wenn C beobachtet ist. Nun ist es naturgemäss,* das Mitschwingen klein zu machen, soweit dies geschehen kann, ohne dass die Sicherheit der Beobachtung sonst Einbusse erleidet. Ist dann aber $L-l$ ebenfalls klein, so wird C zu gross,** und wenn $L-l$ gross ist, so erscheint $4\alpha\beta$ als kleine Differenz grosser Beobachtungszahlen, wird also unvorteilhaft bestimmt.

2. Zur Integration der Differentialgleichungen 4) und 5) hat Herr Kühnen denselben Weg wie Herr Peirce*** eingeschlagen; da bei dieser Ableitung der Gleichungen 12) teilweise die Symmetrie der Rechnung verloren geht, habe ich hier das in Abschnitt I benutzte Verfahren beibehalten.

3. Der stabile Apparat† des Herrn Haid gestattet, zwei Pendelpaare gleichzeitig schwingen zu lassen; die Schneiden eines Pendelpaares liegen auf einer Geraden, ihre Schwingungsebenen sind einander parallel und haben einen Abstand von 22 cm. Bei dieser Anordnung können die oben entwickelten Formeln nicht ohne weiteres angewendet werden. Die von Herrn Haid entwickelte Endformel für das Mitschwingen

* Für die von den Herren Cellérier und Peirce erörterten Methoden und ihre Entwicklungen wäre es günstig, grosses Mitschwingen zu haben; vergleiche die bereits citierten Arbeiten: Rapport sur la question du Pendule..., S. 18, und American Journal... , Vol. XVIII, Seite 115.

** Cellérier, a. a. O., S. 18.

*** Verhandlungen der fünften allgemeinen Konferenz..., Beilage Ib: De l'influence..., S. 174 und 175.

† Zeitschrift für Instrumentenkunde, 16. Jahrgang, 7. Heft, und: Astronomische Nachrichten, Nr. 3418 und Nr. 3499. Mit Bezug auf diese Anordnung der Pendelschneiden, zusammen mit der excentrischen Aufhängung der Pendel, vergleiche man, was Cellérier (Rapport..., S. 6 u. 10) und Herr Haid selbst über die Möglichkeit von Drehungen im Stativ bemerken (Zeitschrift für Instrumentenkunde..., Schluss des Aufsatzes); Untersuchungen darüber sind noch nicht bekannt.

kann allerdings für die Dauer einiger Minuten nach dem Antriche in Übereinstimmung mit Formel 16) gebracht werden.

4. Die in Abschnitt I bereits citierten Entwicklungen der Herren von Orff, Lorenzoni und Kühnen beziehen sich auf ein Fadenpendel, also auf den Fall $k_2 > k_1$ und $\beta = 0$; hierfür sind die Formeln des vorigen Abschnitts nicht anwendbar, denn k_2 kann um eine ganze Ordnung grösser werden als k_1 . Es schien mir aber wichtig zu prüfen, ob etwa durch die Vernachlässigung der Veränderungen der langsam veränderlichen Glieder während der Dauer einer einzelnen Schwingung wesentliche Abweichungen entstehen.

Deshalb habe ich die der ersten Gleichung 13) entsprechende Gleichung für die Maximalkurve des Fadenpendels auf dieselbe Weise abgeleitet, wie oben für das 1,3 kg schwere invariable Pendel.

Aus den Differentialgleichungen für die Amplituden φ und χ des ungestört schwingenden Hauptpendels und des Fadenpendels:

$$L \cdot \varphi'' + k_1 \cdot \varphi' + g \cdot \varphi = 0, \quad l \cdot \chi'' + k_2 \cdot \chi' + g \cdot \chi = -\alpha \cdot \varphi''$$

und aus den Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = z, \quad \varphi'(0) = 0; \quad \chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 0,$$

findet man:

$$17) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= z \cdot e^{-\frac{k_1 \cdot t}{2L}} \cdot \left[\cos \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2} \cdot t + \frac{k_1}{\sqrt{4Lg - k_1^2}} \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2} \cdot t \right] \\ \chi &= e^{-\frac{k_1 t}{2L}} \cdot 2 \cdot \left[\xi_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2} \cdot t - \eta_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2} \cdot t \right] \\ &\quad - e^{-\frac{k_2 t}{2l}} \cdot 2 \cdot \left[\xi_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{k_2}{2l}\right)^2} \cdot t - \eta_2 \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{k_2}{2l}\right)^2} \cdot t \right]. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist, wenn gesetzt wird:

$$S = \sqrt{(l-L)^2 \cdot g - (k_2 - k_1)(l \cdot k_1 - L \cdot k_2)}$$

$$= \sqrt{(l-L)^2 \cdot g + (k_1 - k_2)^2 \cdot l + (k_1 - k_2)(l \cdot k_1 - L \cdot k_2)},$$

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{\alpha \cdot g \cdot z \cdot (l-L)}{2 \cdot S^2},$$

$$\eta_1 = -\frac{\alpha \cdot g \cdot z \cdot [L(k_2 - k_1) - (lk_1 - Lk_2)]}{2 \cdot S^2 \cdot \sqrt{4Lg - k_1^2}},$$

$$\eta_2 = -\frac{\alpha \cdot g \cdot z \cdot [l(k_2 - k_1) - (lk_1 - Lk_2)]}{2 \cdot S^2 \cdot \sqrt{4lg - k_2^2}}.$$

In der zweiten Form von S ist das dritte Glied des Radikanden um eine Ordnung kleiner als die Summe der beiden ersten.

Setzt man:

$$\frac{L(k_2 - k_1) - (lk_1 - Lk_2)}{(l-L) \cdot \sqrt{4Lg - k_1^2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_1,$$

$$\frac{l(k_2 - k_1) - (lk_1 - Lk_2)}{(l-L) \cdot \sqrt{4lg - k_2^2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_2,$$

$$A = \frac{\alpha \cdot g \cdot z \cdot (L-l)}{S^2}, \quad B = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{k_2}{2l}\right)^2}, \quad C = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2},$$

so wird:

$$x = A \cdot \left[\frac{e^{-\frac{k_1 t}{2L}}}{\cos \varepsilon_1} \cdot \cos(B \cdot t + \varepsilon_1) - \frac{e^{-\frac{k_2 t}{2l}}}{\cos \varepsilon_2} \cdot \cos(C \cdot t + \varepsilon_2) \right].$$

Zerlegt man hierin, um wie früher die Glieder kurzer und langer Periode zu trennen,

$$B \cdot t + \varepsilon_1 \quad \text{in} \quad \frac{B+C}{2} \cdot t + \left(\frac{B-C}{2} \cdot t + \varepsilon_1\right),$$

$$C \cdot t + \varepsilon_2 \quad \text{in} \quad \frac{B+C}{2} \cdot t - \left(\frac{B-C}{2} \cdot t - \varepsilon_2\right),$$

so erhält man als Gleichung der Maximalkurven:

$$18) \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \pm \frac{2z \cdot \sqrt{Lg}}{\sqrt{4Lg - k_1^2}} \cdot e^{-\frac{k_1 t}{2L}}, \\ X &= \\ \pm A \cdot \sqrt{ &\left[\frac{e^{-\frac{k_1 t}{2L}}}{\cos \varepsilon_1} - \frac{e^{-\frac{k_2 t}{2l}}}{\cos \varepsilon_2} \right]^2 + 4 \cdot \frac{e^{-\left(\frac{k_1}{2L} + \frac{k_2}{2l}\right)t}}{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2} \cdot \frac{\sin^2(B-C)t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Die zweite Gleichung hat eine der ersten Gleichung 13) analoge Gestalt. $B-C$ und $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ sind wie früher sehr kleine Grössen; die Winkel ε_1 und ε_2 selbst aber sind hier im Gegensatz zu vorhin endliche Grössen, wie man aus folgenden Formeln sieht:

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{l-L}{S} \cdot \sqrt{g - \frac{k_1^2}{4L}},$$

$$\cos \varepsilon_2 = \frac{l-L}{S} \cdot \sqrt{g - \frac{k_2^2}{4l}}.$$

Je grösser k_2 gegenüber k_1 ist, um so eher wird, mit wachsendem t , $e^{-\frac{k_2 t}{2l}}$ eine kleine Grösse gegenüber $e^{-\frac{k_1 t}{2L}}$. Nach 17) hat dann das Fadenpendel dieselbe Schwingungszeit wie das Hauptpendel, während in X alle Glieder ausser dem ersten Summanden der ersten Klammer unter der Wurzel zu vernachlässigen sind; das Amplitudenverhältnis ist dann eine Konstante:

$$\frac{X}{\Phi} = \frac{\alpha \cdot \sqrt{g}}{S}.$$

Auf diese Weise hat zuerst Herr General von Orff* den Einfluss des Mitschwingens bei seiner absoluten Schweremessung bestimmt; seine Formel 37) stimmt mit der aus der obigen folgenden:

$$\alpha = \frac{X}{\Phi} \cdot \frac{S}{\sqrt{g}}$$

überein, abgesehen von Gliedern dritter Ordnung.

* a. a. O. S. 123.

Im Anschluss hieran sei bemerkt, dass nach 12) und 13) zwei schwere Pendel ebenfalls nach einer gewissen Zeit gleiche Schwingungszeit und konstantes Amplitudenverhältnis erlangen; im Gegensatz zum Fadenpendel tritt hier aber der Isochronismus nach so langer Zeit ein, dass kein praktischer Nutzen daraus gezogen werden kann.

5. Vernachlässigt man in 18) die sehr kleinen Glieder:

$$\left(\frac{k_2}{2l}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{k_1}{2L}\right)^2 \text{ gegen } \frac{g}{l} \text{ resp. } \frac{g}{L}$$

auch wenn sie mit t multipliziert sind, so kann man schreiben:

$$X = \pm \frac{\alpha \cdot z \cdot \sqrt{g}}{S} \cdot \sqrt{e^{-\frac{k_1 t}{L}} + e^{-\frac{k_2 t}{l}} - 2 \cdot e^{-\left(\frac{k_1}{L} + \frac{k_2}{l}\right) \frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} - \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \cdot t}$$

Die Maxima und Minima dieser Kurve finden zu denselben Zeiten statt, wie für die von Herrn Kühnen benutzte Funktion:*

ε = kinetische plus potentielle Energie.

Unterdrückt man in S das dritte Glied und beachtet, dass der Quotient $\frac{l}{g}$ nahe $\frac{1}{40}$ ist, so wird:

$$S = (L - l) \cdot \sqrt{g} \cdot \left[1 + \left(\frac{k_1 - k_2}{L - l}\right)^2 \cdot \frac{l}{2g}\right];$$

so lange das Glied $\left(\frac{k_1 - k_2}{L - l}\right)^2 \frac{l}{2g}$ vernachlässigt werden darf, stimmt in X der vor der Wurzel stehende Faktor mit dem analogen in der Kühnenschen Formel 9); dasselbe gilt von seinen Näherungswerten 10) und 11) für das erste Maximum und das erste Minimum.

Für zwei schwere Pendel erhält man aus Formel 13) des II. Abschnittes angenähert:

$$\alpha = [\Psi \max : \Phi(t \max)] \cdot \frac{L - l}{2}.$$

Diese einfache Beziehung zwischen den Amplituden der beiden schweren Pendel ergibt sich aus der Kühnenschen Formel 11) für Fadenpendel und schweres Pendel, wenn man darin die Widerstandskoeffizienten: z und ξ , also in unserem Falle:

$$\frac{k_2}{2l} \text{ und } \frac{k_1}{2L}$$

einander gleichsetzt.

6. Herr Lorenzoni erhält die Gleichung für die Maximalkurve des Fadenpendels in der Form einer unendlichen Reihe;** da er aber von wesentlich anderen Annahmen über das Gesetz der Abnahme einer Amplitude ausgegangen ist, als hier geschehen, so kann ein Vergleich

* a. a. O. S. 252.

** a. a. O. S. 70, Formel (99).

mit Formel 18) nicht ohne weiteres gezogen werden. Es scheint, als ob periodische Schwankungen, wie sie dem zweiten Gliede des Radikanden in Ψ entsprechen, nicht in der Lorenzonischen Darstellung vorhanden wären.

Es ist aber auch hier wenigstens in dem Punkte Übereinstimmung vorhanden, auf den es hauptsächlich ankommt. Wie schon oben erwähnt, hat Herr Lorenzoni, um das Mitschwingen für sein Reversionspendel zu bestimmen, das im Anfang fast lineare Anwachsen der Amplitude des Fadenpendels benutzt; seine Beziehung zwischen dem Einflusse des Mitschwingens auf die Pendellänge und der Tangente im Anfangspunkte seiner Maximakurve* lautet in unserer Bezeichnung:

$$\alpha = \frac{2l}{\pi \cdot z} \cdot \left. \frac{d\Psi}{dt} \right|_{t=0}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung 15) nach t und entwickelt die Exponentialfunktion, so erhält man für kleine Werte von t :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{z \cdot \alpha}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot [1 - (M_1 + M_2) \cdot t].$$

Für $t = 0$ ergibt sich hieraus:

$$19) \quad \alpha = \frac{2l}{z} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left. \frac{d\Psi}{dt} \right|_{t=0}.$$

Da für das Lorenzonische Reversionspendel sehr nahe $\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist, so stimmen im Anfange beide Formeln ausreichend überein.

2. Resultate aus den Beobachtungen.

V. Die Einrichtung zur Bestimmung des Mitschwingens.

Um die gegenseitige Beeinflussung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage empirisch zu studieren, hatte ich, da zur Zeit das Geodätische Institut noch kein geeignetes Pendelstativ besass, mit einem primitiven, in einfachster Weise am Kopfe eines Pendelpfeilers befestigten, 6 kg schweren Hilfspendels eine Reihe von Vorversuchen angestellt; als diese Erfolg versprachen, bewilligte Herr Geheimrat Helmert die Mittel zur Umänderung des einen Stückrathschen Apparates sowie zur Anschaffung einer „Wippmaschine“ in Gestalt eines messingenen Hilfspendels.** Die Umänderung trug einen provisorischen Charakter; sie bestand hauptsächlich darin, dass der das Achatlager tragende Unterlagsblock*** durch einen längeren mit zwei Achatlagern versehenen ersetzt wurde. Die Lage der Schneide des Pendels im

* a. a. O. S. 72, Formel (100).

** Später ist in der Werkstätte des Geodätischen Institutes eins der üblichen Schneiderschen Stativ mit einem Hilfspendel und einem Ansatzstücke zur Anbringung eines zweiten (des getriebenen) Pendels mit Erfolg versehen worden.

*** Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwere auf 22 Stationen... , Tafel III, Figur IV.

Innern des Stativs blieb unverändert, das vordere Pendel befand sich 11 cm vor dem inneren, etwa an derselben Stelle wie das Kühnensche Fadenpendel. Der neue Block trug noch eine Vorrichtung zum Herablassen des vorderen Pendels.

Das Hilfspendel sollte als treibendes dienen. Es besass eine feine Stahlschneide; sein Gewicht war etwa $2\frac{1}{2}$ mal so gross als das eines gewöhnlichen, invariablen Pendels gewählt worden, um seine Einwirkung zur Erhöhung der Genauigkeit zu verstärken. An seiner Stange lässt sich ein Laufgewicht verschieben, mit dem man eine ausreichende Übereinstimmung der Schwingungszeiten leicht erreichen kann (vergleiche unten Versuch B). Ausser durch eine grössere Linse, eine dickere Stange und einen stumpferen Schneidenwinkel unterschied es sich durch die Form der Linse von anderen Pendeln; da beide Pendel der Dimensionen des Stativs wegen nahe aneinander hängen mussten, so wurde von der Linse vorn und hinten je ein Segment weggeschnitten, um den lichten Raum zwischen beiden Pendeln zu vergrössern. Über der Schneide war ein dünner Messingarm befestigt, dessen vorderes Ende den Spiegel trug; die Länge des Armes war so bemessen, dass die Spiegel beider Pendel nebeneinander standen. Dies war nötig, wenn die beiden im Fernrohr des Koincidenzapparates nebeneinander erscheinenden Skalenbilder frei von Parallaxe sein sollten; die der Entfernung des Hilfspendelspiegels von der Schneide entsprechende Korrektur der Amplitude wurde, wenn nötig, berücksichtigt.

Da hier das Verhältnis der Amplitudenablesungen schon sehr nahe gleich dem Verhältnisse der Amplituden selbst ist, so wird die Berechnung des Winkelwertes eines Skalenpaars überflüssig.

Um die durch das stark schwingende Hilfspendel bewegte Luftmasse vom getriebenen Pendel abzuhalten, wurde eine Zwischenwand eingeschaltet; vergleiche hierüber unten Abschnitt VII, Versuch A.

Die Theorie zeigt, dass aus dem Anwachsen der Amplitude des getriebenen Pendels sich das Mitschwingen des treibenden ergibt; deshalb wurde das Hilfspendel im Innern des Stativs schwingen gelassen, sobald es sich darum handelte, Korrekturen von Schwingungsdauern wegen Mitschwingens zu erhalten. Bei gewissen anderen Versuchen wurden die Pendel vertauscht.

Die Methode erfordert genaue Amplitudenablesung; für die grossen Amplituden des treibenden Pendels wurde deshalb die gewöhnliche Strichskala ersetzt durch eine fein geteilte Porzellanskala mit abwechselnd weissen und dunklen 2 mm-Feldern; eine ähnliche Skala ist von Plantamour* zu einem verwandten Zwecke mit Erfolg benutzt

* Verhandlungen der fünften allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung: Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ses supports, S. 8.

worden. Um stets bei der Umkehr des Pendels den schwarzen Okularfaden auf weissem Felde zu haben, war die Skala in vertikalem Sinne halbiert und zwar so, dass die geradzahligten Felder der einen Seite dunkel, die der anderen weiss waren. Es ist gut, eine solche Skala grell zu beleuchten.

Von der Mitte der Skala aus waren nach oben und nach unten je 2 cm mit feiner 2 mm-Teilung versehen für die Amplitude des getriebenen Pendels; hier sind 2 mm-Felder den 3 mm-Feldern vorzuziehen, da bei ersteren der Okularfaden mehr Intervalle passiert, so dass der Einfluss von Schätzfehlern vermindert wird.

Okularmikrometer eignen sich nach den im Geodätischen Institut angestellten Proben sehr gut zu diesen Versuchen, wenn das Fadennetz zweckmässig so eingerichtet ist, dass man die oberen und die unteren Umkehrpunkte des Spaltbildes eines jeden der beiden Pendel entweder gleichzeitig, oder doch rasch hintereinander einstellen kann.

Die vier mir zur Verfügung stehenden, älteren Stückrathschen Pendel waren von derselben Form, aber nicht von so solider Konstruktion wie die später aus derselben Werkstatt hervorgegangenen; die einzelnen Teile waren noch nicht durch Eintreiben bei hoher Temperatur, sondern durch Verschraubung mit einander verbunden. Die Schwingungszeiten der Pendel zeigten indes während der Dauer meiner Beobachtungen eine Konstanz, die allen Anforderungen genügte. Zwei von den Pendeln hatten Stahlschneiden, die beiden anderen Achatschneiden; bei ihnen sind, im Gegensatz zu den Schneiderschen Pendeln, die Schneiderrücken in der ganzen Länge durch Messing gefasst.

VI. Vergleich zwischen den auf vier Pfeilern von verschiedener Stabilität erhaltenen Schwingungszeiten und Mitschwingungsbeobachtungen.

Um die Formeln 16) anwenden zu dürfen, ist die Gleichheit der Koeffizienten k für die beiden Pendel zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurden Beobachtungen der Amplitudenabnahmen angestellt, und zwar, mit Rücksicht auf den Gebrauch, für grosse Amplituden des Hilfspendels und für kleine der vier invariablen Pendel. Bei diesen und mehreren der Messungen des nächsten Abschnittes hat mich Herr Omori eifrig unterstützt.

Zur Reduction wurde in der üblichen Weise für jedes Pendel eine Gleichung der Form angesetzt:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot e^{-m \cdot (t - t_0)}$$

Darin ist α die Amplitude zur Zeit t , α_0 die zur Zeit $t = t_0$; $t - t_0$ wird in Sekunden ausgedrückt. Ferner ist $m = k : 2l$, wo l die Pendellänge bedeutet.

Für m wurde gefunden:

Hilfspendel: . . . $m = 0,000097$	Pendel IS . . . $m = 0,000106$
Pendel IA 104	„ IIS 116.
„ IIA 108	

Diese Grössen m , und dementsprechend die k der fünf Pendel sind Grössen zweiter Ordnung; ihre Unterschiede erscheinen für unseren Zweck klein genug, um die Anwendung der Formeln 16) zu erlauben; vergl. indessen auch den Anfang des VII. Abschnitts.

Bei der ein wenig abweichenden Form des Hilfspendels war die Möglichkeit systematischer Unterschiede der damit erhaltenen Vergrößerungen der Pendellänge wegen Mitschwingung von deren wahren Werten nicht von vornherein auszuschliessen; um dies zu untersuchen, wurden auf vier Pfeilern von verschiedener Stabilität sowohl die Schwingungszeiten der vier Pendel durch zwei Beobachter als auch die Mitschwingungsbeträge bestimmt. Die Pfeiler waren Sandsteinmonolithe von quadratischem Querschnitt; ihre Dimensionen, die bis auf das Mitschwingen reducierten Schwingungszeiten nebst deren Mittelwerten stehen in folgender Tabelle:

1897	Pfeiler	Seite	Höhe	Pendel				Beob.	Mittleres Pendel
				IA	IIA	IS	IIS		s
				s	s	s	s		s
				0,5054	0,5053	0,5050	0,5050		0,5052
Februar 16	Nr. 23	0,4 m	2,5 m	290	769	727	653	Sn	370
„ 17	„			301	796	760	663	Om	
„ 12	Nr. 22	0,4 m	2,5 m	154	631	608	526	Sn	229
„ 12	„			150	631	605	521	Om	
Januar 28	Nr. 31	1,0 m	2,0 m	025	501	479	380	Om	096
Februar 3	„			023	502	473	387	Sn	
„ 8	Nr. 32	0,6 m	2,0 m	004	474	460	363	Sn	079
„ 9	„			003	475	472	378	Om	

Die drei letzten Doppelreihen stimmen in sich sehr gut, während die beiden Reihen auf Pfeiler 23 um 20 Einheiten im Mittel von einander abweichen. Dieser Unterschied kann zum Teil von Änderungen des Uhganges herrühren, da zur Reduction die aus den einschliessenden Zeitbestimmungen folgenden, durchschnittlichen Gänge benutzt wurden; speciell bei diesem Pfeiler können indes auch Zweifel über die Konstanz von Tag zu Tag entstehen.* Da der Unterschied aber noch

* Im Mai 1896 hatte derselbe Pfeiler in derselben Schwingungsrichtung und mit demselben Apparat ein um mehr als 70 Einheiten grösseres Mitschwingen gezeigt; eine Anzahl von Herrn Haasemann und mir beobachteter Schwingungszeiten bestätigten dies. Nach der Übereinstimmung der an den Abenden des 15., 16. und 17. Februar angestellten Mitschwingungsbestimmungen können die etwaigen Schwankungen in dieser Zeit nur den Betrag von 1—2 Prozent erreicht haben.

in den Grenzen des Zulässigen liegt, habe ich im folgenden immer die Mittel der beiden Schwingungszeiten eines Pendels benutzt.

Zu den Mitschwingungsbestimmungen übergehend, sei zunächst die letzte derselben nebst ihrer Berechnung zur Erläuterung vollständig mitgeteilt; die Pendellängendifferenz war vorher beiläufig kontrolliert worden, sie betrug nur wenige Einheiten der 7. Decimale.

Nach dem Beruhigen des invariablen (des getriebenen) Pendels IIA erfolgte das Loslassen des Hilfspendels um:

0 Min. 36,5 Sek.

Die Ablesungen an den beiden Skalen nebst zugehörigen Zeiten sind:

Hilfspendel				Pendel IIA			
Zeit		Umkehrpunkte oben unten		Zeit		Umkehrpunkte oben unten	
Min.	Sek.	p	p	Min.	Sek.	p	p
0	52	+ 34,0	- 33,4	1	8	+ 11,5	+ 14,7
					21	11,1	15,2
					33	10,5	15,7
1	48	+ 33,7	- 33,2	2	2	9,5	16,8
					16	8,9	17,2
					29	8,4	17,8
2	45	+ 33,2	- 32,7	2	58	7,3	19,0
				3	12	6,8	19,3
					27	6,2	19,9
3	46	+ 32,7	- 32,3	3	58	5,1	21,0
				4	11	4,7	21,4
					26	4,0	22,1
					40	3,5	22,4
4	59	+ 32,2	- 31,7				

Die Dauer der Beobachtung selbst ist hier 4—5 Minuten, die der Vorbereitungen ist etwa gleich gross, die einer Mitschwingungsbestimmung im ganzen also nur etwa 10 Minuten.

Die Amplitude des treibenden Pendels darf bei der kurzen Dauer der Beobachtung mit einer vollkommen ausreichenden Genauigkeit als lineare Funktion der Zeit angesetzt und ausgeglichen werden. Die Berechnung dieser Funktion ist zweckmässig, um für die Zeitpunkte, zu denen die Amplituden Ψ des getriebenen Pendels beobachtet sind, gleichzeitige Werte von Φ berechnen zu können.

Bedeutend a und b zwei zu bestimmende Konstanten, t die Zeit seit dem Anstosse und wird als Zeiteinheit vorübergehend 100 Sek. genommen, so erhält man die fünf Fehlergleichungen:

$a + 0,15 b - 2,4 + v_1 = 0$	Rechn. minus Beob. P + 0,14
$a + 0,71 b - 1,9 + v_2 = 0$	- 0,18
$a + 1,28 b - 0,9 + v_3 = 0$	- 0,01
$a + 1,89 b + 0,0 + v_4 = 0$	0,00
$a + 2,62 b + 1,1 + v_5 = 0$	+ 0,04

Der Bequemlichkeit wegen ist 2Φ (wie später auch 2Ψ) benutzt worden; statt 2Φ selbst wurde $2\Phi - 65,00 p$ ausgeglichen.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man unter Beschränkung auf zwei Decimalen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} + 5,00 a + 6,65 b - 4,10 &= 0, \\ + 6,65 a + 12,59 b + 0,02 &= 0, \end{aligned}$$

welchen die Werte der Unbekannten genügen:

$$a = + 2,760, \quad b = - 1,459$$

Die Unterschiede: Rechnung minus Beobachtung findet man neben den Fehlergleichungen; der mittlere Fehler einer Gleichung ist:

der einer Ableitung:
$$\sqrt{\frac{0,0537}{3}} = \pm 0,13,$$

$$\sqrt{\frac{0,0537}{6}} = \pm 0,09.$$

Die Kleinheit dieses Fehlers spricht für die Zweckmässigkeit der Felderskala.

Für einen beliebigen Zeitpunkt t wird Φ demnach aus der Formel berechnet:

$$\begin{aligned} 2\Phi &= 67,760 - 0,01459 (t \text{ Sek.} - 0 \text{ Min. } 36,5 \text{ Sek.}) \\ &\pm 0,110 \pm 0,00069. \end{aligned}$$

Damit ist die Ausgleichung der Amplitude des treibenden Pendels erledigt.

Beim getriebenen Pendel werden, namentlich im Falle kleinen Mitschwingens, systematische Fehler beim Schätzen der Intervallbruchteile bemerklich; um deren Einfluss schon vorher abzuschwächen, habe ich durchgängig die vier Mittel aus den Zeiten, resp. aus den Amplituden: 2Ψ der vier Gruppen zur Ausgleichung verwendet.

Die vier Mittel der Zeiten, die zugehörigen, aus der Formel berechneten Grössen 2Φ , sowie die vier Mittel der beobachteten Grössen 2Ψ sind in den vier ersten Rubriken der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Zeit		2Φ	2Ψ		
Min.	Sek.		Beobachtet	Berechnet	Ber.—Beob.
		p	p	p	p
1	20,7	67,12	4,17	4,15	-0,02
2	15,7	66,31	8,33	8,36	+0,03
3	12,3	65,49	12,63	12,59	-0,04
4	18,8	64,52	17,40	17,42	+0,02

Nach Gleichung 16) wäre als Form der Fehlergleichungen zu nehmen:

$$\text{const} \cdot t - \frac{\Psi}{\Phi} + v = 0.$$

Der Fall indessen, dass die Bewegung des getriebenen Pendels von vollkommener Ruhe aus beginnt, dürfte selten eintreten; Veranlassungen zu einer wenn auch geringen Anfangsamplitude sind: das Loslassen des Hilfspendels und die selten fehlende Bodenunruhe. Aber eben weil sich Ψ in der Nähe von $t = 0$ sehr nahe proportional mit der Zeit ändert, kann man diesem im übrigen unbedenklichen Übelstande dadurch rechnerisch abhelfen, dass man ansetzt:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = + \text{const} \cdot (t - t_0) + v = + c + d \cdot t + v.$$

Darnach erhält man für die beiden unbekanntenen Konstanten c und d die vier Fehlergleichungen:

$c + 0,442 \cdot d - 0,0621 + v_1 = 0$	Rechn. minus Beob.	- 0,0002
$c + 0,992 \cdot d - 0,1256 + v_2 = 0$		+ 6
$c + 1,558 \cdot d - 0,1929 + v_3 = 0$		- 6
$c + 2,223 \cdot d - 0,2697 + v_4 = 0$		+ 3.

Hierbei ist die Zeiteinheit auch vorübergehend gleich 100 Sek. Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{aligned} + 4,000 \cdot c + 5,215 \cdot d - 0,6503 &= 0 \\ + 5,215 \cdot c + 8,549 \cdot d - 1,0523 &= 0 \end{aligned}$$

und die Unbekannten selbst:

$$c = + 0,01025, \quad d = + 0,1168 \cdot 4.$$

Hieraus geht die Formel hervor:

$$\begin{aligned} \Psi : \Phi &= + 0,01025 + 0,001168,4 \cdot t \text{ Sek.}, \\ &\pm \quad 72 \pm \quad 4,9 \end{aligned}$$

nach der die Größen 2Ψ in der fünften Rubrik obiger Zusammenstellung berechnet worden sind. Die übrig bleibenden Fehler sind sehr klein; reduciert man, um die eigentliche Beobachtungsungenauigkeit

besser erkennen zu können, mit dieser Formel die 13 abgelesenen Werte von 2Ψ selbst, so erhält man folgende Darstellung:

Beobachtet	Berechnet	Ber.—Beob.	Beobachtet	Berechnet	Ber.—Beob.
P	P	P	P	P	P
3,2	3,16	− 0,04	11,7	11,53	− 0,17
4,1	4,17	+ 0,07	12,5	12,57	+ 0,07
5,2	5,10	− 0,10	13,7	13,68	− 0,02
7,3	7,32	+ 0,02	15,9	15,92	+ 0,02
8,3	8,39	+ 0,09	16,7	16,86	+ 0,16
9,4	9,37	− 0,03	18,1	17,93	− 0,17
			18,9	18,93	+ 0,03

Die mittlere Unsicherheit in der Schätzung eines Umkehrpunktes ist darnach kleiner als 0,1 p, was auch hier vollkommen befriedigt.

Aus der Kleinheit der Abweichungen, sowie aus der Regellosigkeit in ihrer Verteilung geht hervor, dass die Formel 16) das Anwachsen der Amplitude des getriebenen Pendels gut darstellt; aus ihr folgt weiter: $d = \frac{\alpha}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ und hieraus als Verlängerung des Hilfspendels durch Mitschwingen:

$$\alpha = 2ld \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = d \cdot 2g \cdot \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^3,$$

wenn τ die gemeinsame Schwingungsdauer bedeutet. Für die Dauer einer einfachen Koïncidenz c war unmittelbar vorher gefunden worden:

- für das Hilfspendel $c = 46,300$ Sek.,
- für Pendel IIA . . $c = 46,290$ Sek.;

daraus ergibt sich für beide übereinstimmend: $\tau = 0,50546$ Sek. und damit, da die Beschleunigung g der Schwere am Beobachtungsorte gleich 9,81292 m ist, als Resultat dieser Ausgleichung* einer Mitschwingungsbestimmung:

$$\alpha = + 0,0000955 \cdot 1 \text{ m.}$$

$$\pm \quad 4 \cdot 0$$

Die Mitschwingungsbestimmungen, die zur Reduction der auf den vier Pfeilern beobachteten Schwingungszeiten dienen sollten, sind nach

* Diese Mitschwingungsbestimmungen, sowie ihre Ausgleichung sind, teils zur genaueren Prüfung, teils wegen des absichtlich gewählten abnormen Betrages für das Mitschwingen, weit ausführlicher angelegt worden, als, etwa für relative Schweremessungen, nötig ist. Da bei diesen das Mitschwingen wohl selten $> 100 \cdot 10^{-7}$ werden wird, so darf man, ohne die zulässigen Grenzen der Genauigkeit zu überschreiten, bedeutende Vereinfachungen eintreten lassen. Es genügt, statt wie oben vier, nur zwei Gruppen zu benutzen; um den Einfluss der Fehler des Skalenschätzens abzuschwächen, ist die Zwischenzeit so zu bemessen, dass beim getriebenen Pendel in beiden Gruppen der Horizontalfaden

dem Muster der soeben ausführlich dargelegten Ausgleichung berechnet worden; die dabei erhaltenen Verlängerungen der mathematischen Länge des Hilfspendels, ausgedrückt in Einheiten der siebenten Decimale des Meters, findet man in folgender Tabelle, und neben ihnen die Anfangsamplituden z .

Pfeiler Nr. 23		Pfeiler Nr. 22		Pfeiler Nr. 31		Pfeiler Nr. 32	
z	α	z	α	z	α	z	α
(12',2 926,1)		(13',7 567,8)					
(13,7 937,8)							
21,3	944,4	20,3	575,5	16',5	230,7	16',5	200,2
22,3	955,5			17,6	226,3	17,0	195,2
29,8	954,4	29,9	575,8	17,7	223,6	17,4	194,9
30,6	951,1			22,6	226,1		
31,6	955,1	38,0	575,0				
		38,9	577,3				
Mittel	952,1		575,9		226,7		196,8
	$\pm 2,1$		$\pm 0,5$		$\pm 1,5$		$\pm 1,7$

Auf den beiden Pfeilern mit dem aussergewöhnlich grossen Mitschwingen, Nr. 23 und 22, zeigt sich bei den Werten von α für $z < 15'$ eine systematische Abweichung der Art, dass sich die α um 2—3 Prozent

so nahe als möglich auf dieselben Zehntel der Skala zu stehen kommt; dann ist mit der Bezeichnung des Textes:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\Psi_2}{\Phi_2} - \frac{\Psi_1}{\Phi_1}\right) \cdot 2g \cdot \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^3}{t_2 - t_1}$$

Über die Genauigkeit erhält man dann durch Wiederholungen des Versuchs Aufschluss; es genügt, $t_2 - t_1$ gleich ca. 200 Sek. zu wählen.

Will man unmittelbar nach der Bestimmung über die ungefähre Grösse des Mitschwingens ohne grössere Rechnung Gewissheit haben, so genügt folgende, für den Rechenschieber bequeme Formel:

$$\alpha = \frac{(\Psi_2 - \Psi_1) \cdot 2g \cdot \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^3}{\Phi_2 \cdot (t_2 - t_1)}$$

Der Wert von: $2g \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^3$ wird ein für allemal berechnet; ist α für ein Pendel mit den Konstanten m, s, τ (Masse, Schwerpunktsabstand, Schwingungszeit) beobachtet und soll daraus die Mitschwingung für ein anderes Pendel mit m_i, s_i, τ_i berechnet werden, so tritt noch der Faktor $\frac{m_i \cdot s_i \cdot \tau^2}{m \cdot s \cdot \tau_i^2}$ hinzu; vergleiche hierüber den Text weiter unten. Für das obige ausführliche Beispiel erhält man aus der ersten und der vierten Gruppe nach der ersten Formel, da $t_2 - t_1 = 178,1$ Sek.:

$$\frac{17,40 : 64,45 - 4,17 : 67,15}{12,23 \cdot 178,1} = 954 \cdot 10^{-7} m,$$

nach der zweiten Formel:

$$\frac{17,40 - 4,17}{12,2 \cdot 64,5 \cdot 178} = 945 \cdot 10^{-7} m.$$

kleiner ergeben als für $z > 15'$; auf den Pfeilern Nr. 31 und 32 ist keine derartige Abweichung zu erkennen.* Dieser Umstand wäre befremdend und müsste weitere Untersuchungen veranlassen, wenn die beiden Pendel gleichartig wären. Das Hilfspendel ist aber, wie schon im Eingange dieses Abschnittes gesagt wurde, hier weniger als Pendel, sondern seiner abweichenden Form wegen als Wippmaschine zu betrachten; systematische Abweichungen des mit seiner Hilfe ermittelten Mitschwingens von dessen wirklichen Werten waren zu erwarten, letztere sollten eben durch die Beobachtungsreihe dieses Abschnittes auf empirischem Wege aus ersteren abgeleitet werden. .

Zur Erklärung der in Rede stehenden kleinen Abweichung genügt übrigens hier die Annahme, dass das Gesetz der Amplitudenabnahme des Hilfspendels sich von dem des getriebenen Pendels unterscheide, namentlich auch dass eine Veränderung dann eintritt, wenn $z < 15'$ ist. Es kann dann eine Änderung im Rhythmus der Einwirkung auf die Unterlage** entstehen, die trotz sehr geringen Betrages merklich werden kann, da das getriebene Pendel den veränderten Antrieb aufsummiert.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass ausserdem noch andere, hier unberücksichtigte Fehlerquellen bestehen. .

Mit Rücksicht auf die Beobachtungsunsicherheit entnehme ich der Zusammenstellung, dass für $z > 15'$ die vermitteltst des Hilfspendels erhaltenen α als unabhängig von z angesehen werden können und ein brauchbares Maß für die Mitschwingung der Unterlage abgeben. Demgemäss sind die α für $z < 15'$ nicht mit zur Mittelbildung herangezogen worden, mit dem Vorbehalt, dass bei Verwendung des Hilfspendels zur Mitschwingungsbestimmung für relative Schweremessungen nur Werte von $z > 15'$ genommen werden; dies ist für die Beobachtung selbst ohnehin günstig, da dann das Anwachsen der Amplitude des getriebenen Pendels rascher erfolgt.

Aus den in der letzten Zeile der Tabelle stehenden Mittelwerten sind nun die Mitschwingungskorrektionen für die invariablen Pendel zu berechnen. Bedeuten:

g	die Beschleunigung der Schwere,	}	des Hilfs- pendels, resp. des i^{ten} invariablen Pendels, $i = 1, 2, 3, 4$
m resp. m_i	die Masse,		
s „ s_i	den Abstand des Schwerpunktes von der Schneide,		
l „ l_i	die momentane mathematische Pendellänge,		
τ „ τ_i	die momentane Schwingungszeit und		
φ „ φ_i	die Amplitude		

* Mitschwingungsbestimmungen unter grösserer Variation von z , bei mässigem Betrage des Mitschwingens, findet man mitgeteilt im Versuche H des VII. Abschnittes; auch da ist keine solche Abhängigkeit zu erkennen.

** Die ersten theoretischen Untersuchungen über den Einfluss des Rhythmus beim Wippen findet man bei Helmholtz: Beiträge . . . , S. 73 — 76.

so ist der horizontale Druck der Schneide auf die Unterlage bekanntlich gleich:

$$g \cdot m \cdot \frac{s}{l} \cdot \sin \varphi$$

resp.

$$g \cdot m_i \cdot \frac{s_i}{l_i} \cdot \sin \varphi_i;$$

bedeuten ferner ε und ε_i empirische Koeffizienten, abhängig von Eigenschaften der Pendel und ihrer Unterlagen, so werden die Pendellängenverlängerungen infolge Mitschwingens:

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot m \cdot s \cdot g}{l}$$

resp.

$$\beta_i = \frac{\varepsilon_i \cdot m_i \cdot s_i \cdot g}{l_i}.$$

Für völlig gleiche Pendel und Unterlagen wäre $\varepsilon_i : \varepsilon = 1$.

Bekannt resp. leicht zu ermitteln sind $m, s, \tau, m_i, s_i, \tau_i$, beobachtet ist α , gesucht β_i ; unbekannt sind in:

$$\beta_i = \alpha \cdot \frac{m_i \cdot s_i \cdot l}{m \cdot s \cdot l_i} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \alpha \cdot \frac{m_i \cdot s_i \cdot \tau^2}{m \cdot s \cdot \tau_i^2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$

die Quotienten $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$, die hier, aus Mangel an einer direkten Methode, aus den Differenzen der Schwingungszeiten auf den vier Pfeilern berechnet werden können.

Die Verhältnisse der Massen wurden ersetzt durch diejenigen der Gewichte; beim Hilfspendel sind Spiegelarm und Laufgewicht mit eingeschlossen.

Die Schwerpunktsabstände wurden nach zwei verschiedenen, nahe liegenden Methoden bestimmt. Die eine glich vollständig der zu demselben Zwecke bei absoluten Schweremessungen angewandten Kippmethode. Bei der zweiten wurden die Pendel an dünnen Schnüren zunächst so aufgehängt, dass die Stangen horizontal lagen; darauf wurden mit zwei kleinen Projektionsinstrumenten Schneide und Aufhängepunkt auf einen unter dem Pendel liegenden Maßstab projiziert. Die Resultate beider Methoden stimmten bis auf Bruchteile des Millimeters überein, benutzt wurden die Mittel.

Auf Pfeiler 23 wurde als getriebenes Pendel genommen: PIIA, auf allen übrigen PII S; um Gleichheit der Schwingungszeiten zu haben, musste nach dem Pendelwechsel das 111 g schwere Laufgewicht des Hilfspendels um 30 mm verschoben werden und aus dem Grunde finden sich bei diesem zwei Angaben von s (und zwar gilt s' bei der Kombination: Hilfspendel — PII A, und s bei: Hilfspendel — PII S) in der nun folgenden Tabelle der Gewichte, der Schwerpunktsabstände und der für die Zeit der Mitschwingungsbestimmung giltigen, mittleren, unreduzierten Schwingungszeiten:

	Gewichte	Schwerpunkts- abstände		Schwingungszeiten	
		Pfeiler 23	Pfeiler 22, 31, 32	Pfeiler 23	Pfeiler 22, 31, 32
		mm	mm		
Hilfspendel	g 3312	$s' = 226,9$	$s = 226,0$	$\tau = \tau_2$	$\tau = \tau_4$
Pendel IA	1306	mm		Sek.	
" II A	1347	$s_1 = 216,0$		$\tau_1 = 0,5055$	
" IS	1331	$s_2 = 216,5$		$\tau_2 = 0,5055$	
" IIS	1366	$s_3 = 211,4$		$\tau_3 = 0,5052$	
		$s_4 = 212,1$		$\tau_4 = 0,5052$	

Um die Beziehung zwischen den Resultaten der Mitschwingungsbestimmungen und den beobachteten Änderungen der Schwingungszeiten herzustellen, ist die Schwingungszeit τ_{ik} des i^{ten} Pendels auf dem Pfeiler Nr. k in der Form angesetzt worden:

$$\tau_{ik} = \sigma_i + \alpha_k \cdot f_i + v_{ik}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$k = 23, 22, 31, 32.$$

Darin ist σ_i die Schwingungszeit des i^{ten} Pendels, die auf allen vier Pfeilern übereinstimmend beobachtet werden würde, wenn $\alpha_k = 0$ oder wenn kein Mitschwingen vorhanden wäre; ferner ist:

für Pfeiler Nr. 22, 31 und 32: $\left\{ \frac{m_i \cdot s_i \cdot \tau_4^2}{m \cdot s \cdot \tau_i^2} \right\} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = f_i,$

" " " 23: $\left\{ \frac{m_i \cdot s_i \cdot \tau_2^2}{m \cdot s \cdot \tau_i^2} \right\} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$

$$= \left\{ \frac{m_i \cdot s_i \cdot \tau_4^2}{m \cdot s \cdot \tau_i^2} \right\} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} \cdot \frac{\tau_2^2}{\tau_4^2} \cdot \frac{s}{s'} = f_i \frac{s}{s'} \cdot \frac{\tau_2^2}{\tau_4^2}.$$

v_{ik} sind die übrig bleibenden Fehler. Der Faktor:

$$\frac{s}{s'} \cdot \frac{\tau_2^2}{\tau_4^2} = \frac{226,0}{226,9} \left(\frac{0,5055}{0,5052} \right)^2 = 0,9975$$

ist mit α_{23} vereinigt worden. Setzt man weiter zur Bequemlichkeit für die Ausgleichung:

$$\sigma_1 = 0,5054000 + \delta_1, \quad \sigma_3 = 0,5050400 + \delta_3,$$

$$\sigma_2 = 0,5053500 + \delta_2, \quad \sigma_4 = 0,5050300 + \delta_4,$$

und $\alpha_{ik} : 1000$ statt α_{ik} , so erhält man zur Bestimmung der δ und der f für jedes Pendel je vier Fehlergleichungen, die sich nur durch ihre rechten Seiten unterscheiden und leicht aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen sind; dabei sind die α auf drei Stellen abgerundet worden:

	Pendel IA	II A	IS	IIS
$\delta_i + 0,950 \cdot f_i + v_{i23} = + 296$		+ 283	+ 344	+ 358
$\delta_i + 0,576 \cdot f_i + v_{i22} = + 152$		+ 131	+ 207	+ 224
$\delta_i + 0,227 \cdot f_i + v_{i31} = + 24$		+ 2	+ 76	+ 84
$\delta_i + 0,197 \cdot f_i + v_{i32} = + 4$		- 25	+ 66	+ 71

In der gleichen Weise geschrieben, lauten die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} + 4,0000 \delta_i + 1,9500 f_i = + 476,0 \\ + 1,9500 \delta_i + 1,3246 f_i = + 374,9 \end{array} \left| \begin{array}{l} + 391,0 \\ + 339,8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} + 693,0 \\ + 476,3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} + 737,0 \\ + 502,2 \end{array} \right.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Werte für die Logarithmen der δ und der f , sowie für die numeri der σ und der Quotienten $\varepsilon_i : \varepsilon$.

Pendel	$i =$	$\log \delta_i$	$\log 1000 f_i$	σ_i	$\varepsilon_i : \varepsilon$
				s	
P IA	1	1,8269 _n	2,5819	0,5053933 ± 5	1,015 $\pm 0,022$
P II A	2	1,9851 _n	2,6007	0,5053403 ± 5	1,025 $\pm 0,022$
P IS	3	0,8543 _n	2,5683	0,5050393 ± 5	0,984 $\pm 0,022$
P IIS	4	0,2730 _n	2,5819	0,5050298 ± 5	0,986 $\pm 0,022$

Mittleres Pendel: 0,5052007

1,003

Damit erhält man die in der nächsten Tabelle gegebenen Korrekturen: $-\alpha_k \cdot f_i$ für das Mitschwingen der vier Pendel auf den vier Pfeilern, ausgedrückt in Zeit; neben ihnen stehen die Reste v_{ik} :

Pendel	IA		II A		IS		IIS	
	Korr.	v	Korr.	v	Korr.	v	Korr.	v
Pfeiler Nr. 23	-362,7	+0,4	-378,8	+0,8	-351,6	-0,5	-362,7	-2,8
" " 22	-220,0	-0,8	229,7	-2,0	-213,2	+1,0	-220,0	+5,9
" " 31	-86,7	+4,4	-90,5	+8,1	-84,0	-0,9	-86,7	-0,8
" " 32	-75,2	-4,1	-78,6	-6,9	-72,9	+0,2	-75,2	-2,4

Demnach bestehen beispielsweise auf Pfeiler Nr. 23 Mitschwingungsdifferenzen bis zu $27 \cdot 10^{-7}$ zwischen diesen vier Pendeln.

Die Quadratsumme aller Reste ist: 205,98; aus ihr erhält man als mittleren Fehler des Mittels aus zwei Beobachtungen einer Schwingungszeit

$$\sqrt{\frac{205,98}{4(4-2)}} = \pm 5,07 \cdot 10^{-7},$$

und als den einer einzelnen Schwingungszeit $\pm 7 \cdot 10^{-7}$, also einen Betrag, der in der That nahe der mittleren Unsicherheit einer einmaligen Beobachtung einer Schwingungszeit entspricht. Aus ihm ergeben sich die mittleren Fehler von σ_i und von $\varepsilon_i : \varepsilon$ der vorletzten Zusammenstellung.

Zum Schlusse seien noch die wegen Mitschwingens korrigierten Schwingungszeiten aufgeführt, die der ganzen Ausgleichung zu Grunde liegen.

1897	Pfeiler	Beob.	Reducierte Schwingungszeit des Pendels				Mittleres Pendel
			I A	II A	IS	IIS	
			s	s	s	s	s
			0,5053	0,5053	0,5050	0,5050	0,5052
Februar 16	Nr. 23	Sn	927	390	375	290	} 006
„ 17	„ 23	Om	938	417	408	300	
„ 12	Nr. 22	Sn	934	401	395	306	} 008
„ 12	„ 22	Om	930	401	392	301	
Januar 28	Nr. 31	Om	938	410	395	293	} 009
Februar 3	„ 31	Sn	936	411	389	300	
„ 8	Nr. 32	Sn	929	395	387	288	} 003
„ 9	„ 32	Om	928	396	399	303	

Die gesuchten Quotienten $\epsilon_i : \epsilon$ stimmen im Hinblick auf ihre mittlere Unsicherheit genügend sowohl miteinander als mit der Einheit überein, obgleich letzteres bei der Verschiedenheit der Pendel nicht unbedingt nötig ist, wie schon oben erwähnt wurde. Der mittlere Fehler des Quotienten $\epsilon_i : \epsilon$ für das mittlere Pendel, berechnet aus den Abweichungen der vier Werte untereinander, ist:

$$\sqrt{\frac{0,001278}{4 \cdot 3}} = \pm 0,010.$$

Die Voraussetzungen der Theorie über die Bewegung zweier Pendel scheinen nach alledem durch die Beobachtung bestätigt zu werden.

Die Darstellung der zu Grunde liegenden Schwingungszeiten durch die α_k, σ_i und die $\epsilon_i : \epsilon$ kann man der guten Übereinstimmung nach vollkommen ausreichend nennen; nach ihr wird der Einfluss vom Mitschwingen so genau bestimmt als der von Temperatur und Uhrgang.

Die Schnelligkeit und die Genauigkeit, die die modifizierte Lorenzonische Methode gewährt, machen solche Konstruktionen von Pendelstativen unnötig, die den Zweck haben, das Mitschwingen für sich fast zum Verschwinden zu bringen und dies vielleicht mit Hintansetzung anderer Störungsquellen, oder solche, die dafür bürgen sollen, dass gewisse Teile der Unterlage bei jeder Aufstellung und auf allen Stationen einen konstanten Beitrag zum Gesamtmitschwingen liefern. Ein solcher Mehraufwand ist zweckmässiger zur Erreichung guter Uhrgänge, einwurfsfreier Temperaturverhältnisse, bequemer Installation etc. zu verwenden.

VII. Über Beeinflussungen des Mitschwingens.

Zunächst soll hier auf die Quotienten $\varepsilon_i : \varepsilon$ der Ausgleichung des letzten Abschnittes zurückgegriffen werden. Merkwürdige, die Beobachtungsungenauigkeit überschreitende Abweichungen dieser Quotienten von der Einheit hätten sich aus folgenden Gründen herausstellen können.

Erstens ist anzuführen, dass die Verhältnisse der Massen im vorigen Abschnitte durch die der Gewichte ersetzt wurden, was nicht in aller Strenge richtig ist.

Zweitens ist, wie schon mehrfach erwähnt wurde, denkbar, dass die Einwirkung des Hilfspendels bei dessen abweichender Form und Masse auf die Unterlage in etwas anderem Rhythmus geschieht, als bei einem gewöhnlichen Pendel; diesen Einfluss theoretisch zu berechnen, dürfte schwierig sein.

Drittens ist hier das Gleiten der Schneiden auf dem Achatlager heranzuziehen; dazu wären für diese vier Pendel allerdings weitere theoretische und praktische Untersuchungen nötig, anschliessend an die Arbeiten von Barraquer,* Defforges,** Schiötz,*** und Helmert†. Bei obigen Mitschwingungsbestimmungen würde sowohl die Schneide des stark schwingenden Hilfspendels der Unterlage, als diese Unterlage wieder der Schneide des getriebenen Pendels nicht die volle eigene Bewegung erteilen, sobald Gleiten stattfindet, sondern nur einen Bruchteil. Das Anwachsen der Amplitude des anfänglich ruhenden Pendels würde also in doppelter Weise verringert, die beobachteten α wären zu klein, und die aus den Unterschieden der (ebenfalls vom Gleiten beeinflussten) Schwingungszeiten berechneten $\varepsilon_i : \varepsilon$ würden demnach grösser als 1 erhalten werden.

Möglicherweise liegt hierin ein Grund zu der Gruppierung unter den vier Werten $\varepsilon_i : \varepsilon$, die wenigstens angedeutet zu sein scheint; man erhält nämlich im Mittel:

für die beiden Achatschneiden $\varepsilon_i : \varepsilon = 1,020 \pm 0,016$

„ „ „ Stahlschneiden $\varepsilon_i : \varepsilon = 0,985 \pm 0,016$

Unterschied im Sinne Achat minus Stahl $+ 0,035 \pm 0,022$.

Ob endlich viertens ein wenn auch kleiner Teil der Bewegung des Lagers für das treibende Pendel bei der Übertragung auf das

* Verhandlungen der siebenten allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung, S. 286: Rapport de M. le Colonel Barraquer sur la mesure de la pesanteur.

** Mémorial du dépôt général de la guerre, tome XV; Observations du pendule, 1^{er} fascicule. S. 10 fig.

*** Die norwegische Kommission der Europäischen Gradmessung: Resultate der im Sommer 1893 in dem nördlichsten Teile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen nebst einer Untersuchung über den Einfluss von Bodenerschütterungen auf die Schwingungszeit eines Pendels. Von O. E. Schiötz.

† Helmert, Beiträge..., S. 76.

etwa 11 cm davon entfernte Lager des getriebenen Pendels durch molekulare Verschiebung verloren gehen kann, mag dahingestellt bleiben.*

Weitere, bestimmte Folgerungen können aus dem vorliegenden Material nicht wohl gezogen werden; es bietet sich hier aber ein Weg dar, auf dem durch Empirie weitere Aufschlüsse über die noch nicht völlig bekannte Natur des Gleitens von solchen Schneiden zu erlangen sind; diese sind dann eventuell schon beim Ansatz der Gleichungen 1) und 2) des I. Abschnittes zu beachten. Erwünscht wäre dabei, eine so umfassende Theorie für die Bewegung zweier Pendel und ihrer gemeinsamen Unterlage zu haben, wie sie Herr Thiesen für die pendelartigen Schwingungen eines Körpers gegeben hat.**

Einigermaßen ist der Einfluss unbekannter Störungsquellen auf empirischem Wege durch die Einführung der Quotienten $\epsilon : \epsilon$ rechnerisch kompensiert worden; man kann sich, da die Störungsbeträge sich nur auf einige Prozent vom ganzen Mitschwingen zu belaufen scheinen, vorläufig dabei beruhigen, namentlich weil das Mitschwingen von Stativ und Untergrund bei relativen Schweremessungen selten $100 \cdot 10^{-7}$ überschreiten wird. —

Der Einfluss von Bodenerschütterungen*** ist in meinen Beobachtungen nicht zu verfolgen; diese wurden unterbrochen, sobald Erschütterungen zu befürchten oder zu spüren waren. —

Im folgenden sollen die Resultate einer Reihe von Versuchen mitgeteilt werden, die direkt zu dem Zwecke angestellt waren, Beeinflussungen der Schwingungszeit und des Mitschwingens durch willkürliche Veränderungen der Stabilität der Unterlage sowohl, als durch bestimmte andere Ursachen zu erkennen. Die Kürze der Beobachtungsdauer bei dieser Methode der Mitschwingungsbestimmung ist vorteilhaft, wenn es sich um Untersuchungen handelt, die öftere Wiederholungen des Versuchs verlangen, namentlich wenn wie hier gewisse Umstände von Versuch zu Versuch variiert werden.

Die Reduction der Versuche geschah nach einem, vor Ableitung der Formel 16) des III. Abschnittes angewandten, einfacheren Ausgleichsverfahren, nämlich unter der durch Formel 19) (S. 116) ausgedrückten Voraussetzung, dass die Amplitude des getriebenen Pendels, nicht das Amplitudenverhältnis beider Pendel, linear mit der Zeit anwachse; da das Gesamtmitschwingen auf den hier benutzten Pfeilern nur eine mässige Grösse besass, so ist diese Vernachlässigung um so unschädlicher, als es sich jetzt nur darum handelt, zu erkennen, ob innerhalb eines Versuches Veränderungen eintreten oder nicht.

* Vergl. auch: Helmerts Beiträge, S. 69 unten.

** Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1889, S. 277.

*** Schiötz, a. a. O.; Lorenzoni, a. a. O., S. 156: movimenti microsisimici.

Die angegebenen Mitschwingungsbeträge sind wie immer Einheiten der siebenten Decimale der Schwingungszeit.

A. Wegen des geringen Abstandes zwischen den beiden Pendeln am veränderten Stückrathschen Apparat war eine Zwischenwand angebracht worden, die vom Hilfspendel 10 mm, vom getriebenen 15 mm entfernt war. Dass die vom stark schwingenden Hilfspendel in Bewegung gesetzten Luftschichten bei diesen kleinen Entfernungen Einfluss auf die Mitschwingungsbestimmungen hatten, wurde durch einen direkten Versuch bewiesen; für das Mitschwingen ergab sich:

1896	Mit Zwischenwand	Ohne Zwischenwand
Mai 8	101 Einheiten 100 „	92 Einheiten

Die Zwischenwand selbst hatte keinen Einfluss auf die Messung des Mitschwingens; denn bestimmte man dieses, sowohl wenn auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung von der Linse eine gleiche Wand aufgestellt wurde, als ohne diese, so erhielt man:

1896	Entfernung der hinteren Wand	Mitschwingen
Dezember 3	∞	106 Einheiten
„ 4	∞	105 „
	15 mm	108 „
	∞	107 „
	∞	105 „

Die Unterschiede liegen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit.

In den folgenden Tagen wurde der Apparat zu anderen Untersuchungen fortgenommen; nach deren Erledigung ergab sich, wenige Stunden nach dem Neuaufbau auf dem alten Pfeiler:

1896	Entfernung der hinteren Wand	Mitschwingen
Dezember 17	∞	113 Einheiten
	18 mm	113 „
	10 mm	113 „

Aus beiden Reihen ist zu schliessen, dass eine Beeinflussung der Mitschwingungsbestimmungen durch die Wand zwischen beiden Pendeln nicht stattgefunden hat.

Im Anschluss hieran wurde später untersucht, welche Einwirkung Wände ausüben, die von der Seite oder von unten der Linse genähert werden; es ergab sich:

Entfernung	Mitschwingen
einer seitlichen Wand	
∞	111 Einheiten
∞	108 "
∞	108 "
∞	113 "
∞	111 "
10 mm	110 "
5 "	112 "
< 1 "	110 "
einer unteren Wand	
∞	112 "
10 mm	111 "
7—8 "	111 "
2—3 "	106 "

Man wird meistens vermeiden können, dass der Betrag der Gesamtmitschwingung mehr als zwei geltende Ziffern enthält. Diese werden, nach den obigen Versuchen, durch die störenden Wände nicht afficiert, so lange deren Entfernung von der Linse grösser bleibt als 10 mm; jedenfalls liegt ihr Einfluss dann innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit.

Der Einfluss solcher Wände auf die Schwingungsdauer macht sich schon bei grösseren Entfernungen geltend und zwar in der sechsten und siebenten Decimale. Aus einer Reihe von Vorversuchen ging hervor, dass, wenn man dem Pendel Wände von den Seiten, oder von vorn und von hinten, oder von unten bis auf etwa 1 mm näherte, die Schwingungsdauer in jedem der drei Fälle bis zu sechs Einheiten der sechsten Stelle vergrössert wurde; die Störung erreichte erst bei 20 mm Entfernung die Grösse der Beobachtungsgenauigkeit einer einfachen Bestimmung der Schwingungszeit.

Im Pendelsaal des Geodätischen Institutes wurden dann in exakterer Weise von Herrn Omori und mir folgende Unterschiede zwischen den reducierten Schwingungszeiten vor und nach Einfügung einer 10 mm vom vorderen Linsenrand entfernten Wand gemessen, und zwar im Sinne: mit minus ohne:

1896	Beob.	Abstand der Wand	Unterschied
			Sek.
Januar 20	Sn	10 mm	+ 0,0000017
" 21	Sn	10 "	+ 0,0000007
	Sn	10 "	+ 0,0000017
	Om	10 "	+ 0,0000011
	Om	10 "	+ 0,0000014

Wurde von jeder Seite je eine Wand genähert, so ergaben sich folgende Unterschiede im gleichen Sinne:

1896	Beob.	Abstand der Wand	Unterschied
Januar 19	Om	10 mm	Sek. + 0,000023
	Om	1,5 „	+ 0,000036

Für den Vergleich zwischen den Bestimmungen des Mitschwingens und der Schwingungsdauer (Abschnitt VI) ist dies ohne Belang, da bei den letzteren das Hilfspendel und die Zwischenwand fortgenommen wurden. Über den Einfluss der damit verbundenen Belastungsverschiedenheit auf das Mitschwingen vergleiche Versuch H.

B. Es ist von Vorteil für die Bestimmung des Mitschwingens, wenn die Schwingungsdauern der beiden Pendel so gleich als möglich sind; um dies immer erreichen zu können, ist, wie schon erwähnt, an der Stange des Hilfspendels ein Laufgewicht von cylindrischer Gestalt verschiebbar angebracht worden. Um den Einfluss einer Differenz der Schwingungszeiten zu ersehen, wurden Mitschwingungsbestimmungen bei verschiedenen Abständen zwischen Laufgewicht und Pendellinse ausgeführt. Die Resultate sind:

Abstand	Mitschwingen	Abstand	Mitschwingen.
50,8 mm	113 Einheiten	50,7 mm	114 Einheiten
49,7 „	115 „	51,7 „	114 „
48,2 „	116 „	52,7 „	113 „
47,6 „	113 „	50,7 „	111 „

Einer Hebung oder Senkung des Laufgewichtes um 1 mm entsprach hierbei nach direkten Versuchen eine Veränderung der Schwingungszeit um 160 Einheiten. Bei dieser Grösse des Gesamtmitschwingens können sich demnach die Pendellängen oder die Schwingungsdauern bis zu 800 Einheiten unterscheiden, ohne dass ein Einfluss der Differenz auf die Mitschwingungsbestimmungen zu ersehen ist.

Es ist nicht auszuschliessen, dass bei grösserem Gesamtmitschwingen eine Abhängigkeit zu Tage tritt.*

C. Bei den folgenden Versuchen war das Pendelstativ auf Pfeiler 15 im grossen Instrumentensaal des Geodätischen Institutes so aufgestellt, dass die Pendel in der Richtung Nord-Süd schwangen. Für das Gesamtmitschwingen ergab sich aus vier Messungsreihen:

* Dies ist der Fall bei dem von Herrn Otto Savander (Fennia, 15, Nr. 5: Détermination relative de la pesanteur à Helsingfors, S. 128 flg.) angestellten Versuche. Bei ihm ist nach unserer Bezeichnung ungefähr:

$$L - l = 1200 \cdot 10^{-7}, \quad \alpha = \beta = 1400 \cdot 10^{-7};$$

eine strengere Berechnung liefert, bei guter innerer Übereinstimmung, merklich grösseres Mitschwingen. Die oben auf Seite 116 angegebene Formel 19) genügt hier nicht mehr; sein Methodenvergleich (l. c. S. 142 flg.) ist hierin nicht stichhaltig.

1896	Mitschwingen	Anzahl der Einzelmessungen
April 23	102 Einheiten	2
Mai 1	104 „	2
„ 8	101 „	1
„ 10	101 „	2

Mittel: 102 Einheiten.

Um den Beitrag des Pfeilers zum Mitschwingen kennen zu lernen, wurde ein invariables Pendel auf dem kürzeren, alten Unterlagsblock im Stativ schwingen gelassen, während der längere, neue Block vor dem Stativ auf die Kopfplatte des Pfeilers aufgeklemt wurde. Auf dem vorderen, über die Platte hinausragenden Achatlager wurde dann das Hilfspendel schwingen gelassen und seine Amplitude mit einem zweiten Fernrohr und einer zweiten Skala gemessen. Aus drei Bestimmungen folgte als Mitschwingen:

21 Einheiten
 22 „
 21 „

Mittel: 21,3 Einheiten.

Bedenkt man, dass der Angriffspunkt der von der Schneide des invariablen Pendels ausgeübten Kraft 0,38 m über der Schneide des Hilfspendels lag, und dass der Pfeiler eine Höhe von 2,1 m hatte, so folgt mit einer gewissen Annäherung als Beitrag des Pfeilers zum Gesamtmitschwingen:

$$21,3 \cdot \frac{2,5}{2,1} = 25 \text{ Einheiten,}$$

so dass 77 Einheiten als Stativbeitrag anzusehen sind.

Zum Vergleich seien die Resultate angeführt, die fast zur selben Zeit auf demselben Pfeiler und mit demselben Stativ durch Wippen des Pfeilers erhalten wurden. Die Wippmethode konnte bei diesem Pfeiler ohne Bedenken angewandt werden, weil er von dem den Wippenden tragenden Fussboden gut isoliert war; ist dies nämlich nicht der Fall, so kann ausser der gewünschten Beeinflussung des Pfeilers durch direktes Ansetzen des Dynamometers eine solche unbeabsichtigterweise durch den rhythmischen Druck des Wippenden auf die den Pfeiler umgebende Scholle entstehen.

Herr Haasemann und der Verfasser hatten das Mitschwingen durch Wippen an der Nord- und an der Südseite der Kopfplatte des Pfeilers mit Hilfe des Stossdynamometers bestimmt und im Mittel gefunden als Ausschlag des getriebenen Pendels bei einem Stoss von einem Kilogramm Stärke:

Datum	Beob.	Stossrichtung	
		Nord	Süd
April 20	Sn	2,45''	
" 20	Hn	2,47''	
" 26	Il	2,26''	2,44''
" 26	Sn	2,23''	2,44''
" 26	Sn		2,49'' (Gew. $\frac{1}{2}$)
Mittel:		2,35''	2,45''
Gesamtmittel:		2,40''	

Wendet man zur Umwandlung dieses Ausschlags in Einheiten der siebenten Stelle der Schwingungszeit den Faktor: 9,85 an, wie er sich aus der von Herrn Borrass für einfache Pfeilerformen abgeleiteten Formel ergibt,* so erhält man als Beitrag des Pfeilers zum Mitschwingen:

$$2,40 \cdot 9,85 = 23,6 \text{ Einheiten.}$$

Zur Kontrolle bestimmte Herr Borrass nach der von ihm ausgearbeiteten Modifikation der Wippmethode mit einem Zugdynamometer den Beitrag des Pfeilers zum Gesamtmitschwingen aus zwei unabhängigen Versuchen zu:

$$\begin{aligned} 1896 \text{ April } 25: & 23,5 \text{ Einheiten,} \\ & \text{''} & 22,7 \text{ ''} \end{aligned}$$

Für den Beitrag eines Stückrathschen Stativs hatte er aus zahlreichen Versuchen durch Vergleich mit dem von Herrn Kühnen konstruierten Fadenpendel im Mittel 78 Einheiten erhalten, sodass für unseren Pfeiler als Gesamtmitschwingen folgte: 101 Einheiten; dies stimmt ebenso wie die beiden Einzelbeiträge innerhalb der mittleren Unsicherheit mit den aus den Beobachtungen des Hilfspendels folgenden Resultaten überein.

D. Wenn man den Pfeiler durch starke Schnüre nach allen Seiten mit den benachbarten Wänden und Pfeilern verband und die Schnüre so kräftig als möglich anspannte, so blieb das Gesamtmitschwingen vollständig unverändert.

E. Der dem Stückrathschen Stativ eigentümliche Unterlagsblock wurde nicht festgeschraubt, sondern nur in seine Nut eingeschoben, sodass allein das Pendelgewicht ihn niederdrückte. Dabei erfolgte keine Änderung des Mitschwingens.

F. Wurden sämtliche Fußschrauben des Stativs gelockert, und sowohl bei lockeren als bei geklemmten Fußschrauben das Mitschwingen bestimmt, so erhielt man Vergrößerungen desselben, die bei mehr-

* Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen... S. 259—270. Pfeiler Nr. 15 gleicht ganz dem von Herrn Borrass benutzten Pfeiler Nr. 9, für den nach S. 262 derselben Publikation als Konstante verwendet wurde: $7,7 \cdot 1,3 = 10,0$.

facher Wiederholung des Versuches zwischen 20 und 50 Einheiten lagen; Konstanz ist nicht zu erwarten, weil die Stabilität bei gelockerten Fußschrauben nicht immer dieselbe zu sein braucht.

An diesen Versuch wurden erstens Bestimmungen der Schwingungsdauer angeschlossen; sie bestätigten, dass bei dieser Aufstellung das Gesamtmitschwingen um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ seines Betrages vergrößert wurde. Zweitens wurde sowohl vor als nach dem Lockern der Fußschrauben das Stossdynamometer an die Kopfplatte des Pfeilers angesetzt, um diesen zu wippen. Herr Haasemann und der Verfasser erhielten durch entsprechende Reduction für einen Stoss von 1 kg Stärke folgende Ausschläge in Teilen der Skala:

1896	Fußschrauben	Ausschlag	Beobachter
		P	
April 20	geklemmt	0,034	Sn
	"	0,034	Hn
" 26	"	0,033	Hn
	"	0,032	Sn
Mai 2	"	0,032	Sn
	gelockert	0,027	Sn
" 4	geklemmt	0,033	Sn
	"	0,034	Hn
	gelockert	0,032	Hn
	"	0,031	Sn

Die Unterschiede zwischen den Ausschlägen bei gelockerten und bei geklemmten Fußschrauben sind sehr nahe an der Grenze der Beobachtungsungenauigkeit. Der Ort der Störung, die Fußschrauben, liegt bei diesem Versuche zwischen den Angriffsstellen der beiden durch das Dynamometer und die Pendelschneide auf die Unterlage ausgeübten Horizontalkräfte; aus der obigen Zusammenstellung geht hervor, dass eine solche Störung des Mitschwingens und damit der Schwingungsdauer durch das Wippen des Pfeilers allein nicht angezeigt wird.

G. Da das vordere Achatlager des neuen Unterlagsblockes etwa 1 cm ausserhalb des Fußspitzendreieckes lag, so wurde durch das Gewicht des vorderen Pendels die hintere Fußspitze etwas angehoben. Man konnte erwarten, einmal dass das Mitschwingen vermehrt werden würde, wenn aussen statt des leichteren, invariablen Pendels das Hilfspendel hing, und dann, dass durch Belastung der hinteren Fußschraube eine Verringerung desselben eintreten würde.

In der That erhielt ich:

Belastung der hinteren Fußschraube	0 kg	2 kg	6 kg
Hilfspendel aussen } invariables Pendel innen } Mit-	110	100	100 Einheiten
schwingen			
Hilfspendel innen } invariables Pendel aussen } Mit-	96	91	87 "
schwingen			

H. Das Gewicht des ganzen Pendelapparates war verschieden, je nachdem er zur Messung von Schwingungsdauern oder zu Mitschwingungsbestimmungen benutzt wurde. Im ersten Falle war das Stativ belastet mit dem kurzen Unterlagsblock, dem 1,3 kg schweren invariablen Pendel und mehreren Thermometern; im zweiten mit dem langen Block, dem 3,3 kg schweren Hilfspendel und demselben invariablen Pendel. Dadurch wurde es nahe gelegt, den Einfluss einer Belastung des Stativs zu untersuchen; je nachdem teils auf den Stativkopf, teils auf die Fußschraubenköpfe und den die Füße verbindenden Kranz eine Anzahl Gewichte von verschiedenem Gesamtbetrage aufgesetzt wurden, erhielt ich:

Belastung	Mitschwingen
0 kg	99 Einheiten
10 „	96 „
18 „	89 „

das Hilfspendel schwang hierbei innen, das leichtere, invariable aussen.

Diesem Ergebnisse nach wird, wenn nicht wie bei Versuch G besondere Verhältnisse (Belastung ausserhalb des Fußspitzendreiecks) vorliegen, das Mitschwingen und die Schwingungsdauer nur um wenige Einheiten verändert, wenn das Stativgewicht um einige Kilogramm vermehrt wird.

J. Um zu konstatieren, ob eine Abhängigkeit des Mitschwingens β von der Anfangsamplitude z des Hilfspendels vorhanden sei, wurde folgende Reihe von Versuchen angestellt:

z	β
27'	99 Einheiten
27	100 „
21	97 „
15	98 „
15	96 „

Mit Rücksicht auf die Beobachtungsungenauigkeit ist bei dieser Grösse von β keine Abhängigkeit von z nachzuweisen.

K. Kurze Zeit nach diesem Versuche wurde zunächst eine Kontrollmessung mit dem Hilfspendel angestellt, hierauf dieses durch Pendel IIS ersetzt, während Pendel IS aussen am Stativ beibehalten wurde; ersteres war also das treibende. Es ergab sich:

bei Hilfspendel innen, IS aussen, $\beta = 99$ Einheiten,
 „ IIS „ , „ „ , $\beta = 100$ „
 „ „ „ , „ „ , $\beta = 102$ „

Ein Unterschied ist schwerlich festzustellen, namentlich wenn in Hinsicht auf die Verschiedenheit der Gewichte der beiden treibenden Pendel noch das Ergebnis von Versuch II beachtet wird.

Über Pseudotrochoiden.

Von

E. WÖLFFING

in Stuttgart.

Nachdem bereits durch Gildemeister¹⁾ und Bellermann²⁾ die doppelte Erzeugungsweise der Trochoiden (d. h. der allgemeinen cyklischen Kurven) entdeckt und damit die Identität der sogenannten Pericykloiden mit den Epicykloiden nachgewiesen worden war, gab Viëtor³⁾ eine Zusammenstellung sämtlicher cyklischer, d. h. durch Rollen von Kreisen auf Kreisen erzeugter Kurven; dieselbe umfasste alle Grenzfälle und liess an Vollständigkeit anscheinend nichts zu wünschen übrig. Indes hatte bereits im vorigen Jahrhundert Euler⁴⁾ eigentümliche Kurven entdeckt, welche, wie die gemeinen cyklischen Kurven, ihren zweiten Evoluten (allerdings aber nicht, wie diese, ihren ersten Evoluten) ähnlich sind. Er fand, dass dieselben von einem Punkt A aus sich in Spiralwindungen ins Unendliche entfernen, und dass sie asymptotische logarithmische Spiralen besitzen. Ferner bemerkte er, dass sie in zwei Klassen zerfallen, indem nämlich die Tangente in A entweder auf dem Radiusvektor senkrecht steht oder mit ihm zusammenfällt.

In einer späteren Arbeit⁵⁾ über denselben Gegenstand findet Euler, dass die zweite Klasse der genannten Spiralen eine Spitze in A hat, so dass beide Klassen als ungespitzte und gespitzte Eulersche Kurven unterschieden werden können. Beide Klassen von Kurven haben die Eigenschaft, dass die Projektion des Radiusvektors auf den Krümmungsradius zu letzterem proportional ist. Euler meint übrigens, die Kurven dürften den Geometern nicht ganz unbekannt sein.

1) De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus. Dissertation. Marburg 1866. S. 4.

2) Epicykloiden und Hypocykloiden. Dissertation. Jena 1867. S. 8—9.

3) Die Polkreispaaire einer Cykloide. Zeitschrift für Mathematik u. Physik 25, 253—71 (1880), bes. S. 269.

4) Investigatio curvarum, quae evolutae sui similes producunt. Comm. Ac. Petr. 12, 3—52 (1750), bes. S. 19—23.

5) Investigatio curvarum quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cujuscunque. Nova acta Ac. Petrop. 1, 75—116 (1783), bes. S. 97—106.

Auch N. Fuss¹⁾ bespricht die Eulerschen Kurven und nennt sie den logarithmischen Spiralen verwandt. Sie finden sich weiterhin erwähnt in einer Arbeit von Puiseux,²⁾ der dieselben für symmetrische Doppelspiralen erklärt, aber zunächst nicht über die Resultate Eulers hinaus kommt. Dagegen bemerkt er kurz darauf in einer Note,³⁾ dass die neuen Spiralen, ebenso wie die gemeinen cyklischen Kurven Tautochronen sind bei der Bewegung eines Punktes unter Wirkung einer Centralkraft, die der Entfernung proportional ist und zwar derart, dass bei einer Repulsionskraft Epicykloiden, bei einer Attraktionskraft je nach den Umständen Hypocykloiden, Gerade oder jene Spiralen als Tautochronen auftreten. Später bespricht Natani⁴⁾ die Eulerschen Kurven unter dem Namen „imaginäre Cykloiden“. Kessler⁵⁾ findet, dass beim Rollen einer cyklischen Kurve auf einer Geraden der Mittelpunkt des festen Kreises eine Ellipse erzeugt, welche die Gerade zur Axe hat. Soll dagegen als Roulette eine Hyperbel auftreten, so ergeben sich, je nachdem die reelle oder imaginäre Axe der Hyperbel als Basis gewählt wird, eine gespitzte oder ungespitzte Eulersche Kurve als rollende Kurve. Es wird a. a. O. eine Konstruktion dieser Kurven mittelst einer logarithmischen Spirale angegeben und die Rektifikation, sowie die Bestimmung des Krümmungshalbmessers vorgenommen.

Besonders auffallend tritt die Analogie zwischen den cyklischen und den Eulerschen Kurven hervor bei Anwendung der sogenannten esoterischen Koordinaten (*coordonnées intrinsèques*,⁶⁾ d. h. bei der Bestimmung der Kurven durch eine Beziehung zwischen Bogen s und Krümmungsradius ρ . Nach Cesàro⁷⁾ stellt nämlich die Gleichung:

$$\rho^2 = a + 2bs + cs^2$$

cyklische oder Eulersche Kurven dar, je nachdem $c \leq 0$ ist. In einer solchen Gleichung in esoterischen Koordinaten kann man s und ρ durch rechtwinklige Koordinaten x und y ersetzen; man erhält dadurch an Stelle der gegebenen Kurven deren Mannheimsche Kurve,⁸⁾ d. h.

1) Mém. Ac. St. Petersb. (5) 1, 114—118, 120 (1809).

2) Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes. Journ. de Math. (1) 9, 377—399 (1844), bes. S. 392.

3) Sur les courbes tautochrones. Journ. de Math. (1) 9, 409—421 (1844), bes. S. 416.

4) Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch VII (1867) S. 37—38.

5) Darstellung der Kegelschnitte als Rouletten, deren Basis eine Gerade ist. Dissertation. Jena 1869. S. 14—19.

6) Dieser neuerdings viel gebrauchte Ausdruck rührt von Whewell her: On the intrinsic equation of a curve and its application. Cambr. Philos. Trans. 8, 659 Ann. (1849).

7) Sur deux classes remarquables de lignes planes. N. Ann. de Math. (3) 7, 171—190 (1888), bes. S. 176.

8) Ich schlage diesen Namen vor, weil Mannheim in seiner Abhandlung: Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite, Journ. de Math. (2) 4, 93 bis 104 (1859) zuerst die betreffende Ortskurve untersucht hat.

den Ort des Krümmungscentrums des jeweiligen Berührungspunktes, wenn die gegebene Kurve auf einer Geraden rollt. Also sind die Mannheimschen Kurve der cyklischen Kurven Ellipsen, diejenigen der Eulerschen Kurven Hyperbeln. Cesàro unterscheidet ferner die gespitzten und ungespitzten Eulerschen Kurven und findet als zwischen beiden liegend die logarithmischen Spiralen. Eine weitere gemeinsame Eigenschaft der cyklischen und Eulerschen Kurven ist nach Cesàro¹⁾ die, dass bei beiden die Verbindungslinie eines Kurvenpunktes mit dem Krümmungscentrum der Evolute im entsprechenden Punkte durch einen festen Punkt geht. Hierzu kommt noch, dass, ebenfalls nach Cesàro²⁾, ein Teil sowohl der cyklischen als auch der Eulerschen Kurven als unendlich hohe Evolventen einer in den Punkt 0 zusammengeschrunpften unendlich kleinen Kurve angesehen werden können. Cesàro³⁾ findet ferner, dass bei beiden Arten von Kurven das Krümmungscentrum auf der Polare des Kurvenpunktes in Bezug auf einen festen Kreis, den Direktorkreis, liegt; dieser ist im Falle der cyklischen Kurven der feste Kreis, auf dem der bewegliche rollt. An anderer Stelle bemerkt Cesàro,⁴⁾ dass die Kreise über den Krümmungsradien der cyklischen und Eulerschen Kurven als Durchmesser den Direktorkreis rechtwinklig schneiden; nach Mansion⁵⁾ umhüllen dieselben eine in Bezug auf diesen Kreis zur gegebenen Kurve inverse Kurve. Ein Unterschied zwischen beiden Kurvengattungen findet statt in Bezug auf die Develloppoiden, d. h. die Umhüllungskurven der durch die Kurvenpunkte gehenden und die Tangenten in derselben unter konstantem Winkel schneidenden Geradenscharen. Der Satz von Rouquet⁶⁾ nämlich, dass die cyklischen Kurven als Develloppoiden ähnliche Kurven besitzen, gilt bei den Eulerschen Kurven nur von einem Teil der Develloppoiden, was bereits von Natani⁷⁾ bemerkt und von Pironcini⁸⁾ näher ausgeführt wurde. Cesàro, welcher in seinen Vorlesungen über esoterische Koordinaten⁹⁾ die Eulerschen Kurven wiederholt erwähnt, nennt dieselben pseudocykloïdale Linien. Unter denselben ist eine gespitzte und eine ungespitzte, welche je mit ihrer vierten Evolute zusammenfallen und deren Mannheimsche Kurven gleichseitige

-
- 1) Remarques de géometrie infinitésimale. Mathésis 7, 25 — 38 (1887), bes. S. 26.
 - 2) Développantes du point. Mathésis 8, 36 — 38 (1888).
 - 3) Remarques de géometrie infinitésimale. Mathésis 7, 25 — 38 (1887), bes. S. 27.
 - 4) Nouv. Ann. de Math. (3) 7, 171 — 190 (1888), bes. S. 178.
 - 5) Nouv. Corr. de Math. 4, 302 — 303 (1878).
 - 6) Nouv. Ann. de Math. (2) 6, 380 — 383 (1867).
 - 7) Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch VII, 27 — 28 (1867).
 - 8) Sulla similitudine delle curve, Ann. di mat. (2) 15, 53 — 66 (1887), bes. S. 57 — 58.
 - 9) Lezioni di geometria intrinseca. Napoli 1896. S. 12 — 13, 32, 48, 60, 68.

Hyperbeln sind. Diese Kurven, welche bereits von Euler¹⁾ erwähnt und von Laisant²⁾ und Pirondini³⁾ untersucht wurden, nennt Cesàro Pseudocykloiden. Ist ferner n eine ganze Zahl, so ist nach Laisant⁴⁾ $n\rho^2 - s^2 = \text{const}$ der Ort der Punkte, deren Potenzsumme in Bezug auf n feste Kreise mit den Zuwächsen der Quadrate der Bogen wächst.

Die vielen Eigenschaften, welche die Eulerschen Kurven mit den cyklischen gemein haben, legten einen Gedanken nahe, welchem Cesàro⁵⁾ in einer öffentlichen Anfrage Ausdruck gab: ob nicht auch die Eulerschen Kurven durch Rollen von (imaginären) Kreisen auf Kreisen erzeugt werden können. In seiner Antwort,⁶⁾ auf diese Frage berief sich R. de Saussure auf seine Dissertation,⁷⁾ in der er gezeigt hatte, dass die gespitzten Eulerschen Kurven, die er Paracykloiden nennt, entstehen durch Rollen eines Kreises von komplexem Radius auf einem Kreis, dessen reeller Radius doppelt so gross ist, als der reelle Teil des Halbmessers des beweglichen Kreises. In einer späteren Note⁸⁾ fügt de Saussure noch die Bemerkung hinzu, dass die ungespitzten Eulerschen Kurven oder Hypercykloiden entstehen durch Rollen eines Kreises von komplexem Radius auf einem solchen von rein imaginärem Radius; letzterer ist doppelt so gross als der rein imaginäre Teil des Halbmessers des beweglichen Kreises. Er weist ferner nach, dass die Paracykloiden und Hypercykloiden ebensowohl eine doppelte Erzeugungsweise (durch je zwei Polkreispaare) besitzen, wie die gemeinen cyklischen Kurven. Auch Tarry⁹⁾ giebt dieselbe kinematische Entstehung der pseudocykloidalen Linien durch imaginäre Kreise an und benützt dieselbe zu einer reellen Konstruktion, die auf den Grundsätzen seiner „Géométrie générale“ beruht.

Bei der erwähnten Rollbewegung sind es Punkte der Peripherie des beweglichen Kreises, welche die Eulerschen Kurven erzeugen; letztere entsprechen demgemäss den gemeinen Epicykloiden und Hypocykloiden. In der vorliegenden Note gedenke ich zu zeigen, dass auch beim Rollen von komplexen Kreisen auf ebensolchen reelle Kurven erzeugt werden können von Punkten, welche der Peripherie

1) Nova acta Acad. Petrop. 1, 105 (1783).

2) Sur deux genres remarquables de courbes planes. Ass. fr. pour l'av. des Sc. Congrès de Limoges 19, 74—78 (1890).

3) Alcune quistioni sulle evolute successive di una linea piana. Rend. Acc. Napoli (2) 5, 139—150 (1891), bes. S. 142.

4) Nouv. Corr. de Math. 5, 209—211 (1879).

5) L'Intermédiaire des Mathématiciens 1, 153 (1894).

6) L'Intermédiaire des Mathématiciens 2, 356—357 (1895).

7) Sur la génération des courbes par roulement. Genève 1895. S. 41—55.

8) Notes sur les lignes cycloïdales. Amer. Journ. of Math. 17, 269—272 (1895).

9) L'Intermédiaire des Mathématiciens 2, 390—91 (1895).

des rollenden Kreises nicht angehören. Diese Kurven entsprechen den allgemeinen cyklischen Kurven oder Trochoiden und sollen daher Pseudotrochoiden heissen. Die neuen Spiralen werden sowohl in Bezug auf ihren gegenseitigen Zusammenhang, als auch hinsichtlich ihrer gestaltlichen Verhältnisse untersucht.

1. Es sei R der Radius des festen Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung O , r derjenige des beweglichen Kreises mit Mittelpunkt M ; derselbe berühre den festen von $\left\{ \begin{matrix} \text{innen} \\ \text{ausssen} \end{matrix} \right\}$ je nachdem $r \gtrless 0$. r' sei der Abstand des erzeugenden Punktes P von M ; derselbe liege zu Anfang der Bewegung auf OM und zwar M zwischen O und P , wenn $r' > 0$. Beim Rollen des beweglichen auf dem festen Kreise erzeugt alsdann P die cyklische Kurve:

$$1) \quad \begin{cases} x = (R - r) \cos \varphi + r' \cos \frac{R - r}{r} \varphi \\ y = (R - r) \sin \varphi - r' \sin \frac{R - r}{r} \varphi. \end{cases}$$

Es mögen nun R , r und r' komplexe Grössen sein:

$$R = R_1 + iR_2, \quad r = r_1 + ir_2, \quad r' = r'_1 + ir'_2.$$

Die Centraldistanz OM sei

$$\begin{aligned} d &= d_1 + id_2 = R - r, \\ \text{also} \quad d_1 &= R_1 - r_1, \quad d_2 = R_2 - r_2. \end{aligned}$$

Auch der Winkel φ der Centrale OM mit der x -Axe kann komplex sein; doch ist derselbe nicht unbeschränkt veränderlich.

Er ist nämlich, bei gleichförmiger Rollbewegung, zur Zeit proportional; irgend zwei Werte desselben müssen daher ein reelles Verhältnis haben. Somit ist

$$\varphi = (\varrho_1 + i\varrho_2)\omega,$$

d. h. gleich dem Produkt aus einer komplexen Konstanten $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$ und einer reellen Veränderlichen ω .

Damit geht die Gleichung der cyklischen Kurve über in:

$$1') \quad \begin{cases} x = (d_1 + id_2) \cos (\varrho_1 + i\varrho_2)\omega + (r'_1 + ir'_2) \cos (\sigma_1 + i\sigma_2)\omega \\ y = (d_1 + id_2) \sin (\varrho_1 + i\varrho_2)\omega - (r'_1 + ir'_2) \sin (\sigma_1 + i\sigma_2)\omega \end{cases}$$

wo

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{(\varrho_1 + i\varrho_2)(d_1 + id_2)(r_1 - ir_2)}{r_1^2 + r_2^2}.$$

2. Die Grössen x und y sollen nun unabhängig von ω reell sein, also ihre imaginären Bestandteile verschwinden. Dasselbe muss von ihren Ableitungen nach ω gelten und zwar für jeden beliebigen Wert von ω . Indem man insbesondere die imaginären Bestandteile von

$$x \Big|_{\omega=0}, \quad \frac{dy}{d\omega} \Big|_{\omega=0}, \quad \frac{d^2x}{d\omega^2} \Big|_{\omega=0}, \quad \frac{d^3y}{d\omega^3} \Big|_{\omega=0}$$

gleich Null setzt, erhält man zunächst vier notwendige Bedingungen:

$$2) \left\{ \begin{array}{l} d_2 + r_2' = 0, \\ d_1 \varrho_2 + d_2 \varrho_1 - r_1' \sigma_2 - r_2' \sigma_1 = 0, \\ 2d_1 \varrho_1 \varrho_2 + d_2 (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) + 2r_1' \sigma_1 \sigma_2 + r_2' (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 0, \\ d_1 (3\varrho_1^2 \varrho_2 - \varrho_2^3) + d_2 (\varrho_1^3 - 3\varrho_1 \varrho_2^2) - r_1' (3\sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_2^3) - r_2' (\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2^2) = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen führen, wie ihre nähere Untersuchung ergibt, auf eine von folgenden beiden Annahmen:

Entweder ist $d_2 + r_2' = \varrho_2 = \sigma_2 = 0.$

Dieser Fall führt auf die gewöhnlichen reellen Trochoiden.

Oder aber ist

$$3) \quad d_1 = r_1', \quad d_2 = -r_2', \quad \varrho_1 = -\sigma_1, \quad \varrho_2 = \sigma_2,$$

also d und r' , ebenso ϱ und $-\sigma$ konjugiert.

Damit wird:

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2d_1 \cos \lambda_1 \omega \mathfrak{C}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega + 2d_2 \sin \lambda_1 \omega \mathfrak{S}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega \\ y = 2d_1 \sin \lambda_1 \omega \mathfrak{C}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega - 2d_2 \cos \lambda_1 \omega \mathfrak{S}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega, \end{array} \right.$$

wo

$$\mathfrak{C}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega = \frac{1}{2} (e^{\lambda_2 \omega} + e^{-\lambda_2 \omega})$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{h} \lambda_2 \omega = \frac{1}{2} (e^{\lambda_2 \omega} - e^{-\lambda_2 \omega})$$

hyperbolische Funktionen sind.

x und y sind also reelle Grössen, die Bedingungen 2) daher bereits hinreichend. Die Gleichungen 4) gehören daher den einzigen reellen cyklischen Kurven an, die durch Rollen von komplexen Kreisen erzeugt werden und Pseudotrochoiden heissen mögen.

Für den Abstand r' des erzeugenden Punktes vom Centrum des beweglichen Kreises folgt aus 3):

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1' = d_1 = R_1 - r_1 \\ r_2' = -d_2 = -(R_2 - r_2). \end{array} \right.$$

Ferner ist

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{(d_1 r_1 + d_2 r_2) \varrho_1 + (d_1 r_2 - d_2 r_1) \varrho_2}{r_1^2 + r_2^2} = -\varrho_1, \\ \sigma_2 = \frac{-(d_1 r_2 - d_2 r_1) \varrho_1 + (d_1 r_1 + d_2 r_2) \varrho_2}{r_1^2 + r_2^2} = \varrho_2. \end{array} \right.$$

Die Elimination von $\varrho_1 : \varrho_2$ aus (6) ergibt:

$$d_1^2 + d_2^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

oder

$$7) \quad R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 r_1 - 2R_2 r_2 = 0.$$

Es wird also nicht beim Rollen zweier komplexen Kreise auf einander immer eine reelle Kurve erzeugt, sondern nur, wenn der

absolute Betrag der Centraldistanz gleich dem absoluten Betrag des Radius des beweglichen Kreises ist. Denselben absoluten Betrag hat auch der Abstand des erzeugenden Punktes vom Centrum des beweglichen Kreises, diese Grösse ist überdies zur Centraldistanz konjugiert.

Ferner folgt aus 6):

$$\begin{aligned} & \varrho_2 = \mu \varrho_1, \\ \text{wo} & \\ 8) & \quad \mu = \frac{R_1}{R_2 - 2r_2} = \frac{-R_2}{R_1 - 2r_1}. \end{aligned}$$

Mit $\varrho_1 \omega = \vartheta$ geht endlich 4) über in:

$$9) \quad \begin{cases} x = 2(R_1 - r_1) \cos \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \mu \vartheta + 2(R_2 - r_2) \sin \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta \\ y = 2(R_1 - r_1) \sin \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \mu \vartheta + 2(R_2 - r_2) \cos \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta. \end{cases}$$

3. Weil zwischen den sechs homogenen Parametern $R_1, R_2, r_1, r_2, r_1', r_2'$ die drei Relationen 5) und 7) bestehen, so existieren (von der Lage und Grösse abgesehen) ∞^2 verschiedene Arten von Pseudotrochoiden. Die Radien des festen und des beweglichen Kreises brauchen gegenseitig nur der Bedingung 7) zu genügen; alsdann ist die Entfernung des erzeugenden Punktes durch 5) bestimmt. Unter den Pseudotrochoiden sind zunächst zwei Scharen, bei welchen der erzeugende Punkt auf der Peripherie des beweglichen Kreises liegt, für welche also $r' = \pm r$, eine Annahme, welche mit den Gleichungen 5) und 7) verträglich ist.

Das obere Zeichen ergibt vermöge 5):

$$\begin{aligned} & R_1 = 2r_1, \quad R_2 = 0, \\ \text{also:} & \\ & R = R_1, \quad r = \frac{R_1}{2} + ir_2. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Paracykloiden.

Das untere Zeichen liefert vermöge 5):

$$\begin{aligned} & R_1 = 0, \quad R_2 = 2r_2, \\ & R = iR_2, \quad r = r_1 + \frac{iR_2}{2}. \end{aligned}$$

Man hat hiermit die Hypercykloiden.

Diese beiden Klassen von Kurven sind demnach Spezialfälle der Pseudotrochoiden. Sie sind dadurch charakterisiert, dass der Radius des festen Kreises im ersten Fall reell, im letzteren rein imaginär ist.

4. Führt man Polarkoordinaten u und ω ein, so dass

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega,$$

so ist der Radiusvektor:

$$\begin{aligned} 10) & \quad u = 2\sqrt{(r_1^2 + r_2^2)\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \mu \vartheta - (R_2 - r_2)^2}, \\ \text{ferner} & \\ 11) & \quad \frac{du}{d\vartheta} = \frac{2\mu(r_1^2 + r_2^2)\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \mu \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta}{\sqrt{(r_1^2 + r_2^2)\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \mu \vartheta - (R_2 - r_2)^2}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$, je nachdem $\vartheta \gtrless 0$ und verschwindet für $\vartheta = 0$. Somit erreicht u für $\vartheta = 0$ ein Minimum; die Kurve entfernt sich von demselben ausgehend nach beiden Seiten fortwährend ins Unendliche.

Ferner ist

$$12) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{(R_1 - r_1) \operatorname{tg} \vartheta - (R_2 - r_2) \mathfrak{I}g \mu \vartheta}{(R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) \operatorname{tg} \vartheta \mathfrak{I}g \mu \vartheta},$$

wo

$$\mathfrak{I}g \mu \vartheta = \frac{e^{\mu \vartheta} - e^{-\mu \vartheta}}{e^{\mu \vartheta} + e^{-\mu \vartheta}},$$

somit

$$13) \quad \operatorname{tg}(\vartheta - \omega) = \frac{R_2 - r_2}{R_1 - r_1} \mathfrak{I}g \mu \vartheta.$$

Weil $\mathfrak{I}g \mu \vartheta|_{\vartheta=\infty} = 1$, so konvergiert für unendlich wachsende ϑ $\vartheta - \omega$ gegen die endliche Grösse $\operatorname{arctg} \frac{R_2 - r_2}{R_1 - r_1}$. Somit nimmt ω mit ϑ ins Unendliche zu resp. ab. Zusammen mit dem Verhalten von u ergibt sich hieraus, dass die Kurve eine Doppelspirale bildet, die von einem dem Ursprung am nächsten gelegenen Punkt ($\vartheta = 0$) sich nach beiden Seiten in immer weiter werdenden Windungen ins Unendliche entfernt.

5. Mit den Abkürzungen:

$$14) \quad \begin{cases} A = R_1 r_1 - R_2 r_2 + 2r_2^2 \\ B = R_1 r_2 + R_2 r_1 - 2r_1 r_2 \end{cases}$$

wird ferner:

$$15) \quad \begin{cases} dx = \left\{ 2 \frac{B}{R_2 - 2r_2} \sin \vartheta \mathfrak{C}o\{\mu \vartheta} + 2 \frac{A}{R_2 - 2r_2} \cos \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta \right\} d\vartheta \\ dy = \left\{ -2 \frac{B}{R_2 - 2r_2} \cos \vartheta \mathfrak{C}o\{\mu \vartheta} + 2 \frac{A}{R_2 - 2r_2} \sin \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta \right\} d\vartheta. \end{cases}$$

Ist φ der Winkel der Tangente mit der x -Axe, so ist

$$16) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{-B + A \operatorname{tg} \vartheta \mathfrak{I}g \mu \vartheta}{B \operatorname{tg} \vartheta + A \mathfrak{I}g \mu \vartheta},$$

daher

$$17) \quad \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi) = \frac{B}{A} \mathfrak{C}o\cot \mu \vartheta,$$

wo

$$\mathfrak{C}o\cot \mu \vartheta = \frac{e^{\mu \vartheta} + e^{-\mu \vartheta}}{e^{\mu \vartheta} - e^{-\mu \vartheta}}.$$

Aus 13) und 17) folgt, wenn ψ der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor ist:

$$18) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{(R_2 - r_2) A \mathfrak{I}g \mu \vartheta - (R_1 - r_1) B \mathfrak{C}o\cot \mu \vartheta}{R_1 (r_1^2 + r_2^2)}.$$

Mit unendlich wachsendem ϑ konvergiert ψ gegen $\operatorname{arc} \operatorname{cot} \mu$.

6. Wie bei den Trochoiden führt die Rektifikation auf elliptische Integrale. Aus 15) folgt:

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} ds &= \frac{2\sqrt{A}}{R_2 - 2r_2} \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 \mu \vartheta - A} d\vartheta \\ &= \frac{2}{R_2 - 2r_2} \sqrt{B^2 + 2(r_1^2 + r_2^2)B \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N}^2 \mu \vartheta} d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Mit
20)
wird

$$21) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{2}{R_1} \int \frac{[B^4 + (A^2 + B^2)y^2] dy}{\sqrt{(B^2 + y^2)[B^4 + (A^2 + B^2)y^2]}} \\ &= \frac{2}{R_1} \int \sqrt{2A(r_1^2 + r_2^2)} \operatorname{tg} \lambda d\lambda \\ &\quad + \frac{B^2}{\sqrt{2A(r_1^2 + r_2^2)}} F(\lambda) - \sqrt{2A(r_1^2 + r_2^2)} E_1(\lambda). \end{aligned} \right.$$

Hier ist

$$22) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{2A(r_1^2 + r_2^2)}{B^2} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N}^2 \mu \vartheta,$$

$$23) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\lambda) &= \int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} \\ E_1(\lambda) &= \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda. \\ k &= \sqrt{\frac{A}{2(r_1^2 + r_2^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist $k < 1$, ausser für $R_2 = 0$, $R_1 = 2r_1$, wo $k = 1$.

7. Die Formel

$$dS = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

gibt für das Element eines Sektors S zwischen zwei konsekutiven Radienvektoren:

$$24) \quad dS = \frac{2}{R_2 - 2r_2} [(R_2 - r_2)A - (R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 \mu \vartheta] d\vartheta,$$

somit

$$25) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{2}{R_2 - 2r_2} \left[\left((R_2 - r_2)A - \frac{1}{2} (R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \right) \vartheta \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R_2 - 2r_2)^2 (r_1^2 + r_2^2)}{2R_1} \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 \mu \vartheta \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \mu \vartheta \right]. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist der Abstand p der Tangente vom Ursprung:

$$26) \quad p = \frac{-2 ds}{ds} = \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 \mu \vartheta - (R_2 - r_2)A}{\sqrt{2(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}^2 \mu \vartheta - A}}.$$

8. Man erhält weiter:

$$27) \quad \begin{cases} d^2x = \frac{4A}{(R_2 - 2r_2)^2} (r_1 \cos \vartheta \mathfrak{C}0[\mu \vartheta + r_2 \sin \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta) d\vartheta^2 \\ d^2y = \frac{4A}{(R_2 - 2r_2)^2} (r_1 \sin \vartheta \mathfrak{C}0[\mu \vartheta + r_2 \cos \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta) d\vartheta^2. \end{cases}$$

Hieraus folgt der Krümmungsradius:

$$28) \quad \varrho = \frac{\sqrt{A} [2(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta - A]^{\frac{3}{2}}}{(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2}.$$

Ferner

$$29) \quad \begin{cases} \frac{d\varrho}{d\vartheta} = \\ \frac{4\sqrt{A} \mu \mathfrak{C}0[\mu \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta (r_1^2 + r_2^2) [(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A(R_2 + r_2)] [2(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta - A]^{\frac{1}{2}}}{[(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2^2} \end{cases}$$

und

$$30) \quad \frac{d\varrho}{ds} = \frac{2R_1 \mathfrak{C}0[\mu \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta (r_1^2 + r_2^2) [(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A(R_2 + r_2)]}{[(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2^2}.$$

Der Krümmungsradius der Evolute ist

$$31) \quad \begin{cases} \varrho' = \varrho \frac{d\varrho}{ds} = \\ \frac{2\sqrt{A} R_1 \mathfrak{C}0[\mu \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta (r_1^2 + r_2^2) [(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A(R_2 + r_2)] [2(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta - A]^{\frac{1}{2}}}{[(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2^2} \end{cases}$$

Die Evolute selbst ist:

$$32) \quad \begin{cases} \xi = \\ \frac{[2R_1(R_2 - r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + (R_1 r_2 - R_2 r_1) A] \cos \vartheta \mathfrak{C}0[\mu \vartheta + [-2R_1(R_1 - r_1)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + (R_1 r_1 + R_2 r_2) A] \sin \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta}{(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2} \\ \eta = \\ \frac{[2R_1(R_2 - r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + (R_1 r_2 - R_2 r_1) A] \sin \vartheta \mathfrak{C}0[\mu \vartheta - [-2R_1(R_1 - r_1)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + (R_1 r_1 + R_2 r_2) A] \cos \vartheta \mathfrak{S}in \mu \vartheta}{(R_2 - 2r_2)(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C}0]^2 \mu \vartheta + A r_2} \end{cases}$$

9. Die x -Axe ist Symmetrieaxe der Kurve.

Die Schnittpunkte der Kurve mit derselben ergeben sich aus

$$33) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{R_2 - r_2}{R_1 - r_1} \operatorname{Tg} \mu \vartheta.$$

Ist ϑ_r eine Wurzel dieser Gleichung, so ist auch $-\vartheta_r$ eine solche. Für beide Werte von ϑ ergibt die erste Gleichung 9) je denselben Wert von x ; also sind die Schnittpunkte der Kurve mit der x -Axe Doppelpunkte. Eine Ausnahme macht jedoch der zu $\vartheta = 0$ gehörige Anfangspunkt, für welchen der Radiusvektor:

$$34) \quad u_0 = 2(R_1 - r_1),$$

der Krümmungsradius:

$$35) \quad \varrho_0 = \pm \frac{B^2}{r_1 A}.$$

Derselbe ist ein Scheitel der Kurve.

Dass ausserhalb der x -Axe keine reellen Doppelpunkte existieren, geht daraus hervor, dass 10), wenn $u = \text{const}$ angenommen wird, nur zwei reelle Werte $\pm \vartheta_r$ liefert. Weil nämlich y beim Vertauschen von ϑ mit $-\vartheta$ sein Vorzeichen ändert, sind Doppelpunkte nur auf $y = 0$ möglich.

10. Für die Wendepunkte ergibt sich aus 28):

$$36) \quad \Im g \mu \vartheta = \pm \sqrt{\frac{B r_1}{A r_2}};$$

diese Gleichung hat höchstens zwei reelle Wurzeln.

Für die Berührungspunkte der vom Ursprung aus an die Kurve gehenden Tangenten folgt aus 24) oder 26):

$$37) \quad \Im g \mu \vartheta = \pm \sqrt{\frac{(R_1 - r_1) B}{(R_2 - r_2) A}}.$$

Auch diese Gleichung besitzt höchstens zwei reelle Wurzeln.

Endlich muss daran erinnert werden, dass Bellermann¹⁾ bei den Trochoiden das Vorkommen von nicht in die Scheitel fallenden sog. Krümmungspunkten²⁾ nachgewiesen hat. Solche Punkte kommen auch bei Pseudotrochoiden vor; sie ergeben sich vermöge 29):

$$38) \quad \Im g \mu \vartheta = \pm \sqrt{\frac{(R_1 + r_1) B}{(R_2 + r_2) A}}.$$

Auch diese Gleichung liefert höchstens zwei reelle Wurzeln.

11. Nach Böklen³⁾ ist die Fusspunktcurve einer gemeinen cyclischen Kurve in Bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises als Pol eine Trochoide. Dieselbe hat die Eigenschaft, durch den Mittelpunkt des festen Kreises hindurchzugehen. Derartige sogenannte sternförmige Cycloiden sind von Durège⁴⁾ näher untersucht worden. Entsprechende Fusspunktcurven haben auch die gemeinen Pseudotrochoiden und zwar führen die Hypercycloiden auf die Kurven:

$$39) \quad \begin{cases} x = 2(R_1 - r_1) \cos \vartheta \Im \mu \vartheta \\ y = 2(R_1 - r_1) \sin \vartheta \Im \mu \vartheta. \end{cases}$$

Für diese ist $R_2 = r_2$. Die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises ist reell.

1) Epicycloiden und Hypocycloiden. Dissertation. Jena 1867. S. 28. — Vergl. auch Chr. Wiener, Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyclischen Kurven. Zeitschrift für Mathematik und Physik 27, 129—139 (1882), bes. S. 134.

2) d. h. von Punkten, in welchen der Krümmungskreis vierpunktig berührt.

3) Einige geometrische Sätze über Kurven. Zeitschrift für Mathematik und Physik 3, 320—121 (1858).

4) Über eine besondere Art cyclischer Kurven. Zeitschrift für Mathematik und Physik 9, 209—117 (1864).

Die Paracykloiden haben dagegen zu Fusspunktkurven die Kurven:

$$40) \quad \begin{cases} x = 2(R_2 - r_2) \cos \vartheta \operatorname{Sin} \mu \vartheta \\ y = 2(R_2 - r_2) \sin \vartheta \operatorname{Sin} \mu \vartheta, \end{cases}$$

also $R_1 = r_1$. Die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises ist rein imaginär.

Für die Kurven 39) folgt aus 10) und 12):

$$\begin{aligned} u &= 2(R_1 - r_1) \operatorname{Cot} \mu \vartheta, \\ \omega &= \vartheta, \end{aligned}$$

somit

$$41) \quad \begin{cases} u = 2(R_1 - r_1) \operatorname{Cot} \mu \omega \\ = (R_1 - r_1)(e^{\mu \omega} + e^{-\mu \omega}). \end{cases}$$

Bei den Kurven 40) ist dagegen:

$$\begin{aligned} u &= 2(R_2 - r_2) \operatorname{Sin} \mu \vartheta \\ \omega &= \frac{\pi}{2} + \vartheta, \end{aligned}$$

daher mit $\omega - \frac{\pi}{2} = \omega_1$:

$$42) \quad \begin{cases} u = 2(R_2 - r_2) \operatorname{Sin} \mu \omega_1 \\ = (R_2 - r_2)(e^{\mu \omega_1} - e^{-\mu \omega_1}). \end{cases}$$

12. Die Kurven 41) und 42) sind die einzigen¹⁾ Pseudotrochoiden, welche gelegentlich in der Litteratur vorkommen. Dittrich²⁾ nennt die ersteren Summenspiralen, die letzteren Differenzspiralen und bringt sie in Beziehung zu dem Paar logarithmischer Gegenspiralen

$$u = ae \pm \mu \omega.$$

Die Differenzspirale nennt Aubry³⁾ Spirale tractrice.⁴⁾ Nach Merkelbach⁵⁾ muss eine Ellipse, wenn ihre grosse Axe immer durch einen festen Punkt gehen soll, auf einer sternförmigen Cykloide rollen, eine Hyperbel, wenn die reelle Axe durch einen festen Punkt gehen soll, auf einer Differenzspirale. (Sollte dagegen die imaginäre Axe durch einen festen Punkt gehen, so muss die Hyperbel auf einer Summenspirale rollen.) Einem ebenfalls von Merkelbach⁶⁾ bewiesenen

1) Siehe jedoch Nr. 31.

2) Die logarithmische Spirale. Programm. Breslau 1872. S. 9.

3) De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes. Journ. de Math. spéc. 20, 29 (1896).

4) Dieser Name wurde aber bereits von Rouquet [Nouv. Ann. de Math. (2) 2, 498 (1863)] der Kurve $\omega = \pm \left(\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \arccos \frac{u}{a} \right)$ beigelegt; die letztere führt übrigens bei Giard [Nouv. Ann. de Math. (2) 1, 76 (1862)] den zutreffenderen Namen tractrice polaire.

5) Über Rollkurven, welche von einer Geraden eingehüllt werden. Dissertation. Marburg 1881. S. 20—22.

6) a. a. O. S. 18.

allgemeinen Satz zufolge kann man hieraus schliessen, dass umgekehrt beim Rollen der Differenzenspirale auf der Hyperbel der Pol der ersteren die reelle Axe der letzteren beschreibt; ein Resultat, das bereits früher von Purser¹⁾ angegeben wurde. (Ebenso beschreibt der Pol der Summenspirale beim Rollen derselben auf einer Hyperbel die imaginäre Axe derselben.)

Diese Sätze hängen mit den von Kessler (siehe die Einleitung) für Pseudocykloiden gefundenen zusammen vermittelt eines Theorems von Habich²⁾: Beschreibt ein Punkt m beim Rollen einer Kurve A auf einer Geraden D eine Kurve C , so beschreibt, wenn die Fusspunktkurve von m in Bezug auf A auf der Kurve C rollt, dieser Punkt die Gerade D .

Die Summenspirale wird ferner beschrieben von einem materiellen Punkt, welcher auf einer sich gleichmässig drehenden Geraden gleitet.³⁾

Erwähnenswert ist ferner die inverse Kurve der Summenspirale, die sogenannte Poinsoische Spirale $\frac{1}{u} = a \cos \mu \omega$, welche als Spezialfall der Herpolhodie und auch in anderem Zusammenhang mehrfach untersucht wurde.⁴⁾

Die inverse Kurve der Differenzenspirale nennt Aubry⁵⁾ Spirale de Côtes.⁶⁾

13. Um über die verschiedenen Gattungen der Pseudotrochoiden eine Übersicht zu gewinnen, kann man, indem man von der Grösse der Kurven absieht, $R_1 R_2 r_1 r_2$ als homogene Koordinaten eines Punktes im Raume ansehen. Diese müssen aber der Gleichung 7) genügen. Daher lassen sich die ∞^2 verschiedenen Arten von Pseudotrochoiden den Punkten des Hyperboloids:

1) Notes on Rolling Curves. Quart. Journ. of Math. 7, 129—135 (1866) bes. S. 131.

2) Sur les roulettes. Mathésis 2, 145—148 (1882).

3) Vergl. z. B. Am Ende: Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer rotierenden Geraden. Arch d. Math. u. Phys. 49, 121—135 (1869); Walton, Collection of problems to the Theoretical Mechanics. 3. Aufl. Cambridge 1876. S. 253.

4) Vergl. z. B. Poincot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Journ. de Math. (1) 16, 9—129 (1852) bes. S. 116—118. — Hirst, On equally attracting bodies. Phil. Mag. (4) 13, 305—324 (1857) bes. S. 311. — Barbarin, Note sur l'herpolhodie. Nouv. Ann. de Math. (3) 4, 538—556 (1885) bes. S. 549. — Fouret, Sur un mode de génération de la spirale de Poincot Ass. franç. Congrès de Nancy 15, 86 (1886). — Cabreira, Sur la géom. des courbes transc. Lisbonne 1896. S. 31—33. — Welsch, L'Interméd. des Math. 4, 116 (1897). — Verallgemeinert bei Moret-Blanc, Nouv. Ann. de Math. (2) 15, 72 (1876).

5) Journ. de Math. spéc. 20 (1896); vergl. auch Hirst a. a. O.

6) Dieser Name wurde aber bereits von Sacchi (Sulla geometria analitica delle linee piane. Pavia 1854 S. 11) einer andern Kurve mit der Gleichung $u^{-1} = a^{-1} \cos n \omega$ gegeben.

$$7) \quad R_1^2 + R_2^2 - 2R_1r_1 - 2R_2r_2 = 0$$

zuordnen. Dieses besitzt horizontale Kreisschnitte und kann erzeugt werden durch zwei Ebenenbüschel, die ihre Träger in den Geraden

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 = 2r_2 \end{array} \right\}$$

haben.

Der Ebenenbüschel $R_1 = \lambda R_2$ schneidet die Erzeugenden der einen Schar aus. Den Punkten einer solchen Geraden entsprechen die Pseudotrochoiden, für welche der komplexe Radius des festen Kreises dieselbe Amplitude hat. Grenzfälle sind $\lambda = \infty$ (Paracykloiden) und $\lambda = 0$ (Hypercykloiden). λ heisse der erste Index der Pseudotrochoide.

Der Ebenenbüschel $R_1 = \mu(R_2 - 2r_2)$ (wo μ der zweite Index der Pseudotrochoide) schneidet die Erzeugenden der andern Schar aus. Bei allen Pseudotrochoiden von konstantem Index μ konvergiert der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor gegen denselben Grenzwert. Auch hier giebt es zwei Grenzfälle:

a) $\mu = 0$ also $R_1 = R_2 = 0$, $\cos \mu \vartheta = 1$, $\sin \mu \vartheta = 0$,
somit

$$43) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -r_1 \cos \vartheta \\ y = -r_1 \sin \vartheta \end{array} \right\} \text{ Kreise um den Ursprung.}$$

b) $\mu = \infty$, $R_1 - 2r_1 = 0$, $R_2 - 2r_2 = 0$, $R = 2r$.

Mit $\mu \vartheta = \vartheta'$ wird:

$$44) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r_1 \cos \vartheta' \\ y = r_2 \sin \vartheta' \end{array} \right\}.$$

Hyperbeln $\frac{x^2}{r_1^2} - \frac{y^2}{r_2^2} = 1$.

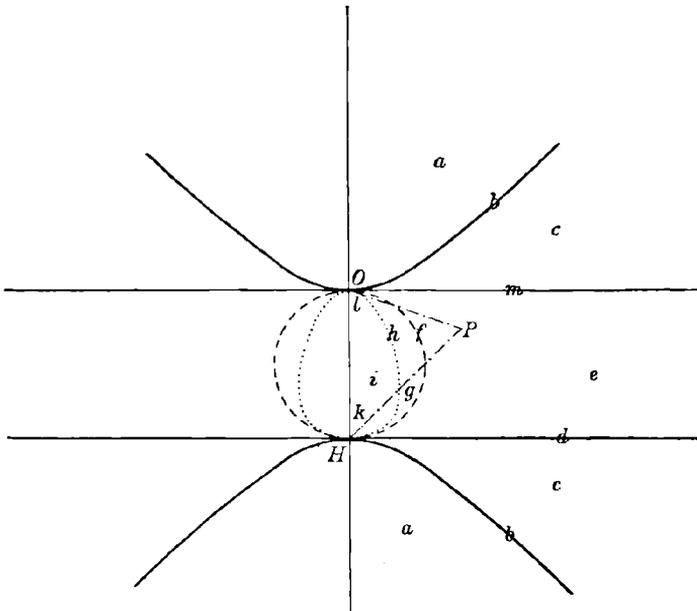
Diese entsprechen den Ellipsen, welche bei den Trochoiden für $R = 2r$ auftreten.

14. Es erhebt sich nun aber der Zweifel, ob bei der Deutung von R_1, R_2, r_1, r_2 als homogene Koordinaten eines Raumpunktes auch alle möglichen Kurven berücksichtigt sind, weil nämlich die Behandlung von r_2 also homogenisierende Veränderliche die Annahme negativer Werte für diese Grösse ausschliesst. Aber die Gleichungen 9) bleiben unverändert, wenn in ihnen R_2 und r_2 ihr Zeichen wechseln. Damit ergibt sich auch für die Pseudotrochoiden eine doppelte Erzeugungsweise vermittelt zweier Polkreispaaire, wie sie für die Trochoiden bereits bekannt ist. Ferner bleiben aber die Gleichungen 9) auch ungeändert, wenn in denselben die Grössen R_1, r_1 und ϑ ihr Vorzeichen ändern und die Koordinaten x und y in entgegengesetztem Sinn genommen werden. Dasselbe gilt bei Zeichenänderung von R_1, r_1, R_2, r_2 und ϑ . Diese Erzeugungsarten unterscheiden sich aber von den oben angeführten materiell verschiedenen nur in ideeller Weise.

Die Polkreispaaire sind dieselben; denn ein Kreis ändert sich nicht, wenn der Radius sein Vorzeichen wechselt. Es darf aber nun, wenn man alle Pseudotrochoiden umfassen will, nicht nur r_2 , sondern auch z. B. R_1 als positiv angenommen werden, so dass man nur die Punkte des Hyperboloids rechts von der (R_2, r_1) -Ebene zu berücksichtigen braucht. Je zwei zur Geraden $\left\{ \begin{matrix} R_1 = 0 \\ r_1 = 0 \end{matrix} \right\}$ symmetrisch gelegene Punkte des Hyperboloids führen auf dieselbe Pseudotrochoide.

15. Zur besseren Übersicht projiziert man jetzt das Hyperboloid vom unendlich fernen Punkte der r_1 -Axe vertikal auf die (horizontale)

Fig. 1.



$(R_1 R_2)$ -Ebene. Jedem Punkt des Hyperboloids entspricht alsdann ein Punkt der Ebene; nur sämtlichen Punkten auf den Trägern der Ebenenbüschel, also auf den Geraden

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{matrix} R_1 = 0 \\ R_2 = 2r_2 \end{matrix} \right\}$$

ist je nur ein Punkt O oder $(0,0)$ resp. H oder $(0,2)$ zugeordnet. Die beiden Geradenscharen des Hyperboloids projizieren sich als Strahlenbüschel mit Mittelpunkten in O resp. H . Dabei können die Indices λ und μ einer Pseudotrochoide als Biangularkoordinaten des zugehörigen Punktes P in der Ebene aufgefasst werden; es ist nämlich (siehe Fig. 1):

$$\lambda = \operatorname{tg} POH, \quad \mu = \operatorname{tg} PHO.$$

Die Paracykloiden bilden sich auf der R_2 -Axe, die Hypercykloiden in H ab. Die Punkte der Summenspiralen erfüllen auf dem Hyperboloid eine Hyperbel, welche sich in das Mittenlot $R_2 = 1$ von O und H projiziert. Dagegen projiziert sich die Hyperbel der Differenzspiralen wieder als Hyperbel:

$$45) \quad R_1^2 - R_2^2 + 2R_2r_2 = 0$$

mit Scheiteln H und O . Die Punkte der Kreise liegen auf der r_1 -Axe und bilden sich im Punkt O ab; die Punkte der Hyperbeln projizieren sich dagegen in die Parallele durch H zur R_1 -Axe.

16. Aus 36) folgt, dass die Pseudotrochoiden reelle Wendepunkte nur haben für

$$\left. \begin{array}{l} 0 < R_2 < 2r_2 \\ R_1^2 + R_2^2 - 2R_2r_2 > 0 \end{array} \right\}.$$

Dieses Gebiet ist begrenzt von der Geraden der Paracykloiden, der Geraden der Hyperbeln und dem Kreis

$$46) \quad R_1^2 + R_2^2 - 2R_2r_2 = 0.$$

Die zu den Punkten dieses Kreises gehörigen Pseudotrochoiden haben die beiden Wendepunkte im Scheitel vereinigt, besitzen also daselbst einen Undulationspunkt. Daher möge der Kreis 46) Undulationskreis heissen; für die betreffenden Kurven ist $r_1 = 0$, d. h. der Radius des beweglichen Kreises rein imaginär. Bei den Paracykloiden sind die Wendepunkte ebenfalls in der Spitze, bei den Hyperbeln dagegen im Unendlichen verschwunden.¹⁾

17. In dem Gebiet der Punkte, an deren zugeordnete Kurven reelle Tangenten vom Ursprung gehen, ist nach 37) entweder

$$R_2 < 0,$$

oder

$$R_2 > 2r_2;$$

ferner in beiden Fällen:

$$R_1^2 - R_2^2 + 2R_2r_2 > 0.$$

Das Gebiet der betreffenden Punkte liegt also zwischen der Differenzspiralenhyperbel einerseits, der Paracykloidengeraden resp. der Hyperbelgeraden anderseits. Bei der Differenzspiralen sind die Ursprungstangenten in die Scheiteltangente, bei den Paracykloiden in die Spitzentangente zusammengefallen; bei den Hyperbeln in die Asymptoten übergegangen.

1) Übrigens sind auch die Pseudotrochoiden, für welche $r_2 = 0$, also der Radius des beweglichen Kreises reell ist, durch imaginäre zusammenfallende Wendepunkte ausgezeichnet; ihnen entsprechen die Punkte der unendlich fernen Geraden.

18. Endlich sind nach 38) die Krümmungspunkte reell, wenn

$$\begin{cases} R_1^4 + 2R_1^2(R_2 - 2r_2)^2 + 2R_1^2(R_2 - 2r_2)(R_2 - r_2) \\ + (R_2 - 2r_2)^3 R_2 > 0 \end{cases}$$

und

$$0 < R_2 < 2r_2,$$

also in dem Gebiet zwischen der Paracykloidengeraden, der Hyperbelgeraden und der Kurve vierter Ordnung:

$$47) \begin{cases} R_1^4 + 2R_1^2(R_2 - 2r_2)^2 + 2R_1^2(R_2 - 2r_2)(R_2 - r_2) \\ + (R_2 - 2r_2)^3 R_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Kurve ist ganz innerhalb des Undulationskreises gelegen und hat in H einen dreifachen Punkt mit zwei komplexen Tangenten. Für die Punkte dieser Kurve hat die Pseudotrochoide im Scheitel nicht vier, sondern sechs Punkte mit dem Krümmungskreis gemein; sie hat also einen Scheitel dritter Ordnung.

(Dass solche Punkte, wie auch Undulationspunkte, bei Trochoiden vorkommen, ist nur von Onnen¹⁾ bemerkt worden; derselbe beschreibt jedoch den Undulationspunkt nicht genau und meint irrtümlich, in dem höhern Scheitel seien nur zwei Krümmungspunkte vereinigt.)

Bei den Paracykloiden sind die Krümmungspunkte im Ursprung; bei den Hyperbeln im Unendlichen verschwunden.

19. Der Scheitel der Pseudotrochoide liegt im Ursprung bei den Differenzenspiralen; links vom Ursprung bei den Kurven, deren zugehörige Punkte innerhalb der Differenzenspiralenhyperbeln liegen, sowie bei denjenigen Hypercykloiden, deren zugehörige Punkte auf dem Hyperboloid oberhalb der $(R_1 R_2)$ -Ebene liegen; rechts vom Ursprung bei den übrigen Kurven.

Die Kurven mit Wendepunkten und diejenigen mit reellen Ursprungstangenten sind gegen den Ursprung zu konvex bis zu ersteren resp. bis zu den Berührungspunkten der letzteren, dann konkav. Die übrigen Kurven sind von Anfang an konkav.

Das Krümmungscentrum liegt nie im Ursprung ausser bei den Kreisen.

20. Man hat demnach in gestaltlicher Beziehung folgende Typen von Pseudotrochoiden zu unterscheiden:

a) $R_1 < r_1.$

Scheitel links vom Ursprung; Kurve konkav; erster Doppelpunkt rechts vom Ursprung. Krümmung im Scheitel Maximum. Evolute beginnt rechts vom Ursprung mit einer gegen diesen gerichteten Spitze; im übrigen ist sie eine der Grundkurve ähnliche Doppelspirale

b) $R_1 = r_1$

Differenzenspiralen.

1) Notes concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes. Archives néerlandaises 14, 1-75 (1879) bes. S. 52-53.

Scheitel im Ursprung; Kurve konkav; erster Doppelpunkt rechts vom Ursprung; Krümmung und Evolute wie bei a). Figur 2 stellt die Differenzenspirale:

$$\begin{cases} x = \sin \vartheta \mathfrak{S} \sin \vartheta \\ y = \cos \vartheta \mathfrak{S} \sin \vartheta \end{cases}$$

dar.

c)
$$\begin{cases} R_1 > r_1 \\ R_2 > 2r_2 \end{cases}.$$

Scheitel rechts vom Ursprung; Kurve konvex bis zum reellen Ursprungstangentenpaar, dann konkav; der erste Doppelpunkt rechts vom Ursprung; Krümmung und Evolute wie bei a).

Fig. 2.

d)
$$\begin{cases} R_1 = 2r_1 \\ R_2 = 2r_2 \end{cases}.$$

Hyperbeln; Scheitel rechts vom Ursprung; Kurve konvex; Asymptotenpaar mit Mittelpunkt im Ursprung; kein Doppelpunkt; Krümmung und Evolute wie bei a); doch ist letztere keine Spirale.

e)
$$\begin{cases} 0 < R_2 < 2r_2 \\ r_1 > 0 \end{cases}.$$

Scheitel rechts vom Ursprung; Krümmung daselbst Maximum; Kurve konvex bis zum Wendepunktepaar, wo Krümmung Null (Minimum), dann konkav; alsdann folgt das Krümmungspunktepaar (Krümmung Maximum); dann erster Doppelpunkt links vom Ursprung. Die Evolute hat eine Spitze rechts vom Ursprung gegen denselben gewendet; dann Asymptotenpaar; sie erscheint wieder links vom Ursprung und besitzt ein Paar unsymmetrischer, der Kurve zugewendeter Spitzen; sie ist eine Doppelspirale:

f)
$$\begin{cases} 0 < R_2 < 2r_2 \\ r_1 = 0 \end{cases}.$$

Scheitel rechts vom Ursprung mit Undulationspunkt; Krümmung daselbst Null (Minimum); Kurve konkav; Krümmungspunktepaar (Krümmung Maximum); erster Doppelpunkt links vom Ursprung. Die Evolute hat eine unendlich ferne Spitze mit der x -Axe als Tangente, kommt dann links vom Ursprung herein und besitzt sodann zwei unsymmetrische, gegen die Kurve gerichtete Spitzen; sie ist eine Doppelspirale.

Figur 3 stellt die Summenspirale:

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \mathfrak{C} \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \mathfrak{C} \cos \vartheta \end{cases},$$

die zu diesem Typus gehört, dar.

$$g) \left\{ \begin{array}{l} 0 < R_2 < 2r_2 \\ r_1 < 0 \\ R_1(R_2 + r_2)r_1 - (R_2r_2 - r_1^2)(R_2 - 2r_2) > 0 \end{array} \right\}.$$

Scheitel rechts vom Ursprung; Krümmung Minimum; Kurve konkav; Krümmungspunktepaar (Krümmung Maximum); erster Doppelpunkt links vom Ursprung. Die Evolute hat eine Spitze links vom Ursprung, die von der Kurve abgewendet ist; dann zwei derselben zugewendete unsymmetrische Spitzen; sie ist eine Doppelspirale.

$$h) R_1(R_2 + r_2)r_1 - (R_2r_2 - r_1^2)(R_2 - 2r_2) = 0.$$

Scheitel dritter Ordnung rechts vom Ursprung; Krümmung daselbst Maximum; Kurve konkav; erster Doppelpunkt links vom Ursprung.

Fig. 3.

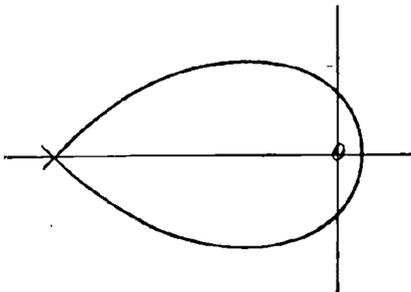
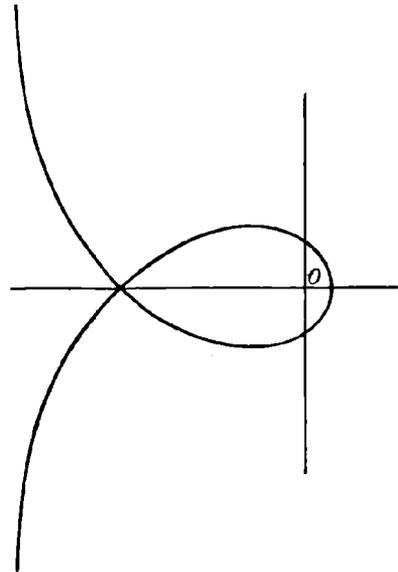


Fig. 4.



Die Evolute hat links vom Ursprung eine gegen die Kurve gerichtete Spitze; diese ist jedoch eine höhere Singularität, in welcher drei Spitzen mit zwei Doppelpunkten zusammenfallen.¹⁾ Die Evolute ist eine Doppelspirale.

$$i) R_1(R_2 + r_2)r_1 - (R_2r_2 - r_1^2)(R_2 - 2r_2) < 0.$$

Scheitel rechts vom Ursprung (Krümmung Maximum); Kurve konkav; erster Doppelpunkt links vom Ursprung; Evolute hat links vom Ursprung eine Spitze und ist eine Doppelspirale.

1) Diese Singularität, welche z. B. die Kurve $y^4 = x^5$ im Ursprung aufweist, nennt Reuschle (Praxis der Kurvendiskussion I, Stuttgart 1886, S. 42) Rückkehrspitzpunkt.

$$k) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 = 2r_2 \end{array} \right\}.$$

Hypercykloiden. Diejenigen, für welche $r_1 > 0$, haben dieselbe Gestalt wie i); die Evolute ist eine Paracykloide mit Spitze links vom Ursprung. Die Hypercykloiden mit $r_1 > 0$ sind von denselben nicht verschieden, obgleich ihr Scheitel links vom Ursprung liegt (cf. Nr. 14). Figur 4 stellt die Hypercykloide:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos \vartheta \mathfrak{C} \vartheta - \sin \vartheta \mathfrak{S} \vartheta \\ y = \sin \vartheta \mathfrak{C} \vartheta + \cos \vartheta \mathfrak{S} \vartheta \end{array} \right\}$$

dar.

$$l) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung.

$$m) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_2 = 0 \\ R_1 = 2r_1 \end{array} \right\}.$$

Paracykloiden; Anfangspunkt ist eine Spitze rechts vom Ursprung diesem zugekehrt; die Spitzentangente geht durch den Ursprung; Kurve konkav; erster Doppelpunkt links vom Ursprung. Die Evolute ist eine Hypercykloide, deren Scheitel rechts vom Ursprung liegt.

Figur 5 stellt die Paracykloide:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos \vartheta \mathfrak{C} \vartheta + \sin \vartheta \mathfrak{S} \vartheta \\ y = \sin \vartheta \mathfrak{C} \vartheta - \cos \vartheta \mathfrak{S} \vartheta \end{array} \right\}$$

dar.

Während die Differenzenspiralen eine gestaltlich wohl differenzierte Gruppe bilden, gehören die Summenspiralen den Typen e) bis i) an.

21. Für die Paracykloiden und Hypercykloiden treten in den allgemeinen Formeln Vereinfachungen ein.

Bei ersteren ist $\lambda = 0$, $\mu = \frac{-r_1}{r_2}$.

$$48) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2r_1 \cos \vartheta \mathfrak{C} \mu \vartheta - 2r_2 \sin \vartheta \mathfrak{S} \mu \vartheta \\ y = 2r_1 \sin \vartheta \mathfrak{C} \mu \vartheta + 2r_2 \cos \vartheta \mathfrak{S} \mu \vartheta \end{array} \right\},$$

$$49) \quad u = 2\sqrt{(r_1^2 + r_2^2) \mathfrak{C} \mu \vartheta - r_2^2},$$

$$50) \quad \operatorname{tg}(\vartheta - \omega) = \frac{-r_2}{r_1} \mathfrak{Tg} \mu \vartheta.$$

$$51) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2} \cos \vartheta \mathfrak{S} \mu \vartheta d\vartheta \\ dy = 2 \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2} \sin \vartheta \mathfrak{S} \mu \vartheta d\vartheta, \end{array} \right.$$

$$52) \quad \varphi = \vartheta,$$

d. h. der Tangentenwinkel ist gleich dem Parameter.¹⁾

1) Ferner ist $p = r_2 \mathfrak{S} \mu \varphi$ cf. Grane N. Über Kurven mit gleichart. succ. Developpoiden. Lund 1894 S. 58.

Ferner

$$53) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{-r_2}{r_1} \operatorname{Tg} \mu \vartheta,$$

$$54) \quad s = -2 \frac{r_1 + r_2^2}{r_2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta, ^1)$$

$$55) \quad \varrho = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)}{r_1} \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta.$$

Elimination von ϑ aus 54) und 55) giebt:

$$56) \quad r_1^2 s^2 - r_2^2 \varrho^2 = 4(r_1^2 + r_2^2)^2$$

Gleichung in esoterischen Koordinaten.

Der Krümmungsradius der Evolute ist:

$$57) \quad \varrho' = \frac{-2(r_1^2 + r_2^2)r_1}{r_2^2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta^2)$$

diese selbst ist

$$58) \quad \begin{cases} \xi = 2r_1 \cos \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta + \frac{2r_1^2}{r_2} \sin \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta \\ \eta = 2r_1 \sin \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta - \frac{2r_1^2}{r_2} \cos \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta. \end{cases}$$

Der Krümmungsradius (Hypercykloide) der zweiten Evolute

$$59) \quad \varrho'' = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)r_1^2}{r_2^2} \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta;$$

die zweite Evolute ist also wieder eine Paracykloide.

22. Bei den Hypercykloiden werden viele Formeln illusorisch, weil $\frac{R_1}{R_2 - 2r_2}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Man kann aber diese Grösse durch die ihr gleiche $\frac{-R_2}{R_1 - 2r_1}$ ersetzen und erhält dann $\lambda = \infty \quad \mu = \frac{r_2}{r_1}$.

$$60) \quad \begin{cases} x = -2r_1 \cos \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta + 2r_2 \sin \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta \\ y = -2r_1 \sin \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta - 2r_2 \cos \vartheta \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \mu \vartheta, \end{cases}$$

$$61) \quad u = 2 \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J}^2 \mu \vartheta - r_2^2,$$

$$62) \quad \operatorname{tg} (\vartheta - \omega) = \frac{-r_2}{r_1} \operatorname{Tg} \mu \vartheta,$$

$$63) \quad \begin{cases} dx = 2 \frac{(r_1^2 + r_2^2)}{r_1} \sin \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta d\vartheta \\ dy = -2 \frac{(r_1^2 + r_2^2)}{r_1} \cos \vartheta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{J} \mu \vartheta d\vartheta, \end{cases}$$

$$64) \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \vartheta,$$

d. h. der Tangentenwinkel ist gleich dem um $\frac{\pi}{2}$ vermehrten Parameter; letzterer ist der Winkel zwischen Normale und x -Axe.

1) Vergl. Currau Sharp, Mess. of Math. (2) 9, 96 (1880).

2) Daher $\varrho' = \frac{-r_1}{r_2^2} \sqrt{r_1^2 \varrho^2 + 4(r_1^2 + r_2^2)^2}$ cf. Timmermans, Mém. Soc. Lille 1828 S. 63.

Ferner ist

$$65) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{Cot} \mu \vartheta,$$

$$66) \quad s = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)}{r_2} \operatorname{Sin} \mu \vartheta,^{1)}$$

$$67) \quad \varrho = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)}{r_2} \operatorname{Cof} \mu \vartheta.$$

Die Elimination von ϑ aus 66) und 67) giebt:

$$68) \quad r_1^2 \varrho^2 - r_2^2 s^2 = 4(r_1^2 + r_2^2)$$

die Gleichung in esoterischen Koordinaten.

Der Krümmungshalbmesser der Evolute ist:

$$69) \quad \varrho' = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)r_2}{r_1^2} \operatorname{Sin} \mu \vartheta;$$

diese selbst ist:

$$70) \quad \begin{cases} \xi = -\frac{2r_1^2}{r_2} \cos \vartheta \operatorname{Cof} \mu \vartheta + 2r_2 \sin \vartheta \operatorname{Sin} \mu \vartheta \\ \eta = -\frac{2r_1^2}{r_2} \sin \vartheta \operatorname{Cof} \mu \vartheta - 2r_2 \cos \vartheta \operatorname{Sin} \mu \vartheta \end{cases}$$

(Paracycloide).

Der Krümmungsradius der zweiten Evolute ist:

$$71) \quad \varrho'' = \frac{2(r_1^2 + r_2^2)r_2^2}{r_1^3} \operatorname{Cof} \mu \vartheta;$$

dieselbe ist wieder eine Hypercycloide.

Die von Laisant und Pirondini studierte Paracycloide und Hypercycloide (siehe die Einleitung) haben den zweiten Index $\mu = 1$; es sind die Figur 5 und Figur 4 dargestellten Kurven.

23. Die Differenzen- und Summenspiralen sind nicht allein die Fusspunktkurven der Paracycloiden und Hypercycloiden, sondern sie haben noch eine weitere Bedeutung für dieselben. Deutet man in Gleichung 55) ϱ als Radiusvektor und ϑ als Polarwinkel einer Kurve, so ist letztere die sogenannte Radiale²⁾ der gegebenen Paracycloide, d. h. der Ort der Endpunkte der Strecken, welche man von einem gegebenen Punkt parallel und gleich den Krümmungsradien der gegebenen Kurve abträgt. Dieselbe ist für die Paracycloide eine Differenzenspirale. Ebenso folgt aus Gleichung 67), dass die Radiale der Hypercycloide eine Summenspirale ist.

24. Die Elimination von ϑ aus 61) und 66) giebt:

$$72) \quad u^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} s^2 + 4r_1^2.$$

1) Vergl. Currau Sharp, *Mess. of Math.* (2) 9, 96 (1880).

2) Tucker, *Proc. Lond. Math. Soc.* 1 (1865).

Auf dieser Formel beruht die Erzeugungsweise von Juel¹⁾:

Es sei $u = a e^{m\omega}$ die Gleichung einer logarithmischen Spirale in einer Ebene. Dieselbe sei die Basis eines Kegels, dessen Spitze ein senkrecht über dem Pol O der Spirale im Abstand h befindlicher Punkt sei. Wird der Mantel dieses Kegels in eine Ebene abgewickelt, so geht die logarithmische Spirale in eine Hypercykloide über. Ist nämlich u_1 der Radiusvektor s_1 der Bogen der logarithmischen Spirale, so ist

$$s_1 = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} u_1.$$

Ist ferner s der Bogen, u der Radiusvektor der Abwickelungskurve, so ist:

$$s = s_1,$$

somit

$$u^2 = u_1^2 + h^2,$$

$$u^2 = \frac{m^2}{1+m^2} s^2 + h^2; \quad 2)$$

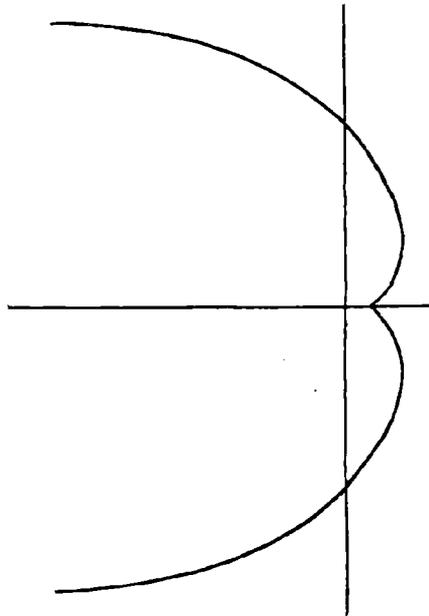
also wegen 72) die Gleichung einer Hypercykloide mit der Kegelspitze als Pol.

Wollte man auf demselben Wege eine Paracykloide erhalten, so müsste man die Entfernung h imaginär nehmen.

25. Die Wiederholung des Juelschen Verfahrens, d. h. seine Anwendung auf die erhaltenen Hypercykloiden liefert immer nur ähnliche Hypercykloiden. Damit aber steht in einem scheinbaren Widerspruch, dass die logarithmische Spirale, von der man ausging, nicht zu den

anderen Kurven ähnlich ist. Und doch ist auch sie es in gewissem Sinne. Die Verwandlung einer Kurve in eine ähnliche besteht in einer endlichen Vergrößerung oder Verkleinerung derselben. Aber man kann auch eine unendliche Vergrößerung oder Verkleinerung vornehmen und erhält nach Swellengrebel³⁾ bei algebraischen Kurven

Fig. 5.



1) L'Interméd. des Math. 2, 160 (1895).

2) Dementsprechend findet Collignon (Ass. fr. Congrès de la Rochelle 11, 140 (1882) für die cyklischen Kurven (courbes pendulaires) $u = \sqrt{as^2 + c}$.

3) Über die sich unendlich vergrößernden und die sich unendlich verkleinernden Kurven. Arch. der Math. u. Phys. 16, 419—423 (1851).

allerdings bei Vergrößerung die (etwaigen) Kurventangenten im Ursprung, bei Verkleinerung die Asymptoten. Bei transcendenten Kurven erhält man dagegen durch dieses Verfahren eventuell Kurven, so z.B. bei den Pseudotrochoiden durch Verkleinerung. Lassen wir in 9) die Konstanten $R_1 R_2 r_1 r_2$ unendlich klein werden, so bleibt x und y endlich, wenn zugleich ϑ gegen unendlich konvergiert. Dann darf $\text{Cos } \mu \vartheta$ und $\text{Sin } \mu \vartheta$ durch $\frac{1}{2} e^{\mu \vartheta}$ ersetzt werden, man erhält:

$$73) \quad \begin{cases} x = [(R_1 - r_1) \cos \vartheta + (R_2 - r_2) \sin \vartheta] e^{\mu \vartheta} \\ y = [(R_1 - r_1) \sin \vartheta - (R_2 - r_2) \cos \vartheta] e^{\mu \vartheta}, \end{cases}$$

daher

$$u = \sqrt{(R_1 - r_1)^2 + (R_2 - r_2)^2} e^{\mu \vartheta}$$

und mit

$$R_1 = r_1 = C \cos \vartheta,$$

$$R_2 = r_2 = C \sin \vartheta,$$

$$\omega = \vartheta - \gamma,$$

$$74) \quad u = C e^{\mu(\omega + \gamma)},$$

also eine logarithmische Spirale.

Damit ist gezeigt, dass allgemein eine Pseudotrochoide und daher auch speziell eine Paracykloide oder Hypercykloide zu einer logarithmischen Spirale in uneigentlichem Sinne ähnlich ist.

26. Damit ist aber auch die logarithmische Spirale als cyklische Kurve nachgewiesen. Sie entsteht durch Rollen unendlich kleiner Kreise aufeinander. Nun entsteht eine logarithmische Spirale

$$\bullet \quad u = C e^{\mu \omega}$$

in gleicher Weise durch unendliche Verkleinerung aus allen unendlich vielen Pseudotrochoiden vom Index μ . Damit erklärt sich auch der Umstand, dass in der Gleichung $\varrho^2 = a + 2bs + cs^2$ die logarithmische Spirale die Vermittelung zwischen den Paracykloiden und den Hypercykloiden übernimmt, obgleich beide Kurvenklassen ihre entsprechenden Punkte auf zwei windschiefen, völlig getrennten Geraden des Hyperboloids haben.

Giebt man dem Begriff der Ähnlichkeit noch eine andere Erweiterung, indem man für das Ähnlichkeitsverhältnis imaginäre Werte zulässt, so erkennt man sofort, dass in diesem Sinne die Paracykloiden den Hypercykloiden ähnlich sind. Ist nämlich $f(s, \varrho) = 0$ die esoterische Gleichung einer Kurve, so ist nach Pirondini¹⁾ $f(ks, k\varrho) = 0$ die Gleichung einer dazu ähnlichen Kurve. Aus einer Gleichung von der Form 56) geht aber eine solche von der Form 68) hervor, indem

1) Sulla similitudine delle curve. Annali di Mat. (2) 15, 53-66 (1887) bes. S. 55.

man s und ϱ je mit i multipliziert. In diesem Sinne sind daher die pseudocyklischen Kurven wie die cyklischen Kurven bereits ihren ersten Evoluten ähnlich.

27. Bei den Paracykloiden ist:

$$75) \quad \begin{cases} x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = -r_2 \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \vartheta \\ x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = -r_1 \operatorname{Cos} \frac{r_1}{r_2} \vartheta. \end{cases}$$

Da aber die zweite dieser Gleichungen die Ableitung der ersten nach ϑ ist, so ist letztere die Gleichung der Tangente in der von Hiern¹⁾ so genannten magischen²⁾ Gestalt. Die Tangente bildet den Winkel ϑ mit der x -Axe.

Die beiden zu den Tangentenwinkeln $\vartheta + \alpha$ und $\vartheta - \alpha$ gehörigen Tangenten besitzen den Schnittpunkt:

$$76) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2r_2 \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \alpha}{\sin \alpha} \cos \vartheta \operatorname{Cos} \frac{r_1}{r_2} \vartheta + \frac{2r_2 \operatorname{Cos} \frac{r_1}{r_2} \alpha}{\cos \alpha} \sin \vartheta \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \vartheta, \\ \eta = \frac{2r_2 \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \alpha}{\sin \alpha} \sin \vartheta \operatorname{Cos} \frac{r_1}{r_2} \vartheta - \frac{2r_2 \operatorname{Cos} \frac{r_1}{r_2} \alpha}{\cos \alpha} \cos \vartheta \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \vartheta. \end{cases}$$

Sieht man hierin ϑ als veränderlich an, so ergibt sich der Satz: Die Spitze eines auf einer Paracycloide reitenden Winkels 2α beschreibt eine Pseudotrochoide, oder: Die isoptische³⁾ Kurve einer Paracycloide (und ebenso auch diejenige einer Hypercycloide) ist eine Pseudotrochoide⁴⁾. Ist $\alpha = 0$, so erhält man die ursprüngliche Paracycloide; bei wachsendem α geht die Kurve allmählich in eine Summenspirale über, dann in eine Hypercycloide, weiter in eine Differenzspirale, um zuletzt wieder zu einer Paracycloide zu werden. Dabei bleibt der Index μ konstant, während λ von 0 bis ∞ und dann von $-\infty$ bis 0 wächst.

28. In Linienkoordinaten u, v sind die Gleichungen der Paracykloiden:

$$77) \quad u : v : 1 = \sin \vartheta : -\cos \vartheta : 2r_2 \operatorname{Sin} \frac{r_1}{r_2} \vartheta,$$

diejenigen der Hypercykloiden:

$$78) \quad u : v : 1 = \cos \vartheta : \sin \vartheta : 2r_1 \operatorname{Cos} \frac{r_2}{r_1} \vartheta.$$

1) On the magical equation to a tangent of a curve. Quart. Journ. of Math. 6, 31—38 (1864).

2) So heisst die Gleichung der Tangente, wenn in derselben nur die trig. Tangens des Neigungswinkels gegen die x -Axe, nicht aber die Koordinaten des Berührungspunktes vorkommen.

3) Taylor, Note of a theory of orthoptic and isoptic loci. Proc. of Lond. Roy. Soc. 37, 138—141 (1884).

4) Den entsprechenden Satz für Trochoiden siehe Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. II. éd. Paris 1875, S. 125; ferner Loucheur, Nouv. Ann. de Math. (3) 11, 374—384 (1892).

Daher ist die polarreciproke Kurve der Hypercykloide:

$$79) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\cos \vartheta}{2 r_1 \cos \left| \frac{r_2}{r_1} \vartheta \right.} \\ y = \frac{\sin \vartheta}{2 r_1 \cos \left| \frac{r_2}{r_1} \vartheta \right.} \end{array} \right\}.$$

Radiusvektor ist:

$$u = \frac{1}{2 r_1 \cos \left| \frac{r_2}{r_1} \vartheta \right.}.$$

Polarwinkel $\omega = \vartheta$, also:

$$u = \frac{1}{2 r_1 \cos \left| \frac{r_2}{r_1} \omega \right.},$$

d. h. die inverse Kurve der Summenspirale (Poinsoische Spirale).

Dieses Resultat steht im Einklang mit einem bekannten Satze¹⁾, nach welchem die polarreciproke Kurve einer Kurve invers zur Fusspunktkurve derselben ist.

29. Was die Singularitäten der Pseudotrochoiden betrifft, so besitzen sie ausser den unendlich vielen reellen Doppelpunkten auf der x -Axe noch unendlich viele Komplexe. Die Summenspiralen und Differenzspiralen haben den Ursprung zum unendlich vielfachen Punkt, doch ist von den unendlich vielen Zweigen bei den ersteren gar keiner, bei letzteren ein einziger reell. Die Paracykloiden und Hypercykloiden haben unendlich viele Spitzen, von denen aber bei den ersteren nur eine, bei letzteren gar keine reell ist. Wendepunkte sind ebenfalls unendlich viele vorhanden, aber höchstens zwei derselben sind reell (siehe Nr. 16); die letzteren können (mit einer Doppeltangente) zu einem Undulationspunkt zusammenrücken. Ausser unendlich vielen komplexen Doppeltangenten giebt es deren unendlich viele reelle, die durch den unendlich fernen Punkt der y -Axe gehen. Sie ergeben sich aus $dx = 0$ also:

$$80) \quad \operatorname{tg} \vartheta = - \frac{A}{B} \operatorname{Tg} \mu \vartheta;$$

doch führt die Wurzel $\vartheta = 0$ derselben zu keiner Doppeltangente.

30. Interessant ist noch das Verhalten der Pseudotrochoiden im Unendlichen. Nach Holst²⁾ gehen die Trochoiden durch die unendlich fernen Kreispunkte, und zwar berühren in denselben die Hypo-

1) Vergl. z. B. Mackenzie, Tables of inversion and reciprocation of a curve and its pedals. Educational Times 21, 62—63 (1874).

2) Über algebraische cykloidische Kurven. Archiv for math. og naturvidensk. 6, 125—152 (1882), bes. S. 140—141.

trochoiden die unendlich ferne Gerade, die Epitrochoiden dagegen die Asymptoten des festen Kreises. In Übereinstimmung damit liegen nach Morley¹⁾ die Brennpunkte der Hypotrochoiden im Unendlichen, diejenigen der Epitrochoiden im Ursprung. Nun verhalten sich nach Nr. 25 die Pseudotrochoiden im Unendlichen wie die logarithmischen Spiralen; letztere aber berühren die Kreisasympoten. Denn die Gleichung einer logarithmischen Spirale ist in homogenen Linienkoordinaten u, v, w :

$$\sqrt{u^2 + v^2} = w e^{\arctg \frac{v}{u}}$$

Setzt man hierin $u = 1, v = i, w = x + iy$, so erhält man:

$$x + iy = 0,$$

also durch Nullsetzen des reellen und imaginären Teils den Ursprung als Brennpunkt. Somit schliessen sich die Pseudotrochoiden in ihrem Verhalten gegenüber den unendlich fernen Kreispunkten den Epitrochoiden an.²⁾ Ein Unterschied beider Kurvenarten besteht jedoch darin, dass die Pseudotrochoiden sich mit zwei reellen Zweigen der unendlich fernen Geraden asymptotisch nähern, ohne allerdings dieselbe in einem reellen Punkte zu erreichen, während die Epitrochoiden sich der unendlich fernen Geraden nur mit imaginären Zweigen nähern.

31. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Pseudotrochoiden ein Spezialfall einer noch allgemeineren Kurvenklasse sind. Bei der Untersuchung von Trägheitsbahnen in einer rotierenden Ebene kommt nämlich Fr. Roth³⁾ auf Kurven von der allgemeinen Form:

$$81) \quad \begin{cases} x = a e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma) + a_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \gamma) \\ y = a e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) + a_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t + \gamma). \end{cases}$$

Diese gehen mit

$t = \vartheta, \quad a = a_1 = \rho, \quad \alpha = \alpha_1 = \mu, \quad \beta = \beta_1 = -1, \quad \gamma = \gamma_1 = -\lambda$
über in

$$82) \quad \begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta - \lambda) e^{\mu \vartheta} + \rho \cos(\vartheta + \lambda) e^{-\mu \vartheta} \\ y = \rho \sin(\vartheta - \lambda) e^{\mu \vartheta} + \rho \sin(\vartheta + \lambda) e^{-\mu \vartheta}. \end{cases}$$

In dieselbe Form kommen aber die Gleichungen 9), wenn man

$$R_1 - r_1 = \rho \cos \lambda, \quad R_2 - r_2 = \rho \sin \lambda$$

setzt.

1) On the epicycloid. American Journ. of Math. 13, 179—184 (1891) bes. S. 180.

2) Auch wenden die Epicykloiden und Paracykloiden ihre Spitzen dem Ursprung zu, während dieselben bei den Hypocykloiden nach aussen gerichtet sind.

3) Über die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. Repertorium der Physik 23, 1—22 (1887), bes. S. 12.

Die Kurven 81) nennt Roth Ephelix; er untersucht sie indes nicht näher, sondern begnügt sich auf ihre Vielgestaltigkeit hinzuweisen. Dagegen giebt er folgende Entstehungsweise an:¹⁾ Ein Punkt P beschreibt eine solche Kurve, indem er sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit auf einer logarithmischen Spirale bewegt, während der Pol dieser Spirale ebenfalls mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit auf einer andern logarithmischen Spirale fortschreitet. Im Falle der Pseudotrochoiden sind beide Spiralen gleichwinklige Gegenspiralen. Damit ist zugleich eine weitere Lösung der von Cesàro²⁾ gestellten Aufgabe hinsichtlich einer kinematischen Erzeugung der pseudocyclischen Kurven gefunden.

1) a. a. O. S. 14; vergl. auch Bellavitis Mem. Soc. It. 25 II 308 (1855) § 194.

2) L'Interméd. des Math. 1, 153 (1894).

Eine Determinantenformel.

VON

Prof. Dr. E. SCHULZE

in Friedenau bei Berlin.

Im sechsten Heft des 42. Jahrgangs dieser Zeitschrift ist von mir die Determinante

$$\varepsilon = \left| \sum \varepsilon_{\mu kr} a_k \right| \quad (k, \mu, r = 1, 2 \dots n)$$

behandelt worden, auf welche Weierstrass (Göttinger Nachr. 1884) bei seinen Untersuchungen über komplexe Zahlen:

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n,$$

$$\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n,$$

$$e_k \cdot e_r = \varepsilon_{1kr} e_1 + \varepsilon_{2kr} e_2 + \dots + \varepsilon_{nkr} e_n,$$

$$\alpha \cdot \beta = \sum a_k b_r \varepsilon_k e_r = \sum a_k b_r \varepsilon_{\mu kr} e_\mu = \sum c_\mu e_\mu = \gamma$$

gestossen ist; falls sie gleich Null ist, verschwindet das Produkt $\alpha \cdot \beta$, ohne dass einer seiner Faktoren verschwindet. Ich habe in der oben genannten Abhandlung nachgewiesen, dass, wenn wir α nicht als komplexe Zahl, sondern nach Dedekindscher Auffassung (Göttinger Nachrichten 1885) als n -wertige Grösse mit den n Werten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ansehen, für obige Determinante, die wir von jetzt an durch Δ_α bezeichnen wollen, die Formel gilt:

1)
$$\Delta_\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_n.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort eine andere bemerkenswerte:

2)
$$\Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta = \Delta_{\alpha\beta};$$

Denn

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = \alpha_1 \beta_1 \cdot \alpha_2 \beta_2 \cdot \dots \alpha_n \beta_n \\ &= (\alpha\beta)_1 \cdot (\alpha\beta)_2 \dots (\alpha\beta)_n = \Delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right.$$

Formel 2) ist zur Berechnung von Spezialwerten von Δ_α geeigneter als Formel 1), und mit ihr wollen wir uns in diesem Aufsatz beschäftigen. Ehe wir jedoch Anwendungen von ihr geben, soll sie nochmals ohne Zuhilfenahme von Formel 1) bewiesen werden, indem

$$C_{u\lambda} = \sum c_{\mu} \varepsilon_{u\mu\lambda},$$

oder, wenn wir für

$$C_{u\lambda} \quad \text{und} \quad c_{\mu} = \sum a_k b_r \varepsilon_{\mu k r}$$

ihre Werte einsetzen,

$$\sum a_k b_{\lambda} \varepsilon_{u k \mu} \cdot \varepsilon_{\mu r \lambda} = \sum a_k b_{\lambda} \varepsilon_{u \mu \lambda} \cdot \varepsilon_{\mu k r}$$

ist. Nun lauten die Bedingungsgleichungen, die erfüllt sein müssen, wenn bei der Multiplikation von α und β die gewöhnlichen Regeln der Multiplikation ihre Gültigkeit behalten sollen (vergl. Dedekind, Göttinger Nachrichten 1885):

$$\varepsilon_{u\mu\lambda} = \varepsilon_{u\lambda\mu}, \quad \sum \varepsilon_{u k \mu} \cdot \varepsilon_{\mu r \lambda} = \sum \varepsilon_{u \lambda \mu} \cdot \varepsilon_{\mu k r}.$$

Obige Summen stimmen hiernach Glied für Glied überein, sind also gleich, und daher ist

$$\Delta \alpha \cdot \Delta \beta = \Delta \alpha \beta.$$

Unmittelbare Folgerungen aus dieser Gleichung sind:

3)
$$\Delta \alpha \cdot \Delta \beta \cdot \Delta \gamma \cdots = \Delta_{(\alpha \beta \gamma \cdots)},$$

4)
$$(\Delta \alpha)^p = \Delta_{(\alpha^p)}$$

5)
$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta \beta} = \Delta \frac{\alpha}{\beta}.$$

Die Determinante

$$\Delta \alpha = \left| \sum \varepsilon_{\mu k r} a_k \right|$$

ist im allgemeinen von kompliziertem Bau, und deshalb sollen die Formeln 2) bis 5) nur für besonders einfache Fälle Anwendung finden, zunächst für den Fall, wo $\Delta \alpha$ doppelt orthosymmetrisch wird. Für diesen ist, wie ich in meiner vorigen Abhandlung gezeigt habe,

$$e_k = e_1^k \quad \text{und} \quad e_1^n = 1;$$

schreiben wir z statt e_1 , so ist:

6)
$$\alpha = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n; \quad z^n = 1.$$

Die n Werte von α erhalten wir, wenn wir in 6) die n n^{ten} Wurzeln der Einheit für z einsetzen.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung:

7)
$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

mit z_1, z_2, \dots, z_n , so nimmt α die Form an:

$$\alpha = a_n \cdot (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Auf diese Gleichung lässt sich Formel 3) anwenden; es ist:

$$\Delta \alpha = \Delta a_n \cdot \Delta(z - z_1) \cdot \Delta(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Weil, wie unmittelbar ersichtlich ist,

$$8) \quad \Delta(az + bz^n) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & a \\ a & b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & ab \end{vmatrix} = b^n - (-a)^n,$$

so finden wir für die doppelt orthosymmetrische Determinante die Formel:

$$9) \quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \dots a_2 a_1 \\ a_1 & a_n \dots a_3 a_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} \dots a_1 a_n \end{vmatrix} = a_n^n \cdot (1 - z_1^n)(1 - z_2^n) \dots (1 - z_n^n).$$

Diese Gleichung lehrt den Wert der Determinante kennen, sobald die Wurzeln der Gleichung 7) bekannt sind; ihre Ableitung bildet den Hauptinhalt des Aufsatzes von Wehrauch (Bd. 26 dieser Zeitschrift). Bemerken will ich, dass der eingeschlagene Weg sich nicht nur zur Berechnung der doppelt orthosymmetrischen, sondern einer ganzen Gruppe von Determinanten gangbar zeigt, nämlich derer, für welche

$$\alpha = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad F(z) = 0$$

ist; $F(z) = 0$ bedeute eine Gleichung n^{ten} Grades in Bezug auf z . Ist

$$F(z) = z^n - 1 = 0,$$

so erhalten wir die Formel 9). Ein zweites Beispiel sei:

$$\alpha = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n;$$

$$F(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = 0.$$

Die zugehörige Determinante habe ich in meiner vorigen Abhandlung S. 318 angegeben; für sie finden wir auf demselben Wege wie oben die Formel:

$$10) \quad \begin{vmatrix} -a_n & a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} \dots a_2 - a_1 \\ a_1 & -a_n & a_n - a_{n-1} \dots a_3 - a_2 \\ a_2 - a_1 & a_1 & -a_n \dots a_4 - a_3 \\ a_3 - a_2 & a_2 - a_1 & a_1 \dots a_5 - a_4 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \dots & \dots \dots a_1 - a_n \end{vmatrix} = (-a_n)^n \cdot \frac{(1 - z_1^{n+1})(1 - z_2^{n+1}) \dots (1 - z_n^{n+1})}{(1 - z_1)(1 - z_2) \dots (1 - z_n)},$$

wo z_1, z_2, \dots, z_n die Wurzeln der Gleichung 7) sind.

Ein spezieller Fall der doppelt orthosymmetrischen Determinante ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} & \lambda^{r^2} \dots \lambda^{r^{n-1}} \\ \lambda^{r^{n-1}} & \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} \dots \lambda^{r^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \lambda^{r^1} & \lambda^{r^2} & \dots \dots \lambda^{r^0} \end{vmatrix},$$

in welcher $n + 1$ eine Primzahl, λ eine der $n + 1$ ten Wurzeln der Einheit und r eine primitive Wurzel von $n + 1$ sei. Mit ihr haben sich Zehfuss (Bd. 7 dieser Zeitschrift) und Stern (Crelle Bd. 73) beschäftigt und sind zu Resultaten gekommen, die nicht ganz übereinstimmen. Nach Zehfuss ist Δ gleich

$$(n + 1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad -(n + 1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad i \cdot (n + 1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad -i \cdot (n + 1)^{\frac{n-1}{2}},$$

je nachdem n von der Form $8m - 4$, $8m$, $8m + 2$ oder $8m - 2$ ist. Nach Stern dagegen ist Δ gleich

$$\left(\frac{k}{n+1}\right)(n+1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{oder gleich} \quad -\left(\frac{k}{n+1}\right)i \cdot (n+1)^{\frac{n-1}{2}},$$

je nachdem n gleich $4m$ oder gleich $4m + 2$ ist; $\left(\frac{k}{n+1}\right)$ ist das Legendresche Zeichen und k ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\lambda = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}.$$

Schon eine flüchtige Betrachtung zeigt die Ungenauigkeit der Zehfusschen Formel; in ihr bleibt unberücksichtigt, welcher unter den $n + 1$ Werten für λ zu wählen ist. Ist z. B. $n + 1 = 3$, so liefert die Zehfussche Formel $\Delta = +i\sqrt{3}$. Da $r = 2$ die einzige primitive Wurzel ist, so ist $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} \\ \lambda^{r^1} & \lambda^{r^0} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^4$; thatsächlich ist also

$$\Delta = -i\sqrt{3} \quad \text{für} \quad \lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{und} \quad \Delta = +i\sqrt{3} \quad \text{für} \quad \lambda = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Stern berücksichtigt diese Verschiedenheit; nach ihm ist $\Delta = -\left(\frac{k}{3}\right)i\sqrt{3}$ d. h. $= \mp i\sqrt{3}$, je nachdem $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oder $\lambda = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ ist.

Bezeichnen wir die Determinante, in welcher λ den Wert $\lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}$ annimmt, mit $\Delta^{(k)}$, so lässt sich leicht zeigen, dass $\Delta^{(k)} = \left(\frac{k}{n+1}\right) \Delta^{(1)}$ ist. Denn setzen wir $k \equiv r^\mu \pmod{n+1}$, so ist, da $\lambda_k = \lambda_1^k$ ist:

$$\Delta^{(k)} = \begin{vmatrix} (\lambda_1^k)^{r^0} & (\lambda_1^k)^{r^1} & \dots & (\lambda_1^k)^{r^{n-1}} \\ (\lambda_1^k)^{r^{n-1}} & (\lambda_1^k)^{r^0} & \dots & (\lambda_1^k)^{r^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^k)^{r^1} & (\lambda_1^k)^{r^2} & \dots & (\lambda_1^k)^{r^0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^{r^\mu} & \lambda_1^{r^{\mu+1}} & \dots & \lambda_1^{r^\mu} \lambda^{r^2} \dots \lambda^{r^\mu-1} \\ \lambda^{r^\mu-1} & \lambda^{r^\mu} & \dots & \dots \lambda^{r^\mu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{r^\mu+1} & \lambda^{r^\mu+2} & \dots & \dots \lambda^{r^\mu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu \cdot (n-1)} \begin{vmatrix} \lambda_1^{r^0} & \lambda_1^{r^1} & \dots & \lambda_1^{r^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r^1} & \lambda_1^{r^2} & \dots & \lambda_1^{r^0} \end{vmatrix} = (-1)^{\mu(n-1)} \Delta^{(1)} = (-1)^\mu \Delta^{(1)}.$$

Weil $\left(\frac{k}{n+1}\right) = \left(\frac{r^\mu}{n+1}\right) = \left(\frac{r}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{r}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{r}{n+1}\right) \dots$

und jede primitive Wurzel r von $n + 1$ ein quadratischer Nichtrest ist, so ist $\left(\frac{k}{n+1}\right) = \pm 1$, je nachdem μ gerade oder ungerade ist, folglich ist

$$\Delta^{(k)} = \left(\frac{k}{n+1}\right) \Delta^{(1)}.$$

Wir wenden uns jetzt dazu, den Wert von $\Delta^{(k)}$ mittelst der Formel 2) abzuleiten. Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lambda^{r^{n-1}} z + \lambda^{r^{n-2}} z^2 + \dots + \lambda^{r^0} z^n = \sum_1^n \rho \lambda^{r^{n-\rho}} z^\rho \\ \beta &= \lambda^{r^1} z + \lambda^{r^2} z^2 + \dots + \lambda^{r^n} z^n = \sum_1^n \sigma \lambda^{r^\sigma} z^\sigma \end{aligned} \right\} z^n = 1,$$

so ist:

$$\Delta \beta = \begin{vmatrix} \lambda^{r^n} & \lambda^{r^{n-1}} & \dots & \lambda^{r^2} & \lambda^{r^1} \\ \lambda^{r^1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{r^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{r^{n-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} & \lambda^{r^2} & \dots & \lambda^{r^{n-1}} \\ \lambda^{r^{n-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{r^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{r^1} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \Delta \alpha,$$

folglich $\Delta \alpha \cdot \Delta \beta = (\Delta \alpha)^2$. Um $\Delta \alpha \beta$ zu bilden, multiplizieren wir α mit β und finden:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_1^n \sum_{\rho, \sigma} \lambda^{r^{n-\rho}} \lambda^{r^\sigma} z^{\rho+\sigma} = \sum_1^n \tau z^\tau \left(\sum_1^n \sigma (\lambda^{1+r^{n-\tau}})^{\rho^\sigma} \right)$$

$\lambda^{1+r^{n-\tau}}$ ist eine der $n+1$ ten Wurzeln der Einheit, etwa gleich λ_p . Weil r eine primitive Wurzel von $n+1$ ist, so ist

$$\sum (\lambda^{1+r^{n-\tau}})^{\rho^\sigma} = \lambda_p^1 + \lambda_p^2 + \dots + \lambda_p^n.$$

Diese Summe ist gleich -1 , ausgenommen den Fall $\lambda_p = 1$, wofür die Summe gleich n ist; dieser Fall tritt ein für $\tau = \frac{n}{2}$, denn da, wie aus der Zahlentheorie bekannt ist,

$$r^{\frac{n}{2}} \equiv -1 \pmod{n+1}$$

ist, so ist für $\tau = \frac{n}{2}$ $\lambda^{1+r^{n-\tau}} = \lambda^{1+r^{\frac{n}{2}}} = \lambda^0 = 1$.

Hiernach ist

$$\alpha \cdot \beta = -z - z^2 - z^3 - \dots + n z^{\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}+1} - \dots - z^n; \quad z^n = 1.$$

$$\Delta \alpha \beta = (\alpha \beta)_1 \cdot (\alpha \beta)_2 \cdot \dots \cdot (\alpha \beta)_n$$

nach Formel 1). Nun ist

$(\alpha \beta)_1 = -(n+1)$, $(\alpha \beta)_2 = n+1$, $(\alpha \beta)_3 = -(n+1)$; \dots $(\alpha \beta)_n = 1$,
daher ist

$$\Delta \alpha \beta = (-1)^{\frac{n}{2}} (n+1)^{n-1}.$$

Wenden wir jetzt die Formel 2) an, so ist:

$$\Delta \alpha \beta = \Delta \alpha \cdot \Delta \beta = (\Delta \alpha)^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1)^{n-1}.$$

Für $n = 4m + 2$ ist: $(\Delta \alpha)^2 = -(n+1)^{n-1}$.

Für $n = 4m$ ist: $(\Delta \alpha)^2 = +(n+1)^{n-1}$.

Bisher ist λ als eine beliebige $n+1$ te Wurzel der Einheit vorausgesetzt; jetzt habe λ den Wert $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$, dann ist der entsprechende Wert $\Delta^{(1)}$ von $\Delta\alpha$

für $n = 4m + 2$:
$$\Delta^{(1)} = c_1 \cdot (n+1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot i,$$

für $n = 4m$:
$$\Delta^{(1)} = c_2 \cdot (n+1)^{\frac{n-1}{2}}$$

c_1 und c_2 sind entweder gleich $+1$ oder gleich -1 . Um zu entscheiden, welcher von beiden Werten der richtige ist, wählen wir spezielle Fälle.

Für $n = 2$ ergibt die direkte Berechnung:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} \\ \lambda^{r^1} & \lambda^{r^0} \end{vmatrix} = -3^{\frac{1}{2}} \cdot i;$$

c_1 ist also gleich -1 zu setzen. Nach der Formel

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = a_1^4 - a_2^4 + a_3^4 - a_0^4 - 4a_0a_2(a_1^2 + a_3^2) + 4a_1a_3(a_0^2 + a_2^2) + 2a_0^2a_2^2 - 2a_1^2a_3^2$$

finden wir für $n = 4$:
$$\begin{vmatrix} \lambda^{r^0} & \lambda^{r^1} & \dots & \lambda^{r^3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^{r^1} & \cdot & \cdot & \lambda^{r^0} \end{vmatrix} = +5^{\frac{3}{2}};$$

c_2 ist also gleich $+1$ zu setzen.

Berücksichtigen wir noch die bereits bewiesene Gleichung

$$\Delta^{(k)} = \binom{k}{n+1} \Delta^{(1)},$$

so ergibt sich die mit der Sternschen übereinstimmende Formel:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_k^{r^0} & \lambda_k^{r^1} & \dots & \lambda_k^{r^{n-1}} \\ \lambda_k^{r^{n-1}} & \lambda_k^{r^0} & \dots & \lambda_k^{r^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_k^{r^1} & \cdot & \cdot & \lambda_k^{r^0} \end{vmatrix} &= \binom{k}{n+1} (n+1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } n = 4m, \\ &= -\binom{k}{n+1} (n+1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot i & \text{für } n = 4m + 2. \end{aligned} \right\}$$

In den bisherigen Beispielen wurden die Formeln 2) und 3) angewendet; jetzt möge auch die Verwendbarkeit der Formeln 4) und 5) an einigen Beispielen gezeigt werden.

Es sei $\alpha = bz + az^n$, $z^n = 1$, so ist:

$$\alpha^{n-1} = b^{n-1}z^{n-1} + \binom{n-1}{1} b^{n-2} a z^{n-2} + \binom{n-1}{2} b^{n-3} a^2 z^{n-3} + \dots + \binom{n-1}{n-2} b a^{n-2} z + a^{n-1} z^n.$$

Beachten wir, dass nach Formel 4) $\Delta(\alpha^{n-1}) = (\Delta\alpha)^{n-1}$ und nach Formel 8) $\Delta\alpha = a^n - (-b)^n$ ist, so erhalten wir, wenn wir noch $m = n - 1$ setzen:

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{0} a^m & \binom{m}{1} a^{m-1} b & \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 & \dots & \binom{m}{m-1} a b^{m-1} & \binom{m}{m} b^m \\ \binom{m}{m} b^m & \binom{m}{0} a^m & \binom{m}{1} a^{m-1} b & \dots & \dots & \binom{m}{m-1} a b^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m}{1} a^{m-1} b & \dots & \dots & \dots & \binom{m}{m} b^m & \binom{m}{0} a^m \end{vmatrix} = [a^{m+1} - (-b)^{m+1}]^m.$$

Für $a = b = 1$ ist:

$$\left. \begin{matrix} \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{m} \\ \binom{m}{m} & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \dots & \binom{m}{0} \end{vmatrix} = 2^m \\ \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \dots & \binom{m}{0} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} m \text{ gerade} \\ \text{je nachdem} \\ m \text{ ungerade} \end{matrix} \text{ ist.}$$

In ähnlicher Weise lässt sich der Wert folgender Determinante angeben, die einen besonderen Fall der in Formel 10) angegebenen einfach orthosymmetrischen Determinante darstellt:

$$\begin{vmatrix} -\binom{m}{0} a^m & a^{m-1} \cdot \left[\binom{m}{0} a - \binom{m}{1} b \right] & a^{m-2} b \cdot \left[\binom{m}{1} a - \binom{m}{2} b \right] & \dots & a b^{m-1} \left[\binom{m}{m-1} a - \binom{m}{m} b \right] \\ \binom{m}{m} b^m & -\binom{m}{0} a^m & a^{m-1} \left[\binom{m}{0} a - \binom{m}{1} b \right] & \dots & a^2 b^{m-2} \left[\binom{m}{m-2} a - \binom{m}{m-1} b \right] \\ a b^{m-1} \left[\binom{m}{m-1} a - \binom{m}{m} b \right] & \binom{m}{m} b^m & -\binom{m}{0} a^m & \dots & a^3 b^{m-3} \left[\binom{m}{m-3} a - \binom{m}{m-2} b \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{m-1} b \left[\binom{m}{1} a - \binom{m}{2} b \right] & \dots & \dots & \dots & -\binom{m}{0} a^m \end{vmatrix} = - \left(\frac{(-a)^{m+2} - b^{m+2}}{a+b} \right)^m.$$

Für $a = b = 1$ ist:

$$\left. \begin{matrix} \begin{vmatrix} -\binom{m}{0} & \left[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} \right] & \left[\binom{m}{1} - \binom{m}{2} \right] & \dots & \left[\binom{m}{m-1} - \binom{m}{m} \right] \\ \binom{m}{m} & -\binom{m}{0} & \left[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} \right] & \dots & \left[\binom{m}{m-2} - \binom{m}{m-1} \right] \\ \left[\binom{m}{m-1} - \binom{m}{m} \right] & \binom{m}{m} & -\binom{m}{0} & \dots & \left[\binom{m}{m-3} - \binom{m}{m-2} \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[\binom{m}{1} - \binom{m}{2} \right] & \dots & \dots & \dots & -\binom{m}{0} \end{vmatrix} = 0 \\ \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[\binom{m}{1} - \binom{m}{2} \right] & \dots & \dots & \dots & -\binom{m}{0} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{je} \\ \text{nach-} \\ \text{dem} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} m \text{ gerade} \\ m \text{ ungerade} \end{matrix} \right. \text{ ist}$$

Formel 5) lässt sich in folgenden Beispielen verwenden:

Es sei $\alpha = az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \dots + a^n z^n$, $z^n - 1 = 0$, so ist

$$\alpha = \frac{(1-a^n)z^n}{1-az}$$

und daher nach Formel 5):

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta(1-a^n)z^n}{\Delta(1-az)}$$

Mit Benutzung von Formel 8) finden wir:

$$\begin{vmatrix} a^n & a^{n-1} & \dots & a^2 & a \\ a & a^n & \dots & \dots & a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & \dots & \dots & \dots & a^n \end{vmatrix} = (1 - a^n)^{n-1}.$$

Ebenso erhalten wir für $\alpha = az + a^2z^2 + \dots + a^nz^n$, $\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 0$,

$$\begin{vmatrix} -a^n & a^n - a^{n-1} & a^{n-1} - a^{n-2} & \dots & a^2 - a^1 \\ a^1 & -a^n & a^n - a^{n-1} & \dots & a^3 - a^2 \\ a^2 - a^1 & a^1 & -a^n & \dots & a^4 - a^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} - a^{n-2} & \dots & \dots & \dots & -a^n \end{vmatrix} = (-a)^n \cdot \frac{(1 - a^{n(n+1)})(1 - a)}{(1 - a^n)(1 - a^{n+1})}.$$

Ist $\alpha = 1 + 2az + 3a^2z^2 + \dots + na^{n-1}z^{n-1}$, $z^n - 1 = 0$, so lässt sich α in die Form bringen:

$$\alpha = \frac{n \cdot a^{n+1}z - [(n+1)a^n - 1] \cdot z^n}{(1 - az)^2}$$

und daher ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{(1 - (n+1)a^n)^n - (-na^{n+1})^n}{(1 - a^n)^2}.$$

Für $a=1$ nimmt die Determinante den Wert $\frac{0}{0}$ an; bestimmen wir diesen nach den bekannten Regeln, so finden wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-n)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Zur Bestimmung der Axe der Schraubung, durch die ein starrer Körper aus einer gegebenen Lage in eine zweite gebracht werden kann.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

Der Umstand, dass noch in neueren Lehrbüchern, z. B. dem der darstellenden Geometrie von Rohn und Papperitz (2. Bd. S. 80, 1896), für die in der Überschrift genannte Aufgabe unnötig verwickelte Lösungen gegeben werden, veranlasst mich an eine Konstruktion zu erinnern, die ich 1883 im „Civilingenieur“, einer allerdings von Mathematikern wenig gelesenen und jetzt eingegangenen Zeitschrift, mitgeteilt habe.

Ist abc ein dem Körper angehöriges Dreieck in seiner ersten Lage, $a_1 b_1 c_1$ dasselbe Dreieck in der zweiten Lage, und werden durch einen beliebigen Punkt o drei Strecken oa_2, ob_2, oc_2 beziehentlich von gleicher Länge und Richtung mit den Strecken aa_1, bb_1, cc_1 gezogen, so giebt bekanntlich das von o auf die Ebene $a_2 b_2 c_2$ gefällte Lot, dessen Fusspunkt p_2 heissen möge, die Richtung der gesuchten Schraubenaxe an. Soweit stimmen die meisten Lösungen überein. Um die Lage der Axe zu finden, genügt es nun, in der Ebene von abc den Punkt p , oder in der Ebene von $a_1 b_1 c_1$ den Punkt p_1 so zu bestimmen, dass er mit abc bzw. $a_1 b_1 c_1$ ein zu $a_2 b_2 c_2 p_2$ affines Viereck bildet.* Diese Punkte sind nämlich die Spuren der Axe mit den Ebenen von abc und $a_1 b_1 c_1$.

Auf ähnliche Weise erhält man die Centralaxe des Geschwindigkeitsystems eines starren Körpers, wenn die Geschwindigkeiten dreier Punkte desselben nach Länge und Richtung gegeben sind.

Es beruht diese Konstruktion auf dem a. a. O. S. 491 von mir in anderer Form aufgestellten, in der Kinematik oft recht nützlichen Satze: Trägt man von einem und demselben Punkte Strecken ab, die den Strecken von den Punkten eines Systems Σ nach den entsprechenden Punkten eines mit letzterem affinen Systems Σ_1 nach Länge und Richtung gleich sind, so bilden deren Endpunkte ein ebenfalls mit Σ affines System Σ_2 .**

* Eine mit Probe verbundene Ausführung besteht z. B. darin, dass man durch die Ecken des Dreiecks abc bzw. $a_1 b_1 c_1$ Transversalen zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten in denselben Verhältnissen teilen, in denen die entsprechenden Seiten von $a_2 b_2 c_2$ durch die nach p_2 gezogenen Ecktransversalen des letzteren Dreiecks geteilt werden. Die erstgenannten Transversalen schneiden sich in p bzw. p_1 .

** Es artet Σ_2 in ein ebenes System oder einen Punkt aus, wenn Σ und Σ_1 (direkt-)kongruente räumliche Systeme sind. Herr Lüroth macht mich darauf aufmerksam, dass nach Carl Neumann, Math. Ann. Bd. 1, S. 207, Σ_2 entweder wieder ein räumliches System ist oder in eine gerade Punktreihe ausartet, wenn Σ und Σ_1 symmetrische (invers-kongruente) räumliche Systeme sind. In seiner Arbeit im letzten Bande dieser Zeitschrift S. 243 flg. betrachtet Herr Lüroth für den Fall, dass Σ und Σ_1 kongruent oder symmetrisch sind, das (übrigens auch zu Σ affine) System Σ_m , gebildet aus den Mittelpunkten der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte von Σ und Σ_1 ; bei diesem Systeme ist es nach Herrn Lüroth's Ergebnissen gerade umgekehrt, wie bei Σ_2 .

Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. HANS LORENZ

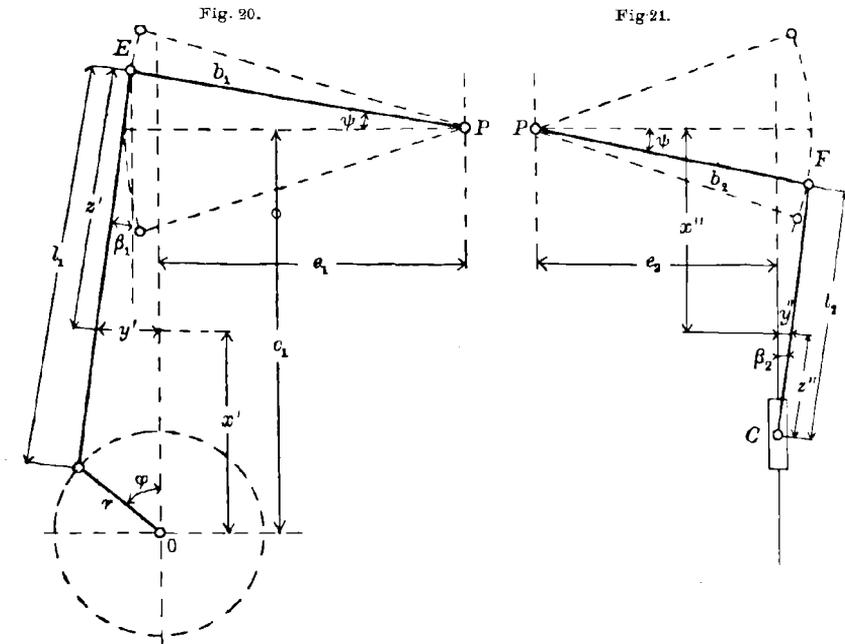
in Halle a. S.

Fortsetzung.

7. Die Bewegungen im Balanciergetriebe. Schon in der Vorbemerkung wurde hervorgehoben, dass das Balanciergetriebe in seiner Bedeutung weit hinter dem einfacheren Schubkurbelgetriebe zurücktritt. Seine praktische Verwendung beschränkt sich z. Z. auf die Vermittelung des Antriebes entweder unterirdischer vertikalstehender Pumpen (sogenannter Schachtpumpen) durch obertags befindliche Dampfzylinder, wobei man das ganze System als eine oberirdische Wasserhaltung zu bezeichnen pflegt, oder von Kondensatorpumpen und Steuerungsorganen an stationären Dampfmaschinen. Die bis in die Mitte des Jahrhunderts häufige Anwendung dieses Getriebes zur Energieübertragung vom Dampfzylinder auf die Kurbelwelle meist unter Einschaltung eines sogenannten Lenkers zur Geradföhrung der Kolbenstange (nach der Anwendung von James Watt) ist infolge des Überganges zu schnellgehenden Maschinen vollständig ausser Gebrauch gekommen. Während nun die Verbindung des einen Endpunktes des Balanciers mit dem Gleitstück des treibenden oder auch angetriebenen Kolbens bezw. Schiebers jetzt fast ausschliesslich durch eine Schubstange hergestellt wird, so kann doch das andere Ende mit der Kurbel ausser auf demselben Wege auch indirekt, und zwar vermittelt eines am Kreuzkopf oder sonst einem Punkte der Kolbenstange eines anderen Getriebes drehbar angebrachten Hebels verbunden werden. Alsdann haben wir es mit zwei durch den Balancier verbundenen Gleitstücken zu thun, von denen das eine z. B. zugleich einem Schubkurbelgetriebe angehört.

Daraus geht aber hervor, dass wir jedes der praktisch vorkommenden Balanciergetriebe in zwei Mechanismen auflösen können, die für sich nur Verallgemeinerungen des gewöhnlichen, schon oben betrachteten Schubkurbelgetriebes darstellen. Ersetzen wir nämlich in demselben die geradlinige Bewegung der Gleitstückes durch eine

schwingende um den Punkt P , so erhalten wir das in Fig. 20 dargestellte Getriebe, welches offenbar identisch ist mit der linken Seite des in Fig. 3 skizzierten Mechanismus. Ebenso ergibt sich, durch Vergrößerung des Kurbelradius im Verhältnis zur Schubstange und Verlegung der Bewegungsrichtung des Gleitstückes aus dem Schubkurbelgetriebe die durch Fig. 21 dargestellte und mit der rechten Seite von Fig. 3 identische Form. Die Verbindung beider Getriebe durch starre Verknüpfung von EP in Fig. 20 mit PF in Fig. 21 kann übrigens in einem beliebigen, dem praktischen Bedürfnisse angepassten Winkel geschehen, sodass durchaus nicht die drei Punkte E , P und F



in einer Geraden zu liegen brauchen. Auf die später zu betrachtenden Komponenten der Massendrücke hat natürlich dieser Winkel einen nicht unerheblichen Einfluss.

Wir gehen zunächst über zur Ermittlung der Bewegungsgesetze der beiden Mechanismen Fig. 20 und 21 und bezeichnen den horizontalen Abstand des Balancierdrehpunktes P von der Mitte der Kurbelwelle in Fig. 20 mit e_1 , von der Gleitbahn in Fig. 21 mit e_2 , die Länge der beiden Hebelarme bezw. mit b_1 und b_2 sowie den Vertikalabstand des Punktes P von O bzw. der Hubmitte des Gleitstückes C mit c_1 und c_2 . Die beiden Schubstangen haben die Länge l_1 und l_2 , ihr gemeinsamer Ausschlagwinkel aus der Mittellage sei ψ . Der Kurbelradius sei wieder r , der Ausschlagswinkel gegen die Vertikale, welche

hier indessen nicht die Totlage zu bezeichnen braucht, φ , ebenso sei in Fig. 21 positiv nach unten gerechnet die Entfernung des Gleitstückes C aus seiner Mittellage. Bezeichnen wir ferner mit β_1 und β_2 die veränderlichen Ausschlagswinkel der Schubstangen gegen die Vertikalen, so erhalten wir für das Getriebe Fig. 20 die Gleichungen

$$77) \quad b_1 \sin \psi + c_1 = r \cos \varphi + l_1 \cos \beta_1,$$

$$78) \quad l_1 \sin \beta_1 = r \sin \varphi + (e_1 - b_1 \cos \psi).$$

Da nun die weitere Verfolgung dieser allgemein gültigen Gleichungen auf sehr grosse analytische Schwierigkeiten stösst, welche überdies in keinem Verhältnis zur Bedeutung dieser Getriebegattung steht, so wollen wir sogleich die der Praxis entsprechenden Annahmen machen, dass einerseits sowohl der Hebelarm b_1 , wie auch die Schubstange l_1 sehr lang im Verhältnis zum Kurbelradius ausfallen, während andererseits der Abstand e_1 nur wenig von der Armlänge b_1 sich unterscheidet. Dies hat zur Folge, dass der vom Punkte E beschriebene Bogen ziemlich flach und die horizontale Abweichung desselben von der Vertikalen durch O , die wir der Kürze halber

$$79) \quad e_1 - b_1 \cos \psi = y$$

setzen wollen, sehr klein ausfällt. Mit dieser Abkürzung folgt aus 78)

$$80) \quad \cos \beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l_1} \sin \varphi + \frac{y}{l_1} \right)^2}$$

oder, wenn wir den Wurzelausdruck in einer Reihe entwickeln und die höheren Potenzen der Klammer wie in § 1 vernachlässigen,

$$80a) \quad \cos \beta_1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l_1} \sin \varphi + \frac{y}{l_1} \right)^2.$$

Eine weitere Vernachlässigung ergibt sich hierin noch durch die Kleinheit von y gegen l_1 , sodass wir genügend genau haben

$$80b) \quad \cos \beta_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l_1^2} \sin^2 \varphi - \frac{ry}{l_1^2} \sin \varphi.$$

Die Abweichung y lässt sich weiterhin in erster Annäherung dadurch bestimmen, dass man in 77) $l_1 \cos \beta_1 = c_1$ setzt, woraus

$$b_1 \sin \psi = r \cos \varphi,$$

also

$$81) \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{b_1^2} \cos^2 \varphi} = 1 - \frac{r^2}{2b_1^2} \cos^2 \varphi$$

folgt. Damit aber wird aus 79) angenähert

$$79a) \quad y = e_1 - b_1 + \frac{r^2}{2b_1} \cos^2 \varphi = e_1 - b_1 + \frac{r^2}{2b_1} - \frac{r^2}{2b_1} \sin^2 \varphi$$

und schliesslich aus 80b)

$$80c) \quad \begin{cases} \cos \beta_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l_1^2} \sin^2 \varphi - \frac{r}{l_1^2} \left(e_1 - b_1 + \frac{r^2}{2b_1} \right) \sin \varphi \\ \quad \quad \quad + \frac{r^3}{2b_1 l_1^2} \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

Hierin verschwindet das mit $\sin \varphi$ behaftete Glied, wenn

$$82) \quad e_1 - b_1 + \frac{r^2}{2b_1} = 0$$

wird, woraus wir zweckmässig die Länge des Hebelarmes b_1 bei gegebenem e_1 und r bestimmen. Führen wir den so vereinfachten Ausdruck 80c) in Gleichung 77) ein und setzen ferner

$$83) \quad l_1 = c_1,$$

so erhalten wir als hinreichend genaue Näherungsgleichung für die Abhängigkeit des Ausschwingungswinkels ψ des Balanciers von Kurbelwinkel φ

$$84) \quad \sin \psi = \frac{r}{b_1} \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{r}{l_1} \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{2b_1 l_1} \sin^3 \varphi \right).$$

Diese Formel, deren Gültigkeit, wie besonders hervorgehoben werden muss, durch die beiden die Hauptdimensionen des Getriebes bestimmenden Gleichungen 82) und 83) beschränkt ist, unterscheidet sich in ihrem Aufbau von der für das einfache Schubkurbelgetriebe aufgestellten 1c) nur durch das Hinzutreten eines mit $\sin^3 \varphi$ behafteten Gliedes; um die Bewegung eines beliebigen Punktes des Balanciers durch dieselbe auszudrücken, hat man sie nur beidseitig mit dem Abstände z_0 zu derselben vom Drehpunkte P zu multiplizieren.

Die Geschwindigkeit eines solchen Punktes in vertikaler, bezw. horizontaler Richtung ergibt sich demnach unter Einführung der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon$ einfach aus

$$85) \quad w_x = z_0 \varepsilon \cos \psi \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} \quad \text{und} \quad w_y = -z_0 \varepsilon \sin \psi \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Die erste dieser beiden Formeln ergibt mit 84)

$$86) \quad w_x = -z_0 \frac{r}{b_1} \varepsilon \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3r^2}{4b_1 l_1} \sin 2\varphi \right).$$

Für die Auswertung der zweiten Formel 85) wollen wir uns, da die Horizontalbewegungen der einzelnen Balancierpunkte nicht nur sehr klein, sondern auch von sehr untergeordneter Bedeutung für unsere weiteren Untersuchungen sind, mit der Differentiation der (allerdings sehr rohen) Annäherung 81) begnügen und erhalten somit

$$87) \quad w_y = \frac{z_0 r^2}{2b_1^2} \varepsilon \sin 2\varphi$$

einen Betrag von derselben Ordnung, wie das dritte Glied der Klammer in Gleichung 86).

Durch weitere Differentiation folgen hieraus die Beschleunigungen und zwar zunächst

$$88) \left\{ \begin{aligned} \frac{dw_x}{dt} &= -z_0 \frac{r}{b_1} \varepsilon^2 \left\{ \cos \varphi + \frac{r}{l_1} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{r^2}{b_1 l_1} (\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi) \right\} \\ &- z_0 \frac{r}{b_1} \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r^2}{b_1 l_1} \sin 2\varphi \right) \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Aus 87) erhalten wir dagegen die andere Beschleunigungskomponente zu

$$89) \quad \frac{dw_y}{dt} = \frac{z_0 r^2}{b_1^2} \left(\varepsilon^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \right).$$

Das Bewegungsgesetz der einzelnen Punkte der Schubstange im Abstände z' vom Balancierende E ergibt sich, wenn wir die momentane Auslenkung eines solchen Punktes aus der Vertikalen durch O mit y' und die zugehörige, ebenfalls auf O bezogene Abscisse mit x' bezeichnen, aus den Gleichungen

$$90) \quad x' = r \cos \varphi + (l_1 - z') \cos \beta_1$$

$$91) \quad y' = z' \sin \beta_1 - (e_1 - b_1 \cos \psi).$$

Ersetzen wir in diesen Formeln $\cos \beta_1$ durch den Annäherungswert 80c) unter Berücksichtigung von 82) und 83), sowie $\sin \beta_1$ mit Hilfe von Gleichung 78), so haben wir

$$90a) \quad x' = r \cos \varphi + (l_1 - z') \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l_1^2} \sin^2 \varphi + \frac{r^3}{2 b_1 l_1} \sin^3 \varphi \right),$$

$$91a) \quad y' = \frac{z' r}{l_1} \sin \varphi - \frac{l_1 - z'}{l_1} (e_1 - b_1 \cos \psi).$$

Man erkennt, dass auch diese Formeln sich von 6) bzw. 6a) und 7), welche für die Stangenbewegung des gewöhnlichen Schubkurbelgetriebes galten, und durch je ein hinzutretendes Glied unterscheiden. Gleichung 91a) kann überdies, der Kleinheit der hierdurch ausgedrückten Bewegungen entsprechend, noch durch die schon benützte Annäherungsformel 81) vereinfacht werden. Wir erhalten alsdann, indem wir noch 82) berücksichtigen,

$$91b) \quad y' = \frac{z' r}{l_1} \sin \varphi + \frac{l_1 - z'}{2 l_1} \frac{r^2}{b_1} \sin^2 \varphi.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Schubstangenpunkte sind dann

$$92) \quad \frac{dx'}{dt} = -r \varepsilon \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{l_1 - z'}{l_1} \frac{r}{l_1} (\cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r}{b_1} \sin 2\varphi) \right\}$$

$$93) \quad \frac{dy'}{dt} = r \varepsilon \left(\frac{z'}{l_1} \cos \varphi + \frac{l_1 - z'}{2 l_1} \frac{r}{b_1} \sin 2\varphi \right).$$

Für $z' = 0$ stimmen diese Formeln mit den entsprechenden für den Balancierendpunkt E , welche sich aus 86) bzw. 87) mit $z_0 = b_1$ ergeben, naturgemäss überein. Dasselbe gilt natürlich auch von den entsprechenden Beschleunigungskomponenten, welche für die Schubstangenpunkte aus 92) und 93) sich ergeben.

$$94) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -r \varepsilon^2 \left\{ \cos \varphi + \frac{l_1 - z'}{l_1} \frac{r}{l_1} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{l_1 - z'}{l_1^2} \frac{r^2}{b_1} (\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi) \right\} \\ &\quad - r \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{l_1 - z'}{l_1} \frac{r}{l_1} \left(\cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r}{b_1} \sin 2\varphi \right) \right\} \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned} \right.$$

$$95) \frac{d^2 y'}{dt^2} = -r \varepsilon^2 \left(\frac{z'}{l_1} \sin \varphi - \frac{l_1 - z'}{l_1} \frac{r}{b_1} \cos 2\varphi \right) + r \left(\frac{z'}{l_1} \cos \varphi + \frac{l_1 - z'}{2l_1} \frac{r}{b_1} \sin 2\varphi \right) \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Aus der ganzen vorstehenden Entwicklung ergeben sich mithin Formeln für das Balanciergetriebe Fig. 20, welche sich von denjenigen des einfachen Schubkurbelgetriebes nur durch je ein Zusatzglied mit dem Hebelarm b_1 im Nenner unterscheiden. Ist dieser Hebelarm ebenso wie die Schubstangenlänge l_1 gross gegen den Kurbelradius, so wird man auch dieses Zusatzglied unbedenklich vernachlässigen können. Dies trifft u. a. zu für die Balanciers der Wasserhaltungsmaschinen, nicht aber für die zum Antrieb von Kondensationsluftpumpen an stationären oder Schiffsdampfmaschinen gebräuchlichen Doppelhebel.

Wir gehen nunmehr über zu dem in Fig. 21 dargestellten Getriebe, welches die Verbindung des Balanciers mit einer Geradföhrung durch eine Schubstange l_2 darstellt, und wollen sogleich die Bewegung der einzelnen Schubstangenpunkte untersuchen, aus der sich dann diejenige des Gleitstückes C ohne weiteres ergeben muss. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit x'' die momentane Entfernung eines Schubstangenpunktes (mit dem Abstände 2 von C) von der Mittellage des Hebels b_2 und mit y'' seinen Abstand von der Bewegungsrichtung des Gleitstückes. Alsdann ergibt sich mit Hilfe unserer schon oben erklärten Bezeichnungen

$$96) \quad x'' = b_2 \sin \psi + (l_2 - z'') \cos \beta_2$$

$$97) \quad y'' = b_2 \cos \psi - e_2 - (l_2 - z'') \sin \beta_2 = z'' \sin \beta_2.$$

Für $z'' = 0$ wird auch $y'' = 0$, also ist

$$98) \quad l_2 \sin \beta_2 = b_2 \cos \psi - e_2$$

und daraus angenähert

$$99) \quad \cos \beta_2 = 1 - \frac{1}{2l_2^2} (b_2 \cos \psi - e_2)^2.$$

Setzen wir nunmehr voraus, dass unser Getriebe mit dem vorhin betrachteten durch den Balancier fest verbunden ist, so ist der Winkel ψ beiden gemeinsam und die oben ermittelte Abhängigkeit desselben vom Kurbelwinkel φ in unsere neuen Formeln einzuföhren. Wir können darum auch hier wieder von der Annäherung 81) Gebrauch machen und haben somit

$$99a) \quad \begin{cases} \cos \beta_2 = 1 - \frac{1}{2l_2^2} \left(b_2 - e_2 - \frac{b_2 r^2}{2b_1^2} \cos^2 \varphi \right)^2 \\ = 1 - \frac{1}{2l_2^2} \left(b_2 - e_2 - \frac{b_2 r^2}{2b_1^2} + \frac{b_2 r^2}{2b_1^2} \sin^2 \varphi \right)^2. \end{cases}$$

Wählen wir analog 82) den Abstand e_2 der Bewegungsrichtung des Gleitstückes vom Balancierdrehpunkte so, dass

$$100) \quad b_2 \left(1 - \frac{r^2}{2b_1^2} \right) = e_2$$

wird, so vereinfacht sich unsere Gleichung 99a) in

$$99b) \quad \cos \beta_2 = 1 - \frac{1}{8} \frac{b_2^2}{l_2^2} \frac{r^4}{b_1^4} \sin^4 \varphi.$$

Mit dieser Annäherung, die übrigens in den meisten praktischen Fällen unmittelbar durch $\cos \beta_2 = 1$ ersetzt werden kann, sowie durch Elimination des Winkels ψ mit Hilfe der Gleichung 84) bzw. 81) gehen dann unsere Formeln 96) und 97) über in

$$96a) \quad \begin{cases} x'' = r \frac{b_2}{b_1} \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{r}{l_1} \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{2b_1 l_1} \sin^3 \varphi \right) \\ + (l_2 - z'') \left(1 - \frac{1}{8} \frac{b_2^2}{l_2^2} \frac{r^4}{b_1^4} \sin^4 \varphi \right) \end{cases}$$

$$97a) \quad y'' = \frac{z''}{l_2} \frac{b_2 r^2}{2b_1^2} \sin^2 \varphi.$$

Die Gültigkeit dieser Formeln ist übrigens, wie ausdrücklich noch betont werden muss, an die beiden Bedingungen 82) und 100) für die Abstände e_1 und e_2 geknüpft; indessen lassen sich dieselben stets allen praktischen Anforderungen anpassen. Für $z'' = 0$ folgt aus 96a) die Bewegung des Gleitstückes C , für welches naturgemäss in allen Lagen y'' verschwinden muss.

Die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Schubstangenpunkte sind nunmehr, wenn wir die mit $r^4 : b_1^4$ behafteten Glieder vernachlässigen:

$$101) \quad \frac{dx''}{dt} = -r \varepsilon \frac{b_2}{b_1} \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r^2}{b_1 l_1} \sin 2\varphi \right),$$

$$102) \quad \frac{dy''}{dt} = \frac{z''}{l_2} \frac{b_2 r^2}{2b_1^2} \varepsilon \sin 2\varphi$$

und die Beschleunigungskomponenten

$$103) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x''}{dt^2} = -r \varepsilon^2 \frac{b_2}{b_1} \left\{ \cos \varphi + \frac{r}{l_1} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{r^2}{b_1 l_1} (\sin \varphi - 3 \sin 2\varphi) \right\} \\ - r \frac{b_2}{b_1} \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r^2}{b_1 l_1} \sin 2\varphi \right) \frac{d\varepsilon}{dt}, \end{cases}$$

$$104) \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{z''}{l_2} \frac{b_2 r^2}{b_1^2} \left(\varepsilon^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \right).$$

Bei der Kleinheit der Winkel β_1 und β_2 dürfen wir wieder setzen

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta$$

und da andererseits

$$108) \quad l \sin \beta = b \cos \psi - e,$$

so folgt

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \cos \psi - \frac{e}{l} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{l^2} \cos^2 \psi - \frac{2be}{l^2} \cos \psi + \frac{e^2}{l^2} \right)$$

oder mit der Annäherung

$$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi,$$

$$109) \quad \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(b-e)^2}{l^2} - \frac{b(b-e)}{l^2} \sin^2 \psi \right\}.$$

Führen wir diese Näherungsformel in 107) ein, so geht diese Gleichung über in

$$110) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{b_1} - \frac{x_2}{b_2} = \frac{l_1}{b_1} - \frac{l_2}{b_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{(b_1 - e_1)^2}{l_1 b_1} - \frac{(b_2 - e_2)^2}{l_2 b_2} \right) \\ + \left(\frac{b_1 - e_1}{l_1} - \frac{b_2 - e_2}{l_2} \right) \sin^2 \psi. \end{cases}$$

Nunmehr können wir die Entfernungen e der beiden Bewegungsrichtungen der Gleitstücke vom Drehpunkte P des Balanciers so dimensionieren, dass

$$111) \quad \frac{b_1 - e_1}{l_1} = \frac{b_2 - e_2}{l_2}$$

wird und damit verschwindet in Gleichung 110) das mit $\sin^2 \psi$ behaftete Glied. Mit dieser Bedingung haben wir demnach

$$110a) \quad \frac{x_1}{b_1} - \frac{x_2}{b_2} = \frac{l_1}{b_1} - \frac{l_2}{b_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{(b_1 - e_1)^2}{l_1 b_1} - \frac{(b_2 - e_2)^2}{l_2 b_2} \right)$$

d.h. also: Es ist praktisch möglich, das Balanciergetriebe Fig. 22 so anzuordnen, dass die Wege der beiden Gleitstücke zu einander in einer linearen Beziehung stehen. Dass hierzu die Bedingung 111) erfüllt werden muss, wurde anscheinend bisher übersehen.

Aus 110a) folgt aber unmittelbar

$$112) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{b_2}{b_1} \frac{dx_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{b_2}{b_1} \frac{d^2 x_1}{dt^2},$$

womit die Bewegung des Gleitstückes B auf diejenige von A zurückgeführt ist.

In ähnlicher Weise können wir diese Zurückführung auch auf die einzelnen Punkte der Schubstangen l_1 und l_2 übertragen, wobei wir die Abscissen und Ordinaten derselben für l_1 mit x' und y' , für l_2 dagegen mit x'' und y'' , ihre Abstände von den Gleitstücken dagegen mit z' und z'' bezeichnen wollen (Fig. 22). Alsdann haben wir

$$113) \quad x' = x_1 - z' \cos \beta_1, \quad x'' = x_2 - z'' \cos \beta_2$$

$$114) \quad y' = z' \sin \beta_1, \quad y'' = z'' \sin \beta_2$$

worin $\cos \beta_1$ und $\cos \beta_2$ angenähert durch 109) ersetzt werden können, während für $\sin \beta_1$ und $\sin \beta_2$ die Gleichung 108) maßgebend ist. Wir können somit statt der Formeln 113) und 114) auch angenähert schreiben

$$113a) \quad x' = x_1 - z' \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{b_1 - e_1}{l_1} \left(\frac{b_1 - e_1}{l_1} - \frac{b_1}{l_1} \sin^2 \psi \right) \right\}$$

$$114a) \quad y' = z' \left(\frac{b_1 - e_1}{l_1} - \frac{1}{2} \frac{b_1}{l_1} \sin^2 \psi \right)$$

und entsprechend für x'' und y'' . Setzen wir hier in weiterer Annäherung (das ist unter Voraussetzung nur geringer Ausschläge der Schubstangen l_1 und l_2) nach 105)

$$105a) \quad \sin \psi = \frac{x_1 - l_1}{b_1},$$

so erhalten wir

$$113b) \quad x' = x_1 - z' \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{b_1 - e_1}{l_1} \left(\frac{b_1 - e_1}{l_1} - \frac{x_1^2}{l_1 b_1} + 2 \frac{x_1}{b_1} - \frac{l_1}{b_1} \right) \right\}$$

$$114b) \quad y' = z' \left(\frac{b_1 - e_1}{l_1} - \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{l_1 b_1} + \frac{x_1}{b_1} - \frac{1}{2} \frac{l_1}{b_1} \right)$$

sowie

$$113c) \quad x'' = x_1 - z'' \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{b_2 - e_2}{l_2} \left(\frac{b_2 - e_2}{l_2} - \frac{x_2^2}{l_2 b_2} + 2 \frac{x_2}{b_2} - \frac{l_2}{b_2} \right) \right\}$$

$$114c) \quad y'' = z'' \left(\frac{b_2 - e_2}{l_2} - \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{l_2 b_2} + \frac{x_2}{b_2} - \frac{1}{2} \frac{l_2}{b_2} \right).$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten der Schubstangenspitze folgt hieraus

$$115) \quad \frac{dx'}{dt} = \left(1 - z' \frac{b_1 - e_1}{l_1^2 b_1} x_1 + z' \frac{b_1 - e_1}{l_1 b_1} \right) \frac{dx_1}{dt}$$

$$116) \quad \frac{dy'}{dt} = - \frac{z'}{b_1} \left(\frac{x_1}{l_1} - 1 \right) \frac{dx_1}{dt}$$

sowie mit Rücksicht auf 111)

$$115a) \quad \frac{dx''}{dt} = \frac{b_2}{b_1} \left(1 - z'' \frac{b_2 - e_2}{l_2^2 b_2} x_2 + z'' \frac{b_2 - e_2}{l_2 b_2} \right) \frac{dx_1}{dt}$$

$$116a) \quad \frac{dy''}{dt} = - \frac{z' b_2}{b_1^2} \left(\frac{x_2}{l_2} - 1 \right) \frac{dx_1}{dt}.$$

Schliesslich werden die Beschleunigungskomponenten

$$117) \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} = \left(1 - 2' \frac{b_1 - e_1}{l_1^2 b_1} x_1 + 2' \frac{b_1 - e_1}{l_1 b_1} \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 2' \frac{b_1 - e_1}{l_1^2 b_1} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2$$

$$118) \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = - \frac{z'}{b_1} \left(\frac{x_1}{l_1} - 1 \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{z'}{l_1 b_1} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2$$

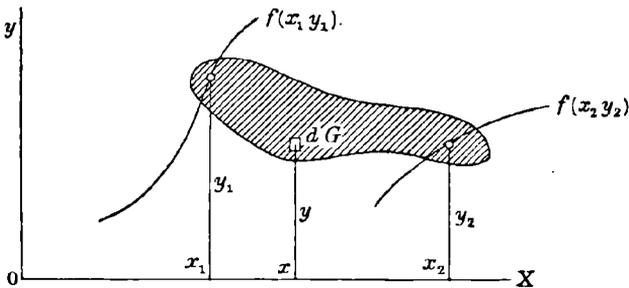
$$117a) \quad \frac{d^2 x''}{dt^2} = \frac{b_2}{b_1} \left(1 - 2'' \frac{b_2 - e_2}{l_2^2 b_2} x_2 + 2'' \frac{b_2 - e_2}{l_2 b_2} \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 2'' \frac{b_2 (b_2 - e_2)}{l_2^2 b_1^2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2$$

$$118a) \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = - \frac{z' b_1}{b_1^2} \left(\frac{x_2}{l_2} - 1 \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{z' b_2^2}{b_1^3 l_2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2.$$

Zur vollständigen Reduktion auf die Bewegung von x_1 hätte man noch in den beiden letzten Formeln x_2 mit Hilfe von (110a) zu eliminieren, wodurch indessen der Gesamtaufbau derselben keine Änderung erleidet.

Wenn im Vorstehenden die Bewegungsgesetze der Balanciergetriebe nahezu ebenso eingehend behandelt worden sind, wie früher diejenigen des einfachen Schubkurbelgetriebes, so geschah dies, weil einerseits das Balanciergetriebe in den Schriften über Mechanik entweder gar nicht erwähnt, oder dort nur flüchtig gestreift wird, andererseits aber in der Praxis angenäherte Formeln von geringerer Genauigkeit als die für die Schubkurbel angewendeten im Gebrauche sind. Von den mir zugänglichen Schriften geht lediglich die bekannte „Ingenieur- und Maschinen-Mechanik“ von J. Weissbach, neu bearbeitet von G. Herrmann im III. Bande, 1. Abt. (Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen) S. 738 etwas näher auf die Verbindung der Kurbel mit dem Balancier ein, jedoch in anderer Weise und vor allem mit anderen Zielen, als sie in unserer Darstellung verfolgt wurden. Ich habe insbesondere darauf verzichtet, von vornherein zwischen den

Fig. 23.



Größen e , b , l und r spezielle Beziehungen einzuführen, wie es a. a. O. z. B. dadurch geschehen ist, dass die Sehne zwischen den beiden Endlagen des Balanciers in Fig. 20 senkrecht zur Mittellage steht und ausserdem durch das Wellenmittel O laufen soll.

8. Die Massendrucke in Balanciergetrieben ergeben sich aus den im vorigen Paragraph entwickelten Beschleunigungskomponenten sofort durch Multiplikation mit den entsprechenden Massen bzw. Massenelementen und darauf folgender Integration. Diese Integration, welche übrigens nur für die Schubstangen wegen der Verschiedenheit der Bewegungen ihrer Elemente unter einander in Betracht kommt, kann indessen auch durch Anwendung des Schwerpunktsatzes umgangen und dadurch das ganze Verfahren wesentlich vereinfacht werden. Denken wir uns nämlich einen beliebig gestalteten Körper (Fig. 23) an zwei Punkten auf ebenen Kurven (Leitkurven) geführt, deren Koordinaten mit $x_1 y_1$ bzw. $x_2 y_2$ bezeichnet werden mögen, so verteilt sich das Gewicht jedes Elementes dG des Körpers mit den

momentanen Koordinaten x, y nach den Schwerpunktssatz auf die beiden Stützpunkte und zwar mit Beträgen dG' und dG'' nach den Formeln

$$119) \quad \begin{cases} x dG = x_1 dG' + x_2 dG'' \\ y dG = y_1 dG' + y_2 dG'', \end{cases}$$

$$120) \quad dG = dG' + dG''.$$

Hieraus folgt aber sofort

$$121) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} dG = \frac{dx_1}{dt} dG' + \frac{dx_2}{dt} dG'' \\ \frac{dy}{dt} dG = \frac{dy_1}{dt} dG' + \frac{dy_2}{dt} dG'' \end{cases}$$

und

$$122) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} dG = \frac{d^2x_1}{dt^2} dG' + \frac{d^2x_2}{dt^2} dG'' \\ \frac{d^2y}{dt^2} dG = \frac{d^2y_1}{dt^2} dG' + \frac{d^2y_2}{dt^2} dG''. \end{cases}$$

Durch Integration dieser Gleichungen über den ganzen Körper erhalten wir somit, wenn mit G' und G'' die auf die beiden Stützpunkte entfallenden Gewichtsteile des ganzen Körpers, deren Summe

$$120a) \quad G = G' + G''$$

ist,

$$123) \quad \begin{cases} \int \frac{d^2x}{dt^2} dG = G' \frac{d^2x_1}{dt^2} + G'' \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ \int \frac{d^2y}{dt^2} dG = G' \frac{d^2y_1}{dt^2} + G'' \frac{d^2y_2}{dt^2}, \end{cases}$$

d. h. der totale Massendruck eines an zwei Leitkurven geführten Körpers ist gleich der Summe der beiden Massendrucke, welche von den durch Verteilung der Gesamtmasse auf die beiden Stützpunkte entstehenden Einzelmassen herühren.* Bezeichnen wir also allgemein den Schwerpunktsabstand einer Schubstange vom Gewichte G und der Länge l vom Kreuzkopf gerechnet mit s , so brauchen wir nur noch die Beschleunigungen der beiden auf ihre Stützpunkte (z. B. Kreuzkopf und Kurbelzapfen) entfallenden Gewichte

$$124) \quad G' = G \left(1 - \frac{s}{l}\right) \quad \text{und} \quad G'' = G \frac{s}{l}$$

in unserer Rechnung einzuführen. Auf dieses allgemein giltige Resultat wurden wir übrigens schon am Schlusse des § 3 für den speziellen Fall des Schubkurbelgetriebes geführt.

* Diese für praktische Zwecke überaus fruchtbare Fassung des allgemeinen Schwerpunktssatzes, die sich naturgemäss sofort auf drei Dimensionen, d. h. auf drei Leitkurven eines in drei Punkten gestützten Körpers erweitern lässt, habe ich zu meiner Verwunderung in keinem der Lehrbücher über analytische oder technische Mechanik gefunden und möchte darum nicht verfehlen, ausdrücklich darauf hinzuweisen.

Nach dieser allgemeinen Vorbemerkung können wir sofort zur Ermittlung der Massendrücke an dem durch Vereinigung von Fig. 20 und 21 entstehenden Balanciergetriebe übergehen. In demselben sei G_0 das Gewicht des Balanciers und s_0 sein Schwerpunktsabstand vom Drehpunkte P . Alsdann erhalten wir die Massendruckskomponenten des Balanciers allein, indem wir das Gewicht mit den Ausdrücken 88) und 89) multiplizieren, nachdem in denselben die Grösse z_0 durch s_0 ersetzt wurde. Dabei wollen wir s_0 positiv rechnen, wenn der Schwerpunkt vom P nach links, also nach der Kurbel zu liegt.

Den Einfluss der Schubstangen G_1 und G_2 berücksichtigen wir nach den obigen allgemeinen Sätzen einfach dadurch, dass wir zu dem Moment der Balanciermasse den Betrag von $G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1}\right) b_1$ hinzufügen und $G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2$ abziehen, wobei s_1 und s_2 die von E bzw. C aus gerechneten Schwerpunktsabstände der Schubstangen bedeuten. Somit werden die vom Balancier und den als mitschwingend zu betrachtenden Schubstangenanteilen herrührenden Massendruckskomponenten:

$$125) \left\{ \begin{aligned} X_0 = & - \frac{r \varepsilon^2}{b_1 g} \left\{ G_0 s_0 + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1}\right) b_1 - G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2 \right\} \\ & \times \left\{ \cos \varphi + \frac{r}{l_1} \cos 2 \varphi + \frac{3}{8} \frac{r^2}{b_1 l_1} (\sin \varphi - 3 \sin 3 \varphi) \right\} \\ & - \frac{r}{b_1 g} \left\{ G_0 s_0 + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1}\right) b_1 - G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2 \right\} \\ & \times \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r^2}{b_1 l_1} \sin 2 \varphi\right) \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \end{aligned} \right.$$

$$126) \left\{ \begin{aligned} Y_0 = & + \frac{r}{b_1 g} \left\{ G_0 s_0 + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1}\right) b_1 - G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2 \right\} \\ & \times \left(\varepsilon^2 \cos 2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \end{aligned} \right.$$

Zur ersten dieser beiden Komponenten tritt noch ein von dem lediglich hin und hergehenden Gewichte P am Gleitstück C und dem nach obigem dazu zu rechnenden Betrage $G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2}\right)$ herrührender Massendruck, welcher sich durch Multiplikation der Summe

$$\frac{1}{g} \left\{ P + G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2}\right) \right\}$$

mit der Beschleunigung 103) ergibt, nachdem dort $z = 0$ gesetzt worden ist. Bezüglich des Vorzeichens ist zu bemerken, dass dieser Massendruck, da die Bewegung derjenigen der Kurbelseite entgegengesetzt gerichtet ist, auch das entgegengesetzte Vorzeichen von X_0 haben muss. Wir haben somit für diesen Zusatz

$$127) \left\{ \begin{aligned} X_2 = & + \frac{r \varepsilon^2 b_2}{g b_1} \left\{ P + G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2} \right) \right\} \left\{ \cos \varphi + \frac{r}{l_1} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{r^2}{b_1 l_1} (\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi) \right. \\ & \left. + \frac{r}{g} \frac{b_2}{b_1} \left\{ P + G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2} \right) \right\} \left\{ \left(1 + \frac{r}{l_1} \cos \varphi - \frac{3}{4} \frac{r^2}{b_1 l_1} \sin 2\varphi \right) \frac{d\varepsilon}{dt} \sin \varphi \right. \right. \end{aligned} \right.$$

Als lediglich rotierender Teil ist schliesslich ausser der Kurbel K mit dem Schwerpunktsabstand s vom Wellenmittel noch der Betrag $G \frac{s_1}{l_1}$ der Schubstange und zwar am Kurbelzapfen angreifend zu betrachten. Die hiervon herrührenden Massendrücker sind, entsprechend Gleichung 24)

$$128) \quad X = -\frac{1}{g} \left(Ks + G_1 \frac{s_1}{l_1} r \right) \left(\varepsilon^2 \cos \varphi + \sin \varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

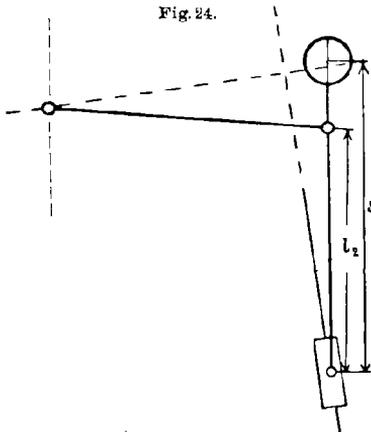
$$129) \quad Y = -\frac{1}{g} \left(Ks + G_1 \frac{s_1}{l_1} r \right) \left(\varepsilon^2 \sin \varphi - \cos \varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \right).$$

Während nun diese letzteren Drücke am einzelnen Getriebe nicht ausgeglichen werden können (siehe oben § 2), ist dies für die oben ermittelten Werte von X_0 , Y_0 und X_2 möglich, und zwar, wenn gleichzeitig

$$130) \quad G_0 s_0 + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) b_1 - G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2 = 0$$

$$131) \quad P + G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2} \right) = 0$$

wird. Die letztere Gleichung enthält aber die Bedingung, dass



$$131a) \quad s_2 = \frac{P + G_2}{G_2} l_2 > l_2$$

d. h. dass der Schwerpunkt der Schubstange l_2 nicht zwischen ihren beiden Zapfen, sondern jenseits von G liegen soll (siehe Fig. 24). Weiter folgt aber aus 130) und 131)

$$132) \quad G_2 = G_0 \frac{s_0}{b_2} + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) \frac{b_1}{b_2} - P,$$

eine Gleichung, die wiederum nur erfüllt werden kann, wenn

$$132a) \quad G_0 \frac{s_0}{b_2} + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) \frac{b_1}{b_2} > P$$

wird.

Beispiel: Inwiefern sich der hier entwickelte Massenausgleich in der Praxis verwirklichen lässt, dürfte am ehesten aus einem Zahlenbeispiele hervorgehen. Wir nehmen für dasselbe an, dass der Balancier, dessen Anordnung um seinen Drehpunkt eine vollkommen symmetrische, also $b_1 = b_2$ und $s_0 = 0$ sein möge, die Bewegung eines auf der Welle O sitzenden Excenters (d. i. eines die Welle selbst umfassenden Kurbelzapfens) auf einen der Dampfverteilung dienenden Steuerschieber zu übertragen habe. Der Schieber habe das Gewicht $P = 100$ kg;

die Schubstange eine Länge $l_1 = 2$ m, ihr Schwerpunktsabstand sei $l_1 = 1,5$ m, ihr Gewicht (einschliesslich des sogenannten Excenterbügels) sei $G_1 = 250$ kg; alsdann kann die Bedingung 132a) nur erfüllt werden, wenn am Endpunkt E des Balanciers ein Gegengewicht Q angebracht wird, so zwar, dass

$$Q + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) > P$$

oder

$$Q > 100 - 250 \cdot 0,25 = 37,5 \text{ kg.}$$

Wählen wir z. B. $Q = 100$ kg, so wird nach 132)

$$G_2 = Q + G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) - P = 62,5 \text{ kg}$$

und aus 131a)

$$s_2 = \frac{P + G_2}{G_2} l_2 = 2,6 l_2.$$

Dies letztere ist aber nur ausführbar bei sehr kurzen Schubstangen l_2 des Schiebers. Jedenfalls erkennt man, dass der Ausgleich einzelner Balanciergetriebe im allgemeinen eine beträchtliche Vermehrung der bewegten Massen mit sich bringt.

Bei Schiffsmaschinen wird die Sache noch dadurch verwickelt, dass jeder Steuerschieber hier mit einem Vorwärts- und Rückwärts-Excenter verbunden sein muss. Das Studium der hierdurch bedingten, überaus mannigfaltigen und von der Einwirkung des Maschinisten abhängigen Bewegungen* und Massendrucke würde uns an dieser Stelle zu weit führen.

Die Massendrucke des vorwiegend für den Antrieb von Kondensatorluftpumpen verwendeten Balanciergetriebes Fig. 22, welche noch zu untersuchen sind, ergeben sich in derselben Weise wie oben durch Zerlegung der beiden Schubstangen in einen Bestandteil, welcher am Balancierende und einen zweiten, der am Gleitstück angebracht zu denken ist. Bezeichnen wir die dem Balancierschwerpunkt entsprechenden Koordinaten mit x_0 und y_0 , diejenigen der Gleitstücke mit $x_1 y_1$ bzw. $x_2 y_2$, so ist der Massendruck der lediglich als hin- und hergehend zu betrachtenden Gewichte unseres Getriebes

$$133) \quad X = \frac{G_1}{g} \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) \frac{dx_1^2}{dt^2} - \frac{G_2}{g} \left(1 - \frac{s_2}{l_2} \right) \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

bei Dampfmaschinen, in denen unser Getriebe als Hilfsmechanismus mit einer normalen Schubkurbel in skizzierter Weise verbunden ist, einfach dem Massendrucke der im Schubkurbelmechanismus hin- und hergehenden Gewichte hinzuzuzählen. Sind mehrere Hauptmechanismen vorhanden, welche nach Schlickscher Methode ausgeglichen werden sollen, so hat man zu beachten, dass in dieser Ausgleichung auch der Massendruck 133) als Bestandteil derjenigen eines Hauptgetriebes berücksichtigt werden muss. Der Ausgleich erfordert dann die Über-

* Diese Bewegungen sind eingehend dargestellt in dem sehr verbreiteten Werke von G. Zeuner: Die Schiebersteuerungen. 5. Aufl. Leipzig, 1888.

einstimmung der Bewegungsgesetze der beiden Gleitstücke A und B . Dieser aber ist, wie wir im vorigen Paragraph gesehen haben, an eine bestimmte Beziehung zwischen den Konstruktionslängen Gleichung 111) gebunden, mit deren Erfüllung wir nach Gleichung 112) statt 133) schreiben können

$$133a) \quad X = \frac{1}{g} \left\{ G_1 \left(1 - \frac{s_1}{l_1} \right) - G_2 \left(1 - \frac{s_2}{l_2} \right) \frac{b_2}{b_1} \right\} \frac{d^2 x_1}{dt^2}.$$

Die Massendrücke des Balanciers G_0 dagegen und der an seinen Enden hinzutretenden Schubstangenbestandteile ergeben sich, wenn s_0 wieder den Schwerpunktsabstand vom Drehpunkte P bedeutet zu

$$134) \quad X = \frac{1}{g} \left\{ G_1 \frac{s_1}{l_1} \cdot \frac{b_1}{s_0} + G_0 - G_2 \frac{s_2}{l_2} \frac{b_2}{s_0} \right\} \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

$$135) \quad Y = \frac{1}{g} \left\{ G_1 \frac{s_1}{l_1} \frac{b_1}{s_0} + G_0 - G_2 \frac{s_2}{l_2} \frac{b_2}{s_0} \right\} \frac{d^2 y_0}{dt^2},$$

worin die Beschleunigungen aus den Formeln 117) bzw. 118) sofort dadurch ermittelt werden können, dass man $z' = l_1$ setzt und die Werte mit den Quotienten $s_0 : b_1$ multipliziert. Alsdann aber bleiben die Beschleunigungen $\frac{d^2 x_0}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_0}{dt^2}$ nicht nur abhängig von $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, sondern auch von der augenblicklichen durch x_1 gegebenen Lage des Gleitstückes und weiter vom Quadrate seiner Geschwindigkeit. Unter diesen Umständen ist es unzulässig, die Wirkung des Balanciers und der erwähnten Schubstangenbeträge durch Hinzufügung von Gliedern, welche mit 134) bzw. 133) proportional sind, in den Ausgleichsbedingungen der Hauptgetriebe zu berücksichtigen, und es bleibt nur übrig, den Balancier für sich auszugleichen. Dies aber erfordert lediglich das Verschwinden des Klammerausdruckes in unseren letzten Formeln, also die Erfüllung von

$$136) \quad G_1 \frac{s_1}{l_1} b_1 + G_0 s_0 - G_2 \frac{s_2}{l_2} b_2 = 0.$$

Beispiel: An einer stehenden Schiffsmaschine, deren Hub $2r = 1,4$ m beträgt, werde die Luftpumpe von einem Balancier angetrieben. Bei halbem Hube der Pumpe habe der eine Arm des Balanciers eine Länge von $b_1 = 2$ m, der andere eine solche von $b_2 = 1$ m; das Gewicht des Balanciers sei $G_0 = 1000$ kg, sein Schwerpunktsabstand vom Drehpunkte $s_0 = 0,3$ m. Die als Verbindungsglied zwischen dem einen Balancierende und dem Kreuzkopf A des treibenden Cylinders (Fig. 22) dienende Schubstange von der Länge $l_1 = 0,5$ m und einem Gewichte von $G_1 = 100$ kg sei ganz symmetrisch angeordnet, sodass ihr Schwerpunkt in der Mitte liegt; dann ist $s_1 = 0,25$ m. Die Länge der Luftpumpenschubstange sei $l_2 = 1$ m, ihr Gewicht und Schwerpunktsabstand sollen bestimmt werden.

Zunächst allerdings müssen wir die Entfernungen e_1 und e_2 der Bewegungsrichtungen der Gleitstücke A und B vom Drehpunkte P so bestimmen, dass die Beziehung 111) zwischen ihnen und den gegebenen Grössen b_1, b_2 , sowie l_1, l_2 erfüllt ist. Eine der beiden Entfernungen ist natürlich willkürlich, wir wollen des-

halb e_1 so bestimmen, dass die grössten Ausschläge der Schubstange l_1 so klein wie möglich und dabei einander gleich werden. Dies erreichen wir, indem wir durch die Bewegungsrichtung von A in Fig. 25 den Pfeil des ganzen vom Balancierende beschriebenen Bogens $2\psi_0$ halbieren. Alsdann ist angenähert

$$\sin \psi_0 = \frac{r}{b_1} = \frac{0,7}{2} = 0,35,$$

mithin

$$e_1 = b_1 \left(1 - \frac{1 - \cos \psi}{2} \right) = 1,937 \text{ m}$$

und nach 111)

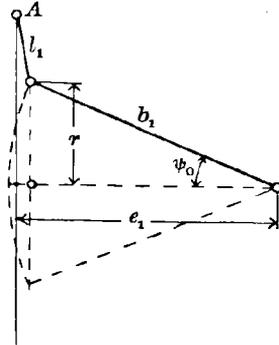
$$\frac{e_2}{l_2} = \frac{e_1}{l_1} - \frac{b_1}{l_1} + \frac{l_2}{l_2} = 0,874 \text{ m.}$$

Aus 136) ergibt sich schliesslich für die Schubstange der Pumpe

$$G_2 s_2 = 100 \cdot \frac{0,25 \cdot 2}{0,5} + 1000 \cdot 0,3 = 400 \text{ mkg.}$$

Auch dieser Bedingung wird man in der Praxis nur dadurch Genüge leisten können, dass man den Schwerpunkt der Stange nach Fig. 24 durch Aufsetzen eines Zusatzgewichtes über den Balancierzapfen hinaus verlegt. Wie weit man damit gehen kann, um das Gewicht G_2 zu reduzieren, ist naturgemäss Sache des Konstrukteurs.

Fig. 25.



(Schluss folgt.)

Elementares über die Dupin'schen Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie.

Von

Prof. Dr. G. HOLZMÜLLER

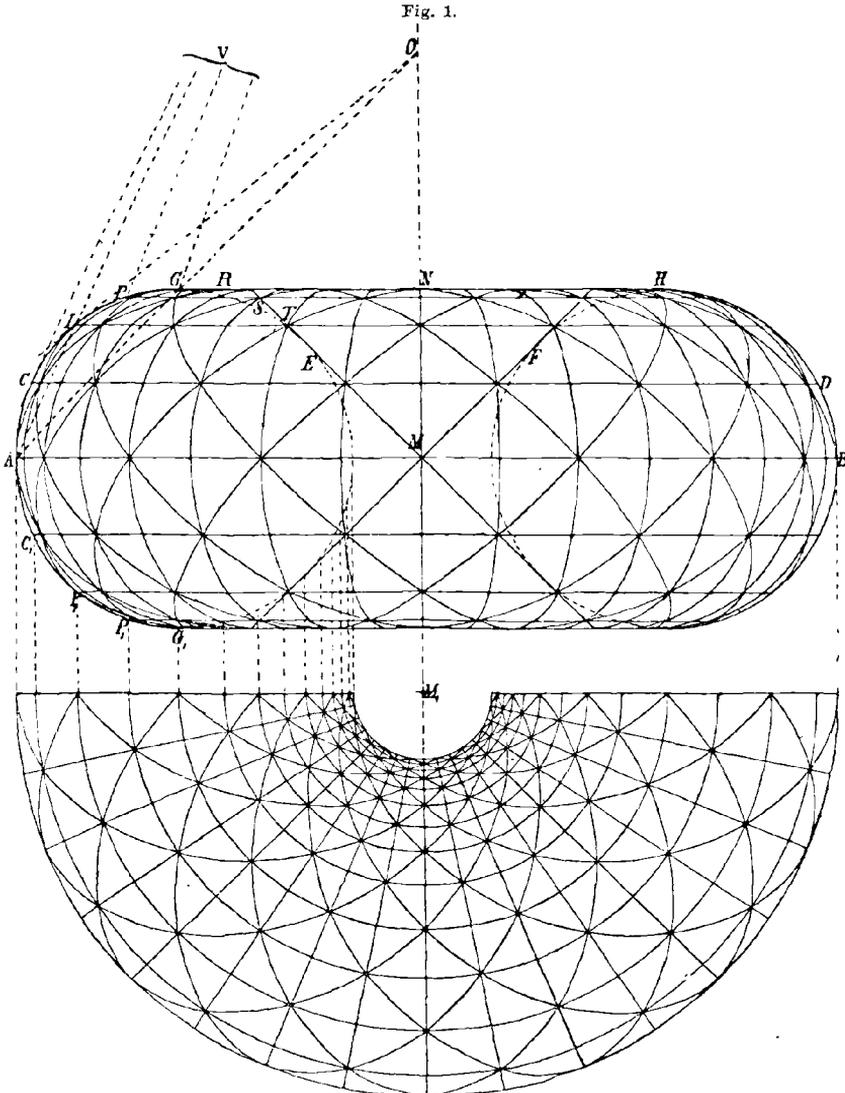
in Hagen i. W.

§ 1. Isothermensysteme der Cykliden und Abbildung auf das Rechteck.

Die Cyklide ist bekanntlich die typische Fläche für die konforme Abbildung auf das Rechteck. Da sämtliche Cykliden sich in Drehungscykliden transformieren lassen, was durch Inversion geschieht, so ist die Untersuchung nur für solche nötig. Die Abbildung kann für jede Form elementar durchgeführt werden, sobald man das richtige Rechteck wählt. Es ist nur erforderlich, den Schnittwinkel seiner Diagonalen so zu wählen, dass er mit dem der inneren Tangenten des Hauptschnitts zusammenfällt. Diese sind bekanntlich, wie sich elementar zeigen lässt, zugleich die Darstellungen schräger Kreisschnitte. Die bei ihrer Untersuchung auftretende Gleichung vierten Grades lässt die Zerlegung in ein Produkt von Faktoren zweiten Grades zu, die für sich verschwinden. Jeder stellt, gleich Null gesetzt, einen Kreis dar. Da die Drehungscyklide durch Inversion von einem Punkte der Axe aus in sich selbst übergeht, sobald man die Tangenten zum Radius des abbildenden Kreises macht, so gehen dabei die schrägen Kreisschnitte der einen Art in solche der anderen über. Weil die Winkel erhalten bleiben, so folgt unter Heranziehung der Symmetrie, dass sämtliche schrägen Kreisschnitte die Meridiane unter konstantem Winkel schneiden, also Loxodromen der Fläche sind. Zwei benachbarte der einen Art geben mit zwei benachbarten der anderen z. B. einen „Rhombus“. Durch geeignete Inversion von den Axenpunkten aus lässt sich die Oberfläche durch sie in ein Netz von Rhomben einteilen, welches in sich geschlossen ist. Die Diagonalen geben die als Krümmungslinien bekannten beiden Gruppen anderer Kreisschnitte, und diese geben ein System ähnlicher „Rechtecke“. Nur die Teilung des Äquators ist dazu erforderlich.

In Fig. 1, die ich einer früheren meiner Arbeiten entnommen habe, ist diese Einteilung dargestellt. Sollen z. B. die Horizontalschnitte durch A und C im Aufriss zur Einteilung gehören, so dass

auch C_1 aus Symmetriegründen dazu gehört, so giebt die Tangente in C mit der Axe einen Schnittpunkt V . Die Geraden VA und VC_1 geben neue Punkte der Einteilung, die, symmetrisch nach unten übertragen und mit V verbunden, weitere Punkte geben. Die in den Teil-



punkten senkrecht schneidenden Kreise bilden ein Büschel. (Die Tangenten der Büschelkreise in den beiden Schnittpunkten folgen unter gleichen Winkeln aufeinander.) Um eine regelrecht schliessende symmetrische Einteilung zu erhalten, geht man am bequemsten von dem äusseren und inneren Äquator aus und legt von M aus eine

Tangente ME an den Kreis. Jetzt ist AE bis zur Axe zu verlängern, von dort aus sind Tangenten an den Kreis zu legen und mit diesen ist wie vorher zu verfahren. Die Meridiane folgen natürlich unter gleichen Schnittwinkeln aufeinander.

Zeichnet man jetzt in einer Ebene ein Rechteck mit dem besprochenen Schnittwinkel der Diagonalen, und teilt man dieses durch Parallele zu den Seiten in eine entsprechende Anzahl von Rechtecken ein, so sind diese denen der Cyklidenfläche ähnlich, und die konforme Abbildung ist mit Zirkel und Lineal durchgeführt.

Im Grundriss erscheinen die schrägen Kreisschnitte als Ellipsen, die den Mittelpunkt M_1 zum gemeinschaftlichen Brennpunkte haben, wie sich aus dem Vergleich mit der Aufrisszeichnung ohne weiteres ergibt.

Die Einteilung wird dann eine quadratische und das Rechteck selbst ein Quadrat, wenn die besprochenen inneren Tangenten einen rechten Winkel bilden, z. B. den Winkel EME_1 im Aufriss.

Dieser Winkel ist von besonderer Bedeutung. Unter ihm erscheint von M aus jede der Kugeln, die dem Innern der Cyklidenfläche eingeschrieben sind. Schliesst die Reihe dieser Kugeln nach u Umgängen und ist n ihre Anzahl, so ist

$$\alpha = \frac{2\pi u}{n}.$$

Die Cyklide hat aber auch noch eine äussere Kugelreihe. Schliesst diese mit n_1 Kugeln nach u_1 Umgängen, so ist nach Steiner

$$\frac{u}{n} + \frac{u_1}{n_1} = \frac{1}{2}.$$

Dieser Satz, den Steiner einen der merkwürdigsten der Geometrie nennt, während er das Gesetz als höchst sonderbar bezeichnet, wird von ihm (vergl. Werke I, Seite 136) ohne Beweis gegeben. Herr Geiser giebt auf den Schlußseiten seiner Einleitung in die synthetische Geometrie einen rechnenden Beweis, der schon dadurch vereinfacht werden kann, dass man die Beziehung $\frac{p}{q} = \alpha c$ benutzt, die bei der Inversion an Stelle von $r = c$ tritt. Zum Beweise ist aber Rechnung überhaupt nicht erforderlich, wenn man mit Hilfe von Fig. 2 folgenden Weg einschlägt.

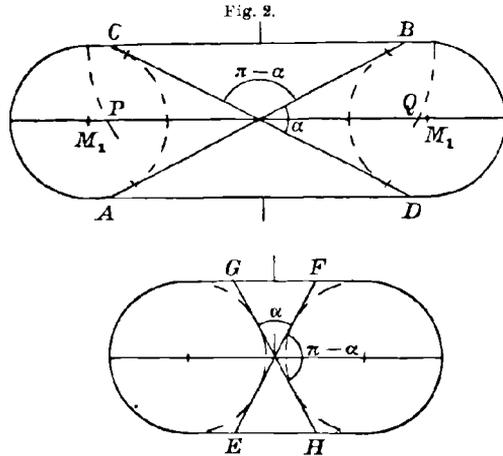
P und Q seien Schnittpunkte des die beiden Kreise eines Hauptschnitts orthogonal schneidenden Kreisbüschels. Durch Inversion von einem dieser Punkte aus gehen die Kreise des Büschels in gerade Linien, die Hauptschnittkreise in konzentrische Kreise, den äusseren und inneren Äquator einer anderen Cyklide über, die äussere Kugelreihe der ersten Drehungscyklide in die innere der andern, die Kreisschnitte AB und CD in die Kreisschnitte EF und GH . Der Schnittwinkel α und $\pi - \alpha$ bleiben erhalten, vertauschen aber ihre Rollen. Vorher war $\alpha = \frac{2\pi u}{n}$ der Gesichtswinkel für die Reihe der inneren Kugeln,

jetzt $\pi - \alpha = \frac{2\pi u_1}{n_1}$. Durch Addition und Division durch 2π folgt daraus $\frac{u}{n} + \frac{u_1}{n_1} = \frac{1}{2}$. Dies dürfte der von Steiner geheim gehaltene Beweis sein, der den Satz als selbstverständlich erscheinen lässt.

Die schrägen Kreisschnitte sind die nach einem Umgänge in sich zurücklaufenden Loxodromen jeder Cyklide. Reiht man gleichgrosse Rechtecke, auf die sie sich abbilden lässt, doppelt periodisch an einander, und bezeichnet man die Basis und die Höhe jedes Rechtecks mit b und h , so giebt der Winkel γ , der sich aus $\tan \gamma = \pm \frac{h}{2b}$ bestimmt, den Schnittwinkel derjenigen Loxodromen (mit den Parallelkreisen bzw. ihren Abbildungen) an, die nach zwei Umgängen in sich zurücklaufen. Ebenso giebt

$$\tan \gamma = \pm \frac{h}{nh}$$

die nach n Umgängen in sich zurücklaufenden Loxodromen, wobei n ganz, gebrochen und irrational sein kann. In letzterem Falle, dem inkommensurablen, laufen die Loxodromen nie in sich zurück. Ihre Konstruktion geschieht mit Hilfe einer entsprechenden Rechtecksteilung elementar und mit beliebiger Genauigkeit.



Die Geometrie der Geraden in der Ebene lässt sich also elementar auf die Cyklidenfläche übertragen. So hat das loxodromische Dreieck (nicht das geodätische) die Winkelsumme 180° ; jedem Satze über harmonische Strahlen entspricht ein solcher über harmonische Loxodromen; die harmonischen Punkte der Ebene entsprechen leicht zu deutenden Punkten auf Loxodromen; Sätzen über drei Gerade, die sich in einem Punkte schneiden, entsprechen gewisse loxodromische Sätze, ebenso den Sätzen über drei Punkte, die auf einer Geraden liegen. Die Beziehungen sind sogar eindeutige, so lange man sich auf die Geometrie des Rechtecks beschränkt. Den Kegelschnittssätzen über projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel entsprechen leicht in Worte zu kleidende über die Loxodromen der Cyklide. Dies alles gilt zunächst von der Geometrie der Lage. Die des Maßes erfordert die Beachtung der Vergrößerungsverhältnisse. Bei der Drehungscyklide sind auch diese sehr einfach, denn weil der Abstand

zweier Meridianschnitte proportional dem Abstände von der Drehungsaxe ist, so ist das Vergrößerungsverhältnis überhaupt diesem Abstände proportional. Ist z.B. die Basis des Rechtecks gleich der Peripherie des äusseren Äquators, so ist in Fig. 3 bei A das Vergrößerungsverhältnis gleich 1, bei B hingegen gleich

$$\frac{NB}{MA} \text{ oder } \frac{e + e \cos \varphi}{e + e}.$$

Am leichtesten ist die Länge der Loxodromen zu beurteilen. In jedem Elementarrechteck (Fig. 4) nämlich ist $CD = \frac{CD_1}{\sin \gamma}$, ganz ebenso ist auf der Drehungscyklide jeder loxodromische Bogen CD gleich dem Produkte aus $\frac{1}{\sin \gamma}$ und dem entsprechenden Bogen CD_1 des Hauptschnitts. So ist z. B. der Umfang eines schrägen Kreisschnitts gleich

$$\frac{2 e \pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 e \pi,$$

also sein Durchmesser gleich e . Diese Einfachheit beruht darauf, dass bei der Projektion auf den Hauptschnitt das Grössenverhältnis an

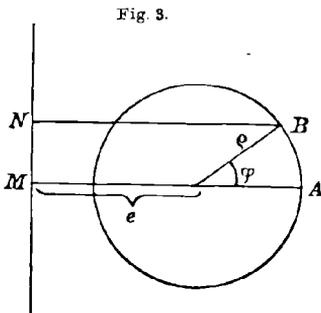


Fig. 3.

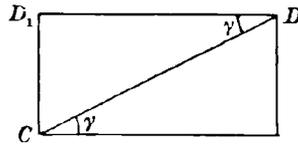


Fig. 4.

jeder Stelle konstant bleibt. Bei der Projektion auf den Äquator würde dies nicht der Fall sein.

Nach Art des Cavalierischen Prinzips kann man daher auch loxodromische Parallelogramme und Rechtecke einander gleich setzen, sobald sie gleiche horizontale Basis und gleiche Hauptschnittshöhe haben. Dies gilt überhaupt von Figuren, die auseinander durch Verschiebung ihrer horizontalen Querschnittsbogen entstehen.

Jedem Flächenelement $f = dx dy$ im Rechteck entspricht auf der Cyklide ein solches, dessen Inhalt

$$f_1 = dx \frac{e + e \cos \varphi}{e + e} \cdot dy \frac{e + e \cos \varphi}{e + e} = f \left(\frac{e + e \cos \varphi}{e + e} \right)^2$$

ist. Darauf liesse sich eine Umgehung der Integration begründen, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

Um die Geometrie der Ebene analytisch in möglichst einfacher Form auf die Drehungscyklide zu übertragen, mache man in Fig. 5a M zum Anfangspunkte den Koordinaten, die Büschelpunkte P und Q der zu den Hauptschnittkreisen gehörigen Orthogonalschar zu den Punkten ± 1 der X -Axe. Dann wird $t^2 = MA \cdot MB = 1$, d. h. $t = 1$. Jede Drehungscyklide, die zu P und Q gehört, wird durch den Parameter

$$\frac{p}{q} = c$$

vollständig bestimmt. So wird z. B. $MA = x_1$ aus

$$\frac{AP}{QA} = \frac{1 - x_1}{1 + x_1} = c$$

als

$$MA = x_1 = \frac{1 - c}{1 + c}$$

bestimmt,

$$x_2 = MB = \frac{1}{MA}$$

wird $x_2 = \frac{1 + c}{1 - c}$; $MM_1 = e$ wird

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + c^2}{1 - c^2} = e;$$

ϱ wird gleich

$$\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{2c}{1 - c^2} = \varrho;$$

zugleich wird

$$\tan \gamma = \frac{\varrho}{1} = \frac{2c}{1 - c^2}.$$

Als Koordinaten für die Cyklidenfläche (mit Parameter c) wähle man die im Grundriss gemessene Abweichung ϑ und die im Aufriss gemessene Differenz $(\varphi - \chi)$ der Neigungen der Radii vectores p und q , denn diese giebt den Peripheriewinkel δ bei C , der gleich dem Neigungswinkel der Tangente des Büschelkreises in P ist. Diese Neigungswinkel folgen aber bei isothermischer Einteilung unter gleichen Winkeln aufeinander, daher ist $\eta = (\varphi - \chi)$ am zweckmässigsten als Variable zu wählen. Es sei nun 2π die Basis des zur Cyklide gehörigen Rechtecks, dann ist die Höhe $h = 2\pi \tan \gamma = \frac{4c\pi}{1 - c^2}$. Der Geraden $y = \frac{h}{2n} = \frac{\pi}{n} \tan \gamma$ entspricht auf der Cyklide der durch $(\varphi - \chi) = \frac{\pi}{n}$ bestimmte Horizontalkreis. Demnach ist

$$1) \quad y = (\varphi - \chi) \tan \gamma = \frac{2c}{1 - c^2} (\varphi - \chi).$$

Der Geraden $x = \frac{\pi}{n}$ entspricht der durch $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ bestimmte Hauptschnitt, so dass

Fig. 5.

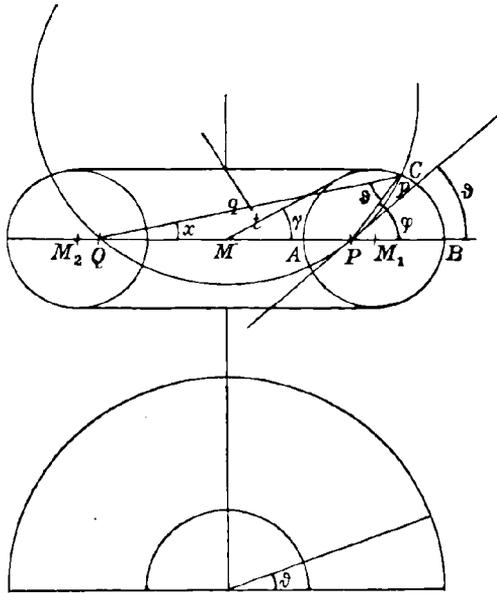
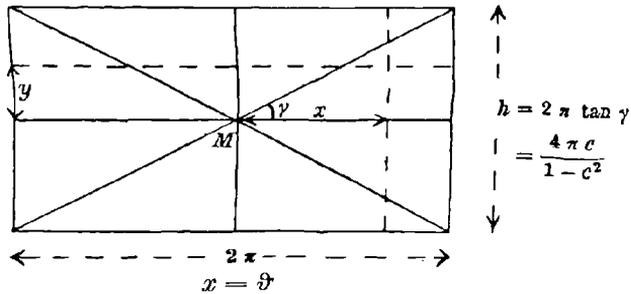


Fig. 6.



2) ist. Folglich: Jeder Kurve $f(xy) = 0$ der Ebene entspricht eine Curve $f\left(\vartheta, \frac{2c}{1-c^2}(\varphi - \chi)\right) = 0$ auf der Fläche der Drehungscyklide mit Parameter $c = \frac{p}{q}$.

Für die dem Quadrat entsprechende Cyklide ist $\tan \gamma = 1$, für sie geht also in sehr bequemer Weise $f(x, y) = 0$ über in $f[\vartheta, (\varphi - \chi)] = 0$, oder, wenn der Peripheriewinkel $\eta = \varphi - \chi$ eingeführt wird, in $f(\vartheta, \eta) = 0$.

Im allgemeineren Falle entspricht den Geraden $y = Ax + b$ die Loxodrome

$$\frac{2c}{1-c^2}(\varphi - \chi) = A\vartheta + b \quad \text{oder} \quad \frac{2c}{1-c^2}\eta = A\vartheta + b;$$

für die schrägen Kreisschnitte z. B. erhält man

$$\frac{2c}{1-c^2}(\varphi - \chi) = \frac{2c}{1-c^2}\vartheta + b$$

oder

$$\varphi - \chi = \vartheta + \frac{b(1-c^2)}{2c} \quad \text{oder} \quad \eta - \vartheta = \frac{b(1-c^2)}{2c},$$

im Falle des Quadrates also $\eta - \vartheta = b$.

Dem Kreise $x^2 + y^2 = k^2$ entspricht die Kurve

$$\vartheta^2 + \left[\frac{2c}{1-c^2}(\varphi - \chi) \right]^2 = k^2$$

oder

$$\vartheta^2 + \left[\frac{2c}{1-c^2}\eta \right]^2 = k^2,$$

im Falle des Quadrates also

$$\vartheta^2 + \eta^2 = k^2.$$

Da die Geometrie sich auf das Rechteck beschränken sollte, war es gestattet, die Periodizitätskonstanten 2π und $2\pi \frac{2c}{1-c^2}$, also die zu addierenden Grössen $2n\pi$ und $2n\pi \frac{2c}{1-c^2}$ wegzulassen.

Kennt man z. B. für das Rechteck die Lösung irgend eines isothermischen Problems oder eines Problems der stationären Strömung, so lassen sich die Gleichungen der Strom- und Niveaulinien sofort auf die Cyklide übertragen.

[Man kann von hier aus direkt zu den bekannten durch elliptische Funktionen vermittelten Abbildungsproblemen übergehen, das Rechteck z. B. mittels der Funktion

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{k} \sin am z}{i + \sqrt{k} \sin am z}$$

auf den Einheitskreis übertragen, wobei den Eckpunkten $\pm K$ und $\pm K \pm K'i$ des Rechtecks die Bildpunkte

$$\pm \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \pm i \frac{1-k}{1+k}$$

entsprechen. Das Rechteck dieser Bildpunkte hat das Seitenverhältnis $\frac{1-k}{2\sqrt{k}}$,

was ganz dem Verhältnis $\frac{c}{t} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{x_2 x_1}} = \frac{1 - \frac{x_1}{x_2}}{2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}}$ entspricht, so dass

der Modul

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2$$

wird und zwischen ihm und dem Cyklidenparameter c eine sehr einfache Beziehung besteht, auf die ich schon im 94. Bande des Crelleschen Journals aufmerksam machte. So wird z. B. für das Quadrat

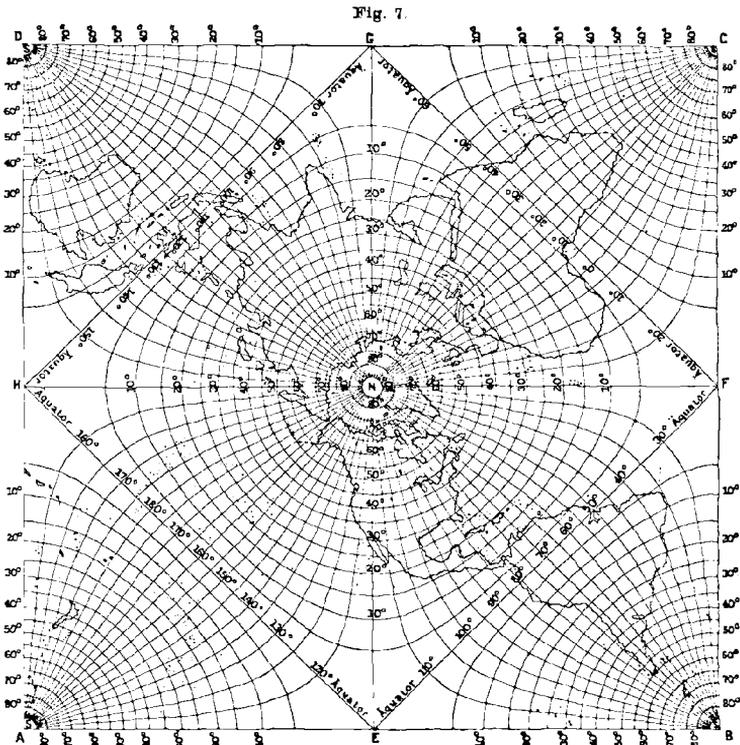
$$\tan \gamma = \frac{2c}{1-c^2} = 1, \text{ also } c = \sqrt{2} - 1 \text{ und } \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 = 3 - \sqrt{8} = k,$$

d. h. gleich dem bekannten Modul für die einfachste Periodicität. Auf die hierher gehörigen Arbeiten der Herren H. A. Schwarz, Jochmann, Heine, Klein und anderer auch in meiner Theorie der isogonalen Verwandtschaften citierten Autoren sei hier nur kurz aufmerksam gemacht, ebenso auf die einfache Abbildung $Z = \sin am z$, die das Rechteck auf die ganze Ebene überträgt. Von dieser aus kann man zur Kugel übergehen, deren sphärische Kegelschnitte nun durch Vermittelung der Sinusamplitudo-Kurven den Parallelkreisen und Meridianen der Cyklide entsprechen. Für Leser, die sich für solche Abbildungen interessieren, sei z. B. die Weltkarte von Peirce abgedruckt (Fig. 7). Teilt man das Quadrat durch Parallelscharen in gleiche Quadrate ein, die dem Quadrate entsprechenden Cyklide nach dem obigen Verfahren in dieselbe Anzahl von Quadraten, so kann man die Länderformen in elementarer Weise auf die Cyklidenfläche übertragen. Ebenso erhält man durch Einzeichnung der Gradkurven die Lösung für ein bestimmtes Strömungsproblem der längs eines Parallelkreises und eines Meridiankreisschnittes aufgeschnittenen Cyklide. Hier soll auf diese schwierigeren Dinge nicht eingegangen werden.]

Berührt die Drehungsaxe den erzeugenden Kreis der Cyklide, so geht diese durch Inversion vom Berührungspunkte aus in eine Cylinderfläche über. Schneidet die Drehungsaxe den erzeugenden Kreis, so giebt die Inversion von einem der Knotenpunkte aus statt der Cyklide einen Kreiskegel. Die Einteilung dieser beiden Flächen in Quadrate oder Rechtecke, deren Loxodromen auf die Schraubenlinien des Cylinders bezw. Kegels führen, ist aber so einfach, dass es hier einer weiteren

Erläuterung nicht bedarf. Auf die allgemeine Form der Dupin'schen Cykliden brauchen wir auch nicht einzugehen, da die Inversion im Raum als allgemein bekannt vorauszusetzen ist.

Bei dem durchaus elementaren Charakter dieses Gegenstandes habe ich mich nicht gescheut, die obigen Betrachtungen in weiterer Ausführung in eine Bearbeitung der elementaren Stereometrie, deren



erster Band demnächst in G. J. Göschen's Verlage erscheinen wird, aufzunehmen. Die Schule würde durch die Berücksichtigung dieser einfachen Beziehungen dem Oberprimaner ein Übungsfeld eröffnen, bei dem nicht nur die räumliche Anschauung, sondern auch der Sinn für physikalische Anwendungen ganz ausserordentlich gewinnen würde. In dem genannten Werke wird für die allgemeinen Cykliden, auch für die ins Unendliche reichenden, das konstruktive Element berücksichtigt, ähnlich wie in meiner Einführung in das stereometrische Zeichnen.

§ 2. Die Krümmungscyklide und die Grundlagen für die Krümmungstheorie der Flächen.

Von der Cyklide aus lassen sich auch die Grundlagen der Krümmungstheorie elementar festlegen, was ich schon im 94. Bande des Crelleschen Journals, Seite 239, angedeutet habe.

Durch einen Punkt A_1 einer Fläche nämlich lassen sich unendlich viele Normalschnitte legen, von denen jeder einen bestimmten Krümmungsradius hat. Dass unter diesen nur einer der grösste ist, wird sich sofort zeigen. Der grösste Krümmungskreis sei in die Ebene der Zeichnung gelegt (Fig. 8). Er stimmt längs einer unendlich kleinen Strecke $A_2 A_3$ mit dem entsprechenden Schnitte der Fläche überein, sobald nur Unstetigkeiten ausgeschlossen werden. Ist letzteres der Fall, so kann man die zum Normalschnitte $A_1 B_1$ gehörigen Krümmungskugel, die den entsprechenden Krümmungskreis zum Hauptkreis hat, in den A_1, A_2 und A_3 entsprechenden Lagen anbringen, wobei im allgemeinen die Änderung ihres Radius gegen seine Länge verschwindend klein ist. Dabei ist

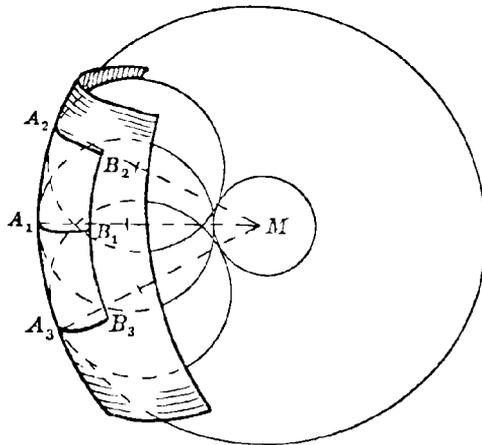
$A_2 B_2 B_3 A_3$
 nichts anderes, als ein auf die Fläche gezeichnetes unendlich kleines Rechteck. Die drei Kugeln können aber als innere Kugeln einer Drehungscyklide betrachtet werden, die sich der Fläche derartig anschmiegt, dass

$A_2 B_2 B_3 A_3$
 auch als ein auf sie selbst gezeichnetes Rechteck betrachtet werden kann. Daraus folgt: Finden in der Nähe von A_1 keine Unstetigkeiten statt, so darf ein kleines Rechteck der Fläche, welches seine eine Seite auf dem grössten der betrachteten Krümmungskreise hat, als Rechteck einer Drehungscyklide betrachtet werden, dessen eine Seite auf ihrem Äquator liegt.

Es ist also nur nötig, die Krümmungsverhältnisse bei positiver Krümmung am äusseren, bei negativer am inneren Äquator einer Drehungscyklide zu untersuchen. Was sich dann verallgemeinern lässt, ist leicht zu zeigen. Die betreffende Krümmungscyklide spielt für Flächen ganz dieselbe Rolle, wie der Krümmungskreis für Kurven. Die mit ihrer Hilfe zu erreichenden Vereinfachungen werden sich aus dem Folgenden ergeben.

Eulerscher Satz. In Fig. 9 sei $ABCD$ ein sehr kleines Rechteck auf einer Drehungscyklide, wobei AB dem äusseren Äquator, AD einem senkrecht dagegenstehenden Hauptschnitte angehört. Da AB und AD Kreisbogen sind, treffen die in B und D errichteten Normalen der Fläche die Normale AZ in Punkten M_1 und M_2 , den Mittel-

Fig. 8.



$$\frac{\varrho^2 \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\varrho^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1$$

oder endlich mit

$$2) \quad \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

vergleichen, wo α als veränderlich aufzufassen ist. Man erkennt, dass Gleichung 1) die einer Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{r_1}$ und $\sqrt{r_2}$ ist, wobei \sqrt{r} den veränderlichen Halbmesser, α seine Neigungswinkel bedeutet. Sind allerdings die Radien r_1 und r_2 entgegengesetzt, wobei man die Krümmung als negativ bezeichnet, handelt es sich um die Gleichung einer Hyperbel.

Zunächst sei nur von der Ellipse gesprochen, bei der $\sqrt{r_1}$ der grösste, $\sqrt{r_2}$ der kleinste Radius ist, während \sqrt{r} stets zwischen beide fällt. Für die Cykliden ist also r_1 der grösste, r_2 der kleinste Krümmungsradius für alle Normalschnitte in einem Punkt A des Äquators, und dabei ist sowohl der Äquator, als auch der Hauptschnitt, Krümmungslinie. Allgemein folgt:

In jedem Punkte einer Fläche giebt es unendlich viele Normalschnitte, unter deren Krümmungsradien es einen grössten r_1 und einen kleinsten r_2 giebt. Die Ebene dieser beiden stehen senkrecht aufeinander und geben die Richtungen der beiden Krümmungslinien an. Zieht man nach allen Richtungen hin die Tangenten der Fläche in dem Punkte, und giebt man jeder die Länge $\sqrt{r_1}$, wo r die aus Gleichung 1) berechnete Grösse ist, so bilden die Endpunkte eine Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{r_1}$ und $\sqrt{r_2}$.

Jetzt kann man aus dem Falle $r_1 = r_2$ die Lehre von den Kreispunkten einer Fläche elementar ableiten, ebenso die Sätze über konjugierte Halbmesser der Ellipse, über solche, die auf einander senkrecht stehen u. s. w. in bekannter Weise auf die Krümmungsradien übertragen.

Führt man unendlich nahe bei A einen Parallelschnitt zur Tangentialebene durch die Fläche, so entsteht übrigens eine der behandelten ähnliche Ellipse. Ist nämlich h der Abstand der beiden Ebenen, so sind die Bogen der kleinen Calotte, die durch die Normalschnitte in A gebildet werden, folgendem Gesetze (wie oben) unterworfen: $h = \frac{b_1^2}{2r_1} = \frac{b_2^2}{2r_2} = \frac{b^2}{2r}$, d. h. $b_1 : b_2 : b = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2} : \sqrt{r}$.

Die Halbmesser der Schnittfläche sind also proportional den sie tangierenden Radien der besprochenen Ellipse, beide Ellipsen sind also ähnlich.

Folglich: Bei positiver Krümmung ist in jeder Fläche der unendlich nahe Parallelschnitt zur Tangentialebene eine kleine Ellipse, deren Halbaxen proportional den Quadratwurzeln aus dem grössten und kleinsten Krümmungsradius an der

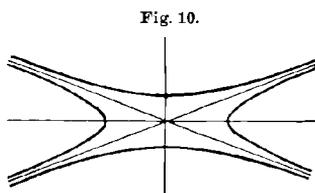
betreffenden Stelle sind. Man kann daher eine positive Krümmung auch als eine elliptische bezeichnen.

Entsprechendes findet bei negativer Krümmung statt, z.B. am inneren Äquator der Cyklide, wo, wenn r_2 die positive Länge des negativen Radius bezeichnet, die Hyperbel

$$\frac{\cos^2 \alpha}{r_1} - \frac{\sin^2 \alpha}{r_2} = \frac{1}{r}$$

maßgebend wird. Bei negativer Krümmung schneidet die Tangentialebene die Fläche. Der benachbarte Parallelschnitt kann sowohl auf

der einen, als auch auf der anderen Seite der Tangentialebene geführt werden. Das eine mal fällt die Schnittkurve in das eine Winkelpaar zwischen den entsprechenden Asymptoten, das andere mal in das andere. Die Asymptoten bilden den Grenzfall der Tangentialebene. Die Neigung der Asymptote gegen die eine Krümmungslinie be-



stimmt sich aus $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}}$. Die Schnittkurven haben aber nur in

unmittelbarer Umgebung des Punktes A hyperbolischen oder geradlinigen Charakter. Weiterhin hört das auf. Aus dem angegebenen Grunde kann man eine negative Krümmung auch als eine hyperbolische bezeichnen. Solches geschieht am inneren Äquator der Cyklide und bei jeder negativ gekrümmten Fläche.

Der Grenzfall zwischen der hyperbolischen und elliptischen Krümmung bildet die parabolische (Krümmung Null), bei der die beiden Asymptoten parallel ausfallen, sich also erst in unendlicher Entfernung schneiden, so dass man die beiden kleinen geradlinigen Elemente zugleich als unendlich lange Ellipse, als Hyperbel mit unendlich fernem Mittelpunkt, folglich auch als Parabel mit unendlich fernem Scheitel betrachten kann. Auch dafür bietet die Drehungscyklide ein Beispiel. Die beiden Ebenen, die sie längs zweier Kreise berühren, haben als Parallelschnitte solche, die konzentrische Kreise geben. In der Nähe jedes Punktes haben diese den Charakter zweier parallelen Geraden.

Dass auch das Theorem von Meunier elementar bewiesen werden kann, dürfte allgemein bekannt sein.

Jetzt soll noch gezeigt werden, dass auch die grundlegenden Sätze von Gauss über die Flächenkrümmung mit Hilfe der Cyklide elementar bewiesen werden können.

Das Gauss'sche Krümmungsmaß wird bekanntlich folgendermaßen erklärt. Auf einer gekrümmten Fläche sei ein Flächenstück f durch eine in sich geschlossene Kurve abgegrenzt. Auf einer Kugel vom Radius 1 bilde man f in der Weise ab, dass man zu jeder der sich im allgemeinen nicht schneidenden Normalen, die auf der Fläche in den Randpunkten von f errichtet sind, parallele Radien zieht. Die so

entstehende Fläche f_1 bezeichnet Gauss als die totale Krümmung der Fläche f . Sind beide Flächen unendlich klein, so nennt er $\frac{f_1}{f}$ das Krümmungsmaß von f .

Die geometrische Bedeutung dieses Krümmungsmaßes erkennt man, wie ebenfalls bekannt ist, folgendermaßen. Man begrenze ein kleines Flächenstück $ABCD$ durch benachbarte Krümmungslinien, so dass es ein Rechteck mit den Seiten s_1 und s_2 und vom Inhalte $f = s_1 \cdot s_2$ ist. Krümmungslinien werden gewählt, damit die Normalen, die in den Eckpunkten auf der Fläche errichtet sind, sich zu je zweien wirklich schneiden, was die Krümmungsmittelpunkte M_1, M_2, μ_1, μ_2

Fig. 11.

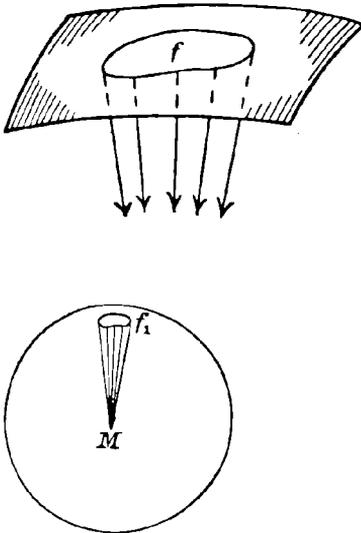
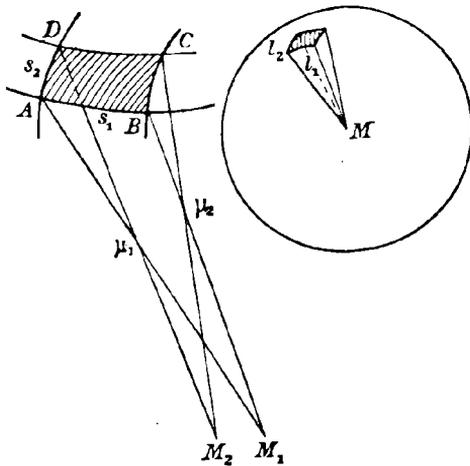


Fig. 12.



gibt. Schliesst man Unstetigkeiten aus, so sind die Krümmungsradien (für ein kleines Rechteck) gruppenweise gleich zu setzen, also

$$AM_1 = BM_1 = DM_2 = CM_2 = r_1, \quad A\mu_1 = B\mu_1 = C\mu_2 = D\mu_2 = r_2.$$

In der Kugel erhält man eine Pyramide, die, weil ihre Flächen zu den von je zwei Normalen gebildeten parallel sind, als Grundfläche ebenfalls ein Rechteck hat, dessen Inhalt $f_2 = l_1 \cdot l_2$ sein möge. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{l_1}{s_1} = \frac{1}{r_1}, \quad \frac{l_2}{s_2} = \frac{1}{r_2},$$

durch Multiplikation also

$$\frac{l_1 l_2}{s_1 s_2} = \frac{1}{r_1 r_2} \quad \text{oder} \quad \frac{f_1}{f} = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

Das Gauss'sche Krümmungsmaß bedeutet also den reziproken Wert vom Produkt der beiden Krümmungsradien für die unter-

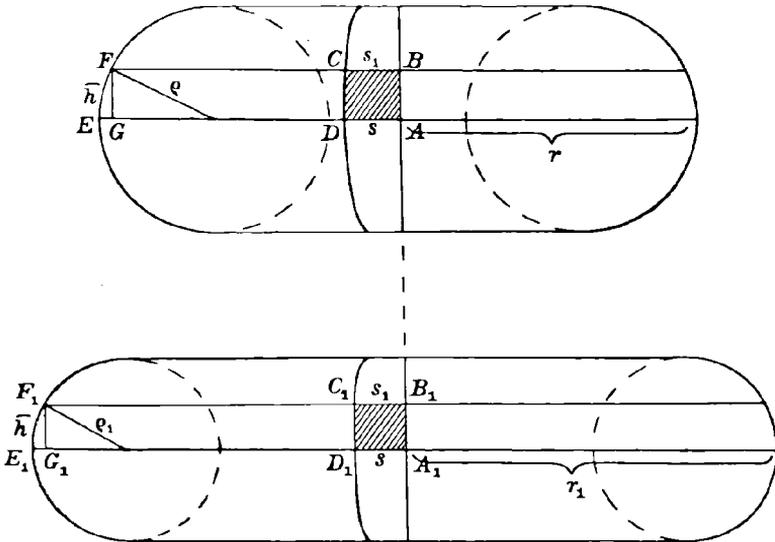
suchte Stelle. Diese allgemein bekannte Auseinandersetzung musste an dieser Stelle wiedergegeben werden.

Der Gauss'sche Fundamentalsatz über das Krümmungsmaß. Am äusseren Äquator einer Drehungscyklide bestimme man durch die Krümmungslinien ein kleines Rechteck $ABCD$ von den Seiten s und h (die beide gebogen sind).

Für dieses ist

$$s : s_1 = 2\pi AE : 2\pi BF = AE : BF,$$

Fig. 13.



Nun ist aber $BF = AE - EG = AE - \frac{h^2}{2\varrho}$, also ist

$$s : s_1 = AE : AE - \frac{h^2}{2\varrho} = r : r - \frac{h^2}{2\varrho} = 1 : 1 - \frac{h^2}{2r\varrho}.$$

oder

$$1) \quad \frac{s_1}{s} = 1 - \frac{h^2}{2r\varrho}.$$

Wie muss nun eine zweite Drehungscyklide beschaffen sein, wenn sich das Rechteck $ABCD$ so auf sie auflegen lassen soll, dass s wieder auf den äusseren Äquator fällt? Dabei soll das Flächenelement nicht gewaltsam gedehnt, sondern einfach gebogen werden, so dass das Auflegen zwanglos geschieht. Offenbar muss, wenn dies der Fall sein soll, auch hier

$$2) \quad \frac{s_1}{s} = 1 - \frac{h^2}{2r_1\varrho_1}$$

sein, wo r_1 und ϱ_1 die entsprechenden Radien sind. Da aber die Gleichungen in $\frac{s_1}{s}$ und h übereinstimmen, so folgt, dass $r\varrho = r_1\varrho_1$

und $\frac{1}{r\varrho} = \frac{1}{r_1\varrho_1}$ sein muss, wenn das Verlangte möglich sein soll, d.h.

das Krümmungsmaß muss an den beiden Stellen dasselbe sein. Ebenso ist bei negativer Krümmung mit dem inneren Äquator zu verfahren.

Nun gilt aber das, was am Äquator einer Cyklide gilt, abgesehen von Unstetigkeitsstellen von jeder Stelle einer beliebigen Fläche, sobald nur r und ρ dort dieselben sind. Jede der beiden Cyklidenstellen lässt sich also zu entsprechenden Stellen zweier Flächen in Beziehung setzen, und so folgt allgemein der Gauss'sche Satz:

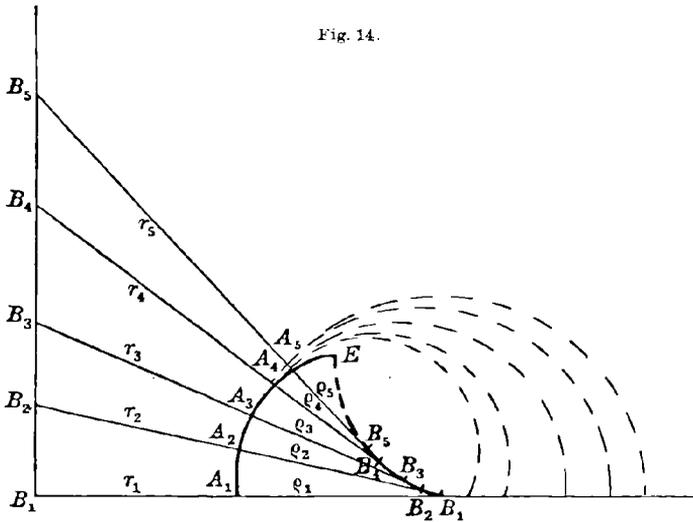
Soll ein Flächenelement von einer Fläche auf eine andere durch blosse Biegung übertragen werden können, so muss das Krümmungsmaß an den betreffenden Stellen dasselbe sein. Das Auflegen hat so zu erfolgen, dass Krümmungslinie auf Krümmungslinie fällt.

Offenbar kann das Auflegen in zweierlei Weise geschehen, da in $\frac{1}{r\rho}$ beide Radien als gleichberechtigt vertauscht werden können.

Verbiegt man eine Fläche oder ein Stück derselben in beliebiger Weise, wobei jedoch Dehnungen ausgeschlossen sein sollen, so ist gewissermaßen jedes Element der ersten Form auf ein entsprechendes der zweiten durch blosse Biegung aufgelegt worden, also muss das Krümmungsmaß jeder Stelle unverändert geblieben sein. Das Krümmungsmaß ist also für blosse Biegung eine Invariante. Da die zweite Fläche auf die erste durch blosse Biegung wieder aufgelegt werden kann, so ist sie auf diese abwickelbar. Aufeinander abwickelbare Flächen haben also an einander entsprechenden Stellen dasselbe Krümmungsmaß.

Damit ist der Gauss'sche grundlegende Satz auf elementarem Wege gewonnen. Dass auch anderwärts Versuche gemacht werden, ihn einfach zu beweisen, geht aus dem soeben erschienenen 27. Bande (Jahrgang 1896) des Jahrbuchs der Fortschritte der Mathematik hervor, wo es auf Seite 507 heisst: „A. Calinon: Le théorème de Gauss sur la courbure. Nouv. Ann. (3) 15, 63-65. Es ist ein einfacher, rein geometrischer Beweis des Gauss'schen Satzes von Totalkrümmung. Jhk.“ Solche Versuche scheinen in neuerer Zeit einige Beachtung insofern zu verdienen, als die grosse Frage über die Grundlagen der Geometrie stärker denn je hervorgetreten ist. Das grosse Werk von Killing bringt einen Überblick über die gesamte Litteratur. Sogar in elementaren Lehrbüchern (vergl. Schwering) beginnt die Frage der Krümmung des Raumes aufzutauchen. In der That zwingt das sogenannte elfte Axiom Euklids in seiner eigentümlichen Stellung unter den übrigen jeden scharfsinniger denkenden Schüler der Oberklassen zur Untersuchung darüber, ob es eine Folge der übrigen Axiome sein könnte, oder ob es unabhängig von ihnen besteht. Und wenn der Lehrer der philosophischen Propädeutik die Kantsche Auffassung des Raumes behandelt, so entstehen berechtigte Zweifel darüber, ob es sich

um eins der Urteile a priori handelt. Vergl. P. Mansion: *Premiers principes de la métageométrie ou géométrie générale*. *Mathesis* (2) 6, Suppl. IV, 47 S.; *Revue néoscolastique* 3, 143—170, 242—259. Auch darüber berichtet das oben genannte Jahrbuch (1896) Seite 374. Als Inhalt des neunten Kapitels wird angegeben: „Die Postulate sind Ergänzungen zur Definition und nicht synthetische Urteile a priori.“ Sodann Kapitel 10. Unbeweisbarkeit der Postulate. 11. Die physische Geometrie ist näherungsweise euklidisch; aber es ist unmöglich, zu wissen, ob sie es absolut ist. 12. Die Metaphysik und



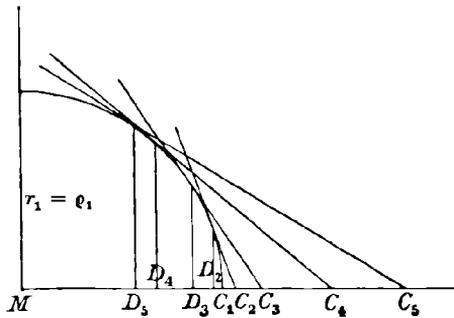
der Kantianismus. Kant giebt a priori zu, dass es nur eine mögliche ideale Geometrie giebt, was widersinnig ist, da es unendlich viele giebt, die sich in drei Klassen teilen. Es handelt sich also zugleich um eine Frage von allgemeiner philosophischer Bedeutung. Daher erscheint es wünschenswert, elementar zu solchen Fragen vordringen zu können.

Dabei spielt die einfachste Frage der konstanten Krümmung eine besondere Rolle. Dass die Ebene mit allen auf sie abwickelbaren Flächen überall die Krümmung Null hat, dass die Kugel und die auf sie abwickelbaren Flächen überall konstante positive Krümmung haben, das wird leicht eingesehen. Schwieriger erscheint die Vorstellung einer Fläche von konstanter negativer Krümmung. Aber auch diese ist der elementaren Erläuterung fähig, selbstverständlich nur in einer Annäherungskonstruktion, deren Genauigkeit aber beliebig weit getrieben werden kann.

In Figur 14 sei $B_1 Y$ Drehungsaxe und auf ihrer Normalen sei $r_1 = \rho_1$. Um M_1 werde ein beliebig kleiner Kreisbogen $A_1 A_2$ beschrieben und die Gerade $M_1 A_2 B_2$ gezogen, die $A_2 B_2 = r_2$ giebt. In

der Hilfsfigur, in der ein Kreisquadrant mit Radius r_1 gezeichnet ist, mache man $MC_2 = r_2$, ziehe von C_2 aus die Tangente und projiziere den Berührungspunkt herab, was D_2 giebt. $MD_2 = \varrho_2$ werde von A_2 aus auf A_2M_1 abgetragen und so M_2 bestimmt. Um M_2 beschreibe man mit ϱ_2 einen beliebig kleinen Bogen A_3A_3 , die Fortsetzung des vorigen. Die Gerade $M_2A_3B_3$ giebt den Radius $A_3B_3 = r_3$, mit dem man in der Hilfsfigur ebenso, wie vorher, ϱ_3 bilde u. s. w. Setzt man dies fort,

Fig. 15.



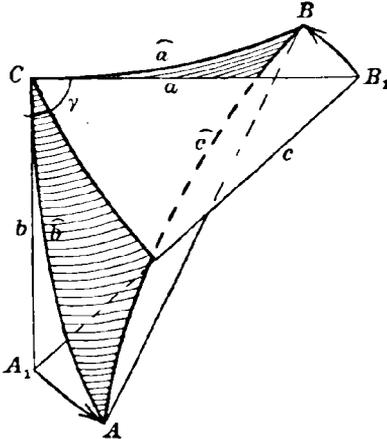
so kommt man schliesslich zu sehr grossem r und sehr kleinem ϱ , theoretisch wird zuletzt $r = \infty$, $\varrho = 0$ und die Tangente der Kurve horizontal, wobei z. B. E den Schluss bildet. Noch ist die Kurve symmetrisch nach unten zu vervollständigen und periodisch fortzusetzen, und dann ist die Drehung um die Axe vorzunehmen. Die entstehende Fläche hat die konstante negative Krümmung $\frac{1}{r_n \varrho_n} = -\frac{1}{r_1^2}$.

Selbstverständlich kann man auch mit ungleichem r_1 und ϱ_1 beginnen, nur muss dann jedes Produkt $r_n \varrho_n = r_1 \varrho_1$ gemacht werden. Dann hat die Fläche eine etwas andere Gestalt.

Solche Flächen konstanter negativer Krümmung und die aus ihnen durch Biegung hervorgehenden, d. h. auf sie abwickelbaren, haben nun dieselbe Haupteigenschaft, wie die auf die Kugel abwickelbaren: Jedes Flächenelement kann auf ihnen unter blosser Biegung durch Drehung und Verschiebung in beliebige Lagen gebracht werden. Diejenigen Gebilde einer solchen Fläche, die so unter Biegung zur Deckung gebracht werden können, werden als kongruent bezeichnet. Da nun Dehnungen und Verkürzungen ausgeschlossen sind, so behalten die Linien bei solchen Bewegungen ihre Länge bei. Decken sich also zwei Punktpaare, so decken sich auch ihre kürzesten Verbindungslinien. Geodätische Linien bleiben also bei jener Bewegung geodätische Linien. Auch die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden, bleiben ungeändert. Im Vergleich zur Kugel findet aber ein wichtiger Unterschied statt. Errichtet man dort auf dem Äquator zwei Hauptkreise (geodätische Linien) als Lote, so treffen diese sich in den Polen. Konvergieren sie unter einem Winkel α , so hat das Dreieck die Winkelsumme $180^\circ + \alpha$. Macht man das Entsprechende auf dem senkrechten Kreiscylinder, so wird die Winkelsumme $180^\circ + 0^\circ = 180^\circ$. Macht man dasselbe am Äquator der hier untersuchten Fläche, so divergieren die beiden Linien, d. h. ihre Konvergenz ist eine negative.

Während also auf der Kugel das besprochene und überhaupt jedes geodätische Dreieck eine Winkelsumme hat, die 180° überschreitet, hat man auf dem Cylinder die Winkelsumme 180° und auf der hier behandelten Fläche eine Winkelsumme unter 180° zu erwarten. Dies ist zunächst nur ein Analogieschluss. Er bestätigt sich aber durch folgende elementare Betrachtung.

Fig. 16.



ABC sei ein kleines geodätisches Dreieck auf der Fläche von konstanter negativer Krümmung. Man bilde die Tangenten in C und mache $CB_1 = \widehat{CB}$ und $CA = \widehat{CA}$, so dass $\widehat{a} = a$ und $\widehat{b} = b$ ist. Biegt man a in die Form von \widehat{a} zurück, so bewegt sich B_1 anfangs senkrecht gegen die Ebene des Dreiecks; ebenso A_1 , wenn b in die Form von \widehat{b} zurückgebogen wird. Weil aber die kleinen Bogen B_1B und A_1A entgegengesetzt gerichtete Lote auf der Ebene A_1B_1C sind, so

folgt, dass $AB > A_1B_1$ ist, folglich ist erst recht der geodätische Bogen $\widehat{AB} > A_1B_1$ d. h. $\widehat{c} > c$. Daher ist

$$\frac{\widehat{a}^2 + \widehat{b}^2 - \widehat{c}^2}{2\widehat{a}\widehat{b}} < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ also auch } \frac{\widehat{a}^2 + \widehat{b}^2 - \widehat{c}^2}{2\widehat{a}\widehat{b}} < \cos \gamma.$$

Daher ist $\cos \gamma$ grösser, als $\cos \gamma_1$ in einem ebenen Dreiecke, dessen Seiten gleich \widehat{a} , \widehat{b} , und \widehat{c} sind, und daraus folgt $\gamma < \gamma_1$. Ebenso wird gezeigt, dass $\alpha < \alpha_1$ und $\beta < \beta_1$ ist. Folglich ist

$$\alpha + \beta + \gamma < \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1.$$

Letztere Summe ist aber gleich 180° , folglich $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$. (Ein elementarer Beweis des Gauss'schen Satzes, dass der Dreiecksinhalt proportional der Grösse $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ ist, dürfte auch zu ermöglichen sein, ist mir aber bisher noch nicht gelungen.)

Sämtliche Sätze der Euklidischen Geometrie mit Ausnahme der vom elften Axiom abhängigen lassen sich auf die genannte Fläche übertragen.

Daraus folgt, dass das elfte Axiom Euklids keine Folge der übrigen Axiome ist. Die Geometrie zerfällt also in zwei Teile. Der eine giebt Sätze, die sowohl von der Euklidischen Ebene, als auch von den auf die Kugel und auf die Flächen negativer konstanter Krümmung abwickelbaren Flächen gelten. Der zweite Teil spaltet sich in drei Unterabteilungen, von denen die eine die übrigen Sätze für die

Euklidische Ebene, die andere die Sätze für die beiden Arten von Flächen konstanter Krümmung giebt. Nun kann nicht bewiesen werden, dass die Ebene des wirklichen Raumes die Krümmung Null habe. Soll also die Geometrie streng verfahren, so muss sie alle drei Arten gleichberechtigter Theorien zulassen (die einen gemeinsamen Unterbau haben), nämlich die Geometrie des Euklid, die von Riemann und die von Lobatschewsky.

Gerade das vorzügliche Werk Killings gab mir den Anstoss zu den vorstehenden Betrachtungen, die mir einfacher in dieses Gebiet einzuführen scheinen, als der dort eingeschlagene Weg. Bei Killing heisst es in Bd. I auf Seite 12 bezüglich der Flächen negativer Krümmung: „Eine dritte Art, sattelförmige Flächen, welche aus einem hier nicht zu erörternden Grunde als Flächen konstanter negativer Krümmung bezeichnet werden.“ Darauf werden die Eigenschaften ohne Beweis mitgeteilt. Auf Seite 91 wird die Übertragung der ebenen Geometrie auf diese Flächen besprochen: „So interessant diese Übertragung ist, leidet sie für unsere Zwecke an einigen Mängeln. Der Beweis derjenigen Sätze, auf welche es uns ankommt, erfordert ein recht tiefes Eingehen in schwierigere Partien der Mathematik, wir möchten uns deshalb begnügen, die einzelnen Sätze ohne Beweis rein historisch anzuführen.“

Ich meine gezeitigt zu haben, dass man auch ohne höhere Analysis zum Ziele gelangen kann. Die Einführung Killings in die Lobatschewsky'sche Theorie erfordert jedenfalls eine grössere Abstraktionsfähigkeit, als das hier Vorgetragene.

Zu Fig. 14 sei noch bemerkt, dass es drei Arten solcher Drehungsflächen giebt. Geht man nämlich von einer beliebigen der schrägen Geraden aus und zwar bei beliebiger Teilung, so tritt bei derselben Konstruktion auch der Fall ein, dass die Kurve die Drehungsaxe schneidet. Dies muss geradlinig geschehen, da dann der eine Krümmungsradius gleich Null ist, der andere also unendlich gross sein muss.

Dieser Schnittpunkt kann aber auch ins Unendliche fallen, wobei man auf die Traktrix und die Gauss'sche Pseudosphäre geführt wird. Dieselbe Konstruktion, nur auf gleich gerichtete Krümmungsradien angewandt, führt auf die drei Arten von Drehungsflächen konstanter positiver Krümmung. So erkennt man, dass das gesamte Gebiet, welches für die Theorie der Grundlagen der Geometrie von so grosser Bedeutung geworden ist, auf Grund elementarer Betrachtungen und Konstruktionen zugänglich gemacht werden kann. Bezüglich der reichhaltigen Litteratur sei auf das Killingsche Werk verwiesen, wo sie kritisch besprochen wird. Die verschiedenen Arten von Drehungsflächen konstanter Krümmung befinden sich skizziert im Brill'schen Modellkataloge und in Bianchi's Differentialgeometrie, die, von Lukat übersetzt, bei B. G. Teubner in Leipzig erschienen ist.

Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven.

Von

Prof. Dr. FR. SCHILLING

in Göttingen.

Mit zwei Tafeln.

Auf der Naturforscherversammlung zu Düsseldorf (1898) hatte ich die Ehre, der Deutschen Mathematikervereinigung eine Zusammenstellung von mir entworfener kinematischer Originalmodelle vorlegen zu dürfen. Der unmittelbaren Aufforderung des Herrn Geheimrat Klein in Göttingen folgend habe ich mit diesen Modellen den Gedanken zu verwirklichen begonnen, der vor zwei Jahren auf der Frankfurter Versammlung unter allseitiger lebhafter Zustimmung ausgesprochen wurde: es möchte eine Sammlung einfacher kinematischer Modelle herausgegeben werden, welche die wichtigsten Mechanismen in der Art zur Anschauung brächte, dass der mathematische Grundgedanke überall deutlich hervorträte.*

Ich möchte mir im folgenden erlauben über die Einrichtung meiner Modelle** und das, was sie darstellen, kurz zu berichten. In dem ersten Paragraphen dieser Mitteilung habe ich jedoch zum leichteren Verständnis der Modelle eine neue, besonders einfache Einführung in die Theorie der allgemeinen cyklischen Kurven vorangestellt, da die bisher veröffentlichten Darstellungen in den Spezialschriften und Lehrbüchern*** entweder recht schwerfällig geschrieben oder unvollständig,

* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung V, S. 5 (1896).

** Dieselben sind inzwischen im Verlage der Firma Martin Schilling in Halle a. S. erschienen, die nähere Auskunft über den Bezug gern erteilt.

*** Etwas umständlich geschrieben sind z. B. die Darstellungen von A. Vieter und Ch. Wiener in dieser Zeitschrift, Bd. 25, S. 263 flg. (1880) und Bd. 26, S. 255 flg. (1881). Unrichtiges enthalten z. B. die Lehrbücher: Weissenborn, Die cyklischen Kurven, Eisenach (1856), Hattendorff, Analytische Geometrie, Hannover (1887), S. 108 flg. Koenigs, Leçons de Cinématique, Paris 1897, S. 163. Am besten ist noch die kurze Mitteilung von Rittershaus in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preussen 1874, Jahrg. 53, S. 272, an die sich in ausführlicherer Form Burmester in seinem Lehrbuch der Kinematik, Leipzig (1888), S. 134 flg. anschliesst. Doch stellen letztere nicht die analytische Gleichungsform der Kurven auf. (Vergl. auch Beller mann, Epicykloiden und Hypocykloiden, Jena 1867.)

wenn nicht gar unrichtig sind. Diesem Umstande ist es auch zuzuschreiben, wenn in den Kreisen der Mathematiker die an sich recht elementaren Verhältnisse nicht so bekannt sind, als sie es besonders wegen ihrer technischen Bedeutung für die Konstruktion der Zahnräder verdienen.

§ 1.

Die allgemeinen cyklischen Kurven.

Als Definition der allgemeinen cyklischen Kurven sei folgende erste kinematische Erzeugung an die Spitze gestellt:

1. Drehen sich zwei benachbarte Seiten SE_1 und SE_2 eines als Gelenksystem gegebenen Parallelogrammes SE_1ME_2 mit gleichförmigen, aber von einander verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω und Ω um den gemeinsamen Eckpunkt S , so beschreibt der gegenüberliegende Eckpunkt M eine allgemeine cyklische Kurve (Fig. 1).

Wir denken in der Ebene des Parallelogrammes in bekannter Weise die komplexe Variable $z = x + iy$ gedeutet.* In der „Anfangslage“ des Parallelogrammes mögen ferner die Seiten SE_1 und SE_2 übereinanderliegen** und sich vom Nullpunkt aus längs der positiven Richtung der Axe des Reellen erstrecken, wie in umstehender Figur zugleich mit den geometrischen Örtern der Punkte E_1 und E_2 angedeutet ist (Fig. 2). Es sei zur Abkürzung $SE_1 = C$, $SE_2 = c$ gesetzt; ferner seien die Lagen der Punkte E_1 und E_2 während des Verlaufs der Bewegung durch die Zahlwerte z_1 und z_2 , die des Punktes M durch z ausgedrückt und endlich mit t ein etwa als Zeit zu deutender Parameter bezeichnet. Dann gelten zunächst die Gleichungen:

$$z_1 = C \cdot e^{i\omega t}, \quad z_2 = c \cdot e^{i\Omega t}.$$

Da in jedem Augenblicke $z = z_1 + z_2$ ist, so ergibt sich:

$$1) \quad z = C \cdot e^{i\omega t} + c \cdot e^{i\Omega t}$$

als die offenbar einfachste und übersichtlichste Gleichungsform, welche für die allgemeinen cyklischen Kurven aufzustellen sein dürfte.***

Offenbar sind die beiden Hauptfälle zu unterscheiden, dass ω und Ω gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Wir wollen voraussetzen, was der Allgemeinheit der Untersuchung ersichtlich keinen

* Komplexe Variable hat z. B. bereits Herr Mehmke in ähnlichen Untersuchungen, nämlich in seiner Arbeit: Über die Bewegung eines ebenen starren Systems in seiner Ebene, in dieser Zeitschrift Bd. 35, S. 1—24 und S. 65—81 (1890) mit Vorteil benutzt.

** Vergl. die folgende Anmerkung.

*** Hätten wir eine beliebige Lage des Parallelogrammes als Anfangslage gewählt, etwa die in Fig. 1 dargestellte, so hätte sich, wenn wir noch z' und t' statt z , t schreiben, als Gleichung für die Lage von M ergeben:

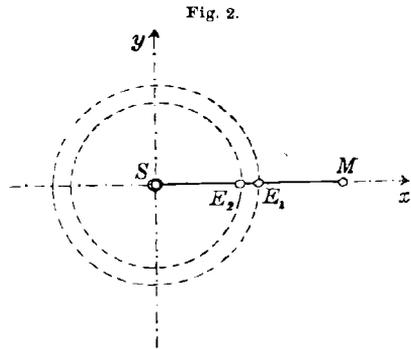
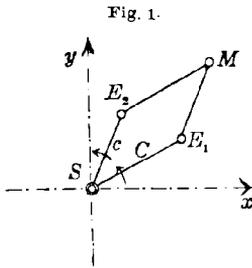
Abbruch thut, dass im ersten Hauptfalle ω und Ω beide positiv, im zweiten ω negativ und Ω positiv, in beiden Fällen $|\omega| < \Omega$ sei.

Der Gleichung 1) lässt sich leicht eine der beiden folgenden Formen geben:

$$2) \quad z = (C + c \cdot e^{i(\Omega - \omega)t}) \cdot e^{i\omega t},$$

$$3) \quad z = (c + C \cdot e^{i(\omega - \Omega)t}) \cdot e^{i\Omega t}.$$

Wir wollen, um uns bestimmter ausdrücken zu können, die folgende Betrachtung an den ersten Hauptfall anlehnen, jedoch gleich hier be-



merken, dass ganz gleiche Resultate sich für den zweiten Hauptfall ergeben. Was bedeutet die Gleichung 2) für einen bestimmten Wert t'

$$1') \quad z' = C \cdot e^{i(\omega t' + \alpha)} + c \cdot e^{i(\Omega t' + \beta)},$$

wo α und β die Winkel bezeichnen, welche SE_1 und SE_2 in der Anfangslage mit der positiven Richtung der Axe des Reellen bilden. Substituieren wir in diese Gleichung

$$z' = z \cdot e^{i\sigma}, \quad t' = t + \tau,$$

wo σ und τ zwei noch zu bestimmende reelle Grössen sein sollen, so kommt:

$$z = C \cdot e^{i(\omega t + \omega \tau + \alpha - \sigma)} + c \cdot e^{i(\Omega t + \Omega \tau + \beta - \sigma)}.$$

Diese Substitution kommt ersichtlich nur auf eine Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt und die Wahl eines neuen Nullpunkts für den Parameter hinaus.

Wir setzen jetzt:

$$\omega \tau + \alpha - \sigma = 0, \quad \Omega \tau + \beta - \sigma = 0,$$

woraus folgt:

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{\Omega - \omega}, \quad \sigma = \frac{(\Omega + \omega)\tau + \alpha + \beta}{2}.$$

Abgesehen von dem schon im Satze 1 ausgenommenen trivialen Falle $\omega = \Omega$, in dem das Parallelogramm als starres System sich um S dreht, haben wir hierdurch die Grössen τ und σ in brauchbarer Weise bestimmt und damit die Gleichung 1') auf die Gleichung 1) zurückgeführt.

Auch darin, dass in den Gleichungen 1) und 1') die Grössen C und c von vornherein als positiv angenommen sind, liegt offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtung.

des Parameters t geometrisch? Hierauf geben uns die elementaren Regeln über das geometrische Rechnen mit Strecken oder komplexen Zahlen Antwort. Wir denken von dem Parallelogramm (Fig. 1) allein die Strecken $SE_1 = C$ und $E_1M = c$ beibehalten. Der Klammergrösse auf der rechten Seite der Gleichung 2) entsprechend haben wir vom Nullpunkt aus zunächst die Strecke C längs der positiven Richtung der Axe des Reellen abzutragen und daran die Strecke c , jedoch in einer Richtung, die mit der positiven Richtung der Axe des Reellen den Winkel $(\Omega - \omega)t^*$ bildet (Fig. 3). Der Endpunkt \bar{M} der zweiten Strecke giebt dann den komplexen Wert der Klammergrösse. Dass diese endlich noch mit $e^{i\omega t^*}$ zu multiplizieren ist, heisst geometrisch, wir sollen jetzt die beiden aneinander gereihten Strecken, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern, noch um den Nullpunkt durch den Winkel ωt^* drehen. Die neue Lage M^* des Punktes \bar{M} bezeichnet den Wert der ganzen rechten Seite der Gleichung 2). Mit anderen Worten: Der Punkt M (oder das System des Gliedes E_1M) ist in jedem Augenblick zwei Drehungen unterworfen, einmal einer solchen um die momentane

Fig. 3.

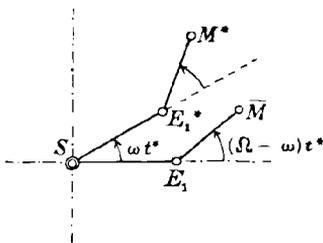
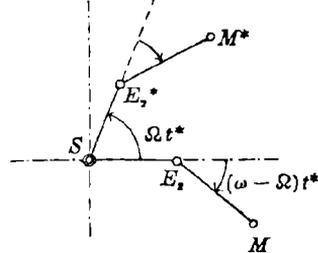


Fig. 4.



Lage des Punktes E_1 mit der Geschwindigkeit $(\Omega - \omega)$, zweitens (zugleich mit E_1) einer solchen um den Punkt S mit der Geschwindigkeit ω .* Dem Satze 1 stellt sich daher sogleich folgende zweite kinematische Erzeugung der allgemeinen cyklischen Kurven zur Seite:

2. Eine allgemeine cyklische Kurve wird auch von jedem Punkte M eines beweglichen Systems erzeugt, das mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich um einen Punkt E_1 dreht, während letzterer selbst gleichzeitig mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich auf einem Kreise um einen festen Punkt S bewegt.

Diese zweite Erzeugungsart besitzt aber ersichtlich den Nachteil, für die einzelne cyklische Kurve zweideutig bestimmt zu sein. Denn wir konnten ja im Anschluss an die Gleichung 3) auch die aus den

* Die Verhältnisse sind also ganz der angenäherten Bewegung des Mondes analog, der sich gleichzeitig um die Erde und mit dieser um die Sonne dreht. Dieser Analogie entsprechend sind auch zum Teil die Bezeichnungen des Textes gewählt.

Strecken SE_2 und E_2M bestehende Hälfte des Parallelogrammes beibehalten, für deren Bewegung die Figur 4 gilt. Dieselbe cyklische Kurve wird eben auch beschrieben vom Punkte M , wenn dieser mit konstanter (negativer) Geschwindigkeit $(\omega - \Omega)$ sich um E_2 und zugleich mit E_2 mit konstanter Geschwindigkeit Ω um S dreht.

Wir bringen nun weiter einige einfache kinematische Hilfssätze zur Anwendung. Anstatt im Falle der Giltigkeit der Figur 3 dem System E_1M gleichzeitig die Winkelgeschwindigkeiten $(\Omega - \omega)$ und ω bez. um E_1 und S zu erteilen, können wir ihm momentan die Winkelgeschwindigkeit $(\Omega - \omega) + \omega = \Omega$ um denjenigen Punkt P_1 auf SE_1

Fig. 5.

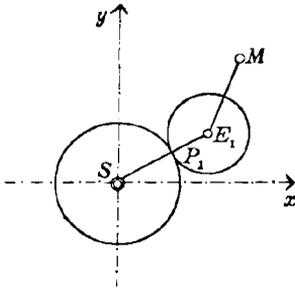
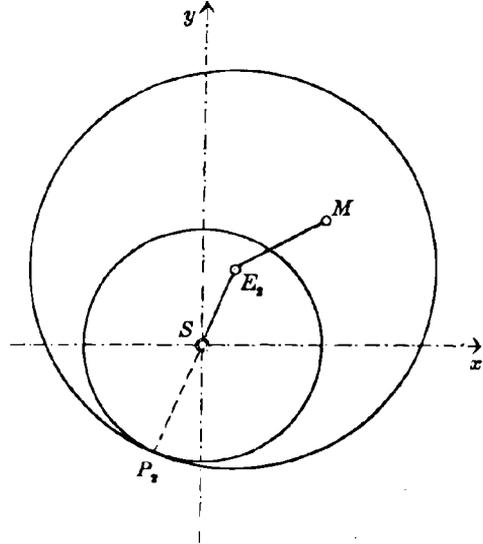


Fig. 6.



geben, der SE_1 im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten teilt (Fig. 5). Es besteht also die Gleichung:

$$\frac{E_1 P_1}{P_1 S} = \frac{\omega}{\Omega - \omega} \quad \text{oder} \quad E_1 P_1 = b, \quad P_1 S = a \quad \text{gesetzt,}$$

$$4) \quad \frac{b}{a} = \frac{\omega}{\Omega - \omega}.$$

Die geometrischen Örter des augenblicklichen Poles oder Momentancentrums P_1 im festen und im beweglichen Systeme E_1M , d. h. die sogenannten Polbahnen, sind ersichtlich die in der Figur 5 eingezeichneten, sich äusserlich berührenden Kreise um S und E_1 bez. mit a und b als Radien.

Als dritte kinematische Erzeugung der allgemeinen cyklischen Kurven ergibt sich daher folgende, meist bevorzugte:

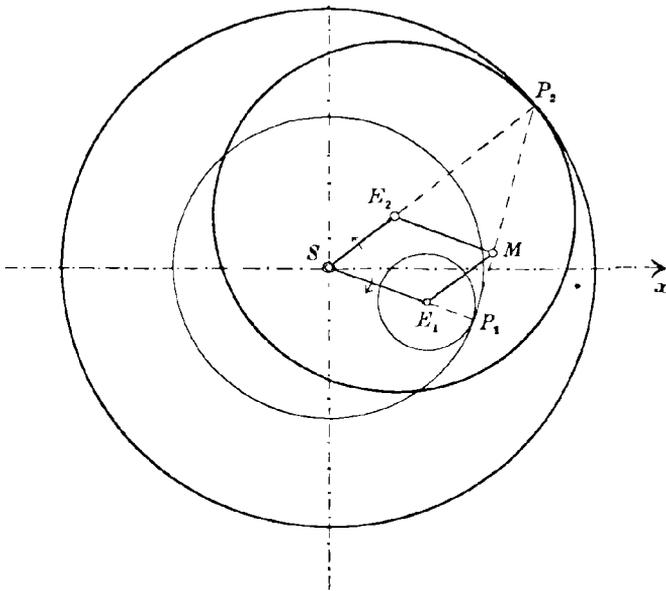
6. Wenn man die für denselben Zeitpunkt t^* gezeichneten Figuren 5 und 6 so zu einer einzigen vereinigt, dass das ursprüngliche Parallelogramm wieder erscheint, so liegen die Punkte P_1, P_2, M in einer Geraden (Fig. 7). Dieser Satz gestattet auch leicht geometrisch die Grössen A, B, C zu konstruieren, wenn die Grössen a, b, c gegeben sind, und umgekehrt.

In Betreff des zweiten Hauptfalles ($\omega < 0, \Omega > 0, |\omega| < \Omega$) begnügen wir uns noch folgendes besonders zu bemerken:

4*. Jede cyklische Kurve des zweiten Hauptfalles kann durch zwei Paare sich innerlich berührender Kreise erzeugt werden, indem hierbei beidemal der kleinere auf dem grösseren abrollt.

An die Stelle der Figur 7 tritt die Figur 7*. Den Formeln 4)–8) entsprechen ferner jetzt folgende Formeln, in denen a, b und A, B wieder die (absolut gerechneten) Radien SP_1, P_1E_1 und SP_2, P_2E_2 der beiden Kreispaaire bezeichnen:

Fig. 7*.
y ↑



$$4^*) \quad \frac{b}{a} = -\frac{\omega}{\Omega - \omega},$$

$$5^*) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega},$$

$$6^*) \quad \frac{B}{A} + \frac{b}{a} = 1,$$

$$7^*) \quad a - b = C,$$

$$8^*) \quad A - B = c.$$

Die Sätze 5 und 6 gelten unverändert auch hier.*

Die Gleich. 6*) giebt uns Anlass, den bekannten Fall zu erwähnen, dass eines der Radienverhältnisse und damit auch das andere gleich $\frac{1}{2}$ ist, so dass

der kleinere Kreis jedes Paares durch den Mittelpunkt des grösseren geht. Dann folgt aus jeder der Gleichungen 4*) und 5*), dass $\omega = -\Omega$ ist. Die ursprüngliche Gleichung 1) geht jetzt über in:

* Ist ferner z. B. C und $\omega : \Omega$ konstant, aber c variabel, so stellt die Gleichung 1) oder 2) durch passende Wahl von c jede beliebige cyklische Kurve dar, welche durch Abrollung des einen zugehörigen Kreispaares (Fig. 5) sich erzeugen lässt.

9)
$$z = C \cdot e^{-i\Omega t} + c \cdot e^{i\Omega t}$$

oder, wenn die reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten einander gleich gesetzt werden:

10)
$$\begin{aligned} x &= (c + C) \cdot \cos \Omega t, \\ y &= (c - C) \cdot \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn nicht C gleich c ist:

$$\frac{x^2}{(c + C)^2} + \frac{y^2}{(c - C)^2} = 1, \text{ d. h.}$$

7. Ist $C = c$, so beschreibt der Punkt M (im Falle $\omega = -\Omega$) eine Strecke auf der x -Axe, ist $C \geq c$, dagegen eine Ellipse mit den auf der x - und y -Axe gelegenen Halbachsen $c + C$ und $c - C$. Ich darf es dem Leser überlassen, sich die entsprechenden speziellen Figuren zu zeichnen. Dieser Übergangsfall soll indes bis zum Schlusse des Paragraphen ausgeschlossen sein, da er ja nicht eigentliche cyklische Kurven liefert.

Ferner giebt die Gleichung 6*) folgenden Satz, der die beiden Kreispaare zu unterscheiden gestattet:

8. Ist im zweiten Hauptfalle das Radienverhältnis des einen Kreispaares $> \frac{1}{2}$, so ist das des anderen $< \frac{1}{2}$.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen mögen jetzt folgende Benennungen der verschiedenen Typen der allgemeinen cyklischen Kurven eingeführt werden:

9. Die cyklischen Kurven des ersten Hauptfalles ($\frac{\omega}{\Omega} > 0$) seien als „Epitrochoiden“, die des zweiten Hauptfalles ($\frac{\omega}{\Omega} < 0$) als „Hypotrochoiden“ bezeichnet.

Dem Wunsche, in der Benennung ausdrücklich hervorzuheben, ob die einzelne Epitrochoide oder Hypotrochoide durch das eine oder andere Kreispaar erzeugt sein soll, trägt dann folgende Erweiterung des letzten Satzes Rechnung:

10. Dieselbe Epitrochoide kann als „Epitrochoide mit freiem Centrum“ oder als „Epitrochoide mit bedecktem Centrum“ und ebenso dieselbe Hypotrochoide als „Hypotrochoide mit freiem Centrum“ oder als „Hypotrochoide mit bedecktem Centrum“ bezeichnet werden, je nachdem der als Scheibe gedachte abrollende Kreis den Sätzen 4 und 8 entsprechend den Mittelpunkt des festen Kreises frei lässt oder bedeckt.

Endlich stellen wir noch folgende, an die Gleichung 1) anknüpfende Definitionen auf, welche nur eine solche Wahl der Bezeichnungen daselbst verlangen, dass $|\omega| < |\Omega|$ ist:

11. Je nachdem das Verhältnis $\frac{c}{C} >, <$ oder $= \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|$ ist, wo $\omega < |\Omega|$ ist, mag im übrigen der erste oder der zweite

* ὁ κύκλος, die Scheibe, das Rad.

Hauptfall vorliegen, soll die cyklische Kurve bez. als verschlungene, gestreckte oder gespitzte (Epi- oder Hypo-) Trochoide bezeichnet werden.* Eine gespitzte Epitrochoide oder Hypotrochoide (mit freiem oder bedecktem Centrum) soll abgekürzt bez. auch eine Epicykloide oder Hypocykloide (mit freiem oder bedecktem Centrum) genannt werden.

Ich will im einzelnen nicht weiter ausführen, dass die im Satze 11 gegebenen Benennungen sich durchaus mit folgenden recht zweckmässigen geometrischen Definitionen decken, die Chr. Wiener in der auf S. 214 citierten Arbeit giebt und denen die Erzeugung der Kurven durch Kreispaaire zu Grunde liegen:

11*. Wenn der beschreibende Punkt M und der feste Kreismittelpunkt S beide innerhalb oder beide ausserhalb des beweglichen Kreises liegen, so haben wir eine verschlungene Trochoide.

Wenn der beschreibende Punkt M innerhalb des beweglichen Kreises, der feste Kreismittelpunkt S dagegen ausserhalb liegt oder umgekehrt, so haben wir eine gestreckte Trochoide.

Wenn endlich der beschreibende Punkt auf dem beweglichen Kreise liegt (mag der feste Kreismittelpunkt dann ausserhalb oder innerhalb liegen), so haben wir eine gespitzte Trochoide.

Zum Schluss möchte ich mit wenigen Worten noch anführen, wie die Gleichungen für die Trochoiden in rechtwinkligen Koordinaten x, y sich aus der Gleichung 1) ergeben. Setzen wir die reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten einander gleich, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 11) \quad x &= C \cos \omega t + c \cos \Omega t, \\ y &= C \sin \omega t + c \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Wollen wir diese Gleichungen noch so umformen, dass sie z. B. die Erzeugung der Trochoide als eine Epitrochoide mit freiem Centrum unmittelbar erkennen lassen, so führen wir durch die Substitution $\lambda = \omega t$

* Ist $\frac{c}{C} = \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|$, so gilt der Satz, dass die festen Kreise beider Paare zusammenfallen. Denn im ersten Hauptfalle folgt z. B. aus den Gleichungen 7) und 8):

$$\frac{B - A}{b + a} = \frac{c}{C} = \frac{\omega}{\Omega}$$

oder unter Benutzung der Gleichungen 4) und 5):

$$\frac{A}{a} \cdot \frac{\frac{\Omega}{\omega} - 1}{\frac{\Omega}{\omega} + 1} = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{A}{a} = 1.$$

Analog ist der Beweis im zweiten Hauptfalle zu führen.

an Stelle von t den Parameter λ ein, der den Winkel bezeichnet, durch den sich die Centrale SE_1 des Kreispaares um S gedreht hat, und eliminieren mit Hilfe der Gleichungen 4) und 7) die Grössen $\frac{\omega}{\Omega}$ und c . Wir bekommen dann:

$$11a) \quad \begin{aligned} x &= (a + b) \cos \lambda + c \cos \frac{a+b}{b} \lambda, \\ y &= (a + b) \sin \lambda + c \sin \frac{a+b}{b} \lambda. \end{aligned}$$

In entsprechender Weise ergibt sich aus Gleichung 11) bezüglich der Erzeugung der Epitrochoide mit bedecktem Centrum das Gleichungspaar:

$$11b) \quad \begin{aligned} x &= C \cos \frac{B-A}{B} A + (B-A) \cos A, \\ y &= C \sin \frac{B-A}{B} A + (B-A) \sin A, \end{aligned}$$

wo $A = \Omega t$, und bezüglich der Erzeugung der Trochoide als Hypotrochoide eines der folgenden beiden der Form nach übereinstimmenden Gleichungspaare:

$$11c) \quad \begin{aligned} x &= (a - b) \cos \lambda + c \cos \frac{b-a}{b} \lambda, \\ y &= (a - b) \sin \lambda + c \sin \frac{b-a}{b} \lambda, \end{aligned}$$

wo $\lambda = \omega t$, oder

$$\begin{aligned} x &= C \cos \frac{B-A}{B} A + (A-B) \cos A, \\ y &= C \sin \frac{B-A}{B} A + (A-B) \sin A, \end{aligned}$$

wo $A = \Omega t$ ist.

Dass diese speziellen Gleichungen 11a—c), welche meist zum Ausgangspunkt der Kurvenuntersuchung gewählt werden, natürlich sehr der Gleichung 1), ja selbst den Gleichungen 11) an Einfachheit und Übersichtlichkeit nachstehen, liegt auf der Hand.

§ 2.

Beschreibung der Modelle.

Der besseren Übersicht wegen seien die Modelle in vier Gruppen eingeteilt, die wir der Reihe nach kurz besprechen wollen.

Die vier Modelle der ersten Gruppe stellen neben anderen Eigenschaften insbesondere dem Satze 10 entsprechend die doppelte Erzeugung sowohl der Epitrochoiden wie der Hypotrochoiden dar (Modelle 1—4 der Tafel IV). Die Modelle des ersten Paares zeigen uns einmal die drei Arten der Epitrochoiden als verschlungene, gestreckte und gespitzte Epitrochoiden mit freiem Centrum, sodann dieselbe verschlungene Epitrochoide auch als solche mit bedecktem Centrum. Zugleich ist in dem zweiten Modelle dieses Paares auch die gespitzte Epitrochoide hinzugefügt, die sich als völlig verschieden von der gespitzten Epitrochoide des ersten Modelles erweist.

Von Interesse ist es, die verschiedenen Lagen der gespitzten Trochoiden zu derselben verschlungenen zu beachten. Die Modelle des zweiten Paares zeigen uns in entsprechender Weise einmal die drei Arten der Hypotrochoiden als verschlungene, gestreckte und gespitzte Hypotrochoiden mit freiem Centrum, sodann dieselbe gestreckte Hypotrochoide mit freiem Centrum auch als solche mit bedecktem Centrum. Wie ferner ein Punkt des beweglichen Systems im festen, so beschreibt auch ein Punkt des festen Systems im beweglichen eine Trochoide. So wird zugleich in dem zweiten Modell dieses Paares von einem Punkte des festen Systems, der in der Anfangslage mit dem die Hypotrochoide beschreibende Punkte des beweglichen Systems zusammenfällt, eine Epitrochoide mit bedecktem Centrum gezeichnet.

Wie aus den Figuren der Tafel IV näher ersichtlich ist, sind diese Modelle im wesentlichen so eingerichtet, dass die beiden Kreise durch Scheiben oder Ringe aus hellem Metall (Zinkblech) dargestellt werden, die auf entsprechenden Zahnrädern befestigt sind. Der Mittelpunkt des beweglichen Zahnrades lässt sich durch eine auf der Rückseite befindliche Kurbel auf einem Kreise führen, wodurch ohne weiteres die gewünschte Abrollung erreicht wird. Die Kurven sind in Spiegelglasscheiben eingätzt und mit denselben Farben ausgezogen, welche die als kleine Kugeln ausgebildeten beschreibenden Punkte zeigen.

Die zweite Gruppe veranschaulicht mit drei Modellen die speziellen Fälle der cyklischen Kurven (Modelle 5 und 6 der Tafel IV und Modell 7 der Tafel V). Das erste Modell zeigt die Erzeugung von Ellipsen und Strecken durch Abrollung eines Kreises in einem solchen von doppeltem Radius (Satz 7) und veranschaulicht daher auch den einfachen Satz: Wenn eine Strecke sich so bewegt, dass ihre Endpunkte auf zwei sich schneidenden Geraden gleiten, so beschreibt jeder mit ihr fest verbundene Punkt eine Ellipse oder Doppelstrecke. Die beiden anderen Modelle dieser Gruppe zeigen die Erzeugungen der verschlungenen, gespitzten und gestreckten Kreisevolventen bez. Cykloiden durch Abrollung einer Geraden auf einem Kreise bez. eines Kreises auf einer Geraden.*

Die Einrichtung dieser Modelle ist ganz ähnlich ausgeführt, wie bei jenen der vorigen Gruppe. Um bei dem Modelle der Kreisevolventen die Abrollung des Lineals auf der Kreisscheibe zu ermöglichen, greift das Kurbelende an einem Schlitten an, der auf der Unterseite des Lineals gleitet. Bei dem Modell der Cykloiden ist überhaupt an Stelle der Kurbel eine Prismenführung gewählt, die durch das feste Lineal wieder verdeckt wird.

* In Übereinstimmung mit Satz 11* wird eine Kreisevolvente verschlungen, gestreckt oder gespitzt genannt, je nachdem der beschreibende Punkt M auf derselben Seite der Geraden liegt wie der feste Kreismittelpunkt S oder auf der anderen Seite oder auf der Geraden selbst, und ebenso eine Cykloide verschlungen, gestreckt oder gespitzt, je nachdem der beschreibende Punkt M ausserhalb, innerhalb oder auf dem rollenden Kreise liegt.

Die dritte Gruppe veranschaulicht in zwei Modellen das gleichläufige und das gegenläufige Zwillingenkurbelgetriebe mit ihren Polbahnen (Modelle 8 und 9 der Tafel V). Sie entstehen aus einem ein Antiparallelogramm bildenden Gelenkviereck $KLMN$ (Fig. 8), wenn eines der beiden kleineren oder der beiden grösseren (je einander gleichen) Glieder als „Steg“ festgehalten wird; denn die beiden dem festen benachbarten Glieder, die „Kurbeln“, vermögen sich im ersten Falle in gleichem, im zweiten in entgegengesetztem Sinne zu drehen. Die bei der Bewegung auf einander abrollenden Polbahnen sind zwei kongruente Ellipsen (bez. Hyperbeln) als Örter des Schnittpunktes P_1 (bez. P_2) der Kurbeln im System des festgehaltenen und dem des gegenüberliegenden Gliedes, der „Koppel“.*

Die allgemeine Einrichtung der ganz aus Metall bestehenden Modelle wird durch die Figuren der Tafel V genügend erläutert. Die Bewegung der Getriebe ist im ersten Modell durch den auf einer der Kurbeln an-

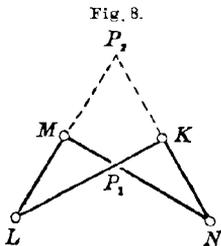


Fig. 8.

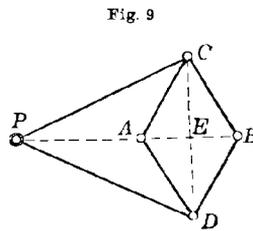


Fig. 9

gebrachten kleinen Griff, im zweiten durch eine auf der Rückseite befindliche Kurbel leicht zu bewirken. Ausserdem sind noch sogenannte „Eingriffspaarungen“ angebracht, um zu verhüten, dass in den beiden Wechsellagen bei einer vollen Umdrehung (nämlich dann, wenn alle vier Glieder in eine Gerade fallen) das Antiparallelogramm in ein Parallelogramm überspringt.

Die drei Modelle der vierten Gruppe endlich stellen die Inversoren von Peaucellier, Hart und Sylvester-Kempe dar, d. h. Apparate, welche die Transformation durch reciproke Radien bewirken (Modelle 10--12 der Tafel V). Ich möchte mit wenigen Worten darauf eingehen, in welcher nahen Beziehung zu einander die drei Apparate stehen, was nicht allgemein bekannt sein dürfte, und damit zugleich den zu Grunde liegenden mathematischen Gedanken kurz entwickeln.** Wir gehen aus von dem zuerst (1864) erfundenen Inversor von Peaucellier. Dieses Gelenksystem besteht aus einem Rhombus $ABCD$ und den an

* Näheres sehe man z. B. in Burmester, Lehrbuch der Kinematik S. 302 flg. und Reuleaux, Theoretische Kinematik (Braunschweig 1875) S. 187 flg. nach.

** Des Näheren sei verwiesen auf Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 564 flg.; Kempe, How to draw a straight line, London 1877; Neuberg, Systèmes de tiges articulées, Lüttich 1886, woselbst sich zahlreiche weitere Litteraturangaben finden.

zwei Gegenecken angreifenden Schenkeln $PC = PD$ (Fig. 9). Bei beliebiger Deformation ist stets:

$$PA \cdot PB = PE^2 - AE^2 = PC^2 - AC^2,$$

also konstant, d. h.:

Bei festgehaltenem Punkte P sind die Punkte A und B einander entsprechende Punkte derjenigen Transformation durch reciproke Radien, deren Centrum P und deren Potenz $PC^2 - AC^2$ ist.

Das Gelenksystem des Inversors von Hart (1874) besteht aus einem Antiparallelogramm $KLMN$ ($KL = MN, KN = LM$) (Fig. 10). In ihm schneide die gedachte zu KM parallele Gerade QT die Seiten

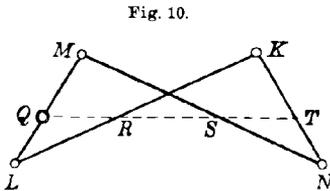


Fig. 10.

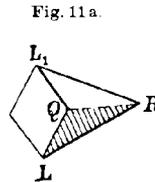


Fig. 11 a.

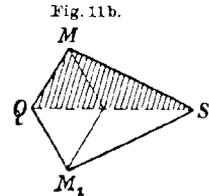


Fig. 11 b.

in den Punkten Q, R, S, T . Durch Spiegelung der Dreiecke LQR und MQS an ihren Seiten QR und QS ergeben sich die Figuren LQR_L1 und $MQSM_1$ (Fig. 11 a und b), welche mit den Teilen $CAPD$ und $CBPD$

eines entsprechenden Inversors von Peaucellier ähnlich sind. Analog wie bei letzterem ist daher: $QR \cdot QS$ konstant, nämlich gleich:

$$(MN^2 - ML^2) \cdot \frac{MS \cdot SN}{MN^2}.$$

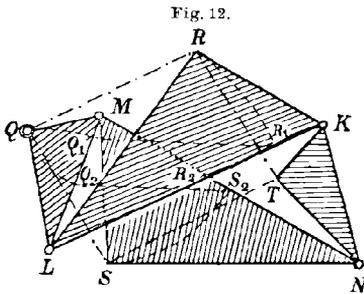


Fig. 12.

Bei festgehaltenem Punkte Q sind daher die Punkte R und S wieder einander entsprechende Punkte derjenigen Transformation durch reciproke Radien,

deren Centrum Q und deren Potenz die letztangeführte Konstante ist.

Der Inversor von Sylvester-Kempe (1875) erweist sich unmittelbar als eine Verallgemeinerung des vorigen. Sein Gelenksystem besteht aus vier ähnlichen Dreiecken, deren entsprechende Seiten das Antiparallelogramm $KLMN$ bilden, wie die Figur 12 zeigt. Die gedachte Strecke QR nimmt z. B. nach Drehung um L durch den Winkel $Q\hat{L}M = R\hat{L}K$ die Lage $Q_1R_1 \parallel MK$ an, ebenso die gedachte Strecke QS nach Drehung um M durch den Winkel $Q\hat{M}L = S\hat{M}N$ die Lage

$Q_2 S_2 \parallel MK$. Folglich ist nicht nur der Winkel $R\hat{Q}S$ stets konstant, sondern es ist auch $QR \cdot QS = Q_1 R_1 \cdot Q_2 S_2$, ebenso wie $Q_2 R_2 \cdot Q_2 S_2$ (vergl. den Inversor von Hart) konstant und zwar wieder gleich

$$(MN^2 - ML^2) \cdot \frac{MS \cdot SN}{MN^2}.$$

Bei der Deformation des Gelenksystems bilden eben die vier Punkte $QRST$ stets ein Parallelogramm mit konstanten Winkeln und konstantem Inhalt.

Bei festgehaltenem Punkte Q gehen daher aus R und S dann zwei einander entsprechende Punkte einer gewöhnlichen Transformation durch reciproke Radien hervor, deren Centrum Q und deren Potenz die angegebene Konstante ist, wenn man einen der Punkte R und S um Q durch den konstanten Winkel $R\hat{Q}S$ in richtigem Sinne gedreht denkt.

Die ebenfalls ganz aus Metall hergestellten drei Modelle dieser Gruppe sind im allgemeinen ähnlich gebaut wie die der vorigen Gruppe. In jedem Modell greift an dem einen der durch die Transformation einander zugeordneten Punkte ein Kurbelarm an, dessen Drehpunkt durch eine auf der Rückseite angebrachte Prismenführung leicht in zwei Grenzlagen eingestellt werden kann. Durch Drehung der Kurbel an einem ebenfalls auf der Rückseite befindlichen Knopfe wird dieser Punkt auf einem Bogen entweder eines durch das feste Centrum der Transformation oder eines dieses einschliessenden Kreises geführt. Entsprechend beschreibt der zugeordnete Punkt entweder eine Strecke oder ebenfalls einen Kreisbogen, die wie die schon genannten Kreisbogen auf der den Apparat tragenden Platte eingezeichnet sind.

Es soll mich freuen, wenn diese Modelle bei ihrer Veröffentlichung die gewünschte Verbreitung finden und so ihren eigentlichen Zweck erfüllen, besonders jüngere Mathematiker bei Beginn ihrer Studien für die Anwendungen zu interessieren. Ich hoffe dann auch die in Aussicht genommene Sammlung kinematischer Modelle bald bis zu einem guten Abschluss fortsetzen zu können. Dass die Modelle nicht nur in einer kinematischen, sondern auch in anderen elementaren Vorlesungen, besonders auch an Universitäten, zur Belebung des Unterrichts gute Verwendung zu finden geeignet sein dürften, brauche ich wohl kaum zu erwähnen.

Zum Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen.

Von

E. HAMMER

in Stuttgart.

Im letzten Heft der Zeitschrift für Vermessungswesen (1899, S.44) ist von Herrn Dr. Eggert der Versuch gemacht worden, beim Rückwärtseinschneiden eines trigonometrischen Neupunkts mit einer überschüssigen Richtung statt des üblichen Verfahrens der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen das Verfahren mit Hilfe von Korrelaten anzuwenden.

Im Fall der Verwendung von nur vier Zielpunkten beim Rückwärtseinschneiden entsteht eine einzige Seitenbedingungsgleichung und es kann damit an Rechnungsarbeit eine Kleinigkeit erspart werden dem gewöhnlichen Verfahren gegenüber. Allein man wird dieses gewöhnliche Verfahren, das vollständig symmetrisch ist und nur die Kenntnis der sehr einfachen

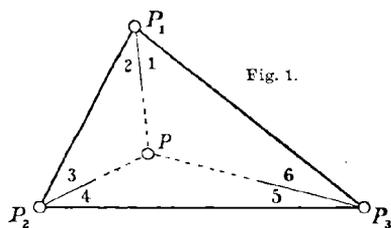


Fig. 1.

Beziehung zwischen kleinen Veränderungen der Koordinaten des Anfangspunktes einer durch die Koordinaten ihrer beiden Endpunkte gegebenen Strecke und der entsprechenden Änderung ihres Richtungswinkels voraussetzt, auch in diesem Fall nicht verlassen wollen, solange die

Bedingungsgleichung nicht übersichtlicher und symmetrischer in den Beobachtungen ausgedrückt wird; und jeder Versuch dazu stösst auf Schwierigkeiten.

Etwas anders liegt die Sache beim Vorwärtseinschneiden von drei Standpunkten aus. Nicht als ob die folgende Notiz dazu aufordern sollte, für diese Aufgabe das gewöhnliche Verfahren vermittelnder Beobachtungen zu verlassen; da aber hier bei Anwendung der Rechenvorschriften für bedingte Beobachtungen ebenfalls nur eine Bedingungsgleichung erfüllt zu werden braucht, die ohne weiteres und symmetrisch in den Beobachtungen sich ausdrücken lässt, so ist es vielleicht nicht ganz überflüssig (weil es in den Lehrbüchern nicht geschieht), darauf aufmerksam zu machen, dass man die paar Zahlen,

die hier die ganze Korrelatenausgleichung erfordert, zweckmässig zur gelegentlichen Kontrolle des üblichen Verfahrens verwenden kann.

Ist der Punkt P im innern des von den fest gegebenen Punkten $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$ gebildeten Dreiecks von diesen drei Punkten aus vorwärts eingeschritten durch mittelbare Beobachtung der Richtungswinkel (P_1P) , (P_2P) , (P_3P) (z. B. also dadurch, dass in jedem der drei gegebenen Standpunkte der Satz von Richtungen gemessen ist, der die Zielungen nach den zwei andern gegebenen Punkten und nach dem Neupunkt enthält), so lautet bekanntlich die Bedingung dafür, dass die drei Strahlen P_1P , P_2P und P_3P sich in einem Punkte treffen, symmetrisch ausgedrückt in den Winkeln 1, 2; 3, 4; 5, 6, die diese Strahlen mit den fest gegebenen Seiten des Dreiecks bilden, so:

$$1) \quad \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6} = 1.$$

Bedeutet also nun die 1, 2, ... 6 die beobachteten Winkel (wirklich gemessen oder z. T. aus den Richtungswinkeln berechnet), so lautet diese Seitengleichung, wenn die Verbesserungen der Messungen $v_1, v_2 \dots v_6$ sind:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \sin(1 + v_1) + \log \sin(3 + v_3) + \log \sin(5 + v_5) \\ - \{ \log \sin(2 + v_2) + \log \sin(4 + v_4) + \log \sin(6 + v_6) \} = 0. \end{array} \right.$$

Zu dieser Seitengleichung treten, da die Winkel $(1 + 2)$, $(3 + 4)$, $(5 + 6)$ fest gegeben sind, die drei weitem Gleichungen:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \\ v_5 + v_6 = 0 \end{array} \right\} \text{ oder z. B. } \left\{ \begin{array}{l} v_2 = -v_1 \\ v_4 = -v_3 \\ v_6 = -v_5 \end{array} \right.$$

d. h. man kann in 2) z. B. die v_2, v_4, v_6 durch $-v_1, -v_3, -v_5$ ersetzen. Damit wird nun die Rechnung überaus einfach. Die Bildung der Normalgleichung für die einzige Korrelate k (gleiche Gewichte für alle Messungen vorausgesetzt):

$$4) \quad [aa] k = w$$

(wo w der Widerspruch ist, der sich durch Einsetzung der Messungen in 1), also vorläufige Weglassung der v in 2) zeigt), verlangt nur das Aufschlagen von sechs $\log \sin$ nebst den zugehörigen Veränderungen pro 1" und die Addition von drei Quadraten, die jedenfalls mit dem Rechenschieber gebildet werden können, wie sich auch die Ausrechnung von k und der einzelnen v mit dem Rechenschieber erledigen lässt.

Was die Winkel 1, 2, ... 6 angeht, die in 2) zu verwenden sind, so hat man in jedem Fall (Winkelmessung oder Satzmessung) zuerst die Richtungswinkel (P_1P) , (P_2P) , (P_3P) aufzustellen, die als Messungsergebnisse anzusehen sind: wenn die Winkel 1, 2; 3, 4; 5, 6 einzeln

gemessen sind, so erhält man damit z. B. für (P_1P) die zwei Werte $(P_1P_2) - 2$ und $(P_1P_3) + 1$, die man mittelt; ebenso für (P_2P) und (P_3P) und mit diesen (gleichwertigen) Beobachtungen für die drei Richtungswinkel werden dann die für die Rechnung zu verwendenden Winkel 1, 2, ... 6 gebildet. Sind dagegen in P_1, P_2, P_3 Sätze gemessen, so sind die gemittelten Richtungswinkel (P_1P) , (P_2P) , (P_3P) dadurch zu erhalten, dass man in jedem Standpunkt nach einander die beiden festen Richtungen als Nullrichtungen nimmt und die zwei so entstehenden Werte des Richtungswinkels nach dem Neupunkt ermittelt, was auf leicht zu sehendem Wege mit kleinen Zahlen zu machen ist.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass es ganz unwesentlich ist, ob das Messungsbild in der That das der Fig. 1 oder z. B. das der Fig. 2 ist (zwischen den Standpunkten P_1, P_2, P_3 kann nicht zu-

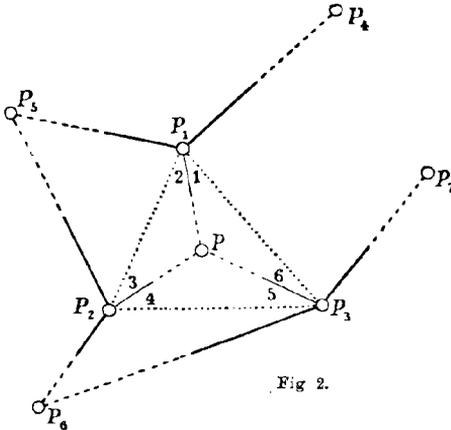


Fig. 2.

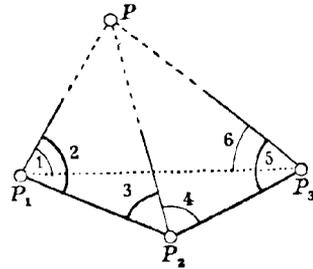


Fig. 3.

sammengesehen werden; neben diesen Punkten sind noch P_4, P_5, P_6, P_7 fest gegeben, die als Zielpunkte benutzt sind). Nach Aufstellung der Richtungswinkel (P_1P) , (P_2P) , (P_3P) aus den Messungen (mit Hilfe der zu rechnenden Richtungswinkel (P_1P_4) , (P_1P_5) u. s. f.) sind auch hier, nach fernerer Rechnung der Richtungswinkel (P_1P_2) , (P_2P_3) , (P_3P_1) die (gleichwertigen) Winkel 1, 2, ... 6 als Differenzen zu bilden.

Ferner ist es selbstverständlich gleichgültig, ob der Punkt P , wie zuerst angenommen und in Fig. 1 und 2 dargestellt, in der That innerhalb des Standpunkt-Dreiecks $P_1P_2P_3$ liegt oder ausserhalb, wie in Fig. 3. Auch hier lautet die Seitengleichung wie oben:

$$\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 = \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6$$

und es ist nur zu beachten, dass die weitem Gleichungen statt 3) so lauten:

$$3') \quad \begin{cases} v_1 = + v_2 \\ v_5 = + v_6 \\ v_3 = - v_4 \end{cases} \text{ und nur bei } v_3 \text{ und } v_4 \text{ bleibt}$$

In Fig. 3 sind P_1P_2, P_2P_3 stärker gezogen und die Winkel 2, 3, 5 verstärkt angedeutet, weil sie einem derartigen Beispiel Jordans entspricht (Handbuch der Vermessungskunde I, 4. Auflage 1895, S.334—340), für das ich die oben angedeutete Auflösung hier folgen lasse:

Gegeben die Koordinaten von P_1, P_2, P_3 :

$$\begin{array}{l|l} P_1 & x_1 = + 42133,28 \quad y_1 = - 25014,26 \\ P_2 & x_2 = + 40493,76 \quad y_2 = - 23406,93 \\ P_3 & x_3 = + 41632,97 \quad y_3 = - 20728,34; \end{array}$$

gemessen die Winkel 2 = $74^\circ 19' 41''$, 3 = $61^\circ 8' 10''$, 5 = $69^\circ 42' 28''$.

Der Anfang der Rechnung ist genau derselbe wie bei vermittelnden Beobachtungen; man hat nur ausser (P_1P_2) und (P_2P_3), die dort genügen, hier auch (P_1P_3) zu rechnen (ferner, wenn man nicht nur die v kontrollieren, sondern auch die Koordinaten von P rechnen will, auch zwei feste Seiten, z. B P_1P_2 und P_2P_3 ; ich lasse dies aber hier weg). Mit 6stelliger Rechnung (aber Abrundung auf $1''$) findet man:

$$\begin{aligned} (P_1P_2) &= 135^\circ 34' 5'' \\ (P_2P_3) &= 66 51 35 \\ (P_3P_1) &= 276 39 30 \end{aligned}$$

und hieraus mit Hilfe der gemessenen Winkel 2, 3, 5 auch 1, 4, 6 nach folgender Zusammenstellung:

$$\begin{array}{l|l} 1 = 35^\circ 25' 6'' & 2 = 74^\circ 19' 41'' \\ 3 = 61 \quad 8 \quad 10 & 4 = 50 \quad 15 \quad 20 \\ 5 = 69 \quad 42 \quad 28 & 6 = 40 \quad 0 \quad 33. \end{array}$$

Man hat damit ferner:

		+ 1''			+ 1''
sin 1	9.763 085	+ 3,0	sin 2	9.983 547	+ 0,6
sin 3	9.942 390	+ 1,1	sin 4	9.885 872	+ 1,8
sin 5	9.972 165	+ 0,8	sin 6	9.808 150	+ 2,5
	9.677 640			9.677 569	
	- 10			- 10	

Die reduzierte Bedingungsgleichung für v_1, v_3, v_5 lautet also mit Rücksicht auf 3') so:

$$(3,0 - 0,6) v_1 + (1,1 + 1,8) v_3 + (0,8 - 2,5) v_5 = + 71$$

und man hat zur Rechnung von k und dieser drei v nichts mehr zu thun als die Quadrate von 2,4, 2,9 und $- 1,7$ zu addieren. Es wird

$$17,06 k + 71 = 0 \quad \text{oder} \quad k = - 4,16$$

und die einzelnen v und die ausgeglichenen Winkel werden

$$v_1 = -10,0, \text{ d.h. } \underline{1} = 35^\circ 24' 56'', \underline{2} = 74^\circ 19' 31''$$

$$v_2 = -12,1, \text{ ,, } \underline{3} = 61 \quad 7 \quad 58, \underline{4} = 50 \quad 15 \quad 32$$

$$v_3 = +7,1, \text{ ,, } \underline{5} = 69 \quad 42 \quad 35, \underline{6} = 40 \quad 0 \quad 40;$$

die ausgeglichenen Richtungswinkel sind

$$(P_1P) = 61^\circ 14' 34'', (P_2P) = 16^\circ 42' 3'', (P_3P) = 316^\circ 40' 10''.$$

Für $[v^2] = wk$ erhält man 295 oder 296, also $m = \sqrt{\frac{296}{1}} = \pm 17''$.

Wäre die Ausgleichung der Richtungswinkel das endgiltig Verlangte, so wäre die vorstehende Rechnung offenbar bedeutend im Vorteil gegen die gewöhnliche nach vermittelnden Beobachtungen (vergl. a. a. O.), deren Resultate übrigens identisch damit ausfallen (S. 339). Da man aber die Koordinaten von P (und meist auch deren m. F.) haben will, so verschwindet der Vorteil wieder so ziemlich ganz. Aber die wenigen Zahlen, die man überhaupt anzuschreiben hat, lassen die vorstehende Rechnung als Kontrolle vorteilhaft erscheinen, z. B. statt der nochmaligen Rechnung der Richtungswinkel nach der Ausgleichung u. s. f.

Die Sache auf mehr als drei Strahlen auszudehnen verlohnt aber nicht, da dann nicht nur eine einzige Seitengleichung auftritt und also schon bei Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen nichts an Rechenarbeit erspart wird.

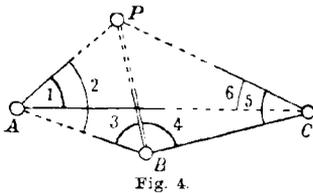


Fig. 4.

Sind die drei beobachteten Richtungswinkel und damit auch die Rechnungswinkel 1, 2, ... 6 nicht von gleichem Gewicht, so ist selbstverständlich darauf

Rücksicht zu nehmen, indem die Normalgleichung zur Bestimmung der Korrelate k lautet:

$$\left[\frac{aa}{p} \right] k = w.$$

In dem (ebenfalls Jordanschen, vergl. a. a. O. S. 358 und die obige Fig. 4) Beispiel mit den gegebenen Koordinaten:

	x	y
A	- 44904,30	+ 15967,50
B	- 39554,90	+ 14032,80
C	- 36479,40	+ 16760,50

und Messung der Winkel

$$1 = 42^\circ 55' 11''$$

$$3 = 43 \quad 8 \quad 43$$

$$4 = 75 \quad 24 \quad 10$$

$$5 = 50 \quad 10 \quad 49$$

erhält man zunächst die fest gegebenen Richtungswinkel:

$$\left. \begin{array}{l} (AB) = 109^{\circ} 53' 0'' \\ (BC) = 48 25 47 \\ (CA) = 264 37 22 \end{array} \right\} \text{oder} \left\{ \begin{array}{l} (BA) = 289^{\circ} 53' 0'' \\ (CB) = 228 25 47 \\ (AC) = 84 37 22 \end{array} \right.$$

und hieraus die beobachteten Richtungswinkel:

$$\begin{array}{l} (AP) = 109^{\circ} 53' 0'' - 42^{\circ} 55' 11'' = 66^{\circ} 57' 49'' \quad | \quad p = 1 \\ (BP) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 289^{\circ} 53' 0'' + 43^{\circ} 8' 43'' \\ 48^{\circ} 25' 47'' - 75^{\circ} 24' 10'' \end{array} \right\} = 333^{\circ} 1' 40'' \quad | \quad p = 2 \\ (CP) = 228^{\circ} 25' 47'' + 50^{\circ} 10' 49'' = 278^{\circ} 36' 36'' \quad | \quad p = 1 \end{array}$$

Die Winkel 1 bis 6 für die Rechnung nach der obigen Vorschrift werden damit:

$$\begin{array}{l} 1 = 17^{\circ} 39' 33'' \quad | \quad 2 = 42^{\circ} 55' 11'' \\ 3 = 43 8 40 \quad | \quad 4 = 75 24 7 \\ 5 = 50 10 49 \quad | \quad 6 = 13 59 14 \end{array}$$

(also 3 und 4 abgeändert gegen die gemessenen Winkel). Es wird ferner

$$(6,6 - 2,2) v_1 + (2,3 + 0,6) v_3 + (1,8 - 8,4) v_5 = 130;$$

dabei hat aber v_3 das Gewicht 2, v_1 und v_5 das Gewicht 1, also wird:

$$\left[\frac{aa}{p} \right] = 19,36 + \frac{1}{4} \cdot 8,41 + 43,56 = 65,0, \quad \text{d. h.} \\ k = - 2,00$$

und also

$$v_1 = - 2 \cdot 4,4 = - 9'', \quad v_3 = - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,9 = - 3'', \quad v_5 = - 2 \cdot 6,6 = + 13''$$

$$\left(m = \sqrt{\frac{268}{1}} = \pm 16'' \text{ u. s. f.} \right); \text{ vergl. a. a. O. S. 360.}$$

Zu bemerken ist noch, dass auch schon Koppe in seiner Ausgleichsrechnung, Nordhausen 1885, S. 23—27 auf die im Vorstehenden behandelte Aufgabe die Methode der bedingten Beobachtungen angewandt hat; er lässt aber (S. 26 a. a. O.) zwei Bedingungsgleichungen getrennt stehen, so dass trotz der Einfachheit der Koeffizienten der zweiten kaum eine Verminderung der Rechenarbeit im Vergleich mit der Methode der vermittelnden Beobachtungen (a. a. O. S. 29—31) erreicht wird. Freilich ist es theoretisch richtiger, die zwei etwas verschiedenen Werte des Richtungswinkels (3 D) (s. d. Figur S. 23 a. a. O.), die durch α_2 und α_3 geliefert werden, nicht zu vereinigen; aber wenn man nur die Verbesserungen der Richtungswinkel sucht, so erhält man dieselben Resultate, ob man die Werte vereinigt oder nicht, nur die m. F. fallen im einen und andern Fall etwas verschieden aus.

Beitrag zur Auflösung der Gleichung vierten Grades.

Von Dr. H. Heilermann in Godesberg.

Wenn in der Gleichung

$$1) \quad f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Koeffizienten der Bedingung

$$2) \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

Genüge leisten, so ist bekanntlich

$$3) \quad \begin{cases} A \cdot f = (Ax + By + D)^2 - (y \cdot \sqrt{B^2 - AC} \pm \sqrt{D^2 - AF})^2, \\ C \cdot f = (Bx + Cy + E)^2 - (x \cdot \sqrt{B^2 - AC} \pm \sqrt{E^2 - CF})^2, \\ F \cdot f = (Dx + Ey + F)^2 - (x \cdot \sqrt{D^2 - AF} \pm y \cdot \sqrt{E^2 - CF})^2, \end{cases}$$

und demgemäss kann $f = 0$ auf dreifache Weise in zwei Gleichungen ersten Grades zerlegt werden.

Setzt man in 1) $x = z^2$ und $y = 2z$, so wird

$$4) \quad f = Az^4 + 4Bz^3 + (4C + 2D)z^2 + 4Ez + F = 0,$$

und diese Gleichung vierten Grades kann unter derselben Bedingung 2) in die Differenz von zwei Quadraten umgeformt werden, wie oben unter 3); damit ist dann auch die Zerlegung von 4) in Gleichungen zweiten Grades erreicht.

Wenn man endlich in 4) der einfacheren Form wegen setzt

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c - \lambda, \quad D = c + 2\lambda, \quad E = d, \quad F = e, \text{ so ist}$$

$$5) \quad f = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e = 0,$$

und die Bedingung für deren Umformung geht nun nach 2) über in

$$6) \quad \begin{vmatrix} a & b & c + 2\lambda \\ b & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Resultante erfüllt nicht allein diese Bedingung, sondern sie liefert zugleich die drei Werte der Zahl λ für die Umformungen:

$$7) \quad \begin{cases} a \cdot f = (az^2 + 2bz + c + 2\lambda)^2 - (2z \cdot \sqrt{b^2 - ac + a\lambda} \pm \sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae})^2 = \\ (c - \lambda) \cdot f = (bz^2 + 2(c - \lambda)z + d)^2 - (z^2 \cdot \sqrt{b^2 - ac + a\lambda} \pm \sqrt{d^2 - ce + e\lambda})^2 = \\ e \cdot f = (c + 2\lambda)z^2 + 2dz + e)^2 - (z^2 \cdot \sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae} \pm 2z\sqrt{d^2 - ce + e\lambda})^2 = \end{cases}$$

aus denen man unmittelbar die vollständige Auflösung der Gleichung 5) erhält.

Über eine Veranschaulichung von Funktionen einer komplexen Variablen.

Von L. Heffter in Bonn.

Die anschauliche und fruchtbare Art, wie eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen durch eine ebene Kurve dargestellt wird, hat wohl schon seit langer Zeit den Wunsch nahegelegt, etwas ähnliches auch für die Funktionen komplexer Veränderlicher aufzufinden.

Der nächstliegende Gedanke, dies zu versuchen, dürfte folgender sein. Durch die Gleichung

$$w = f(z),$$

wo $z = x + yi$, $w = u + vi$, wird aus der vierfachen Mannigfaltigkeit der beiden unbeschränkten Variablen w und z eine zweifache Mannigfaltigkeit ausgeschnitten, da die eine Gleichung $w = f(z)$ zwei solchen zwischen den vier Veränderlichen x, y, u, v äquivalent ist. Eine vierfache Mannigfaltigkeit ist geometrisch in den sämtlichen Geraden des Raumes gegeben; eine daraus abge sonderte zweifache Mannigfaltigkeit ist ein Strahlensystem. Das Strahlensystem ist also das zunächst sich darbietende geometrische Abbild der funktionalen Beziehung zwischen zwei komplexen Grössen. Dieser Gedanke ist denn auch von verschiedenen Seiten schon verfolgt worden.* Leider aber entbehrt ein Strahlensystem selbst der Anschaulichkeit, so dass auf diesem Wege keine befriedigende Lösung der Frage erzielbar sein dürfte.

Eine andere, ebenfalls sich von selbst darbietende Methode, den Verlauf von $w = f(z)$ zu veranschaulichen, besteht darin, dass man u und v durch je eine Fläche darstellt, die dann gleichzeitig zu betrachten sind.** Aber eben der letztere Umstand bringt es mit sich, dass auch hierbei das Ideal noch nicht als erreicht angesehen werden kann.

Ohne nun beanspruchen zu wollen, dass dies etwa durch den nachfolgenden Vorschlag geschehe, dürfte derselbe doch vielleicht nicht ohne Interesse sein, weil er wenigstens gleichzeitig die beiden Schwierigkeiten der eben genannten Methoden vermeidet. Ob er dafür neue und grössere Unzulänglichkeiten mit sich bringt, müsste ein Versuch der Ausführung entscheiden.

Da wir mit dem dreidimensionalen Punktraum nicht auskommen, der vierdimensionale Geradenraum aber zu keiner Anschaulichkeit führt, be-

* Vergl. Lie, Forhandl. i Vidensk. Selsk., Kristiania 1869; siehe auch Berichte der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1897, S. 727. — Auch Weierstrass hat in seinen Vorlesungen Bemerkungen ähnlichen Sinnes gemacht. — Eine Abhandlung von René de Saussure, *Interprétation géométrique des équations à deux variables complexes*, welche im Januar 1896 der Pariser Akademie überreicht wurde (vergl. Compt. Rend. hebdom. des Séances etc., Janv. 1896) scheint nicht publiziert worden zu sein.

** Über Modellpaare dieser Art vergleiche man W. Dyck, *Katalog math. und math.-physik. Modelle, Apparate und Instrumente*, S. 176 fig. München 1892.

halten wir den ersteren bei, fügen aber ein viertes Element hinzu, das wie die Form dem Auge wahrnehmbar ist, nämlich die Farbe. Die unabhängige Variable $z = x + yi$ denken wir uns, wie üblich, durch die Punkte einer Ebene repräsentiert. Für die abhängige Variable w setzen wir

$$w = r \cdot e^{p i}$$

und repräsentieren zunächst den Modul $|w| = r$ in jedem Punkte z durch eine Höhe, die also stets auf derselben Seite der z -Ebene errichtet wird. Der Modul $|w|$ als Funktion von $x + yi$ wird also durch eine Fläche dargestellt, die Modulfläche der Funktion, die nirgends unter der z -Ebene verläuft und allein schon in vielen Fällen ein grosses Interesse beanspruchen dürfte.

Der gesamte, in Betracht kommende Wertvorrat des Argumentes φ ($-\pi \leq \varphi \leq +\pi$, wobei $-\pi$ und $+\pi$ als identisch zu betrachten sind) ist eine geschlossene einfache Mannigfaltigkeit. Um diese durch die Färbung anschaulich zu machen, lassen wir etwa dem Werte $\varphi = 0$ weiss, dem Werte $\varphi = \pm \pi$ schwarz entsprechen, den positiven Werten von φ , die von 0 bis π wachsen, etwa rot, das anfangs ganz hell, an das Weiss bei $\varphi = 0$ anschliessend, stetig dunkler und dunkler wird, bis es bei $\varphi = \pi$ in schwarz übergeht. Die negativen Werte von φ werden in gleicher Weise durch eine andere Farbe, etwa blau in den erforderlichen Nuancierungen zwischen weiss und schwarz dargestellt. Auf einer beigefügten Farbenskala könnte man ablesen, welchen Werten von φ die einzelnen Schattierungen entsprechen. Selbstverständlich ist diese Argumentfärbung auf eine gewisse Annäherung in der Darstellung beschränkt.

Modul und Argument, und nicht etwa reellen und imaginären Teil von w — was natürlich an sich auch ginge — durch Höhe und Farbe zu interpretieren, dazu fordert die verschiedenartige Natur dieser Darstellungsmittel heraus, die dem verschiedenen Charakter von Modul und Argument ganz angemessen zu sein scheint, der Gleichberechtigung von u und v aber schlecht entsprechen würde.

Wenn man in der beschriebenen Weise eine Funktion $w = f(z)$ durch eine gefärbte Fläche darstellte, so würde z.B. die Exponentialfunktion

$$w = e^z$$

eine Cylinderfläche liefern, deren „Grundkurve“ die reelle Exponentialkurve ist. Die Oberfläche wäre in lauter Streifen von der Breite 2π entsprechend der Periodizität geteilt, und innerhalb jeden Periodenstreifens würde die geeignete Färbung in parallelen Linien verlaufen.

Um für den Verlauf von $w = f(z)$ ein einziges ebenes Bild zu erhalten, könnte man natürlich die Modulfläche durch ein System von „Höhenlinien“ in einer Ebene ersetzen und in derselben Ebene die Argumentfärbung eintragen. Man erhielte so ein der geographischen Karte ähnliches Bild einer Funktion. Die Herstellung dieser Bilder — gewissermaßen eines Funktions-Atlanten — wäre vielleicht einfacher als die der gefärbten Fläche, sicher aber auch schon wieder weniger anschaulich.

Über doppelt zentrische Vierecke.*

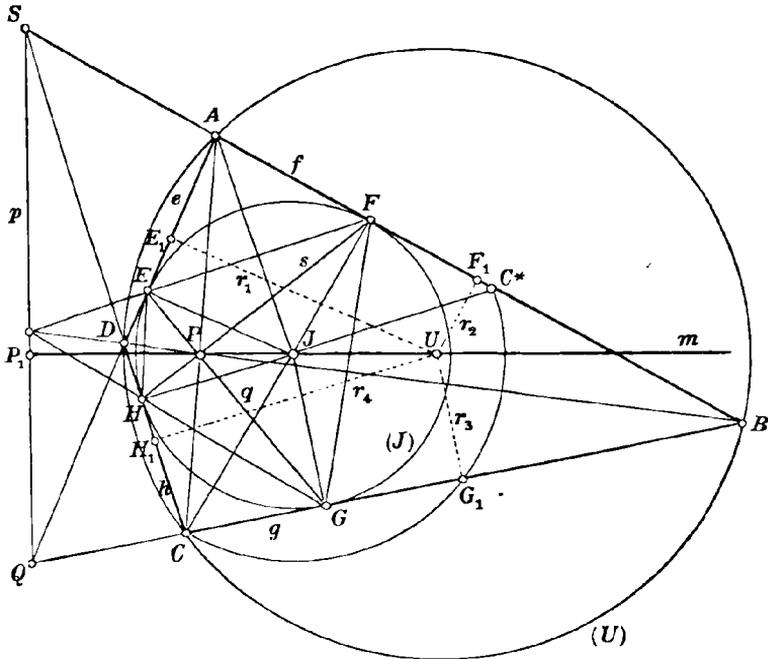
Von

DR. CHR. BEYEL

in Zürich.

1. (J) sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte J und dem Radius ρ . E, F, G, H seien die Berührungspunkte von vier Tangenten e, f, g, h dieses Kreises, deren aufeinander folgende Schnittpunkte A, B, C, D

Fig. 1.



auf einem zweiten Kreise (U) mit dem Mittelpunkte U und dem Radius r liegen (Fig. 1). A, B, C, D sind also die Ecken eines doppelt

* Vergl. die kleinen Mitteilungen über doppelt zentrische Vierecke in dieser Zeitschrift Bd. 40 S. 372 und Bd. 42 S. 63 und die an jenem Orte zitierte Litteratur. Im zweiten Teile der vorliegenden Abhandlung sind die Bemerkungen von Bd. 43 vervollständigt. Zugleich ist der Beweis, von dem in Bd. 42 die Rede ist, in rein geometrischer Form erbracht.

zentrischen Vierecks. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien die inneren Winkel an den resp. Ecken A, B, C, D des Vierecks. Die Entfernungen dieser Ecken von J seien resp. mit $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4$ bezeichnet und Eckradien genannt. Die Abstände der Tangenten e, f, g, h von U seien resp. $r_1 r_2 r_3 r_4$ und sollen Seitenradien heissen. Für die Strecken auf den Tangenten seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$AF = AE = a; \quad BF = BG = b; \quad CG = CH = c; \quad DH = DE = d.$$

Ferner sei:

$$AB = AF + FB = f; \quad BC = BG + GC = g; \quad CD = CH + HD = h$$

und

$$DA = DE + EA = e.$$

Die vier Ecken $ABCD$ des Vierecks seien zunächst so gewählt, dass (J) im Innern und (U) ausserhalb des Vierecks liegt. Dementsprechend heisse (J) der Inkreis und (U) der Umkreis des Vierecks.

2. Wir leiten zuerst eine Reihe von metrischen Beziehungen für das Viereck $ABCD$ ab.

Wir ziehen in J die Senkrechte zu JA . Sie schneide die Tangente f in C^* . Dann ist

$$\sphericalangle JAC^* = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - AC^*J;$$

Aber $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Also ist $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Daraus folgt:

$$\sphericalangle AC^*J = \frac{\gamma}{2} = JCG.$$

Daher ist $\triangle FC^*J \simeq \triangle GCJ$ und also $FC^* = GC = c$. Aber im $\triangle AJC^*$ ist $FA \cdot FC^* = \varrho^2$. Folglich ist auch:

$$1) \quad a \cdot c = \varrho^2. \quad \text{Analog ergibt sich } bd = \varrho^2.$$

Nun sind a^2, c^2 die Potenzen der Ecken A, C in Bezug auf J und es folgt:

Das Produkt der Potenzen von zwei gegenüberliegenden Ecken des Vierecks in Bezug auf den Inkreis ist gleich der vierten Potenz vom Radius dieses Kreises.

Wir lesen ferner aus dem $\triangle AJC^*$ die Relation ab:

$$JA^2 + C^*J^2 = C^*A^2.$$

Aber $C^*J = CJ = \varrho_3$ und $C^*A = a + c$; also folgt:

$$\varrho_1^2 + \varrho_3^2 = (a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = a^2 + c^2 + 2\varrho^2.$$

Analog finden wir:

$$\varrho_2^2 + \varrho_4^2 = b^2 + d^2 + 2\varrho^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$2) \quad \varrho_1^2 - \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - \varrho_4^2 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2, \quad \text{d. h. :}$$

Die alternierende Summe aus den Potenzen der vier aufeinander folgenden Ecken des Vierecks in Bezug auf (J) ist

gleich der alternierenden Summe der Quadrate von den entsprechenden Eckradien.

Wir können einen analogen Satz für die Seitenradien $r_1 r_2 r_3 r_4$ ableiten. Es ist:

$$r_1^2 = r^2 - \frac{e^2}{4}; \quad r_2^2 = r^2 - \frac{f^2}{4}; \quad r_3^2 = r^2 - \frac{g^2}{4}; \quad r_4^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}.$$

Daraus folgt:

$$3) \quad r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = -\frac{1}{4} [e^2 - f^2 + g^2 - h^2].$$

3. Wir stellen einige Sätze über die Fläche F des Vierecks auf. Der Inhalt des Dreiecks $AJC^* = \frac{1}{2} \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_3$. Aber

$$\Delta AJC^* = \Delta AJF + \Delta FJC^* = \Delta AJF + \Delta CJG.$$

Nun ist $\Delta AJF = \Delta AJE$ und $\Delta CJG = \Delta CJH$. Folglich ist:

$$AFJE + CGJH = \varrho_1 \cdot \varrho_3.$$

Analog folgt:

$$BFJG + DHJE = \varrho_2 \cdot \varrho_4.$$

Also ist:

$$4) \quad F = \varrho_1 \cdot \varrho_3 + \varrho_2 \cdot \varrho_4, \quad \text{d. h. :}$$

Die Fläche des Vierecks ist so gross wie die zwei Rechtecke aus den resp. Eckradien der zwei gegenüberliegenden Eckenpaare.

Bezeichnen wir den halben Umfang des Vierecks mit s , so dass $s = a + b + c + d$, so ist $F = \varrho \cdot s$. Also ist

$$F^2 = \varrho^2 (a + b + c + d)^2 = \varrho^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2\varrho^2 (ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Oben haben wir bewiesen, dass $\varrho^2 = ac = bd$. Also folgt:

$$F^2 = (a^2 + c^2)bd + (b^2 + d^2)ac + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)(ac + bd).$$

Diesen Ausdruck können wir in die Form bringen:

$$F^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd + a^2(bc + cd + db) + b^2(cd + da + ac) + c^2(da + ab + bd) + d^2(ab + bc + ca).$$

Dann erkennen wir, dass dies gleich $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$. Also folgt:

$$5) \quad F^2 = (a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = efgh, \quad \text{d. h. :}$$

Das Quadrat der Fläche ist gleich dem Produkte aus den vier Seiten des Vierecks.

4. Mit Hilfe von F leiten wir einige Relationen zwischen ϱ , r und den Seitenlängen ab.

Da $F = \varrho \left(\frac{e+f+g+h}{2} \right) = \sqrt{efgh}$, so folgt:

$$6) \quad \varrho = \frac{\sqrt{efgh}}{\frac{1}{2}(e+f+g+h)}, \text{ d. h. :}$$

Der Radius des Inkreises ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Seiten dividiert durch ihre halbe Summe.

Um den Radius des Umkreises (U) zu finden, bemerken wir, dass (U) sowohl dem Dreieck ABC wie ACD umschrieben ist. Daher ist:

$$r = \frac{f \cdot g \cdot AC}{4ABC} = \frac{e \cdot h \cdot AC}{4ACD}.$$

Daraus ergibt sich durch Addition:

$$4r(ABC + ACD) = AC(fg + eh).$$

Nun ist $ABC + ACD = ABCD = \sqrt{efgh}$, also:

$$4r\sqrt{efgh} = AC(fg + eh).$$

Auf analogem Wege finden wir:

$$4r\sqrt{efgh} = BD(fe + gh).$$

Durch Multiplikation erhalten wir:

$$16r^2 \cdot efgh = AC \cdot BD(fg + eh)(fe + gh).$$

Aber nach dem Ptolemäischen Satze ist $AC \cdot BD = eg + fh$. Also ist:

$$16r^2 \cdot efgh = (eg + fh)(fg + eh)(fe + gh)$$

und

$$7) \quad r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(eg + fh)(fg + eh)(fe + gh)}{efgh}}.$$

Daraus folgt für die Inhalte von In- und Umkreis:

$$8) \quad F_i = \frac{4\pi \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h}{(e+f+g+h)^2} \quad \text{und} \quad F_u = \frac{\pi}{16} \frac{(eg + fh)(fg + eh)(fe + gh)}{efgh}.$$

5. Wir stellen nun einige Beziehungen für die Winkel des Vierecks auf.

Es ist $F = \frac{ef}{2} \sin \alpha + \frac{gh}{2} \sin \gamma$. Aber $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Also ist:

$$F = \frac{ef + gh}{2} \sin \alpha$$

und

$$9) \quad \sin \alpha = \frac{2F}{ef + gh} = \frac{2\sqrt{efgh}}{ef + gh} = \sin \gamma;$$

nach demselben Gesetze folgt:

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{efgh}}{fg + eh} = \sin \delta.$$

Berechnen wir daraus die Cosinus, so ist:

$$10) \quad \cos \alpha = \frac{ef - gh}{ef + gh} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{fg - eh}{fg + eh}.$$

Diese Relationen führen noch zu einigen Beziehungen für die Eckradien. Aus dem Dreieck AJC^* finden wir:

$$11) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{e_3}{e_1}; \quad \text{analog:} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{e_4}{e_2}.$$

Rechnen wir $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ nach 9) und 10) aus, so folgt:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{gh}{ef}} \\ \text{und} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{eh}{gf}} \end{array} \right.$$

Mithin ist:

$$13) \quad \frac{e_1^2}{e_3^2} = \frac{ef}{gh} \quad \text{und} \quad \frac{e_2^2}{e_4^2} = \frac{fg}{eh}, \quad \text{d. h.}$$

Die Quadrate der Eckradien, welche durch zwei gegenüberliegende Ecken gehen, verhalten sich wie die Rechtecke aus den Seiten, die in diesen Ecken zusammenstossen.

Durch Multiplikation der Gleichungen erhalten wir:

$$14) \quad \frac{e_1 \cdot e_2}{e_3 \cdot e_4} = \frac{f}{h}, \quad \text{d. h.}$$

Das Rechteck aus zwei Eckradien, welche durch zwei aufeinanderfolgende Ecken gehen, verhält sich zu dem Rechteck aus den zwei anderen Eckradien, wie die resp. Viereckseiten, welche zwischen diesen Eckradien liegen.

Schliesslich stellen wir noch eine Beziehung zwischen den Seitenradien und den Seiten auf. Sind E_1, F_1, G_1, H_1 die Fusspunkte der Seitenradien, so ist:

$$AE_1 UF_1 + CG_1 UH_1 = \frac{1}{2} ABCD = \frac{F}{2}.$$

Also folgt:
$$\frac{F}{2} = \left\{ r_1 r_2 + \frac{ef}{4} + r_3 r_4 + \frac{gh}{4} \right\} \frac{\sin \alpha}{2}.$$

Setzen wir für $\sin \alpha$ den oben 9) gefundenen Wert, so folgt:

$$\frac{F}{2} = \left\{ r_1 r_2 + r_3 r_4 + \frac{ef + gh}{4} \right\} \frac{F}{ef + gh}.$$

Daraus:

$$15) \quad \frac{r_1 r_2 + r_3 r_4}{ef + gh} = \frac{1}{4}.$$

Analog folgt:

$$\frac{r_2 r_3 + r_4 r_1}{fg + he} = \frac{1}{4}.$$

II.

6. Wir entwickeln einige Lagenverhältnisse für doppelt zentrische Vierecke. Zuerst beweisen wir, dass die Verbindungslinien EG, HF der Berührungspunkte von gegenüberliegenden

Tangentenpaaren eg , hf zu einander senkrecht stehen. Es ist nämlich

$$\sphericalangle EGF = \frac{1}{2} \sphericalangle EJF \text{ und } \sphericalangle HFG = \frac{1}{2} \sphericalangle HJG.$$

Aber

$$\sphericalangle EJF + \sphericalangle HJG = 180^\circ.$$

Also ist $\sphericalangle EGF + \sphericalangle GFH = 90^\circ$. Daher ist auch $\sphericalangle FPG = 90^\circ$.

Zweitens beweisen wir, dass der Punkt P in Bezug auf den Inkreis (J) und in Bezug auf den Umkreis (U) dieselbe Polare p hat.

Seien Q , S die resp. Schnittpunkte der Tangentenpaare eg , fh des Vierecks, so ist \overline{QS} die Polare von P in Bezug auf den Inkreis. Folglich gehen die Diagonalen \overline{AC} , \overline{BD} des Vierecks e, f, g, h durch den Pol P . Daraus folgt aber, dass P und \overline{QS} auch Pol und Polare in Bezug auf (U) sind.

Aus dem bewiesenen Satze schliessen wir noch, dass die Mittelpunkte J und U der Kreise (J) und (U) auf einer Geraden m durch P liegen, welche zur Linie QS oder p senkrecht steht.

Drittens zeigen wir, dass die Winkel der Diagonalen AC , BD durch die Geraden EG , FH halbiert werden.

Die Linien AC und DB sind nämlich ein Paar der Involution harmonischer Polaren um P in Bezug auf (J). \overline{EF} ist die Polare von A , \overline{GH} ist die Polare von C . Beide Polaren treffen sich im Pole der Geraden AC und dieser liegt auf BD . In analoger Weise ergibt sich, dass die Polaren \overline{EH} , \overline{FG} der resp. Punkte D und B sich im Pole der Geraden BD schneiden. Dieser Pol muss aber in AC liegen. Mit anderen Worten heisst dies: AC und BD sind Diagonalen des Vierecks $EFGH$. Bekanntlich werden zwei solche Diagonalen durch die resp. Seiten harmonisch getrennt. Folglich sind AC , BD und EG , FH Paare einer harmonischen Gruppe. Von diesen Paaren ist das eine — EG , FH — rechtwinklig. Daher halbiert es den Winkel des anderen Paares.

7. Wir kehren den unter 6) bewiesenen Satz um.

P sei ein beliebiger Punkt im Innern eines Kreises (J). Wir ziehen durch P zwei zueinander senkrechte Linien q , s , welche (J) resp. in EG , FH schneiden. Wir konstruieren in diesen Punkten die resp. Tangenten e , g , f , h . Dann können wir beweisen, dass die resp. Schnittpunkte A , B , C , D von ef , fg , gh , he die Ecken eines Kreisvierecks sind.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \sphericalangle EAF + \sphericalangle AFP + \sphericalangle PEA = 270^\circ = \sphericalangle HCG \\ + \sphericalangle CGP + \sphericalangle PHC; \end{aligned}$$

aber $\sphericalangle AEP = \sphericalangle EHG$ und $\sphericalangle AFP = \sphericalangle FGH$; ferner ist:

$$\sphericalangle CGP = \sphericalangle GFE \text{ und } \sphericalangle CHP = \sphericalangle HEF.$$

Setzen wir diese Werte ein und addieren wir die Winkel, so folgt:

$$\sphericalangle EAF + FGH + \sphericalangle EHG + HCG + GFE + HEF = 540^\circ.$$

Aber: $\sphericalangle FGH + EHG + GFE + HEF = 360^\circ.$

Mithin ist $\sphericalangle EAF + HCG = 180^\circ.$

Folglich ist das Viereck $ABCD$ einem Kreise (U) eingeschrieben. Für dasselbe gilt alles, was wir oben für doppelt zentrische Vierecke bewiesen haben.

8. Betrachten wir P als Scheitel einer Rechtwinkelinvolution J_r und lassen wir an Stelle von q, s weitere Paare dieser Involution treten, so gehört zu jedem Paare ein anderes Kreisviereck. Wir zeigen, dass alle diese Vierecke demselben Kreise (U) eingeschrieben sind.

Zuerst schliessen wir — wie oben (6) —, dass die Polare p von P in Bezug auf (J) auch Polare von P in Bezug auf alle Kreise (U) ist, welchen die erwähnten Vierecke eingeschrieben sind. p trifft jeden dieser Kreise in zwei Punkten. Ein solches Paar von Schnittpunkten wird durch eine Involution bestimmt. Ihr Mittelpunkt ist der Fusspunkt P_1 der Normalen, welche durch P auf p gefällt werden kann. Ein zweites Paar der Involution wird durch die Diagonalepunkte Q, S des Vierecks gegeben und diese zwei Paare bestimmen die Involution auf p . Nun sind die Punkte Q, S der einzelnen Vierecke zugleich Pole der resp. Linien q, s , zu welchen die Vierecke gehören. Weil aber die Geraden q, s eine Involution J_r bilden, müssen auch die Punkte Q, S einander involutorisch zugeordnet sein. P_1 ist auch Mittelpunkt dieser Involution. Dieselbe hat folglich mit jeder der Involutionen, welche die Schnittpunkte von p mit den Umkreisen bestimmen, den Mittelpunkt und ein weiteres Paar Q, S gemeinsam. Daraus ergibt sich, dass alle diese Involutionen mit der Involution der Paare Q, S zusammenfallen. p schneidet folglich alle in Rede stehenden Umkreise in denselben zwei Doppelpunkten dieser Involution. Weil aber P, p für diese Umkreise Pol und Polare ist, so müssen sich die Kreise in den gefundenen zwei Punkten auf p berühren. Also fallen diese Umkreise in einen (U) zusammen und ihm sind alle Kreisvierecke eingeschrieben.

Kennen wir eines dieser Kreisvierecke, so ist (U) und die Rechtwinkelinvolution J_r bestimmt und wir können unendlich viele Kreisvierecke zeichnen. Wir schliessen daher:

Den zwei Kreisen, welchen ein Viereck ein- und umgeschrieben ist, sind unendlich viele Vierecke ein- und umgeschrieben.* Verbinden wir die Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte.

* Dieses ist der bekannte Satz, von dessen Beweis in den oben zitierten Bemerkungen die Rede ist.

9. Wir knüpfen an den geführten Beweis noch eine Bemerkung über die Involution der Punkte Q, S . Wir zeigen, dass die Paare dieser Involution von J aus unter rechtem Winkel erscheinen. Ein Punkt Q ist nämlich der Pol einer Linie q in Bezug auf den Kreis (J). Folglich steht q zu der Geraden senkrecht, welche Q mit dem Mittelpunkte J des Kreises (J) verbindet. Ist S der entsprechende Punkt zu Q , so muss die Polare s von S in Bezug auf (J) zur Geraden SJ normal sein. Nun ist q senkrecht zu s . Folglich müssen auch die Linien JQ und JS einen rechten Winkel bilden.

Gehen wir jetzt von den Paaren Q, S auf p aus, so erhalten wir folgenden Satz: Ziehen wir aus den Paaren Q, S einer Punkteinvolution J_p , welche von einem Punkte J aus unter rechtem Winkel erscheinen, die Tangenten an einen Kreis (J) aus J , so werden hierdurch Vierseite bestimmt, welche dem Kreise (J) umschrieben sind. Die Paare Q, S sind je zwei Ecken dieser Vierseite. Die übrigen Ecken liegen auf demselben Kreise (U). Er geht durch die Doppelpunkte der Involution J_p . Die Tangenten in diesen Punkten gehen durch den Pol P der Linie p in Bezug auf (J).

Zu jedem Kreise aus J gehört nach diesem Satze ein Kreis (U). Alle diese Kreise (U) gehen durch die Doppelpunkte von J_p , d. h. sie bilden ein Büschel.

III.

10. Wir haben bis jetzt die Einschränkung gemacht, dass der Kreis (J) im Kreise (U) liege, und dass also P im Innern des Kreises (J) gelegen ist. Aber schon die am Ende von (9) gemachte Bemerkung führt uns zu dem Falle, bei welchem ein Kreis (J) die Linie p schneidet, und bei welchem also P nicht mehr im Innern von (J) liegt. Wir wollen daher jetzt von dieser Beschränkung absehen und untersuchen, wie sich bei beliebiger Lage von P die gegenseitigen Verhältnisse der Kreise (J) und (U) gestalten. Wir stellen zu diesem Zwecke einige allgemeine Beziehungen zwischen den Entfernungen m, n der Punkte U, P vom Punkte J und zwischen den Radien r, ρ der Kreise (U) und (J) auf. Wir gehen dabei von einem doppelt zentrischen Viereck $ABCD$ aus (Fig. 2), für welches zwei gegenüberliegende Seiten senkrecht zur Linie JP sind. Sie berühren also den Kreis (J) in seinen Schnittpunkten F, H mit diesen Senkrechten. P liege zunächst zwischen F und H . Dann konstruieren wir den Mittelpunkt U des Kreises (U), welcher diesem Vierecke eingeschrieben ist, indem wir in der Mitte L von AD die Normale zu AD ziehen. Nun ist:

$$\Delta JPE \sim \Delta UJL.$$

Also ist:

$$JP \cdot JL = PE \cdot UJ.$$

Ferner ist:

$$\Delta PEJ \sim \Delta EJL.$$

Also ist: $PE \cdot JL = EJ^2$.

Durch Division ergibt sich:

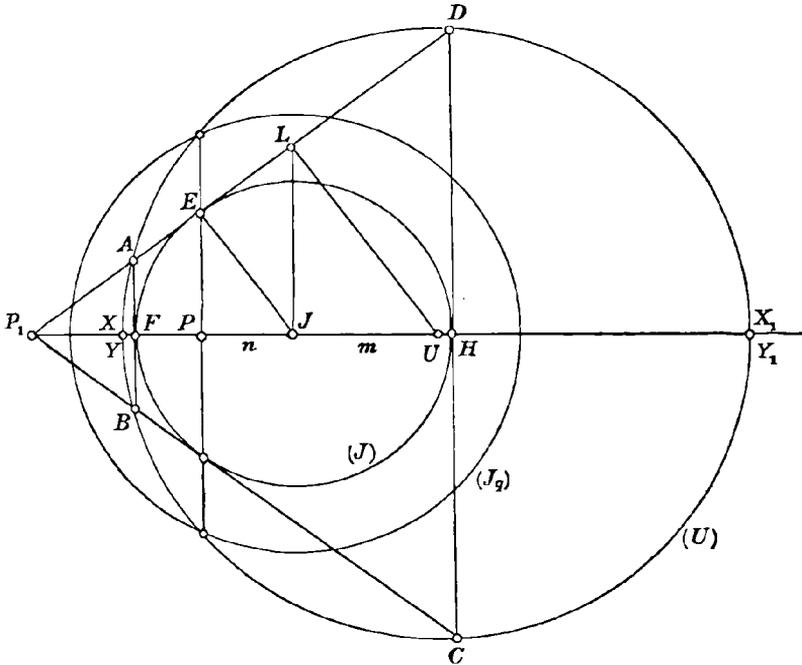
$$\frac{JP}{PE} = \frac{PE \cdot UJ}{EJ^2} \quad \text{oder} \quad \frac{JP}{JU} = - \frac{PE^2}{EJ^2} \quad \text{oder} \quad \frac{n}{m} = - \frac{\varrho^2 - n^2}{\varrho^2} \quad \text{oder:}$$

$$1) \quad m = -n \cdot \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - n^2}.$$

Um r in Funktion der Längen n und ϱ auszudrücken, bemerken wir, dass

$$\triangle FAP_1 \sim \triangle PJE.$$

Fig. 2.



Es ist daher:

$$FA : FP_1 = PJ : PE.$$

Daraus folgt:

$$FA = \frac{FP_1 \cdot PJ}{PE} = FP_1 \cdot \frac{n}{\sqrt{\varrho^2 - n^2}}.$$

Da aber P, P_1 ein konjugiertes Paar in Bezug auf den Kreis (J) ist, so muss $JP \cdot JP_1 = \varrho^2 = n(\varrho + FP_1)$. Daraus folgt:

$$FP_1 = \frac{\varrho^2 - n\varrho}{n}.$$

Aber $r^2 = UF^2 + FA^2 = (-m + \varrho)^2 + FA^2$. Setzen wir in diesem Ausdrücke für m und FA die gefundenen Werte ein, so folgt:

$$2) \quad r = \frac{\varrho^2 \sqrt{2\varrho^2 - n^2}}{\varrho^2 - n^2}.$$

11. Wir nehmen jetzt an, dass P eine beliebige Lage habe und interpretieren dementsprechend die abgeleiteten Ausdrücke für m und r .

Je nachdem P im Innern oder ausserhalb des Kreises (J) liegt, ist $n < \varrho$ oder $n > \varrho$ und also $\varrho^2 - n^2$ positiv oder negativ. Dementsprechend haben m und n entgegengesetzte oder gleiche Zeichen. Wir schliessen daraus:

Liegt P im Innern des Kreises (J), so werden die Punkte P und U durch J getrennt. Liegt P ausserhalb (J), so müssen P und U auf derselben Seite von J liegen.

Aus dem abgeleiteten Ausdrucke für r schliessen wir, dass r nur reell wird, wenn $2\varrho^2 > n^2$, oder wenn $n < \varrho\sqrt{2}$. Nun ist $\varrho\sqrt{2}$ der Radius eines Kreises (J_q), welchem alle Quadrate eingeschrieben sind, deren Seiten den Kreis (J) berühren. Also folgt:

Liegt P im Innern des Kreises (J_q), so wird der Kreis (U) reell. Liegt P ausserhalb (J_q), so ist der Kreis (U) imaginär, hat aber einen reellen Mittelpunkt U .

Um die gegenseitige Lage von (J) und (U) zu untersuchen, bilden wir die Differenz aus der Summe der Radien und dem Abstände m der Mittelpunkte. Es ist:

$$r + \varrho - m = \frac{\varrho^2\sqrt{2\varrho^2 - n^2} + \varrho^3 - \varrho n^2 + \varrho^2 n}{\varrho^2 - n^2} = \frac{\varrho^2\sqrt{2\varrho^2 - n^2} + \varrho^3 - \varrho n(n - \varrho)}{\varrho^2 - n^2}.$$

Sei nun $n < \varrho$ und positiv, so wird diese Differenz stets positiv. Dann liegt P in (J). Das Zeichen von m ist dem von n entgegengesetzt (nach 10, 1) und der Kreis (U) schliesst den Kreis (J) ein.

Subtrahieren wir m von der Differenz der Radien, so folgt:

$$r - \varrho - m = \frac{\varrho^2\sqrt{2\varrho^2 - n^2} - \varrho^3 + \varrho n^2 + \varrho^2 n}{\varrho^2 - n^2} = \frac{\varrho^2\sqrt{2\varrho^2 - n^2} - \varrho^3(\varrho - n) + \varrho n^2}{\varrho^2 - n^2}.$$

So lange n zwischen ϱ und $\varrho\sqrt{2}$ liegt, wird der Zähler dieses Ausdruckes positiv, der Nenner wird negativ. Also wird der ganze Ausdruck negativ. Dann liegt P zwischen (J) und (J_q). m hat dasselbe Vorzeichen wie n . Die Kreise (J) und (U) schliessen einander aus. Ergänzen wir diese Schlüsse für die Grenzfälle, in welchen P auf (J) oder (J_q) liegt, so ergibt sich allgemein folgender Satz:

Liegt P im Innern von (J), so muss der reelle Kreis (U), welcher zu P gehört, den Kreis (J) einschliessen. Liegt P zwischen (J) und (J_q), so schliesst (U) den Kreis (J) aus. Liegt P auf (J), so degeneriert (U) in die Gerade, welche (J) in P berührt, und in die unendlich ferne Gerade ($r = \infty$). Liegt P auf (J_q), so geht (U) in den Nullkreis über, der in P liegt ($r = 0$). Für alle übrigen Lagen von P wird (U) imaginär.

12. Diese Schlüsse stimmen auch mit dem, was wir aus der Rechtwinkelinvolution J_r um P für die doppelt zentrischen Vierecke ableiten können. Liegt P im Innern von (J), so schneidet jedes Paar der In-

volution J_r aus dem Kreise (J) zwei reelle Punktepaare, deren Tangenten Seiten eines reellen Vierecks sind. Befindet sich P zwischen (J) und (J_q), so schneidet ein Teil der Strahlenpaare aus (J) reelle Punkte, denen reelle Vierecke entsprechen. Andere Paare der Involution liegen so, dass ein Strahl den Kreis (J) in zwei reellen Punkten E, G schneidet und der entsprechende Strahl in zwei imaginären Punkten. Dann gehört zu diesem Paare ein imaginäres Viereck. Seine imaginären Ecken liegen paarweise auf den reellen Tangenten in E und G an (J). Liegt endlich P ausserhalb (J_q), so giebt es keine Paare der Involution J_r , welche (J) in vier reellen Punkten schneiden. Folglich sind alle Vierecke, welche zu diesen Lagen von P gehören, imaginär. Bei den einen dieser Vierecke liegen die imaginären Ecken auf reellen Tangenten von (J). In diesem Falle schneidet ein Strahl eines Paares den Kreis reell. Bei allen diesen doppelt zentrischen imaginären Vierecken sind je die zwei Diagonalepunkte R, S als Pole der reellen Paare der Involution J_r gleichfalls reell.

IV.

13. Wir wollen alle doppelt zentrischen Vierecke, welche demselben Kreise ein- resp. umgeschrieben sind, ein Büschel von doppelt zentrischen Vierecken nennen. P heisse der gemeinsame Diagonalpunkt und p die gemeinsame Diagonale der Vierecke. Wir untersuchen ein solches Büschel.

Legen wir im allgemeinen durch einen Diagonalpunkt P eines beliebigen Vierecks eine Gerade, so schneidet diese bekanntlich die gegenüberliegenden Seiten in Punktepaaren, welche durch P und die dem Punkte P gegenüberliegende Diagonale p des Vierecks harmonisch getrennt werden.

Nun haben alle Vierecke des Büschels den Diagonalpunkt P und die Diagonale p gemeinsam. Wir schliessen daraus:

Jede Gerade durch den gemeinsamen Diagonalpunkt P des Büschels schneidet die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke in Paaren einer hyperbolischen Involution J_1 . Sie hat P und den Schnittpunkt der Geraden mit p zu Doppelpunkten.

Der duale Gedanke führt zu folgendem Satze:

Projizieren wir die gegenüberliegenden Ecken der Vierecke aus einem Punkte der gemeinsamen Diagonale p , so erhalten wir Paare einer hyperbolischen Involution J_2 . Sie hat p und die Gerade durch P zu Doppelstrahlen.

Jede Gerade durch P schneidet den Kreis (J) in zwei Punkten, in welchen zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks den Kreis (J) berühren. Folglich sind diese Berührungspunkte ein Paar der Involution J_1 . Ferner trifft jede Gerade durch P den Kreis (U) in zwei Punkten, welche zwei gegenüberliegende Ecken eines doppelt zentrischen

Vierecks sind. Durch sie geht je ein Paar von gegenüberliegenden Seiten. Also gehören auch diese zwei Punkte der Involution J_1 an und wir schliessen:

Jede Gerade durch P schneidet die Kreise (J) und (U) in Paaren von J_1 .

Der duale Schluss heisst: Durch jeden Punkt von p gehen an (J) und (U) Tangenten, welche Paare der Involution J_1 sind.

14. Indem wir die Involution J_1 untersuchen, welche die Centrale m der Kreise (J) und (U) aus dem Büschel der Vierecke schneidet, erhalten wir einen Überblick über die reellen und imaginären Vierecke des Büschels.

Durch einen Punkt X der Geraden m gehen zwei Tangenten e, e^* an (J). Verbinden wir ihre resp. Berührungspunkte E, E^* mit P , so sind diese Verbindungslinien qq^* zu m orthogonal symmetrisch und schneiden (J) je zum zweiten Male in Punkten G, G^* . Ihre Tangenten g, g^* liegen in zwei doppelt zentrischen Vierecken den resp. Seiten e, e^* gegenüber und treffen sich auf m in einem Punkte X_1 , welcher dem Punkte X in der Involution J_1 korrespondiert. Ziehen wir durch P zu q, q^* die resp. Normalen s, s^* , so schneiden diese aus (J) die Punktepaare FF^*, HH^* , deren resp. Tangenten ff^*, hh^* zu m symmetrisch liegen und sich in einem Punktepaare Y, Y_1 der Involution J_1 treffen. Wir sehen daraus, dass je zwei Vierecke des Büschels zur Geraden m orthogonal symmetrisch liegen. Ihre Seiten schneiden sich auf m in zwei Paaren der Involution J_1 . Geben wir ein Paar dieser Involution, so wird das andere durch die Vierecke eindeutig bestimmt. Diese Zuordnung der Paare von J_1 ist eine vertauschbare. Folglich bilden diese Paare eine neue Involution J_3 .

15. Mit Hilfe der zwei Involutionen J_1, J_3 können wir unter den Vierecken des Büschels diejenigen definieren, deren gegenüberliegende Seiten imaginär sind. Im allgemeinen gehen durch ein Paar XX_1 von J_1 vier Tangenten an den Kreis (J). Unter ihnen sind je diejenigen ein gegenüberliegendes Seitenpaar eines Vierecks, deren Berührungspunkte auf einer Geraden durch P liegen. Ist nun X ein Punkt im Innern von (J), so müssen die Tangenten aus X an (J) imaginär sein. Verbinden wir den imaginären Berührungspunkt von einer dieser Tangenten mit P , so schneidet diese Gerade den Kreis (J) in dem imaginären Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite. Folglich ist auch diese Seite imaginär. Sie geht durch den reellen Punkt X_1 , der X in J_1 entspricht. Das Viereck hat also zwei gegenüberliegende imaginäre Seiten, deren reelle Punkte X, X_1 auf der Linie m und im Innern von (J) liegen. Diese Seiten schneiden sich daher in einem imaginären Punkte auf p . Ihm entspricht in der Involution harmonischer Pole in Bezug auf (U) ein imaginärer Punkt, in welchem sich die

zwei anderen gegenüberliegenden Seiten des Vierecks schneiden müssen. Folglich sind auch diese Seiten imaginär. Sie gehen durch die reellen Punkte YY_1 , welche XX_1 in der Involution J_3 entsprechen, und sind Tangenten an (J) . Also liegen auch die Punkte YY_1 im Innern von (U) und es folgt:

Zeichnen wir zu einem Punkte X im Innern von (J) den entsprechenden Punkt X_1 der Involution J_1 auf m und zu XX_1 das korrespondierende Paar der Involution J_3 , so liegen diese Punkte im Innern von (J) . Sie sind die reellen Punkte der Seiten von zwei imaginären, doppelt zentrischen Vierecken des Büschels, welche zu m orthogonal symmetrisch liegen.

Eine duale Überlegung führt zu einer Involution J_2 von Strahlen aus dem ∞ fernen Punkte von p . Die Tangenten in den Schnittpunkten von m mit (J) und (U) sind Paare von J_2 . Also ist J_2 perspektivisch zu J_1 . Durch die Vierecke werden die Paare xx_1, yy_1 von J_2 einander in einer neuen Involution J_4 zugeordnet. Je zwei gegenüberliegende Eckenpaare eines Vierecks liegen in zwei korrespondierenden Strahlenpaaren dieser Involution. Schneidet eine von vier solchen zusammengehörenden Linien xx_1, yy_1 den Kreis (U) imaginär, so treffen auch die übrigen (U) imaginär. Diese Schnittpunkte sind acht Ecken von zwei imaginären doppelt zentrischen Vierecken.

16. Wir treten näher auf die Involution J_3 ein, welche zwischen den Paaren XX_1, YY_1 auf m besteht. In dieser Involution entspricht sich dasjenige Paar selbst, welches m aus dem Kreise (U) schneidet (Fig 2). Ist dieses Paar — und also der Kreis (U) — reell, so muss die Involution J_3 ein zweites reelles Doppelpaar besitzen. Wir gelangen durch folgende Überlegung zu diesem Paare: Weil der Diagonalepunkt P eine Ecke des Polardreiecks ist, welches den Kreisen (J) und (U) gemeinsam ist, so müssen die Schnittpunkte dieser Kreise paarweise auf Geraden durch P liegen. Zeichnen wir in einem solchen Punktepaare E, G die Tangenten e, g an (J) , so sind diese zwei gegenüberliegende Seiten eines doppelt zentrischen Vierecks. Eine solche Seite — etwa e (Fig. 1) — schneidet aus (U) im allgemeinen zwei Punkte A, D . Durch jeden dieser Punkte geht eine zweite Tangente an J und diese Tangenten sind zwei weitere gegenüberliegende Seiten des Vierecks. In unserem speziellen Falle liegt E in einem der zwei Punkte A, D . Folglich stellt e zwei benachbarte Seiten eines doppelt zentrischen Vierecks vor, welche sich decken. Analog schliessen wir, dass in g zwei solche Seiten zusammenfallen. Das Viereck degeneriert also in zwei doppelte Gerade und diese müssen sich in einem Punkte von (U) schneiden. In ihm liegen zwei Punkte des Vierecks, deren Verbindungslinie durch P geht. Folglich berührt in diesem Punkte eine Tangente aus P den Kreis (U) . Nun ist P und p Pol und Polare in Bezug auf (U) . Also werden die Tangenten,

welche durch P an (U) gehen, diesen Kreis in seinen Schnittpunkten mit p berühren. Daher schliessen wir umgekehrt:

Ziehen wir aus einem Schnittpunkte von p mit (U) die Tangenten an (J) , so sind ihre Berührungspunkte zwei gemeinsame Punkte der Kreise (J) und (U) . In jeder dieser Tangenten fallen zwei benachbarte Seiten eines doppelt zentrischen Vierecks zusammen. Sie schneiden aus m das zweite Doppelpaar von J_3 .

Da die Schnittpunkte von p mit dem Kreise (U) zu m symmetrisch liegen, so erhalten wir zwei degenerierte Vierecke, deren Seiten sich auf m in dem erwähnten Doppelpaare schneiden.

Die vier Schnittpunkte von (J) und (U) sind in unserem Falle imaginär. Zwei sind die imaginären Kreispunkte. Ihre Tangenten treffen sich im Mittelpunkte J des Kreises (J) . Die zwei übrigen Schnittpunkte liegen auf der Potenzlinie der Kreise (J) und (U) . Die Tangenten an (J) in diesen Punkten schneiden sich im Pole der Potenzlinie in Bezug auf (J) . Also folgt:

Der Mittelpunkt J von (J) und der Pol der Potenzlinie von (J) und (U) in Bezug auf (J) sind ein Doppelpaar von J_3 und daher ein Paar von J_1 .

17. Wir wenden uns nochmals zur Involution J_3 auf m . Dem Doppelpunkte P_1 (Fig. 2) von J_1 entspricht in J_3 dasjenige Paar, welches die Linie m aus dem Kreise (J) schneidet. Wir fragen nach dem Paare von J_1 , welches in J_3 dem anderen Doppelpunkte P von J_1 korrespondiert. Um diese Frage zu beantworten, ziehen wir durch P eine Tangente t an (J) . Diese stellt zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks vor. Die Senkrechte in P zu t schneidet aus (J) zwei Punkte, deren Tangenten die zwei übrigen Seiten des Vierecks sind. Daher schneiden diese Tangenten aus der doppelten Geraden t je zwei zusammenfallende Punkte des Kreises (U) , d. h. sie berühren den Kreis (U) in diesen Schnittpunkten. Sie sind also gemeinsame Tangenten von (J) und (U) . Wir erkennen daraus, dass t und die zwei erwähnten gemeinsamen Tangenten ein degeneriertes Viereck des Büschels vorstellen.

Ein zweites degeneriertes Viereck besteht aus der zweiten Tangente durch P an (J) und aus dem anderen gemeinsamen Tangentenpaare von (J) und (U) . Diese vier Tangenten schneiden sich aber paarweise in m und wir schliessen daher:

Dem Doppelpunkte P von J_1 korrespondiert in der Involution J_3 das stets reelle Punktepaar, in welchem sich die gemeinsamen Tangenten von (J) und (U) auf m schneiden.

Aus dem geführten Beweise ergibt sich noch (Fig. 4):

Ziehen wir durch P eine Tangente an (J) und zu ihr die Normale in P , so schneidet diese aus (J) zwei Berührungs-

punkte von zwei gemeinsamen Tangenten der Kreise (J) und (U). Ferner folgt: Die gemeinsamen Tangenten von (J) und (U) berühren (U) in Punkten, welche paarweise auf den Tangenten aus P an (J) liegen.

Wir erwähnen schliesslich die analogen Schlüsse für die Involuntionen J_2 und J_4 . J_4 hat die Geraden zu einem Doppelpaare, welche in den Schnittpunkten von m mit (J) diesen Kreis berühren. Das andere Doppelpaar wird durch diejenigen zu m senkrechten Geraden dargestellt, welche die auf (U) gelegenen Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von (J) und (U) verbinden.

Dem Doppelstrahle von J_2 , welcher durch P geht, entsprechen in J_4 die Linien, welche durch die Schnittpunkte von m mit (U) gehen. Dem Doppelstrahle p entsprechen die zu m senkrechten Linien, welche die gemeinsamen Punkte der Kreise (J) und (U) verbinden. Diese Geraden sind: die Potenzlinie der zwei Kreise und die unendlich ferne Linie.

V.

18. Wir benutzen die abgeleiteten Sätze, um eine Reihe von Aufgaben zu lösen.

a) Gegeben sei ein Kreis (J) mit dem Radius ρ ; ferner der Mittelpunkt U eines Kreises (U). Dieser soll so bestimmt werden, dass (J) und (U) resp. In- und Umkreis eines Büschels von doppelt zentrischen Vierecken sind.

Wir suchen den gemeinsamen Diagonalpunkt P der Vierecke. Wir berechnen zu diesem Zwecke n aus der quadratischen Gleichung

$$n^2 - n \frac{\rho^2}{m} - \rho^2 = 0,$$

welche aus (10, 1) folgt. Wir konstruieren (Fig. 3) die Wurzeln

$$n = HS \quad \text{und} \quad n^* = HS^*$$

dieser Gleichung, welche stets reell sind. Ihnen entsprechen zwei Punkte PP^* . Weil $nn^* = -\rho^2 = JP \cdot JP^*$, so muss einer der Punkte PP^* im Innern von (J) liegen und der andere ausserhalb. Für den ersten Punkt ist (U) stets reell und er muss dem kleineren der zwei Werte nn^* entsprechen. Ferner muss er durch J von U getrennt werden (11). Wir tragen daher den kleineren der zwei Werte nn^* von J aus nach der Seite ab, welche JU entgegengesetzt ist, und den grösseren auf dieselbe Seite, auf welcher U liegt. Der Kreis (U), welcher zu dem letzteren Werte gehört, ist reell oder imaginär, je nachdem $n < \rho\sqrt{2}$ oder $n > \rho\sqrt{2}$. Wir finden den Radius r des gesuchten Kreises, indem wir zu P den konjugierten Punkt P_1 in Bezug auf (J) bestimmen. Nun ist PP_1 auch ein konjugiertes Paar in Bezug auf (U). Also ist

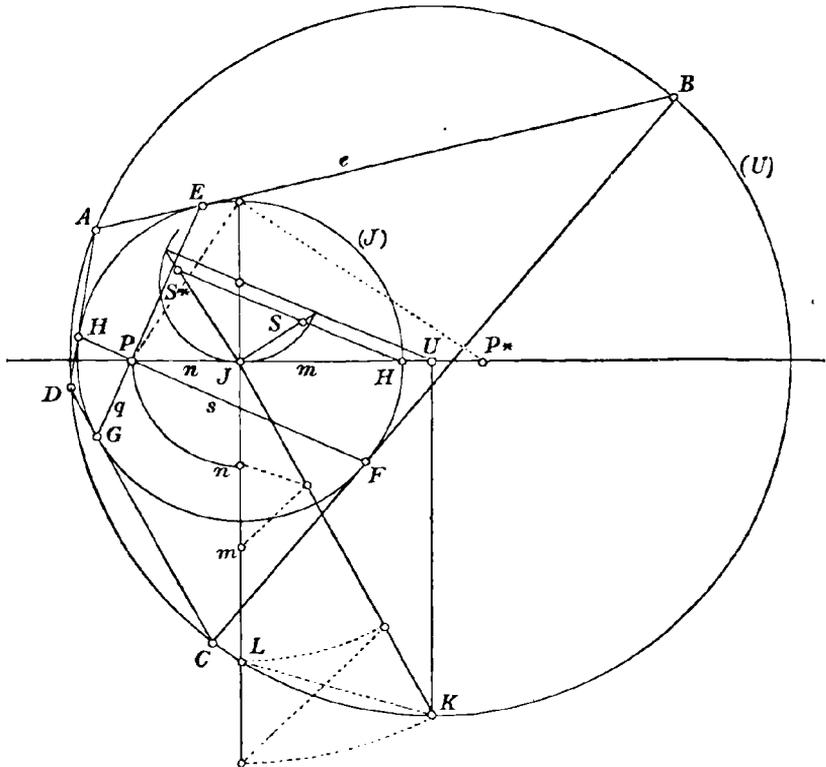
$$UP \cdot UP_1 = r^2.$$

An die gelöste Aufgabe schliesst sich folgende an:

b) Gegeben sei eine Tangente e eines Kreises (J) und ein Punkt U . Man sucht ein doppelt zentrisches Viereck, welches (J) umschrieben ist, e zu einer Seite hat und einem Kreise aus U eingeschrieben ist.

Wir bestimmen nach a) die Punkte PP^* und verbinden diese mit dem Berührungspunkte E von e . Diese Verbindungslinien qq^* schneiden (J) zum zweiten Male in den Berührungspunkten der resp. Seiten g, g^* ,

Fig. 5.



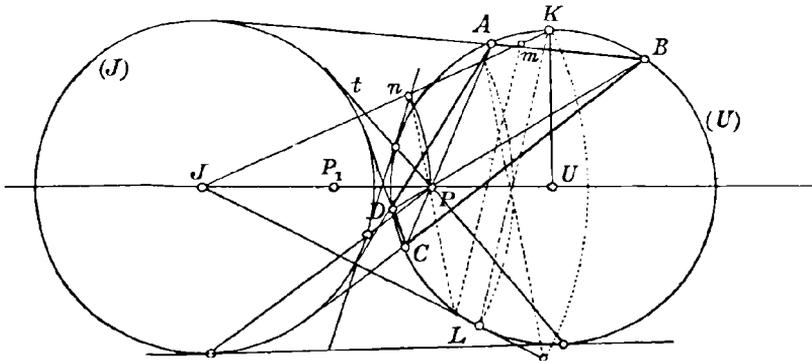
welche e gegenüberliegen. Die resp. Senkrechten s, s^* zu g, q^* durch P, P^* treffen (J) in den resp. Berührungspunkten der anderen Seitenpaare. Es giebt also im allgemeinen zwei Vierecke der verlangten Art. Das eine, für welches P im Innern von (J) liegt, ist stets reell. Das andere kann reell sein oder es hat nur zwei reelle Seiten.

19. Den gelösten Aufgaben stehen zwei weitere gegenüber:

c) Gegeben sei ein Kreis (U) mit dem Radius r und ein Punkt J . Man beschreibe aus J einen Kreis (J), welcher mit (U) ein Bündel von doppelt zentrischen Vierecken bestimmt.

Wir suchen den gemeinsamen Diagonalpunkt P , indem wir aus 1) und 2) von 10 den Radius ρ eliminieren und n berechnen. Wir erhalten $n = m \frac{m^2 - r^2}{m^2 + r^2}$. Dieser Ausdruck giebt immer einen reellen Wert von n . Zu seiner Konstruktion bestimmen wir (Fig. 3 und Fig. 4) $JL = \sqrt{m^2 - r^2}$ und $JK = \sqrt{m^2 + r^2}$ und multiplizieren m mit $\frac{JL^2}{JK^2}$. Zeichnen wir sodann zu P den konjugierten Punkt P_1 in Bezug auf (U) , so ist $JP \cdot JP_1 = \rho^2$. Ist $m < r$ (Fig. 3), d. h. liegt J

Fig. 4.



in U , so wird n negativ. J liegt also zwischen U und P . Dann lässt sich zeigen, dass J auch zwischen U und P_1 liegt, denn

$$UP \cdot UP_1 = r^2$$

und

$$UP = UJ + JP = -m + n = -m + m \cdot \frac{m^2 - r^2}{m^2 + r^2} = -\frac{2mr}{m^2 + r^2}.$$

Also ist

$$\frac{-2mr}{m^2 - r^2} \cdot UP_1 = r^2.$$

Folglich ist

$$UP_1 = -\frac{m^2 + r^2}{2m}.$$

So lange $m < r$, so ist dieser Ausdruck $> m$. Er giebt einen Punkt P_1 , welcher von U durch J getrennt wird. Folglich liegen die Punkte PP_1 auf derselben Seite von J . Daraus folgt, dass ρ^2 positiv und der Kreis (J) reell wird. Ist $m > r$, d. h. liegt J ausserhalb (U) (Fig. 4), so haben m und n gleiche Vorzeichen. Die Punkte P und U liegen auf derselben Seite von J und zwar liegt P zwischen J und U , weil $n < m$. In diesem Falle wird (J) reell und von (U) ausgeschlossen, wenn J die Punkte PP_1 nicht trennt. Liegt aber J zwischen PP_1 , so wird (J) imaginär.

Im Zusammenhange mit Aufgabe c) steht folgende Aufgabe:

d) Gegeben sei ein Kreis (U) und ein Punkt A auf (U) , sowie ein beliebiger Punkt J . Man sucht ein Viereck,

welches (U) eingeschrieben ist, A zu einer Ecke hat und einem Kreise mit dem Mittelpunkte (J) umschrieben ist.

Wir konstruieren nach c) den Kreis (J). Wird er von (U) eingeschlossen, so ist das gesuchte Viereck stets reell (Fig. 3). Wird (U) reell und von (J) ausgeschlossen, so ist das Viereck ebenfalls reell (Fig. 4). Wird (U) imaginär, so ist auch das Viereck imaginär. Reell ist aber A und die Ecke C , welche A gegenüberliegt. Beide Ecken befinden sich auf einer Geraden durch P .

20. Wir stellen ferner folgende Aufgabe:

e) Gegeben sei ein Kreis (J), eine Tangente f dieses Kreises und auf ihr zwei Punkte A, B . Man sucht ein Kreisviereck, welches (J) umschrieben ist und A, B zu Ecken hat.

Wir ziehen aus A und B je die zweite Tangente e, g an (J) (Fig. 1). Wir verbinden die resp. Berührungspunkte E, G dieser Tangenten und fällen aus dem Berührungspunkte F von f die Senkrechte s auf diese Verbindungslinie. Dann trifft s den Kreis zum zweiten Male im Berührungspunkte H der vierten Seite h des Vierecks. Liegen die gegebenen Ecken A, B auf derselben Seite von F , so müssen auch die zwei anderen Ecken CD in h auf derselben Seite von H liegen, weil die drei Linien AC, BD und HF durch denselben Punkt P gehen. In diesem Falle liegt das Viereck $ABCD$ ausserhalb (J) und die Kreise (J) und (U) schliessen sich aus.

Die Aufgabe e) erhält eine Erweiterung in folgender Form:

f) Gegeben seien drei Tangenten e, f, g eines Kreises (J). Man sucht die drei doppelt zentrischen Kreisvierecke, welche (J) umschrieben sind, die drei gegebenen Tangenten zu Seiten und je zwei Ecken des Tangentendreiecks zu Ecken haben.

Wir ziehen die drei Höhen vom Dreieck EFG der resp. Berührungspunkte. Diese Höhen schneiden aus dem Kreise je einen zweiten Punkt H, J, K . Die Tangenten h, i, k in diesen Punkten sind diejenigen Viereckseiten, welche resp. e, f, g gegenüberliegen. Jede dieser Seiten bestimmt mit e, f, g eines der drei Vierecke. Die drei Höhenfußpunkte des Dreiecks EFG sind drei Diagonalpunkte der drei Vierecke.

Wir bemerken noch, dass sich die gegenüberliegenden Seitenpaare $e, h; f, i; g, k$ in drei Punkten einer Geraden schneiden, welche die Polare vom Höhenpunkte des Dreiecks E, F, G in Bezug auf (J) ist. Daraus folgt, dass das Dreieck der Tangenten e, f, g zum Dreieck der Tangenten h, i, k perspektivisch liegt. Der Höhenpunkt von E, F, G ist das Perspektivcentrum.

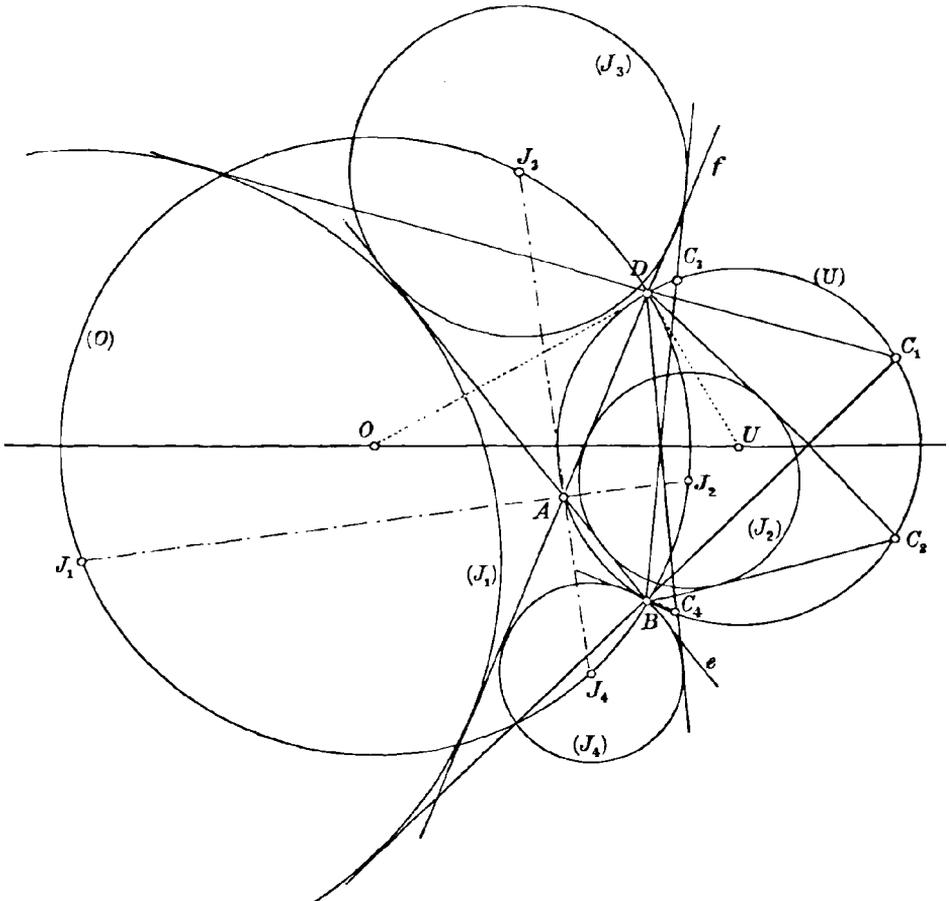
21. Der Aufgabe e) in 20) steht folgende gegenüber:

g) Gegeben sei ein Kreis (U), ein Punkt A von (U) und zwei Gerade e, f durch A . Man sucht ein Viereck, welches

(U) eingeschrieben ist, e, f zu Seiten hat und einem Kreise (J) umschrieben ist, der von e, f berührt wird.

Bei der Lösung dieser Aufgabe stützen wir uns auf einen leicht zu beweisenden Satz für Kreisvierecke. Zeichnen wir nämlich bei einem solchen Vierecke in zwei gegenüberliegenden Ecken B, D die

Fig. 5.

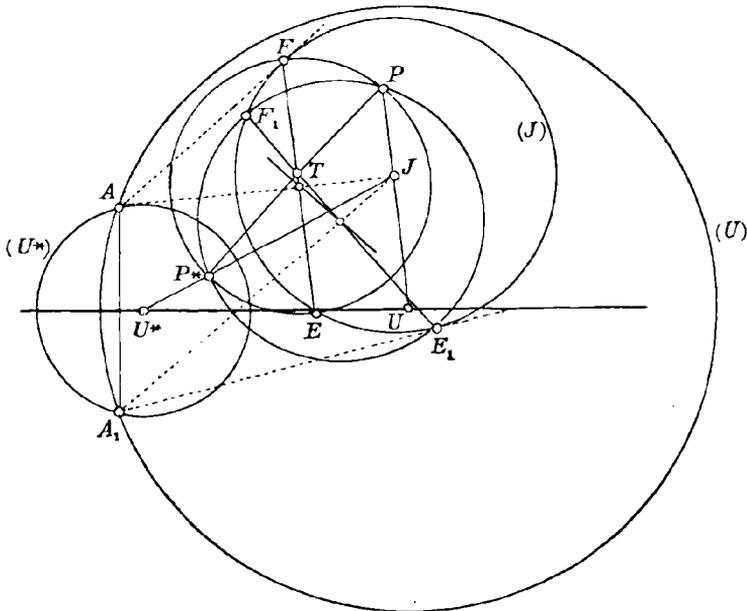


vier Winkelhalbierenden, so liegt der Schnittpunkt der zwei inneren mit dem Schnittpunkte der zwei äusseren Halbierungslinien auf einem Kreise, der in B und D zu dem Kreise des Kreisvierecks senkrecht steht.

Soll nun ein Kreisviereck einem zweiten Kreise (J) umschrieben sein, so müssen sich drei Winkelhalbierende von drei aufeinander folgenden Ecken im Mittelpunkte von (J) treffen. Diese drei Halbierungslinien sind innere, wenn das Viereck den Kreis (J) einschliesst. Sie

sind abwechselnd je eine innere und eine äussere, wenn das Viereck den Kreis (J) ausschliesst. Seien jetzt in unserer Aufgabe B und D (Fig. 5) die resp. Schnittpunkte von e und f mit (U) , so sind B, D zwei gegenüberliegende Ecken der gesuchten Vierecke. Wir konstruieren den Orthogonalkreis (O) in B und D zu (U) . Schneiden wir diesen Kreis mit den Geraden, welche den Winkel e, f halbieren, so erhalten wir vier Mittelpunkte $(J_1 \dots J_4)$ von vier Kreisen, denen Vierecke der gesuchten Art eingeschrieben sind.

Fig. 6.



Die vierten Ecken C von je zwei dieser Vierecke liegen orthogonal symmetrisch zur Centrale der Kreise (U) und (O) .

Die gelöste Aufgabe führt zur Lösung der folgenden:

h) Gegeben seien drei Punkte ABC eines Kreises (U) . Man sucht die Vierecke, welche (U) eingeschrieben sind, A, B, C zu aufeinander folgenden Ecken haben, und welche einem Kreise (J) so eingeschrieben sind, dass je zwei Seiten des Dreiecks ABC einen Kreis (J) berühren.

Wir zeichnen die drei Kreise (O) , welche je in zwei Ecken des Dreiecks ABC zu (U) orthogonal stehen. Indem wir diese Kreise mit den resp. Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC schneiden, erhalten wir im allgemeinen zwölf Mittelpunkte von Kreisen (J) , denen Vierecke unter den gegebenen Bedingungen umgeschrieben werden können.

22. Geben wir einen Kreis (J) und einen beliebigen Punkt A ausserhalb (J) , so gibt es ∞ viele Kreisvierecke, welche (J) um-

geschrieben sind und A zu einer Ecke haben. Ziehen wir nämlich aus A die zwei Tangenten e, f an (J) und seien E, F ihre Berührungspunkte, so können wir durch E eine beliebige Gerade g ziehen. Füllen wir aus F eine Senkrechte zu g , so schneidet sie g in einem Diagonalpunkte P eines solchen Vierecks. Der Ort der Punkte P ist ein Kreis (EF) über der Linie EF als Durchmesser. An diese Bemerkung knüpft sich folgende Aufgabe:

i) Gegeben sei ein Kreis (J) . Ferner kennt man zwei Punkte AA_1 eines Kreises (U) . Derselbe soll so bestimmt werden, dass (J) und (U) In- und Umkreis eines Büschels von doppelt zentrischen Vierecken sind.

Wir konstruieren (Fig. 6) zu A und A_1 die resp. Polaren EF, E_1F_1 in Bezug auf (J) und zeichnen über diesen Linien als Durchmesser die Kreise (EF) und (E_1F_1) . Sie schneiden sich in zwei Punkten PP^* . Zu jedem dieser Punkte gehört als Diagonalpunkt ein Büschel von doppelt zentrischen Vierecken mit dem Inkreis (J) . Verbinden wir den Mittelpunkt J von (J) mit den zwei Punkten P, P^* , so schneiden diese Verbindungslinien aus der Geraden, welche in der Mitte von AA_1 zu AA_1 senkrecht steht, die Mittelpunkte U, U^* der zugehörigen Umkreise aus.

Um die Bedingungen zu finden, unter welchen die Punkte PP^* reell werden, bemerken wir, dass EF, E_1F_1 Paare einer Involution auf (J) sind. Diese Involution hat die Schnittpunkte der Geraden AA_1 mit (J) zu Doppelpunkten. Sind diese Schnittpunkte imaginär, so trennen sich die Paare EF, E_1F_1 . Dann schneiden sich die Kreise (EF) und (E_1F_1) stets in reellen Punkten P, P^* . Wir schliessen daraus: Die Punkte PP^* sind stets reell, wenn $\overline{AA_1}$ den Kreis (J) nicht schneidet. Trifft AA_1 den Kreis (J) , so können die Punkte P, P^* reell oder imaginär sein.

23. Die Figur, welche die Aufgabe i) löst, zeigt noch, dass die drei Geraden EF, E_1F_1 und PP^* durch einen Punkt T gehen. Er ist Potenzpunkt für die drei Kreise $(J), (EF)$ und (E_1F_1) . Er ist aber auch Pol der Linie AA_1 , denn in ihm schneiden sich die Polaren EF und E_1F_1 der Punkte A, A_1 . Ferner muss die Linie PP^* zu der Geraden senkrecht stehen, welche die Mittelpunkte der Kreise $(EF), (E_1F_1)$ verbindet. Diese Mittelpunkte sind die konjugierten zu A, A_1 in Bezug auf (J) . Diese Bemerkungen dienen zur Lösung der Aufgabe i), wenn AA_1 zusammenfallen. Wir haben die Aufgabe:

k) Gegeben sei ein Kreis (J) , eine Gerade t und ein Punkt A auf t , welcher ausserhalb (J) liegt. Man sucht einen Kreis (U) , welcher t in A berührt und mit (J) ein Büschel von doppelt zentrischen Vierecken bestimmt.

Wir konstruieren wie bei i) den Kreis (EF) . Dann bestimmen wir den Ort aller konjugierten Punkte zu den Punkten von t in Bezug auf (J) . Dieser Ort ist ein Kreis. J und der Pol T von t in Bezug

auf (J) sind die Endpunkte von einem Durchmesser dieses Kreises. Wir zeichnen an denselben die Tangente in demjenigen Punkte, welcher zu A konjugiert ist. Wir fällen aus T die Senkrechte zu dieser Tangente und suchen die Schnittpunkte mit dem Kreise (EF). Diese sind zwei Diagonalpunkte PP^* und ihnen entsprechen — wie bei i) — die Mittelpunkte U, U^* von zwei Kreisen der gesuchten Art. Sie sind immer reell, wenn t den Kreis (J) nicht schneidet.

VI.

24. Wir stellen zum Schlusse einige Sätze zusammen, welche sich leicht mit Hilfe der entwickelten Gedanken beweisen lassen.

Satz I. U sei ein Punkt eines Kreises (J). Wir teilen den Radius dieses Kreises nach dem goldenen Schnitte und tragen den grösseren Abschnitt von U aus in der Richtung JU und von J aus in der Richtung UJ ab. Dann sind die resp. Endpunkte P^* und P gemeinsame Diagonalpunkte zweier Büschel von doppelt zentrischen Vierecken, welche (J) zum Inkreise haben. U ist der Mittelpunkt der Umkreise dieser Büschel. Von diesen Umkreisen ist derjenige reell, für den der Diagonalpunkt im Innern von (J) liegt.

Satz II. Ziehen wir aus zwei Punkten Q, S , welche auf zwei zueinander senkrechten Durchmessern eines Kreises liegen, an diesen die vier Tangenten, so schneiden sich dieselben in weiteren vier Punkten eines Kreisvierecks.

Satz III. Für die Büschel von doppelt zentrischen Vierecken, welche demselben Kreise (J) umschrieben sind und deren gemeinsame Diagonalpunkte P auf einer Geraden g liegen, ist der Ort der Mittelpunkte U der Umkreise (U) ein Kegelschnitt M^2 .

Die Senkrechte durch den Mittelpunkt J von (J) zur Geraden g ist eine Axe von M^2 . J ist ein Scheitel. Der zu (J) konzentrische Kreis (J_0) mit dem Radius $\rho\sqrt{2}$ wird von g in zwei Punkten geschnitten, welche auf M^2 liegen. Schneidet g den Kreis (J) reell, so ist M^2 eine Hyperbel. Ihre Asymptoten sind parallel zu den Radien von (J), welche durch die Schnittpunkte von g mit (J) gehen. Berührt g den Kreis (J), so ist M^2 eine Parabel. Schneidet g den Kreis (J) nicht, so wird M^2 eine Ellipse. Trifft g auch (J_0) nicht, so stellt die Ellipse M^2 den Ort der Mittelpunkte von imaginären Kreisen (U) vor.

Satz IV. H^2 sei ein Kreis, welcher durch den Mittelpunkt J eines zweiten Kreises (J) geht. Konstruieren wir die doppelt zentrischen dem Kreise (J) umschriebenen Trapeze, für welche je die nicht parallelen Seiten sich auf H^2 schneiden, so liegen die Mittelpunkte der Umkreise dieser Trapeze auf einem Kegelschnitte.

Satz V. $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ seien zwei doppelt zentrische Vierecke, welche demselben Kreise (J) umschrieben sind, und welche zwei gegenüberliegende Seiten gemeinsam haben. AB, A_1B_1 seien die Ecken auf einer dieser Seiten und CD, C_1D_1 seien die Ecken auf der anderen Seite. Dann liegen auch die Ecken AB, C_1D_1 und A_1B_1, CD je auf einem Kreise.

Satz VI. P sei der gemeinsame Diagonalpunkt eines Büschels von doppelt zentrischen Vierecken, welche dem Kreise (J) vom Radius ρ umschrieben sind. (J_ρ) sei der konzentrische Kreis mit dem Radius $\rho\sqrt{2}$. Eine Tangente durch P an (J) berühre diesen Kreis in E und schneide (J_ρ) in A und B . Durch A (oder B) geht eine zweite Tangente an (J). Sie treffe die Gerade PJ in S . Ziehen wir zu der Linie ES eine Parallele durch B (oder A), so schneidet diese Parallele aus der Geraden PJ den Mittelpunkt U vom Umkreise des Büschels.

Nach diesem Satze konstruieren wir U , wenn P ausserhalb (J) liegt, und wenn (U) imaginär wird.

Satz VII. Zeichnen wir die gemeinsamen Tangenten zwischen einem Kreise (J) und einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkte J von (J) liegt, so treffen sich bekanntlich diese Tangenten paarweise auf der Geraden, welche J mit dem Brennpunkte U der Parabel verbindet. Konstruieren wir zu diesen Schnittpunkten die Polaren in Bezug auf (J), so schneiden sie die Gerade JU in zwei Punkten PP^* , welche gemeinsame Diagonalpunkte von zwei Büscheln doppelt zentrischer Vierecke sind. Diese haben (J) zum Inkreise und zwei Kreise aus U zu resp. Umkreisen.

Satz VIII. Schneiden sich die vier Halbierungslinien der Innenwinkel eines Kreisvierecks $ABCD$ in einem Punkte J [das Viereck ist doppelt zentrisch und (U) schliesst (J) ein], so treffen sich die aufeinander folgenden Halbierungslinien der Aussenwinkel in vier Punkten, welche auf einem Kreise J_1 liegen. Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken dieses neuen Kreisvierecks gehen durch J . Konstruieren wir in seinen Ecken die Tangenten an (J_1), so bestimmen diese ein neues doppelt zentrisches Viereck u.s.w. Die Mittelpunkte aller Kreise, denen diese Vierecke ein- resp. umgeschrieben sind, liegen auf einer Geraden.

Satz IX. Ein Trapez ist doppelt zentrisch, wenn die nicht parallelen Seiten gleich sind, und wenn sich die Kreise, welche diese Seiten zu Durchmessern haben, berühren. Der Berührungspunkt ist Mittelpunkt des Inkreises. Sein Radius ist das halbe geometrische Mittel aus den parallelen Seiten.

Der Inhalt des Trapezes ist gleich dem Produkte aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der parallelen Seiten. Jede der nicht parallelen Seiten ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den parallelen Seiten.

Satz X. Ist bei einem doppelt zentrischen Trapez ein Winkel $= 45^\circ$, so ist die Fläche des Umkreises sechsmal so gross wie die Fläche des Inkreises. Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf dem zum Inkreise (J) konzentrischen Kreise J_q . Der Inhalt des Trapezes ist gleich dem Rechtecke aus den Durchmessern der Kreise (J) und (J_q). Die Berührungspunkte der Trapezeiten mit (J) bestimmen ein neues doppelt zentrisches Viereck, welches halb so gross wie das Trapez ist.

Satz XI. Das einem Kreise (J) umschriebene Quadrat ist halb so gross wie das umschriebene doppelt zentrische Trapez, für welches ein Winkel 30° ist. Die Fläche vom Umkreise dieses Trapezes ist 20mal so gross wie die Fläche des Inkreises.

Satz XII. Schliesst bei einem Büschel von doppelt zentrischen Vierecken der Umkreis den Inkreis ein, so ist unter den Vierecken stets ein Trapez. Verhält sich der Umfang des Inkreises zu dem des Umkreises wie $1:\lambda$, wo λ eine beliebige von 1 verschiedene Zahl bedeutet, so ist ein Winkel φ des Trapezes durch die Relation bestimmt:

$$\sin \varphi = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2}}{2}}.$$

Satz XIII. Zeichnen wir zu einem Kreise (J) mit dem Radius ϱ einen konzentrischen Kreis, dessen Radius

$$\varrho \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}},$$

so kann jeder Punkt dieses Kreises als Diagonalepunkt eines Büschels von doppelt zentrischen Vierecken betrachtet werden, welche (J) zum Inkreise haben. Die Umkreise dieser Büschel sind dem Inkreise gleich und schliessen ihn aus.

Satz XIV. Ist bei einem doppelt zentrischen Trapez das Rechteck aus den parallelen Seiten gleich vier, so ist der Inhalt des Inkreises gleich π .

Satz XV. Legen wir durch zwei gegenüberliegende Ecken eines doppelt zentrischen Vierecks denjenigen Kreis, welcher zum Umkreise senkrecht steht, so geht er durch den Mittelpunkt des Inkreises.

Satz XVI. X sei ein beliebiger Punkt auf der Polare p des gemeinsamen Diagonalepunktes P von einem Büschel

doppelt zentrischer Vierecke. Beschreiben wir aus X einen Kreis (X), welcher durch den Mittelpunkt des Inkreises (J) geht, so schneidet (X) aus dem Umkreise zwei gegenüberliegende Ecken von einem Viereck des Büschels.

Satz XVII. Zeichnen wir zu einem beliebigen Kreise (U) ein Büschel von Orthogonalkreisen, so sind ihre Grundpunkte J, J_1 zugleich Mittelpunkte von zwei Kreisen (J), (J_1), deren jeder als Inkreis mit (U) als Umkreis ein Büschel von doppelt zentrischen Vierecken bestimmt. Der Pol P von der Centrale p des Kreisbüschels in Bezug auf (U) ist gemeinsamer Diagonalpunkt der zwei Büschel von Vierecken.

Satz XVIII. Alle Sehnen eines Kreises (J), welche von einem Punkte P aus unter rechtem Winkel erscheinen, umhüllen einen Kegelschnitt. Derselbe hat P und den Mittelpunkt J von (J) zu Brennpunkten. Er ist Ellipse oder Hyperbel, je nachdem P im Innern von (J) oder zwischen (J) und dem zu (J) konzentrischen Kreise (J_2) liegt. Die Polarfigur dieses Kegelschnittes in Bezug auf (J) ist ein Kreis (U). Dieser ist Umkreis eines Büschels von doppelt zentrischen Vierecken, welche (J) zum Inkreise haben.

Satz XIX. P und J seien die Brennpunkte eines Kegelschnittes (PJ). p sei Direktrix von P . Wir beschreiben aus dem anderen Brennpunkte J einen Kreis (J), welcher P und p zu Pol und Polare hat. Dann müssen die Tangenten aus irgend einem Punkte X von p an den Kegelschnitt (PJ) aus dem Kreise (J) vier Punkte schneiden, in denen vier Seiten eines doppelt zentrischen Vierecks den Kreis (J) berühren.

Satz XX. Ziehen wir durch einen Brennpunkt P eines Kegelschnittes Linien unter 45° gegen die Hauptaxe, so schneiden diese aus den zur Hauptaxe senkrechten Scheiteltangenten vier Punkte eines Kreises (J), dessen Mittelpunkt im anderen Brennpunkte liegt. Die Tangenten in diesen vier Punkten an (J) bilden ein doppelt zentrisches Viereck.

Satz XXI. K_i sei ein beliebiger Kegelschnitt und P_i sei eine Strahleninvolution am Scheitel P . Jedes Paar der Involution schneidet aus K_i zwei Punktpaare, deren resp. Tangentenpaare sich auf der Polare p von P treffen. Die übrigen vier Schnittpunkte dieser Tangenten bestimmen ein Viereck. Die Ecken aller dieser Vierecke liegen auf einem neuen Kegelschnitt K_u . Er schneidet K_i in vier Punkten, welche auf den Doppelstrahlen der Involution P_i liegen. Die Tangenten aus P an K_i treffen K_u in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von K_i und K_u . Ist die Involution um P zugleich Involution harmonischer

Polaren in Bezug auf K_i , so muss der Kegelschnitt K_i den Kegelschnitt K_u in zwei Punkten der Polare von P berühren.

Satz XXII. q, s seien die Winkelhalbierenden des Winkels von zwei Geraden t, u . Konstruieren wir in den Schnittpunkten E, G, F, H von q, s mit einem Kegelschnitte K_i die Tangenten e, g, f, h , so bestimmen die Schnittpunkte ef, fg, gh, he ein Viereck. Seine Ecken liegen mit denjenigen des Vierecks, welches die Geraden t, u aus K_i schneiden, auf einem Kegelschnitte K_u .

Satz XXIII. Legen wir durch die Ecken des Rechtecks, welches die Scheiteltangenten eines Kegelschnittes K_i bestimmen, einen neuen Kegelschnitt K_u , so berühren die gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte den Kegelschnitt K_u in vier Punkten, welche auf den Asymptoten von K_i liegen.

Das Rechteck wird reell, wenn K_i Ellipse ist. Dann sind die gemeinsamen Tangenten imaginär. Ist K_i eine Hyperbel, so ist das Rechteck imaginär. Liegt in diesem Falle K_u zwischen den beiden reellen Scheiteltangenten von K_i , so muss K_u eine Ellipse sein und von den Asymptoten des Kegelschnittes K_i in vier reellen Punkten geschnitten werden. K_i und K_u haben vier reelle Tangenten. Liegt K_u ausserhalb der reellen Scheiteltangenten, so ist K_u Hyperbel. K_i und K_u können reelle Tangenten haben.

Satz XXIV. $\overline{EG}, \overline{FH}$ seien zwei Sehnen eines Kreises (J), welche zu einer dritten Sehne VW parallel sind und zu ihr symmetrisch liegen. Die aufeinander folgenden Schnittpunkte ef, fg, gh, he der vier Tangenten $efgh$ in $EFGH$ bestimmen ein überschlagenes Viereck.* Dasselbe ist einem Kreise (U) durch V und W eingeschrieben.

(U) geht durch den Mittelpunkt J von (J) und durch den Pol der Sehne VW in Bezug auf (J). Die Tangenten an (J), welche parallel zu VW sind, schneiden (U) in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von (J) und (U). Jedes zu VW parallele und symmetrische Sehnenpaar führt zu einem neuen überschlagenen Viereck, welches dem Kreise (U) eingeschrieben ist.

Satz XXV. Jedes Paar einer beliebigen Strahleninvolution schneidet aus einem Kegelschnitt K_i vier Ecken eines Vierecks. Diejenigen Seiten dieser Vierecke, welche nicht durch den Scheitel der Involution gehen, umhüllen einen Kegelschnitt. Die Polarfigur dieses Kegelschnittes in Bezug auf K_i ist ein neuer Kegelschnitt K_u . Ihm sind unendlich viele Vierecke eingeschrieben, welche K_i umschrieben sind.

* Wir haben bis jetzt — dem Sprachgebrauche im Sinne Euklids folgend — solche überschlagene Vierecke von unseren Überlegungen ausgeschlossen

Über Winkelteilung mittelst Araneïden.

Von

Prof. Dr. W. HEYMANN

in Chemnitz.

I. Über Winkelteilung im allgemeinen.

Die Teilung eines Winkels in eine Anzahl gleicher Teile, ganz besonders aber die Dreiteilung, bildet eines der populärsten Kapitel der Elementarmathematik, welches denn auch seit ungefähr dreitausend Jahren bis in die neueste Zeit hinein bearbeitet worden ist. In M. Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ finden sich im ersten und zweiten Band nicht weniger als 22 Stellen, wo der Dreiteilung Erwähnung geschieht.

Wenn ich es nun in vorliegender Abhandlung trotzdem unternehme, eine merkwürdige Klasse von algebraischen Kurven vorzuführen, welche zur Teilung eines Winkels gebraucht werden können, und die ich mit Rücksicht auf die spinnenartige Gestalt, welche in den höheren Graden für die Kurven geradezu charakteristisch wird, „Araneïden“ nenne, so geschieht das, weil jene Kurven in mehr als einer Hinsicht interessant sind. Schicken wir sogleich folgendes voraus.

Die Araneïden können mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus einander abgeleitet werden. Ausgehend von den Araneïden nullter und erster Ordnung, d. h. ausgehend vom Punkt und der Geraden gelangen wir successive zu allen Araneïden höherer Ordnung. Im ersten Falle findet man die Kurven, welche die Teilung des Winkels in eine gerade Anzahl gleicher Teile vermitteln, im anderen Falle gelangt man zu den Kurven für die ungerade Teilung. In beiden Fällen sind die Araneïden durch die Gerade zu schneiden, und die reellen Schnittpunkte liefern sämtliche Lösungen der Winkelteilungsaufgabe. Eben diese Aufgabe erledigt sich auch, wenn man die Araneïden durch bestimmte Kreise schneidet, und es ist bemerkenswert, dass dann zur n -Teilung eines Winkels eine Araneïde $(n-1)$ ter Ordnung ausreicht. Der Vorgang wird hier sehr anschaulich, weil man unendlich viele regelmässige n -Ecke konstruieren kann, deren Ecken auf den Zweigen der betreffenden Araneïde gelegen sind. — Endlich sei bemerkt, dass man durch kinematische Betrachtungen sofort auf einen

Mechanismus geführt wird, durch welchen der Verlauf sämtlicher Araneïden leicht übersehen werden kann.

Wie man sieht, erfährt die n -Teilung eines Winkels durch die Araneïden eine systematische Behandlung; es wird indessen kaum befremden, dass jene Kurven, soweit sie sich auf Dreiteilung beziehen, längst bekannt sind. Die Araneïden zweiter Ordnung kommen nämlich einfach mit dem Kreis und der Hyperbel überein, und man vergleiche wegen der „Dreiteilung jedes Winkels mittelst einer festen Hyperbel“ eine Arbeit von W. Panzerbieter, in welcher weitere litterarische Notizen zu finden sind, Archiv der Mathematik und Physik, Teil 10, Reihe 2, S. 333 und 441. — Auch im Übungsbuch der höheren Analysis von Schlömilch ist als Quadraturenbeispiel, 1. T., II. Cap. ein modifiziertes Cartesisches Blatt angegeben, welches genau mit einer Araneïde dritter Ordnung übereinstimmt. Vom vierten Grade ab dürften die Araneïden wohl kaum untersucht sein.

In der einschlägigen Litteratur findet man weiter Angaben über die graphische Auflösung der bekannten Gleichung

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

mit Hilfe von Kegelschnitten. Auf solche Weise wird die Dreiteilung erledigt, und es ist einleuchtend, dass eine Weiterführung dieses Verfahrens wegen der Menge der Glieder in der Entwicklung von $\cos n\varphi$ nicht bequem ist.

Noch häufiger wird der Conchoïde gedacht, die schon ihres Alters wegen einen hervorragenden Platz einnimmt. Indessen lässt sich wohl behaupten, dass die Conchoïde die Dreiteilung des Winkels keineswegs in einfachster Weise leistet. Sie ist vom vierten Grade und liefert mit dem Kreis, welcher hinzugezogen werden muss, acht Schnittpunkte, von denen alsbald fünf als überflüssig ausscheiden. Noch misslicher aber ist der Umstand, dass die Kurve in jedem besonderen Falle besonders gezeichnet werden muss, denn das Verhältnis ihrer beiden Parameter ändert sich mit der Grösse des teilenden Winkels. Bei den Araneïden findet solches, wie wir sehen werden, nicht statt. Eine einmal gezeichnete Araneïde ist ein fertiges Modell zur Teilung eines beliebigen Winkels in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile.

2. Die Entstehung der Araneïden und ihre Polargleichung.

Wir fragen nach dem geometrischen Ort der Spitze P resp. P' eines Dreiecks, dessen Grundlinie $OQ = c$ gegeben ist, und dessen Innenwinkel φ bei O gleich dem n^{ten} Teil des Aussenwinkels resp. Innenwinkels bei Q sein möge (Fig. 1). Man wähle OQ als Axc, O als Pol eines Polarkoordinatensystems; Q heisse der Gegenpol. Dann gilt bei Teilung des Aussenwinkels die Beziehung

1)
$$r = c \frac{\sin n \varphi}{\sin (n-1) \varphi}, \quad (OP = r),$$

dagegen bei Teilung des Innenwinkels

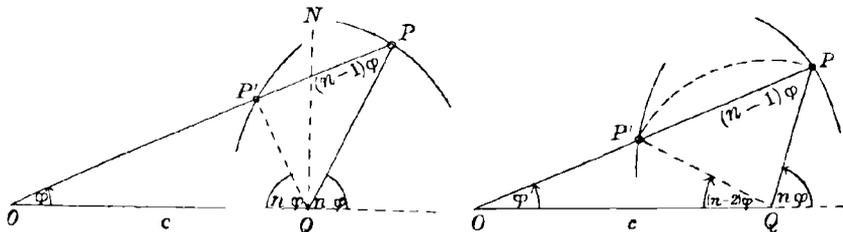
2)
$$r = c \frac{\sin n \varphi}{\sin (n+1) \varphi}, \quad (OP' = r).$$

Dieses sind die Polargleichungen der gesuchten Araneiden.

Vertauscht man n mit $-n$, so wechseln sich die Gleichungen 1) und 2) aus, weshalb eine jede von ihnen bereits alle Araneiden enthält. Inzwischen ist es für gewisse Fragen doch zweckmässig, positive und negative n auseinander zu halten. Wir werden es daher bei zwei Gleichungen belassen und die Kurven der ersten Gleichung, welche stets eine Schlinge aufweisen, „verschlungene“, die Kurven der zweiten Gleichung „gestreckte Araneiden“ nennen. Ist n eine ganze Zahl, wie wir es zumeist voraussetzen, so sind beide Araneiden

Fig. 1.

Fig. 2.



der n -Teilung der genannten Winkel algebraische Kurven n^{ter} Ordnung, deren rechtwinklige Koordinaten x, y sich rational durch einen Parameter t darstellen lassen. Es ergibt sich das, wenn die Zähler und Nenner der Gleichungen 1) und 2) durch den Moivre'schen Satz ausgedrückt und die Beziehungen

3)
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = t,$$

berücksichtigt werden. In beiden Fällen kommt man zu zwei Gleichungen von folgender Gestalt:

4)
$$x = \frac{f_1(t)}{f(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)}{f(t)},$$

wobei f_1, f_2 , und f ganze algebraische Funktionen ihres Arguments bezeichnen, von denen keine den Grad n übersteigt, eine aber diesen Grad sicher erreicht. Die Bestimmung der Schnittpunkte der durch 4) dargestellten Kurve mit einer Geraden

5)
$$Ax + By + C = 0$$

führt also in allen Fällen auf eine Gleichung für t vom Grade n , d. h. die Araneiden 1) und 2) sind Kurven n^{ter} Ordnung. — Beiläufig ersieht man noch aus 4), dass die Quadratur der Araneiden mittelst elementarer Funktionen vollzogen werden kann.

Bemerkenswert ist, dass im Falle der verschlungenen Araneiden die Funktion $f(t)$ im Nenner stets den Faktor $1 + t^2$, also in recht-

winkligen Koordinaten den Faktor $x^2 + y^2$ enthält. Alle verschlungenen Araneïden gehen daher durch die unendlich fernen Kreispunkte, auf welche Eigenschaft wir im Abschnitt 6 Rücksicht zu nehmen haben.

Obwohl zwei Araneïden derselben Ordnung in Bezug auf Winkelteilung dasselbe leisten, erscheint die verschlungene in mancher Hinsicht als einfacheres Gebilde; man erkennt dies schon an den Nennern in den Gleichungen 1) und 2). Wir werden daher die erstgenannte Kurve als Direktrix der zweiten betrachten. Die konstruktive Ableitung der gestreckten Araneïde aus der verschlungenen erfolgt nun einfach so, dass man auf der Axe OQ in Q ein Lot QN errichtet, welches fortan als Halbierende jenes Winkels zu gelten hat, der von dem festgelegten Strahl QP und dem zu ermittelnden Strahl QP' eingeschlossen wird (Fig. 1). P' ist ein Punkt der gestreckten Araneïde, welcher dem Punkt P der verschlungenen Araneïde eindeutig entspricht.

Wir behaupten weiter: Eine verschlungene Araneïde n^{ter} Ordnung kann aus einer gestreckten Araneïde $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung konstruktiv abgeleitet werden. — Es sei P' ein Punkt der gestreckten Araneïde, der Innenwinkel bei Q sei gleich $(n-2)\varphi$ (Fig. 2). Wir beschreiben mit QP' einen Kreisbogen, bis der radius vector zum zweiten Male in P geschnitten wird, und verbinden P mit Q . Dann ist offenbar der dem Strahl QP anliegende Aussenwinkel des Dreiecks OPQ gleich $n\varphi$, und mithin wird P ein Punkt der verschlungenen Araneïde n^{ter} Ordnung sein, der dem Punkt P' eindeutig entspricht.

Bevor wir diese allgemeinen Betrachtungen fortsetzen, wollen wir die einfachsten Araneïden nach den zuletzt gegebenen Vorschriften entstehen lassen.

3. Einfachste Fälle der Araneïden.

Fall $n = 0$ und $n = 2$. Für $n = 0$ ergibt sich, wie Gleichung 2) zeigt, $r = 0$, d. h., die betreffende Araneïde reduziert sich auf einen Punkt P' , welcher mit O zusammenfällt (Fig. 3).

Die aus ihr abgeleitete verschlungene Araneïde besitzt nach den letzten Darlegungen den Grad $n = 2$, und ihre Gleichung lautet

$$6) \quad r = c \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \text{ d. h. } r = 2c \cos \varphi.$$

Die Kurve ist also ein Kreis, welcher mit $OQ = c$ um Q beschrieben wird. Die Halbierung des Aussenwinkels bei Q ist hier ohne weiteres ersichtlich; man bemerke auch, dass durch Rückverlängerung des Radius OP über O hinaus die zweite Lösung der Aufgabe

$$\frac{360^\circ + 2\varphi}{2} = 180^\circ + \varphi$$

zur Darstellung kommt.

Wir leiten jetzt aus dem Kreis die gestreckte Araneïde zweiter Ordnung ab (Fig. 4). Die Gleichung jener Kurve folgt aus 2) für $n = 1$, mithin

$$7) \quad r = c \frac{\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi},$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$8) \quad y^2 = x(3x - 2c).$$

Es liegt daher eine Hyperbel vor, deren Halbachsen die Länge $a = \frac{c}{3}$, resp. $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$ besitzen. Die lineare Exzentricität wird

$$e = \frac{2c}{3} = 2a;$$

einer der Brennpunkte fällt daher mit dem Gegenpol Q zusammen. Die Asymptoten durchsetzen die Abscissenaxe im Abstand

$$OS = x = \frac{c}{3}$$

unter einem Winkel von 60° resp. 120° . Fig. 4 zeigt die Ableitung eines Hyperbelpunktes P' aus einem Kreispunkt P und zugleich die Halbierung des Aussen- und Innenwinkels bei Q .

Fig. 3.

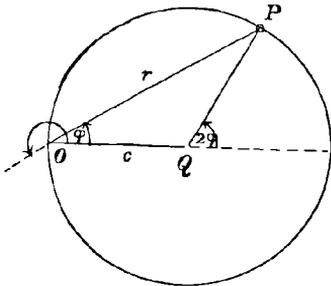
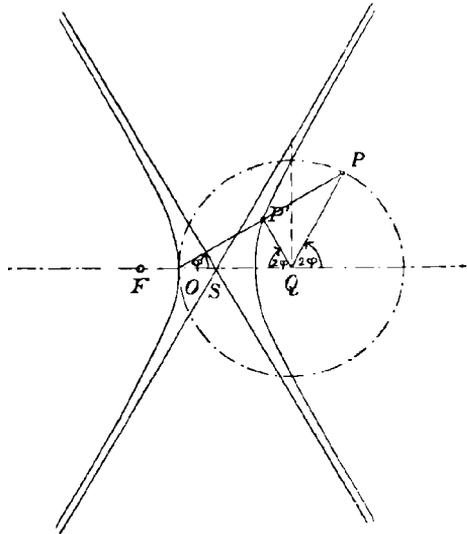


Fig. 4.



Fall $n = 4$. Wir können nun aus der Hyperbel eine neue verschlungene Araneide vierter Ordnung ableiten, aus dieser wiederum eine gestreckte von derselben Ordnung u. s. f. Erstere ist in Fig. 5 dargestellt, und das dort eingezeichnete Quadrat markiert die vier Lösungen der Aufgabe, insofern um O als Scheitel vier Winkel φ , $90^\circ + \varphi$, $180^\circ + \varphi$ und $270^\circ + \varphi$ auftreten. Alle diese Winkel haben die Axe OQ als festen Schenkel; die anderen Schenkel sind durch die Kurvenpunkte P

und P_1 bestimmt, welche der unter dem gegebenen Winkel durch Q gelegte Strahl QP ausschneidet. Die verschlungene Araneide vierter Ordnung besitzt zwei getrennte Zweige und zwei Asymptoten, welche letztere sich im Punkte S auf der Abscissenaxe schneiden. Die Abscisse von S beträgt $x = -\frac{c}{3}$; es folgt das aus den später zu besprechenden

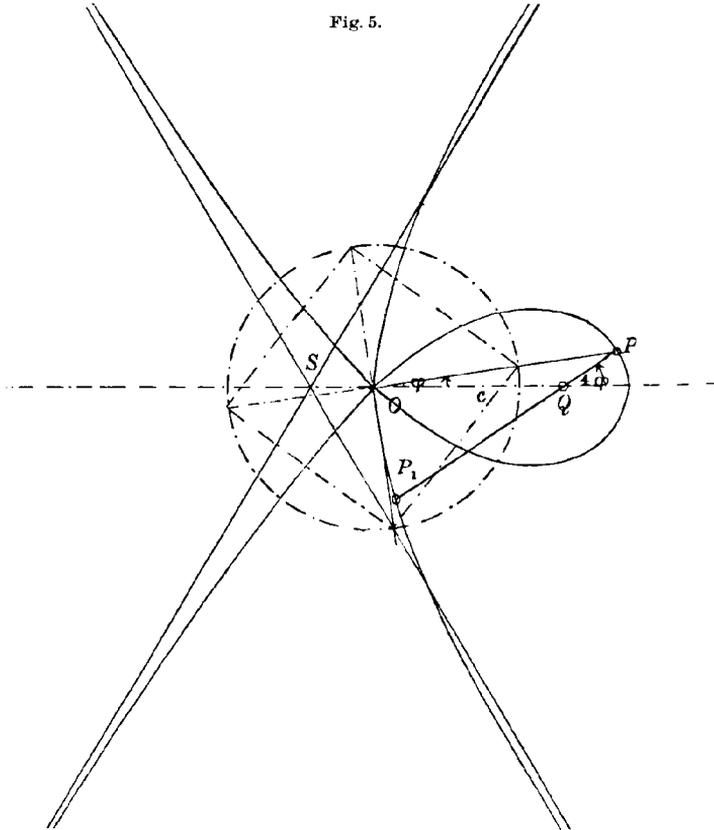


Fig. 5.

allgemeinen Eigenschaften dieser Kurven. Die Polargleichung der vorliegenden Araneide ist

9)
$$r = c \frac{\sin 4 \varphi}{\sin 3 \varphi};$$

in rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich

10)
$$(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2) - 4cx(x^2 - y^2),$$

oder auch in Parameterdarstellung,

11)
$$x = 4c \frac{1-t^2}{(1+t^2)(3-t^2)}, \quad y = xt.$$

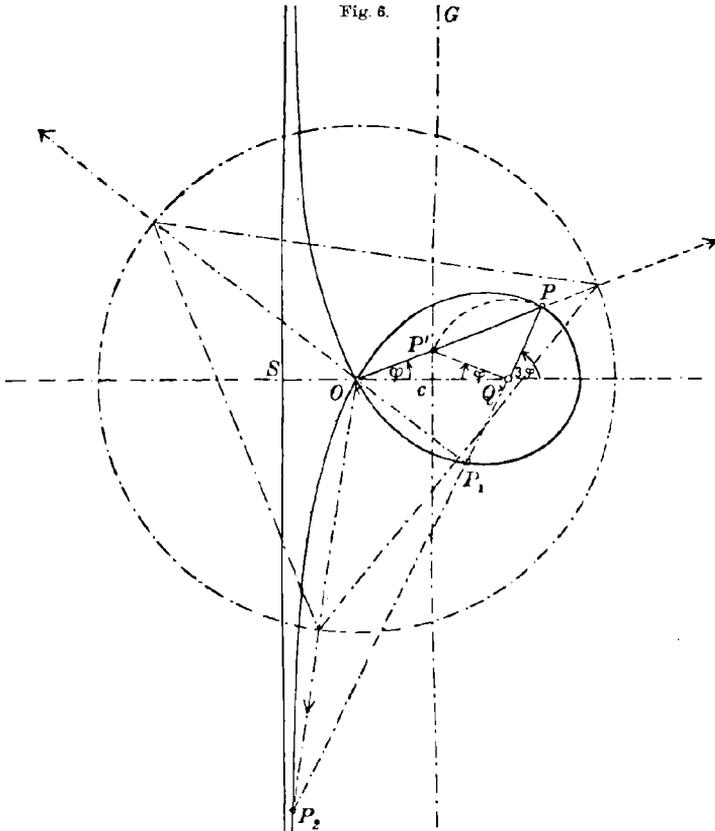
Von grösserem Interesse sind die Fälle, in welchen ein Winkel in eine ungerade Anzahl gleicher Teile zu zerlegen ist.

Fall $n = 1$ und $n = 3$. Für $n = 1$ folgt aus Gleichung 2)

12)
$$r = c \frac{\sin \varphi}{\sin 2 \varphi} = \frac{c}{2 \cos \varphi}, \quad \text{d. h. } x = \frac{c}{2}.$$

Die gestreckte Araneide erster Ordnung ist also eine im Abstand $\frac{c}{2}$ von O zur Axe senkrecht gelegte Gerade G (Fig. 6).

Indem wir von einem Punkt P' jener Geraden in der besprochenen Weise zu einem Punkt P übergehen, welcher mit P' immer auf demselben, in Drehung begriffenen, radius vector gelegen ist, erhalten



wir die verschlungene Araneide dritter Ordnung. Die Polargleichung dieser Kurve folgt aus 1), nämlich

$$13) \quad r = c \frac{\sin 3 \varphi}{\sin 2 \varphi},$$

und dies giebt umgesetzt

$$14) \quad 2x(x^2 + y^2) = c(3x^2 - y^2).$$

Die Kurve besteht in einer Schleife; sie bildet in O einen Doppelpunkt, schneidet die Axe zum zweiten Male im Punkt $x = \frac{3c}{2}$ und besitzt im Abstand $OS = x = -\frac{c}{2}$ eine zur Axe senkrechte Asymptote. Eine durch Q gelegte Gerade, welche mit OQ den zu teilenden Winkel einschliesst, trifft die Araneide in drei Punkten P , P_1 und P_2 , welche,

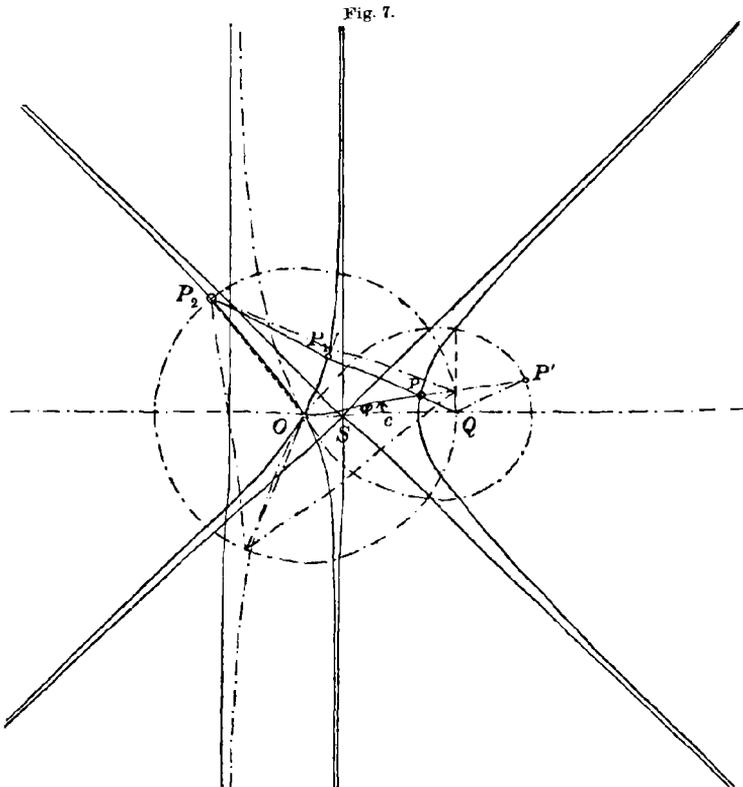
mit O verbunden, drei Strahlen liefern, und durch letztere kommen die gewünschten Lösungen φ , $120^\circ + \varphi$ und $240^\circ + \varphi$ unmittelbar zur Darstellung.

Aus der verschlungenen leiten wir noch die gestreckte Araneide dritter Ordnung ab, deren Gleichung in der Form

$$15) \quad r = c \frac{\sin 3\varphi}{\sin 4\varphi},$$

oder auch

$$16) \quad 4x(x^2 - y^2) = c(3x^2 - y^2)$$



gegeben werden kann. Fig. 7 zeigt die beiden Kurven in ihrem gegenseitigen Verhältnis. Die verschlungene (strichpunktirte) Araneide ist dieselbe wie in Fig. 6; aus einem ihrer Punkte P' ist Punkt P der anderen Kurve abgeleitet. Die neue Araneide hat auf der rechten Seite einen hyperbolischen Zweig, welcher die Axe im Punkt $x = \frac{3c}{4}$ schneidet. Zwei andere hyperbolische Zweige schneiden in O einen Doppelpunkt aus. Die drei Asymptoten schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Punkt S der Axe, dessen Abscisse OS den Wert $x = \frac{c}{4}$ besitzt; ihre Neigung gegen die Axe beträgt 45° , 90° und 135° .

Die drei Lösungen der Aufgabe sind in Fig. 7 an der gestreckten Araneide konstruiert worden.

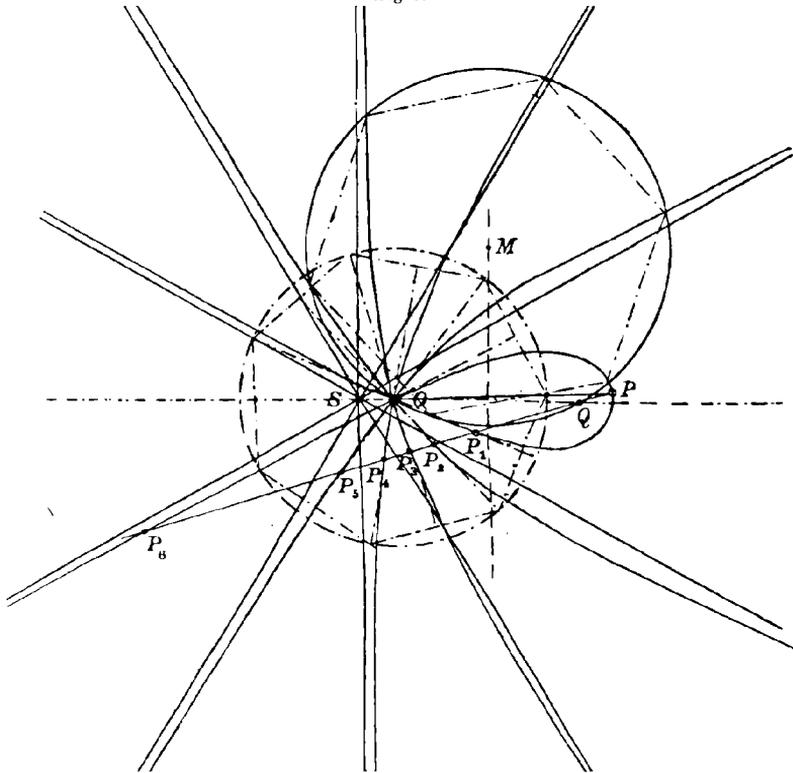
Des weiteren würde sich nun die verschlungene Araneide fünfter Ordnung anschliessen; wir wollen indessen mit einer verschlungenen Araneide siebenter Ordnung abschliessen. Die Gleichung derselben wird

$$17) \quad r = c \frac{\sin 7 \varphi}{\sin 6 \varphi},$$

oder in Parameterdarstellung,

$$18) \quad x = \frac{c}{2} \cdot \frac{7 - 35t^2 + 21t^4 - t^6}{(1+t^2)(3-t^2)(1-3t^2)}, \quad y = xt.$$

Fig. 8.



Die Kurve ist in Fig. 8 dargestellt. Sie wird von dem Strahl PQ in sieben Punkten geschnitten, wodurch sieben weitere durch O gehende Strahlen bestimmt werden, die zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe führen. Beschreibt man um O irgend einen Kreis, so markieren die genannten Strahlen die Ecken eines regelmässigen Siebenecks, wie denn überhaupt die Araneiden zur Konstruktion aller regelmässigen Vielecke unmittelbar gebraucht werden können. Um sonstige Eigenschaften der Kurven kennen zu lernen, ist es zweckmässig, sogleich die Araneiden n^{ter} Ordnung ins Auge zu fassen.

4. Die Araneiden im allgemeinen.

Aus den Gleichungen

$$1) \quad r = c \frac{\sin n \varphi}{\sin (n-1) \varphi},$$

und

$$2) \quad r = c \frac{\sin n \varphi}{\sin (n+1) \varphi}$$

ersieht man folgendes: Eine Vertauschung von φ mit $-\varphi$ ändert die Werte des r nicht. Die Kurven sind also symmetrisch zur Polaraxe, und man kann die Betrachtung auf solche Werte von φ beschränken, welche zwischen 0 und π gelegen sind.

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ verschwinden die Zähler und Nenner beider Polargleichungen gleichzeitig, aber die nähere Bestimmung giebt für verschlungene, resp. gestreckte Araneiden

$$19) \quad x = \frac{nc}{n-1}, \text{ resp. } x = \frac{nc}{n+1}.$$

Diese Abscissen sind immer positiv, denn für $\varphi = \pi$ ist r negativ.
Für

$$20) \quad \varphi = \frac{\alpha\pi}{n}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

verschwinden die Zähler obiger Gleichungen allein, also wird r für $n-1$ verschiedene Amplituden Null, d. h., die Araneiden n^{ter} Ordnung besitzen in 0 einen $(n-1)$ fachen Punkt. Auf der Polaraxe finden sich daher überhaupt n reelle Kurvenpunkte vor, was im Einklang mit der früher vollzogenen Gradabzählung der Kurvengleichungen steht.

Sollen die Nenner der gedachten Gleichungen allein verschwinden, so muss für verschlungene Araneiden

$$21) \quad \varphi = \frac{\alpha\pi}{n-1}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n-2$$

und für gestreckte Araneiden

$$22) \quad \varphi = \frac{\alpha\pi}{n+1}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n$$

gewählt werden. Da solchergestalt $r = \infty$ wird, so hat die erste Art von Kurven $n-2$ Asymptoten und ebensoviel getrennte Zweige, bei der anderen Art ist jene Anzahl n . Die letzten Amplituden geben zugleich die Neigung der Asymptoten gegen die Polaraxe an.

Um zu ermitteln, in welchem Punkt die Asymptote die Axe schneidet, stellen wir die Polargleichung der Tangente auf. Bezeichnet x die Abscisse des Punktes der Axe, welcher von der Tangente getroffen wird, und ψ die Amplitude, welche die Tangente mit dem radius vector einschliesst (Fig. 9), so ist bekanntlich

$$23) \quad r = x \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi}, \quad \text{ctg } \psi = \frac{dv}{r d\varphi} = \frac{r'}{r},$$

mithin

$$24) \quad x = \frac{r^2}{r \cos \varphi + r' \sin \varphi}.$$

Schreiben wir die Gleichungen der beiden Araneiden n^{ter} Ordnung in der Form

$$25) \quad r = c \frac{\sin n \varphi}{\sin m \varphi}, \quad m = n \mp 1,$$

und verbinden dieses mit 24), so ergibt sich

$$26) \quad x = -c \frac{\sin n \varphi}{m \cos m \varphi \sin \varphi}.$$

Nun bleibt nur zu ermitteln, welchen Wert dieser Ausdruck annimmt, wenn die unter 21) und 22) aufgeführten Amplituden eingetragen werden.

Für die verschlungenen Araneiden ist $m = n - 1$, also

$$\cos m \varphi = \cos x\pi = (-1)^x,$$

$$\sin n \varphi = \sin \frac{n x \pi}{n-1} = \sin \left(x\pi + \frac{x\pi}{n-1} \right) = (-1)^x \sin \frac{x\pi}{n-1}.$$

Mithin wird für jedes ganze x

$$27) \quad x = -\frac{c}{n-1},$$

d.h., die $n-2$ Asymptoten der verschlungenen Araneiden schneiden sich alle in ein- und demselben Punkt auf der Polaraxe; die Abscisse dieses Punktes ist immer negativ.

Für die gestreckten Araneiden folgt durch eine analoge Betrachtung, oder kürzer durch Vertauschung von n mit $-n$,

$$28) \quad x = +\frac{c}{n+1},$$

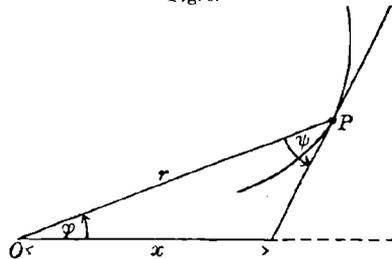
d.h., die Asymptoten dieser Kurve schneiden sich ebenfalls in ein und demselben Punkt auf der Polaraxe; die zugehörige Abscisse ist immer positiv.

Bei den Araneiden höherer Ordnung ($n > 3$) ereignet es sich, dass gewisse Kurvenzweige ihre Asymptoten zunächst schneiden; sie müssen daher, bevor sie sich der Asymptote unbegrenzt nähern, einmal gegen diese culminieren. Um den erwähnten Schnittpunkt zu ermitteln, haben wir die Gleichung der Araneiden, also etwa 25), mit der Gleichung der betreffenden Asymptote zu verbinden.

Bezeichnet α einen der unter 21) resp. 22) angegebenen Asymptotenwinkel, x den unter 27) resp. 28) angegebenen Axenabschnitt, so lautet die Polargleichung der Asymptote, vergl. die umstehende Fig. 10,

$$29) \quad r = x \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

Fig. 9.



Die Zusammenstellung mit 25) liefert die Gleichung

$$30) \quad \frac{\sin n \varphi}{\sin(n+1) \varphi} = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)},$$

und aus selbiger ergeben sich n Amplituden, darunter die gesuchte.

Zwei selbstverständliche Lösungen sind $\varphi = \alpha$; sie bestimmen die beiden unendlich fernen Punkte auf der betreffenden Asymptote.

Die Bedingung, dass ein Kurvenzweig gegen seine Asymptote culminiert, ist $\alpha = \varphi + \psi$ (vergl. Fig. 10); folglich hat man

$$31) \quad \text{ctg}(\alpha - \varphi) = \text{ctg} \psi,$$

und weil

$$32) \quad \text{ctg} \psi = \frac{r'}{r} = n \text{ctg} n \varphi - m \text{ctg} m \varphi, \quad m = n \pm 1,$$

so wird die Gleichung für die gesuchten Amplituden

$$33) \quad \text{ctg}(\alpha - \varphi) = n \text{ctg} n \varphi - m \text{ctg} m \varphi.$$

Fig. 10.

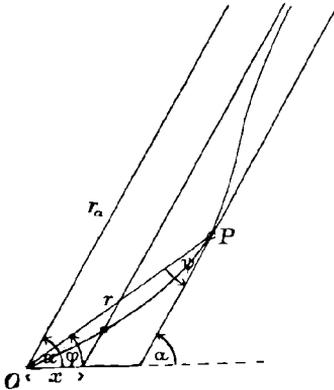
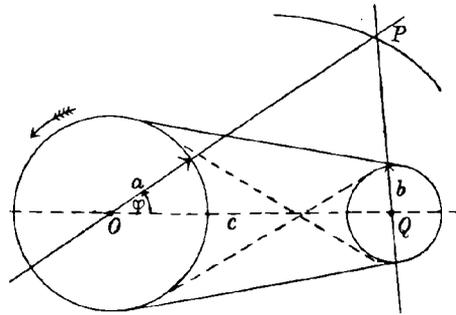


Fig. 11.



Endlich sei bemerkt, dass verschlungene Araneiden n^{ter} Ordnung und gestreckte $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, falls $c=1$ gesetzt wird, reziproke Radien besitzen; es spricht sich das durch die Gleichungen

$$34) \quad r = \frac{\sin n \varphi}{\sin(n-1) \varphi} \quad \text{und} \quad r = \frac{\sin(n-1) \varphi}{\sin n \varphi}$$

unmittelbar aus.

5. Mechanische Konstruktion der Araneiden.

Man denke sich in einer festen Ebene zwei um ihren Mittelpunkt drehbare Kreisscheiben, deren Radien die Länge a und b besitzen (Fig. 11). Zwei lange dünne Stäbe seien fest mit den Scheiben verbunden und derartig durch die Mittelpunkte O und Q gelegt, dass sie als die nach beiden Seiten verlängerten Durchmesser der Scheiben angesehen werden können. In der Ruhelage mögen die Stäbe mit der Centrale $OQ=c$ der Kreise zusammenfallen.

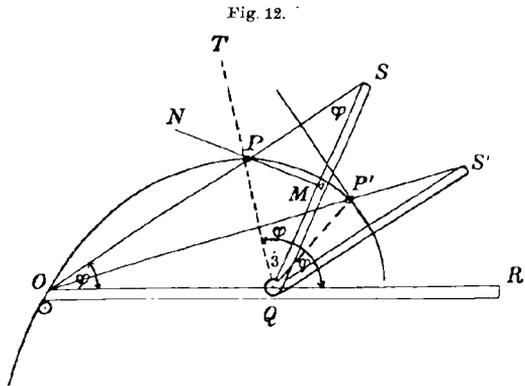
Je nachdem nun die Scheiben durch einen offenen oder durch einen gekreuzten Friktionsgurt — entsprechend den äusseren oder inneren Tangenten — in Verbindung gesetzt sind, werden sich die Kreise gleichzeitig in demselben oder in entgegengesetztem Sinne drehen und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche den Radien umgekehrt proportional ist. Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass der Schnittpunkt P der erwähnten Stäbe im ersten Fall eine verschlungene, im zweiten Fall eine gestreckte Araneide durchlaufen wird.

Bezeichnen wir die Amplitude, welche die Drehung des Radius a misst, mit φ , so wird die zum Radius b gehörige $\frac{a}{b}\varphi$ sein. Mithin erhalten wir als Polargleichung für beide Arten von Araneiden

$$35) \quad r = c \frac{\sin \frac{a}{b} \varphi}{\sin \frac{a+b}{b} \varphi}$$

Ist das Verhältnis $a:b$ ein irrationales, so sind die entstehenden Araneiden transzendent, andernfalls algebraisch. Für die bisher betrachteten Kurven war einfach $a = n, b = 1$.

Ein Apparat, welcher speziell die Dreiteilung eines Winkels nach dem Prinzip der Araneiden veranschaulicht, dessen Erfinder ich aber nicht anzugeben vermag, ist folgender: An einem Lineal OR ist ein um Q drehbarer, starrer Winkelschenkel QS angebracht, und zwar ist $QS = QO$. Die Endpunkte O und S der starren Arme



sind durch einen Faden OS verbunden, dessen Länge veränderlich ist. Dieser Faden muss also bei O entweder durch eine Öse oder über eine Rolle laufen und mittelst eines Gewichts oder einer Feder gespannt werden; er kann auch einfach aus sehr dehnbarem Gummi bestehen. Auf dem Arm QS ist in der Mitte M eine dünne Nadel MN errichtet, welche den Faden OS in einem Punkte P schneidet wird.

Es sei nun RQT der zu drittelnde Winkel, und der Schenkel RQ falle bereits mit dem ebenso bezeichneten Teil des Lineals zusammen. Man drehe alsdann QS so lange, bis die Nadel den Faden in einem Punkte P schneidet, welcher zugleich auf dem Winkelschenkel QT gelegen ist. Aus der Figur ergibt sich unmittelbar, dass

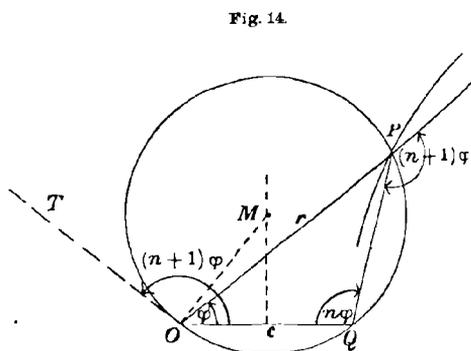
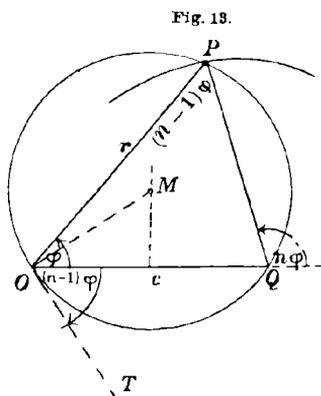
$$\sphericalangle QOS = \frac{1}{3} \sphericalangle RQT,$$

und dass sonach die bewegliche Spitze P des Dreiecks OQP eine verschlungene Araneide dritter Ordnung beschreibt (Fig. 12).

6. Die Araneiden und der Kreis.

Wir haben die Araneiden als den geometrischen Ort der Spitze P eines Dreiecks erkannt, dessen Grundlinie $OQ = c$ festgelegt war. Die veränderlichen Winkel an der Grundlinie waren φ und $n\varphi$, und zwar galt φ immer als Innenwinkel, dagegen musste $n\varphi$ als Aussen- resp. Innenwinkel gewählt werden, je nachdem eine verschlungene, resp. gestreckte Araneide entstehen sollte.

Betrachten wir jetzt den Winkel an der Spitze des erwähnten Dreiecks. Im ersten Fall (Fig. 13) wird der Innenwinkel bei P gleich $(n-1)\varphi$, im anderen Fall (Fig. 14) wird der Aussenwinkel ebenda gleich $(n+1)\varphi$. Eine verschlungene Araneide n^{ter} Ordnung wird also zur $(n-1)$ Teilung, eine gestreckte derselben Ordnung zur $(n+1)$ Teilung eines gegebenen Winkels gebraucht werden können, wenn wir jene



Kurven mittelst eines Kreises schneiden, welcher die Axe OQ als Sehne und, entsprechend den beiden Fällen, entweder $(n-1)\varphi$ oder $180^\circ - (n+1)\varphi$ als Peripheriewinkel fasst.

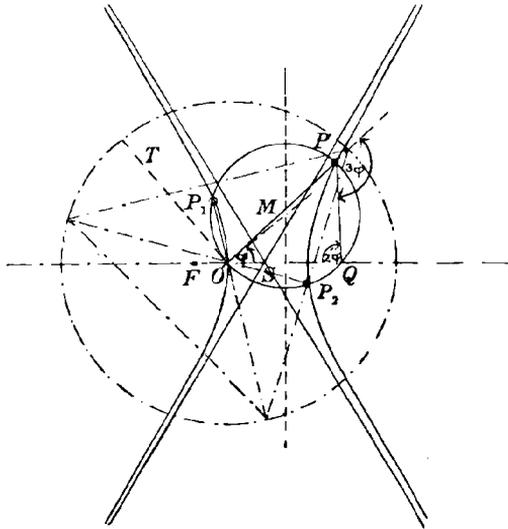
Bemerken wir sogleich, dass jener Kreis sämtliche Lösungen der Aufgabe liefert. Er schneidet die Araneiden n^{ter} Ordnung in $2n$ Punkten, von welchen $n-1$ Punkte nach O entfallen und keine Lösung geben; es verbleiben sonach $n+1$ Punkte. Bei den verschlungenen Araneiden rücken, wie wir früher festgestellt haben, zwei Schnittpunkte in die Unendlichkeit; es sind das die imaginären Kreispunkte. Demnach finden wir bei den verschlungenen Araneiden $n-1$ Lösungen, bei den gestreckten $n+1$ Lösungen, wie für die Teilung erforderlich ist.

Wenn man daher verschlungene Araneiden in Verbindung mit dem gedachten Kreis setzt, so operiert man, ähnlich wie bei der Conchoïde, mit einer Kurve, deren Grad unnötigerweise um eine Einheit zu hoch liegt. Hingegen gewähren die gestreckten Araneiden thatsächlich einen Vorteil, denn ihre Ordnung liegt um eine Einheit

tiefer, als die Anzahl der Teile des Winkels beträgt. Hiernach erscheint also die Verbindung der gestreckten Araneiden mit dem Kreis noch günstiger als die früher behandelte Verbindung der verschlungenen Araneiden mit der Geraden.

Wir geben als Beispiele die Dreiteilung und Fünfteilung eines Winkels. In Fig. 15 ist die gestreckte Araneide zweiter Ordnung, d. h. die Hyperbel, welche sich schon in Fig. 4 vorfindet, vergl. Abschnitt 3, wiederholt. Über OQ als Sehne ist ein Kreis gezeichnet, welcher das Supplement eines gegebenen Winkels 3φ als Peripheriewinkel fasst. Jener Kreis schneidet die Hyperbel in O und ausserdem in drei Punkten P, P_1 und P_2 ; die Verbindungsstrahlen OP, OP_1 und OP_2 liefern die Lösung der Aufgabe. Die Dreiteilung eines Winkels mittelst einer festen Hyperbel ist, wie wir schon in Abschnitt 1 er-

Fig. 15.



wähnten, nicht neu. Uns kam es darauf an, zu zeigen, wie dieses Resultat aus allgemeineren Prinzipien erschlossen werden kann.

Die Fünfteilung ist in Fig. 16 zu ersehen. Dasselbst wird eine gestreckte Araneide vierter Ordnung, deren Gleichung

$$36) \quad r = c \frac{\sin 4\varphi}{\sin 5\varphi},$$

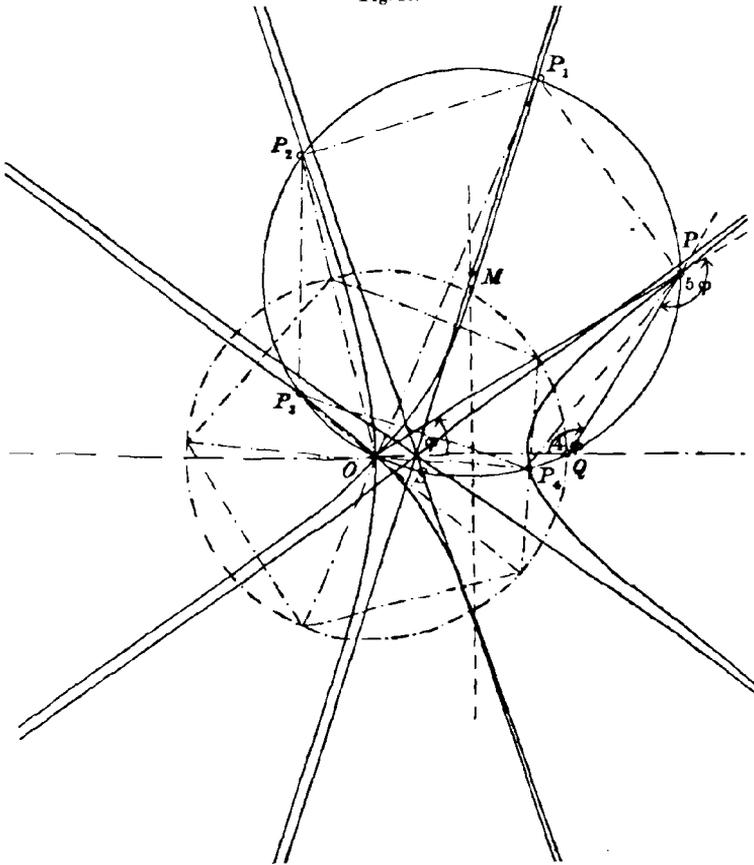
oder in Parameterdarstellung,

$$37) \quad x = 4c \frac{1-t^2}{5-10t^2+t^4}, \quad y = xt$$

lautet, mit einem über OQ als Sehne gezeichneten Kreis zum Schnitt gebracht. Die fünf Punkte $P, P_1 \dots P_4$ liefern sämtliche Lösungen, welche überdies durch das um O konstruierte, regelmässige Fünfeck leicht übersehen werden können.

Aber die genannten fünf Punkte sind auch selbst die Ecken eines regelmässigen Fünfecks, welches daher sowohl dem durch OQ gelegten Kreis, als auch der Araneide eingeschrieben ist. Dass die Seiten dieses Ecks gleich lang sein müssen, erklärt sich aus der Gleichheit der zugehörigen Peripheriewinkel, von denen eben jeder 36° beträgt. Wegen der Symmetrie der Kurve lässt sich noch ein zweites

Fig 16.



kongruentes Fünfeck angeben, welches in Fig. 16 im wesentlichen unter der Polaraxe liegen würde. Allgemein können wir sagen: Einer gestreckten Araneide $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung lassen sich unendlich viele regelmässige n -Ecke einschreiben; zu jedem Eck findet sich ein kongruentes in symmetrischer Lage, abgesehen von dem einzigen, dessen Umkreis die Axe OQ als Durchmesser besitzt, und welches natürlich nur einmal auftritt, oder genauer gesagt, doppelt zu zählen ist.

Ganz in gleicher Weise lassen sich den verschlungenen Araneiden $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich viele regelmässige n -Ecke einschreiben.

Diese Vielecke lassen sich umgekehrt zur Konstruktion der Araneiden benutzen, sobald ein Zweig dieser Kurven vorhanden ist. Man beschreibt um OQ als Sehne alle möglichen Kreise und markiert auf diesen Kreisen, ausgehend von den Schnittpunkten, welche dem Araneidenzweig angehören, die Eckpunkte der betreffenden Vielecke. Zweckmässig ist dieses Verfahren natürlich nur dann, wenn jene Vielecke an sich leicht zu konstruieren sind. So können wir beispielsweise die verschlungene Araneide siebenter Ordnung durch ein System von regelmässigen Sechsecken konstruieren (Fig. 8), was sehr bequem ist, da man zu jedem Kurvenpunkt fünf neue und ausserdem sechs symmetrische, also im ganzen elf Punkte findet. Eben diese Araneide dient dann, wie wir früher sahen, zur Konstruktion des regelmässigen Siebenecks.

In gleicher Weise kann man mittelst eines Systems von regelmässigen Zwölfecken aus je einem einzigen Kurvenzweig die verschlungene Araneide dreizehnter Ordnung und ebenso die gestreckte Araneide elfter Ordnung ableiten und solchergestalt das Elf- und Dreizehneck in eine eigentümliche Beziehung zum Zwölfeck setzen.

Wenn nun auch die mitgeteilten Konstruktionen, soweit sie die Winkelteilung betreffen, in praxi stets durch ein viel kürzeres Annäherungsverfahren ersetzt werden können, so dürften die Araneiden an sich doch das Interesse rechtfertigen, welches wir ihnen an dieser Stelle gewidmet haben.

Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist.

Von

Prof. Dr. W. HEYMANN
in Chemnitz.

1. Vorbemerkung.

Im 37. Jahrgang dieser Zeitschrift* S.99 habe ich die m^{ten} Potenzen der Wurzeln einer quadrinomischen Gleichung

$$1) \quad \eta^n + x_p \eta^{n-p} + x_q \eta^{n-q} + 1 = 0, \quad \eta^m = \xi$$

durch Reihen dargestellt, deren Glieder in eigentümlicher Weise aus den Koeffizienten x_p und x_q zusammengesetzt sind. Diese Reihen lassen sich in bequemster Weise, d.h. durch blosse Veränderung ihrer Koeffizienten, potenzieren, und sie befriedigen die vorgelegte Gleichung identisch. Inzwischen kommt ihnen zunächst nur eine formale Bedeutung zu, insofern nämlich, als die Konvergenz immer für den besonderen Fall nachträglich zu erweisen bleibt. Für $x_p = 0$ oder $x_q = 0$ decken sie sich thatsächlich mit den bekannten Reihen, welche in der Theorie der trinomischen Gleichungen aufgestellt werden.

Es war mir nun daran gelegen, diesen Reihen auch bei den viergliedrigen Gleichungen Geltung zu verschaffen, und deshalb beschäftigte ich mich mit der speziellen Gleichung

$$2) \quad v^{2n} - 2v^n + uv^p + \lambda = 0, \quad v^m = w,$$

welche für $n = 3$ und $p = 1$ oder $p = 2$, sowie für $p = 6$ und $n = 1$ drei bemerkenswerte Normalformen der Gleichung sechsten Grades darbietet. Im Falle $n = 3, p = 1, \lambda = \frac{1}{5}$ entsteht überdies die von Brioschi und Kronecker genauer untersuchte Jacobi'sche Gleichung, deren Auflösung für $m = \frac{1}{2}$ und $m = \frac{3}{2}$ bekanntlich mit Hilfe von hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung erfolgen kann, sodass wir für unsere Resultate eine scharfe Kontrolle erhalten. Ähnliches

* Die trinomische und quadrinomische Gleichung in elementarer Behandlungsweise.

gilt, wenn $n = 2$, $p = 1$, $\lambda = -\frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, für welchen Fall die Jacobi'sche Gleichung vierten Grades eintritt.

Wenn wir mit Gleichung 2) die Substitutionen

$$3) \quad v = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot y, \quad w = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot z, \quad x = u^{-\frac{n}{p}} \cdot \lambda^{\frac{n-p}{p}}$$

verbinden, so verwandelt sie sich in eine zweite Normalform

$$4) \quad \lambda x^2 y^{2n} - 2xy^n + y^p + 1 = 0, \quad y^m = z,$$

während die zugehörige Reihenentwicklung die Gestalt

$$5) \quad z = \sum_{h=0}^{\infty} A_h \cdot \frac{x^h}{h!}$$

annimmt, wobei die Koeffizienten A_h als wesentlichen Bestandteil eine hypergeometrische Funktion zweiter Ordnung enthalten. Es wird nämlich

$$6) \quad A_h = (-1)^{a-h} \cdot 2^h \cdot \frac{m}{p} \cdot \prod_{k=1}^{h-1} [a-k] \cdot F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, a-h+1, \lambda\right),$$

wobei

$$a = \frac{m+nk}{p}.$$

Die Reihe 5) stellt die m^{ten} Potenzen jener p Wurzeln der Gleichung 4) dar, welche mit verschwindendem λ und x nicht gleichzeitig unendlich gross werden.

Will man die übrigen Wurzeln der Gleichung 4) entwickeln, so müssen weitere Normalformen aufgestellt werden. Eine derselben ist die Gleichung 2). Für diese lassen sich Reihen angeben, welche die m^{ten} Potenzen jener n Wurzeln darstellen, die mit λ und u nicht gleichzeitig verschwinden. Wir haben diese Untersuchung an anderer Stelle* durchgeführt, doch sind die hier gegebenen knappen Bemerkungen zum Verständnis des Folgenden hinreichend und notwendig.

2. Feststellung der Aufgabe.

Wir wollen zeigen, dass sich die hypergeometrische Funktion

$$7) \quad F_h = F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, \mu h + \nu, \lambda\right)$$

für gewisse spezielle, numerische λ, μ, ν durch Gammafunktionen summieren lässt. — Einige solcher Summationen sind bereits bekannt. Gauss behandelte zuerst die Fälle $\lambda = 1, \frac{1}{2}$ und -1 , während Kummer in seiner grundlegenden Arbeit*** im 15. Bd. des Crelle'schen Journals

* Jahresbericht der Technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz, Ostern 1898, „Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist, nebst einer Anwendung auf Algebra.“

** „Über die hypergeometrische Reihe“.

die Fälle $\lambda = -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ und $\frac{8}{9}$, sowie gewisse irrationale Fälle hinzufügte.

Wie vorhin bemerkt, müssen sicher auch die Fälle

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \text{ sowie } \lambda = -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}$$

eine geschlossene Darstellung der betreffenden hypergeometrischen Funktion gestatten, denn anders könnten die Koeffizienten A_h jener Reihen, welche zu den Jacobi'schen Gleichungen vierten und sechsten Grades gehören, nicht die Gestalt blosser Fakultäten haben. Um nun die hierher gehörigen Resultate ganz unabhängig von den erwähnten Reihen zu finden, bemerke man folgendes:

Zwischen drei hypergeometrischen Funktionen zweiter Ordnung, deren erste Elemente α, β, γ um ganze Zahlen verschieden sind, besteht stets eine lineare Beziehung, welche als partielle Differenzengleichung in Bezug auf die ersten Elemente aufgefasst werden kann. Für die besondere Funktion 7) lässt sich die Sache so einrichten, dass diese lineare Beziehung die Bedeutung einer totalen Differenzengleichung bezüglich des Parameters h erlangt. Im allgemeinen reduziert sich diese dreigliedrige Identität nicht weiter; es besteht daher zwischen drei aufeinander folgenden Reihenkoeffizienten A_h, A_{h+1} und A_{h+2} eine dreigliedrige Rekursionsformel, welche für die Reihe 5) und für die Gleichung 4), insbesondere aber für die zugehörige Differentialresolvente von hervorragender Bedeutung ist.

In speziellen Fällen, d. h. für numerische λ , kann aber jene Differenzengleichung zweigliedrig werden, sodass sie sich durch Gammafunktionen befriedigen lässt, womit dann natürlich die Reihe 5) selbst hypergeometrisch von irgend welcher Ordnung wird. Die Ordnung hängt von den Zahlen n und p ab und verlangt die Unterscheidung $n \geq p$. — So ist nun der von uns einzuschlagende Weg genau vorgezeichnet.

Wenn der Ausdruck F_h in 7) mit der hypergeometrischen Funktion in 6) zusammenfallen soll, so muss für jedes h

$$8) \quad \mu h + \nu = \frac{m + nh}{p} - h + 1$$

werden, d. h.

$$9) \quad \mu = \frac{n}{p} - 1, \quad \nu = \frac{m}{p} + 1.$$

Des weiteren hat man betreffs der Zahlen n, p und λ, m spezielle Annahmen zu machen.

$$3. \text{ Der Fall } \lambda = -\frac{1}{3} \text{ und } \lambda = \frac{1}{4}.$$

Anknüpfend an die Jacobi'sche Gleichung vierten Grades

$$10) \quad v^4 - 6av^2 + bv - 3a^2 = 0, \quad \sqrt{v} = w,$$

in welcher ohne Einschränkung $a = \frac{1}{3}, b = u$ gesetzt werden darf, wodurch

11) $v^4 - 2v^3 + uv + \lambda = 0$, $\left(\lambda = -\frac{1}{3}\right)$
 entsteht, übersieht man folgendes: Für

$$n = 2, \quad p = 1, \quad \text{d. h. } \mu = 1, \quad \nu = m + 1$$

fällt 11) mit 2) zusammen, folglich wird die zu betrachtende Funktion

$$12) \quad F_h = F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, h + m + 1, \lambda\right).$$

Dass überdies $\lambda = -\frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$ ist, haben wir hier noch nicht berücksichtigt; es wird sich das als hinreichende und notwendige Bedingung herausstellen, damit die zu entwickelnde Differenzgleichung zweigliedrig werde.

Lassen wir h um die Einheit wachsen, so gehen die ersten Elemente der Funktion F_h , welche kurz α, β, γ heissen mögen, über in $\beta - 1, \alpha, \gamma + 1$. Es ist also eine lineare Beziehung zwischen

$$F_h = F(\alpha, \beta, \gamma), \quad F_{h+1} = F(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1)$$

und einer bequem liegenden benachbarten Funktion aufzustellen. Eine solche ist unter anderen die von Gauss in den „Disquisitiones“ unter Nr. [14] aufgestellte, welche nach Vertauschung von γ mit $\gamma + 1$ folgendermaßen lautet:

$$13) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\beta - 1 - (\gamma - \alpha)\lambda] F(\alpha, \beta, \gamma + 1) \\ \quad + (\gamma - \beta + 1) F(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1) \\ \quad - \gamma(1 - \lambda) F(\alpha, \beta, \gamma) \end{array} \right\} = 0.$$

Die erste der drei hier vorkommenden Funktionen muss ausgestossen werden, weshalb der Faktor

$$14) \quad \beta - 1 - (\gamma - \alpha)\lambda = -\frac{h}{2} (1 + 3\lambda) - (m + 1)\lambda - \frac{1}{2}$$

unabhängig von h und nur mittelst der disponiblen Zahlen λ und m zu annullieren ist. Man findet $\lambda = -\frac{1}{3}$ und $m = \frac{1}{2}$, womit sich 13) auf die zweigliedrige Differenzgleichung

$$15) \quad \left(h + \frac{4}{3}\right) F_{h+1} - \frac{8}{9} \left(h + \frac{3}{2}\right) F_h = 0$$

reduziert. Dieselbe liefert integriert

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_h = F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, h + \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right) \\ \quad = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^h \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(h + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(h + \frac{4}{3}\right)}, \end{array} \right.$$

oder auch:

Man ersetze die α, β, γ durch ihre Werte in h und m und versuche den Koeffizienten C unabhängig von h zum Verschwinden zu bringen. Der Bedingung $C = 0$ entspricht folgende Gleichung:

$$25) \quad Ph^2 + Qh + R = 0,$$

wobei

$$26) \quad \begin{cases} P = (5\lambda - 1)(5\lambda + 4) \\ Q = 2(5\lambda - 1)[(2m + 3)\lambda + (m + 1)] \\ R = 4(m + 1)(m + 2)\lambda^2 + 3(2m + 3)\lambda - 2(m + 1). \end{cases}$$

Nun werden P und Q gleichzeitig zu Null, wenn $\lambda = \frac{1}{5}$ gewählt wird, während R übergeht in

$$27) \quad R = \frac{1}{25}(2m - 1)(2m - 3),$$

was ersichtlich durch $m = \frac{1}{2}$ oder $m = \frac{3}{2}$ zum Verschwinden gebracht werden kann. Für $\lambda = -\frac{4}{5}$ verschwindet P ebenfalls; die Bedingung $Q = 0$ würde dann $m = 1$ liefern; aber diese Werte widersprechen der Forderung $R = 0$.

Im Fall $\lambda = \frac{1}{5}$ und $m = \frac{1}{2}$ reduziert sich Gleichung 23) auf

$$28) \quad \left(h + \frac{4}{5}\right)\left(h + \frac{6}{5}\right)F_{h+1} - \frac{128}{125}\left(h + \frac{3}{4}\right)\left(h + \frac{5}{4}\right)F_h = 0,$$

und ihr genügt

$$29) \quad F'_h = k \cdot \left(\frac{128}{125}\right)^h \cdot \frac{\Gamma\left(h + \frac{3}{4}\right)\Gamma\left(h + \frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(h + \frac{4}{5}\right)\Gamma\left(h + \frac{6}{5}\right)}, \quad h + \frac{3}{4} > 0.$$

Die Konstante k bestimmt sich für $h = 0$ zu

$$30) \quad k = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4}}{5 \sin \frac{\pi}{5}}.$$

Im Fall $\lambda = \frac{1}{5}$ und $m = \frac{3}{2}$ entsteht aus Gleichung 23)

$$31) \quad \left(h + \frac{7}{5}\right)\left(h + \frac{8}{5}\right)F_{h+1} - \frac{128}{125}\left(h + \frac{5}{4}\right)\left(h + \frac{7}{4}\right)F_h = 0,$$

und hier ergibt die Integration

$$32) \quad F'_h = k' \cdot \left(\frac{128}{125}\right)^h \cdot \frac{\Gamma\left(h + \frac{5}{4}\right)\Gamma\left(h + \frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(h + \frac{7}{5}\right)\Gamma\left(h + \frac{8}{5}\right)}, \quad h + \frac{5}{4} > 0,$$

wobei

$$33) \quad k' = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{32 \sin \frac{\pi}{4}}{25 \sin \frac{2\pi}{5}}.$$

Die Ausdrücke 29) und 32) lassen sich noch auf verschiedene Art umformen. So kann man sie beispielsweise durch hypergeometrische Funktionen mit dem vierten Element 1 darstellen und gelangt zu folgenden bemerkenswerten Transformationen:

$$34) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_h = F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 2h + \frac{3}{2}, \frac{1}{5}\right) = \\ \left(\frac{128}{125}\right)^h \cdot \frac{F\left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, h + \frac{5}{4}, 1\right)}{F\left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{5}{4}, 1\right)}, \end{array} \right.$$

$$35) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_h = F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 2h + \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right) = \\ \left(\frac{128}{125}\right)^h \cdot \frac{F\left(\frac{3}{20}, \frac{7}{20}, h + \frac{7}{4}, 1\right)}{F\left(\frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{7}{4}, 1\right)}. \end{array} \right.$$

Da sich die dritten Elemente der Funktionen auf der linken Seite um die Einheit unterscheiden, alle übrigen Elemente aber übereinstimmen, so wird sich überhaupt eine Funktion der Form

$$F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 2h + \frac{1}{2} + j, \frac{1}{5}\right)$$

für jedes ganzzahlige j durch Gammafunktionen ausdrücken lassen.

Wenn man nun von den Resultaten unter 29) und 32) Gebrauch macht, d. h. die Reihenkoeffizienten A_h nach Maßgabe von 6) zusammensetzt, so verwandelt sich die Reihe 5), je nachdem $m = \frac{1}{2}$ oder $m = \frac{3}{2}$ gewählt wird, in

$$36) \quad \sqrt{y} = \sqrt{-1} F\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \frac{12^3}{5^3} x\right\},$$

resp.

$$37) \quad \sqrt[3]{y} = \sqrt{-1}^3 F\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right), \frac{12^3}{5^3} x\right\}.$$

Es sind das in der That jene hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung, welche auch von anderer Seite her bekannt sind. Wie man sieht, tritt hier der seltene Fall auf, dass die dritte Potenz einer hypergeometrischen Reihe zu einer Reihe derselben Art führt. — Aus den Reihen schliesst man sofort auf die zur Jacobi'schen Gleichung gehörigen Differentialsolventen, d. h. auf die entsprechenden linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung, welche schon Brioschi ermittelt hat.

5. Der Fall $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\lambda = \frac{4}{5}$.

Wendet man auf die linken Seiten der Gleichungen 34) und 35) die Transformationsformel 18) an, so entsteht

$$38) \quad \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\frac{h}{2}, \frac{5}{2}h + 1, 2h + \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \\ \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{h}{2}} \cdot F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 2h + \frac{3}{2}, \frac{1}{5}\right), \end{array} \right.$$

$$39) \quad \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\frac{h}{2}, \frac{5}{2}h + 2, 2h + \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \\ \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{h}{2}} \cdot F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 2h + \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right), \end{array} \right.$$

wobei die rechten Seiten durch die entsprechenden Ausdrücke des vorigen Abschnitts näher bestimmt sind, und hieraus lässt sich überhaupt

$$F\left(-\frac{h}{2}, \frac{5}{2}h + j, 2h + \frac{1}{2} + j, -\frac{1}{4}\right)$$

für ganzzahlige j in geschlossener Form entwickeln.

Den Fall $\lambda = \frac{4}{5}$ verschafft man sich entweder durch Transformation von λ in $1 - \lambda$ oder auch direkt, indem man eine lineare Beziehung zwischen $F(\alpha, \beta, \gamma)$, $F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 3)$ und einer bequem liegenden, benachbarten Funktion herstellt. Man setzt alsdann

$$\alpha = \frac{h}{2}, \quad \beta = \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, \quad \gamma = 3h + \gamma';$$

$$F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h + \gamma'\right) = F_h$$

und findet in der früher angedeuteten Weise

$$40) \quad F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h, \frac{4}{5}\right) = k \cdot \left(\frac{27}{25}\right)^h \cdot \frac{\Gamma\left(h + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(h + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(h + \frac{2}{5}\right)\Gamma\left(h + \frac{3}{5}\right)},$$

$$h + \frac{1}{3} > 0,$$

$$41) \quad F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h - 1, \frac{4}{5}\right) = k' \cdot \left(\frac{27}{25}\right)^h \cdot \frac{\Gamma\left(h - \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(h + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(h - \frac{1}{5}\right)\Gamma\left(h + \frac{1}{5}\right)},$$

$$h - \frac{1}{3} > 0,$$

oder auch

$$42) \quad F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h, \frac{4}{5}\right) = k \cdot \left(\frac{27}{25}\right)^h \cdot F\left(\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, h + \frac{2}{3}, 1\right),$$

$$43) \quad F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h - 1, \frac{4}{5}\right) = k' \cdot \left(\frac{27}{25}\right)^h \cdot F\left(\frac{2}{15}, \frac{8}{15}, h + \frac{1}{3}, 1\right).$$

Die Konstanten k und k' bestimmen sich für $h = \frac{1}{5}$, resp. $h = \frac{3}{5}$, nämlich:

$$44) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{3^{-\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{F\left(\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{13}{15}, 1\right)}, \\ k' = \frac{3^{-\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{F\left(\frac{2}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}, 1\right)}. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich überhaupt

$$F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, 3h + j, \frac{4}{5}\right)$$

für jedes ganzzahlige j summieren.

Was endlich irrationale Werte von λ anlangt, so giebt Kummer in § 19 seiner Abhandlung unter Nr. 42, 44 und 47 die Formeln

$$45) \quad \left\{ \begin{array}{l} F\left(2\alpha, 2\alpha - \gamma + 1, \gamma, \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}\right) = \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}\right)^{2\alpha} \cdot K, \\ F\left(2\alpha, \gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma - 1, \frac{1 + 2\sqrt{x}}{1 \pm 2\sqrt{x}}\right) = (1 \pm \sqrt{x})^{2\alpha} \cdot K, \\ F\left(2\alpha, 2\gamma - 2\alpha - 1, \gamma, \frac{\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}\right) = (1-x)^\alpha \cdot K \end{array} \right.$$

an, wobei

$$K = F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, x\right).$$

Setzen wir hier $\alpha = -\frac{h}{2}$, resp. $\alpha = \frac{h}{2}$ und $x = \lambda$, so entsteht rechts jene hypergeometrische Funktion, welche wir früher für spezielle γ und λ summiert haben. Wir werden daher insbesondere für $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{5}$ neun irrationale Fälle erhalten; einer derselben wird imaginär.

Ausser den bisher erwähnten Fällen giebt es noch einige andere, welche wir in der genannten Programmarbeit mitgeteilt haben. Ein Abschluss der angeregten Untersuchung kann indessen nur durch eine umfassende Transformationstheorie der hypergeometrischen Funktionen gewonnen werden. Die zur Zeit noch immer nicht genügend beachteten Differenzgleichungen dürften dabei ein Hilfsmittel abgeben, welches sich durch Differentialgleichungen keineswegs ersetzen lässt. Man braucht in dieser Hinsicht nur an die Bemerkung von Weierstrass zu erinnern, nach welcher die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, eine Eigenschaft, die sich bei den hypergeometrischen Funktionen erst recht einstellen muss, wenn die Abhängigkeit dieser Funktionen von ihren ersten Elementen in Betracht gezogen wird.

Über die Wellenfläche.*

Von

O. BÖKLEN

in Reutlingen.

In den *Annali di Matematica* da F. Brioschi Serie II Tomo XX 1892 hat Cayley, im Anschluss an zwei Noten von Combescure: „Sur les lignes de courbure de la surface des ondes“ (tomo II 1859, p. 278—285) und von Brioschi „Osservazioni sulla medesima quistione“ (ibid. p. 285—287), diese Theorie aufs neue entwickelt. Am Schluss seiner Abhandlung sind einige weitere Bemerkungen über die Schnitte der Centrafläche der Wellenfläche in den Hauptebenen beigefügt, aus welchen er schliesst, dass die Centrafläche von der Ordnung 38 ist. Da die Wellenfläche jede Hauptebene in einer Ellipse und einem Kreise schneidet, so besteht der Schnitt der Centrafläche aus folgenden Kurven (je in einer Hauptebene):

1. Evolute der Ellipse	Ordnung		6
2. Kuspidualkurve	„	6 dreimal zu zählen	18
3. Evolute des Kreises	„		2
4. Kuspidualkurve	„	4 dreimal zu zählen	12
			<hr/>
			38

Von den beiden Kuspidualkurven hat Cayley die Gleichungen angegeben, und die Aufgabe des folgenden besteht darin, diese Kurven graphisch darzustellen an der Hand einer Konstruktion von Mannheim (Construction des centres de courbure principaux de la surface de l'onde, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 11. Febr. 1867 und *Cours de géométrie descriptive* 2 éd. p. 332).

I. Allgemeine Konstruktion nach Mannheim.

Die Gleichung des Ellipsoids E , von dem die Wellenfläche abgeleitet ist, indem man auf irgend einem Centralschnitt von E im Mittelpunkt o ein Lot errichtet und auf demselben zwei Strecken ab-

* Vergl. diese Zeitschrift Jahrg. 1879 S. 400, 1880 S. 207 u. 346, 1882 S. 160.

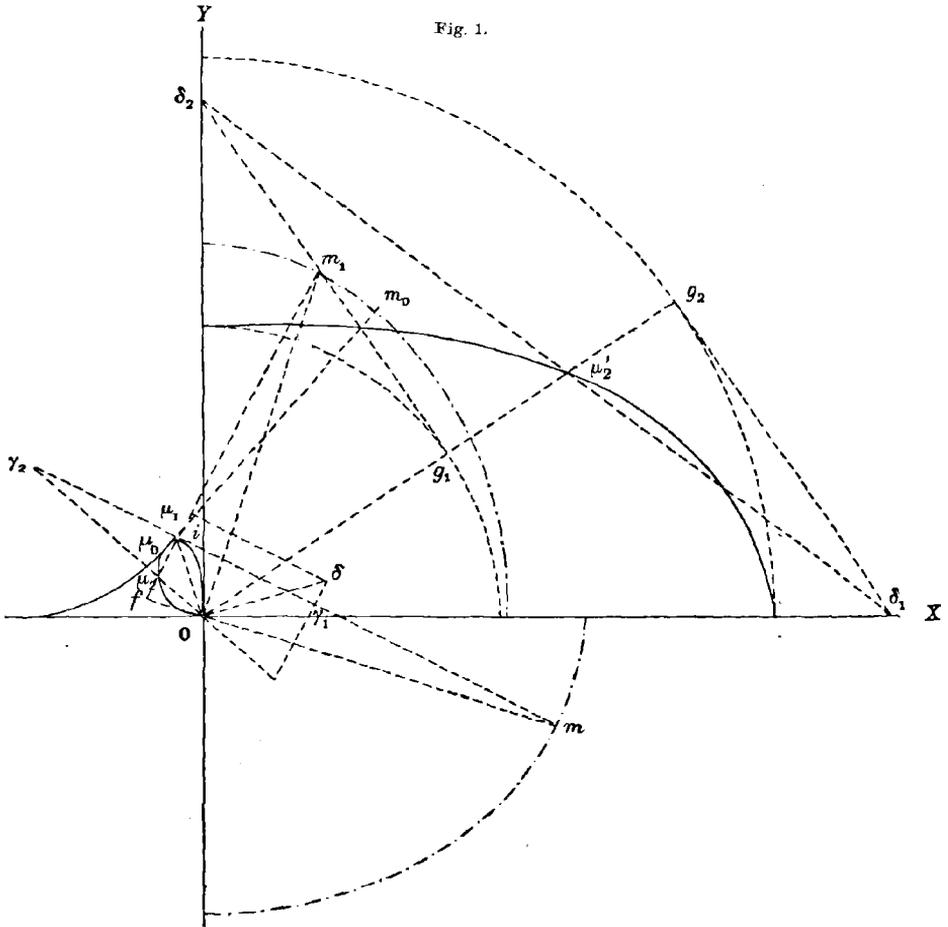
trägt, om_1 gleich der grössern und om'_1 gleich der kleinern Halbhaxe des Centralschnitts, sei

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1;$$

$a > b > c$ sind die Quadrate der Halbhaxen von E ; m_1 liegt auf dem äussern und m'_1 auf dem innern Mantel der Wellenfläche, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\xi - a} + \frac{y^2}{\xi - b} + \frac{z^2}{\xi - c} = 1$$

ist ($\xi = x^2 + y^2 + z^2$).



Wir stellen uns zunächst vor, dass Fig. 1 ein Schnitt des Ellipsoids E ist, welcher durch einen beliebigen Punkt m , dessen Normale $m\gamma_2$ und den Halbmesser om geht. Die Wellenfläche ist die Apsidalfläche von E ; legt man durch om eine Ebene senkrecht zur Figur, errichtet auf dieser Ebene ein Lot $om_1 = om$, so ist m_1 ein Punkt der

Wellenfläche, welcher dem Punkt m von E entspricht, und m_1f ihre Normale; sie schneidet die Normale von m senkrecht in i . Man verbinde o mit i (der Winkel oim ist -45°), und lege durch o eine Ebene senkrecht zu oi , E_0 . Die Normale von m berührt die Centrafläche von E in γ_1 und γ_2 ; die Normalen dieser Centrafläche in γ_1 und γ_2 bezeichnen wir mit Γ_1 und Γ_2 ; sie sind parallel mit den Tangenten der durch m gehenden Krümmungslinien von E . Man konstruiert nun die beiden Geraden D und Δ : die erste geht durch o und schneidet Γ_1 und Γ_2 , die zweite ist die Verbindungslinie der Durchschnitte von Γ_1 und Γ_2 mit der Ebene E_0 . Es lassen sich dann auf der Normale m_1f der Wellenfläche zwei Punkte μ_1 und μ_2 bestimmen von der Eigenschaft, dass durch jeden derselben eine Gerade M_1 und M_2 gelegt werden kann, welche m_1f senkrecht schneidet und zugleich D und Δ begegnet; μ_1 und μ_2 sind die Krümmungsmittelpunkte von m_1 , die durch sie gelegten Geraden sind Normalen von der Centrafläche der Wellenfläche und parallel mit den Tangenten der beiden durch m_1 gehenden Krümmungslinien der Wellenfläche. Wenn also für einen beliebigen Punkt m des Ellipsoids E , von dem die Wellenfläche abgeleitet ist, die Krümmungselemente, nämlich die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von E , $m\gamma_1$ und $m\gamma_2$, sowie die Richtungen der Tangenten von den Krümmungslinien des Punkts m , oder auch der Geraden Γ_1 und Γ_2 , bekannt sind, so lassen sich mit Hilfe der Geraden D und Δ die Krümmungselemente des entsprechenden Punkts m_1 der Wellenfläche, nämlich die Hauptkrümmungshalbmesser $m_1\mu_1$ und $m_1\mu_2$ und die Richtungen der Tangenten von den Krümmungslinien des Punkts m_1 oder auch der Geraden M_1 und M_2 angeben.

Zur näheren Begründung dieser Konstruktion möge folgendes angeführt werden: Die drei Geraden mi , oi , fi bilden eine Figur von unveränderlicher Form, weil die Winkel bei $i = 45^\circ$ sind. Sie bewegt sich so, dass die Gerade mi stets die beiden Mäntel der Centrafläche vom Ellipsoid E , und dass fi diejenigen der Centrafläche von der Wellenfläche berührt. Auch von der dritten Geraden oi kann man annehmen, dass sie zwei, sich in o schneidende Flächen, deren gemeinsame Tangente oi ist, berührt. Man hat also im ganzen sechs Flächen, welche von diesen drei Geraden berührt werden; die sechs Normalen in den sechs Berührungspunkten haben somit die Eigenschaft, dass sie von zwei Geraden geschnitten werden können: die erste Gerade D geht durch o und schneidet die Normalen $\Gamma_1\Gamma_2M_1M_2$; die zweite Gerade Δ ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $\Gamma_1\Gamma_2M_1M_2$ mit der in o senkrecht auf oi gelegten Ebene, in welcher auch die Normalen der beiden sich in o schneidenden Flächen liegen. Von welcher Art diese beiden Flächen sind, braucht nicht näher angegeben zu werden, es genügt zu sagen, dass oi ihre gemeinsame

Tangente im Punkt o ist, und dass also ihre Normalen von o in der Ebene E_0 liegen müssen.

II. Konstruktion der Kuspidualkurve der Ellipse.

Ihre Gleichung in der xy -Ebene ist nach Cayley:

$$\left(\frac{X^2}{b(c-a)^2} + \frac{Y^2}{a(b-c)^2}\right) \left(\frac{X^2}{c-a} - \frac{Y^2}{b-c}\right)^2 = (a-b)^2 \frac{X^2}{b(c-a)^2} \cdot \frac{Y^2}{a(b-c)^2},$$

woraus die beiden anderen durch Vertauschung der Buchstaben abgeleitet werden können.

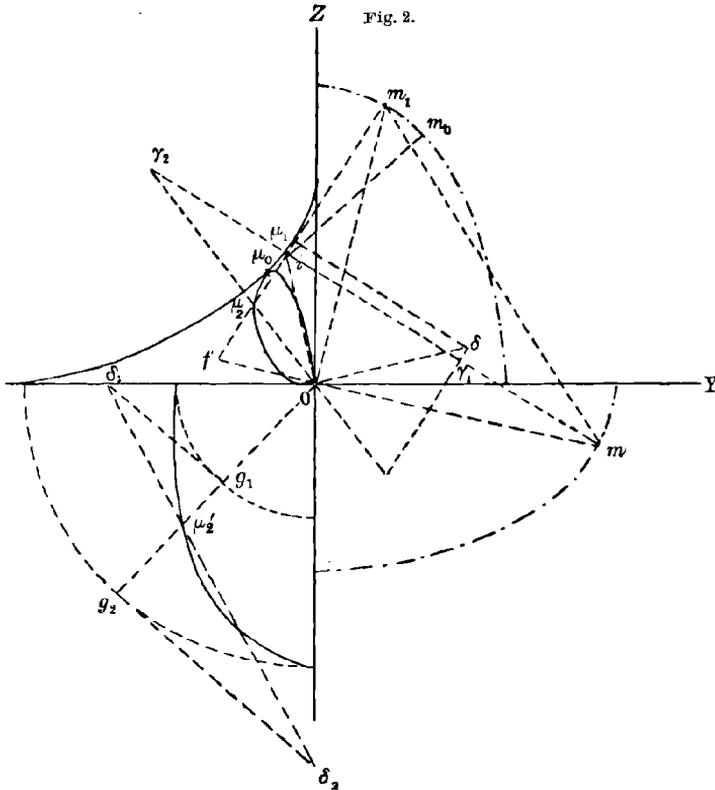


Fig. 1. Wir nehmen als ersten speziellen Fall an, m liege auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

dann wird m_1 auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = 1$$

liegen. γ_1 liegt auf der Evolute der ersten und μ_1 auf der Evolute der zweiten Ellipse; γ_2 liegt auf der Kuspidualkurve von E in der xy -Ebene, deren Gleichung

$$\frac{ax^2}{(a-c)^2} + \frac{by^2}{(b-c)^2} = 1$$

ist. Γ_2 ist das in γ_2 auf der Ebene der Figur errichtete Lot, und Γ_1 steht senkrecht auf $m\gamma_1$ und schneidet das in o auf oi errichtete Lot, d.h. den Durchschnitt von der Ebene E_0 mit der Ebene der Figur, in δ . Somit ist $o\gamma_2$ die Gerade D und das in δ auf der Ebene der Figur errichtete Lot die Gerade Δ , und μ_2 ist der Schnitt von der Normale $m_1\mu_1$ der Wellenfläche, mit D , weil das in μ_2 auf der Figur errichtete Lot sowohl D als auch Δ trifft. Dieses Lot ist also die Gerade M_2 und $\mu_1\delta$ ist die Gerade M_1 . Hiernach lässt sich die gesuchte Kuspidualkurve, deren Gleichung oben angegeben ist, oder der Ort der Punkte μ_2 , von welcher ein Quadrant gezeichnet ist, leicht konstruieren. Sie berührt die Evolute der Ellipse

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = 1$$

in einem Punkt μ_0 , in welchem also die beiden Krümmungsmittelpunkte μ_1 und μ_2 zusammenfallen, somit ist der entsprechende Punkt m_0 auf der Wellenfläche ein Kreispunkt (ombilic), dessen Konstruktion Mannheim angegeben hat (Compt. rend. 5. mai 1879).

Fig. 2. In der yz -Ebene, welche von dem Ellipsoid in der Ellipse

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

und von der Wellenfläche in

$$\frac{y^2}{c} + \frac{z^2}{b} = 1$$

geschnitten wird, erhält man eine ähnliche Figur; auch hier berührt die Kuspidualkurve die Evolute der zweiten Ellipse, man hat also auch in dieser Ebene vier Kreispunkte.

Fig. 3 und 4. Dagegen hat die Kuspidualkurve in der xz -Ebene vier Asymptoten

$$z = \pm x \sqrt{\frac{b-c}{a-b}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{b}}$$

die also parallel sind mit den wahren optischen Axen. Wenn der Winkel $o\gamma_2 m = 90^\circ$ ist, so wird die Normale der Wellenfläche in m_1 parallel mit $o\gamma_2$, also liegt der Schnittpunkt μ_2 dieser Linien im Unendlichen. Die Kurve geht ferner durch die vier Punkte, in welchen die beiden Mäntel der Wellenfläche zusammenstossen; hier ist also der Krümmungshalbmesser $m_1\mu_2 = 0$.

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{X^2}{c(a-b)^2} + \frac{Z^2}{a(b-c)} \right) \left(\frac{X^2}{a-b} - \frac{Z^2}{b-c} \right)^2 = (c-a)^2 \frac{X^2}{c(a-b)^2} \cdot \frac{Z^2}{a(b-c)^2}$$

folgt ferner, dass eine Asymptote, z.B. AC , von der Kurve in drei im Endlichen (Fig. 4) und drei im Unendlichen liegenden Punkten geschnitten wird. Von den letzteren fallen zwei in dem Punkt zusammen, wo die Äste OD und OE die Asymptote berühren; der dritte ist der

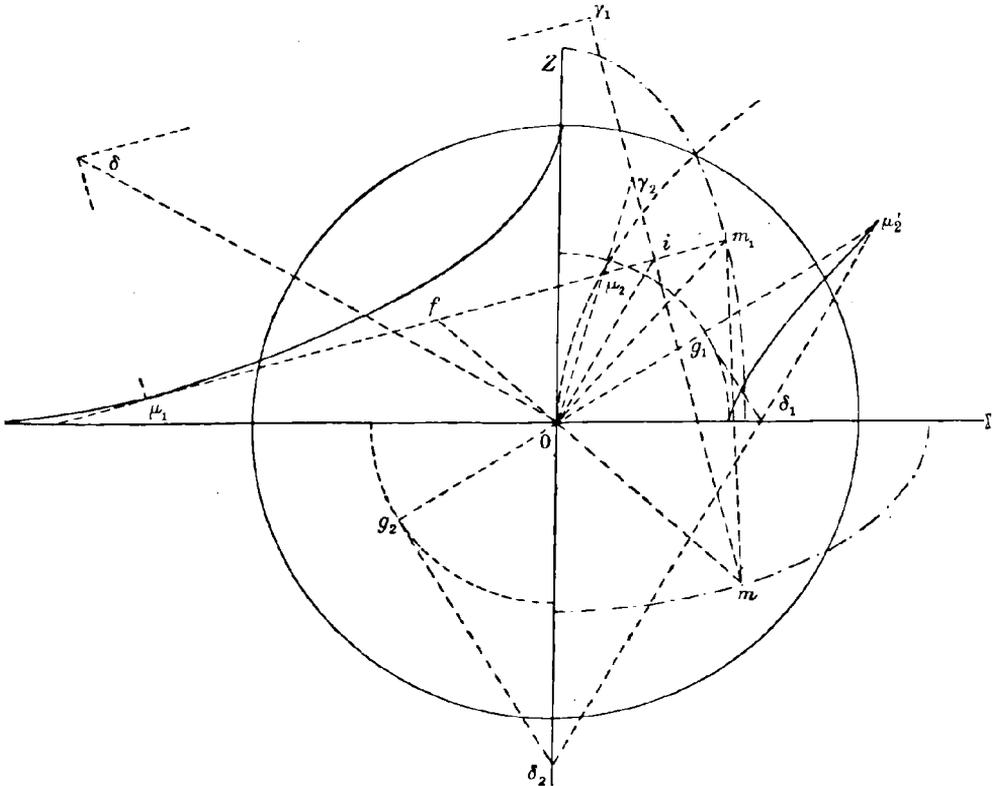
Schnitt derselben mit den Ästen OF und OG . Diese beiden Äste haben also nur einen Punkt mit der Asymptote AC gemein, weil sie dieselbe nicht berühren, sondern bloss schneiden. Auf der Verlängerung des Astes OD liegt ein Wendepunkt.

III. Kuspidualkurve des Kreises von der vierten Ordnung.

$$\{(b-c)X^2 - (c-a)Y^2\}^2 = \frac{(b-c)^2(c-a)^2}{c}(X^2 + Y^2)$$

in der xy -Ebene, woraus die beiden andern Kuspidualkurven durch

Fig. 3.



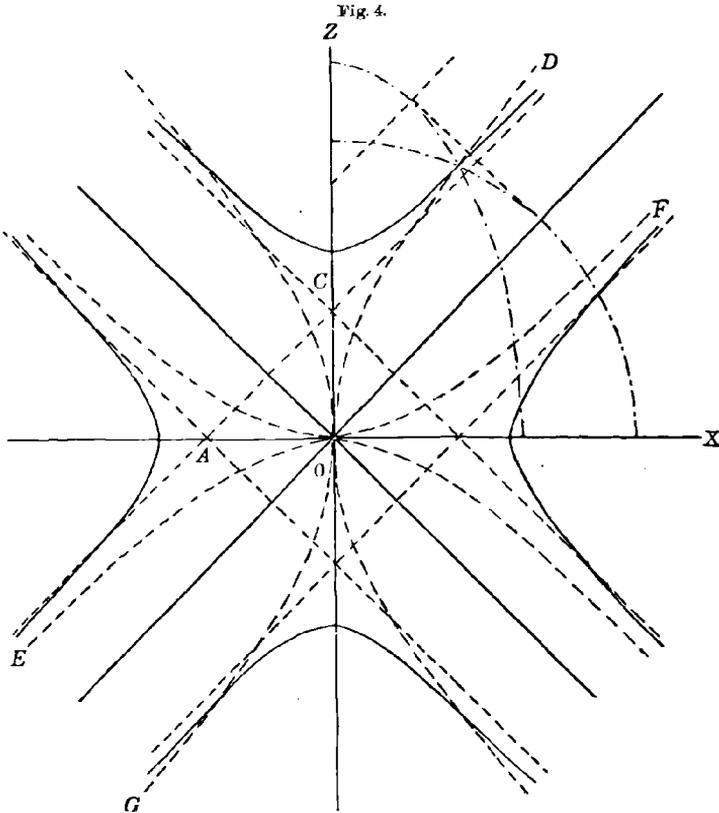
Vertauschung der Buchstaben abgeleitet werden können. Wir nehmen nun an (Fig. 1), m sei ein Endpunkt der Axe c des Ellipsoids E

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

von dem die Wellenfläche abgeleitet ist, dann steht mo auf der Ebene der Figur senkrecht, und m_1 liegt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = c$, welcher der Durchschnitt des innern Mantels der Wellenfläche mit der xy -Ebene ist (dieser Kreis ist in der Figur nicht gezeichnet). Während also bei der Konstruktion der Kuspidualkurve der Ellipse der Punkt m des Ellipsoids sowohl als auch der ihm entsprechende m_1 der Wellen-

fläche in der Ebene der Figur liegen, so trifft dies jetzt für den Punkt m nicht mehr zu, da mo senkrecht auf der Figur steht.

Der Punkt i fällt mit o zusammen, und da der Winkel $oim = 45^\circ$ ist, so ist oi parallel mm_1 , und die Ebene E_0 , welche senkrecht auf oi steht, schneidet die Figur in dem in o auf om_1 errichteten Lot. Da mo zugleich Normale von E ist, so liegen die Krümmungsmittelpunkte γ_1 und γ_2 auf mo . Die Gerade Γ_1 ist parallel der x -Axe und Γ_2 parallel der y -Axe. Dreht man das Dreieck mom_1 um mo als Axe, so bewegt



sich m_1 auf dem Kreis $x^2 + y^2 = c$, die Punkte γ_1 und γ_2 sowie die Geraden Γ_1 und Γ_2 bleiben fest, und werden von der Ebene E_0 , welche stets mit der Axe mo einen Winkel von 45° bildet und also einen rechtwinkligen Kegel berührt, dessen Axe mo ist, in zwei veränderlichen Punkten geschnitten, deren Verbindungslinie die Gerade Δ ist. Von den beiden Krümmungsmittelpunkten μ_1 und μ_2 , die auf der Normale m_1o der Wellenfläche liegen, fällt der eine μ_1 mit o zusammen; um den andern, der mit μ_2 bezeichnet ist, um Verwechslungen zu verhüten, zu erhalten, verlängere man m_1o über o hinaus bis zu den Schnitten g_1 und g_2 mit zwei konzentrischen Kreisen, deren Halbmesser

$og_1 = o\gamma_1$ und $og_2 = o\gamma_2$ sind, errichte auf m_1o in g_1 und g_2 Lote, welche die x -Axe in δ_1 und die y -Axe in δ_2 schneiden, so schneidet $\delta_1\delta_2$ die Verlängerung von m_1o in μ'_2 . Die Linie $\delta_1\delta_2$ ist die Projektion von der Geraden Δ auf der xy -Ebene, und D fällt mit der Z -Axe oder mo zusammen, weil diese durch o geht und sowohl Γ_1 als auch Γ_2 schneidet; errichtet man nun in μ'_2 auf der Ebene der Figur ein Lot, so schneidet es D und Δ , und ist also die Gerade M_2 .

Aus dieser Konstruktion lässt sich die obige Gleichung für den Ort des Punkts μ'_2 oder die Kuspidualkurve in der xy -Ebene leicht ableiten. Ihre Axen sind $2\frac{a-c}{\sqrt{c}}$ und $2\frac{b-c}{\sqrt{c}}$, und ihre Form in der xy - und in der yz -Ebene gleicht derjenigen von der Fusspunktenkurve einer Ellipse.

Bei Fig. 2 ist m ein Endpunkt der Axe a des Ellipsoids E

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1;$$

mo steht auf der Ebene der Figur senkrecht und m'_1 liegt auf dem Kreis $y^2 + z^2 = a$, welcher der Durchschnitt des äussern Mantels der Wellenfläche mit der yz -Ebene ist (er ist in der Figur nicht gezeichnet). Die Axen der Kuspidualkurve in der yz -Ebene sind

$$2\frac{a-b}{\sqrt{a}} \text{ und } 2\frac{a-c}{\sqrt{a}}.$$

Fig. 3 und 4. In der xz -Ebene ist die Gleichung

$$\{(b-c)X^2 - (a-b)Z^2\}^2 = \frac{(b-c)^2(a-b)^2}{b}(X^2 + Z^2)$$

und die Kurve hat dieselben Asymptoten wie die Kuspidualkurve vom sechsten Grad; sie besteht aus vier Ästen und hat eine ähnliche Form wie zwei konjugierte Hyperbeln. Ihre Axen sind

$$2\frac{a-b}{\sqrt{b}} \text{ und } 2\frac{b-c}{\sqrt{b}}.$$

Hinsichtlich ihrer Schnittpunkte mit einer Asymptote, z. B. AC , ist zu bemerken, dass von denselben ebenfalls drei ins Unendliche fallen, während im Endlichen nur ein Schnittpunkt liegt.

IV. Weitere Anwendungen der Mannheim'schen Konstruktion.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die allgemeine Mannheim'sche Konstruktion auf alle Apsidalflächen anwendbar ist, wenn für irgend einen Punkt m der gegebenen Fläche die Hauptkrümmungsradien und die Tangenten der Krümmungslinien gegeben sind. Man kann dann den unter I. angegebenen Satz in der Weise verallgemeinern, dass man statt „Ellipsoid“ eine beliebige Fläche (S) und statt „Wellenfläche“ ihre Apsidale (S_1) setzt, und erhält dadurch ein Mittel, um aus den Krümmungselementen von einem Punkt m einer Fläche [Normale, beide

Hauptkrümmungshalbmesser, Tangenten der Krümmungslinien von (S) in m] die Krümmungselemente in den entsprechenden Punkten m_1 einer grossen Zahl von abgeleiteten Flächen zu bestimmen, wobei die Geraden D und Δ die Träger der Vermittelung sind.

Nach Mac-Cullagh wird die Apsidalfläche einer gegebenen Fläche $[m]$ konstruiert, indem man durch einen festen Punkt o eine Ebene legt, welche sie in einem Punkt m normal schneidet. In dieser Ebene errichtet man in o ein Lot auf om und trägt auf demselben die Strecke $om_1 = om$ ab. Verändert man die Lage des Punktes m auf $[m]$, so bewegt sich m_1 auf einer Fläche $[m_1]$, welche die Apsidalfläche von $[m]$ ist. Die Normale in m_1 von $[m_1]$ ist das von m_1 auf die Normale von $[m]$ in m gefällte Lot.

Eine Fläche (S) und ihre Apsidale (S_1) in Beziehung auf einen Pol o haben als Reziprokalflächen hinsichtlich einer Kugel vom Mittelpunkt o eine Fläche (Σ) und ihre Apsidale (Σ_1) hinsichtlich desselben Pols.

Eine Fläche und ihre Apsidale in Beziehung auf einen Pol o haben als Fusspunktflächen hinsichtlich dieses Punktes, oder auch als inverse Flächen, wenn man diesen Punkt als Pol der Inversion (Transformation durch reziproke Radienvektoren) nimmt, eine Fläche und ihre Apsidale.

Nehmen wir z. B. an, die Fläche (S) sei ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt o , so ist ihre Apsidale (S_1) die Wellenfläche, und es ist oben angegeben, wie aus den Krümmungselementen eines beliebigen Punktes m von (S) diejenigen des entsprechenden Punktes m_1 auf (S_1) bestimmt werden. Fällt man von o ein Lot om' auf die Tangentialebene des Punktes m von (S), so liegt m' auf der Fusspunktfläche (F) von (S). Bestimmt man ferner auf om' einen Punkt m'' so, dass $om' \cdot om'' = \text{const.}$, dann liegt m'' auf einer Fläche (J), welche die inverse von (F) und zugleich die Reziproke von (S) ist. (J) ist ein Ellipsoid, es lassen sich also die Krümmungselemente des Punktes m'' leicht bestimmen [Journal de mathém. pures et appliquées 3^e série t. IV p. 247 (Laguerre) und t. VIII (Mannheim)]. Da bei inversen Flächen die beiden Hauptschnitte der einen Fläche denjenigen der andern entsprechen, und einer Krümmungslinie der einen Fläche eine Krümmungslinie der andern, so findet man hieraus unmittelbar auch die Krümmungselemente des Punktes m' auf (F), und durch Übertragung nach der Mannheim'schen Konstruktion auch diejenigen des entsprechenden Punktes m''' auf der Apsidalfläche von (F), d. h. auf der Fusspunktfläche der Wellenfläche (S_1) oder der Wellengeschwindigkeitsfläche. Man kann also in ähnlicher Weise aus den Krümmungselementen eines Punktes auf einer beliebigen Fläche (S) auch diejenigen des entsprechenden Punktes auf ihrer Apsidalfläche (S_1) sowohl als auch von der Fusspunktfläche der letztern ableiten.

Einführung in die geometrische Optik.

Von

Direktor Dr. F. MEISEL

in Darmstadt.

Hierzu lithogr. Tafel VI.

Die folgenden Ausführungen enthalten eigentlich nichts neues; jedoch scheint es mir, dass die hier gegebene Ableitung der Grundgesetze der geometrischen Optik einer gewissen Anschaulichkeit nicht entbehre. Ich pflege meine Vorlesung über die Theorie der optischen Instrumente an hiesiger Hochschule in der im folgenden wiedergegebenen Weise einzuleiten und fand einigen Beifall, als ich kürzlich im hiesigen naturwissenschaftlichen Verein diese Einführung vortrug.

Es sei eine beliebige Anzahl von Umdrehungsflächen beliebiger Gestalt mit gemeinsamer Axe, welche von allen Flächen rechtwinklig geschnitten wird, gegeben. An jeder dieser Flächen finde nach einem ganz beliebigen Gesetze eine Ablenkung der Strahlen statt. Dieses Gesetz sei für jede ablenkende Fläche so beschaffen, dass ein die letztere rechtwinklig schneidender Strahl seine Richtung beibehält. (Diese Einschränkung erscheint mit Rücksicht auf den extraordinären Strahl bei der doppelten Brechung notwendig.) Dann stellt die Axe selbst einen Strahl dar.

Auf der Axe befinde sich ein leuchtender Punkt L . In dem durch die Zeichnung dargestellten ebenen Schnitt erscheint er als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels. Die zugehörigen austretenden Strahlen umhüllen eine Kurve, die, da die Axe selbst zu diesen Strahlen gehört, eine in der Axe liegende Spitze besitzen muss. Der geometrische Ort der Schnittpunkte der eintretenden und der zugehörigen austretenden Strahlen ist eine die Axe rechtwinklig schneidende Umdrehungsfläche, die, weil durch eine gedachte Ablenkung an ihr die vielen wirklich vorkommenden Ablenkungen eines Strahles ersetzt werden können, als Ersatzfläche bezeichnet sein mag.

Ist L der unendlich ferne Punkt der Axe, so wird die Spitze als Brennpunkt (F), die Ersatzfläche als Hauptfläche, ihr Schnitt-

punkt mit der Axe als Hauptpunkt (H), die Strecke FH als Brennweite (f) bezeichnet. Fallen die axenparallelen Strahlen von der anderen Seite her ein, so erhalten wir einen zweiten Brennpunkt (F'), eine zweite Hauptfläche, einen zweiten Hauptpunkt (H') und eine zweite Brennweite (f').

Beschränken wir die Betrachtung auf der Axe unendlich benachbarte (Null-) Strahlen, so erscheint jeder Brennpunkt als Vereinigungspunkt aller in dem entsprechenden Sinne parallel der Axe eintretenden Strahlen. Von den Axenschnitten aller Umdrehungsflächen kommen nur die die Axe senkrecht schneidenden Linienelemente in Betracht, und wenn wir nun die zur Axe rechtwinkligen Ausdehnungen gegen die ihr parallel laufenden unendlichfach verzerrt auftragen, erscheinen diese Linienelemente als beliebig lange, zur Axe senkrechte gerade Linien. Dementsprechend erscheinen auch die Schnitte der Hauptflächen als solche gerade Linien; die Hauptflächen selbst gehen in Ebenen — die Hauptebenen — über.

Konstruktion des Bildes eines beliebigen Punktes L . Da derselbe der Axe in Wirklichkeit unendlich nahe liegt, müssen die von L ausgehenden Strahlen nach dem Verlassen des Systems — mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung — durch einen Punkt gehen, zu dessen Bestimmung zwei Strahlen genügen. Der parallel der Axe einfallende Strahl geht von seinem Schnitte mit der hinteren Hauptebene aus durch F' , der durch F gehende einfallende Strahl geht von seinem Schnitte mit der vorderen Hauptebene aus parallel der Axe. Ihr Schnittpunkt ist das Bild L' .

Aus der Figur ergibt sich unmittelbar das Abbildungsverhältnis rechtwinklig zur Axe

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

und daraus

$$xx' = ff'$$

Für $x = f$ ist $x' = f'$, $\frac{y'}{y} = 1$. Die Hauptebenen sind also zugeordnete Ebenen und durch das Abbildungsverhältnis 1 charakterisiert.

Aus

$$x' = \frac{ff'}{x}$$

folgt ferner das Abbildungsverhältnis in der Axe

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{ff'}{x^2} = -\frac{f'}{f} \cdot \left(\frac{f}{x}\right)^2 = -\frac{f'}{f} \cdot \left(\frac{y'}{y}\right)^2.$$

Besondere Lagen des Punktes L .

1. L liege in der durch F' gehenden, zur Axe senkrechten Ebene, der Brennebene. Dann ist L' der unendlich ferne Punkt der Geraden $A'F'$.

2. L liege in der einen Hauptebene. Dann ist L' der im gleichen Axenabstande liegende Punkt der anderen Hauptebene.

Konstruktion des Bildes einer beliebigen Geraden. Am zweckmässigsten werden hier die Schnittpunkte A und B der Geraden

mit der vorderen Brenn- und der vorderen Hauptebene benutzt. Das Bild geht offenbar von B' aus parallel der Geraden $C'F'$. Ist die Objektgerade durch den Abstand x und den Winkel φ , die Bildgerade durch den Abstand x' und den Winkel φ' bestimmt, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{h}{f'}, \\ x' &= \frac{h - h'}{\operatorname{tg} \varphi'} = \frac{f' \operatorname{tg} \varphi}{h}. \end{aligned}$$

Das Konvergenzverhältnis ist

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}.$$

Für die Hauptpunkte nimmt dasselbe den Wert $\frac{f}{f'}$ an. Es ist $= 1$ für $x = f'$, $x' = f$. Diese durch vertauschtes Auftragen der Brennweiten von den Brennpunkten aus erhaltenen Punkte, denen das Konvergenzverhältnis 1 entspricht, sind bekanntlich die Knotenpunkte.

Für sie ist das Abbildungsverhältnis senkrecht zur Axe $= \frac{f}{f'}$.

Die Schnitthöhe der Bildgeraden in der hinteren Brennebene ist

$$y' = x' \cdot \operatorname{tg} \varphi' = f' \operatorname{tg} \varphi.$$

Alle unter beliebigem Winkel einfallenden Parallelstrahlen verlassen also das System durch einen Punkt der Brennebene.

Hieraus ergibt sich die in Figur 7 (s. Tafel VI) dargestellte Konstruktion des Durchgangs eines Parallelstrahlenbündels; K und K' sind die Knotenpunkte.

Die in der Axe vereinigten Punktreihen des Objekt- und des Bildraumes, deren durch die Gleichung $xx' = ff'$ ausgedrückte Beziehung von der Art der physikalischen Bilderzeugung gänzlich unabhängig ist, sind offenbar projektive Punktreihen. In der That lassen sich alle oben gefundenen Abbildungsgesetze auch direkt aus der Projektivität ableiten.

C sei der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, das auf den beiden in der Figur 8 (s. Tafel VI) gezeichneten Geraden projektive Punktreihen erzeugt. Die Gegenpunkte F, F' dieser Reihen entsprechen, wenn man die letzteren in einer Geraden liegend denkt, offenbar den Brennpunkten, während die im Schnittpunkte zusammenfallenden Punkte H, H' die Hauptpunkte ergeben. Die Abstände des Schnittpunkts von den Gegenpunkten sind mithin die Brennweiten f, f' . Sind P und P' zwei beliebige entsprechende Punkte der Reihen, die von F und F' die Abstände x und x' haben, so folgt aus der Figur direkt die Gleichung $xx' = ff'$. Denkt man sich in P und P' zwei durch benachbarte Strahlen herausgeschnittene, zur Zeichenfläche senkrechte Strecken y und y' , so ist offenbar

$$y' : y = CP' : CP = f : x = x' : f'.$$

Für das Verhältnis zweier Differentiale der Punktreihen selbst (Fig. 9, s. Tafel VI) erhält man

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx'}{dz} = -\frac{f}{x} \cdot \frac{x'}{f} = -\frac{x'}{x} = -\frac{ff'}{x^2},$$

was auch oben gefunden wurde.

Durch vertauschtes Auftragen der Brennweiten von den Brennpunkten aus erhält man die Knotenpunkte K und K' , und man erkennt sogleich, dass der zugehörige Strahl die Geraden unter gleichen Winkeln schneidet.

Trägt man die Brennweiten von den Brennpunkten aus in negativem Sinne auf, so ergeben sich die negativen Hauptpunkte. Auch der diese Punkte erzeugende Strahl schneidet beide Gerade unter gleichen Winkeln und steht senkrecht auf dem die Knotenpunkte erzeugenden Strahle. Das Abbildungsverhältnis ist für diese Punkte $= \frac{f}{-f} = -1$, das Konvergenzverhältnis $= -\frac{f}{f'}$ (H_1 und H'_1 in Fig. 10, s. Tafel VI).

Trägt man endlich die vertauschten Brennweiten von den Brennpunkten aus in negativem Sinne auf, so findet man die negativen Knotenpunkte (K_1 und K'_1 in Fig. 10, s. Tafel VI). Für dieselben ist das Abbildungsverhältnis $= -\frac{f}{f'}$, das Konvergenzverhältnis $= -1$. Einem nach einem dieser Punkte gerichteten Strahle, der die Axe unter einem beliebigen Winkel φ schneidet, entspricht also ein durch den anderen Punkt gehender Strahl, der mit der Axe den Winkel $-\varphi$ bildet.

Noch eine kurze Bemerkung mag an dieser Stelle gestattet sein, die mit obiger Betrachtung zwar in keinem inneren Zusammenhange steht, die aber, wie mir scheint, für die Erkenntnis des Wesens des optischen Bildes nicht ganz bedeutungslos ist.

Die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels mögen an beliebig vielen Kurven der Ebene nach beliebigen Gesetzen abgelenkt werden. Die die letzte Kurve verlassenden Strahlen bilden eine kaustische Linie, und ein beliebig in der Ebene liegendes Auge erblickt das Bild des leuchtenden Punktes im Berührungspunkte der Tangente, welche von ihm an diese kaustische Linie gelegt werden kann. Da nun aber die Pupille des Auges eine messbare Ausdehnung besitzt, gelangt nicht nur ein einzelner Strahl, sondern eine ganze Strahlengruppe ins Auge. Die Strahlen dieser Gruppe berühren die kaustische Linie längs eines Kurvenstücks, das durch die Berührungspunkte der von gegenüberliegenden Punkten der Pupille ausgehenden Tangenten begrenzt wird.

Handelt es sich nun um ein Objekt von messbarer Ausdehnung, etwa eine kleine Strecke, so erzeugt jeder Punkt derselben eine kaustische Linie, und von jeder kaustischen Linie wird, wie oben ausgeführt, ein gewisses Kurvenstück wirksam. Alle diese Kurvenstücke bilden eine parallelogrammartige Figur, und man erkennt, dass einem linearen Objekte der Ebene ein flächenhaftes Bild, einem flächenhaften Objekte des Raumes also ein körperliches Bild entspricht. Von einer Krümmung des Bildes schlechthin kann also nicht gesprochen werden; davon, ob das Objekt gross oder klein im Vergleich mit der Pupille ist, hängt es ab, ob die Krümmung des geometrischen Orts der Berührungspunkte der vom Auge an die kaustischen Linien gelegten Tangenten oder die Krümmung der kaustischen Linie selbst vorwiegend in Betracht kommt.

Die Interpolation.

Von

Prof. Dr. W. VELTMANN

in Poppeladorf-Bonn.

Encke hat nach Vorlesungen von Gauss im Jahrgang 1830 des Astronomischen Jahrbuchs Seite 265 eine Arbeit über Interpolation veröffentlicht, welche den Gegenstand, was die Endergebnisse betrifft, vollständig erschöpft. Gauss geht von der Formel von Lagrange aus und wendet teils umständliche Reihenentwickelungen, teils elementare Rechnungen an, um zu seinen Resultaten zu gelangen. Im folgenden werde ich zeigen, wie man, ohne Fremdartiges hereinzuziehen und ohne solche zu einem besonderen Beispiel gehörige Rechnungen bloss auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der ganzen rationalen Funktionen zu denselben Resultaten gelangen kann. Den Interpolationsausdrücken habe ich eine Form gegeben, ähnlich derjenigen eines Kettenbruchs, wodurch dieselben sehr übersichtlich und für die Ausführung der Zahlenrechnung geeignet werden. Durch Anwendung von Klammern, die einander umschliessen, werden diese Ausdrücke sehr ungefügig und unübersichtlich.

Die Vereinigung zweier Gleichungen zu einer einzigen, wie sie in § 13 ausgeführt ist und wodurch eine neue Interpolationsformel erhalten wird, findet sich bei Encke-Gauss nicht. Dieselbe ist von mir hinzugefügt worden.

§ 1. Eine beliebige Funktion sei

1)
$$y = f(x).$$

Ein Wert von x und der zugehörige Wert von y mögen ein Wertepaar genannt werden. Sind also zwei solche zusammengehörige Werte gegeben, so ist ein Wertepaar gegeben.

§ 2. Die zu interpolierende Funktion sei

2)
$$y = f(x).$$

Die Aufgabe der Interpolation ist dann diese: Von der Funktion $f(x)$ sei eine Anzahl Wertepaare gegeben, von andern Wertepaaren bloss das Argument x . Die zugehörigen Werte von y mit einem gewissen Grade von Genauigkeit zu bestimmen.

Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom n^{ten} Grade ist, so ist durch $(n+1)$ Wertepaare die Funktion vollständig und genau bestimmt. Auf diesen Fall wird die ganze Interpolationsrechnung zurückgeführt.

§ 3. Man nehme an, dass die Funktion $f(x)$ in eine Reihe

$$3) \quad y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

sich entwickeln lasse und dass, wenn die Reihe bei $\alpha_{n+1} x^{n+1}$ abgebrochen wird, der Rest hinreichend klein sei, um vollständig vernachlässigt werden zu können. Die Funktion

$$4) \quad z = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1}$$

stellt also die gegebene mit jeder irgend erforderlichen Genauigkeit dar. Für den vorliegenden Zweck der Interpolation kann die Funktion z an die Stelle der Funktion y gesetzt werden.

Die Koeffizienten α seien nicht bekannt; dagegen mögen von der Funktion y $n+1$ Wertepaare

$$5) \quad \begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array}$$

genau berechnet sein. Zur Funktion z gehören dann dieselben Wertepaare mit hinreichender Genauigkeit. Die Funktion z ist durch diese Wertepaare nicht bestimmt; denn es ist eines zu wenig vorhanden. Dagegen kann eine Funktion n^{ten} Grades

$$6) \quad t = \beta + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n$$

angenommen werden, welche dieselben Wertepaare 5) hat und durch diese Wertepaare vollständig bestimmt ist. Diese Gleichung 6) nehmen wir als Interpolationsformel und wollen nun sehen, wie sich die Funktion t von dem wahren Werte der Funktion y oder z unterscheidet. Jedenfalls ist $z-t$ eine Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, in welcher x^{n+1} den Koeffizienten α_{n+1} hat. Und da z und t in obigen Wertepaaren übereinstimmen, so wird $z-t=0$ für

$$x = x_0, = x_1, \dots, = x_n.$$

Somit

$$7) \quad \begin{aligned} z-t &= \alpha_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \\ z &= t + \alpha_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n). \end{aligned}$$

Wenn also für z die Funktion t gesetzt wird, so ist der Fehler

$$= \alpha_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Hieraus folgt, dass, wenn es zulässig sein soll, auf die Funktion z und somit auch auf y eine aus $n+1$ gegebenen Wertepaaren abgeleitete Interpolationsformel n^{ten} Grades wie Gleichung 6) anzuwenden, α_{n+1} hinreichend klein sein muss. Der Fehler hängt jedoch nicht bloss von α_{n+1} , sondern auch von den übrigen Faktoren obigen Produktes ab. Man wird also das ganze Produkt möglichst klein machen

müssen. In der Regel wird für x ein bestimmter Wert, für welchen interpoliert werden soll, gegeben sein. Ferner wird eine Reihe Wertepaare

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots \end{matrix}$$

gegeben sein, aus welchen die der Interpolation zu grunde zu legenden auszuwählen sind. Man wird dieselben so wählen, dass x jedenfalls nicht grösser als der grösste und nicht kleiner als der kleinste der ausgewählten Werte von x ist. In der Regel wird x dem mittleren dieser Werte nahe kommen müssen.

Vorstehendes ist die von Gauss auf Seite 272 gegebene Fehlerbestimmung.

§ 4. Von einer Funktion, auf welche das Interpolationsverfahren angewandt werden soll, mögen jetzt eine Anzahl Wertepaare

$$8) \quad \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots \end{matrix}$$

deren Zahl vorläufig unbestimmt bleibt, gegeben sein. Es soll eine Funktion f bestimmt werden, welcher diese Wertepaare angehören. Kann dann letztere Funktion die erstere mit hinreichender Genauigkeit ersetzen, so darf jene zur Interpolation für diese benutzt werden.

Die Funktion f möge nicht nach Potenzen von x , sondern auf andere Weise geordnet werden, so nämlich, dass dieselbe erscheint als Summe von ganzen Funktionen, von welchen jede folgende von einem um eins höheren Grade ist, als die vorhergehende. Man bestimme nacheinander

1. eine Funktion f_0 vom nullten Grade mit dem Wertepaare $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$,
 2. eine Funktion f_1 vom ersten Grade mit den Wertepaaren $\begin{matrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{matrix}$,
 3. eine Funktion f_2 vom zweiten Grade mit den Wertepaaren $\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{matrix}$,
- u. s. w.

Hierbei verfähre man in der Weise, dass man zuerst die Funktion f_0 bestimmt, zu dieser eine Funktion φ_1 addiert, so dass f_1 entsteht, zu dieser eine Funktion φ_2 , sodass f_2 entsteht u. s. w. Also wie folgt:

$$9) \quad \begin{cases} f_0 = f_0 \\ f_1 = f_0 + \varphi_1 \\ f_2 = f_1 + \varphi_2 \\ f_3 = f_2 + \varphi_3 \\ \quad \quad \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$14) \quad \begin{cases} r_0 & = y_0 \\ r_0 + (x_1 - x_0)r_1 & = y_1 \\ r_0 + (x_2 - x_0)r_1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)r_2 & = y_2 \\ r_0 + (x_3 - x_0)r_1 + (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)r_2 \\ \quad + (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)r_3 & = y_3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man $r_0 = y_0$, dann aus der zweiten

$$r_1 = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}.$$

Hierauf erhält man aus der dritten Gleichung r_2 , dann aus der vierten r_3 u. s. w. Die für die Grössen r erhaltenen Ausdrücke sind in den y linear und zwar enthält der Ausdruck für das r mit einer bestimmten Nummer n , also r_n nur die y von y_0 bis y_n . Es wird also

$$15) \quad r_n = \frac{y_0}{\gamma_0} + \frac{y_1}{\gamma_1} + \frac{y_2}{\gamma_2} + \dots + \frac{y_n}{\gamma_n},$$

wo $\frac{1}{\gamma_0}, \frac{1}{\gamma_1}, \dots$ von den Grössen x abhängige Konstanten sind. Die Auflösung der Gleichungen 14) führt jedoch in dieser Weise zu einer wenig durchsichtigen Entwicklung und man schlägt deshalb zur Bestimmung der Konstanten r , nachdem auf obige Weise die Form der sie darstellenden Ausdrücke erkannt ist, besser einen anderen Weg ein.

§ 5. Man nehme von den Gleichungen 13) irgend eine, etwa die für f_n , also

$$16) \quad f_n = r_0 + (x - x_0)r_1 + (x - x_0)(x - x_1)r_2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)r_3 \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})r_n.$$

In dieser Gleichung den Ausdruck für r_n in Gleichung 15)

$$r_n = \frac{y_0}{\gamma_0} + \frac{y_1}{\gamma_1} + \dots + \frac{y_n}{\gamma_n}$$

eingesetzt giebt

$$17) \quad \begin{cases} f_n = r_0 + (x - x_0)r_1 + (x - x_0)(x - x_1)r_2 + \dots \\ \quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \left(\frac{y_0}{\gamma_0} + \frac{y_1}{\gamma_1} + \dots + \frac{y_n}{\gamma_n} \right). \end{cases}$$

Für $x = x_n$ muss aber $f_n = y_n$ werden, somit

$$18) \quad \begin{cases} y_n = r_0 + (x_n - x_0)r_1 + (x_n - x_0)(x_n - x_1)r_2 + \dots \\ \quad + (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \left(\frac{y_0}{\gamma_0} + \frac{y_1}{\gamma_1} + \dots + \frac{y_n}{\gamma_n} \right). \end{cases}$$

Diese Gleichung muss stattfinden, wenn y_n beliebig geändert wird, während alle übrigen Grössen, auch r_0, r_1, \dots, r_{n-1} ungeändert bleiben, da diese von y_n nicht abhängen. Hieraus folgt aber notwendig

$$19) \quad \begin{aligned} y_n &= (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \frac{y_n}{\gamma_n}, \\ \gamma_n &= (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Die durch solche Ausdrücke dargestellten Grössen sollen Differenzteile genannt werden. Der Name wird sich weiter unten rechtfertigen. Obiger Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf die Indices p, q, s, \dots, t . Werden also die x in beliebiger Weise und die y in derselben Weise vertauscht, oder was dasselbe ist, werden die Wertepaare vertauscht, so ändert sich der Differenzteil nicht.

So ist z. B.:

$$[x_1 x_2 x_3] = [x_2 x_3 x_1], [x_3 x_5 x_{10}] = [x_5 x_3 x_{10}].$$

Man kann die Differenzteile als 2, 3, 4 gliedrige u. s. w. Differenzteile unterscheiden, je nach der Zahl der Wertepaare, welche bei der Konstruktion des Ausdrucks für den Differenzteil zur Verwendung kommen. Als eingliedrige Differenzteile können die Grössen y selbst betrachtet werden.

Von der beliebig fortgesetzten Reihe der Wertepaare

$$23) \quad \begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & \dots \\ & y_0 & y_1 & \dots \end{array}$$

können nun folgende Vertikalreihen der 1, 2, 3 u. s. w. gliedrigen Differenzteile gebildet werden.

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ [x_{-2} x_{-1}] \\ [x_{-1} x_0] \\ [x_0 x_1] \\ [x_1 x_2] \\ [x_2 x_3] \\ [x_3 x_4] \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ [x_{-2} x_{-1} x_0] \\ [x_{-1} x_0 x_1] \\ [x_0 x_1 x_2] \\ [x_1 x_2 x_3] \\ [x_2 x_3 x_4] \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ [x_{-2} x_{-1} x_0 x_1] \\ [x_{-1} x_0 x_1 x_2] \\ [x_0 x_1 x_2 x_3] \\ [x_1 x_2 x_3 x_4] \\ \vdots \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

Oder mit kürzerer Bezeichnung

$$25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ D_{-1}^{-2} \\ D_0^{-1} \\ D_1^0 \\ D_2^1 \\ D_3^2 \\ D_4^3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ D_0^{-2} \\ D_1^{-1} \\ D_2^0 \\ D_3^1 \\ D_4^2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ D_1^{-2} \\ D_2^{-1} \\ D_3^0 \\ D_4^1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ D_2^{-2} \\ D_3^{-1} \\ D_4^0 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ D_3^{-2} \\ D_4^{-1} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \\ D_4^{-2} \\ \vdots \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

Vorstehender Teil des ganzen Systems der Differenzteile hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Man kann dasselbe ein Differenzdrei-eck nennen.

Jedem D sind zwei Nummern beigelegt. Die obere stimmt überein mit der Nummer des ersten, die untere mit der Nummer des letzten derjenigen Wertepaare, welche zur Bildung des Differenzteiles beigetragen haben. Die Differenzteile D sind in Vertikal-, Horizontal- und Diagonalreihen geordnet. Letztere sind zweierlei Art, von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten.

Die Differenzteile entsprechen den gewöhnlich sogenannten Reihendifferenzen. Jedoch sind beide nicht identisch. Man kann vielmehr zeigen, dass in irgend einem aus dem Schema 25) herausgeschnittenen Differenzendreieck der Differenzteil an der Ecke rechts aus den beiden in diesem Dreieck benachbarten Differenzteilen sich nach folgender Regel ableitet:

$$26) \quad D_q^p = \frac{D_q^{p+1} \dots D_{q-1}^p}{x_q \cdot x_p}.$$

Um hierfür den Beweis zu führen, so sei aus den Wertepaaren

$$\begin{array}{cccc} x_h & x_{h+1} & \dots & x_{h+k} \\ y_h & y_{h+1} & \dots & y_{h+k} \end{array}$$

die Funktion

$$27) \quad F'_0 = u_0 + u_1 x + \dots + u_k x^k,$$

aus den Wertepaaren

$$\begin{array}{cccc} x_{h+1} & x_{h+2} & \dots & x_{h+k} & x_{h+k+1} \\ y_{h+1} & y_{h+2} & \dots & y_{h+k} & y_{h+k+1} \end{array}$$

die Funktion

$$28) \quad F'_1 = v_0 + v_1 x + \dots + v_k x^k$$

und aus den Wertepaaren

$$\begin{array}{cccc} x_h & x_{h+1} & \dots & x_{h+k} & x_{h+k+1} \\ y_h & y_{h+1} & \dots & y_{h+k} & y_{h+k+1} \end{array}$$

die Funktion

$$29) \quad F' = w_0 + w_1 x + \dots + w_k x^k + w_{k+1} x^{k+1}$$

abgeleitet.

Gemäss der Regel, nach welcher (§ 7) der Koeffizient der höchsten Potenz von x in einer Funktion sich bestimmt, welche aus gegebenen Wertepaaren abgeleitet wird, ist nun offenbar

$$\begin{aligned} u_k &= D_{h+k}^k = [x_h \quad x_{h+1} \dots x_{h+k}] \\ v_k &= D_{h+k+1}^{k+1} = [x_{h+1} \quad x_{h+2} \dots x_{h+k+1}] \\ w_{k+1} &= D_{h+k+1}^k = [x_h \quad x_{h+1} \dots x_{h+k+1}]. \end{aligned}$$

Es sind also

$$\begin{array}{c} D_{h+k}^k \\ D_{h+k+1}^{k+1} \end{array} \quad D_{h+k+1}^k$$

drei Differenzteile von der Art, wie die in Gleichung 26) und es ist daher zu zeigen, dass

$$D_{h+k+1}^h = \frac{D_{h+k+1}^{h+1} - D_{h+k}^h}{x_{h+k+1} - x_h}$$

oder dass

$$30) \quad w_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{x_{h+k+1} - x_h}.$$

Die Funktionen F_1' und F_0' liefern gleiche Werte für $x = x_{h+1}$ bis $x = x_{h+k}$. Mithin ist für diese Werte von x $F_1' - F_0' = 0$. Ferner hat in $F_1' - F_0'$ die höchste Potenz von x den Koeffizienten $v_k - u_k$.

Somit

$$31) \quad F_1' - F_0' = (x - x_{h+1})(x - x_{h+2}) \dots (x - x_{h+k})(v_k - u_k).$$

Die Funktionen F' und F_0' stimmen überein für die $k + 1$ Werte von x , x_h bis x_{h+k} . Da nun $F' - F_0'$ vom $k + 1$ ten Grade ist und der Koeffizient der höchsten Potenz $= w_{k+1}$, so ist

$$32) \quad F' - F_0' = (x - x_h)(x - x_{h+1}) \dots (x - x_{h+k}) w_{k+1}.$$

Die Funktionen F' und F_1' stimmen überein für

$$x = x_{h+1} \quad \text{bis} \quad x = x_{h+k+1}.$$

Mithin

$$33) \quad F' - F_1' = (x - x_{h+1})(x - x_{h+2}) \dots (x - x_{h+k+1}) w_{k+1}.$$

Gleichung 33) von 32) subtrahiert giebt:

$$34) \quad F_1' - F_0' = (x - x_{h+1})(x - x_{h+2}) \dots (x - x_{h+k})(x_{h+k+1} - x_h) \cdot w_{k+1}.$$

Gleichung 34) und 31) verglichen zeigt, dass

$$(x_{h+k+1} - x_h) w_{k+1} = v_k - u_k$$

und somit

$$35) \quad w_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{x_{h+k+1} - x_h}.$$

Hiernach können die einzelnen Reihen der Differenzteile leicht nacheinander gebildet werden. Man subtrahiere in einer Vertikalreihe jede Zahl von der folgenden. Zu jeder dieser Differenzen suche man die beiden Werte von y , von welchen der eine mit dem Minuenden in ein und derselben Diagonalreihe rechts oben links unten, der andere mit dem Subtrahenden in einer Diagonalreihe links oben rechts unten steht. Die zu diesen Werten von y gehörigen Werte von x subtrahiere man von einander (den oberen von dem unteren). Obige Differenz dividiere man durch die letztere; der Quotient (Teil) ist der Differenzteil am Schnittpunkte der beiden Diagonalen.

§ 8. Die Ausdrücke für die Funktionen f in den Gleichungen 21) sind ähnlich zusammengesetzt, wie ein Kettenbruch, wenn in letzterem das Dividieren mit Multiplizieren vertauscht wird. Um die Ausdrücke genau in der äusseren Form eines Kettenbruchs darzustellen, gebe man einem wagerechten Doppelstrich die Bedeutung eines Multipli-

kationszeichens, so dass also z. B. $\frac{a}{b}$ so viel bedeutet wie a mal b . Den Faktor über dem Doppelstrich nennen wir den Multiplikator, denjenigen unter demselben den Multiplikanden. Dem Kettenbruch entspricht dann ein Ausdruck wie

$$\frac{a}{b} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n},$$

welcher demnach ein Kettenprodukt genannt werden kann. Die Grössen a sind Multiplikatoren; die Grössen b mögen die Partialmultiplikanden genannt werden. Die numerische Ausrechnung geschieht wie bei einem Kettenbruch von rechts nach links. Es wird b_n mit a_n multipliziert, dies zu b_{n-1} addiert, dann mit a_{n-1} multipliziert u. s. w. Will man aber den Buchstabenausdruck algebraisch ausrechnen, denselben in eine Summe von Produkten auflösen, so geschieht das von links nach rechts. Man erhält sämtliche Produkte, indem man jeden Partialmultiplikanden mit dem Produkte der sämtlichen demselben vorhergehenden Multiplikatoren multipliziert. Der Ausdruck wird also gleich

$$ab + aa_1b_1 + aa_1a_2b_2 + aa_1a_2a_3b_3 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergibt sich sofort eine Regel für die Addition zweier Kettenprodukte, die gemeinsame Faktoren enthalten. In zwei Kettenprodukten

$$\frac{a}{b} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \dots \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \dots$$

mögen b und β , b_1 und β_1 , b_2 und β_2 u. s. w. zugeordnete Partialmultiplikanden heissen. Wenn dann je zwei einander zugeordnete Partialmultiplikanden mit gleichen oder entgegengesetzt gleichen Produkten multipliziert sind, so werden die beiden Kettenprodukte addiert, indem man je zwei zugeordnete Partialmultiplikanden addiert resp. subtrahiert. So ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \frac{-a}{k} + \frac{-c}{l} + \frac{e}{m} + \frac{-g}{n} \\ = \frac{a}{b-k} + \frac{c}{d+l} + \frac{e}{f+m} + \frac{g}{h-n}. \end{aligned}$$

Setzt man die algebraische Ausrechnung des Kettenprodukts (von links nach rechts) fort bis einschliesslich zu einem bestimmten Teilmultiplikanden, so soll das Resultat ein Näherungsprodukt genannt werden. Es sind also ab , $ab + aa_1b_1$ u. s. w. bezüglich das erste,

zweite u. s. w. Näherungsprodukt. Das zu dem letzten Partialmultiplikanden eines Näherungsproduktes hinzugefügte Kettenprodukt soll das zugehörige Restprodukt genannt werden. In dem obigen Kettenprodukte $\frac{a}{b} + \dots$ ist zu b das erste, zu b_1 das zweite Restprodukt u. s. w. addiert. Offenbar ändert sich ein Kettenprodukt nicht, wenn man sämtliche Partialmultiplikanden desselben durch ein und dieselbe Grösse dividiert und den ersten Multiplikator mit der nämlichen Grösse multipliziert, wenn also z. B. ein gemeinsamer Faktor der Partialmultiplikanden aus diesen in den ersten Multiplikator gesetzt wird. Das nämliche gilt natürlich auch für jedes Näherungs- und jedes Restprodukt.

Die Funktion mit der Nummer n , also f_n kann jetzt so geschrieben werden.

$$36) f_n = y_0 + \frac{x-x_0}{[x_0 x_1]} + \frac{x-x_1}{[x_0 x_1 x_2]} + \frac{x-x_2}{[x_0 x_1 x_2 x_3]} + \dots + \frac{x-x_{n-2}}{[x_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1}]} + \frac{x-x_{n-1}}{[x_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n]}$$

Die Differenzen $x - x_0, x - x_1, \dots$ sind die Multiplikatoren. Zu jedem derselben gehört als Multiplikand der ganze Ausdruck unterhalb desselben. Die Differenzteile sind die Partialmultiplikanden. Die numerische Ausrechnung geschieht, wie oben bemerkt, von rechts nach links. $[x_0 x_1 \dots x_n]$ wird mit $x - x_{n-1}$ multipliziert, dies zu $[x_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1}]$ addiert, dann mit $x - x_{n-2}$ multipliziert u. s. w. Dies ist zugleich die bequemste Weise, die Interpolationsrechnung auszuführen.

Zu demselben Kettenprodukte kommt man auch auf folgende Weise. Die Funktion mit den Wertepaaren 8) denke man sich gegeben. Man dividire sie durch $x - x_0$; konstanter Rest = r_0 , Quotient = q_0 . Letzteren dividire man durch $x - x_1$; konstanter Rest = r_1 , Quotient = q_1 . Letzteren dividire man durch $x - x_2$; konstanter Rest = r_2 , Quotient = q_2 u. s. w. Dann ist

$$37) f_n = r_0 + \frac{x-x_0}{r_1} + \frac{x-x_1}{r_2} + \dots$$

Die Konstanten r_0, r_1 u. s. w. sind dieselben wie in den Gleichungen 13). Die Gleichungen zur Bestimmung derselben erhält man wieder durch die Bedingung, dass für $x = x_0, = x_1$ u. s. w. die Funktion $f_n = y_0, = y_1$ u. s. w. werden muss.

§ 9. Eine Eigentümlichkeit der hier beschriebenen Interpolationsrechnung, von welcher man bei der Ausführung der Rechnung Gebrauch machen kann, möge an einer Funktion mit einer bestimmten Anzahl gegebener Wertepaare gezeigt werden. Die Wertepaare seien folgende sechs.

$$38) \quad \begin{cases} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{cases}$$

Das zugehörige Differenzendreieck, mit Hinzufügung der Werte von x , ist das folgende

$$39) \quad \begin{cases} x_0 & y_0 & [x_0 x_1] \\ x_1 & y_1 & [x_1 x_2] & [x_0 x_1 x_2] \\ x_2 & y_2 & [x_2 x_3] & [x_1 x_2 x_3] & [x_0 x_1 x_2 x_3] \\ x_3 & y_3 & [x_3 x_4] & [x_2 x_3 x_4] & [x_1 x_2 x_3 x_4] & [x_0 x_1 x_2 x_3 x_4] \\ x_4 & y_4 & [x_4 x_5] & [x_3 x_4 x_5] & [x_2 x_3 x_4 x_5] & [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5] \\ x_5 & y_5 & & & & \end{cases}$$

Die Interpolationsformel ist, wenn man den Wert der Funktion, der zu dem Werte x des Arguments gehört, mit y bezeichnet,

$$40) \quad y = y_0 + \frac{x-x_0}{[x_0 x_1]} + \frac{x-x_1}{[x_0 x_1 x_2]} + \frac{x-x_2}{[x_0 x_1 x_2 x_3]} + \frac{x-x_3}{[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4]} + \frac{x-x_4}{[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]}$$

Wenn in Gleichung 26) die Grösse auf der linken Seite, sowie auf der rechten die beiden Grössen x im Divisor, der Quotient und eine der beiden Grössen im Dividenden bekannt sind, so lässt sich die andere Grösse im Dividenden aus der Gleichung bestimmen. Wenn also in einem Differenzendreieck aus jeder Vertikalreihe eine Zahl bekannt ist, wenn ferner auch die Werte von x gegeben sind, so können sämtliche übrigen Zahlen des Differenzendreiecks durch mehrmalige Anwendung der Gleichung 26) leicht bestimmt werden. Somit kann auch eine Interpolationsformel aufgestellt werden, welche aus jeder Vertikalreihe eine beliebige Zahl enthält. In Gleichung 40) sind die an der oberen Seite des Differenzendreiecks stehenden Zahlen benutzt worden. Von besonderem Interesse ist nun aber eine Formel, in welcher Differenzteile vorkommen, die in einer gebrochenen Horizontalinie stehen. Um für die Gleichung 40) eine solche Anordnung zu erhalten, nehme man die Wertepaare in folgender Reihenfolge

$$41) \quad \begin{matrix} x_4 & x_2 & x_0 & x_1 & x_3 & x_5 \\ y_4 & y_2 & y_0 & y_1 & y_3 & y_5 \end{matrix}$$

und bilde hierfür das Differenzendreieck. Dasselbe ist

$$42) \quad \begin{cases} x_4 & y_4 & [x_4 x_2] & [x_4 x_2 x_0] & [x_4 x_2 x_0 x_1] & [x_4 x_2 x_0 x_1 x_3] & [x_4 x_2 x_0 x_1 x_3 x_5] \\ x_2 & y_2 & [x_2 x_0] & [x_2 x_0 x_1] & [x_2 x_0 x_1 x_3] & [x_2 x_0 x_1 x_3 x_5] \\ x_0 & y_0 & [x_0 x_1] & [x_0 x_1 x_3] & [x_0 x_1 x_3 x_5] \\ x_1 & y_1 & [x_1 x_3] & [x_1 x_3 x_5] \\ x_3 & y_3 & [x_3 x_5] \\ x_5 & y_5 \end{cases}$$

x und ξ , sowie y und η sind hier gleichbedeutend. Wenn man beachtet, dass ein Differenzteil einem anderen gleich ist, wenn er aus demselben durch Permutation der Wertepaare entsteht, so sieht man sofort, dass die in der Gleichung 40) enthaltenen Differenzteile, welche in dem Differenzendreieck 39) an der oberen Seite in gerader Linie stehen, hier eine gebrochene Linie bilden; es sind die mit deutscher Schrift gedruckten. Die Gleichung 40) wird also jetzt

$$43) \quad y = y_0 + \frac{x - x_0}{[x_0 x_1]} + \frac{x - x_1}{[x_2 x_0 x_1]} + \frac{x - x_2}{[x_2 x_0 x_1 x_3]} + \frac{x - x_3}{[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]} + \frac{x - x_4}{[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3 x_5]}$$

Diese Gleichung liefert dieselben Werte von y , wie die Gleichung 40). Sie hat vor letzterer allgemein keinerlei Vorzüge, ist im Gegenteil etwas weniger bequem, da es handlicher ist, wenn die zu benutzenden Differenzteile in einer geraden, als wenn sie in einer gebrochenen Linie stehen.

Jetzt möge aber angenommen werden, dass, wie es nach § 3 sein soll, die gegebenen Werte von x in der Reihenfolge der Wertepaare 41) eine aufsteigende Reihe bilden, und dass der Wert von x , für welchen interpoliert werden soll, zwischen x_0 und x_1 liegt. Dann sind die Differenzen $x - x_0$, $x - x_1$ u. s. w. abwechselnd positiv und negativ, so wie es in der Gleichung 43) durch die beige-schriebenen Zeichen + und - angedeutet ist. Zu jedem Differenzteil ist in Gleichung 43) der rechts von demselben stehende Ausdruck hinzugefügt. Gauss betrachtet diese Hinzufügung als eine Korrektur des Differenzteils. Diese Korrektur kann positiv oder negativ sein und man hat deshalb bei der Rechenarbeit darauf zu achten, dass man die Vorzeichen nicht verwechselt. Gauss hat nun aber eine Regel angegeben, nach welcher man bloss den absoluten Wert der Korrektur zu bestimmen braucht; ob dieselbe addiert oder subtrahiert werden muss, erkennt man leicht nachträglich an einer von Gauss angegebenen Beziehung. Jedoch setzt dieses Verfahren voraus, dass kein Differenzteil durch die Hinzufügung der Korrektur sein Zeichen ändert. Dies nehmen wir also im folgenden an.

Es seien zwei Grössen A und B gegeben. Wenn dann durch eine zu A hinzugefügte Korrektur eine Grösse A' entsteht derart, dass $A - B$ und $A - A'$ dasselbe Vorzeichen haben, so soll gesagt werden, A sei durch die Verwandlung in A' nach B hin korrigiert worden. Dabei ist es gleichgültig, ob A' zwischen A und B oder über B hinaus liegt. Es ist nun klar, dass, wenn eine Grösse durch eine Korrektur nach einer gewissen Richtung hin korrigiert wird, sie durch jede andere Korrektur von demselben Vorzeichen auch nach der nämlichen Richtung korrigiert wird.

Halbiert man einen der Winkel der oben erwähnten gebrochenen Linie in dem Differenzendreieck 42), so weist die Halbierungslinie auf einen Differenzteil hin, welchen wir den dem Differenzteil am Scheitelpunkt gegenüberliegenden nennen. Die Gleichung 43) mit Hinzufügung der gegenüberliegenden Differenzteile (sie stehen unter denjenigen, welchen sie in dem Differenzendreieck gegenüberliegen) ist die folgende:

$$44) \quad y = y_0 + \frac{x-x_0}{[x_0 x_1]} + \frac{x-x_1}{[x_2 x_0 x_1]} + \frac{x-x_2}{[x_2 x_0 x_1 x_3]} + \frac{x-x_3}{[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]} + \frac{x-x_4}{[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3 x_5]}$$

$$\quad \quad \quad [x_2 x_0] \quad [x_0 x_1 x_3] \quad [x_4 x_2 x_0 x_1] \quad [x_0 x_1 x_3 x_4 x_5]$$

Geht man nun z. B. von dem Differenzteil $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ aus, so ist nach § 8

$$\frac{[x_2 x_0 x_1 x_3] - [x_4 x_2 x_0 x_1]}{x_3 - x_4} = [x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]$$

$$45) \quad [x_4 x_2 x_0 x_1] = [x_2 x_0 x_1 x_3] + (x_4 - x_3)[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3].$$

Durch Hinzufügung von $(x_4 - x_3)[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]$ wird also $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ nach $[x_4 x_2 x_0 x_1]$ hin korrigiert. Nun hat $x - x_3$ dasselbe Vorzeichen wie $x_4 - x_3$. Ferner hat der Differenzteil $[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]$ nach Hinzufügung der Korrektur, d. h. des in Gleichung 44) rechts von demselben stehenden Restproduktes dasselbe Vorzeichen wie vorher. Indem man also in Gleichung 45) $x - x_3$ an die Stelle von $x_4 - x_3$ und den korrigierten Differenzteil $[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]$ an die Stelle des letzteren selbst setzt, ändert das zu $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ hinzugefügte sein Zeichen nicht. Die Grösse $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ hört somit nicht auf, nach $[x_4 x_2 x_0 x_1]$ hin korrigiert zu sein. Wenn aber in Gleichung 45) zu $[x_4 x_2 x_0 x_1 x_3]$ das in der Gleichung 44) rechts davon stehende hinzuzaddiert und statt $x_4 - x_3$ $x - x_3$ gesetzt wird, so ist zu $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ alles in Gleichung 44) rechts davon stehende addiert und es ist also $[x_2 x_0 x_1 x_3]$ durch die hinzugefügte Korrektur nach dem gegenüberstehenden Differenzteil hin korrigiert worden. Dasselbe gilt offenbar für jeden der Differenzteile in Gleichung 44), weil auch $x - x_0$ und $x_1 - x_0$, $x - x_1$ und $x_2 - x_1$, $x - x_2$ und $x_3 - x_2$ dasselbe Vorzeichen haben. Man braucht daher, nachdem man zu einem Differenzteil die Korrektur dem absoluten Wert nach bestimmt hat, nur einen Blick auf den gegenüberliegenden Differenzteil in dem Differenzendreieck zu werfen, um sofort zu erkennen, welches Vorzeichen man der Korrektur zu geben hat.

Sollte aber irgend einmal ein Differenzteil durch die Korrektur sein Zeichen ändern, so sieht man sofort, dass dann der nach links folgende Differenzteil nicht nach dem gegenüberliegenden Differenzteil hin, sondern von demselben abwärts korrigiert werden muss, wodurch man wieder das Vorzeichen der Korrektur leicht bestimmen kann.

§ 10. Die Werte von x mögen wieder in der Reihenfolge 41) eine aufsteigende Reihe bilden. Man kehre das Schema 42) um, derart, dass unten und oben vertauscht wird, wodurch dann überall 0 und 1, 2 und 3, 4 und 5 vertauscht werden. Das Differenzendreieck hört dann nicht auf, ein Differenzendreieck zu sein und die der Gleichung 43) entsprechende Gleichung erhält man aus dieser, indem man ebenfalls 0 und 1, 2 und 3, 4 und 5 vertauscht. Sie ist somit

$$46) \quad y = y_1 + \frac{x - x_1}{[x_1 x_0]} + \frac{x - x_0}{[x_3 x_1 x_0]} + \frac{x - x_3}{[x_3 x_1 x_0 x_2]} + \frac{x - x_2}{[x_5 x_3 x_1 x_0 x_2]} + \frac{x - x_5}{[x_5 x_3 x_1 x_0 x_2 x_4]}$$

Die Funktion rechts ist dieselbe, wie in Gleichung 43), weil sie aus denselben Wertepaaren abgeleitet ist. Beide Gleichungen liefern also dieselben Werte von y und man kann daher nicht sagen, dass die eine oder die andere Gleichung zur Interpolation benutzt werden soll, jenachdem der Wert von x , für welchen interpoliert wird, dem x_0 oder dem x_1 näher liegt. Man würde eine sehr geeignete Rechenprobe erhalten, wenn man nach beiden Formeln rechnete.

Die Differenzteile, welche in der Gleichung 46) vorkommen, liegen in dem Differenzendreieck 42) auf einer gebrochenen Linie, welche zu der früher erwähnten symmetrisch ist. Die Differenzteile, welche in dem Differenzendreieck auf einer mitten zwischen x_0 und x_1 gezogenen Horizontallinie stehen, sind beiden Gleichungen gemeinsam, da die Vertauschung von 0 und 1, 2 und 3, 4 und 5 hier nur mit einer Permutierung gleichbedeutend ist.

Man sieht leicht, dass für die Bestimmung des Vorzeichens einer Korrektur dieselben Regeln gelten wie in § 9.

Will man in einem bestimmten Falle die Interpolationsrechnung nach § 9 oder 10 ausführen, so nehme man eine Anzahl Werte von x , für welche die Funktion gegeben ist, so dass die eine Hälfte grösser, die andere Hälfte kleiner sind als der Wert von x , für welchen interpoliert werden soll, und ordne dieselben so, dass sie in der Reihenfolge

$$\dots x_4 \quad x_2 \quad x_0 \quad x_1 \quad x_3 \quad x_5 \dots$$

entweder eine steigende oder eine fallende Reihe darstellen. Man bilde das Differenzendreieck und stelle dann die Gleichung so auf, dass die Multiplikatoren von links nach rechts $x - x_0, x - x_1, x - x_2$ u. s. w. sind, während als zugehörige Teilmultiplikatoren Differenzteile genommen werden, die auf einer gebrochenen Horizontallinie stehen, von welcher die erste Strecke bei x_0 anfängt und von links oben nach rechts unten geht.

§ 11. Es erübrigt noch die Behandlung des Falles, wo die gegebenen Werte von x eine arithmetische Reihe bilden. Die Wertepaare seien in unbestimmter Anzahl

und es sei jetzt

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \end{matrix}$$

47)
$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \dots$$

eine aufsteigende arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz = i . Das Dreieck der Differenzteile sei

48)
$$\begin{matrix} x_0 & y_0 & D_0^1 & & & & & \\ x_1 & y_1 & D_1^1 & D_0^2 & & & & \\ x_2 & y_2 & D_2^1 & D_1^2 & D_0^3 & D_0^4 & & \\ x_3 & y_3 & D_3^1 & D_2^2 & D_1^3 & D_1^4 & D_0^5 & \text{u. s. w.} \\ x_4 & y_4 & D_4^1 & D_3^2 & D_2^3 & & & \\ x_5 & y_5 & & & & & & \end{matrix}$$

Dasjenige der gewöhnlich sogenannten Differenzen

49)
$$\begin{matrix} x_0 & y_0 & \Delta_0^1 & & & & & \\ x_1 & y_1 & \Delta_1^1 & \Delta_0^2 & & & & \\ x_2 & y_2 & \Delta_2^1 & \Delta_1^2 & \Delta_0^3 & \Delta_0^4 & & \\ x_3 & y_3 & \Delta_3^1 & \Delta_2^2 & \Delta_1^3 & \Delta_1^4 & \Delta_0^5 & \text{u. s. w.} \\ x_4 & y_4 & \Delta_4^1 & \Delta_3^2 & \Delta_2^3 & & & \\ x_5 & y_5 & & & & & & \end{matrix}$$

Die Grössen D sowie Δ sind hier nach ihrer Reihenfolge in horizontaler und vertikaler Richtung numeriert. Vergleicht man eine Vertikalreihe von 48) mit der gleich numerierten von 49), so entsteht offenbar, wenn die Nummer = m ist, ein Differenzteil D aus der entsprechenden Differenz Δ , indem man letztere durch

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot i^m$$

dividiert, also

50)
$$\begin{cases} D_0^1 = \frac{\Delta_0^1}{1 \cdot i} \\ D_0^2 = \frac{\Delta_0^2}{1 \cdot 2 \cdot i^2} \\ D_0^3 = \frac{\Delta_0^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^3} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ferner ist

51)
$$\begin{cases} x - x_0 = x - x_0 \\ x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = x - x_0 - i \\ x - x_2 = (x - x_0) - (x_2 - x_0) = x - x_0 - 2i \\ x - x_3 = (x - x_0) - (x_3 - x_0) = x - x_0 - 3i \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Interpolationsformel ist

$$52) \quad y = y_0 + \frac{x-x_0}{D_0^1} + \frac{x-x_1}{D_0^2} + \frac{x-x_2}{D_0^3} + \frac{x-x_3}{D_0^4} + \frac{x-x_4}{D_0^5} \text{ u. s. w.}$$

Aus 49) und 50) in 52) eingesetzt giebt:

$$53) \quad y = y_0 + \frac{x-x_0}{\frac{1}{i} \Delta_0^1} + \frac{x-x_0-i}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot i^2} \Delta_0^2} + \frac{x-x_0-2i}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^3} \Delta_0^3} + \frac{x-x_0-3i}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot i^4} \Delta_0^4} + \frac{x-x_0-4i}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot i^5} \Delta_0^5} \text{ u. s. w.}$$

Die Partialmultiplikanen haben vom ersten an den Faktor $\frac{1}{i}$, vom zweiten an ausserdem noch $\frac{1}{2i}$, vom dritten an ausserdem noch $\frac{1}{3i}$ u. s. w. gemeinsam. Bringt man also nach § 8 diese gemeinsamen Faktoren in die Multiplikatoren, so ist, wenn $\frac{x-x_0}{i}$ mit q bezeichnet wird:

$$54) \quad y = y_0 + \frac{q}{\Delta_0^1} + \frac{\frac{1}{2}(q-1)}{\Delta_0^2} + \frac{\frac{1}{3}(q-2)}{\Delta_0^3} + \frac{\frac{1}{4}(q-3)}{\Delta_0^4} + \frac{\frac{1}{5}(q-4)}{\Delta_0^5} \text{ u. s. w.}$$

Soll diese Gleichung zu einer grösseren Interpolationsrechnung angewandt, z. B. mit Hilfe derselben eine Tafel berechnet werden, so ordne man die y gemäss der aufsteigenden Reihe der x und bestimme die Vertikalreihen der Differenzen, bis diese gleich 0 werden. Um dann in einem bestimmten Intervall der x zu interpolieren, nehme man ein Differenzendreieck, dessen Seite links durch dieses Intervall halbiert wird und setze für $\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3$ u. s. w. in Gleichung 54) die Zahlen an der oberen Seite des Dreiecks. Selbstverständlich wird das Kettenprodukt nur fortgesetzt, bis die Differenzen $\Delta = 0$ werden. Man hat dann die Formel zur Interpolation in diesem Intervall, kann also jetzt für q die betreffenden Bruchteile setzen. Ist man mit diesem Intervall fertig, so nehme man das nächstfolgende, somit auch die folgende Diagonalfreihe der Δ u. s. w.

§ 12. Um auch für die höheren arithmetischen Reihen eine Interpolation nach der gebrochenen horizontalen zu erhalten, so mögen jetzt 10 Wertepaare

x_8	x_6	x_4	x_2	x_0	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9
y_8	y_6	y_4	y_2	y_0	y_1	y_3	y_5	y_7	y_9

gegeben sein und die Werte von x in der hier angenommenen Reihenfolge eine aufsteigende arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz $= i$ bilden. Das Dreieck der Differenzteile sei

$$55) \left\{ \begin{array}{l|l} x_8 & y_8 \\ x_6 & y_6 \\ x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \\ x_7 & y_7 \\ x_9 & y_9 \end{array} \right. \begin{array}{l} D_0^1 \\ D_1^1 D_0^2 \\ D_2^1 D_1^2 D_0^3 \\ D_3^1 D_2^2 D_1^3 D_0^4 \\ D_4^1 D_3^2 D_2^3 D_1^4 D_0^5 \\ D_5^1 D_4^2 D_3^3 D_2^4 D_1^5 D_0^6 \\ D_6^1 D_5^2 D_4^3 D_3^4 D_2^5 D_1^6 D_0^7 \\ D_7^1 D_6^2 D_5^3 D_4^4 D_3^5 D_2^6 D_1^7 D_0^8 \\ D_8^1 D_7^2 D_6^3 D_5^4 D_4^5 D_3^6 D_2^7 D_1^8 D_0^9 \end{array}$$

dasjenige der Differenzen

$$56) \left\{ \begin{array}{l|l} x_8 & y_8 \\ x_6 & y_6 \\ x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \\ x_7 & y_7 \\ x_9 & y_9 \end{array} \right. \begin{array}{l} \Delta_0^1 \\ \Delta_1^1 \Delta_0^2 \\ \Delta_2^1 \Delta_1^2 \Delta_0^3 \\ \Delta_3^1 \Delta_2^2 \Delta_1^3 \Delta_0^4 \\ \Delta_4^1 \Delta_3^2 \Delta_2^3 \Delta_1^4 \Delta_0^5 \\ \Delta_5^1 \Delta_4^2 \Delta_3^3 \Delta_2^4 \Delta_1^5 \Delta_0^6 \\ \Delta_6^1 \Delta_5^2 \Delta_4^3 \Delta_3^4 \Delta_2^5 \Delta_1^6 \Delta_0^7 \\ \Delta_7^1 \Delta_6^2 \Delta_5^3 \Delta_4^4 \Delta_3^5 \Delta_2^6 \Delta_1^7 \Delta_0^8 \\ \Delta_8^1 \Delta_7^2 \Delta_6^3 \Delta_5^4 \Delta_4^5 \Delta_3^6 \Delta_2^7 \Delta_1^8 \Delta_0^9 \end{array}$$

Als Interpolationsformeln können die den Gleichungen 43) und 46) entsprechenden benutzt werden. Die in die Formeln eingehenden Differenzteile sind wieder die an den Brechungspunkten zweier gebrochenen Linien stehenden, von welchen die eine von y_0 , die andere von y_1 ausgeht. Die erstere Reihe der Differenzteile ist also

$$y_0, D_4^1, D_3^2, D_3^3, D_2^4, D_2^5, D_1^6, D_1^7, D_0^8, D_0^9,$$

die andere

$$y_1, D_4^1, D_4^2, D_3^3, D_3^4, D_2^5, D_2^6, D_1^7, D_1^8, D_0^9.$$

Die Formeln werden demnach

$$57) y = y_0 + \frac{x-x_0}{D_4^1} + \frac{x-x_1}{D_3^2} + \frac{x-x_2}{D_3^3} + \frac{x-x_3}{D_2^4}$$

$$58) y = y_1 + \frac{x-x_1}{D_4^1} + \frac{x-x_0}{D_4^2} + \frac{x-x_3}{D_3^3} + \frac{x-x_2}{D_3^4} + \frac{x-x_5}{D_2^5} + \frac{x-x_4}{D_2^6} + \frac{x-x_7}{D_1^7} + \frac{x-x_6}{D_1^8} + \frac{x-x_9}{D_0^9} + \frac{x-x_8}{D_0^9}$$

Man erhält irgend einen Differenzteil D mit der oberen Nummer m aus der entsprechenden Differenz Δ , indem man letztere mit

multipliziert. Ferner ist $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot i^m}$

$$59) \begin{cases} x - x_0 = & x - x_0 \\ x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = x - x_0 - i \\ x - x_2 = (x - x_0) - (x_2 - x_0) = x - x_0 + i \\ x - x_3 = (x - x_0) - (x_3 - x_0) = x - x_0 - 2i \\ x - x_4 = (x - x_0) - (x_4 - x_0) = x - x_0 + 2i \end{cases}$$

allgemein, es ist

$$x - x_m = x - x_0 + \frac{m}{2} i \quad \text{oder} \quad = x - x_0 - \frac{m+1}{2} \cdot i,$$

je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Setzt man die wie vorstehend bestimmten Werte der Differenzteile sowie die der Differenzen

$$x - x_0, \quad x - x_1 \dots$$

in die Gleichungen 57) und 58) ein, bringt man ferner den allen Teilmultiplikatoren gemeinsamen Faktor $\frac{1}{i}$ in den ersten, sowie die Faktoren

$$\frac{1}{2i}, \quad \frac{1}{3i}, \quad \frac{1}{4i} \dots$$

resp. in den zweiten, den dritten u.s.w. Multiplikator, so erhält man, wenn man noch $\frac{x-x_0}{i}$ mit q bezeichnet

$$60) y = y_0 + \frac{q}{\Delta_4^1} + \frac{\frac{1}{2}(q-1)}{\Delta_3^2} + \frac{\frac{1}{3}(q+1)}{\Delta_3^3} + \frac{\frac{1}{4}(q-2)}{\Delta_2^4} + \frac{\frac{1}{5}(q+2)}{\Delta_2^5} + \frac{\frac{1}{6}(q-3)}{\Delta_1^6} + \frac{\frac{1}{7}(q+3)}{\Delta_1^7} + \frac{\frac{1}{8}(q-4)}{\Delta_0^8} + \frac{\frac{1}{9}(q+4)}{\Delta_0^9}$$

$$61) y = y_1 + \frac{q-1}{\Delta_4^1} + \frac{1}{2} \frac{q}{\Delta_4^2} + \frac{1}{3} \frac{(q-2)}{\Delta_3^3} + \frac{1}{4} \frac{(q+1)}{\Delta_3^4} + \frac{1}{5} \frac{(q-3)}{\Delta_2^5} + \frac{1}{6} \frac{(q+2)}{\Delta_2^6} + \frac{1}{7} \frac{(q-4)}{\Delta_1^7} + \frac{1}{8} \frac{(q+3)}{\Delta_1^8} + \frac{1}{9} \frac{(q-5)}{\Delta_0^9}$$

Die Anwendung einer dieser Gleichungen zur Interpolation geschieht in derselben Weise, wie die der Gleichung 53), nur dass die zu benutzenden Δ jetzt auf einer gebrochenen Horizontallinie stehen, welche mit dem betreffenden Intervall in gleicher Höhe steht. Für die Bestimmung des Vorzeichens der sogenannten Korrektur gilt dasselbe wie früher.

Die Gleichungen 60) und 61) lassen sich zu einer einzigen sehr vorteilhaft vereinigen in dem Falle, wo x einen Wert hat, der mitten zwischen x_0 und x_1 liegt, so dass also $q = \frac{1}{2}$ ist. Die Formeln werden

$$62) y = y_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{2}$$

$$63) y = y_1 + \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{2}$$

In jedem der beiden Ausdrücke für y sind die Vorzeichen der Multiplikatoren abwechselnd positiv und negativ. Vergleicht man ferner die beiden Ausdrücke mit einander, so sind Multiplikatoren von gleicher Ordnung (solche, die senkrecht übereinander stehen) entgegengesetzt gleich. Man denke sich die beiden Ausdrücke von links nach rechts algebraisch ausgerechnet, nehme aus jedem der beiden Ausdrücke das erste Produkt, dann aus jedem das zweite, dann das dritte u. s. w., so findet man, dass zwei solche Produkte, wenn sie eine und dieselbe Differenz Δ als Faktor enthalten, entgegengesetzte, wenn sie aber verschiedene Differenzen Δ enthalten, gleiche Vorzeichen haben. Die beiden Ausdrücke für y können also nach § 8 addiert werden und man erhält dann

$$2y = (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_3^2 + \Delta_4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{2}$$

oder

$$64) \quad 2y = (y_0 + y_1) + \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1}}{\Delta_3^2 + \Delta_4^2} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2}}{\Delta_3^4 + \Delta_4^4} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3}}{\Delta_1^6 + \Delta_2^6} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4}}{\Delta_0^8 + \Delta_1^8}$$

Um die Formel allgemein für eine beliebige Anzahl Wertepaare aufzustellen, so seien letztere

$$65) \quad \begin{matrix} \dots & x_2 & x_1 & x_0 & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots \\ & y_2 & y_1 & y_0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots \end{matrix}$$

und die Werte des Argumentes, die x und ξ , mögen in der hier angenommenen Reihenfolge eine aufsteigende arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz $= i$ bilden.

Das Dreieck der Differenzen möge gebildet und die Differenzen mit s und σ bezeichnet werden. Das Differenzendreieck, mit Fortlassung derjenigen Zahlen, welche nicht in die Formeln eingehen, sei

$$66) \quad \begin{matrix} \vdots \\ y_1 \\ y_0 & s_2 & s_4 & s_6 \dots \\ \eta_0 & \sigma_2 & \sigma_4 & \sigma_6 \dots \\ \eta_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

Die Nummern der s und σ sind die der vertikalen Differenzreihen. Die Interpolationsformel ist

$$67) \quad y + \eta = (y_0 + \eta_0) + \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1}}{s_2 + \sigma_2} + \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2}}{s_4 + \sigma_4} + \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3}}{s_6 + \sigma_6} + \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4}}{s_8 + \sigma_8}$$

Die Nenner der mit $\frac{1}{8}$ multiplizierten Brüche sind die natürlichen Zahlen, die Zähler die ungeraden Zahlen. y und η sind gleich, da jede der beiden Grössen zu dem Werte des Arguments gehört, der mitten zwischen x_0 und ξ_0 liegt.

Zu jedem Partialmultiplikanden ist ein Restprodukt (Korrektion) addiert. Auch hier genügt es, den absoluten Wert dieser Korrektion zu bestimmen, ohne sich um das Vorzeichen zu kümmern. Ob die Korrektion addiert oder subtrahiert werden muss, ergibt sich unter der Annahme, dass kein Teilmultiplikand durch Hinzufügung der Korrektion sein Zeichen ändert, nachträglich auf folgende Weise.

Ein Teil der Formel 67) sei

$$\frac{-\alpha}{s_p + \sigma_p} + \frac{-\beta}{s_{p+2} + \sigma_{p+2} + k},$$

wo α und β positive Grössen sind und wo k das Restprodukt ist, welches zu $s_{p+2} + \sigma_{p+2}$ hinzukommt. Von dem Schema 66) nehme man den Teil

$$68) \quad \begin{cases} s_p' \\ s_p & s_p - s_p' & \sigma_p - 2 \cdot s_p + s_p' = s_{p+2} \\ \sigma_p & \sigma_p - s_p & \sigma_p' - 2 \cdot \sigma_p + s_p = \sigma_{p+2} \\ \sigma_p' & \sigma_p' - \sigma_p & \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} s_{p+2} + \sigma_{p+2} &= s_p' + \sigma_p' - (s_p + \sigma_p) \\ s_p' + \sigma_p' &= s_p + \sigma_p + (s_{p+2} + \sigma_{p+2}). \end{aligned}$$

Wenn also zu $s_p + \sigma_p$ hinzuaddiert wird $s_{p+2} + \sigma_{p+2}$, so ist $s_p + \sigma_p$ nach $s_p' + \sigma_p'$ hin korrigiert. Da nun $s_{p+2} + \sigma_{p+2} + k$ dasselbe Vorzeichen hat wie $s_{p+1} + \sigma_{p+1}$, so wird $s_p + \sigma_p$ auch durch $s_{p+2} + \sigma_{p+2} + k$ nach $s_p' + \sigma_p'$ hin korrigiert. Nun soll aber zu $s_p + \sigma_p$ hinzugefügt werden $-\beta \cdot (s_{p+2} + \sigma_{p+2} + k)$. Somit wird hierdurch $s_p + \sigma_p$ nicht nach $s_p' + \sigma_p'$ hin, sondern von $s_p' + \sigma_p'$ abwärts korrigiert. Diesem gemäss ist also das Vorzeichen von

$$\frac{\beta}{s_{p+2} + \sigma_{p+2} + k}$$

zu nehmen. Da man das Schema 66) vor sich hat, so braucht man nur einen Blick auf die beiden Zahlen s_p' und σ_p' zu werfen, um gleich zu erkennen, welches Vorzeichen man der Korrektion zu geben hat.

Wenn für äquidistante Werte des Arguments die Funktion gegeben ist, so kann die Formel 67) benutzt werden, um die Funktion zu bestimmen für Werte des Argumentes, welche in der Mitte der gleichen Intervalle liegen. Man hat dann die Funktion wieder für äquidistante Werte des Argumentes, deren Intervalle halb so gross sind. Diese kann man auf gleiche Weise auf die Hälfte verringern u. s. w.

§ 13. Man kann die Gleichungen 60) und 61) allgemein zu einander addieren statt bloss für den Fall, dass $q = \frac{1}{2}$ ist. Man erhält dann, wenn man die Kettenprodukte in einzelne Produkte auflöst und diese paarweise zusammennimmt

$$69) \quad \left\{ \begin{aligned} 2y &= (y_0 + y_1) + (2q - 1) \Delta_4^1 + \frac{1}{1 \cdot 2} q(q-1) (\Delta_3^2 + \Delta_4^2) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} q(q-1) (2q-1) \Delta_3^3 \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q(q-1) (q+1) (q-2) (\Delta_2^4 + \Delta_3^4) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q(q-1) (q+1) (q-2) (2q-1) \Delta_2^5 \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 6} q(q-1) (q+1) (q-2) (q+2) (q-3) (\Delta_1^6 + \Delta_2^6) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 7} q(q-1) (q+1) (q-2) (q+2) (q-3) (2q-1) \Delta_1^7 \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 8} q(q-1) (q+1) (q-2) (q+2) (q-3) (q+3) (q-4) (\Delta_0^8 + \Delta_1^8) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 9} q(q-1) (q+1) (q-2) (q+2) (q-3) (q+3) (q-4) (2q-1) \Delta_0^9 \end{aligned} \right.$$

Setzt man hier $q = \frac{1}{2}$, $2q - 1 = 0$, so erhält man wieder die Gleichung 64). Nimmt man dagegen in dem Ausdruck 69) das dritte und vierte, fünfte und sechste, siebente und achte Glied zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 2y &= y_0 + y_1 + (2q - 1)\Delta_3^1 + \frac{1}{2}q(q - 1)\left(\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \frac{2q - 1}{3}\Delta_3^3\right) \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}q(q - 1)(q + 1)(q - 2)\left(\Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \frac{2q - 1}{5}\Delta_2^5\right) \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}q(q - 1)(q + 1)(q - 2)(q + 2)(q - 3)\left(\Delta_1^6 + \Delta_2^6 + \frac{2q - 1}{7}\Delta_1^7\right) \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}q(q - 1)(q + 1)(q - 2)(q + 2)(q - 3)(q + 3)(q - 4) \\
 &\quad \left(\Delta_0^8 + \Delta_1^8 + \frac{2q - 1}{9}\Delta_0^9\right)
 \end{aligned}$$

oder wie nebenstehend

Diese Gleichung ist zur Berechnung von y bequemer als jede der Gleichungen 60) und 61) einzeln genommen. Die Multiplikatoren sind sämtlich negativ. Setzen wir wieder voraus, dass kein Partialmultiplikand durch Hinzufügung der Korrektur, d. h. des diese darstellenden Restproduktes sein Zeichen ändert, so bekommt jede Korrektur das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen seines ersten Partialmultiplikanden. Wo aber ein Zeichenwechsel stattfindet, stimmt das Vorzeichen der Korrektur mit demjenigen ihres ersten Partialmultiplikanden überein. Zu Gleichung 64) wurde zu demselben Zwecke ein von Gauss angegebenes umständlicheres Verfahren beschrieben. Statt desselben kann auch dort die obige einfachere Zeichenbestimmung angewandt werden.

§ 14. Die Ausführung der Rechnung wird in einem Formular geschehen, dessen Einrichtung kurz beschrieben werden möge. Die Rechnung beginnt mit der Aufstellung des Dreiecks der Differenzen resp. Differenzteile. Sind es Differenzen, so stellt das Dreieck derselben selbst für diesen Teil der Rechnung das Rechenschema dar. In einer Vertikalreihe wird jede Zahl von der folgenden subtrahiert und die Differenz dorthin geschrieben, wohin sie gehört. Sind es Differenzteile, so folgt auf jede Subtraktion noch eine Division und erst das Resultat der Division wird an die betreffende Stelle geschrieben.

Die Interpolationsformel sei nun beispielsweise

$$y = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5}$$

Die Grössen a sind in den Gleichungen 40), 43), 46) einfache Differenzen, in 60), 61), 64) Produkte aus einfachen Zahlen, können also in jedem Falle leicht gerechnet werden. Die Grössen b

$$\begin{aligned}
 2y &= (y_0 + y_1) + \frac{1}{2q-1}\Delta_3^1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2q-1}\Delta_3^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{2q-1}\Delta_4^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{2q-1}\Delta_3^3 + \frac{1}{5}\frac{1}{2q-1}\Delta_2^4 + \frac{1}{5}\frac{1}{2q-1}\Delta_3^4 + \frac{1}{7}\frac{1}{2q-1}\Delta_2^5 \\
 &+ \frac{1}{7}\frac{1}{2q-1}\Delta_1^6 + \frac{1}{7}\frac{1}{2q-1}\Delta_2^6 + \frac{1}{9}\frac{1}{2q-1}\Delta_1^7 + \frac{1}{9}\frac{1}{2q-1}\Delta_0^8 + \frac{1}{9}\frac{1}{2q-1}\Delta_1^8 + \frac{1}{9}\frac{1}{2q-1}\Delta_0^9
 \end{aligned}$$

gehören entweder zu den schon bestimmten Differenzen oder Differenzteilen oder sie sind aus diesen durch Addition [in Gleichung 64] kommt auch eine kleine Multiplikation vor] zusammengesetzt.

Sind alle diese kleinen Rechnungen ausgeführt, so wird nach folgendem Schema weiter gerechnet:

k_1	k_2	k_3	k_4	b_5
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log k_4$	$\log b_5$
$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$	$\log a_4$	$\log a_5$
$\log a_1 k_1$	$\log a_2 k_2$	$\log a_3 k_3$	$\log a_4 k_4$	$\log a_5 b_5$
$a_1 k_1$	$a_2 k_2$	$a_3 k_3$	$a_4 k_4$	$a_5 b_5$
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
y	k_1	k_2	k_3	k_4
$(= a_1 k_1 + b_0)$	$(= a_2 k_2 + b_1)$	$(= a_3 k_3 + b_2)$	$(= a_4 k_4 + b_3)$	$(= a_5 b_5 + b_4)$

Obige Buchstabenzusammenstellung bildet den oberen Teil des Formulars, während in dem unteren, der ganz in derselben Weise liniert wird, die Rechnung ausgeführt werden soll. An die Stelle eines jeden Buchstabens oder Buchstabenausdrucks kommt die durch denselben repräsentierte Zahl. Die Zahlen a und b werden in das Schema eingetragen. Dann werden die übrigen Zahlen in letzterem in der sich von selbst ergebenden Reihenfolge berechnet. Die Reihenfolge ist nämlich diese: Die Kolonnen werden von rechts nach links und in diesen die Zeilen von oben nach unten gezählt.

Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen bei linearer Änderung des Koordinatensystems.

Von

Prof. Dr. AD. SCHMIDT

in Gotha.

Bei den Anwendungen der Kugelfunktionen auf physikalische Probleme ist in der Regel die Lage des Poles oder Koordinatenursprungs auf der Kugeloberfläche entweder gleichgültig oder — das gilt besonders von geophysikalischen Anwendungen, bei denen meistens der Rotationsaxe der Erde eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt, — von vornherein durch die Natur der Aufgabe gegeben. Mit dem hier-nach erklärlichen Mangel einer von dieser Seite kommenden Anregung hängt es wohl zusammen, dass die Frage der Koordinatentransformation der Kugelfunktionen, wie es scheint, bisher keine Beachtung gefunden hat. Indessen lassen sich doch Fälle denken, in denen im Laufe der Untersuchung eine Polverschiebung notwendig wird, und in denen daher die Aufgabe entsteht, den Einfluss dieser Verschiebung auf die in der Rechnung vorkommenden Kugelfunktionen zu ermitteln. Ein solcher Fall bot sich mir vor einigen Jahren bei Gelegenheit einer erdmagnetischen Untersuchung dar und gab mir Veranlassung, mich mit der bezeichneten Frage zu beschäftigen.* Es gelang mir damals nur, ein rekurrentes Verfahren zur Herstellung der Transformationskoeffizienten zu finden, mit dem ich mich, zumal mir zu längeren Untersuchungen keine Zeit blieb, um so eher begnügen konnte, als ich zu dem augenblicklichen Zwecke nicht einmal der vollständigen Lösung bedurfte. Vor kurzem wurde ich zufällig wieder auf die Frage geführt und gelangte nun zu einer independenten Darstellung jener Koeffizienten, die mir, von ihrer praktischen Verwendbarkeit abgesehen, hinreichendes theoretisches Interesse zu besitzen scheint, um der Veröffentlichung wert zu sein. Um die Aufgabe zu präzisieren, seien zunächst u (Polabstand) und λ (Azimut) die zu einem bestimmten Pole A und der Anfangsrichtung AA' gehörigen

* Die Verteilung des erdmagnetischen Potentials in Bezug auf beliebige Durchmesser der Erde. *Terrestrial Magnetism*, Vol. I, S. 18, 1896.

Polarkoordinaten eines variablen Punktes S auf einer Kugel vom Radius r . Die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten von S sind dann

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u \cos \lambda, \quad z = r \sin u \sin \lambda.$$

Was die nach Heine's Bezeichnung „zugeordneten“ Kugelfunktionen n^{ten} Grades $P_0^n(\cos u)$, $P_1^n(\cos u)$, $P_2^n(\cos u) \dots P_n^n(\cos u)$ betrifft, so treten sie in Reihenentwickelungen stets in den Verbindungen

$$P_m^n(\cos u) \cos m \lambda \quad \text{und} \quad P_m^n(\cos u) \sin m \lambda$$

auf, die ich vorübergehend durch c_m^n und s_m^n bezeichnen will. [Es ist demnach identisch $s_0^n = 0$, $c_0^n = P_0^n(\cos u)$].

In Bezug auf ein zweites System mit dem Pole B und der Anfrangsrichtung BB' habe nun derselbe Punkt S die Polarkoordinaten v , μ und die rechtwinkligen ξ , η , ζ , so dass

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v \cos \mu, \quad \zeta = r \sin v \sin \mu$$

ist. Die den c und s entsprechend gebildeten Grössen sind hier

$$\gamma_m^n = P_m^n(\cos v) \cos m \mu \quad \text{und} \quad \sigma_m^n = P_m^n(\cos v) \sin m \mu.$$

Die zu lösende Aufgabe besteht dann darin, das System der Grössen γ und σ aus demjenigen der c und s abzuleiten.

Die allgemeine Form der Lösung ist leicht anzugeben. Die Transformationsgleichungen sind offenbar linear und ihre Koeffizienten hängen nur von den Bestimmungsstücken ab, die die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme (A) und (B) definieren. Die $(2n+1)$ Funktionen $c_0^n, c_1^n, s_1^n \dots c_n^n, s_n^n$ liefern bekanntlich, mit r^n multipliziert, ein vollständiges System unter einander linear unabhängiger, homogener Funktionen φ des n^{ten} Grades von x, y, z , die der Differentialgleichung $\Delta^2 \varphi = 0$ genügen. Dasselbe gilt von den entsprechend gebildeten Produkten $\gamma_0^n r^n, \gamma_1^n r^n, \dots \sigma_n^n r^n$, die wegen der linearen Beziehung zwischen x, y, z und ξ, η, ζ gleichfalls als homogene Funktionen n^{ten} Grades von x, y, z geschrieben werden können. Jede von diesen muss somit durch die Funktionen der ersten Gruppe, die ja, wie bemerkt, ein vollständiges System ist, linear dargestellt werden können. Es muss, mit anderen Worten, unter Weglassung des gemeinsamen Faktors r^n , ein Gleichungssystem

$$\gamma_p^n = \sum_{m=0}^{m=n} (a'_{mp} c_m^n + a''_{mp} s_m^n),$$

$$\sigma_p^n = \sum_{m=0}^{m=n} (b'_{mp} c_m^n + b''_{mp} s_m^n)$$

bestehen, und es handelt sich darum, die Koeffizienten a', a'', b', b'' , die ausschliesslich von der gegenseitigen Lage der beiden Koordinatensysteme abhängen, zu bestimmen.

Die allgemeinste Transformation, die möglich ist, kann offenbar in zwei Drehungen und eine Polverschiebung längs der dabei als solche beibehaltenen Anfangsrichtung zerlegt werden, so dass es genügt, diese beiden Spezialfälle gesondert zu betrachten.

Der erste Fall erledigt sich ohne jegliche Schwierigkeit. Eine Drehung der Anfangsrichtung AA' um den Pol A wird, wenn der Drehungswinkel α ist, offenbar durch das einfache Gleichungssystem

$$\gamma_p^n = c_p^n \cos p\alpha + s_p^n \sin p\alpha, \quad \sigma_p^n = -c_p^n \sin p\alpha + s_p^n \cos p\alpha$$

ausgedrückt.

Der zweite Fall, der der Verschiebung, bedarf allein der näheren Untersuchung. Auch hier lässt sich von vornherein eine Vereinfachung des zur Transformation dienenden Gleichungssystems angeben. In Bezug auf λ sind sämtliche c gerade, sämtliche s ungerade Functionen, und Entsprechendes gilt von γ und σ in Bezug auf μ . Fallen nun beide Anfangsrichtungen mit der Verbindungslinie der Pole zusammen, so gehen λ und μ zusammen durch Null und daraus folgt, dass die Functionen γ nur von den c , die Functionen σ nur von den s abhängen können. Wir haben demgemäss

$$1) \quad \gamma_p^n = \sum_m a_{mp} c_m^n, \quad \sigma_p^n = \sum_m b_{mp} s_m^n$$

zu schreiben, wobei die Summe ebenso wie stets in der Folge über alle ganzzahligen Werte des Summationsindex von 0 bis n zu bilden ist.

Für die Durchführung der folgenden Rechnung bietet es einige kleine Vorteile, sowohl die Anfangsrichtungen entgegengesetzt zu wählen, also AA' mit AB , BB' mit BA identisch zu setzen (was, streng genommen, neben der Polverschiebung eine Drehung um 180° einschliesst), als auch den positiven Drehungssinn bei λ und μ entgegengesetzt anzunehmen. Es ist leicht, nachträglich die Resultate so abzuändern, dass sie den umgekehrten Festsetzungen entsprechen. (Die Umkehrung des Drehungssinns bei μ bewirkt offenbar nur die Veränderung des Vorzeichens aller σ , diejenige der Richtung von BB' hat dieselbe Folge bei allen γ und σ , deren unterer Index ungerade ist.)

Auf Grund der vorausgehenden Festsetzungen hat man in dem sphärischen Dreieck ASB , wenn noch der Polabstand t genannt wird,

$$AB = t, \quad AS = u, \quad BS = v, \quad BAS = \lambda, \quad ABS = \mu.$$

Die beiden zuletzt genannten Winkel sind dabei entweder zugleich innere oder zugleich äussere Winkel des Dreiecks. Es ist klar, dass die Beziehung zwischen den beiden Systemen hierbei eine gegenseitig symmetrische ist, dass also auch die Gleichungen

$$c_m^n = \sum_p a_{pm} \gamma_p^n, \quad s_m^n = \sum_p b_{pm} \sigma_p^n$$

gelten, in denen dieselben Koeffizienten a und b auftreten, wie in dem zuvor aufgestellten Gleichungssysteme 1).

Es liegt nun nahe, zur Ableitung dieser Koeffizienten a und b und damit der gesuchten Beziehungen von der bekannten, für die Theorie der Kugelfunktionen fundamentalen Gleichung

$$2) \quad \begin{cases} P^n(\cos v) = P^n(\cos t \cos u + \sin t \sin u \cos \lambda) \\ = \sum_{m=0}^{m=n} a_m^n P_m^n(\cos t) P_m^n(\cos u) \cos m \lambda \end{cases}$$

auszugehen und durch wiederholte Differentiation von P^n auf die Funktionen P_p^n überzugehen. Es ist ja

$$P_p^n(\cos v) = \frac{(n-p)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{d^p P^n(\cos v)}{(d \cos v)^p} \sin v^p$$

oder, in rekurrenter Form,

$$3) \quad \begin{cases} P_{p+1}^n(\cos v) = \frac{\sin v^{p+1}}{n-p} \cdot \frac{d[P_p^n(\cos v) \sin v^{-p}]}{d \cos v} \\ = \frac{1}{n-p} \left[-\frac{d P_p^n(\cos v)}{d v} + p \frac{\cos v}{\sin v} P_p^n(\cos v) \right]. \end{cases}$$

Die hier benutzte Bezeichnungweise ist die für praktische Anwendungen zweckmässigere, ältere, die bei Gauss in der Form $P^{n,m}$ erscheint, nicht die von Heine eingeführte, bei der aus theoretischen Gründen in die Funktion P_m^n noch der Faktor i^m aufgenommen ist. Es ist also

$$P_m^n(\cos u) = \sin u^m \left\{ \cos u^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos u^{n-m-2} + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos u^{n-m-4} + \dots \right\},^*$$

während die in 2) auftretenden Konstanten a_m^n durch

* Ich habe vor kurzem an anderer Stelle („Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte“ XXI Nr. 2, S. 5, 1898) darauf hingewiesen, dass sich dieser Ausdruck in die für numerische Rechnungen wesentlich bequemere Form

$$P_m^n(\cos u) = \sin u^m \sin(u + \alpha_1) \sin(u + \alpha_2) \dots \sin(u + \alpha_{n-m})$$

mit

$$\alpha_1 + \alpha_{n-m} = 180^\circ, \quad \alpha_2 + \alpha_{n-m-1} = 180^\circ, \dots$$

und demnach bei ungeradem $n-m$

$$\alpha_{\frac{1}{2}(n-m+1)} = 90^\circ$$

bringen lässt, und ich habe die darin auftretenden konstanten Winkel α dort für die Kugelfunktionen der ersten sieben Ordnungen angegeben. Es rechnet sich wohl, wenn ich diese Zusammenstellung hier, als an leichter zugänglicher Stelle, nochmals mitteile.

$$P_0^2: \alpha_1 = 54^\circ 44' 8'', 1971,$$

$$P_0^3: \alpha_1 = 39^\circ 13' 53'', 4737,$$

$$P_1^3: \alpha_1 = 63^\circ 26' 5'', 8158,$$

$$P_0^4: \alpha_1 = 30^\circ 33' 20'', 1302, \quad P_0^5: \alpha_1 = 25^\circ 1' 2'', 4232,$$

$$\alpha_2 = 70^\circ 7' 27'', 4111, \quad \alpha_2 = 57^\circ 25' 13'', 8042,$$

$$P_1^4: \alpha_1 = 49^\circ 6' 23'', 7792, \quad P_1^5: \alpha_1 = 40^\circ 5' 17'', 1091,$$

$$P_2^4: \alpha_1 = 67^\circ 47' 32'', 4446, \quad \alpha_2 = 73^\circ 25' 38'', 3234,$$

$$a_m^n = \varepsilon_m \frac{|1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)|^2}{(n+m)!(n-m)!}$$

mit $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2$ definiert sind.

Da P^n sich von P_0^n nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet [es ist $P^n(\cos v) = \sqrt{a_0^n} P_0^n(\cos v)$], so gehört die Gleichung 2) selbst bereits dem gesuchten Transformationssysteme an; sie lautet in der vorübergehend eingeführten Bezeichnung

$$4) \quad \sqrt{a_0^n} \gamma_0^n = \sum_m a_m^n P_m^n(\cos t) \cdot c_m^n.$$

Es empfiehlt sich nun noch, eine kleine Abänderung der Bezeichnung vorzunehmen, welche die Faktoren a_m^n mit den Funktionen P vereinigt und dadurch aus den Formeln verschwinden lässt. Ich setze

$$\sqrt{a_m^n} P_m^n(\cos u) \cos m \lambda = C_m^n(u, \lambda),$$

$$\sqrt{a_m^n} P_m^n(\cos u) \sin m \lambda = S_m^n(u, \lambda),$$

so dass also

$$C_m^n(u, \lambda) = \sqrt{a_m^n} c_m^n, \quad S_m^n(u, \lambda) = \sqrt{a_m^n} s_m^n$$

$$C_m^n(v, \mu) = \sqrt{a_m^n} \gamma_m^n, \quad S_m^n(v, \mu) = \sqrt{a_m^n} \sigma_m^n$$

wird, und die Aufgabe die Form annimmt, die Koeffizienten A und B der an die Stelle von 1) tretenden Transformationsgleichungen

$$5) \quad \begin{cases} C_p^n(v, \mu) = \sum_m A_{m,p} C_m^n(u, \lambda), \\ S_p^n(v, \mu) = \sum_m B_{m,p} S_m^n(u, \lambda) \end{cases}$$

zu berechnen.

Die Fundamentalgleichung 4) nimmt nunmehr die Gestalt an

$$6) \quad C_0^n(v, \mu) = \sum_m C_m^n(t, 0) C_m^n(u, \lambda)$$

und statt der Rekursionsformel 3) ist das daraus fließende Formelpaar

$$P_2^5: \alpha_1 = 54^\circ 41' 8'', 1971,$$

$$P_3^5: \alpha_1 = 70^\circ 31' 43'', 6057,$$

$$P_0^6: \alpha_1 = 21^\circ 10' 36'', 8445,$$

$$\alpha_2 = 48^\circ 36' 28'', 1779,$$

$$\alpha_3 = 76^\circ 11' 41'', 7914,$$

$$P_1^6: \alpha_1 = 33^\circ 52' 41'', 7201,$$

$$\alpha_2 = 62^\circ 2' 25'', 4575,$$

$$P_2^6: \alpha_1 = 45^\circ 59' 34'', 7020,$$

$$\alpha_2 = 75^\circ 29' 21'', 0527,$$

$$P_3^6: \alpha_1 = 58^\circ 31' 4'', 2452,$$

$$P_4^6: \alpha_1 = 72^\circ 27' 5'', 7578,$$

$$P_0^7: \alpha_1 = 18^\circ 21' 28'', 2940,$$

$$\alpha_2 = 42^\circ 8' 16'', 7533,$$

$$\alpha_3 = 66^\circ 3' 21'', 2416,$$

$$P_1^7: \alpha_1 = 29^\circ 20' 18'', 6361,$$

$$\alpha_2 = 53^\circ 43' 20'', 0954,$$

$$\alpha_3 = 77^\circ 55' 7'', 3639,$$

$$P_2^7: \alpha_1 = 39^\circ 41' 41'', 9905,$$

$$\alpha_2 = 65^\circ 6' 27'', 5168,$$

$$P_3^7: \alpha_1 = 50^\circ 9' 36'', 9108,$$

$$\alpha_2 = 76^\circ 55' 59'', 3598,$$

$$P_4^7: \alpha_1 = 61^\circ 17' 22'', 1467,$$

$$P_5^7: \alpha_1 = 73^\circ 53' 52'', 3905.$$

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} f_p C_{p+1}^n(v, \mu) &= -\frac{\partial}{\partial v} [\cos \mu C_p^n(v, \mu) - \sin \mu S_p^n(v, \mu)] \\ &\quad + p \frac{\cos v}{\sin v} [\cos \mu C_p^n(v, \mu) - \sin \mu S_p^n(v, \mu)] \\ f_p S_{p+1}^n(v, \mu) &= -\frac{\partial}{\partial v} [\sin \mu C_p^n(v, \mu) + \cos \mu S_p^n(v, \mu)] \\ &\quad + p \frac{\cos v}{\sin v} [\sin \mu C_p^n(v, \mu) + \cos \mu S_p^n(v, \mu)] \end{aligned} \right.$$

mit $f_p = (n - p) \sqrt{\frac{a_p^n}{a_{p+1}^n}}$

zu verwenden, das sich — nebenbei bemerkt — auch auf die Form

$$p f_p C_{p+1}^n(v, \mu) = -\sin v^p \sin \mu^{-p+1} \frac{\partial^2}{\partial v \partial \mu} [\sin v^{-p} \sin \mu^p C_p^n(v, \mu)],$$

$$p f_p S_{p+1}^n(v, \mu) = -\sin v^p \sin \mu^{-p+1} \frac{\partial^2}{\partial v \partial \mu} [\sin v^{-p} \sin \mu^p S_p^n(v, \mu)]$$

bringen lässt, wozu noch die unmittelbar ersichtlichen Identitäten

$$8) \quad \frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\partial \mu} = -p S_p^n(v, \mu), \quad \frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\partial \mu} = p C_p^n(v, \mu)$$

kommen.

Nach diesen Vorbereitungen gelangt man leicht zu Rekursionsformeln für die in 5) auftretenden Koeffizienten $A_{m,p}$ und $B_{m,p}$. Es erweist sich dabei als zweckmässig, t und λ zu unabhängigen Variablen zu machen, u dagegen als konstant zu betrachten. Es ist dann nach den für das sphärische Dreieck geltenden Differentialformeln

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \cos \mu, & \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -\frac{\cos v}{\sin v} \sin \mu, \\ \frac{\partial v}{\sin t \partial \lambda} &= \sin \mu, & \frac{\partial \mu}{\sin t \partial \lambda} &= \frac{\cos v}{\sin v} \cos \mu - \frac{\cos t}{\sin t}. \end{aligned} \right.$$

Bildet man nun mit Berücksichtigung von 8) und 9) die vier möglichen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\partial v} \cos \mu + p S_p^n(v, \mu) \frac{\cos v}{\sin v} \sin \mu,$$

$$\frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\sin t \partial \lambda} = \frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\partial v} \sin \mu - p S_p^n(v, \mu) \left(\frac{\cos v}{\sin v} \cos \mu - \frac{\cos t}{\sin t} \right),$$

$$\frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\partial v} \cos \mu - p C_p^n(v, \mu) \frac{\cos v}{\sin v} \sin \mu$$

$$\frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\sin t \partial \lambda} = \frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\partial v} \sin \mu + p C_p^n(v, \mu) \left(\frac{\cos v}{\sin v} \cos \mu - \frac{\cos t}{\sin t} \right),$$

so lehrt ein Blick auf die Gleichungen 7), dass

und

$$-\frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\sin t \partial \lambda} = f_p C_{p+1}^n(v, \mu) - p \frac{\cos t}{\sin t} C_p^n(v, \mu)$$

$$-\frac{\partial C_p^n(v, \mu)}{\sin t \partial \lambda} - \frac{\partial S_p^n(v, \mu)}{\partial t} = f_p S_{p+1}^n(v, \mu) - p \frac{\cos t}{\sin t} S_p^n(v, \mu)$$

ist. Transformiert man jetzt diese Gleichungen mit Hilfe der Relationen 5), so findet man mit Rücksicht darauf, dass die A und B nur t , die $C_m^n(u, \lambda)$ und $S_m^n(u, \lambda)$ nur λ als Variable enthalten,

$$\begin{cases} -\sum_m \frac{dA_{m,p}}{dt} C_m^n(u, \lambda) + \sum_m \frac{m}{\sin t} B_{m,p} C_m^n(u, \lambda) \\ -\sum_m f_p A_{m,p+1} C_m^n(u, \lambda) + \sum_m p \frac{\cos t}{\sin t} A_{m,p} C_m^n(u, \lambda) = 0, \\ \sum_m \frac{m}{\sin t} A_{m,p} S_m^n(u, \lambda) - \sum_m \frac{dB_{m,p}}{dt} S_m^n(u, \lambda) \\ -\sum_m f_p B_{m,p+1} S_m^n(u, \lambda) + \sum_m p \frac{\cos t}{\sin t} B_{m,p} S_m^n(u, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da sie Aggregate der von einander linear unabhängigen Grössen C_m^n und S_m^n darstellen, deren Koeffizienten in Bezug auf u und λ konstant sind, dass diese Koeffizienten einzeln verschwinden müssen. Es ist also

oder

$$-\frac{dA_{m,p}}{dt} + \frac{m}{\sin t} B_{m,p} - f_p A_{m,p+1} + p \frac{\cos t}{\sin t} A_{m,p} = 0$$

10) $\begin{cases} f_p \sin t A_{m,p+1} = p \cos t A_{m,p} - \sin t \frac{dA_{m,p}}{dt} + m B_{m,p} \\ \text{und ebenso} \\ f_p \sin t B_{m,p+1} = p \cos t B_{m,p} - \sin t \frac{dB_{m,p}}{dt} + m A_{m,p}. \end{cases}$

Diese Gleichungen enthalten die gesuchte Lösung, da $A_{m,0}$ und $B_{m,0}$ bekannt sind. Es ist nämlich 6) zufolge $A_{m,0} = C_m^n(t, 0)$, während mit Rücksicht auf das identische Verschwinden von $S_m^n(v, \mu)$ aus 5) folgt, dass allgemein $B_{m,0} = 0$ ist.

Es bleibt nun noch die Aufgabe zu erledigen, aus der im Vorhergehenden gefundenen, rekurrenten Lösung eine independente abzuleiten. Um die darauf führende Rechnung etwas zu vereinfachen, setze ich

$$A_{m,p} + B_{m,p} = \alpha_p, \quad A_{m,p} - B_{m,p} = \beta_p,$$

wodurch das Gleichungssystem 10) die Gestalt

11) $\begin{cases} f_p \sin t \alpha_{p+1} = p \cos t \alpha_p - \sin t \frac{d\alpha_p}{dt} + m \alpha_p, \\ f_p \sin t \beta_{p+1} = p \cos t \beta_p - \sin t \frac{d\beta_p}{dt} - m \beta_p \end{cases}$

annimmt, und somit α und β getrennt enthält.

Aus der ersten der Gleichungen 11) ergibt sich durch die Substitution von $(1 - \cos t)^m \tau_p$ für α_p und gleichzeitige Division mit $(1 - \cos t)^n$

$$\begin{aligned} f_p \sin t \tau_{p+1} &= p \cos t \tau_p - \sin t \frac{d \tau_p}{d t} - \frac{m \sin t^2}{1 - \cos t} \tau_p + m \tau_p \\ &= (p - m) \cos t \tau_p - \sin t \frac{d \tau_p}{d t}. \end{aligned}$$

Die weitere Substitution $\tau_p = \sin t^{p-m} \vartheta_p$ führt auf

$$f_p \sin t \vartheta_{p+1} = - \frac{d \vartheta_p}{d t} \quad \text{oder} \quad \vartheta_{p+1} = \frac{1}{f_p} \frac{d \vartheta_p}{d \cos t}.$$

Setzt man zur Abkürzung weiterhin $\cos t = c$, $\sin t = s$, so folgt unter Berücksichtigung der in 7) definierten Bedeutung von f_p

$$\begin{aligned} \vartheta_p &= \frac{1}{f_{p-1} \cdot f_{p-2} \dots f_0} \frac{d^p \vartheta_0}{d c^p} \\ &= \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2) \dots n} \sqrt{\frac{a_p^n}{a_0^n}} \frac{d^p \vartheta_0}{d c^p} \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$12) \quad \alpha_p = \frac{(n-p)!}{n!} \sqrt{\frac{a_p^n}{a_0^n}} (1-c)^m s^{p-m} \frac{d^p \vartheta_0}{d c^p}.$$

Da hiernach $\alpha_0 = (1-c)^m s^{-m} \vartheta_0 = (1+c)^{-m} s^m \vartheta_0$ ist, während andererseits aus 5) und 6), da $B_{m,0}$ verschwindet,

$$\alpha_0 = A_{m,0} = C_m^n(t, 0) = \sqrt{\frac{a_m^n}{a_0^n}} P_m^n(c)$$

folgt, so ergibt sich

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{a_m^n}{a_0^n}} (1+c)^m s^{-m} P_m^n(c),$$

wofür zufolge der in etwas anderer Form bereits angeführten Beziehung

$$P_m^n(c) = \frac{(n-m)!}{n!} \sqrt{\frac{1}{a_0^n}} \frac{d^m P^n(c)}{d c^m} s^m$$

auch

$$\vartheta_0 = \frac{(n-m)!}{n!} \sqrt{\frac{a_m^n}{a_0^n}} (1+c)^m \frac{d^m P^n(c)}{d c^m}$$

geschrieben werden kann. Mit Rücksicht hierauf geht 12) in

$$13) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_p &= \frac{(n-m)!(n-p)!}{n!n!} \sqrt{\frac{a_m^n a_p^n}{a_0^n a_0^n}} (1-c)^m s^{p-m} \frac{d^p}{d c^p} \left[(1+c)^m \frac{d^m P^n(c)}{d c^m} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_p}{(n+m)!(n+p)!}} (1+c)^{-m} s^{m+p} \frac{d^p}{d c^p} \left[(1+c)^m \frac{d^m P^n(c)}{d c^m} \right] \end{aligned} \right.$$

über. Da allgemein, wie man sich leicht überzeugt,

$$x^p \frac{d^p}{d x^p} \left[x^m \frac{d^m y}{d x^m} \right] = x^m \frac{d^m}{d x^m} \left[x^p \frac{d^p y}{d x^p} \right]$$

ist, so ersieht man aus der Form von 13) ohne weiteres, dass α_p in Bezug auf m und p symmetrisch ist.

In ganz entsprechender Weise würde man aus der zweiten der Gleichungen 11) die Funktion β_p finden. Offenbar genügt es aber, in α_p das Vorzeichen von m , soweit diese Grösse als Exponent auftritt, umzukehren, wobei nur zu beachten ist, dass in der zu differenzierenden Klammergrösse $(1+c)^m s^{-m}$ [als Faktor des unverändert bleibenden $P_m^n(c)$] dieser Umwandlung unterliegt. Oder man kann auch, indem man bedenkt, dass $\alpha_0 = \beta_0$ und mit c^{n-m} übereinstimmend eine gerade oder ungerade Funktion von c ist, β_p aus $(-1)^{n-m-p} \alpha_p$ durch die Verwandlung von c in $-c$ erhalten, wie ein Blick auf 11) zeigt. So erhält man

$$14) \quad \beta_p = \sqrt{\epsilon_m \epsilon_p \frac{(n-m)!(n-p)!}{(n+m)!(n+p)!}} (1+c)^m s^{p-m} \frac{d^p}{dc^p} \left[(1-c)^m \frac{d^m P^n(c)}{dc^m} \right].$$

Die Gleichungen 13) und 14) enthalten, zusammen mit

$$A_{m,p} = \frac{1}{2}(\alpha_p + \beta_p), \quad B_{m,p} = \frac{1}{2}(\alpha_p - \beta_p),$$

die independente Lösung des Problems.

Aus der Symmetrie von α und β in Bezug auf m und p folgt sofort

$$15) \quad A_{m,p} = A_{p,m}, \quad B_{m,p} = B_{p,m}$$

Die Determinanten der Transformationsgleichungen 5) sind somit symmetrisch, eine Eigenschaft, die man übrigens, auch ohne die Lösungen wirklich zu bilden, leicht einsehen kann. (In Bezug auf das System der $A_{m,p}$ habe ich in der zu Anfang zitierten Arbeit einen einfachen Beweis dafür gegeben.)

Dass $A_{m,p}$ und $B_{m,p}$ verschwinden, wenn einer der Indices grösser als n wird, geht aus der Natur der Aufgabe hervor, ist aber auch aus der Form der Lösung ohne weiteres zu erkennen, wenn man beachtet, dass $(1 \pm c)^m \frac{d^m P^n(c)}{dc^m}$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von c ist.

Aus der vorher angegebenen, zwischen den α und β bestehenden Beziehung ergibt sich, dass zwei zusammengehörige unter diesen Funktionen von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= s^v (g_1 c^{n-v} + g_2 c^{n-v-1} + g_3 c^{n-v-2} + \dots) \\ \beta_p &= s^v (g_1 c^{n-v} - g_2 c^{n-v-1} + g_3 c^{n-v-2} - \dots) \end{aligned}$$

sind. Demgemäss sind die Koeffizienten $A_{m,p}$ und $B_{m,p}$ von der Gestalt

$$\begin{aligned} A_{m,p} &= s^v (g_1 c^{n-v} + g_3 c^{n-v-2} + \dots) \\ B_{m,p} &= s^v (g_2 c^{n-v-1} + g_4 c^{n-v-3} + \dots). \end{aligned}$$

Die ersteren sind demnach vom n^{ten} , die letzteren vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in c und s — jene können durch die Kugelfunktionen $P_k^n(\cos t)$, diese durch $P_k^{n-1}(\cos t)$ ausgedrückt werden.

Die Determinante der Substitution ist mit Rücksicht auf die über den Drehungssinn getroffenen Festsetzungen negativ und zwar hat sie den Wert -1 . In dem behandelten, etwas spezialisierten Falle zerfällt sie in das Produkt aus der Determinante der A und derjenigen der B , die die Werte $(-1)^n$ und $(-1)^{n-1}$ haben. Man gelangt leicht zu diesen Ergebnissen, wenn man die Quadrate und Produkte zu je zweien der in 5) auftretenden Ausdrücke über die ganze Kugelfläche integriert unter Beachtung der Relationen

$$\int C_m^n C_m^n d\omega = \frac{4\pi}{2n+1}; \quad \int S_m^n S_m^n d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (m > 0);$$

$$\int C_m^n C_p^n d\omega = 0, \quad \int S_m^n S_p^n d\omega = 0 \quad (m \geq p);$$

$$\int C_m^n S_p^n d\omega = 0 \quad (m \geq p).$$

Man erhält dann die charakteristischen Gleichungen der orthogonalen Substitution, aus denen sich die obigen Behauptungen ergeben. Nur die Feststellung, welche der beiden Determinanten (A) und (B) negativ, welche positiv sei, erfordert noch eine besondere Überlegung.

Alle diese Resultate gelten, da sie sich ausschliesslich auf Identitäten zwischen ganzen Funktionen beziehen, allgemein, wenn schon sie nur in geometrischer Einkleidung unter Annahme reeller Werte der Variablen abgeleitet worden sind.

Ich stelle zum Schlusse die Formeln zusammen, die sich aus den gewonnenen Resultaten in den wichtigsten und einfachsten Fällen — bei den Kugelfunktionen der vier ersten Ordnungen — ergeben.

$$n = 1.$$

$$A_{0,0} = c \quad A_{1,0} = s$$

$$A_{1,1} = -c$$

$$B_{1,1} = 1$$

$$n = 2.$$

$$A_{0,0} = \frac{1}{2}(3c^2 - 1) \quad A_{1,0} = \sqrt{3}cs \quad A_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{3}s^2$$

$$A_{1,1} = -(2c^2 - 1) \quad A_{2,1} = -cs$$

$$A_{2,2} = \frac{1}{2}(c^2 + 1)$$

$$B_{1,1} = c$$

$$B_{2,1} = s$$

$$B_{2,2} = -c$$

$n = 3.$

$$\begin{array}{lll}
 A_{0,0} = \frac{1}{2}(5c^3 - 3c) & A_{1,0} = \frac{1}{4}\sqrt{6s}(5c^2 - 1) & A_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{15s^2}c \\
 A_{1,1} = -\frac{1}{4}(15c^3 - 11c) & A_{2,1} = -\frac{1}{4}\sqrt{10s}(3c^2 - 1) & A_{3,0} = \frac{1}{4}\sqrt{10s^3} \\
 & A_{2,2} = \frac{1}{2}(3c^3 - c) & A_{3,1} = -\frac{1}{4}\sqrt{15s^2}c \\
 & & A_{3,2} = \frac{1}{4}\sqrt{6s}(c^2 + 1) \\
 & & A_{3,3} = -\frac{1}{4}(c^3 + 3c) \\
 B_{1,1} = \frac{1}{4}(5c^2 - 1) & B_{2,1} = \frac{1}{2}\sqrt{10sc} & B_{3,1} = \frac{1}{4}\sqrt{15s^2} \\
 B_{2,2} = -(2c^2 - 1) & B_{3,2} = -\frac{1}{2}\sqrt{6cs} & B_{3,3} = \frac{1}{4}(3c^2 + 1)
 \end{array}$$

$n = 4.$

$$\begin{aligned}
 A_{1,0} &= \frac{1}{8}(35c^4 - 30c^2 + 3) & A_{1,1} &= -\frac{1}{4}\sqrt{10}s(7c^3 - 3c) & A_{2,0} &= \frac{1}{4}\sqrt{5}s^2(7c^2 - 1) & A_{3,0} &= \frac{1}{4}\sqrt{70}s^3c & A_{4,0} &= \frac{1}{8}\sqrt{35}s^4 \\
 & & A_{2,1} &= -\frac{1}{4}(28c^4 - 27c^2 + 3) & A_{2,2} &= \frac{1}{2}(7c^4 - 6c^2 + 1) & A_{3,1} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}s(7c^3 - 4c) & A_{3,2} &= \frac{1}{4}\sqrt{14}s^2c \\
 & & & & & & A_{3,3} &= -\frac{1}{4}(4c^4 + 3c^2 - 3) & A_{4,1} &= -\frac{1}{4}\sqrt{7}(4c^2 - 1) \\
 & & & & & & & & A_{4,2} &= \frac{1}{4}\sqrt{7}s^2(c^2 + 1) \\
 & & & & & & & & A_{4,3} &= -\frac{1}{4}\sqrt{2}s(c^3 + 3c) \\
 & & & & & & & & A_{4,4} &= \frac{1}{8}(c^4 + 6c^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{1,1} &= \frac{1}{4}(7c^3 - 3c) & B_{2,1} &= \frac{1}{4}\sqrt{2}s(7c^2 - 1) & B_{3,1} &= \frac{3}{4}\sqrt{7}s^2c & B_{4,1} &= \frac{1}{4}\sqrt{14}s^3 \\
 B_{2,2} &= -\frac{1}{2}(7c^3 - 5c) & B_{3,2} &= -\frac{1}{4}\sqrt{14}(3c^2 - 1) & B_{4,2} &= -\frac{1}{2}\sqrt{7}s^2c \\
 B_{3,3} &= \frac{1}{4}(9c^3 - 5c) & B_{4,3} &= \frac{1}{4}\sqrt{2}s(3c^2 + 1) & B_{4,4} &= -\frac{1}{2}(c^3 + c).
 \end{aligned}$$

Die Formeln sind in der Gestalt angesetzt, in der sie sich aus den allgemeinen Gleichungen ergeben; es scheint nicht, dass durch irgend welche Umformungen, die natürlich in grosser Mannigfaltigkeit möglich sind, eine wesentliche Vereinfachung der Ausdrücke erzielt werden könnte.

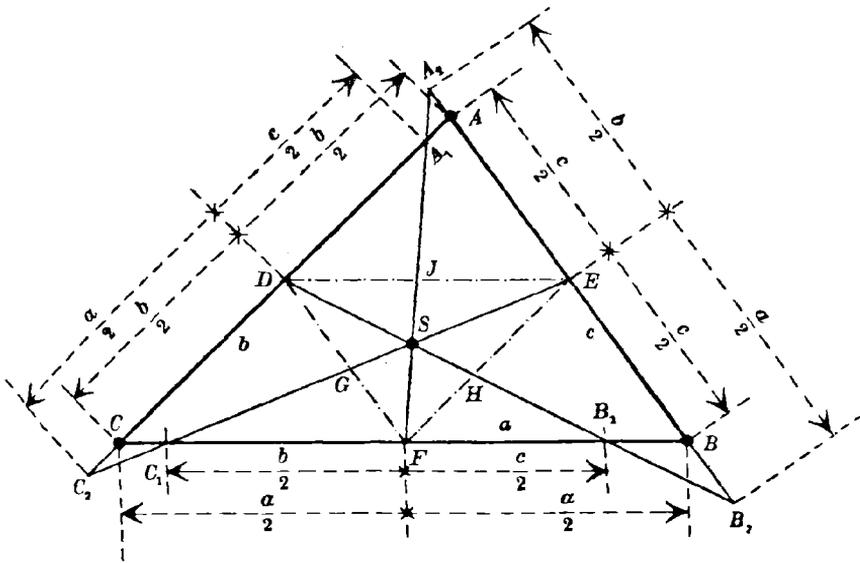
Neue Konstruktion für den Umfangs-Schwerpunkt eines Dreiecks.

Von Ingenieur **L. Geusen** in Dortmund.

Trägt man in einem Dreieck von den Mitten der Seiten die Hälften der benachbarten Seiten ab und verbindet die so erhaltenen Punkte mit den Mitten der gegenüberliegenden Dreieckseiten, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte, dem Schwerpunkte des Dreieckumfangs.

Beweis. Man mache in $\triangle ABC$ die Strecken

$$FC_1 = \frac{b}{2}, \quad FB_1 = \frac{c}{2}, \quad DA_1 = \frac{c}{2}$$



und ziehe EC_1 , DB_1 und FA_1 . Diese drei Geraden schneiden die Seiten des $\triangle DEF$ in den Punkten G , H und J . Dann ist

$$FG = \frac{c}{2} \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{bc}{2(a+b)},$$

folglich

$$DG = \frac{c}{2} - FG = \frac{ac}{2(a+b)} = \frac{c}{2} \cdot \frac{C_2D}{C_2A},$$

folglich

$$C_2D = \frac{a}{2};$$

ferner

$$\frac{FG}{GD} = \frac{b}{a}.$$

Ebenso wird

$$\frac{DJ}{JE} = \frac{c}{b}$$

und

$$\frac{EH}{HF} = \frac{a}{c},$$

woraus folgt

$$\frac{FG}{GD} \cdot \frac{DJ}{JE} \cdot \frac{EH}{FH} = 1,$$

folglich schneiden sich die betrachteten drei Transversalen nach dem Satz des Ceva in einem Punkte S .

Da nun $CC_1 = CC_2$, so ist

$$\sphericalangle CC_2C_1 = \sphericalangle CC_1C_2.$$

Da aber

$$\sphericalangle CC_2C_1 = \sphericalangle GEF \quad \text{und} \quad \sphericalangle CC_1C_2 = \sphericalangle DEG$$

ist, so folgt

$$\sphericalangle GEF = \sphericalangle DEG,$$

d. h. die betrachteten drei Geraden sind für das $\triangle DEF$ auch Winkelhalbierende, ihr Schnittpunkt S ist also der Mittelpunkt des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises, und dieser ist bekanntlich der Schwerpunkt des Dreiecksumfangs.

Erweiterungen des Faktoriellensatzes.

Von Prof. Dr. Louis **Saalschütz** in **Königsberg** i. Pr.

Unter ähnlichem Titel habe ich in dieser Zeitschrift* eine Summationsformel, die Gleichung $A_{(n)}$ vorliegenden Artikels, aufgestellt und Beispiele dazu gegeben. Später ist von Herrn L. Schendel** gezeigt worden, dass dieselbe ein sehr spezieller Fall einer aus dem Lagrangeschen Theorem ableitbaren Formel ist. Dennoch gestatte ich mir noch einmal auf den Gegenstand zurückzukommen, um noch eine ähnliche Gleichung hinzuzufügen und sehr kurze elementare Beweise beider Summationsformeln zu geben.

Ausserdem ist es mir gelungen, im zweiten Teile vorliegender kleiner Arbeit eine wichtige Anwendung dieser Formeln, nämlich die aus ihnen sich ergebende Reduzierbarkeit gewisser Reihen auf einfachere, darzulegen.

I.

Die erste Summationsformel nennen wir $A_{(n)}$ und ihre linke Seite $f(\mu, \nu, n)$, die zweite $B_{(n)}$ und deren linke Seite $\varphi(\mu, \nu, n)$; darin bezeichnen n eine positive ganze, μ, ν, γ beliebige Zahlen, und sie lauten:

* Diese Zeitschrift 32. Jahrg. (1887) S. 250.

** Diese Zeitschrift 36. Jahrg. (1891) S. 60.

$$\begin{aligned}
 A_{(n)} \dots f(\mu, \nu, n) &\equiv \mu(\mu + 1 + n\gamma)(\mu + 2 + n\gamma) \dots (\mu + n - 1 + n\gamma) \\
 &+ (n)_1 \mu(\mu + 1 + \overline{n-1}\gamma) \dots (\mu + n - 2 + \overline{n-1}\gamma) \nu \\
 &+ (n)_2 \mu(\mu + 1 + \overline{n-2}\gamma) \dots (\mu + n - 3 + \overline{n-2}\gamma) \nu(\nu + 1 + 2\gamma) \\
 &+ (n)_3 \mu(\mu + 1 + \overline{n-3}\gamma) \dots (\mu + n - 4 + \overline{n-3}\gamma) \nu(\nu + 1 + 3\gamma)(\nu + 2 + 3\gamma) \\
 &+ \dots \\
 &+ (n)_{n-1} \mu \nu (\nu + 1 + \overline{n-1}\gamma) \dots (\nu + n - 2 + \overline{n-1}\gamma) \\
 &+ (n)_n \nu(\nu + 1 + n\gamma)(\nu + 2 + n\gamma) \dots (\nu + n - 1 + n\gamma) \\
 &= (\mu + \nu)(\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma); \\
 B_{(n)} \dots \varphi(\mu, \nu, n) &\equiv (\mu + n\gamma)(\mu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + n - 1 + n\gamma) \\
 &+ (n)_1 (\mu + \overline{n-1}\gamma) \dots (\mu + n - 2 + \overline{n-1}\gamma) \nu \\
 &+ (n)_2 (\mu + \overline{n-2}\gamma) \dots (\mu + n - 3 + \overline{n-2}\gamma) \nu(\nu + 1 + 2\gamma) \\
 &+ \dots \\
 &+ (n)_{n-1} (\mu + \gamma) \nu(\nu + 1 + \overline{n-1}\gamma) \dots (\nu + n - 2 + \overline{n-1}\gamma) \\
 &+ (n)_n \nu(\nu + 1 + n\gamma) \dots (\nu + n - 1 + n\gamma) \\
 &= (\mu + \nu + n\gamma)(\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma).
 \end{aligned}$$

Dann ist also:

$$A_{(1)} \dots \mu + \nu = (\mu + \nu),$$

$$B_{(1)} \dots (\mu + \gamma) + \nu = (\mu + \nu + \gamma),$$

welche Gleichungen evident sind.

Und nun beweisen wir, wenn $C_{(n)}$ eine Gleichung bedeutet, die aus $B_{(n)}$ durch Vertauschung von μ und ν hervorgeht, $A_{(n)}$ mittelst $B_{(n-1)}$ und $C_{(n-1)}$, $B_{(n)}$ mittelst $A_{(n)}$ und $B_{(n-1)}$.

Beweis von $A_{(n)}$. Zerlegt man $(n)_k$ in $(n-1)_k$ und $(n-1)_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) und setzt zuerst $\mu + 1 + \gamma = \mu'$, und nachher $\nu + 1 + \gamma = \nu'$, so ergibt sich:

$$f(\mu, \nu, n) = \mu \varphi(\mu', \nu, n-1) + \nu \varphi(\nu', \mu, n-1).$$

Nach $B_{(n-1)}$ und $C_{(n-1)}$ ist aber:

$$\varphi(\mu', \nu, n-1) = \varphi(\nu', \mu, n-1) = (\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma)$$

also
$$f(\mu, \nu, n) = (\mu + \nu)(\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma).$$

Beweis von $B_{(n)}$. Teilt man jeden der Anfangsfaktoren in $\varphi(\mu, \nu, n)$, nämlich:

$$\mu + n\gamma, \quad \mu + (n-1)\gamma, \quad \mu + (n-2)\gamma, \dots, \mu + \gamma$$

in seine beiden Summanden und sammelt die Glieder, die in μ , sowie diejenigen, die in γ multipliziert sind, so erhält man mit Benutzung von

$$({}_n)_k(n-k) = n(n-1)_k$$

die Gleichung

$$\varphi(\mu, \nu, n) = f(\mu, \nu, n) + n\gamma\varphi(\mu', \nu, n-1),$$

worin μ' die obige Bedeutung hat. Nun ist

$$f(\mu, \nu, n) = (\mu + \nu) \times (\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma)$$

$$\varphi(\mu', \nu, n-1) = (\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma),$$

also wird

$$\varphi(\mu, \nu, n) = (\mu + \nu + n\gamma)(\mu + \nu + 1 + n\gamma) \dots (\mu + \nu + n - 1 + n\gamma).$$

Somit sind beide Gleichungen bewiesen.

II.

Die beiden Sätze $A_{(n)}$ und $B_{(n)}$ führen zur Auswertung von Potenzreihen mittelst anderer, welche ein Argument weniger besitzen, und unter Umständen in geschlossener Form. Bezüglich des ersten Satzes verweise ich auf meinen zu Anfang erwähnten Artikel und den darin zitierten Aufsatz des Herrn Schlömilch. Hier knüpfen wir unsere Betrachtungen an den zweiten Satz an.

Bezeichnen wir mit $f_k(\mu)$ und $\varphi_k(\mu)$ folgende Ausdrücke:

$$1) \quad f_k(\mu) = \frac{(\mu + k\gamma)(\mu + 1 + k\gamma) \dots (\mu + k - 1 + k\gamma)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

$$2) \quad \varphi_k(\mu) = \frac{\mu(\mu + 1 + k\gamma) \dots (\mu + k - 1 + k\gamma)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

$$f_0(\mu) = \varphi_0(\mu) = 1, \quad f_1(\mu) = \mu + \gamma, \quad \varphi_1(\mu) = \mu,$$

so lautet Satz $B_{(n)}$ nach Division beider Seiten durch n :

$$3) \quad \sum_{k=0}^n f_{n-k}(\mu)\varphi_k(\nu) = f_n(\mu + \nu);$$

die rechte Seite ist also symmetrisch für μ und ν , während man dies der linken Seite nicht ansieht.

Sei nun

$$4) \quad F(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mu)x^n,$$

$$5) \quad \Phi(x, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\nu)x^n,$$

so ist mit Benutzung von 3):

$$F(x, \mu)\Phi(x, \nu) = 1 + \{f_1(\mu) + \varphi_1(\nu)\}x + \dots + \left\{ \sum_{k=0}^n f_{n-k}(\mu)\varphi_k(\nu) \right\} x^n + \dots$$

d. i.:

$$= 1 + f_1(\mu + \nu)x + \dots + f_n(\mu + \nu)x^n + \dots$$

$$6) \quad F(x, \mu)\Phi(x, \nu) = F(x, \mu + \nu)$$

ebenso ist aber auch:

$$7) \quad F(x, \nu) \Phi(x, \mu) = F(x, \mu + \nu),$$

daher:

$$8) \quad \frac{F(x, \mu)}{\Phi(x, \mu)} = \frac{F(x, \nu)}{\Phi(x, \nu)},$$

also gleich einer Funktion von x , die unabhängig von μ (und ν) ist. Sei sie $\psi(x)$; setzen wir dann

$$9) \quad \Phi(x, \nu) = \frac{F(x, \nu)}{\psi(x)}$$

in Gleichung 6) ein, so wird dieselbe

$$10) \quad F(x, \mu) F(x, \nu) = \psi(x) F(x, \mu + \nu).$$

Wir bezeichnen nun zur Abkürzung, indem wir x zunächst als unveränderlichen Parameter ansehen,

$$F(x, \mu) \text{ als } f(\mu), \quad F(x, \nu) \text{ als } f(\nu), \quad \psi(x) \text{ als } C,$$

d. i. als Konstante bezüglich μ und ν . Dann ist nach 10):

$$11) \quad f(\mu) f(\nu) = C f(\mu + \nu);$$

setzen wir hierin $\nu = 0$, so ergibt sich:

$$12) \quad f(0) = C;$$

setzen wir ferner $\nu = \mu, 2\mu, 3\mu, \dots (n-1)\mu$,

so giebt die Multiplikation aller Gleichungen

$$13) \quad [f(\mu)]^n = C^{n-1} f(n\mu).$$

Die Substitution des Wertes $\nu = -\mu$ in 11) liefert mit Rücksicht auf 12):

$$f(\mu) f(-\mu) = C^2,$$

$$f(-\mu) = C^2 [f(\mu)]^{-1},$$

folglich, wenn diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhoben und andererseits in 13) $-\mu$ statt μ geschrieben wird:

$$[f(-\mu)]^n = C^{2n} [f(\mu)]^{-n} = C^{n-1} f(-n\mu),$$

also:

$$[f(\mu)]^{-n} = C^{-n-1} f(-n\mu),$$

die Gleichung 13) gilt folglich für positive und negative ganzzahlige n ; man kann nun ebenso wie Cauchy es bei der einfacheren Funktionalgleichung

$$f(\mu) f(\nu) = f(\mu + \nu)$$

ausführt, nachweisen, dass sie für einen beliebigen Wert von n in Geltung bleibt, dass also für beliebiges α die Gleichung

$$[f(\mu)]^\alpha = C^{\alpha-1} f(\alpha\mu)$$

besteht. Nehmen wir hierin $\mu = 1$ an, so folgt

$$f(\alpha) = C \left(\frac{f(1)}{C} \right)^\alpha;$$

hierin ist $\frac{f(1)}{C}$ wieder eine Konstante, etwa A , und es ist also, wenn μ statt α geschrieben wird

$$14) \quad f(\mu) = CA^\mu.$$

Hierin wird, wie C , so auch A eine Funktion von x , etwa $\Theta(x)$ sein, und die Substitution hiervon, wie von $f(\mu)$ und C in 14) lässt die Gleichung

$$15) \quad F(x, \mu) = \psi(x) [\Theta(x)]^\mu$$

entstehen. Die unbekanntenen Funktionen auf der rechten Seite ergeben sich durch Spezialwerte von μ , am einfachsten $\mu = 0$ und $\mu = 1$:

$$16) \quad \begin{cases} F(x, 0) = \psi(x) \\ F(x, 1) = \psi(x) \Theta(x) \end{cases}$$

woraus

$$17) \quad \Theta(x) = \frac{F(x, 1)}{F(x, 0)}$$

und zwar bedeuten dabei $F(x, 0)$ und $F(x, 1)$ die Reihen:

$$18) \quad \begin{cases} F(x, 0) = 1 + \frac{\gamma}{1}x + \frac{2\gamma(2\gamma+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{3\gamma(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ F(x, 1) = 1 + \frac{(\gamma+1)}{1}x + \frac{(2\gamma+1)(2\gamma+2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(3\gamma+1)(3\gamma+2)(3\gamma+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ \quad = \frac{1+\gamma}{\gamma}F(x, 0) - \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

Mit Hilfe derselben wird nun nach 15) in verschiedenen Formen:

$$19) \quad \begin{cases} F(x, \mu) = F(x, 0)[\Theta(x)]^\mu = F(x, 1)[\Theta(x)]^{\mu-1} \\ \quad = [F(x, 0)]^{1-\mu}[F(x, 1)]^\mu. \end{cases}$$

Vermöge 9) und 16) folgt dann hieraus:

$$20) \quad \Phi(x, \mu) = [\Theta(x)]^\mu = \left(\frac{F(x, 1)}{F(x, 0)} \right)^\mu,$$

sodass also zwischen den beiden Funktionen $F(x, \mu)$ und $\Phi(x, \mu)$ ein einfacher Zusammenhang hergestellt ist.

Auch folgt hieraus $\Theta(x)$ und dann mittels 18) auch $[F(x, 0)]^{-1}$ als Reihe, nämlich:

$$\Theta(x) = 1 + x + \frac{1+\gamma}{1}x^2 + \frac{1+\gamma}{1} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2+k\gamma)(3+k\gamma)\dots(k-1+k\gamma)}{2 \cdot 3 \dots (k-1)} x^k,$$

$$[F(x, 0)]^{-1} = 1 + \gamma - \gamma \Theta(x).$$

Beispiele.

Für $\gamma = 1$ wird

$$f_n(\mu) = (\mu + 2n - 1)_n, \quad F(x, 0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + (1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

$$F(x, 1) = (1 - 4x)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei die bekannte identische Gleichung

$$m(m+1) \dots (2m-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) \cdot 2^{m-1}$$

benutzt wurde, und daraus

$$\Theta(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

somit nach der zweiten Form in 19):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \right)^{\mu-1} = \sqrt{1 - 4x} \\ & \left\{ 1 + \frac{\mu+1}{1}x + \frac{(\mu+2)(\mu+3)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder auch mit $\mu = -1$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} \right)^{\lambda+1} = \sqrt{1-4x} \\ & \left\{ 1 + \frac{1-\lambda}{1}x + \frac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

und nach 20):

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu+3)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Für $\gamma = -\frac{1}{2}$ erhält man

$$F(x, 0) = 1 - \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x, 1) = 1 + \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Theta(x) = \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2} \right)^2,$$

$$F(x, \mu) = \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2} \right\}^{2\mu-1},$$

$$\Phi(x, \mu) = \left\{ \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2} \right\}^{2\mu}$$

und hierdurch mit

$$x = 2y, \quad \text{und} \quad 2\mu - 1 = \lambda, \quad \text{bez.} \quad 2\mu = \lambda:$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \sqrt{1 + y^2} + y \right\}^{\lambda} = \sqrt{1 + y^2} \\ & \left\{ 1 + \frac{\lambda}{1}y + \frac{\lambda^2-1}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{\lambda(\lambda^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \frac{(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}y^4 + \dots \right\}, \\ & \left\{ \left(\sqrt{1 + y^2} + y \right)^2 - 1 + \frac{\lambda}{1}y + \frac{\lambda^2}{2!}y^2 + \frac{\lambda(\lambda^2-1^2)}{3!}y^3 + \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)}{4!}y^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2)}{5!}y^5 + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sind übrigens entweder bekannt oder aus bekannten leicht abzuleiten. Hingegen dürfte folgende Entwicklung für $\gamma = -\frac{1}{3}$, deren Herleitung einiger Aufmerksamkeit bedarf und dem Leser überlassen bleibe, neu sein.

Setzen wir zur Abkürzung

$$R = \sqrt{1 + \frac{4x^3}{27}},$$

so ist:

$$F(x, 0) = 1 - \frac{x}{3R} \left\{ \sqrt[3]{\frac{R+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{R-1}{2}} \right\},$$

$$F(x, 1) = 1 + \frac{2x}{3R} \left\{ \sqrt[3]{\frac{R+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{R-1}{2}} \right\},$$

$$\left\{ \begin{aligned} F(x, \mu) &= [F(x, 0)]^{1-\mu} [F(x, 1)]^\mu \\ &= 1 + \frac{3\mu-1}{1} \frac{x}{3} + \frac{(3\mu-2)(3\mu+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{(3\mu-3)3\mu(3\mu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{(3\mu-4)(3\mu-1)(3\mu+2)(3\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \dots \\ \Phi(x, \mu) &= \left(\frac{F(x, 1)}{F(x, 0)}\right)^\mu = 1 + \frac{3\mu}{1} \frac{x}{3} + \frac{3\mu(3\mu+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{3\mu \cdot 3\mu \cdot (3\mu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{3\mu(3\mu-1)(3\mu+2)(3\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

Fügen wir zu den Argumenten in 1) noch γ hinzu, setzen also

$$f_k(\mu, \gamma) = \frac{(\mu+k\gamma)(\mu+1+k\gamma)\dots(\mu+k-1+k\gamma)}{k!},$$

so giebt es eine leichte Reduktion bezüglich des Argumentes γ auf ein anderes γ_1 , wenn

$$\gamma + \gamma_1 = -1$$

ist, es ist nämlich:

$$f_k(\mu, \gamma) = (-1)^k f_k(1-\mu, \gamma_1).$$

Somit lässt sich $F(x, \mu)$ für die Werte:

$$\gamma = 1, \quad 0, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -1, \quad -2$$

in geschlossener Form darstellen. Für welche anderen Werte von γ dies noch möglich, die Reihe $F(x, 0)$ [Gleichung 18]) also summierbar ist, bleibt zu untersuchen.

On a functional equation treated by Abel.

By P. Hayashi, Tōkyō (Japan).

In his memoir*, Abel investigated the nature of the function $f(x, y)$ for which the expression

$$f[z, f(x, y)]$$

is a symmetrical function of the three independent variables x, y and z , and arrived at an elegant result, that for such a function $f(x, y)$, there exists a function $\psi(u)$ which satisfies the equation:

$$1) \quad \psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y),$$

where ψ may have any arbitrary form. So in order that the expression

$$f[z, f(x, y)]$$

is a symmetrical function of x, y, z , the function $f(x, y)$ must have the form

* „Untersuchung der Funktionen zweier unabhängig veränderlicher Grössen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Funktion von z, x und y ist.“ (Crelles Journal, Bd. I, S. 11—15, 1826. Oeuvres complètes, I. Ausg., S. 1—4, II. Ausg., S. 61—65.)

2) $f(x, y) = \psi_1[\psi(x) + \psi(y)]$

where ψ_1 is an inverse function of ψ , so that

3) $\psi\psi_1(u) = u.$

The demonstration for this theorem, however, has some objections in strictness, as Prof. Dr. P. Stäckel has remarked in this Zeitschrift, Bd. 42, under the subject „über eine von Abel untersuchte Funktionalgleichung.“*

I will generalize in this paper the result at which Abel arrived.

Take a function f of n independent variables x, y, z, \dots , and form the expression

4) $f[s, t, u, \dots, f(x, y, z, \dots)]$

where s, t, u, \dots are another $n - 1$ independent variables, and let me investigate what form must have the function f , in order that this last expression is a symmetrical function of all the variables $x, y, z, \dots, s, t, u \dots$

On account of the property, that the value of the expression 7) does not vary by the interchange of any two variables, we obtain $(2n - 1)! - 1$ conditional equations. Among these, choose the following n equations

5)
$$\begin{cases} f[s, t, u, \dots, f(x, y, z, \dots)] = f[y, z, \dots, f(x, s, t, u, \dots)], \\ f[s, t, u, \dots, f(x, y, z, \dots)] = f[x, z, \dots, f(y, s, t, u, \dots)], \\ f[s, t, u, \dots, f(x, y, z, \dots)] = f[x, y, \dots, f(z, s, t, u, \dots)], \\ \dots \end{cases}$$

Put, for simplicity,

6)
$$\begin{cases} f(x, y, z, \dots) = A \\ f(x, s, t, u, \dots) = B \\ f(y, s, t, u, \dots) = C \\ f(z, s, t, u, \dots) = D \\ \dots \end{cases}$$

Differentiating 5) with respect to x, y, z , respectively \dots , we get

7)
$$\begin{cases} \frac{\partial f(s, t, u, \dots, A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, \dots, B)}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial f(s, t, u, \dots, A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial f(x, z, \dots, C)}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial f(s, t, u, \dots, A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial f(x, y, \dots, D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z}, \\ \dots \end{cases}$$

* It must be remarked that the Editors of Abels Works have changed in the two equations treated by Abel $f(z, y)$ into $f(y, z)$, so that the two equations used by Professor Stäckel are identic with the equations 3) which Abel treated in the Crelles Journal Bd. I, S. 11.

Again equating the right hand sides of 5) and differentiating with respect to s , we get

$$\frac{\partial f(y, z, \dots, B)}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\partial f(x, z, \dots, C)}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial f(x, y, \dots, D)}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial s} = \dots$$

Hence by 7),

$$8) \quad \frac{\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial s}}{\frac{\partial B}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial s}}{\frac{\partial C}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial D}{\partial s}}{\frac{\partial D}{\partial z}} = \dots$$

Now since in B, C, D, \dots , the variables s, t, u, \dots , have similar places as to obvious by 6),

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial x}}{\frac{\partial B}{\partial s}}, \quad \frac{\frac{\partial C}{\partial y}}{\frac{\partial C}{\partial s}}, \quad \frac{\frac{\partial D}{\partial z}}{\frac{\partial D}{\partial s}}, \dots$$

must have the same functional form with respect to $x, y, z \dots$, respectively, so that if

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial x}}{\frac{\partial B}{\partial s}} = \varphi'(x),$$

then

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial y}}{\frac{\partial C}{\partial s}} = \varphi'(y)$$

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial z}}{\frac{\partial D}{\partial s}} = \varphi'(z),$$

$$\dots$$

Hence 8) becomes

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{\varphi'(y)} = \frac{\frac{\partial A}{\partial z}}{\varphi'(z)} = \dots$$

or

$$9) \quad A = f(x, y, z, \dots) = \Omega[\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \dots]$$

where Ω is an arbitrary function and $\varphi(x) = \int \varphi'(x) dx$, etc.

$$\left\{ \begin{array}{l} f[s, t, u, \dots, f(x, y, z)] \\ = \Omega[\varphi(s) + \varphi(t) + \varphi(u) + \dots + \varphi\Omega\{\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \dots\}]. \end{array} \right.$$

For the sake of shortness, put

$$\varphi(x) = \xi, \quad \varphi(y) = \eta, \quad \varphi(z) = \zeta, \dots, \varphi(s) = \sigma, \quad \varphi(t) = \tau, \\ \varphi(u) = u \dots$$

Then by aid of the first of 5)

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega[\sigma + \tau + \dots + \varphi\Omega\{\xi + \eta + \zeta + \dots\}] = \Omega[\eta + \xi + \dots \\ + \varphi\Omega\{\xi + \sigma + \tau + \dots\}]. \end{array} \right.$$

Differentiating this with respect to x and y , we get

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega[\sigma + \tau + \dots + \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)]}{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)} \cdot \frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)}{\partial \xi} \cdot \varphi'(x) \\ = & \frac{\partial \Omega[\eta + \zeta + \dots + \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)]}{\partial \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)} \cdot \frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)}{\partial \xi} \varphi'(x), \\ & \frac{\partial \Omega[\sigma + \tau + \dots + \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)]}{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)} \cdot \frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)}{\partial \eta} \varphi'(y) \\ = & \frac{\partial \Omega[\eta + \zeta + \dots + \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)]}{\partial \eta} \varphi'(y). \end{aligned}$$

But

$$\frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \eta + \zeta + \dots)}{\partial \eta}$$

and $\frac{\partial \Omega[\eta + \zeta + \dots + \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)]}{\partial \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)} = \frac{\partial \Omega[\eta + \zeta + \dots + \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)]}{\partial \eta}$.

Therefore

$$\frac{\partial \varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots)}{\partial \xi} = 1.$$

Put $\xi + \sigma + \tau + \dots = p$, then

$$\frac{\partial \varphi \Omega(p)}{\partial p} = 1$$

therefore

$$\varphi \Omega(p) = p + C$$

or

$$\varphi \Omega(\xi + \sigma + \tau + \dots) = C + \xi + \sigma + \tau + \dots$$

or

$$\varphi f(x, s, t, \dots) = C + \varphi(x) + \varphi(s) + \varphi(t) + \dots$$

Hence if we put $\psi(u) - \frac{1}{u-1} C$ instead of $\varphi(u)$, then we arrive at

$$\psi f(x, s, t, \dots) = \psi(x) + \psi(s) + \psi(t) + \dots$$

or

$$\psi f(x, y, z, \dots) = \psi(x) + \psi(y) + \psi(z) + \dots$$

or

$$f(x, y, z, \dots) = \psi_1[\psi(x) + \psi(y) + \psi(z) + \dots].$$

Therefore, in order that

$$f[s, t, u, \dots, f(x, y, z, \dots)]$$

is a symmetrical function of $x, y, z, \dots, s, t, u, \dots$ we must have

$$f(x, y, z, \dots) = \psi_1[\psi(x) + \psi(y) + \psi(z) + \dots].$$

On a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations.

By P. Hayashi, Tōkyō (Japan).

I will describe here a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations. M. Jamet already treated such surfaces,* and considered those represented in homogenous coordinates by the equation

* M. Jamet, sur les courbes et les surfaces tétraédrales (Annales de l'École Normale supérieure, 1887).

$$f(x, y) = F(z, t)$$

where f is a function homogenous in x and y , and F also a function homogenous in z and t . A more extensive class of such surfaces which J will here describe is given by the equations:

$$\begin{aligned}x &= p(u) \cdot q(z), \\ y &= p_1(u) \cdot q(z),\end{aligned}$$

where u is a parameter. From these equations follows

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{p_1'(u)}{p(u) \cdot p_1'(u) - p'(u) \cdot p_1(u)} \cdot \frac{1}{q'(z)}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-p'(u)}{p(u) \cdot p_1'(u) - p'(u) \cdot p_1(u)} \cdot \frac{1}{q'(z)}.\end{aligned}$$

Put, for simplicity,

$$P(u) = p(u) \cdot p_1'(u) - p'(u) \cdot p_1(u),$$

so that

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{p_1'(u)}{P(u)} \cdot \frac{1}{q'(z)}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-p'(u)}{P(u)} \cdot \frac{1}{q'(z)}.\end{aligned}$$

Now the equation to the asymptotic lines of a surface is

$$d \frac{\partial z}{\partial x} dx + d \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0.$$

Hence for the surface under considerations, we obtain

$$\begin{aligned}& \left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{p_1'(u)}{P(u)} \right) \cdot p'(u) - \frac{d}{du} \left(\frac{p'(u)}{P(u)} \right) \cdot p_1'(u) \right\} (du)^2 - \frac{q''(z)}{q(z)} (dz)^2 = 0 \\ \text{or} \quad & \sqrt{\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{p_1'(u)}{P(u)} \right) \cdot p'(u) - \frac{d}{du} \left(\frac{p'(u)}{P(u)} \right) \cdot p_1'(u) \right\}} du = \sqrt{\frac{q''(z)}{q(z)}} dz,\end{aligned}$$

what can be integrated by simple quadrature.

The surfaces considered by M. Jamet can be transformed into those represented by the equation

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right) = F(z),$$

whence, if $u = \frac{y}{x}$

$$x^n = \frac{1}{f(u)} \cdot F(z),$$

$$y^n = \frac{u^n}{f(u)} \cdot F(z),$$

or

$$x = \frac{1}{f_1(u)} F_1(z),$$

$$y = \frac{u}{f_1(u)} F_1(z)$$

which is a particular case of the above mentioned.

The surfaces of revolution are represented by

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z),$$

or

$$\begin{cases} x = \sin u \cdot f(z), \\ y = \cos u \cdot f(z), \end{cases}$$

so that their asymptotic lines can be obtained by simple integrations, as has been already known.

Interchanging u and z in the equation considered, we obtain

$$\begin{cases} x = p(z) \cdot q(u), \\ y = p_1(z) \cdot q(u), \end{cases}$$

of which the asymptotic lines shall be given by

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p(z)}{P(z)} \right) \cdot p_1'(z) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_1(z)}{P(z)} \right) \cdot p'(z) \right\} dz = 2 \frac{q'(u)}{q(u)} du$$

or

$$\frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2 \frac{q'(u)}{q(u)} du,$$

$$P(z) = C[q(u)]^2.$$

Eliminating u , we have

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{p_1(z)}{p(z)} \\ &= \Phi(z), \text{ say.} \end{aligned}$$

This represents a conoidal surface; therefore the asymptotic lines of a conoidal surface can be obtained by simple integrations only, as has been already known.

Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades.

Von D. Sintzow, Privatdozent a. d. Universität Kasan.

I.

In seinen Untersuchungen über die linearen Komplexe benutzt S. Lie folgendes Theorem, welches er mit Hilfe einer imaginären Transformation erhalten hatte:

Die gradlinigen Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades schneiden die Seitenflächen eines der Fläche eingeschriebenen Tetraeders in vier Punkten, deren Doppelverhältnis für alle Erzeugenden desselben Systems dasselbe ist.

In dieser Form habe ich den Satz nirgends gefunden und will deshalb einen Beweis mitteilen. Ich benutze folgenden Satz von Staudt:*

* Beiträge zur Geometrie der Lage. H. 1 Nr. 35 S. 21. Staudt beweist den Satz mittelst Involution, der Satz kann aber, wie Prof. Nazimoff (Bull. Soc. Phys. math. Kasan (2) VI, Nr. 2) gezeigt hat, auch ohnedies bewiesen werden.

Das Doppelverhältnis der vier Punkte, in welchen eine Gerade w , welche nicht durch die Kanten des Tetraeders hindurchgeht, dessen Seitenflächen schneidet, ist dem Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche durch w und die vier Ecken des Tetraeders gehen, gleich.

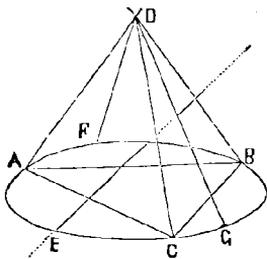
Vermöge dieses Satzes wird obiges Doppelverhältnis dem der vier Ebenen durch die Erzeugende und die vier Ecken des Tetraeders gleich.

Nach einem Satze von Chasles aber (Aperçu historique, Note XXVI), welchen man ganz einfach beweisen kann, ist das letzte Doppelverhältnis gleich dem der vier Berührungspunkte dieser Ebenen mit der Fläche.

Nun sind diese Berührungspunkte auf der Erzeugenden durch die Erzeugenden des anderen Systems bestimmt, welche durch die Ecken des Tetraeders gehen, und welche dieselben bleiben, welche Erzeugenden des ersten Systems auch genommen werden. Der Satz ist also bewiesen, denn es ist eine Haupteigenschaft der Kegelflächen zweiter Ordnung, dass die vier Erzeugenden des einen Systems auf jeder Erzeugenden des anderen Systems vier Punkte von demselben Doppelverhältnis bestimmen.

Nur ein Punkt bleibt übrig: wir haben nicht bewiesen, dass das Doppelverhältnis für zwei Systeme der Erzeugenden verschieden ist. Folgender Beweis liefert das sehr anschaulich, wenn er auch etwas weitläufiger ist.

Ich benutze wieder den Satz von Staudt und nehme also vier Ebenen durch eine Erzeugende und die vier Ecken des der Fläche eingeschriebenen



Tetraeders $ABCD$. Die Ebene der einen Seite des Tetraeders schneidet die Fläche nach einem Kegelschnitt (K), welcher durch die drei Ecken des Tetraeders geht, die vier Ebenen aber nach vier Geraden, deren Doppelverhältnis dem Doppelverhältnis der vier Ebenen gleich ist.

Diese vier Geraden sind EA , EB , EC [E -Schnittpunkt der veränderlichen Erzeugenden w mit der Ebene ABC , liegt auf (K)] und die Gerade (ABC , wD). Diese letzte

bekommen wir so: durch den Punkt D gehen zwei Erzeugende, deren eine w schneidet und also in der Ebene wD liegt; sie trifft ABC im Punkte F auf (K); also ist $EF = (ABC, wD)$. Wenn die Erzeugende w die Fläche beschreibt, bleiben die Punkte A , B , C und F unverändert, nur E ändert sich, den (K) beschreibend. Das gesuchte Doppelverhältnis bleibt also nach einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte unverändert. Nehmen wir nun statt w die Erzeugende w' des zweiten Systems, welche durch denselben Punkt E geht. A , B , C bleiben dieselben, statt F bekommen wir aber einen anderen Punkt G , in welchem ABC von der zweiten w' schneidenden Erzeugenden durch D geschnitten wird. Die zwei Doppelverhältnisse $E(ACBF)$ und $E(ABCG)$ sind aber von einander verschieden, wenn nicht F mit G zusammenfällt, was nur im Falle einer Kegelfläche möglich ist.

II.

Der Satz von Staudt, welchen wir oben benutzten, scheint bei manchen Fragen nützlich zu sein, wird aber nicht genug beachtet. Man findet ihn z. B. nicht in dem trefflichen Buche von P. Muth: „Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie.“* Es wird daher vielleicht nicht überflüssig sein, einen Beweis dafür mitzuteilen welcher sich eng an die Beweismethoden von P. Muth anschliesst.

Es seien die Seitenflächen des Tetraeders u, u', u'', u''' (also deren Koordinaten $u_1 u_2 u_3 u_4$ u. s. w.) und die Ecken x, x', x'', x''' , so dass

$$x''' = (u, u', u'') \text{ u. s. w.}$$

Die Gerade (v, w) oder (ξ, η) hat als Koordinaten die Minoren der Matrizen

$$\left\| \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{array} \right\|.$$

Den Proportionalitätsfaktor wählen wir der Einfachheit halber so, dass

$$(v_1 w_2) = (\xi_3 \eta_4) \text{ u. s. w.}$$

Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen des Tetraeders (vergl. P. Muth, l. c. p. 64) ist gleich

$$1) \quad DV = \frac{(vwu'u''')(vwuu'')}{(vwuu''')(vwu'u'')}.$$

Das Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche durch die Gerade $(\xi_1 \eta)$ und die Punkte x, x', x'', x''' hindurchgehen, ist gleich (vergl. ibid.)

$$2) \quad DV' = \frac{(\xi \eta x x'')(\xi \eta x' x''')}{(\xi \eta x x''')(\xi \eta x' x'')}.$$

Die Identität dieser zwei Ausdrücke müssen wir beweisen. Das geschieht aber sehr leicht, denn nach dem Satz von Laplace ist z. B.

$$(\xi \eta x x'') = \sum (\xi_1 \eta_2) (x_3 x_4''),$$

oder wenn wir $(\xi_1 \eta_2)$ durch $(v_3 w_4)$ ersetzen u. s. w.

$$(\xi \eta x x'') = \sum (w_3 w_4) (x_3 x_4'').$$

Aber x ist der Schnittpunkt der Ebenen u', u'', u''', u'' der Ebenen u, u', u'' ; also

$$x_i = (u' u'' u''')_i, \quad x''_i = (u', u, u''')_i,$$

und $(x_3 x_4'')$ ist ein Minor zweiter Ordnung der Determinante $(x x' x'' x''')$; demnach

$$(x_3 x_4'') = (u u' u'' u''')(u'_1 u'_2) \text{ u. s. w.}$$

Also

$$(\xi \eta x x'') = (u u' u'' u''') \sum (v_3 w_4) (u'_1 u'_2) = (u u' u'' u''')(v w u' u'').$$

Das Tetraeder ist ein eigentliches, und $(u u' u'' u''') \geq 0$.

* Ich bin dem Satz von Staudt nur bei R. Sturm im Teil I seiner Liniengeometrie begegnet.

In derselben Weise wird

$$(\xi\eta x'x''') = (uu'u''u''') (vwuu'') \text{ u. s. w.}$$

Das Quadrat von $(uu'u''u''')$ hebt sich im Zähler und Nenner und wir bekommen

$$DV = DV' \quad \text{w. z. b. w.}$$

III.

Der Satz von S. Lie scheint nicht leicht analytisch zu beweisen. Ich will einen solchen Beweis zum Schluss mitteilen. Die Gleichung der Fläche zweiten Grades, welche dem Koordinatentetraeder umschrieben ist, sei

$$\sum \alpha_{ik} x_i x_k = 0,$$

wo

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \quad \alpha_{ii} = 0.$$

Es sei $\alpha_{12} \neq 0$, dann multiplizieren wir die Gleichung mit α_{12} und können dann schreiben

$$\alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4) = \alpha_{13} \alpha_{23} (x_3 + x_1 x_4) (x_3 + x_2 x_4),$$

wo x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_{13} \alpha_{23} x^2 - (\alpha_{14} \alpha_{23} + \alpha_{13} \alpha_{24} - \alpha_{12} \alpha_{34}) x + \alpha_{14} \alpha_{24} = 0.$$

Die gradlinigen Erzeugenden des einen Systems sind dann durch die Gleichungen gegeben:

$$3) \quad \begin{cases} P_1 \equiv \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 - \lambda (x_3 + x_1 x_4) = 0, \\ P_2 \equiv \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 - \frac{\alpha_{13} \alpha_{23}}{\lambda} (x_3 + x_2 x_4) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen des zweiten Systems gehen hieraus durch Vertauschung von x_1 und x_2 hervor. Haben wir also das Doppelverhältnis für das erste System bestimmt, so geht daraus das Doppelverhältnis für das andere durch Vertauschung von x_1 und x_2 hervor.

Das Doppelverhältnis der vier Punkte einer Geraden ist aber gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen durch eine andere Gerade, welche die erste nicht schneidet, und durch diese vier Punkte geht. Als solche nehme ich die Gerade $x_1 = 0, x_2 = 0$. Diese zwei Ebenen gehen schon durch zwei der obigen Punkte. Sind die zwei anderen

$$x_2 + \nu x_1 = 0, \quad x_2 + \nu' x_1 = 0,$$

so ist das gesuchte Doppelverhältnis gleich $\frac{\nu}{\nu'}$. Aber den Wert von ν , welcher der Ebene entspricht, die durch $x_1 = 0, x_2 = 0$ und durch den Punkt $[(I), x_3 = 0]$ geht, bekommen wir, wenn wir in $P_1 + \nu P_2 = 0$ x_3 verschwinden lassen, und den Koeffizienten von x_4 gleich Null setzen, also ist ν gleich dem mit umgekehrtem Zeichen genommenen Quotienten von x_4 in P_1 und P_2 , d. h.

$$\alpha_{14} - \lambda x_1 \quad \text{und} \quad \alpha_{24} - \frac{x_2}{\lambda} \alpha_{13} \alpha_{23}.$$

Da aber $\alpha_{13}\alpha_{23}x_1x_2 = \alpha_{14}\alpha_{24}$, so ist der zweite Koeffizient gleich

$$\frac{\alpha_{21}}{\lambda x_1}(\lambda x_1 - \alpha_{14}),$$

folglich

$$v = \frac{\lambda x_1}{\alpha_{24}}.$$

In derselben Weise ist v' für die Ebene, welche durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $(I, x_4 = 0)$ hindurchgeht, gleich dem mit umgekehrtem Zeichen genommenen Quotienten von x_3 in P_1 und P_2 , d. h. von

$$\alpha_{13} - \lambda \quad \text{und} \quad \alpha_{23} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{23}}{\lambda}, \quad \text{oder} \quad v' = \frac{\lambda}{\alpha_{23}}.$$

Das gesuchte Doppelverhältnis ist also gleich

$$v : v' = \frac{\alpha_{23}x_1}{\alpha_{24}} = \text{const.}$$

Für das zweite System bekommen wir also

$$DV_2 = \frac{\alpha_{23}x_2}{\alpha_{24}}.$$

Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist.

Von Dr. H. Liebmann in Göttingen.

1. Hertz hat bekanntlich die Bezeichnung holonom und nicht holonom für Differentialbedingungen, denen ein Punktsystem unterworfen ist, eingeführt, indem er eine Differentialbedingung holonom nennt, wenn sie ein Integral besitzt, sonst aber nicht holonom.

Ich möchte hier auf ein Beispiel von Bewegung bei nicht holonomen Bedingungen aufmerksam machen und genauer eingehen, das zuerst von Herrn Voss (Math. Annalen 25) behandelt, aber nicht genau durchgeführt worden ist. Es ist dadurch von besonderem Interesse, dass die nicht holonome Bedingung auf die Bewegung der einem weiteren Kraftgesetz nicht unterworfenen Punkte hier genau dieselbe Wirkung hat, als ob keine Bedingung, dagegen ein einfaches Kraftgesetz bestände.

Es gilt nämlich der Satz:

Wenn der Punkt B der nicht holonomen Bedingung unterworfen ist, dass er sich immer senkrecht gegen die Verbindungslinie mit A bewegt, so führt B relativ gegen A eine Centralbewegung aus, genau als ob A den Punkt B nach dem Newtonschen Gesetz anzöge.

Ob dies nur eine zufällige Analogie ist oder ob dem Satz eine tiefere Bedeutung innewohnt, soll hier nicht entschieden, sondern nur gezeigt werden, wie sich das Resultat ergibt.

2. Wir wollen die Bewegung von A bestimmen und zeigen, dass B eine Centralbewegung ausführt.

$x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ seien die Koordinaten von A und B , dann lautet die Bedingung:

$$0 = (x_2 - x_1)\delta x_2 + (y_2 - y_1)\delta y_2 + (z_2 - z_1)\delta z_2.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1'' &= 0, & x_2'' &= \lambda(x_2 - x_1), \\ y_1'' &= 0, & \text{und } y_2'' &= \lambda(y_2 - y_1), \\ z_1'' &= 0, & z_2'' &= \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

für die Bewegung.

A bewegt sich also gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit; wir wollen das Koordinatensystem so legen, dass

$$z_1 = ct, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0$$

ist. Wir bezeichnen jetzt die Koordinatendifferenzen der beiden Punkte mit $\xi \eta \zeta$. Dann ergibt sich

$$\xi'' = \lambda \xi, \quad \eta'' = \lambda \eta, \quad \zeta'' = \lambda \zeta.$$

Hieraus folgt:

B führt relativ gegen A eine Centralbewegung aus, so als ob die Kraft $\lambda\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ in der Richtung der Verbindungslinie wirkte. B bleibt also immer relativ zu A in einer Ebene, und in dieser Ebene gilt der Flächensatz.

Soweit ist das Beispiel schon von Voss behandelt.

3. Um nun diese relative Centralbewegung zu untersuchen, führen wir in der Ebene der Relativbewegung Polarkoordinaten ein.

Zunächst aber wollen wir das Koordinatensystem xyz so legen, dass die xz -Ebene die Bahnebene in der Linie stärkster Neigung gegen die xy -Ebene schneidet, und wir wollen diese Schnittlinie zum Anfangsstrahl des Koordinatensystems nehmen. Ferner wollen wir mit φ die Neigung der Bahnebene gegen die xy -Ebene bezeichnen.

Dann ist

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi \cos \psi, \\ \eta &= \rho \sin \varphi, \\ \zeta &= \rho \cos \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Jetzt haben wir für die Bewegung zwei erste Integrale; erstens den Flächensatz

$$\rho^2 d\varphi = a^2 dt$$

und ferner das aus der Bedingung durch Umformung sich ergebende Integral

$$d\rho + c \cos \varphi \sin \psi dt = 0;$$

aus beiden zusammen folgt

$$d\rho + \frac{c\rho^2}{a^2} \cos \varphi \sin \psi d\varphi = 0,$$

woraus sich durch Integration die Polargleichung der Ellipse bezogen auf A als Brennpunkt ergibt. Aus diesem Resultat zusammen mit dem Flächensatz folgt aber die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung, dass die Centralbewegung so erfolgt, als ob A den Punkt B nach dem Newtonschen Gesetz anzöge.

Historisch-litterarische Abteilung
der
Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

44. Band.

Mit in den Text gedruckten Figuren.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1899.

Druck von B. G. Teubner in Breslau.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

	Seite
Hérons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln. Von G. WERTHEIM	1
Ein von Fermat herrührender Beweis. Von G. WERTHEIM	4
Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam. Von H. SUTER	33
Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben x . Von G. WERTHEIM	48
Die Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Von N. DELAUNAY	101
Ein wiedergefundener Diophantuscodex. Von E. GOLLOB	137
Die Mathematikerversammlung im Jahre 1900	111

II. Rezensionen.

Geschichte der Mathematik.

Heath, The works of Archimedes. Von M. CANTOR	7
Curtze, Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius. Von M. CANTOR	8
Jordan, Opus Palatinum. Von M. CANTOR	9
Schwab, P. Aegydt Everard von Raitenau. Von M. CANTOR	10
Besthorn und Heiberg, Codex Leidensis 399,1. Zweites Heft. Von H. SUTER	60
Vassilief, Tchébychef et son œuvre scientifique. Von M. CANTOR	62
Heiberg, Claudii Ptolemaei Opera I. Von M. CANTOR	62
Laugel, Oeuvres mathématiques de Riemann. Von P. STÄCKEL	73
Rudio, Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich. Von M. CANTOR	119
Meyer (Fehr), Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Von M. CANTOR	121
Niemeyer, Die Zahlenkunst. Von M. CANTOR	122
Manitius, Gemini Elementa astronomiae. Von M. CANTOR	123
Günther, Keplers Traum vom Monde. Von M. CANTOR	124
Pixis, Kepler als Geograph. Von M. CANTOR	125
Kheil, Valentin Mennher und Antich Roche. Von M. CANTOR	125
Maupin, Opinions et curiosités touchant la mathématique. Von M. CANTOR	157

Philosophie, Didaktik.

Sperk, Critique de l'enseignement des mathématiques. Von M. CANTOR	11
Riedler, Die Ziele der technischen Hochschulen. Von B. NEBEL	53
Ego, Kritik der exakten Forschung. Von R. FRICKE	72
Burkhardt und Meyer, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, 1. Heft. Von M. CANTOR	75

	Seite
Strecker , Logische Übungen. Von E. JAHNKE.	85
Wundt , Die geometrisch-optischen Täuschungen. Von M. CANTOR	86
Laisant und Fehr , L'enseignement mathématique. Von M. CANTOR	118

Arithmetik, Analysis, Algebra.

Painlevé , Leçons sur la théorie des équations différentielles. Von L. HEFFTER	13
Lejeune-Dirichlet (Haussner), Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. Von R. FRICKE	18
Burnside , Theory of groups of finite order. Von E. NETTO	20
Czuber , Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von M. KRAUSE	22, 69
Pascal , Repertorio di matematiche superiori. Von M. KRAUSE	23
v. Bortkewitsch , Das Gesetz der kleinen Zahlen. Von F. HAUSDORFF	24
Fricke und Klein , Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Von W. WIRTINGER	63
Lévy , Précis de la théorie des fonctions elliptiques. Von M. KRAUSE	70
Weber , Lehrbuch der Algebra (2. Auflage). Von R. FRICKE	71
Breuer , Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Funktionen einer komplexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie. Von R. FRICKE	72
Mikuta , Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Von M. CANTOR	77
Cor und Riemann , Traité d'algèbre élémentaire. Von E. JAHNKE	82
Hartenstein , Fünfstellige logarithmische Tafeln. Von E. JAHNKE	84
Lieber und Müsebeck , Aufgaben über kubische und diophantische Gleichungen, Determinanten u.s.w. Von E. JAHNKE	84
Schülke , Vierstellige Logarithmentafeln. Von E. JAHNKE	85
Gamborg , Logarithmetabel. Von E. JAHNKE	85
Popp , Ergründung und Lösung des imaginären Problems. Von E. JAHNKE	85
Sturm (Gross) , Lehrbuch der Analysis. Von E. JAHNKE	86
Baer , Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzgleichung. Von M. CANTOR	87
Schimpf , Zur Definition der Konvergenz. Von M. CANTOR	119
Mansion , Mélanges mathématiques. Von M. CANTOR	120
Fuhrmann , Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Von M. CANTOR	120
Dölp (Netto) , Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. Von M. CANTOR	121
Nasso , Algebra elementare. Von M. CANTOR	121
Schubert , Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. Von M. CANTOR	122
Grosse , Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung. Von W. AHRENS	125
Tannery und Molk , Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Von M. KRAUSE	144
Borel , Leçons sur la théorie des fonctions. Von E. JAHNKE	147
Thomae , Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen. Von R. FRICKE	148
Andoyer , Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques. Von E. JAHNKE	150
Vivanti , Corso di calcolo infinitesimale. Von M. CANTOR	151
Appell , Éléments d'analyse mathématique. Von M. CANTOR	153
Fisher und Schwatt , Text-Book of Algebra. Von M. CANTOR	155

	Seite
Junker, Differentialrechnung. VON M. CANTOR	156
Ultramare, Calcul de généralisation. VON M. CANTOR	156
Krause, Die Fuchs'sche Differentialgleichung vierten Grades. VON E. JAHNKE	182

Synthetische, analytische, deskriptive Geometrie.

Simon, Analytische Geometrie der Ebene. VON M. CANTOR	11
Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle. VON K. ZINDLER .	15
Fontené, Géométrie dirigée. VON R. FRICKE	17
Gentry, On the forms of plane quartic curves. VON R. FRICKE	17
Bravais, Über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. VON R. FRICKE	18
Russell, An essay on the foundations of geometry. VON R. FRICKE	19
Frolow, La théorie des parallèles démontrée rigoureusement. VON P. STÄCKEL	74
v. Budislavljević, Grundzüge der Determinanten-Theorie und der projekti- vischen Geometrie. VON M. CANTOR	76
Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie. VON M. CANTOR	78
Simon, Analytische Geometrie des Raumes. VON M. CANTOR	79
Schlömilch-Heger, Analytische Geometrie des Raumes. VON M. CANTOR .	80
Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes I. VON M. CANTOR .	80
Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. VON E. JAHNKE	81
Koppe-Diekmann, Analytische Geometrie der Ebene. VON E. JAHNKE . .	82
Jentzen, Elemente der Trigonometrie. VON E. JAHNKE	83
Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. VON E. JAHNKE	83
Maurer, Maxima und Minima. VON E. JAHNKE	84
Schwering und Krimphoff, Anfangsgründe der ebenen Geometrie. VON E. JAHNKE	85
Veronese, Elementi di geometria. VON H. THIEME	112
Staude, Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. VON H. WILLGROD	130
Raffy, Leçons sur les applications géométriques de l'analyse. VON H. WILLGROD	132
v. Lillienthal, Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen. VON H. WILLGROD	141
Alberti, Darstellende Geometrie I. VON CHR. BEYEL	142
Doehlemann, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. VON R. FRICKE	149
Klug, Die Konfiguration des Pascal'schen Sechsecks. VON R. FRICKE . .	149
Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. VON R. FRICKE	150
Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie II. VON E. MÜLLER	175
Bork, Crantz, Haentzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen. VON E. JAHNKE	179
Erlcr, Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. VON E. JAHNKE	181
Sailer, Die Aufgaben aus der Elementar-Mathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik in den Jahren 1873—1893 in Bayern gestellt wurden. VON E. JAHNKE	183
Girndt, Raumlehre für Baugewerkschulen I. VON E. JAHNKE	184
Bussler, Elemente der Mathematik I, II und Mathematisches Übungsbuch I, II. VON E. JAHNKE	185
Richter, Trigonometrische Aufgaben mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. VON E. JAHNKE	186

Mechanik. Physik.

Fortschritte der Physik 1895, 1896, 1897. Von B. NEBEL	25, 162
Hollefreund, Anwendungen des Gauss'schen Prinzipes vom kleinsten Zwange. Von B. NEBEL	25
Kuhn, Die Energie als mechanischer Hauptbegriff. Von B. NEBEL	25
Kirchhoff (Wien), Mechanik. Von B. NEBEL	26
Steinhauser, Die theoretische Grundlage für die Herstellung der Stereoskop- bilder. Von B. NEBEL	26
v. Helmholtz (König und Runge), Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Von B. NEBEL	27
Volkmann, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. Von B. NEBEL	27
Gajdeczka, Maturitätsprüfungsfragen aus der Physik. Von B. NEBEL	28
Kerntler, Die elektrodynamischen Grundgesetze. Von B. NEBEL	28
Ebert, Magnetische Kraftfelder II. Von B. NEBEL	29
Müller (Lehmann), Grundriss der Physik. Von B. NEBEL	49
Jochmann und Hermes, Grundriss der Experimentalphysik und Elemente der Chemie. Von B. NEBEL	50
Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik. Von B. NEBEL	50
Cranz, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Von B. NEBEL	50
Wildermann, Jahrbuch der Naturwissenschaften 1896—1897. Von B. NEBEL	51
Abendroth, Leitfaden der Physik. Von B. NEBEL	52
Körner, Lehrbuch der Physik. Von B. NEBEL	52
Torricelli, Esperienza dell' Argento vivo. Von B. NEBEL	54
Meteorologische Karten 1688, 1817, 1846, 1863, 1864. Von B. NEBEL	54
Gellibrand, On the variation of the magnetical needle. Von B. NEBEL	54
Lorenz (Valentiner), Oeuvres scientifiques I, 1. Von B. NEBEL	54
Majlert, Essai sur les éléments de la mécanique des particules. Von B. NEBEL	55
Neumann (Wangerin), Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Von B. NEBEL	55
v. Helmholtz (Wangerin), Zwei hydrodynamische Abhandlungen. Von B. NEBEL	55
v. Helmholtz (Wangerin), Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Von B. NEBEL	56
Faraday (v. Öttingen), Experimentaluntersuchungen über Elektrizität. Von B. NEBEL	56, 169
Günther, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie. Von B. NEBEL	56
Zelbr, Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Von B. NEBEL	57
Sperber, Das Parallelogramm der Kräfte als Grundlage des periodischen Systems in der Chemie. Von B. NEBEL	57
Sinram, Kritik der Formel der Newton'schen Gravitationstheorie. Von B. NEBEL	58
Föppl, Die Geometrie der Wirbelfelder. Von B. NEBEL	58
Funck-Brentano, Méthode et principes des sciences naturelles. Von B. NEBEL	59
Albrecht, Die Elektrizität. Von B. NEBEL	59
Baer, Über das logarithmische Potential einer Pascal'schen Schnecke. Von M. CANTOR	87
Günther, Handbuch der Geophysik I. Von P. TREUTLEIN	127
Richarz und Krigar-Menzel, Bestimmung der Gravitationskonstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde durch Wägungen. Von S. GÜNTHER	158

Inhalt.	VII Seite
Schmidt, Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885. Von S. GÜNTHER	160
Bach, Elastizität und Festigkeit. Von B. NEBEL	161
v. Helmholtz (Krigar-Menzel), Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Von B. NEBEL	164
v. Helmholtz (König und Runge), Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik. Von B. NEBEL	164
Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität IV. Von B. NEBEL	165
Müller-Pouillet (Pfaundler), Lehrbuch der Physik und Meteorologie II (Schluss). Von B. NEBEL	165
Wiedemann und Ebert, Physikalisches Praktikum. Von B. NEBEL	166
Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik III. Von B. NEBEL	166
Neumann, Die elektrischen Kräfte II. Von B. NEBEL	167
Violle (Gumlich, Jäger, Lindeck), Lehrbuch der Physik II, 2. Von B. NEBEL	168
Dreher und Jordan, Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Von B. NEBEL	168
Mach (Harbordt und Fischer), Grundriss der Physik I. Von B. NEBEL	170
Börner, Physikalisches Unterrichtswerk IV. Von B. NEBEL	170
Weinstein, Physik und Chemie. Von B. NEBEL	171
Dippel, Das Mikroskop und seine Anwendung (Schluss). Von B. NEBEL	171
Glazebrook (Zermelo), Das Licht. Von B. NEBEL	172
Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik I. Von B. NEBEL	172
Gross, Robert Mayer und Hermann von Helmholtz. Von B. NEBEL	173
Maiss, Aufgaben über Wärme. Von B. NEBEL	173
Walter, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Von B. NEBEL	174
Lorenz, Neuere Kühlmaschinen. Von WEYRAUCH	174
Dürk, Die Probleme des logarithmischen Potentials für eine von zwei Kreis- bogen begrenzte ebene Fläche. Von E. JAHNKE	181
Annuaire pour l'an 1899. Von E. JAHNKE	184

Bibliographie	Seite 30, 88, 133, 187
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1898	92
" " " " " "	1. Juli bis 31. Dezember 1898
	195

Historisch-litterarische Abteilung.

Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln.

Von

G. WERTHEIM.

Im Jahrgang XLII dieser Zeitschrift hat Curtze aus der durch R. Schöne in der Serailbibliothek zu Konstantinopel aufgefundenen Handschrift der Metrik Herons die Stelle veröffentlicht, welche das Verfahren beschreibt, nach dem Heron die irrationalen Kubikwurzeln annäherungsweise berechnet. Am Schluss der Bemerkungen, die Curtze an diese Stelle knüpft, wirft er die Frage auf: „Wie ist Heron auf diesen eigentümlichen Weg gelangt? ... Wo ist der Oedipus, der dieses Rätsel löst.“

Ich glaube, die Frage ist nicht schwer zu beantworten, und des Rätsels Lösung wäre wohl schon längst gefunden, wenn sich Curtze in seiner allgemeinen Darstellung der Methode nicht geirrt hätte.

Heron will $\sqrt[3]{100}$ bestimmen. Die Kubikzahlen, zwischen denen 100 liegt, sind 64 und 125; die erstere ist um 36 zu klein, die zweite um 25 zu gross. Die Kubikwurzeln von 64 und 125 sind beziehungsweise 4 und 5. Daher wird $\sqrt[3]{100}$ gleich der Summe von 4 und einem (echten) Bruche sein. Den Zähler dieses Bruches zu finden, multipliziert er 36 mit 5; das giebt 180. Den Nenner erhält er, indem er 100 zu 180 addiert. Der Bruch ist also $\frac{180}{280} = \frac{9}{14}$, und so ergiebt sich ihm für $\sqrt[3]{100}$ der Näherungswert $4\frac{9}{14}$.

Curtze nimmt nun an, die Zahl 5, mit der 36 multipliziert wird, sei die Quadratwurzel aus 25, der Differenz zwischen der grösseren Kubikzahl 125 und der vorgelegten Zahl 100. Weiter sieht er die Zahl 100, die Heron zu 180 addiert, um den Nenner des gesuchten Bruches zu erhalten, als die vorgelegte Zahl an.

Beide Annahmen sind nach meiner Auffassung unzulässig. Ich halte 5 für die Kubikwurzel der grösseren Kubikzahl und 100 für das Produkt aus der Kubikwurzel 4 der kleineren Kubikzahl in die Differenz zwischen der grösseren Kubikzahl 125 und der vorgelegten Zahl 100. Auf diese Weise stellt sich Herons Verfahren als ein dem doppelten falschen Ansatz analoges dar.

Es ist zwar kein Beispiel einer Anwendung des doppelten falschen Ansatzes seitens der Griechen bekannt. Das schliesst aber nicht aus, dass sie dieses zur Bestimmung von Näherungswerten irrationaler Wurzeln nahe liegende Verfahren nicht doch hin und wieder benutzt und uns dann nur das Resultat, nicht auch den Gang ihrer Rechnung mitgeteilt haben mögen.

So giebt Archimedes in seiner Kreismessung als obere Grenze $\frac{1351}{780}$, als untere Grenze $\frac{265}{153}$ für $\sqrt[3]{3}$ an, ohne zu sagen, wie er zu diesen Werten gelangt ist, und es hat bis in die neueste Zeit nicht an Versuchen gefehlt, den mutmaßlichen Gedankengang des Archimedes aufzudecken. Vielleicht hat er sich zur Bestimmung beider Grenzen des doppelten falschen Ansatzes bedient. Was zunächst die unteren Grenzwerte betrifft, so giebt die Annahme $\sqrt[3]{3} = 1$ den Fehler -2 , die Annahme $\sqrt[3]{3} = 2$ den Fehler $+1$, und dann liefert der doppelte falsche Ansatz $\sqrt[3]{3} = \frac{1+4}{1+2} = \frac{5}{3}$. Aus den beiden Annahmen $\frac{5}{3}$ und 2 folgt ebenso $\sqrt[3]{3} = \frac{19}{11}$; aus $\frac{19}{11}$ und 2 folgt $\frac{71}{41}$; endlich erhält man aus $\frac{71}{41}$ und 2 die untere Grenze $\frac{265}{153}$.

Der obere Grenzwert des Archimedes ergibt sich gleichfalls durch eine viermalige Anwendung des doppelten falschen Ansatzes. Für die Annahme $\sqrt[3]{3} = \frac{7}{4}$ ist der Fehler $+\frac{1}{16}$, für die Annahme $+2$ ist er $+1$; es ergibt sich somit $\sqrt[3]{3} = \left(\frac{7}{4} - \frac{2}{16}\right) : \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{26}{15}$. Weiter liefern die Annahmen $\frac{26}{15}$ und 2 den neuen Näherungswert $\frac{97}{56}$, die Annahmen $\frac{97}{56}$ und 2 ebenso $\frac{362}{209}$, endlich die Annahmen $\frac{362}{209}$ und 2 den Wert $\frac{1351}{780}$.

Es liegt nun die Vermutung nahe, dass Heron bei dem Versuche, diese Methode auf Kubikwurzeln anzuwenden, sich überzeugt habe, es bedürfe einer Modifikation des Verfahrens, wenn gute Näherungswerte erzielt werden sollen. Liegt nämlich die Zahl m zwischen a^3 und $(a+1)^3$, und wird der Kürze wegen

$$m - a^3 = d_1, \quad (a+1)^3 - m = d_2$$

gesetzt, so dass die Probe, das ist die Erhebung auf die dritte Potenz, für die Annahme $\sqrt[3]{m} = a$ den Fehler $-d_1$, für die Annahme $\sqrt[3]{m} = a+1$ den Fehler $+d_2$ ergibt, so bildet Heron die Produkte $-(a+1)d_1$ und ad_2 , und diese betrachtet er als die Fehler, die beziehungsweise den Annahmen a und $a+1$ entsprechen. Dann liefert der doppelte falsche Ansatz

$$\sqrt[3]{m} = \frac{(a+1)^2 d_1 + a^2 d_2}{(a+1)d_1 + ad_2} = a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2},$$

und der letzte Ausdruck ist es, nach dem Heron rechnet.

Bei dieser Auffassung ist Herons Methode eine dieses grossen Mathematikers wirklich würdige, da sie nicht — wie es nach Curtzes Darstellung der Fall ist — bloss für einige, sondern für alle Zahlen gute Näherungswerte liefert.

- Beispiele. 1) $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1 \cdot 6} = 1 \frac{2}{8} = 1,25.$
 2) $\sqrt[3]{500} = 7 \frac{314}{335} = 7,9373\dots$
 3) $\sqrt[3]{194} = 5 \frac{207}{262} = 5,7900\dots$

Die Hülse'schen Tabellen geben beziehungsweise
 1,2599...; 7,9370...; 5,7889....

Nachtrag.

Herr Prof. Curtze, dem ich von dem Inhalt der vorstehenden Arbeit Mitteilung gemacht hatte, antwortete mir, dass ihm eine mit der meinigen übereinstimmende Lösung des Problems schon am 9. November 1897 durch Herrn A. Kerber, Realschullehrer a. D. zu Dresden, übersandt sei. Dieselbe habe den Vorteil, sich geometrisch ableiten zu lassen. Unter Zustimmung des Herrn Prof. Curtze lasse ich diese Ableitung der Formel, der Kürze halber in algebraischer Form, hier folgen:

Wird die gegebene Zahl $m = x^3$ gesetzt, so ist, wenn die obigen Bezeichnungen beibehalten werden,

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \approx (x - a)3ax,$$

d. i.:

1) $d_1 \approx (x - a)3ax.$

Ebenso ergibt sich $(a + 1)^3 - x^3$, d. i.:

2) $d_2 \approx (a + 1 - x)3(a + 1)x,$

und durch Division von 1) durch 2) erhält man

$$\frac{d_1}{d_2} \approx \frac{(x - a)a}{(a + 1 - x)(a + 1)},$$

woraus sofort

$$x = \frac{(a + 1)^2 d_1 + a^2 d_2}{(a + 1)d_1 + a d_2}$$

folgt.

Auf dieselbe Weise würde man, wenn eine Zahl m zwischen a^n und $(a + 1)^n$ liegt und $m - a^n = d_1$, $(a + 1)^n - m = d_2$ gesetzt wird, die Näherungsformel

$$\sqrt[n]{m} \approx \frac{(a + 1)^{n-1} d_1 + a^{n-1} d_2}{(a + 1)^{n-2} d_1 + a^{n-2} d_2}$$

erhalten, die natürlich bei steigendem n an Genauigkeit verliert. Für $n = 2$ geht sie, da dann $d_1 + d_2 = 2a + 1$ ist, in die bekannte Formel

$$\sqrt{a^2 + d_1} \approx a + \frac{d_1}{2a + 1}$$

über.

Ein von Fermat herrührender Beweis.

Von
G. WERTHEIM.

In der vor einigen Jahren auf der Leydener Bibliothek gefundenen kleinen Schrift Fermats *Relation des découvertes en la science des nombres**, welche ausführlicher als die *Observatio* XLV zum Diophant** das Wesen der von Fermat erfundenen Methode der unbegrenzten Abnahme (*la descente infinie ou indéfinie*) darlegt, bemerkt Fermat, er habe den Herren Carcavi und Frenicle die mittels dieser Methode geführten Beweise einiger Unmöglichkeitssätze geschickt. Dass die Auffindung dieser Beweise von der grössten Bedeutung sein würde, bedarf wohl keiner Begründung. Nun giebt Frenicle in seinem *Traité des triangles rectangles en nombres**** in der That den Beweis des Satzes: Es giebt kein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seiten, dessen Fläche eine Quadratzahl wäre, desselben Satzes, dessen Beweis Fermat in der oben genannten *Observatio* nur angedeutet hat, da der Rand zu klein sei, ihn ganz und ausführlich aufzunehmen. Der Beweis, den Frenicle mittheilt, ist überdies ganz nach Fermats Methode der unbegrenzten Abnahme geführt. Es unterliegt daher wohl keinem Zweifel, dass wir es hier mit einem Beweise Fermats zu thun haben, und dieser Umstand rechtfertigt es zur Genüge, dass ich näher auf die Sache eingehe und den Beweis in etwas modernisierter Form, aber sachlich unverändert mittheile.

Zum besseren Verständnis sei folgendes vorausgeschickt:

Bekanntlich erhält man stets eine Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, indem man zwei beliebige Zahlen a und $b < a$ wählt und

* Dieselbe ist von Charles Henry in seiner Arbeit „*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*“ (Bullettino Boncompagni XII) veröffentlicht und neuerdings im zweiten Bande der Werke Fermats S. 431—436 abgedruckt. In betreff der grossen Bedeutung der Schrift sei auf Cantors Vorlesungen Bd. II S. 709 flg. verwiesen.

** *Oeuvres de Fermat*, Bd. II, S. 340. Vergl. auch meine Übersetzung der Arithmetik *Diophants* S. 294.

*** *Mémoires de l'Académie royale des sciences*. T. V. Paris 1729, p. 83—166.

$$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$$

annimmt. Sind a und b ganze Zahlen, so werden auch für x, y, z ganze Werte erhalten. Wenn a prim zu b ist, und wenn zugleich die eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist, so wird, wie sich leicht zeigen lässt, der grösste gemeinschaftliche Divisor der drei Zahlen x, y, z gleich 1 sein.

Lässt man diese x, y, z die Seiten eines Dreiecks bezeichnen, so ist dasselbe rechtwinklig. Es sind also $a^2 - b^2$ und $2ab$ die Katheten, $a^2 + b^2$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, $(a^2 - b^2)ab$ der Flächeninhalt desselben. Man nennt die gewählten Zahlen a, b die das Dreieck erzeugenden Zahlen, und wenn a, b die angegebenen beiden Eigenschaften haben, wenn also die Seiten teilerfremde Zahlen sind, so heisst das Dreieck ein primitives.

Wenn $(a^2 - b^2)ab$ die Fläche eines primitiven rechtwinkligen Dreiecks ist — offenbar genügt es, den Satz für solche Dreiecke zu beweisen —, so ist jede der drei Zahlen $a^2 - b^2, a, b$ prim zu jeder der beiden anderen. Soll also das Produkt eine Quadratzahl sein, so muss jeder der drei Faktoren diese Eigenschaft besitzen, und dann wird $a^2 - b^2$ die Differenz zweier Biquadrate sein. Die beiden Sätze:

der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten kann keine Quadratzahl sein;

die Differenz zweier Biquadrate kann keine Quadratzahl sein

besagen also im Grunde dasselbe.

Der Beweis, den Frenicle von dem ersten Satze giebt, stützt sich auf die folgenden Hilfssätze:

I. Wenn die ungerade Kathete eines primitiven rechtwinkligen Dreiecks eine Quadratzahl ist, so giebt es ein zweites primitives rechtwinkliges Dreieck mit kleineren Seiten, welches die Wurzel aus jener Quadratzahl zur ungeraden Kathete hat.

Aus $a^2 - b^2 = c^2$ folgt nämlich $a^2 = b^2 + c^2$, folglich sind a, b, c die Seiten eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks. Die ungerade Kathete dieses zweiten Dreiecks ist c , denn c^2 soll ungerade sein, folglich ist die gerade Kathete b , die Hypotenuse ist a . Das Dreieck ist primitiv, da ein gemeinschaftlicher Divisor je zweier der Zahlen a, b, c auch in die dritte aufgehen müsste, während a und b als teilerfremd vorausgesetzt werden. Ferner hat das zweite Dreieck kleinere Seiten als das erste, da $c < c^2, a < a^2 + b^2, b < 2ab$ ist.

Aus dem Dreieck 9, 40, 41 ergibt sich nach diesem Hilfssatze das neue Dreieck 3, 4, 5; aus 225, 25312, 25313 ebenso 15, 112, 113.

II. Wenn in einem primitiven rechtwinkligen Dreieck sowohl die Hypotenuse als auch die gerade Kathete Quadrat-

zahlen wären, so würde es ein zweites primitives rechtwinkliges Dreieck mit kleineren Seiten geben, welches zur Hypotenuse die Wurzel aus der Hypotenuse des ersten hätte, und dessen ungerade Kathete eine Quadratzahl, dessen gerade Kathete das Doppelte einer Quadratzahl sein würde.

Das Dreieck habe die Seiten $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$. Wenn nun $2ab$ eine Quadratzahl wäre, so müsste ab das Doppelte einer Quadratzahl sein, also, da a und b prim zu einander sind, die eine dieser Zahlen, nämlich die ungerade eine Quadratzahl, die andere, nämlich die gerade das Doppelte einer Quadratzahl. Die ungerade Zahl sei a , die gerade b . Wäre nun auch die Hypotenuse $a^2 + b^2$ eine Quadratzahl c^2 , so würden wir ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a , b , c erhalten, welches offenbar primitiv sein müsste, und dessen Seiten kleiner als die des ersten Dreiecks sein würden. Es ist nämlich $c < c^2$, $b < 2ab$ und $a < a^2 - b^2$, da $a + b > a$, $a - b \geq 1$ ist.

Mittels dieser beiden Hilfssätze wird jetzt der Satz, dass die Fläche eines primitiven rechtwinkligen Dreiecks keine Quadratzahl sein kann, in folgender Weise bewiesen:

Das Dreieck habe die Seiten $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$. Wäre nun die Fläche, das ist das halbe Produkt der Katheten, eine Quadratzahl, so würde das Produkt der Katheten das Doppelte einer Quadratzahl sein. Die Katheten sind aber prim zu einander. Daher wäre die ungerade Kathete $a^2 - b^2$ gleich einer Quadratzahl c^2 , die gerade Kathete $2ab$ das Doppelte einer Quadratzahl. Wenn aber $a^2 - b^2 = c^2$ wäre, so würde es nach dem ersten Hilfssatze ein zweites primitives rechtwinkliges Dreieck mit kleineren Seiten geben, dessen ungerade Kathete c , dessen gerade Kathete b , dessen Hypotenuse a sein würde. Da nun noch $2ab$ das Doppelte einer Quadratzahl sein müsste, so wäre ab eine Quadratzahl und, da a prim zu b ist, jede dieser beiden Zahlen eine Quadratzahl. Das zweite Dreieck hätte folglich sowohl zur Hypotenuse a , als auch zur geraden Kathete b eine Quadratzahl. Somit wären die Bedingungen des zweiten Hilfssatzes erfüllt, und dieser würde uns ein drittes primitives rechtwinkliges Dreieck mit noch kleineren Seiten liefern, welches ganz wie das erste Dreieck zur ungeraden Kathete eine Quadratzahl, zur geraden Kathete das Doppelte einer Quadratzahl haben müsste.

Von diesem dritten Dreieck ausgehend würden wir vermittels eines vierten zu einem fünften Dreieck von derselben Eigenschaft wie das erste gelangen, und so würden sich unendlich viele primitive rechtwinklige Dreiecke ergeben, jedes folgende mit kleineren Seiten als das vorhergehende, und alle von der Beschaffenheit, dass die ungerade Kathete eine Quadratzahl, die gerade Kathete das Doppelte einer Quadratzahl, also die Fläche eine Quadratzahl wäre. Das ist aber unmöglich, da es nicht unendlich viele ganze Zahlen giebt, welche kleiner sind als eine gegebene ganze Zahl.

Durch ähnliche Betrachtungen wird in der Arbeit von Frenicle weiter der Satz bewiesen, dass die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Zahlen auch nicht das Doppelte einer Quadratzahl sein kann.

Der oben gegebene, durchaus einwandfreie Beweis ist von Leonhard Euler in der Einleitung der 1738 veröffentlichten Arbeit *Theoremata quorundam arithmeticonum demonstrationes (Commentationes arithmeticae collectae I. p. 24)* erwähnt worden. Euler beklagt, dass wir nicht die Beweise der von Fermat gegebenen Sätze besitzen, u. a. der Sätze, dass weder die Summe noch die Differenz zweier Biquadrate ein Quadrat sein könne. Mit Bezugnahme auf die letzteren Sätze fährt er dann fort: *Quamvis enim de earum veritate nemo dubitet, tamen nusquam exstat demonstratio, quantum mihi quidem constat, rigida, praeter libellum quendam a Frenicio olim editum, cujus titulus est Traité des triangles rectangles en nombres. Demonstrat autem hic autor, inter alia, in nullo triangulo rectangulo, cujus latera rationalibus exprimentur numeris, aream posse esse quadratum, unde facile veritas memoratarum propositionum de summa et differentia duorum biquadratorum deducitur. Sed ista demonstratio tantopere proprietatibus triangulorum est involuta, ut nisi summa attentio adhibeatur, vix perspicue intelligi possit.* Wenn Euler, der dann die angeführten und noch einige andere zahlentheoretische Sätze ebenfalls nach der Methode der unbegrenzten Abnahme beweist, hätte wissen können, dass er es mit einem Geistesprodukte Fermats zu thun hatte, würde er dem Beweise wahrscheinlich grössere Aufmerksamkeit geschenkt haben und dann zu einem günstigeren Urteil gelangt sein.

Rezensionen.

The works of Archimedes edited in modern notation with introductory chapters by T. L. HEATH, Sc. D., sometime fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897 at the university press. CLXXXVI, 326 p.

Herr Heath setzt seine Versuche, die Kenntnis auch anderer griechischer Schriftsteller als Euklid unter den Engländern zu verbreiten, eifrig fort. Auf Diophant liess er Apollonius folgen (vergl. unsere Besprechung Bd. 42 Hist.-litter. Abtlg. S. 43—44), auf Apollonius Archimed, und wir glauben keine Indiskretion zu begehen, wenn wir nach brieflichen Mitteilungen so viel ausplaudern, dass Herr Heath sich mit noch weiteren Plänen ähnlicher Art trägt. Wir können ihm nur Glück dazu wünschen, da mit jedem neuen Schriftsteller, den er behandelt, seine Tüchtigkeit zu

solcher Bearbeitung zu wachsen scheint. Wie sein Apollonius seinen Diophant überragte, wird er selbst durch seinen Archimed in Schatten gestellt. Wir denken dabei weniger an die Übersetzung selbst. Sprachliche Kenntnisse, verbunden mit so viel mathematischen Wissens, als der Inhalt der Archimedischen Schriften von ihren Lesern verlangt, konnten zu deren Herstellung genügen. Aber die umfassende Einleitung forderte und fand in Herrn Heath einen Verfasser, der auf der Höhe der geschichtlich-mathematischen Litteratur sich bewegt. Herr Heath hat offenbar alles gelesen, was auf Archimed und dessen wissenschaftliche Bedeutung sich bezieht. Er hat die Ergebnisse früherer Forschung mit kritischem Auge betrachtet und hat sie aufs scharfsinnigste zu ergänzen gewusst. Er hat endlich Fremdes und Eigenes zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufügen verstanden, das eben durch seine Einheitlichkeit den Eindruck der Wahrheit um so lebhafter hervorbringt, je mehr Herr Heath seine Persönlichkeit hinter den griechischen Schriftstellern, die er selbst reden lässt, verbirgt, und je deutlicher er den hypothetischen Charakter dessen betont, was er ohne unmittelbare Stütze ausspricht. Wir sind seinen Ausführungen mit gespannter Aufmerksamkeit gefolgt, und auch wo er uns nicht vollständig überzeugte, hat er doch stets uns gefesselt. Um nur eine sprachliche und eine sachliche Einzelheit aus dem überreichen Inhalte hervorzuheben, bemerken wir, dass der Kurvenname Salinon künftig nicht leicht mehr anders als mit Herrn Heath von dem lateinischen Salinum, das Salzfass, hergeleitet werden wird, und weisen wir auf die ungemein klare und sorgfältige Untersuchung der Kenntnisse Archimeds auf dem Gebiete der kubischen Aufgaben besonders hin. Mag das vielfache Operieren mit Proportionen den heutigen Leser fremdartiger anmuten, als wenn Gleichungen angewandt wären, dem griechischen Geiste ist es dafür um so verwandter und führt den Leser in die Denkweise der Alten ein, ohne welche sich anzueignen eine richtige Würdigung ihrer Leistungen kaum möglich ist.

CANTOR.

Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius. Una cum Algorismo ipso edidit et praefatus est MAXIMILIANUS CURTZE, Professor Thoruniensis. Sumptibus Societatis Regiae scientiarum Danicae. Havniae 1897 apud A. F. Host et Fil. XIX, 92 p.

Gegen das Jahr 1250 schrieb Johannes von Sacrobosco sein kurzgefasstes Lehrbuch der Rechenkunst mit ganzen Zahlen, welches teils selbst, teils in Nachahmungen auf lange Zeit hin den Universitätsunterricht in der Arithmetik beherrschte. Der Lehrer fand seine Aufgabe wesentlich darin, Erläuterungen zu dem Algorismus des Johannes von Sacrobosco vorzutragen, und ein solcher Kommentar wurde am 31. Juli 1291 von Petrus Philomenus von Dacien vollendet. Herr Curtze hat den historisch-mathematischen Studien einen neuen Dienst erwiesen, indem er den Algorismus des Johannes von Sacrobosco in einem gereinigteren Texte, als er bis

her vorlag, dann den Kommentar des Petrus von Dacien überhaupt erstmalig herausgab und in einer vortrefflichen Einleitung das Wissenswürdigste hervorhob. Der zwischen 1446 und 1450 geschriebene *Codex latinus Monacensis 11067* lieferte den Wortlaut, eine auch sonst wichtige Handschrift, in welcher beispielsweise eine Einteilung des Winkelgrades in 100 Minuten zu 100 Sekunden in einer Tabelle benutzt ist, während das Vorkommen dieser Centesimalteilung im XV. Jahrhundert bisher nicht bekannt war. Wir gestatten uns zwei kleine Zusätze zu der von unserem gelehrten Freunde verfassten Einleitung.

Johannes von Sacrobosco hat als einen Namen der Null *theca* angegeben, welches abgekürzt t geschrieben ist. Petrus und in Übereinstimmung mit ihm andere Kommentatoren bezeichnen *theca* als Name eines Brenneisens, *cautherium*, mittels dessen Verbrechern ein rundes Brandmal auf Stirne oder Kinnbacken aufgedrückt wurde. Eine Bestätigung dieser Bedeutung von *theca* scheint nicht aufzufinden, vielmehr dürften hier volksetymologische Versuche zur Deutung von *theca* vorliegen, und wir wenigstens sind geneigt auch heute noch *theta* als Name der Null zu lesen, welche diesem griechischen Buchstaben ähnelt.

Bei Johannes von Sacrobosco schliesst sich an die *Subtractio* die *Mediatio*, an diese die *Duplatio*, dann folgt *Multiplificatio* u. s. w. Der Kommentator bemerkt nichts über diese Reihenfolge. Seit Ende des XV. und Anfang des XVI. Jahrhunderts ist Halbierung und Verdoppelung aus den Lehrbüchern verschwunden. Merkwürdig genug, dass es, wie Herr Fr. Studnicka uns mitteilt und zu veröffentlichen gestattet, in einzelnen böhmischen Volksschulen offenbar nach uralter Übung noch gelehrt und als Ersatz der Multiplikation angewandt wird! Soll $2k$ mal m genommen werden, so wird $2k$ halbiert, m dupliert und $2m$ sodann k mal angeschrieben und addiert. Heisst der Multiplikator $2k + 1$, so wird $2m$ wieder k mal und darunter noch m angeschrieben und alsdann addiert. Das ist unter allen Umständen ein bemerkenswertes Beispiel von der erhaltenden Kraft der Unwissenheit. Herr Studnicka findet überdies in dem bei dem erwähnten Verfahren dem Verdoppeln von m vorausgehenden Halbieren eine Erklärung dafür, weshalb die *Mediatio* in dem alten Lehrgange der *Duplatio* vorausgeschickt wurde. Von einem ähnlichen Sichforterben der alten Verdoppelungsmethoden bei der Multiplikation weiss Herr Plakhovo zu erzählen, welcher es bei russischen Bauern zu beobachten Gelegenheit hatte (vergl. Mathesis Ser. 2, VII, 87). CANTOR.

Opus Palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10'' zu 10'' Herausgegeben von Dr. W. JORDAN, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Hannover und Leipzig, 1897, Hahnsche Buchhandlung. VII, 270 S.

Als 1596 das *Opus Palatinum*, jenes Riesentabellenwerk, welches die trigonometrischen Funktionen für Winkel, welche von 10 zu 10 Sekunden

wachsen, auf 10 Dezimalstellen enthält, in Neustadt die Presse verließ, als es 1613 durch den *Thesaurus Mathematicus* noch überboten wurde, in welchem die Rechnung bis auf 15 Dezimalstellen geführt ist, schien dem Bedürfnisse rechnender Geometrie Genüge geleistet. Da kamen die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln in Aufnahme und verdrängten das Werk, das Unsummen an Geld und nie wieder zu ersetzende Arbeitszeit hervorragender Rechner verschlungen hatte. Heute, also rund 300 Jahre nach dem Erscheinen des *Opus Palatinum*, kehrt die Feldmesskunst zu dem alten Werke zurück. Logarithmentafeln mit immer kleinerer Zahl von Dezimalstellen und entsprechend geringer Genauigkeit der ermittelten Rechnungsergebnisse bürgern sich ein, werden selbst durch die Rechenmaschine verdrängt, und dieser dienen Tafeln der trigonometrischen Funktionen als unmittelbares Hilfsmittel. Herr Jordan hat ein Exemplar des überaus seltenen *Opus Palatinum* aufgetrieben, das früher der reichen Büchersammlung des unvergesslichen Altmeisters geschichtlich mathematischer Forschung, Michel Chasles, angehörte, und hat es zur Grundlage neuer Sinus- und Cosinustafeln von $10''$ zu $10''$ gemacht. Wir haben es damit ausgesprochen, dass kein einfacher Abdruck des *Opus Palatinum* stattgefunden hat. Erstens sind vielfältige Kontrolrechnungen angestellt worden. Zweitens sind nur sieben Dezimalstellen aufgenommen. Drittens beschränkt sich der Druck auf die beiden Funktionen Sinus und Cosinus. Viertens ist neben der gewöhnlichen Einteilung des Quadranten in 90^0 zu $60'$ zu $60''$ auch die neuerdings beliebter gewordene in 100 gr. zu 100 c. zu 100 c. c. beigedruckt, wobei den c. c. noch zwei Dezimalstellen beigefügt sind. Herausgeber und Verleger bereiten schon eine Tabellenausgabe vor, welche alle sechs trigonometrischen Funktionen und überdies die geschichtlich hochwichtigen Einleitungen zum *Opus Palatinum* und zum *Thesaurus Mathematicus* im lateinischen Urtexte sowie in deutscher Übersetzung enthalten soll.

CANTOR.

P. Aegydy Everard von Raitenau, 1605—1675 Benediktiner von Kremsmünster, Mathematiker, Mechaniker und Architekt. Ein Lebensbild nach Quellen entworfen von Professor P. FRANZ SCHWAB, Direktor der Sternwarte in Kremsmünster. Salzburg 1898. Separat-Abdruck aus den im Selbstverlage der Gesellschaft für Salzburger Landeskunde erschienenen Mitteilungen, XXXVIII. Band. 105 S.

Dieses Lebensbild ist zweifellos für die meisten Leser von spannedem Interesse. Es giebt eine ungeschminkte Darstellung des Klosterlebens in der Mitte des 17. Jahrhunderts, der wissenschaftlichen und nicht wissenschaftlichen, kirchlichen und weltlichen Strömungen, die sich damals bald vereinigten, bald einander entgegenwirkten. Bei unseren besonderen Fachgenossen wird aber P. Aegydy Everard von Raitenau, auch nachdem sie mit ihm bekannt geworden sind, kaum ein bleibendes Andenken sich er-

halten. Er war Mathematiker im Sinne seiner Zeit, nicht der unseren. Seiner Mitwirkung an der Errichtung kirchlicher Gebäude, an der Herstellung von Sonnenuhren, von astronomischen Instrumenten wollen wir das Verdienstliche nicht absprechen, aber wir glauben kaum, dass es Herrn Schwab trotz aller Mühe gelungen ist, seinem Helden einen Platz in der Geschichte der Mathematik oder der Astronomie zu sichern. CANTOR.

Critique de l'enseignement des mathématiques par GUSTAVE SPERK, Etudiant à l'École d'Ingénieurs à Lausanne. Audi alteram partem. (Destiné aux professeurs) Lausanne 1898. Imprimerie Guilloud-Howard. 1898. 34 p.

Herr Sperk wünscht den mathematischen Unterricht der Art erteilt, dass das Lehrbuch und der Lehrer — er stellt an beide die gleiche Anforderung — immer zuerst auseinandersetze, in welcher Richtung man sich von dem einmal erreichten Standpunkte aus weiter bewegen wolle, dann welches der nächste Schritt auf diesem Wege sei, und wie man ihn selbst vollziehen wolle. Nach dieser Vorbereitung erst solle man die eigentliche Beweisführung der Sätze folgen lassen, welche dann immer von dem Schüler werde begriffen werden, so dass er sie ohne Gedächtnisanstrengung jederzeit nachzuerfinden im stande sei. Lehrbücher und Lehrer, die so verfahren, kennt Herr Sperk nicht, also ist der gegenwärtige mathematische Unterricht schlecht und muss von Grund auf geändert werden. Wir sind mit Herrn Spersks Forderung eines Fortschrittes mit vorhergehender Wegmarkierung, wenn wir so sagen dürfen, durchaus einverstanden, und wir glauben Herrn Sperk verraten zu dürfen, dass die meisten Lehrer ebenso denken, wenn nur eine Voraussetzung erfüllt ist, die nämlich, dass der Schüler die Wegmarken zu lesen im stande ist. Auf der Universität, an der technischen Hochschule dürfte das der Fall sein, vielleicht auch in den höchsten Klassen von Mittelschulen. Aber in den unteren Schulklassen? Herr Sperk versuche doch, einem Knaben von 6 bis 8 Jahren das Einmaleins oder die Regeln der Division theoretisch auseinanderzusetzen! Und wie in der Arithmetik giebt es auch in der Geometrie ein Einmaleins, das heisst gewisse ganz einfache Sätze, die dem Gedächtnisse anvertraut sein müssen, um jeden Augenblick zum Gebrauche bereit zu stehen. Man wird sie dem Knaben zu beweisen haben, soweit sein Verstand für den Beweis reif ist, damit er an die Sätze glauben könne, die für ihn feststehende Wahrheiten sein müssen, aber dann muss das Gedächtnis doch daran. Eine Lehre für alle Altersklassen giebt es nicht, eine Lehrmethode auch nicht.

CANTOR.

Analytische Geometrie der Ebene von MAX SIMON mit 45 Abbildungen. Leipzig 1897. G. J. Göschensche Verlagshandlung. 203 S.

Das 65. Bändchen der Sammlung Göschen liegt vor uns. Ein das fehlende Vorwort ersetzendes, sicherlich nicht ohne Wissen des Verfassers

des Bändchens entstandenes fliegendes Blatt sagt: „Die Absicht des Verfassers war darauf gerichtet, die Koordinatengeometrie mit den einfachen Mitteln der Schule, insbesondere ohne Anwendung von Determinanten und Differentialrechnung zu behandeln und dabei doch die neueren Gedanken und Methoden wie namentlich das Dualitätsprinzip, die symbolische Rechnung u. s. w. zum Verständnis zu bringen.“ Ohne mit dem Verfasser rechten zu wollen, da wir jedem die Befugnis zuerkennen müssen, seine Zielpunkte und Wege selbst zu bestimmen, erlauben wir uns von vorn herein die Ausschliessung der Differentialrechnung zu billigen, die der Determinanten zu bedauern. Die Differentialrechnung selbst nämlich dem Anfänger klar zu machen, dürfte nicht leichter als unter Anwendung analytisch-geometrischer Betrachtungen gelingen, und deshalb muss eine analytische Geometrie ohne Differentialrechnung vorausgehen. Einen Grund zur Vermeidung der Determinanten können wir dagegen nicht erkennen. Sollte die Mathematik der Mittelschule da und dort die Gleichungen mit mehreren Unbekannten noch ohne Determinanten lösen lassen, so sind die für die Anwendung in der analytischen Geometrie der Ebene erforderlichen Vorkenntnisse aus der Determinantenlehre so geringfügig, dass sie leicht eingeschaltet werden können, und wie ausserordentlich die Ergebnisse alsdann an Ebenmaß und Übersichtlichkeit gewinnen, das weiss ein Mathematiker wie Herr Simon, ohne dass man es ihm zu sagen braucht. Vielleicht entschliesst er sich für eine zukünftige Bearbeitung zu dieser Änderung. Ist doch seine analytische Geometrie von 1897 in anderen Punkten weit über die von 1892 (angezeigt in Bd. 39 Hist.-litter. Abtlg. S. 23—24) hinausgegangen, was wir um so mehr billigen, als wir damals ähnliche Fortschritte befürworteten, wie sie jetzt vollzogen sind, über unsere Vorschläge hinaus vollzogen sind. Allerdings trug das Bändchen von 1892 eine doppelt einschränkende Bezeichnung auf dem Titelblatte. Es hiess „Leitfaden“, es war bestimmt „zum Gebrauche für höhere Lehranstalten“, was durch das Vorwort noch näher als „für die Gymnasialprima nach dem neuen Lehrplane“ erklärt wurde. Heute lesen wir kurz: „Analytische Geometrie der Ebene“ ohne Zusatz, ohne Angabe eines besonderen Leserkreises, und wir wären in Verlegenheit, welchem Leserkreise wir die Benutzung des Buches vorzugsweise anraten sollen. Für Anfänger scheint es uns einigermassen schwer, ausser mit Beihilfe eines Lehrers, dessen mündlicher Unterricht sich mehr oder weniger an das Buch angeschlossen, was wir z. B. für eine Anfangsvorlesung an einer Hochschule sehr gut für möglich halten. Die vorzugsweise Benutzung schiefwinkliger Koordinaten, das Nebeneinandergehen von Punkt- und Linienkoordinaten, die Behandlung der Kegelschnitte als Kurven zweiten Grades und zweiter Klasse noch bevor die einzelnen Kegelschnitte bekannt geworden sind und nach alleiniger Vorausschickung der Geraden und des Kreises sind Eigenschaften, welche das Buch für den genannten Zweck empfehlen. Will der Lehrer etwa durch Anwendung homogener Koordinaten noch weiter gehen, will er durch Vernachlässigung der fünf letzten Abschnitte: X. Höhere Kurven,

XI. Die Cissoïde des Diokles, XII. Cassinische Kurven oder Lemniskaten, XIII. Die Spirale des Archimedes, XIV. Die Cycloïde oder Radlinie den Stoff beschränken, so steht dem nicht das mindeste im Weg. Andererseits dürften gerade diese fünf letzten Abschnitte Lesern willkommen sein, welche einen Lehrgang der niederen analytischen Geometrie der Ebene beendet haben.

CANTOR.

P. Painlevé, Leçons sur la théorie des équations différentielles professées à Stockholm (Septembre, Octobre, Novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège. — Paris 1897. A. Hermann. 19 (gedruckte) + 589 (hektographierte) Seiten.

Wenn bei einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ in einem gewissen Gebiet der x - und der y -Ebene regulär ist, so liefert der Cauchy'sche Fundamentalsatz der Theorie der Differentialgleichungen die Existenz eines Integrals $y = \varphi(x)$, das in der Umgebung einer jenem x -Bereich angehörigen beliebigen Stelle $x = x_0$ ebenfalls regulär ist und für $x = x_0$ einen willkürlichen, jenem y -Bereich angehörigen Wert $y = y_0$ annimmt. Die durch dieses Funktionselement $y = \varphi(x)$ definierte Funktion bleibt auch regulär, so lange man nur zu solchen Werten x gelangt, die zusammen mit dem zugehörigen y immer noch jenem Bereich der Regularität von $f(x, y)$ angehören. Die kritischen Werte von x , für die dies aufhört, sondern sich also in zwei wesentlich verschiedene Arten, nämlich einerseits in die festen und aus der Funktion $f(x, y)$ von vornherein erkennbaren Stellen der Begrenzung jenes x -Bereichs und andererseits in diejenigen Werte von x , für die y in eine Begrenzungsstelle seines Bereiches einrückt. Die letzteren Werte von x sind nicht aus der Differentialgleichung selbst, sondern erst aus dem Studium der ihr genügenden Funktion $y = \varphi(x)$ aufzufinden und ändern sich mit den Anfangswerten dieses Integrals. Ist $f(x, y)$ z. B. nur von x abhängig, so hat die Differentialgleichung nur feste, ist $f(x, y)$ nur von y abhängig, so hat sie nur bewegliche kritische Stellen.

Entsprechende Bemerkungen knüpfen sich an die Differentialgleichungen höherer Ordnung oder an Systeme

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Infolge des Umstandes, dass die linearen Differentialgleichungen nur feste singuläre Stellen besitzen, vermochte ihre Theorie der der übrigen Differentialgleichungen so weit vorauszuweichen, und es war ein konsequenter Fortschritt, alsdann, wie es durch die Herren Fuchs und Poincaré zuerst geschehen ist, weiter nach nicht linearen Differentialgleichungen zu fragen, die ebenfalls nur feste singuläre Stellen besitzen. Inzwischen sind auf diesem Gebiete unter anderen durch Herrn Picard und namentlich Herrn Painlevé selbst erhebliche Fortschritte gemacht worden. Dieser

war daher besonders berufen, den heutigen Stand unseres Wissens in Bezug auf die Theorie der Differentialgleichungen mit beweglichen kritischen Punkten darzustellen.

Die vorgelegte Differentialgleichung wird als algebraisch in y und seinen Ableitungen, analytisch in x vorausgesetzt. Im Vordergrund des Interesses stehen diejenigen Gleichungen, deren Integrale bei allen Umläufen, die keine festen Verzweigungsstellen einschliessen, nur eine endliche Anzahl von Werten annehmen. Die Integrale werden nicht nur als Funktionen von x bei festen Anfangswerten, sondern auch als Funktionen der Anfangswerte bei festem x studiert.

Für Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Untersuchung den grösseren ersten Teil der Vorlesungen ausmacht, gelangt Herr Painlevé u. a. zu folgenden Ergebnissen:

Die Integrale haben als nicht algebraische Singularitäten nur feste Punkte (§). Das allgemeine Integral $\varphi(x, x_0, y_0)$, worin für x und x_0 beliebige, von den ξ verschiedene Werte festgehalten werden, hat als Funktion des Anfangswertes y_0 nur algebraisch singuläre Punkte.

Bei Differentialgleichungen, deren Integrale beim Umlauf um die beweglichen Verzweigungspunkte nur eine endliche Anzahl von Werten annehmen, Differentialgleichungen also, deren einfachsten Fall diejenigen mit nur festen Verzweigungspunkten darstellen, ist das allgemeine Integral eine algebraische Funktion der willkürlichen Konstanten und umgekehrt. Jedes Integral einer solchen Differentialgleichung ist algebraisch durch x und ein Integral einer Differentialgleichung, deren Integrale in Bezug auf die variablen Verzweigungspunkte eindeutig sind, ausdrückbar.

Wie aber erkennt man, ob eine Differentialgleichung Integrale liefert, die in Bezug auf die beweglichen singulären Punkte nur eine endliche Anzahl von Zweigen haben? Ist die Zahl n dieser Zweige gegeben, so lässt sich diese Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen entscheiden; leider aber lässt sich im allgemeinen Fall für dieses n keine obere Grenze angeben. Wenn dagegen die Differentialgleichung auch in x algebraisch ist, kann man entweder feststellen, dass das Integral eine transcendente Funktion mit einer endlichen Anzahl von Zweigen in Bezug auf die beweglichen Punkte ist, oder aber die Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen. Im letzteren Falle bleibt dann noch zu entscheiden, ob eine Differentialgleichung, in der x nicht vorkommt, ein Integral mit endlicher Anzahl von Zweigen liefert. Dieser anscheinend einfachste Fall bietet aber merkwürdigerweise die grössten und noch nicht völlig gelöste Schwierigkeiten.

Die Untersuchung, ob das Integral einer in x, y, y' algebraischen Differentialgleichung algebraisch ist, erfordert wieder ganz andere Methoden, wobei die Entscheidung über die Irreduktibilität einer algebraischen Relation eine wichtige Rolle spielt.

Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen erster Ordnung tritt schon bei denen der zweiten Ordnung die neue Schwierigkeit auf, dass

unter den beweglichen auch wesentlich singuläre Stellen auftreten können. Glücklicherweise stellt sich dies als ein Ausnahmefall heraus, so dass die Differentialgleichungen zweiter Ordnung von Herrn Painlevé in eine allgemeine und eine singuläre Klasse geordnet werden können. Das Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung E_n mit endlicher Verzweigungszahl n in Bezug auf die beweglichen Punkte enthält die Anfangswerte y_0, y_0' in algebraischer oder transzcendenter Form, je nachdem E_n der allgemeinen oder der singulären Klasse angehört.

Jede Differentialgleichung der allgemeinen Klasse ist zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten äquivalent, oder algebraisch zurückführbar entweder auf eine lineare Gleichung oder ein System hyperelliptischer Differentialgleichungen.

Bei den Differentialgleichungen der singulären Klasse unterscheidet Herr Painlevé, ob die Integrale sogenannte semi-transcendente oder transzcendente Funktionen beider Anfangswerte y_0, y_0' sind. Mit diesem Begriff hängt die Irreduktibilität der Differentialgleichung zusammen, die hier eine besondere Definition erfordert.

Viele der bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelten Methoden tragen weiter auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Den Abschluss bildet die Anwendung der Ergebnisse auf den Fall reeller Variablen und namentlich auf die Differentialgleichungen der Dynamik.

Dies ist kurz der Inhalt der interessanten Vorlesungen von Herrn Painlevé. Sie machen uns mit den erheblichen Fortschritten bekannt, die in den allerletzten Jahren in diesen schwierigen Gebieten gemacht worden sind, und markieren darüber hinaus die Wege, auf denen ein weiterer Fortschritt möglich sein dürfte. Sie müssen deshalb als in hohem Grade anregend bezeichnet werden. Besondere Erwähnung verdient der ausserordentliche Reichtum und die Vielseitigkeit der benutzten Hilfsmittel, die zum Teil selbständig entwickelt werden und daher namentlich für die Funktionentheorie manchen Gewinn abfallen lassen.

Eine nebst der table des matières vorausgeschickte introduction giebt in dankenswerter Weise eine bequeme Übersicht über die hauptsächlichsten in den Vorlesungen behandelten Probleme und gewonnenen Ergebnisse.

LOTHAR HEFFTER.

Introduction à la Géométrie Différentielle suivant la méthode de H. GRASSMANN, par C. BURALI-FORTI, professeur à l'acad. milit. de Turin. Paris 1897. Gauthier-Villars. — XI u. 165 S. — Preis fr. 4. 50.

Das Werk begründet den Kalkül mit geometrischen Formen nach Art Peanos durch Zurückführung der geometrischen Gleichungen auf Gleichungen zwischen Tetraeder-Inhalten; so wird auch der Vektorbegriff als Punkt-Differenz abgeleitet. Es folgt die Definition des progressiven

Produktes (durch die formalen Gesetze der Multiplikation), die Begründung der Vektorenrechnung (wobei die Verwendung des Symbols i als Drehungsfaktor eingeflochten wird), die Einführung der geometrischen Formen der verschiedenen Ordnungen. Die Beispiele gehen hier und da über das gewöhnliche hinaus, z. B.: Wenn man um einen Punkt P auf dem Umfang des inneren zweier konzentrischer Kreise zwei aufeinander senkrechte Sehnen rotieren lässt, die eine mit der inneren Kreislinie in A , die andere mit der äusseren Kreislinie in B und C zum Schnitt bringt, so hat das Dreieck ABC (von dem noch andere Sätze bewiesen werden) einen festen Schwerpunkt. Auch das regressive Produkt wird formal durch die bekannte Gleichung

$$AB \cdot PQR = APQR \cdot B - BPQR \cdot A$$

definiert; erst nachträglich wird seine eigentliche Bedeutung entwickelt. Ein solches Verfahren ist in ähnlichen Fällen freilich in den Lehrbüchern über Ausdehnungslehre allgemein üblich, wird aber für den Anfänger immer etwas Unbefriedigendes haben. Das erste Kapitel: „Les formes géométriques“ bringt noch die Beziehungen der Koordinaten, besonders der Tetraeder-Koordinaten, zur Punktrechnung.

Das zweite Kapitel „Formes variables“ begründet die Infinitesimalrechnung der geometrischen Grössen. Auch hier leistet die Methode der Ergänzung der Formen zu Tetraedern gute Dienste, indem sie die Definitionen der Grenzen und Differentialquotienten geometrischer Grössen auf arithmetisches Gebiet zurückführt. Bei der Ableitung der Taylorsche Reihe nach derselben Methode ist freilich der Beweis nicht als vollständig zu betrachten, indem er im wesentlichen auf der Division durch eine geometrische Grösse α beruht, die bekanntlich im allgemeinen nicht gestattet ist (vergl. Grassmann, A_1 , §§ 62, 63). Die Anwendungen werden für ebene Kurven bis zum Beweis des Satzes von Savary über Rollkurven geführt, bei Raumkurven bis zum Beweis der Frenetschen Formeln. Auch findet sich ein Paragraph über Regelflächen, worin die Ausdrücke für die Tangentialebene, den Centralpunkt einer Erzeugenden, das Oskulationshyperboloid u. a. m. aufgestellt werden.

Das dritte Kapitel „Applications“ behandelt u. a. die allgemeinen Schraubenlinien; die mit einer Raumkurve zusammenhängenden Regelflächen (Polarfläche, rektifizierende Fläche, Fläche der Hauptnormalen, der Binormalen); die Bestimmung aller Regelflächen, deren Striktionslinie gegeben ist; die Evoluten und Evolventen der Raumkurven; die Bertrandschen Kurven (zwischen deren Krümmung und Torsion eine lineare Relation besteht). In kurzen Noten wird anhangsweise der Differentialparameter erster Ordnung erörtert, ferner der Ausdruck des Linienelements, sowie die zweite Haupt-Differentialform einer krummen Fläche aufgestellt, ohne dass die allgemeine Flächentheorie eigentlich in den Rahmen des Buches aufgenommen wäre.

Im einzelnen finden sich einige Ungenauigkeiten. So wird auf Seite 12 aus $OIJ = 0$ erschlossen $IJ = 0$, bevor von der Bedeutung eines Pro-

duktes eines Punktes O mit zwei Vektoren I, J die Rede war, was erst Seite 14 der Fall ist. Beim vierten Beispiel auf Seite 33 wird stillschweigend eine bestimmte Bezeichnung der nicht gezeichneten Figur gedacht (sonst ist der Satz nicht richtig), die aber aus den Voraussetzungen nicht ersichtlich ist, sondern durch Probieren gefunden werden muss. Seite 71 wird das Produkt OPP' zweier Punkte und eines Vektors differenziert, ohne dass hierzu die Mittel vorhanden wären; denn die Regel Seite 66, c) genügt hierzu nicht, weil dort vom Produkte zweier Formen derselben Ordnung die Rede ist, worauf sich der vorliegende Fall nicht zurückführen lässt. Artikel 50 wird die Definition des Krümmungsmaßes einer Kurve durch eine Formel gegeben. Aber nur für die ebenen Kurven wird später (Artikel 52) darauf aufmerksam gemacht, dass diese Definition mit einer der sonst üblichen geometrischen Definitionen übereinstimmt.

Trotzdem ist das zweite und dritte Kapitel des vorliegenden Werkes als eine wertvolle Bereicherung der Litteratur über diesen Gegenstand zu betrachten, da auf knappem Raum ein reiches Material geboten wird, das zum Teil über die bisher mit den Mitteln des geometrischen Kalküls behandelten Gegenstände hinausgreift.

KONRAD ZINDLER.

Géométrie dirigée, Les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées ou non dirigées, par G. FONTENÉ. Paris 1897. Nony & Co. 82 Seiten in 8°.

Dieses Buch kann als Ergänzung zum elementaren Unterricht in der Planimetrie dienen, sowie als Vorstudium zur analytischen Geometrie. Die Idee ist, die Gebilde der Elementargeometrie „Gerade, Strecke, Winkel, Kreisperipherie, Dreiecksinhalt und andere mehr“ stets mit einem bestimmten Richtungssinn zu verknüpfen und daraufhin die Maßzahlen jener Gebilde nicht absolut, sondern stets mit einem bestimmten Zeichen versehen einzuführen. Die Nützlichkeit bez. Notwendigkeit dieses Standpunktes zum Zwecke einer exakten Angabe zahlreicher Elementarsätze wird an vielen Beispielen ausgeführt.

FRICKE.

On the forms of plane quartic curves. A dissertation presented to the faculty of Bryn Mawr college for the degree of doctor of philosophy by RUTH GENTRY, New-York 1896. R. Drummond. 73 S. in 8° und 24 Figurentafeln.

Systematische Durchforschung des bereits vielfältig behandelten Problems, die reellen Züge der ebenen Kurven vierter Ordnung zu beschreiben. Die Klassifikation basiert auf den Plücker'schen Formeln und der bekannten analogen Relation von Klein, die Realitätsverhältnisse betreffend. Eine Reihe weiterer Einteilungsprinzipien liefert für die vier hier in Betracht kommenden Geschlechter $p = 0, 1, 2, 3$ bezw. 51, 40, 17 und 36 verschiedene Typen von Kurven.

FRICKE.

Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie von G. LEJEUNE DIRICHLET (1839—1840). Deutsch herausgegeben von R. HAUSSNER als Nr. 91 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften. Leipzig 1897, Engelmann. 128 S. in 8^o.

Die von Dirichlet in die Zahlentheorie eingeführten Methoden der Analysis des Unendlichen wurden von ihm selbst erstlich auf das bekannte Theorem von den Primzahlen in unendlichen arithmetischen Reihen angewendet, sodann weiter mit dem grössten Erfolge auf das Problem der Bestimmung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen. Die hierbei zu Tage kommenden Resultate sind zumal bei negativen Determinanten schliesslich höchst einfach. Aber es ist bis heute nicht möglich gewesen, den Dirichletschen Entwicklungsgang durch einen direkten und rein arithmetischen zu ersetzen. Eine Neuausgabe der fundamentalen Dirichletschen Abhandlung über die Bestimmung der Klassenanzahl ist demnach auch heute noch keineswegs allein etwa aus Rücksichten historischer Pietät bestens zu begrüssen. Herr Haussner hat die Übertragung der Abhandlung ins Deutsche mit grosser Gewissenhaftigkeit besorgt. Man verdankt dem Herrn Herausgeber überdies eine Reihe sehr nützlicher Anmerkungen, welche einmal die Biographie Dirichlet's sowie die ältere und neuere Geschichte des Problems der Klassenanzahl im Umriss bringen, sodann aber eine grössere Reihe von sachlichen Erläuterungen und Citaten zum Dirichletschen Text liefern.

FRICKE.

Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten von A. BRAVAIS, übersetzt und herausgegeben von C. und E. BLASIUS als Nr. 90 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften. Leipzig 1897, Engelmann. 142 S. in 8^o und 2 Tafeln.

Durch die vorliegende Abhandlung von Bravais, welche kurz vor der Mitte des Jahrhunderts entstand, ist die moderne Entwicklung der Theorie der Kristallstruktur in Anregung gebracht, welche späterhin vor allem L. Sohncke zu ihrem Hauptvertreter hatte. Diese Entwicklungen haben neustens namentlich durch die Forschungen E. v. Fedorows und A. Schönflies' auch das Interesse der reinen Mathematiker in erhöhtem Maße auf sich gezogen. Es hat sich nämlich ein inniger Zusammenhang der ursprünglichen Bravaisschen Fragestellung nach den gesamten regelmässigen Punktanordnungen in Ebene und Raum mit den diskontinuierlichen Gruppen von Translationen, Drehungen und Umlegungen des Euklidischen Raumes in sich ergeben. Von den Diskontinuitätsbereichen dieser Gruppen aus kann man die Systeme regelmässig verteilter Punkte unmittelbar gewinnen. Bei dieser Sachlage wird die Neuausgabe der Bravaisschen Abhandlung, welche von C. und E. Blasius sorgfältigst

ins Deutsche übertragen und von einer Reihe kleinerer Versehen befreit ist, nicht nur seitens der Kristallographen von Fach, sondern auch von den Mathematikern bestens begrüßt werden.

FRICKE.

An essay on the foundations of geometry, by BERTRAND A. W. RUSSELL, M. A., fellow of Trinity college, Cambridge 1897, University press. XVI und 201 p.

Das vorliegende Buch dürfte insofern für ungewöhnlich gelten, als in demselben der Versuch gemacht wird, bei der Begründung der Raumwissenschaft gleichermaßen den philosophischen wie den mathematischen Ansprüchen gerecht zu werden. Dieser universelle Standpunkt gegenüber dem gekennzeichneten Problem hat seine besonderen Schwierigkeiten. Trotz der durch den Gegenstand gegebenen nahen Beziehungen ist das gegenseitige Verständnis zwischen den Philosophen und Mathematikern in der Frage der Raumtheorie noch nicht soweit entwickelt, als man wohl wünschen möchte. War doch noch z. B. Lotze im wesentlichen ohne Verständnis gegenüber den Entwicklungen der „Metageometrie“*, während andererseits die Philosophie öfters den Vorwurf erhebt, dass die Mathematiker in der Fixierung ihrer Prämissen nicht tief genug gingen. In letzterer Hinsicht vergleiche man etwa sogleich die Kritik, welche der Verfasser als Philosoph an den Prämissen von Riemanns „Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ im Verlaufe von Kapitel II seines Werkes übt

Der Verfasser ist mathematischerseits am meisten durch Kleins „Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie“ beeinflusst. Das Kapitel I seines Werkes „A short history of metageometry“ legt Zeugnis davon ab, dass er jene Vorlesungen gründlich und mit gutem Verständnis studiert hat.

In etwas freier und selbständigerer Weise konnte der Verfasser seinen eigenen kritischen Neigungen im Kapitel II folgen. Die neuere philosophische Entwicklung der Raumtheorien hebt bekanntlich mit Kants transzendentaler Ästhetik an. Bereits in der Einleitung setzt sich der Verfasser mit den Kantischen Grundbegriffen des „Subjektivismus“ und „Apriorismus“ in Kontakt, und er erweist sich im Kapitel II zugleich als Kenner der modernen Logik, welche Kants „synthetische“ und „analytische Urteile“ einer fortbildenden Kritik unterzogen hat. Übrigens giebt der Verfasser im Kapitel II einen beständig von der Kritik begleiteten Bericht über die bekannten Untersuchungen von Riemann und Helmholtz, während er von neueren Philosophen Lotze und Erdmann behandelt.

Es kann hier in keiner Weise der Raum beansprucht werden, um die vielfältigen kritischen Einwürfe des Verfassers etwa im einzelnen auf

* Heutzutage kann man dem Lernenden vor allem auch den sehr lehrreichen Briefwechsel zwischen Gauss und den beiden Bolyai empfehlen (veröffentlicht durch Stäckel und Engel in Bd. 49 der Mathematischen Annalen).

ihren Wert oder Unwert zu prüfen. Vielmehr soll diese kurze Anzeige die Leser der Zeitschrift nur allgemein auf die Gedankenrichtung des Verfassers und die Gründlichkeit seiner Einzelentwickelungen hinweisen. So mag wegen der noch folgenden Kapitel die kurze Andeutung hinreichen, dass der Verfasser auf der bisherigen historisch-kritischen Basis nunmehr aufbauend weiter geht, indem er die notwendigen und hinreichenden Axiome, welche einmal der projektiven, sodann der metrischen Geometrie nach seiner Meinung zu Grunde zu legen sind, einzeln bespricht. Die hierbei zu Tage tretenden Ergebnisse werden im Schlusskapitel wieder zu philosophischen Folgerungen verwertet.

FRICKE.

Theory of groups of finite order. By W. BURNSIDE, M. A., F. R. S., late fellow of Pembroke College, Cambridge, Professor of Mathematics at the royal naval College, Greenwich. Cambridge 1897, at the University Press. XVI und 388 S.

Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung ist eine Schöpfung der neuesten Zeit. Nachdem durch Lagrange und durch Cauchy und später dann durch Galois, Serret, Jordan u. A. die Theorie der Substitutionengruppen geschaffen und ausgebildet war, handelte es sich für die Wissenschaft darum, noch einen Schritt weiter zu gehen, den Kern dieser Lehren, abgesehen von verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, herauszuschälen und die Theorie so abstrakt als möglich zu fassen. Die Behandlung der Gruppen durfte sich lediglich auf die Gesetze gründen, gemäss deren die Symbole der Operationen unter einander in Verbindung gesetzt werden; man musste zu dem Begriffe der „abstrakten Gruppe“ fortschreiten. Diese Auffassung, diese Stellung des Theorems stammt vor allem von Cayley, dessen philosophisch angelegter Geist recht geeignet zu solchem Vorgehen war. Um die Fortbildung seiner Ideen haben sich vorzüglich deutsche, englische und amerikanische Forscher verdient gemacht. Von deutschen Mathematikern wären hauptsächlich Dyck, Frobenius, Hölder, Stickelberger und Weber zu nennen. Die bisherigen Untersuchungen finden sich in den verschiedensten Zeitschriften und Publikationen aller Länder verstreut; und so ist es, trotzdem wir noch weit entfernt sind, auch nur von einem vorläufigen Abschlusse der Theorie sprechen zu können, dennoch ein glücklicher Gedanke, ein Lehrbuch dieses ebenso interessanten wie in seinen Anwendungen weitgreifenden und wichtigen Gegenstandes zu geben.

Herr Burnside, von dem uns bereits eine recht brauchbare, im Verein mit Herrn Panton geschriebene „Theorie der Gleichungen“ bekannt ist, hat sich der Aufgabe mit Geschick und Erfolg unterzogen. Seine Darstellungsweise ist leicht und flüssig; er versteht es, das Wichtige (auch äusserlich) von dem Unwesentlichen zu trennen; das Buch ist gut und klar disponiert. Auffallend ist, dass er bei seinen Bezeichnungen keinen ausgiebigen Gebrauch von grossen und kleinen Lettern gemacht hat; durch

eine geschickte Benutzung wäre an manchen Stellen das Verständnis erleichtert worden. Die Quellen werden so viel als möglich angegeben; mitunter geschieht es freilich, dass nicht auf den ursprünglichen Autor, sondern auf einen späteren Darsteller Bezug genommen wird.

Der Verfasser beginnt mit einer Darlegung des Substitutionenbegriffes und der Darstellung von Substitutionen. Es ist dies ein zwar nicht unumgänglich nötiges Kapitel, denn die Gruppentheorie soll ja gerade von der Substitutionentheorie losgelöst werden; aber gleichwohl wird eine Rücksicht auf die allgemein gültige Darstellung einer abstrakten Gruppe unter der Form einer Substitutionengruppe gar nicht zu vermeiden sein. Gerade durch die Spezialisierung auf Substitutionen werden so wichtige Begriffe wie diejenigen der Transitivität und der Primitivität eingeführt, dass man eine Übergehung derselben schwer vermissen würde. In richtiger Erkenntnis dieser Verhältnisse hat Herr Burnside also dieses erste Kapitel geschrieben und ist auch im achten, neunten und zehnten Kapitel ausführlich auf die eben erwähnten Eigenschaften von Substitutionengruppen eingegangen.

Nach der Aufstellung der Definition einer endlichen Gruppe beschäftigt sich der Verfasser zunächst mit der Erklärung der Fundamentalbegriffe „Ordnung“, „Produkt“, „Multiplikationstabelle“, „erzeugende Operationen“, „Isomorphismus“. Bei der Definition der Gruppe selbst wird die Voraussetzung ihrer Endlichkeit ausgenutzt; vielleicht wäre es besser gewesen, die Darlegung des Gruppenbegriffes allgemeiner zu fassen und aus demselben dann den der endlichen Gruppen durch die notwendigen Einschränkungen herzuleiten, wie dies z. B. Herr Weber in seiner Algebra II, Abschnitt 1 gethan hat.

Ein weiteres Kapitel ist den einfacheren Gruppeneigenschaften gewidmet; es bespricht die Untergruppen, die selbstkonjugierten Untergruppen (für die ein kurzer prägnanter Name leider noch immer fehlt!), die Maximal-selbstkonjugierten Untergruppen (!!), die Permutabilität und so fort.

Jetzt ist das Feld so weit vorbereitet, dass eine Darstellung der Abelschen Gruppen und der Gruppen von der Ordnung p^m geliefert werden kann. In dem Gebiete der ersteren hätte die Scheringsche Arbeit erwähnt werden müssen; die Darstellung schliesst sich an Kronecker sowie an Frobenius und Stickelberger an. In dem Gebiete der Gruppen, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl ist, tritt das Verhältnis zu ihren Untergruppen als für ihre Natur entscheidend heraus; die Gruppen der Ordnung p^2 , p^3 , p^4 werden im Anschlusse an die Hölderschen Untersuchungen besprochen.

Im sechsten Kapitel wird das Sylowsche Theorem hergeleitet; es werden die nächstliegenden Folgerungen aus ihm gezogen und die Verallgemeinerungen besprochen, die wir den Forschungen des Herrn Frobenius auf diesem Felde verdanken. Als eine direkte Fortsetzung der an dieser Stelle behandelten Theoreme zeigt sich dann später das letzte Kapitel, welches von den „lösbaaren und zusammengesetzten Gruppen handelt“ und

die ebenso wichtigen wie schönen neueren Resultate des Herrn Frobenius ableitet.

Das siebente Kapitel ist den Reihen und Hauptreihen der Zusammensetzung und ihren Invarianten gewidmet.

Zwei der noch übrigen Kapitel behandeln die in letzter Zeit immer mehr beliebt gewordene geometrische Darstellung von Gruppen, deren Wichtigkeit auf den Gebieten der Analysis sich ja ausgiebig bewährt hat.

Es werden die Darstellungsmethoden von Herrn Dyck und von Cayley vorgetragen, und dabei muss, wie natürlich, ein kleiner Streifzug in das Gebiet der nicht endlichen Gruppen unternommen werden. Besonders behandelt werden die Gruppen vom Geschlechte Null und vom Geschlechte Eins.

Eingehende Berücksichtigung und Untersuchung erfährt die lineare Gruppe an der Hand der Untersuchungen der Herren Gierster und C. Jordan.

Nach dieser kurzen Inhaltsangabe möge zusammenfassend noch einmal hervorgehoben werden, dass das Werk des Herrn Burnside alles Wichtige aus dem Gebiete endlicher Gruppen in klarer Darstellung giebt; dass es nicht nur die grossen Gesichtspunkte und Theoreme der Forschung, sondern in kompendiöser Form auch die — man möchte sagen — statistischen Spezialuntersuchungen berücksichtigt; dass es durch gut gewählte, den einzelnen Kapiteln angeschlossene Aufgaben auch zu eigener Arbeit anregt. Der Verfasser hat sich den Dank des mathematischen Publikums durch sein Buch wohl verdient.

E. NETTO.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von EMANUEL CZUBER. Leipzig 1898, B. G. Teubner. 526 S.

Das in der Überschrift genannte Werk ist in erster Linie für die Studierenden an Technischen Hochschulen bestimmt, kann aber von Studierenden der Mathematik im engeren Sinne gleichfalls mit entschiedenem Nutzen gebraucht werden. Es ist das Bestreben des Herrn Verfassers gewesen, sich hierbei auf den Boden der modernen Forschung zu stellen. Die strengeren Untersuchungen, wie sie in den letzten Jahrzehnten in der höheren Analysis angestellt worden sind, sind auch auf die einführenden Lehrbücher nicht ohne Einfluss geblieben. Dieser Einfluss kann ein doppelter sein, erstens in dem Sinne, dass die theoretischen Betrachtungen vertieft und weitergeführt werden, zweitens darin, dass die fehlerhaften Darstellungen und unstrengen Sätze, wie sie in früheren Lehrbüchern vielfach vorkamen, möglichst vermieden werden, ohne dass eine grössere Vertiefung stattfindet. Wie weit man bei einem einführenden Lehrbuche nach ersterer Richtung vorzugehen hat, dürfte kaum durch eine allgemeine Regel zu bestimmen sein. Legt man als Maßstab die Höhe und die Zwecke des gewöhnlichen mathematischen Unterrichts an den deutschen technischen

Hochschulen an, so dürfte zu sagen sein, dass der Herr Verfasser bis an die Grenze des Erreichbaren, ja an einigen Punkten darüber hinaus gegangen ist. So dürften z. B. die allgemeinen Sätze über stetige Funktionen, über gleichmässige Stetigkeit, über vorwärts und rückwärts genommene Differentialquotienten etc. im allgemeinen nicht mehr im Rahmen des gewöhnlichen Unterrichts an unseren Hochschulen gebracht werden.

Andererseits möchte Referent derartige weitergehende Sätze durchaus nicht gestrichen wissen — vielleicht aber dürfte es sich empfehlen, bei einer etwaigen zweiten Auflage dieselben durch engeren Druck auszuzeichnen. Es geschieht das in anderen Büchern auch und dürfte die praktische Brauchbarkeit des Werkes erhöhen.

In Bezug auf den zweiten Punkt dürfte wohl allgemein anerkannt sein, dass auch in den einführenden Lehrbüchern möglichste Strenge und Präzision des Ausdrucks zu erstreben seien. In dem vorliegenden Buche ist dieser berechtigten Forderung vielfach Rechnung getragen, wenngleich völlige Fehlerfreiheit nicht vorhanden ist. Im übrigen ist der behandelte Lehrstoff der übliche und mit einer grösseren Anzahl von Beispielen verwoben.

Die Anwendungen sind durchaus geometrischer Natur. Referent kann sich hiermit nur vollkommen einverstanden erklären, da die geometrischen Anwendungen in erster Linie bei einem einführenden Unterricht zu berücksichtigen sind. Die in Betracht kommenden Probleme, wie das der Tangenten, der Krümmungstheorie, der Kurvendiskussion etc. finden sich in ausführlicher zum Teil eigenartiger Weise entwickelt vor. Bei der Einführung der einzelnen Begriffe tritt überall das Bestreben hervor, dieselben möglichst nach allen Richtungen hin zu erörtern und klarzulegen.

Das Buch kann sowohl Studierenden der Technik wie der Mathematik empfohlen werden.

M. KRAUSE.

Repertorio di Matematiche Superiori per ERNESTE PASCAL. I. Analisi
Milano. 642 S.

Das in der Überschrift genannte Werk soll auf möglichst kurzem Raume eine Darstellung fast aller hauptsächlichsten Theorien der modernen Mathematik geben und zwar von einer jeden so viel, dass der Leser sich orientieren und einige Litteraturkenntnis erhalten kann. Das Werk soll demgemäss keine Encyclopädie der Mathematik, sondern wie der Herr Verfasser in der Einleitung sich ausdrückt, ein bescheidenes Repertorium darstellen, das manches Mal nützliche Dienste leisten kann.

Es zerfällt in 23 Kapitel, welche 23 verschiedene Theorien enthalten — von dem Zahlbegriff an bis zu einer Angabe der wichtigsten mathematischen Instrumente und Apparate. In jedem Kapitel ist die Ordnung derart, dass zuerst die Definitionen und die Grundgedanken der Theorie, dann die Theorie

selbst und zwar ohne Beweise und schliesslich die hauptsächlichste Litteratur gegeben wird.

Es ist anzunehmen, dass das Buch in dem von dem Herrn Verfasser gewünschten Sinne wirken wird.

M. KRAUSE.

L. v. BORTKEWITSCH, **Das Gesetz der kleinen Zahlen.** Leipzig 1898, B. G. Teubner. 52 S.

Eine interessante Fortführung der mathematisch-statistischen Untersuchungen von Lexis, dem der Verfasser die vorliegende Schrift gewidmet hat. Auch in der auf Statistik angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir eine Oscillation der Meinungen zu verzeichnen, bei der die Wahrheit bald nach der einen, bald nach der anderen Seite überschritten wird. Auf die naive Voraussetzung Poissons und Quételets, dass jede statistische Relativzahl als Beobachtungswert einer konstanten Wahrscheinlichkeit anzusehen sei, folgte die scharfe Kritik von Lexis, die sich im wesentlichen auf den mittleren Fehler als Maß der „Fehlerdispersion“ stützt und als Kriterium einer „normalen Dispersion“ die ungefähre Übereinstimmung des beobachteten m. F. mit dem erwartungsmässigen verlangt. Aber nur eine einzige Relativzahl, das Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen, gab die thatsächliche Dispersion in hinreichender Übereinstimmung mit der theoretischen, während sonst überall der wirkliche (direkt berechnete) m. F. den „kombinatorischen“ erheblich übertraf — um einen Überschuss, den unser Verfasser den „Fehlerexcedenten“ nennt. Auf Grund dieser Lexischen Ergebnisse zog der Skeptizismus in die Statistik ein, und man war geneigt, den meisten statistischen Zahlen eine Beziehung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt abzusprechen. Hiergegen wendet sich der Verfasser mit Entschiedenheit und versucht, mit Preisgebung der konstanten Wahrscheinlichkeiten ein Zufallsspiel allgemeinerer Struktur der Beobachtung anzupassen. Es gelingt ihm auf zweierlei Art, den Fehlerexcedenten theoretisch zu erklären, einmal durch die anhangsweise entwickelte Hypothese einer gewissen „Solidarität der Einzelversuche“, sodann durch Annahme einer von Serie zu Serie veränderlichen Wahrscheinlichkeit. Hierbei zeigt sich, dass der Fehlerexcedent mit wachsender Beobachtungs- resp. Ereigniszahl zunimmt, so dass bei den bisher verwendeten statistischen Reihen gerade die Grösse des Beobachtungsfeldes das ungünstige Resultat verschuldete. Dagegen lassen Reihen mit kleiner Ereigniszahl, wie sie „von der wissenschaftlichen Statistik bisher kaum eines Blickes gewürdigt“ wurden, eine Verringerung des Fehlerexcedenten erwarten; dieses „Gesetz der kleinen Zahlen“, wie es der Verfasser etwas feierlich benennt, findet sich bei einigen Daten der Selbstmord- und Unfallstatistik bestätigt. Zur Darstellung der Fehlerverteilung wird hierbei nicht das Gauss'sche Gesetz, sondern eine schon von Poisson angegebene Exponentialformel benutzt, für die am Schluss ein Täfelchen gerechnet ist. Statt der blossen Warnung vor Verwechslung (S. VI) wäre eine präcise Angabe am Platze, worin

sich die Voraussetzungen des Verfassers von dem Poissonschen Schema veränderlicher Chancen unterscheiden. Das vorliegende Werkchen ist als erfreulicher Fortschritt auf dem noch so wenig gepflegten, noch so miss-trauisch angesehenen Gebiete der mathematischen Statistik zu begrüßen.

FELIX HAUSDORFF.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1895. Dargestellt von der Physi-kalischen Gesellschaft zu Berlin. 51. Jahrgang. Braunschweig 1896, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn.

Erste Abteilung, enthaltend: Physik der Materie. Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 510 S. Preis 20 Mk.

Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 843 S. Preis 30 Mk.

Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von RICHARD ASSMANN, 686 S. Preis 25 Mk.

Der umsichtigen Leitung der seit einigen Jahren neu eingetretenen Redakteure ist es nunmehr gelungen, neben der allmählichen Herausgabe der rückständigen Jahrgänge die laufenden Jahrgänge so zu beschleunigen, dass sie in dem jeweils darauffolgenden Sommer im Druck erscheinen. Für den praktisch arbeitenden Physiker ist dadurch viel gewonnen. Nach-dem die grossen, leicht zu einer Krisis führenden Schwierigkeiten glücklich überwunden sind, wünschen wir, dass künftighin die Redaktion auf den jetzt geebneten Wegen nicht zurückbleiben möge.

B. NEBEL.

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1897. Anwendungen des Gauss'schen Prinzipes vom kleinsten Zwange. Von Dr. KARL HOLLE-FREUND. Mit zwei Tafeln. Berlin 1897, R. Gärtners Verlags-buchhandlung (Hermann Heyfelder). Programm Nr. 97. 24 S.

Auf 24 den Grundproblemen der Mechanik entnommenen Beispielen wendet der Verfasser das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges an und zeigt, wie häufig dieses Prinzip in einfacher Weise zum Ziele führt. Gleich-wohl hält es auch der Verfasser für nützlich, in der Schule die Mechanik noch nach der bisherigen Methode zu lehren.

B. NEBEL.

Unmittelbare und sinngemässe Aufstellung der „Energie“ als mechanischen Hauptbegriffes und darauf gestützte folgerichtige Ableitung der übrigen grundlegenden Begriffe der Physik. Von MORITZ KUHN. Separatabzug aus dem Jahresberichte der kaiserl. königl. Staats-Realschule im VII. Bezirke. Wien 1896. Im Selbstverlage des Verfassers. 26 S.

Ausgehend von Raum und Zeit werden mit Hilfe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung zwei kinematische Grundgleichungen entwickelt, die die Basis für das Energie-Prinzip liefern. Dabei ist es erforderlich, verschiedene Grössen von einem anderen Gesichtspunkt aus zu betrachten,

als dies bisher üblich war. Verfasser glaubt von seinem Vorgehen, dass man bei streng folgerichtiger Anwendung die verschiedenen Lehren der Physik in eine natürlichere Beziehung zu einander wird bringen können. Mit Rücksicht auf den beschränkten Raum behält sich der Verfasser vor, bei einer späteren Gelegenheit die Verwendbarkeit der aufgestellten Formeln darzuthun.

B. NEBEL.

Vorlesungen über mathematische Physik. Von GUSTAV KIRCHHOFF. Erster Band. Mechanik. Vierte Auflage. Herausgegeben von W. WIEN. Mit 18 Figuren im Text. Leipzig 1897, Verlag von B. G. Teubner. 464 S.

Die Herausgabe der vierten Auflage war Kirchhoff nicht mehr beschieden. Wohl hatte er dieselbe insofern vorbereitet, als er in einem nachgelassenen Manuskript diesbezügliche Notizen gemacht hatte. Alle Veränderungen gegenüber der dritten Auflage, insbesondere auch solche von Fachgenossen herrührend, sind in besonderen Zusätzen vermerkt. Dadurch wird eine Störung im Unterricht bei Benützung verschiedener Auflagen nicht hervorgerufen. Erfreulich ist es, dass das Wesen Kirchhoffs in wissenschaftlicher Hinsicht auch nach seinem Tode sich weiter auszubreiten Gelegenheit hat.

B. NEBEL.

Die theoretische Grundlage für die Herstellung der Stereokopenbilder auf dem Wege der Photographie und deren sachgemässe Betrachtung durch Stereoskope. Von ANTON STEINHAUSER. Mit 42 Figuren. Verlag von R. Lechner (Wilh. Müller) in Wien 1897. Lechners Photographische Bibliothek IV.

Durch die ungeheure Verbreitung der Photographie durch Nichtfachleute ist die Aufmerksamkeit auch wieder mehr der Stereoskopie zugewandt worden. Die Vereinigung der Photographie und der Stereoskopie wird in manchen Gebieten wesentliche Umwälzungen hervorrufen, wie z. B. im Theater. Es ist daher in hohem Grade wünschenswert, das meistens in Zeitschriften zerstreute über Stereoskopie zu sammeln und in wissenschaftlich einheitlicher Form erscheinen zu lassen. Verfasser war dabei bestrebt, mit möglichst wenig Ansprüchen an Mathematik die Gesetze abzuleiten und somit das Buch dem weitesten Leserkreise zugänglich zu machen. Nimmt man die Ableitungen als richtig an, so kann die Mathematik ganz überschlagen werden. Nach einer das Wesen der Stereoskopie auseinandersetzenen Einleitung wird im ersten Teil die Herstellung der Stereokopenbilder auf photographischem Wege behandelt, während der zweite Teil die verschiedenen Arten von Stereokopen zum Gegenstand hat. In einem Anhang werden im wesentlichen noch die stereoskopischen Transparentbilder und ihre Herstellung berücksichtigt. Namentlich der Laie, der sich auf diesem Gebiet rasch orientieren will, wird dieses Buch mit grosser Befriedigung aufnehmen.

B. NEBEL.

Vorlesungen über theoretische Physik von H. von HELMHOLTZ. Band V.
Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts,
 herausgegeben von ARTHUR KÖNIG und KARL RUNGE. Mit 54 Figuren
 im Text. Hamburg und Leipzig 1897, Verlag von Leopold Voss.
 370 S. Preis 14 Mk.

Der vorliegende fünfte Band von H. von Helmholtz's Vorlesungen über theoretische Physik ist der erste Band des in sechs Bänden geplanten Werkes. Der in zwei Abteilungen erscheinende erste Band wird die allgemeinen Grundlagen der physikalischen Wissenschaften und die Dynamik diskreter Massenpunkte enthalten, während der zweite Band die Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen zum Gegenstande haben wird. Band 3 soll die mathematischen Prinzipien der Akustik umfassen. In dem vierten Bande werden Elektrodynamik und die Theorie des Magnetismus vereinigt. Der sechste Band wird mit der Theorie der Wärme diesen Vortragszyklus abschliessen, den von Helmholtz im Jahre 1892 auf Anregung seiner Schüler mit der elektromagnetischen Theorie des Lichtes, dem Inhalte des fünften Bandes, begonnen hat. Die Herausgabe der geplanten sechs Bände wird durch Arthur König, Otto Krigar-Menzel und Karl Runge besorgt. von Helmholtz war es noch vergönnt, einen grossen Teil des vorliegenden Bandes nach der Bearbeitung der Stenogramme wenigstens durchzusehen. Die eigentümliche, mehr der momentanen Eingebung folgende Vortragsweise, wie sie nur für den reiferen Zuhörer geeignet ist, hat den Herausgebern die Ausarbeitung der Vorlesungen für den Druck wesentlich erschwert, da vieles nur angedeutet, nicht aber völlig zu Ende geführt worden ist. Was die äussere Form betrifft, so wurde durchweg auf Einheitlichkeit gesehen; der Helmholtzsche Wechsel in der Anordnung der Koordinatenachsen wurde vermieden.

Mit Freuden werden diese Bände begrüsst, tragen sie doch dazu bei, die wissenschaftlichen Leistungen des grossen Gelehrten so vollständig wie möglich der Nachwelt zu überliefern.

B. NEBEL.

Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge von P. VOLKMANN. Leipzig 1896, Verlag von B. G. Teubner. 181 S.

Verschiedene Aufsätze und Vorträge des Verfassers gaben die Veranlassung zur Herausgabe dieses Buches, in welchem die Anschauungen des Verfassers in geschlossener Form wiedergegeben sind. Diese Studien sind weniger für die Fachgenossen im engeren Sinne als für das gebildete und lernbegierige Publikum bestimmt. Handelt es sich doch darum, den Naturwissenschaften den ihnen gebührenden Platz in dem Geistesleben der Gegenwart anzuweisen und zu zeigen, dass sie voll und ganz berechtigt sind, diesen von philologischer Seite vielfach angefeindeten Platz einzunehmen.

Speziell die Physik eignet sich in hervorragender Weise dazu, an einzelnen Beispielen die allgemeinen Formen zur Anschauung zu bringen, in denen das naturwissenschaftliche Denken vor sich geht und in denen naturwissenschaftliche Erkenntnis erzielt wird. Das Studium der physikalischen Jetztzeit ist ungemein interessant; auf der einen Seite die grossartigen Erfolge der Physik im praktischen Leben, die beinahe jeden zwingen, sich mit ihr zu beschäftigen und bei denen alles auf Geldeswert hinausläuft, auf der anderen Seite hingegen die reine physikalische Forschung, die zur Zeit bestrebt ist, sich von der Materie mehr und mehr zu befreien, ohne den realen Boden zu verlieren und sich in Idealen zu verflüchtigen. Eine Wissenschaft, in welcher äusserlich solche Gegensätze vorhanden sind, wie gerade jetzt in der Physik, ist sicherlich dazu berufen, dass sich das gebildete Publikum mit ihr beschäftige und sie verstehen lerne. Einzelnes aus dem Zusammenhang herausgreifen, halte ich nicht für angebracht; denn derartige Studien müssen ganz in ihrer logischen Entwicklung verfolgt werden, um richtig verstanden zu werden. Als äusseres Gewand wurde die Form von Vorträgen gewählt, die bei dem Nichtfachgenossen grösseren Anklang findet. Mögen diese Studien auch in philologischen Kreisen einen fruchtbaren Boden finden.

B. NEBEL.

Maturitäts-Prüfungs-Fragen aus der Physik. Zusammengestellt von JOSEF GAJDECZKA. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig und Wien 1897, Verlag von Franz Deuticke. 194 S. Preis 2 Mk.

Die Sammlung enthält Aufgaben aus den österreichischen Schulen. Die Fragen sind meistens sehr allgemein gehalten, so dass jeder Schüler im stande sein dürfte, die Fragen mehr oder weniger vollkommen zu beantworten. Unmittelbar nach jeder Aufgabe folgt deren ausführliche Lösung, sodass der Schüler sich tüchtig einüben kann. Das Buch dürfte nicht an allen deutschen Gymnasien bezw. Realgymnasien ausreichen, da vielfach höhere Ansprüche gemacht werden.

B. NEBEL.

Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz von FRANZ KERNTLER. Budapest 1897, Druckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft. 68 S.

Durch die eigenartige Darstellung wird der Leser direkt dem Ampèreschen elektrodynamischen Grundgesetz gegenübergestellt. In rechnerischer Hinsicht wird nun das Gesetz in eine geeigneteren, wenn auch weniger durchsichtigeren Form gebracht. Unter bestimmten Voraussetzungen ergeben sich sodann mehrere Gesetze, die der Verfasser der grösseren Einfachheit wegen mit besonderen Namen belegt hat. Bei der Betrachtung der gegenseitigen Einwirkung eines drehbaren Kreisstromes und eines anderen beliebig geformten geschlossenen Leiters gelangt der Verfasser zu fünf besonderen Fällen, die eingehend kritisch beleuchtet werden und für die die Drehungsmomente mit Hilfe des transformierten Ampèreschen

Gesetzes berechnet werden. Ausgehend von der Stefanschen Arbeit: „Über die Grundformeln der Elektrodynamik“, in welcher gezeigt wird, dass zwischen den Komponenten der Elemente ds und ds' vier Wirkungen möglich sind, gelangt Verfasser zu einem viergliedrigen Ausdruck, dessen Glieder Komponentenwirkungen darstellen. Die nach dem Kräfteparallelogramm gebildete Resultante wird nach einigen Reduktionen durch einen relativ eleganten Ausdruck dargestellt, aus dem sich unter gewissen Voraussetzungen sowohl das Ampèresche, als auch das Neumannsche Gesetz ableiten lässt. Durch das neue Gesetz ist die Brücke zwischen der elektrodynamischen und magnetischen Wirkung hergestellt. Mehr und mehr Stützpunkte erhalten die neueren Anschauungen, und es wird hoffentlich nicht mehr zu lange dauern, bis die Umwandlung sich gänzlich vollzogen hat.

B. NEBEL.

Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes von H. EBERT. II. Teil. Mit 47 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. Leipzig 1897. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 271 S. Preis 10 Mk.

Der aus zwei Abschnitten bestehende zweite Teil beginnt mit der Induktion, und zwar wird wiederum die experimentelle Seite zuerst behandelt. Hier werden auch die Generatoren und Transformatoren der Stromenergie der Technik berücksichtigt, wobei insbesondere die Entwicklung derselben berücksichtigt wird.

Die Theorie gelangt zu ihrem Recht bei der Einführung der Begriffe der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion an der Hand der Helmholtz'schen Cykeltheorie. Ein besonderes Kapitel umfasst die Beziehungen der Stromenergie zur Wärme. Der vierte Abschnitt, der die Erscheinungen des freien elektromagnetischen Feldes zum Gegenstande hat, ist mehr theoretischer Natur und schliesst sich eng an die Helmholtz'schen und Hertz'schen Arbeiten an, insbesondere findet die Helmholtz'sche Cykeltheorie eine eingehende Würdigung. Dem Verfasser ist es gelungen, ein Werk zu schaffen, das in einheitlicher Form dem Studierenden die Errungenschaften und Umwälzungen auf elektrischem Gebiet darbietet.

B. NEBEL.

Bibliographie

vom 13. Oktober bis 8. Dezember 1898.

Periodische Schriften.

- Abhandlungen des königl. sächs. meteorologischen Institutes. 3. Heft.
SCHREIBER, PAUL, Studien über Luftbewegungen. Leipzig, Felix.
M. 3.
- Acta, nova, Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie
der Naturforscher. 71. Bd. Leipzig, Engelmann.
8. LOEWY, ALFR., Über bilineare Formen mit konjugiert
imaginären Variablen. M. 4.
9. HAMMER, E., Vergleichung einiger Abbildungen eines kleinen
Stücks der ellipsoidischen Erdoberfläche (Karte von S.W.-
Deutschland). M. 1. 50.
- Annalen, mathematische, begründet 1868 durch ALFR. CLEBSCH und CARL
NEUMANN. Herausgegeben von FELIX KLEIN, WALTH. DYCK, ADOLPH
MAYER. Generalregister zu den Bdn. 1—50; zusammengestellt von
A. SOMMERFELD. Mit einem Bildnisse von A. CLEBSCH. Leipzig,
B. G. Teubner. M. 7.
- Arbeiten, die astronomisch-geodätischen, des kaiserl. und königl. militär-
geographischen Institutes in Wien. Publikation für die internationale
Erdmessung. XII. Bd. Astronomische Arbeiten. 4. Längenunterschied-
messungen Kronstadt - Budapest - Sarajevo - Kronstadt, Sarajevo-Pola:
Polhöhen- und Azimuth-Bestimmungen auf den Stationen: Bösig,
Donnersberg und Jeschken. Wien, Lechner. M. 10.
- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1897. Beobachtungssystem der
meteorologischen Station erster Ordnung Aachen und deren Neben-
stationen im Jahre 1897. Herausgegeben von P. POLIS. III. Jahrg.
Karlsruhe, Braun. M. 5.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von EMIL
LAMPE. 27. Bd., Jahrgang 1896, 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 7.
- Publikationen des astro-physikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 42.
HARTMANN, J., Über eine einfache Interpolationsformel für das pris-
matische Spektrum. Leipzig, Engelmann. M. 2.

Reine Mathematik.

- BIANCHI, LUIGI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Übersetzt von MAX LUKAT. (In drei Lieferungen.) Zweite Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6. 60.
- BUDISAVLJEVIĆ, EMAN. v. und MIKUTA, ALFR., Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. 2. Bd. MIKUTA, ALFR., Grundzüge der Differential- und Integral-Rechnung. Wien, Braumüller. geb. M. 10.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von HEINR. BURKHARDT und W. FRZ. MEYER. (In sechs Bänden zu 4—5 Heften.) 1. Teil. Reine Mathematik. 1. Bd. Arithmetik und Algebra. 1. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 40.
- GENOCHI, ANGELO, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Herausgegeben von GIUS. PEANO. Übersetzt von G. BOHLMANN und A. SCHEFF. Mit einem Vorwort von A. MAYER. (In zwei Lieferungen.) 1. Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.
- HOCH, JUL., Katechismus der Projektionslehre mit einem Anhang enthaltend die Elemente der Perspektive. (Webers illustrierte Katechismen Nr. 130.) 2. Auflage. Leipzig, Weber. geb. M. 2.
- JUNKER, FRDR., Höhere Analysis. 1. Teil. Differentialrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 87.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- NETTO, EUG., Vorlesungen über Algebra. (In zwei Bänden.) 2. Bd. Erste Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.
- PUCHBERGER, EMAN., Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. VI. (Suppl.-)Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 1. 60.
- SIMON, MAX, Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Göschen Nr. 89.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.

Angewandte Mathematik.

- CANTOR, MOR., Politische Arithmetik oder Die Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 1. 80.
- DILLMANN, C., Astronomische Briefe. Die Planeten. Neue billige Ausgabe. Tübingen, Laupp. M. 1. 50.
- Dreiecksnetz, das Schweizerische (der internationalen Erdmessung), herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission. 8. Band. MESSERSCHMITT, J. B., Lotabweichungen in der mittleren und nördlichen Schweiz. Zürich, Fäsi & Beer. M. 10.
- GEIGENMÜLLER, R., Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. 2. Teil. Technische Mechanik. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung. geb. M. 5. 50.
- GEISSLER, KURT, Mathematische Geographie. (Sammlung Göschen Nr. 92.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- GROSSMANN, LUDW., Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disziplinen der

- Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik. 10. Lieferung. (Suppl.-Band IV.) Wien, Selbstverlag. M. 5.
- KECK, WILH., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Maschinenwesen. 3. (Schluss-)Teil. Allgemeine Mechanik. Hannover, Helwing. M. 10.
- MAYER, GUST., Erste Bahnbestimmung eines Kometen. Wien, Rosner. M. 1. 50.
- PREUSS, W. H., Sammlung von Formeln, Beispielen und Aufgaben aus der rechnenden Nautik und deren Hilfswissenschaften. 2. Auflage. Oldenburg, Schulze. M. 2.
- RANDERMANN, J., Nautische Tafeln mit Gebrauchs-Anweisungen und Beispielen in deutscher und englischer Sprache. Bremerhaven, v. Vangerow. geb. M. 7.
- RITTER, AUG., Lehrbuch der höheren Mechanik. 3. Auflage. 2 Teile. Leipzig, Baumgärtner.
1. Analytische Mechanik. M. 8.
 2. Ingenieur-Mechanik. M. 16.

Physik.

- KOHLRAUSCH, F. und HOLBORN, L., Das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der Lösungen. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 5.
- RIGHI, A., Die Optik der elektrischen Schwingungen. Experimental-Untersuchungen über elektromagnetische Analoga zu den wichtigsten Erscheinungen der Optik. Nebst Zusätzen des Verfassers übertragen von B. DESSAU. Leipzig, Reissland. M. 6.
- ROSENBERGER, FERD., Die moderne Entwicklung der elektrischen Prinzipien. Fünf Vorträge. Leipzig, Barth. M. 3.
- WEILER, W., Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Leipzig, Schäfer. M. 12.
- WIEN, W., Über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen. (Referat.) Leipzig, Barth. M. —. 60.

Historisch-litterarische Abteilung.

Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam.

Zum ersten Mal nach den Manuskripten der königl. Bibliothek
in Berlin und des Vatikans herausgegeben und übersetzt

von

HEINRICH SUTER

in Zürich.

Einleitung.

Von verschiedenen Seiten ist schon längst der Wunsch geäußert worden, es möchte die Abhandlung des Ibn el-Haitam, die sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigt, einmal veröffentlicht werden; so sagt unter anderen Herr M. Cantor in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* es sei „ungemein zu bedauern, dass sie noch keinen Bearbeiter gefunden habe, weil sie die erste Abhandlung dieses Titels seit Archimedes ist, von deren Erhaltung wir Kenntnis haben, und weil nach der Bedeutung des Verfassers zu urteilen, sicherlich interessante Versuche darin zu erwarten sind, dem Werte der Kreisfläche so nahe als möglich zu kommen.“ Dieser Umstand selbstverständlich verbunden mit meinem besonderen Interesse für historische Forschungen auf dem Gebiete der arabischen Mathematik haben mich bewogen, diese Arbeit zu unternehmen.

Leider aber erfahren diejenigen, die ihre Hoffnungen auf die wissenschaftliche Bedeutung Ibn el-Haitams gegründet haben, eine herbe Enttäuschung; er mag wohl ein recht bedeutender, in den Schriften der Alten sehr bewandeter Mathematiker gewesen sein, dazu kam aber ein bei den Orientalen sehr verbreiteter, durch ihre Beschäftigung mit neupythagoräischer und neuplatonischer Philosophie wesentlich genährter Zug zur spekulativen Philosophie und Mystik und überdies noch ein starker Hang zur Vielschreiberei, werden doch von ihm gegen 120 Schriften mathematischen, astronomischen und philosophischen Inhalts erwähnt, mehr als von irgend einem anderen mathematischen Schriftsteller der Araber. So ist denn aus diesen

* Bd. I I. Aufl. S. 678, II. Aufl. S. 744.

Gründen Ibn el-Haitams Arbeit eine seltsame Mischung von geometrischen Wahrheiten mit philosophischen Argumenten, sie bietet keine vollständige Durchführung der Kreisquadratur dar, sondern giebt nur einen teils mathematischen, teils philosophischen Beweis der Möglichkeit der Quadratur, dessen erster mathematischer Teil über die Hippokratischen Mondfiguren gar nicht nötig wäre.

El-Hasan* ben el-Hasan** ben el Haitam, Abû 'Alî, geb. c. 354 (965) in Basra, bekannt unter dem Namen Ibn el-Haitam, oder auch Abû 'Alî el-Basri, war ein vortrefflicher Mensch, besass hohe Intelligenz und grosses Wissen, es kam ihm keiner seiner Zeit gleich, ja nicht einmal nahe in den mathematischen Wissenschaften; er war ausdauernd in der Arbeit, fruchtbar als Schriftsteller und sehr enthaltsam im Leben. Er lebte anfänglich in Basra und bekleidete auch einige Zeit das Amt eines Wezirs; sein Geist neigte sehr zur Gelehrsamkeit und zur Kontemplation hin, so dass er gerne den Beschäftigungen entsagt hätte, die ihn am wissenschaftlichen Arbeiten hindern konnten. Infolge seiner eifrigen Studien und seiner übrigen angestrengten Beschäftigung trat eine Geistesstörung bei ihm ein, so dass er sein Amt niederlegen musste. Nachdem er wieder geheilt war, begab er sich nach Ägypten und liess sich in Kairo nieder, wo er neben der Moschee el-Azhar wohnte. Dem Beherrscher von Ägypten, el-Hâkim, waren die grossen wissenschaftlichen Kenntnisse des Ibn el-Haitam zu Ohren gekommen und er verlangte nach seinem Rat. Es war ihm auch mitgeteilt worden, dass er gesagt habe: „Wenn ich in Ägypten wäre, so würde ich den Nil so korregieren, dass er in jedem Zustand, bei Zu- und Abnahme des Wasserstandes, nutzbringend sein würde.“ Dies bewog el-Hâkim, ihm dieses Unternehmen anzuvertrauen, er versah ihn mit allen möglichen Hilfsmitteln und Ibn el-Haitam reiste nach den südlichen Nilgegenden ab. Dort erkannte er aber, dass die Ausführung des Unternehmens nicht möglich sei und beschämt und niedergeschlagen kehrte er nach Kairo zurück; er fiel dadurch bei el-Hâkim in Ungnade und sah seine Stellung und sogar sein Leben gefährdet. Um sich zu retten, kam er auf den Gedanken sich wahnsinnig zu stellen; diese List gelang ihm, er wurde in seiner Wohnung eingeschlossen und bewacht und sein Vermögen konfisziert. In diesem Zustande musste er nun aushalten bis zum Tode el-Hâkims, worauf er wieder frei wurde und sein Gut wieder zurückerhielt; er lebte dann in Kairo mit wissenschaftlichen Arbeiten beschäftigt bis zu seinem Tode, der Ende des Jahres 430 (1039), oder kurze Zeit nachher erfolgte. — Was seine Schriften betrifft, so verweise ich den Leser auf das Verzeichnis derselben bei Woepcke,**

* Statt dieses Namens hat Ibn Abi Usaibi'a „Muhammed“.

** Hier hat Abûlfarag' „Husain“.

*** L'Algèbre d'Omar Alkhayyami, etc. Paris 1851, p. 73 flg.

darunter befindet sich auch die Quadratur des Kreises (Nr. 30). Er bearbeitete und kommentierte auch einen grossen Teil der Aristotelischen Schriften, wie auch der Schriften des Galenus und war bewandert in den Prinzipien der Medizin, in allen ihren Regeln und Praktiken, doch fungierte er nie als Arzt, seine therapeutischen Kenntnisse waren gering. Von seinen Schriften ist noch eine bedeutende Zahl in den Bibliotheken Europas und des Orientes vorhanden, worauf wir später an einer andern Stelle zu sprechen kommen werden. Neben der Abfassung eigener Arbeiten schrieb er für seinen Lebensunterhalt eine grosse Menge mathematischer und anderer Werke ab, so jedes Jahr einmal die Elemente des Euklides, die mittlern Bücher und den *Almagest*; er schrieb schön und fehlerlos. (Nach Ibn Abî Usaibi'a, Edit. Müller, II. 90, Abûlfarag, Edit. Pocock, 340 und Ibn el-Kiftî [bei Casiri I. 414]).

Die Berliner königl. Bibliothek besitzt zwei Manuskripte der Kreisquadratur des Ibn el-Haitam, das eine befindet sich im Codex Mf. 258, das andere im Codex Mq. 559; beide Codices habe ich in der Bibliotheca mathematica 1898 Nr. 3 beschrieben, ich verweise den Leser auf diese Abhandlung. Hier bleibt mir nur noch übrig, der Verwaltung der königl. Bibliothek zu Berlin meinen ergebensten Dank auszusprechen für die Erlaubnis der Benutzung der beiden Manuskripte für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek in Zürich.

Einen unschätzbaren Dienst hat mir sodann Herr Prof. C. A. Nallino am königl. orientalischen Institute in Neapel erwiesen, indem er die Güte hatte, meine Abschrift aus den Berliner Codices mit dem Manuskripte des Vatikans zu collationieren, von ihm ist auch die folgende genaue Beschreibung des Manuskriptes; diesem hochgeachteten Gelehrten spreche ich hiermit ebenfalls meinen ergebensten Dank aus.

Das Manuskript des Vatikans trägt jetzt die Nummer CCCXX nach dem Katalog der arabischen, persischen, türkischen etc. Manuskripte des Vatikans von Angelo Maio, Rom 1831, p. 467; dasselbe besteht aus sieben Blättern (Bombyc.-Papier) von 138 mm Höhe und 98 mm Breite, von denen das letzte leer ist, jede Seite hat 15 Linien, die Schrift ist das *Nasta'liq*.

Es wurde nach dem Jahre 1622 aus Persien nach Europa gebracht von Pietro Della Valle, dem berühmten italienischen Reisenden, wie sich aus folgenden auf fol. 1 r. stehenden Worten ergibt: „De quadratura circuli author Arabs antiquus. Opusculum hoc celeberrimi cujusdam Mathematici, apud Orientales cognomine Ben Hithem notissimi, ante septingentos circiter annos compilatum fuisse, dum ipse in Persidis civitate, Lar nuncupata, commorarer anno Dñi 1622, author mihi fuit Moullà Zeineddin Larita Astrologus et Mathematicus pariter insignis, quocum arcissima intercedebat mihi necessitudo. Petrus De Valle.“

In den Noten zum arabischen Text bezeichnet A das Berliner Manuskript Mf. 258, B das Manuskript Mq. 559 derselben Bibliothek und C dasjenige der Vatikanischen Bibliothek. Um eine zu grosse Zahl der Noten zu vermeiden, gebe ich geringe Abweichungen der Manuskripte, wie z. B. solche in den diakritischen Punkten, nicht an. — Was die Figuren anbetrifft, so sind dieselben in den beiden Berliner Manuskripten nicht ganz korrekt, doch in B bedeutend besser als in A.

Übersetzung.

Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen,
des Herrn, der Erfolg verleiht!

Abhandlung des Ibn el-Haitam über die Quadratur des Kreises. — Es glauben viele Philosophen, dass es unmöglich sei, dass die Fläche des Kreises gleich einem Quadrate sei und weisen diese Ansicht in vielen ihrer Streitschriften und Kontroversen zurück; in der That finden wir bei keinem der ältern und neuern Geometer eine geradlinige Figur, die gleich einer Kreisfläche bis zur äussersten Grenze der Genauigkeit wäre, denn was die von Archimedes in seiner Kreismessung erwähnte (Figur) anbetrifft, so wird dazu nur ein Teil der Fläche(?) verwendet.* Diese Thatsache neben andern Gründen war es, was die Philosophen in ihrem Glauben bestärkt hat. Da sich nun dies so verhält, so haben wir eifrig unsere Gedanken auf diesen Gegenstand gerichtet und es schien uns, dass die Sache möglich und nicht schwierig sei; zur Bekräftigung dieser Ansicht dienen die Beispiele, dass es eine von zwei Kreisbogen begrenzte Mondfigur giebt, die gleich einem Dreieck ist, dass ferner eine Mondfigur und ein Kreis zusammen gleich einem Dreieck sind; wir haben verschiedene Fälle dieser Art in unserm Buche über die Mondfiguren erwähnt.**

Nachdem wir nun die Sache bis zu diesen Eigenschaften der Mondfiguren gebracht hatten, wurden wir in der Ansicht bestärkt, dass es möglich sei, dass die Fläche des Kreises gleich derjenigen eines Quadrates sein könne, und wir haben eifrig darüber nachstudiert, bis der Beweis klar vor uns lag, dass die Sache möglich sei und darüber kein Zweifel mehr bestehen könne. Dann haben wir darüber folgende Abhandlung verfasst.

* Ich glaube, dass Ibn el-Haitam hier sagen will, Archimedes nehme statt des ganzen Kreises nur das 96-Eck.

** Dieses Buch findet sich in der That im Verzeichnis seiner Schriften bei Ibn Abi Usaibi'a und zwar in einer kürzeren und einer ausführlicheren Fassung; Woepcke übersetzt unrichtig: „Abrégé sur les figures de la nouvelle lune“, und „Mémoire développé sur les figures de la nouvelle lune.“ Die ausführlichere Fassung ist noch vorhanden in der Bibliothek d. India Office (im Catalog von O. Loth, London 1877, sub Nr. 734, 12^o).

Wir sagen: Wir ziehen in einem beliebigen Kreis einen Durchmesser, nehmen dann auf einem der Halbkreise einen beliebigen Punkt an, und ziehen von demselben zwei Gerade nach den beiden Endpunkten des Durchmessers; hierauf beschreiben wir über diesen beiden Geraden zwei Halbkreise, so sind die von den beiden Halbkreisen und den Bogen des ersten Kreises begrenzten Mondfiguren zusammen gleich dem Dreieck im ersten Kreis. Wir haben diesen Satz schon in unserm Buche über die Mondfiguren bewiesen, doch wollen wir den Beweis hier nochmals wiederholen: Es sei der Kreis ABG gegeben (Fig. 1), sein Mittelpunkt sei D , wir ziehen durch D den Durchmesser ADG und nehmen auf dem Umfang des Kreises den Punkt B an, ziehen dann die beiden Geraden BG und AB , und beschreiben über denselben die beiden Halbkreise AEB und BZG ; nun sagen wir, dass die beiden Monde $AEBH$ und $BZGT$ zusammen gleich dem

Fig. 1.

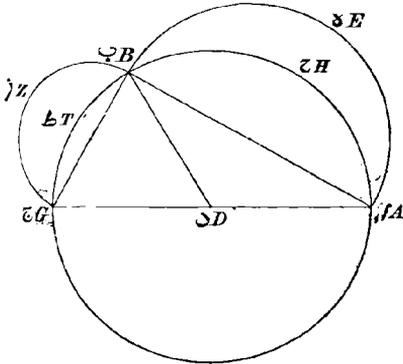
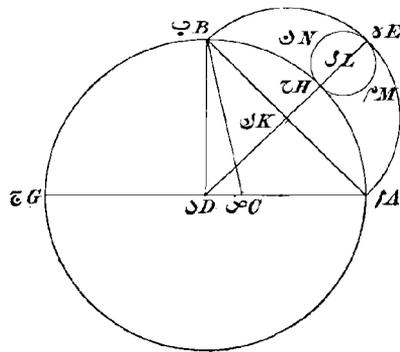


Fig. 2.



Dreieck ABG seien. Beweis: Von irgend zwei Kreisen verhält sich der eine zum anderen wie das Quadrat des Durchmessers des einen zum Quadrat des Durchmessers des andern, wie im zweiten Satze des 12. Buches der Elemente bewiesen worden ist, also

$$\text{Kreis } BZG : \text{Kreis } BEA = BG^2 : AB^2;$$

durch Zusammenziehung ergibt sich:

$$BG^2 + AB^2 : AB^2 = BZG + BEA : BEA;$$

nun ist aber $BG^2 + AB^2 = AG^2$, also

$$AG^2 : AB^2 = BZG + BEA : BEA.$$

Aber es ist auch $AG^2 : AB^2 = \text{Kreis } ABG : \text{Kreis } BEA$, also hat man:

$$BZG + BEA : BEA = ABG : BEA,$$

mithin ist $\text{Kreis } ABG = BZG + BEA$, also auch

$$\text{Halbkreis } ABG = \text{Halbkreise } BZG + BEA.$$

Wenn wir nun die beiden Segmente AHB und BTG , die dem Kreise ABG und den beiden Kreisen AEB und BZG gemeinschaft-

lich sind, (beiderseits) wegnehmen, so bleibt: Dreieck ABG — den beiden Monden $AEBH$ und $BZGT$ zusammen, w. z. b. w.* — Wenn nun die beiden Bogen AHB und BTG einander gleich sind, so sind auch AB und BG einander gleich, ebenso die beiden Kreise AEB und BZG , also auch ihre Hälften und ebenso die Monde $AEBH$ und $BZGT$; ziehen wir noch BD , so sind auch die beiden Dreiecke ABD und BDG einander gleich, also ist auch jeder einzelne der beiden Monde gleich jedem einzelnen der beiden Dreiecke, also z. B. der Mond $AEBH$ gleich dem Dreieck ABD .

Nachdem nun dies bewiesen ist, so nehmen wir wieder den Kreis (ABG , Fig. 2) mit dem Monde $AEBH$ und dem Dreieck ABD und teilen AB in zwei gleiche Teile im Punkte K , so dass K der Mittelpunkt des Kreises AEB ist; dann ziehen wir DK und verlängern es, bis es die Bogen AHB und AEB in den Punkten H und E trifft, so ist $DKH(E)$ ein Durchmesser (Halbmesser) des Kreises ABG und zugleich des Kreises AEB , weil er durch die Mittelpunkte beider geht; hierauf teilen wir EH in zwei gleiche Teile im Punkte L und nehmen L als Mittelpunkt eines Kreises an, den wir um L mit dem Radius LH beschreiben, es sei dies der Kreis $HMEN$, so berührt dieser Kreis den Kreis ABG von aussen und den Kreis AEB von innen, weil er jeden der beiden Kreise in den Endpunkten eines ihnen und ihm selbst gemeinschaftlichen Durchmessers trifft. Nun liegt der Kreis $HMEN$ ganz im Innern des Mondes $AEBH$, also ist er ein Teil dieses Mondes. Nun hat jede Grösse zu jeder Grösse, die ein Teil von ihr ist, ein gewisses bestimmtes Verhältnis, wenn auch niemand dieses Verhältnis kennt und nicht zu seiner Kenntnis zu gelangen vermag; denn das Verhältnis zwischen den (beiden) Grössen existiert nicht bloss dann, wenn** es den Menschen bekannt ist, oder wenn sie vermögen es aufzufinden und zu erkennen (sondern absolut, ohne Rücksicht hierauf). Das Verhältnis zwischen zwei Grössen ist aber nur eine wesentliche Eigenschaft für Grössen derselben Art; wenn also irgend zwei Grössen derselben Art gegeben sind, und jede von ihnen ist begrenzt, endlich, in ihrer Grösse verharrend, in keiner Weise sich ändernd, weder durch Zunahme noch Abnahme, noch in Bezug auf die Art, so hat die eine zur andern ein bestimmtes einziges Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. Wenn ferner ein Teil irgend einer Grösse, der mit ihr von gleicher Art ist, ebenfalls begrenzt, endlich ist, sich weder in Hinsicht auf die Art, noch auf die Grösse, noch auf die Form ändert und dasselbe auch vom Ganzen

* Dieser Satz findet sich in dieser Allgemeinheit bei Hippokrates nicht (vergl. das von Simplicius im Kommentar zur Physik des Aristoteles uns erhaltene Fragment des Eudemos), er darf also wohl dem Ibn el-Haitam zugesprochen werden.

** Eigentlich „deswegen weil“.

gilt, so hat die ganze Grösse zu ihrem Teile ein bestimmtes einziges Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. — Wenn nun also der Kreis ABG gegeben ist, so ist auch sein Umfang gegeben, ebenso sein Durchmesser und sein Mittelpunkt, ebenso ist der Bogen AB als ein Viertel des Kreisumfangs gegeben, also ist auch die Sehne AB gegeben, ebenso BD , also auch das Dreieck ABD ; unter „gegeben“ verstehe ich bei allen diesen Grössen, was ich als Eigenschaft des Kreises ABG angenommen habe, dass sie unveränderlich sind, fest in ihrem Zustand beharren; denn das „Gegebene“ heisst bei den Mathematikern das, was sich nicht ändert. Also ist ferner der Halbkreis AEB gegeben, weil sein Durchmesser AB gegeben ist, also auch der Bogen AEB , ebenso der Bogen AHB , mithin ist auch der Mond $AEBH$ gegeben, d. h. er ist fest in seinen Eigenschaften, unveränderlich sowohl in Hinsicht auf die Art, als auch auf die Grösse, als auch auf die Form; unter „Art“ verstehe ich, dass er eine ebene Fläche ist; also ist ferner die Linie KE als Halbmesser des Kreises AEB gegeben, ebenso die Linie KH , weil ihre beiden Endpunkte bestimmt sind, mithin auch die Linie HE , d. h. sie ist unveränderlich sowohl in Bezug auf Grösse, als auch in Bezug auf Art und Form; HE ist aber der Durchmesser des Kreises $HMEN$, also ist auch dieser Kreis gegeben, d. h. unveränderlich in Bezug auf seine Grösse und seine Form. Dieser Kreis $HMEN$ ist aber ein Teil des Mondes $AEBH$ und beide, Mond und Kreis, sind unveränderlich in ihren Eigenschaften und von einer Art, weil der eine ein Teil des andern ist; also hat der Mond $AEBH$ zum Kreis $HMEN$ ein feststehendes Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. Nun kann jedes Verhältnis einer Grösse zu einem Teil derselben gleichgesetzt werden dem Verhältnis irgend einer anderen Grösse zu einem entsprechenden Teil derselben; also sei z. B. das Verhältnis des Mondes $AEBH$ zum Kreis $HMEN$ gleich dem Verhältnis der Linie AD zu einem Teil derselben, ob wir diesen Teil kennen oder nicht, ob wir im Stande sind, ihn aufzufinden oder nicht (kommt hier nicht in Betracht), genug dieser Teil sei DC ; also ist das Verhältnis des Mondes $AEBH$ zum Kreis $HMEN$ gleich dem Verhältnis $AD : DC$, das ein unveränderliches ist, weil das erstere es ist; wenn aber dieses Verhältnis ein unveränderliches ist, so ist auch die Linie DC eine ganz bestimmte, unveränderlich in ihrer Grösse, weil die Linie AD eine der Grösse nach gegebene, unveränderliche ist. Wir ziehen noch BC und erhalten so das Dreieck BDC ; nun verhält sich

$$\text{Dreieck } ABD : \text{Dreieck } BDC = AD : DC,$$

aber

$$AD : DC = \text{Mond } AEBH : \text{Kreis } HMEN;$$

also

$$\text{Dreieck } ABD : \text{Dreieck } BDC = \text{Mond } AEBH : \text{Kreis } HMEN,$$

oder durch Umstellung:

Dreieck ABD : Mond $AEBH$ = Dreieck BDC : Kreis $HMEN$;
 nun haben wir aber bewiesen, dass der Mond $AEBH$ = Dreieck ABD
 ist, also ist der Kreis $HMEN$ = Dreieck BDC . Da nun jedes Dreieck
 gleich einem Quadrate ist, wie im zweiten Buche der Elemente be-
 wiesen wird, so können wir also ein Quadrat zeichnen, das gleich
 dem Dreieck BDC ist, es sei dies das Quadrat $SOFQ$ (Fig. 3), also
 ist nun auch der Kreis $HMEN$ = dem Quadrat $SOFQ$. Es ist ferner
 das Verhältniß der beiden Durchmesser $AG:EH$ ein gegebenes, weil
 jeder der beiden Durchmesser (der Grösse nach) gegeben ist, und es
 sei dieses Verhältniß = $XQ:FQ$, also hat man auch

$$AG^2:EH^2 = XQ^2:FQ^2;$$

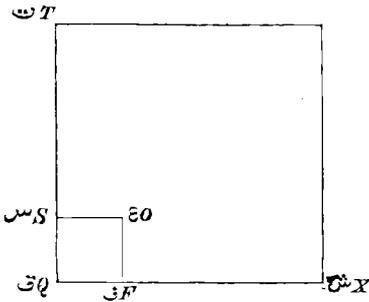
konstruieren wir also über XQ ein Quadrat, es sei dies TX , so hat
 man:

$$AG^2:EH^2 = \text{Quadrat } TX : \text{Quadrat } OQ.$$

Aber es ist $AG^2:EH^2 = \text{Kreis } ABG : \text{Kreis } HMEN$, mithin
 Quadrat $TX : \text{Quadrat } OQ = \text{Kreis } ABG : \text{Kreis } HMEN$. Da nun
 Quadrat $OQ = \text{Kreis } HMEN$ ist, so ist auch Quadrat $TX = \text{Kreis } ABG$.
 Aus diesem Beweise geht also klar hervor, dass jeder Kreis gleich
 einem Quadrate ist.

Was nun den Weg betrifft, auf welchem dieses Quadrat gefunden
 wird, so werden wir darüber eine besondere Abhandlung veröffent-

Fig. 3.



lichen,* da der Zweck dieser Arbeit nur
 war zu zeigen, dass die Sache möglich sei,
 damit dadurch einmal die Verkehrtheit der
 Meinung derjenigen klar gelegt werde,
 welche glauben, dass es nicht wahr sei,
 dass ein Kreis einem Quadrate gleich sein
 könne. Wir haben im vorhergehenden
 Beweise klar gezeigt, dass jeder Kreis
 gleich einem Quadrate ist, also ist die
 Verkehrtheit der Meinung jener Leute
 offenbar. Es steht also fest, dass jeder
 Kreis gleich einem Quadrate ist, denn die

vom Verstande erfassten Wahrheiten brauchen nicht bis zur thatsächlichen Ausführung gebracht zu werden, sondern der Beweis braucht bloss bis zur Feststellung der Möglichkeit der behaupteten Sache zu gehen, so steht auch die Thatsache schon fest, ob sie dann der Mensch zur wirklichen Ausführung bringe oder nicht. Doch genug über die Feststellung dieser Thatsache, wir haben nicht mehr bezweckt mit unserer Abhandlung. Ende.**

* Befindet sich im Verzeichnis seiner Werke nicht und ist jedenfalls nie erschienen.

** Das Manuscript C hat hier nach den üblichen religiösen Schlussworten (Lob sei Gott, etc.) noch: „Beendigt (d. h. die Abschrift) am Montag den 14. Ğumâdâ II. 1031 d. H.“ (Ende April 1622).

(In den beiden Berliner Manuskripten folgt nachstehender Zusatz, wahrscheinlich vom Abschreiber hinzugefügt):

Ich sage zu dieser Abhandlung: Wenn zum Beweise des Geforderten der Beweis seiner Möglichkeit nach der Weise, wie er ihn geführt hat, genügen würde, so gäbe es eine Stelle dafür (oder von ihm, d. h. von Ibn el-Haitam), die frei ist von jener Weitschweifigkeit und keiner Erläuterungen

von solcher Ausdehnung bedarf;* es ist dies die folgende: Es sei AB (Fig. 4) eine gegebene Strecke, wir konstruieren über ihr das Quadrat BG , das also ebenfalls gegeben ist und in dieses den Kreis DE , sein Durchmesser DE ist gleich AB , somit auch

gegeben; weil nun der Kreis ein gegebener Teil einer gegebenen Grösse, d. h. des Quadrates, ist, so hat er zu diesem ein bestimmtes Verhältnis, es sei dieses das Verhältnis $BZ:AB$. Wir verlängern AB bis H , so dass BH das geometrische Mittel zwischen BZ und AB sei, also die Proportion bestehe

$$AB : BH = BH : BZ,$$

und konstruieren über BH das Quadrat BT , so ist das Verhältnis $AB : BZ$, oder das Verhältnis

$$\text{Quadrat } BG : \text{Kreis } DE = \text{Quadrat } BG : \text{Quadrat } BT;$$

hieraus folgt, dass Kreis $DE = \text{Quadrat } BT$ ist.** Wir haben also gefunden, was wir suchen wollten; dazu hätten also weder die alten (Geometer) noch die neuern jene weitläufige Auseinandersetzung nötig gehabt.

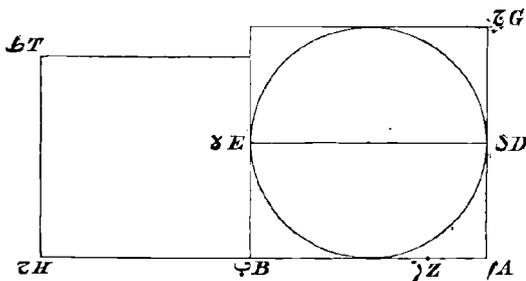
* Der Text ist hier jedenfalls inkorrekt, daher die Übersetzung unsicher.

** Dieser Beweis ist etwas kurz, es fehlt ein vermittelndes Verhältnis, nämlich $AB^2 : AB \cdot BZ$, es sollte also heissen:

$$AB : BZ = AB^2 : AB \cdot BZ = \text{Quadrat } BG : \text{Quadrat } BT;$$

aber $AB : BZ = \text{Quadrat } BG : \text{Kreis } DE$ nach Voraussetzung, also etc. — Man vergleiche mit dieser Darstellung der Kreisquadratur diejenige des Jordanus Nemorarius im vierten Buche seiner Geometria (herausgegeben von M. Curtze in den Mitteilungen des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst, VI. Heft, S. 36, Thorn 1887).

Fig. 4.



Arabischer Text.

بسم الله الرحمن الرحيم [هو رب يسر]¹
رسالة لابن الهيثم في تربيعة الدائرة نقول² قد اعتقد³ كثير من
المتفلسفين ان سطح الدائرة لا يمكن [ان يكون]⁴ مساويا لسطح مربع
مستقيم الخطوط ورد⁵ هذا المعنى في كثير من محاوراتهم ومناظراتهم ولم
نجد⁶ لاحد من المتقدمين ولا المتأخرين شكاً مستقيماً الخطوط مساويا
لسطح دائرة على غاية التحقير والذي ذكره ارشميدس في مساحة الدائرة
فانما استعمل فيه بعض المسح(?)⁷ وهذا المعنى هو احد ما قوى رأى⁸
المتفلسفين في اعتقادهم ولما كان ذلك كذلك انعمنا النظر الفكري في هذا
المعنى فلاح⁹ لنا انه ممكن وغير متعذر وله نظائر وهو انه قد يوجد هلال¹⁰
يحيط به قوسان من دائرتين وهو مع ذلك مساراً متمتلاً وقد يوجد هلال
ودائرة مساويان بمجموعهما¹¹ متمتلاً¹² وقد ذكرنا من هذا النوع اشكالا
كثيرة مختلفة [في كتابنا]¹³ في الهاليات ولما وجدنا [الامر]¹⁴ على هذه
الصفة في الاشكال الهلالية¹⁵ قوى في نفوسنا [انه من]¹⁶ الممكن ان يكون
سطح الدائرة مساويا لسطح مربع مستقيم الخطوط فاستقصينا الفكر في ذلك
الى ان يتبين¹⁷ لنا بالبرهان ان هذا المعنى ممكن ولا شبهة في امكانه
فلفنا فيه هذا القول فنقول ان كل دائرة نخرج فيه قطراً¹⁸ من اقطارها
ثم نعلم¹⁹ على احد نصفها نقطة كيفما²⁰ انفق²¹ ونوصل بينها وبين طرفي
القطر بخطين مستقيمين ثم نعمل على هذين الخطين المستقيمين نصفين
دائرتين فان الهلالين الذين يحدثان من محيطي النصفين مع محيط

قول للشحيح ابي على الحسين: 1) Fehlt in C. 2) Der Anfang lautet in C: 3) Fehlt in C. 4) In A u. B يعتقد. 5) Fehlt in C. 6) يتردد C. 7) يوجد A u. B. 8) المسح C. 9) A u. B اراد. 10) A u. B فيلوح. 11) A u. B هلالى. 12) A u. B مجموعها. 13) Fehlt in A u. B. 14) Lücke in C. 15) A الهلالي. 16) Lücke in C. 17) A u. B بين. 18) A u. B قطر. 19) A u. B انفق. 20) A u. B كيفما. 21) A u. B انفق C.

الدائرة الأولى [مساويان بمجموعهما²⁵ للمثلث الحداث في الدائرة الأولى]²⁴ وقد بينا هذا المعنى في كتابنا في الهلاليات فحين نعيد البرهان عليه في هذا الموضوع فليكن دائرة عليها²⁵ $\overline{أب}$ وليكن مركزها $\overline{د}$ ونجبر²⁶ على $\overline{د}$ خط $\overline{ادج}$ فيكون $\overline{أج}$ قطر الدائرة ونعلم²⁷ على محيط الدائرة نقطة $\overline{ب}$ ونصل خطي $\overline{أب}$ $\overline{بج}$ ونعمل على خطي $\overline{أب}$ $\overline{بج}$ نصفي دائرتين هما $\overline{أه}$ $\overline{بزه}$ فاقول أن هلالى $\overline{أه}$ $\overline{بج}$ $\overline{ط}$ مساويان بمجموعهما²⁸ لتمثلت $\overline{أب}$ برهان ذلك أن كل دائرتين فإن²⁹ نسبة أحدهما³⁰ إلى الأخرى كنسبة مربع قطر أحدهما³¹ إلى مربع قطر الأخرى كما تبين في [شكل $\overline{ب}$ من]³¹ مقالة³² $\overline{يب}$ من الاصول³³ فنسبة دائرة $\overline{بزه}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ كنسبة مربع $\overline{بج}$ إلى مربع $\overline{با}$ وبالتركيب يكون نسبة مربعي $\overline{بج}$ $\overline{بأ}$ إلى مربع $\overline{أب}$ كنسبة دائرتي $\overline{بزه}$ $\overline{بها}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ ومربع $\overline{بج}$ $\overline{بأ}$ هما مربع $\overline{أج}$ [فنسبة مربع $\overline{أج}$ إلى مربع $\overline{أب}$ كنسبة دائرتي $\overline{بزه}$ $\overline{بها}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ ونسبة مربع $\overline{أج}$ إلى مربع $\overline{أب}$ كنسبة دائرة $\overline{أبج}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ ³⁴ فنسبة دائرتي $\overline{بزه}$ $\overline{بها}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ كنسبة دائرة $\overline{أبج}$ إلى دائرة $\overline{بها}$ فدائرة $\overline{أبج}$ مساوية لدائرتي $\overline{بزه}$ $\overline{بها}$ ³⁵ فنصف دائرة $\overline{أبج}$ مساو لنصفي دائرتي $\overline{أه}$ $\overline{بزه}$ فإذا اسقطنا قطعني $\overline{أح}$ $\overline{ب}$ $\overline{ط}$ المشتركتين³⁶ لدائرة $\overline{أبج}$ ودائرتي $\overline{أه}$ $\overline{بزه}$ بقي مثلث³⁷ $\overline{أبج}$ مساويا لهلالى³⁸ $\overline{أه}$ $\overline{بج}$ $\overline{ط}$ وذلك ما أردنا بيانه³⁹ فإن كان قوسا $\overline{أح}$ $\overline{ب}$ $\overline{ط}$ متساويين فإن خطي $\overline{أب}$ $\overline{بج}$ يكونان متساويين ويكون⁴⁰ دائرتي $\overline{أه}$ $\overline{بزه}$ متساويتين ويكون نصفاهما متساويين ويكون هلالا⁴¹ $\overline{أه}$ $\overline{بج}$ $\overline{ط}$ متساويين [ونصل $\overline{بأ}$ فيكون مثلثا $\overline{أب}$ $\overline{بج}$ $\overline{بأ}$ متساويين]⁴² وقد⁴³ تبين أن الهلالين متساويان⁴⁴ ومثلثا $\overline{أب}$ $\overline{بج}$ $\overline{بأ}$ متساويان⁴⁵ فإن كل واحد

23) A u. B مجموعها. 24) Fehlt in C . 25) A u. B عليه. 26) A ونجر C . 27) C ومنعلم. 28) A u. B مجموعهما. 29) Fehlt in A . 30) A , B u. C أحدهما. 31) Fehlt in C . 32) المقالة C . 33) كتاب اقليدس C . 34) A : أو نسبة مربع C فنسبة مربع $\overline{أج}$ إلى مربع $\overline{أب}$ هي C ; $\overline{أج}$ إلى مربع $\overline{أب}$ كنسبة دائرة $\overline{أبج}$ إلى دائرة $\overline{أه}$ $\overline{بزه}$ $\overline{بها}$ $\overline{بج}$ $\overline{ط}$ C . 35) Fehlt in A : 36) A u. B المشتركتين، يكونا E . 40) أن فيبين. 39) هلالى A u. B . 37) Fehlt in A . 38) A u. B . 39) أن فيبين. 40) E يكونا E . 41) هلاليا A . 42) Fehlt in B . 43) fehlt in C . 44) C fügt hier noch hinzu: متساويين A u. B . 45) بمجموعهما لتمثلت $\overline{أبج}$ فإن كان الهلالان متساويين

من الهلالين يكون مساويا لكل واحد⁴⁶ من المثلثين ويكون هلال⁴⁷ $\overline{أهـبـج}$ مساويا لمثلث $\overline{أبـد}$ وإذا تبين⁴⁸ ذلك فلنعد⁴⁹ الدائرة وهلال $\overline{أهـبـج}$ ومثلث $\overline{أبـد}$ ونقسم خط $\overline{أب}$ بنصفين على نقطة $\overline{ك}$ فيكون نقطة $\overline{ك}$ مركز دائرة $\overline{أهـب}$ ونصل $\overline{دك}$ وننفذه⁵⁰ على استقامته وليقطع قوسي $\overline{أهـب}$ $\overline{أج}$ على نقطتي $\overline{ح}$ $\overline{هـ}$ فيكون $\overline{دك}$ قطر الدائرة $\overline{أبـج}$ وقطر الدائرة $\overline{أهـب}$ لأنه مار بمركزهما ونقسم خط $\overline{هـج}$ بنصفين على نقطة $\overline{ل}$ ونجعل $\overline{ل}$ مركزا وندير $\overline{جـل}$ دائرة ليكن دائرة $\overline{جـمـن}$ فيكون هذه الدائرة [مماسة لدائرتي]⁵¹ $\overline{أبـج}$ من خارج ومماسة لدائرة $\overline{أهـب}$ من داخلها لأنها يلقى كل واحدة من الدائرتين على طرف قطر مشترك لهما⁵² وللدائرة المماسة لهما فدائرة $\overline{جـمـن}$ جميعها⁵³ في داخل هلال $\overline{أهـبـج}$ فهذه الدائرة إذن هي بعض هذا الهلال وكل مقدار فله إلى كل مقدار هو بعضه نسبة ما وأن⁵⁴ لم يعلم أحد تلك النسبة ولم يقدر على الوصول إلى علمها لأن النسبة بين المقادير⁵⁵ ليس هي⁵⁶ من أجل علم الناس بها ولا من أجل قدرتهم على⁵⁷ استخراجها ومعرفتها وإنما النسبة بين المقادير يعني خاص للمقادير التي يكون⁵⁸ من جنس واحد فإذا [كان مقداران]⁵⁹ من جنس واحد وكان كل واحد⁶⁰ منهما⁶¹ محصورا متناهيا ثابتا⁶² باقيا⁶³ على مقداره لا يتغير⁶⁴ بوجه من⁶⁵ الوجوه لا يتغير⁶⁶ بزيادة ولا يتغير⁶⁷ نقصان ولا يتغير⁶⁸ جنس فان لاحدهما إلى الآخر نسبة واحدة بعينها⁶⁹ لا ينتقل ولا يتغير⁶⁸ عن صورتها بوجه من الوجوه وكل مقدار فبعضه هو من جنسه إذا⁶⁹ كان ذلك البعض محصورا متناهيا لا يتغير⁷⁰ لافى جنسه ولا فى مقداره ولا فى شكله ولا فى هيئته⁷¹ وكان المقدار الأعظم⁷² ثابتا على حاله لا يتغير⁷³ لافى شكله ولا فى مقداره ولا فى جنسه ولا فى هيئته⁷¹ وإذا كان المقدار

46) A u. B لوحيد statt واحد لكل واحد. 47) A u. B هلالى. 48) B u. C قد تبين (in C unpunktirt). 49) Undeutlich in A u. B . 50) So schlägt Herr C. A. Nallino vor, wie es oft bei al-Battâni vorkomme; A , B u. C . oder oder دمعد. 51) Fehlt in A . 52) A u. B مشتركهما. 53) A u. B جميعا. 54) C أبين. 55) C العاديّة. 56) C ممال. 57) A إلى. 58) So in A , B u. C . 59) A u. B كل. 60) B وكل. 61) A u. B منها. 62) Fehlt in B . 63) Fehlt in C . 64) A u. B يتغير. 65) Fehlt in A . 66) B u. C يتغير. 67) C noch ثابتة. 68) B u. C لا يتغير ولا ينتقل. 69) B و. 70) A u. B يتغير. 71) A u. B هيئته. 72) C hat noch أيضا. 73) A يتغير.

وبعضه على هذه الصفة فان لجملة المقدار الى بعضه نسبة واحدة بعينها لا يتغير ولا يختلف بوجه من الوجوه واذا كانت دائرة $\overline{أب}$ معلومة المقدار فان محيطها يكون معلوما وقطرها يكون معلوما ايضا ومركزها يكون معلوما فخط $\overline{أج}$ يكون معلوما وقوس $\overline{أب}$ التي هي⁷⁴ ربع محيطها تكون معلومة⁷⁵ وخط $\overline{أب}$ يكون معلوما وخط $\overline{بأ}$ يكون معلوما ومثلث $\overline{أبأ}$ يكون معلوما واعني بكل معلوم [ما ذكرته]⁷⁶ في صفة دائرة $\overline{أب}$ انه ثابت على حاله لا يتغير لان المعلوم عند اصحاب التعاليم هو الذي لا يتغير ويكون نصف دائرة $\overline{أه}$ معلوما لان خط $\overline{أب}$ الذي هو قطرها هو معلوم ويكون قوس $\overline{أه}$ معلومة⁷⁷ لانها لا تتغير⁷⁸ وقوس $\overline{أح}$ معلومة فيكون خلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ معلوما اعني انه يكون ثابتا على صفة واحدة لا يتغير في جنسه ولا في مقداره ولا في شكله واعني بجنسه انه سطح مستو ويكون خط $\overline{كه}$ الذي هو نصف قطر الدائرة معلوما ويكون خط $\overline{كح}$ معلوما لان نقطتي $\overline{ك}$ $\overline{ح}$ معلومتان فيبقى⁷⁹ خط $\overline{هح}$ معلوما اعني لا يتغير لا في مقداره ولا في جنسه ولا في هيئته⁸⁰ وخط $\overline{هح}$ هو قطر دائرة $\overline{حمه}$ فدائرة $\overline{حمه}$ معلومة لا يتغير مقدارها ولا شكلها ولا هيئتها⁸¹ ودائرة $\overline{حمه}$ هي بعض هلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ وكل واحد⁸² من هلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ ودائرة $\overline{حمه}$ لا يتغير في حال من الاحوال وهما من جنس واحد لان احدهما بعض الاخر فلهلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ الى دائرة $\overline{حمه}$ نسبة ثابتة على صفة⁸³ واحدة [لا تتغير]⁸⁴ بوجه من الوجوه وكل نسبة لمقدار من المقادير الى بعضه فهي نسبة كل مقدار الى بعضه النظر لذلك البعض فنسبة هلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ الى دائرة $\overline{حمه}$ هي نسبة خط $\overline{أد}$ ⁸⁵ الى بعضه علمنا مقدار ذلك البعض او كنا لا نعلم مقدار ذلك البعض ولا نقدر على استخراجها ولا نصل الى وجوده فليكن ذلك البعض $\overline{دص}$ [فيكون نسبة $\overline{أد}$ الى $\overline{دص}$]⁸⁶ هي نسبة هلال $\overline{أه}$ $\overline{أح}$ الى دائرة $\overline{حمه}$ فان⁸⁷ نسبة $\overline{أد}$ الى $\overline{دص}$ نسبة ثابتة لا تتغير ابدا⁸⁸ واذا كانت نسبة $\overline{أد}$ الى $\overline{دص}$ نسبة ثابتة لا تتغير ابدا⁸⁹

74) A u. B هو. 75) A, B u. C يكون معلوما. 76) ذكره C . 77) A u. B . 78) A, B u. C يتغير. 79) A فيبقى. 80) A u. B هيئته. 81) A u. B . 82) A u. B واحدة. 83) B هيأة. 84) Fehlt in B . 85) A ل D . 86) Fehlt in A u. B , dann folgt C وهي. 87) C ويكون. 88) C hat hier noch: نسبة. 89) Fehlt in C .
 لان نسبة: C hat hier noch: نسبة. 88) C hat hier noch: نسبة. 89) Fehlt in C .

فان ⁹⁰ خط دص واحد بعينه لا يتغير لان خط اد خط معلوم القدر لا يتغير مقدارها ونصل بص | ليكن بصد مثلتنا و ⁹¹ نسبة مثلث ابد الى مثلث بصد كنسبة خط اد الى خط دص ونسبة اد الى دص هي نسبة هلال اهبج الى دائرة حمهن كنسبة مثلث ابد الى مثلث بصد كنسبة هلال اهبج الى دائرة حمهن فاذا بدلنا ⁹² كانت نسبة مثلث ابد الى هلال اهبج كنسبة مثلث بدص الى دائرة حمهن وهلال اهبج قد تبين انه مساو لمثلث ابد فدائرة حمهن مساوية ⁹³ لمثلث بدص وكل مثلث فهو مساو لمربع وقد تبين ذلك في اخر ⁹⁴ المقالة الثانية من الاصول ⁹⁵ ولنعمل مربعا مساويا لمثلث بدص وليكن مربع س قع فيكون دائرة حمهن مساوية لمربع س قع ونسبة قطر اج الى قطر هح نسبة معلومة لان كل واحد من هذين القطرين معلوم المقدار وليكن نسبة اج الى هح كنسبة [شرف الى قف] ⁹⁶ فيكون نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة مربع شرف الى مربع قف ونعمل على خط شرف مربعا وليكن مربع شرت فيكون نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة مربع شرت الى مربع قع فنسبة مربع اج الى مربع هح هي نسبة دائرة ابع الى دائرة حمهن فنسبة مربع شرت الى مربع قع كنسبة دائرة ابع الى دائرة حمهن ومربع قع مساو لدائرة حمهن فمربع شرت مساو لدائرة ابع وقد تبين من هذا البيان ان كل دائرة فهي مساوية لمربع مستقيم الخطوط واما كيف يوجد هذا المربع فانا نستأنف فيه مقالة مفردة ان ليس غرضنا في هذه المقالة سوى ان نبين ان هذا المعنى ممكن ليتبين ⁹⁷ به فساد اعتقاد من اعتقد ان الدائرة لا يصح ان تساوى ⁹⁸ مربعا مستقيم الخطوط وقد تبين بالبراهين التي ذكرناها في هذا القول ان كل دائرة فهي مساوية لمربع مستقيم الخطوط فقد تبين من ذلك فساد اعتقاد هذه الطائفة ووضح ⁹⁹ ان كل دائرة فهي مساوية لمربع مستقيم الخطوط والمعاني المعقولة ليس يحتاج حقايقها الى وجود الانسان [لها واخراجها الى الفعل] ¹⁰⁰ بل اذا قام البرهان على امكان ¹⁰¹ المعنى فقد صح

90) B وان. 91) C. فيكون. 92) A. ابدلنا. 93) A u. B. مساو. 94) Fehl in A u. B. 95) C. كتاب اقليدس في الاصول. 96) A. شرف. 97) A u. B. لها. وآخرا الى الفعل A. 100) وضح. 99) A u. B. يساوى. 98) A. (؟) ليس. 101) A. امكانا. 101) A. ايها بالفعل B.

ذلك المعنى اخرجہ الانسان الى الفعل ام¹⁰² لم يخرجہ وفيما ذكرناه من تحقيق¹⁰³ هذا المعنى كفاية وهو الذى قصدنا له فى هذا القول اُتت المقالة¹⁰⁴.

اقول¹⁰⁵ على هذه المقالة لو كفى (?) فى اثبات هذا المطلوب اثبات امكانه بالوجه الذى ذكره لكان (?) له عن جميع هذا التطويل غنى (?) بهذا القدر من¹⁰⁶ البيان وهو ان يعال ليكن $\overline{اب}$ خطا معلوما ونعمل عليه مربع $\overline{بج}$ فهو معلوم وفيه دائرة $\overline{ده}$ فهى معلومة يكون قطرها وهو $\overline{ده}$ المساوى ل $\overline{اب}$ معلوما ولان الدائرة جزء معلوم من كل معلوم وهو المربع يكون لها اليه نسبة فليكن نسبة $\overline{اب}$ الى $\overline{باز}$ ونخرج $\overline{بج}$ وسطا فيما بينهما فى النسبة ليكن نسبة $\overline{اب}$ الى $\overline{بج}$ كنسبة $\overline{بج}$ الى $\overline{باز}$ ونعمل على $\overline{بج}$ ¹⁰⁷ مربع $\overline{باط}$ فيكون نسبة $\overline{اب}$ الى $\overline{باز}$ اعنى نسبة مربع $\overline{بج}$ الى دائرة $\overline{ده}$ كنسبة مربع $\overline{بج}$ الى مربع $\overline{باط}$ فنسبة مربع $\overline{بج}$ الى دائرة $\overline{ده}$ الى مربع $\overline{باط}$ واحدة فدائرة $\overline{ده}$ مساوية لمربع $\overline{باط}$ فاذا وجدنا ما¹⁰⁸ ظلمنا وليس هذا مما يوجب كل هذا التحرير للمتقدمين والمتأخرين فية¹⁰⁹.

تم القول : Hierfür hat C: 104) A u. B. تحقق 103) A u. B. أو A u. B 102) والحمد لله رب العالمين والصلوة على رسوله محمد وآله اجمعين ودفع الفراغ منه فى يوم الاثنين رابع عشر شهر جمادى الثانى سنة احدى وثلاثين 105) Fehlt in A. 106) So in A u. B, ich glaube, es sollte heissen. 107) B رح 108) A |s. 109) Die ganze eingeklammerte Schlussstelle fehlt in C.

Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben x .

Von

G. WERTHEIM.

Die Frage, wie Descartes dazu gekommen ist, die unbekannt Grössen durch die letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, ist noch nicht endgiltig beantwortet worden. Die von de Lagarde in den „Göttingischen gelehrten Nachrichten“ 1882 entwickelte Ansicht, dass die Anwendung des Buchstabens x aus dem arabischen Ausdruck (resp. dessen Abkürzung) für die Unbekannte herrühre, hat G. Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1885 widerlegt. Die Annahme, dass Descartes das in den deutschen Werken des 16. Jahrhunderts angewandte Zeichen 2α , welches er auf seinen Reisen in Deutschland kennen gelernt, irrig als x gelesen und durch diesen Buchstaben zu wiederholen gedacht habe, hält Cantor (Vorlesungen Bd. II S. 723) noch nicht durch eine ansprechendere Erklärung ersetzt.*

Vielleicht ist die Wahl des Descartes aber durch den italienischen Mathematiker Pietro Antonio Cataldi veranlasst. Dieser drückt in seinem 1610 in Bologna erschienenen *Trattato dell' Algebra proportionale* die verschiedenen Potenzen der Unbekannten dadurch aus, dass er beziehungsweise die Exponenten in arabischen Ziffern hinschreibt und jede Ziffer durch einen von oben rechts schräg nach unten links gehenden Strich durchstreicht. Er schreibt z. B. 5з via 8з für $40x^7$, d. i. in unserer Schreibweise $5x^3 \cdot 8x^4 = 40x^7$. Die erste Potenz der Unbekannten ist bei ihm з . Diese Bezeichnung wendet er auch in anderen algebraischen Schriften, z. B. in seinem *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (Bologna 1613) an, und es ist recht wohl möglich, dass Descartes auf seiner Reise in Italien (1624) mit den Schriften Cataldis bekannt geworden ist und aus ihnen das Zeichen x für die Unbekannte genommen hat.

* In seiner Besprechung des zweiten Bandes der Cantor'schen Vorlesungen (*Bibliotheca mathematica* 1892 S. 92) folgert G. Eneström — wohl mit Unrecht — aus dem Umstande, dass der Buchstabe z schon auf Seite 4, y auf Seite 5, x auf Seite 6 der *Géométrie* des Descartes (Ausgabe von 1886) eingeführt ist, Descartes habe in erster Linie z , nicht x als Zeichen einer unbekannt Grösse angewandt.

Rezensionen.

Dr. Johann Müllers Grundriss der Physik mit besonderer Berücksichtigung der Molekularphysik, Elektrotechnik und Meteorologie für die oberen Klassen von Mittelschulen, sowie für den elementaren Unterricht an Hochschulen und zum Selbstunterrichte, bearbeitet von O. LEHMANN. Vierzehnte völlig umgearbeitete Auflage. Mit 810 eingedruckten Abbildungen und zwei Tafeln. Braunschweig 1896. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 820 S. Preis 7 Mk. 50 Pfg.

Der früher in weiten Kreisen mit grossem Nutzen wirkende Müllersche Grundriss der Physik wäre sicherlich in kürzester Zeit aus den Schulen durch neuere Bücher, insbesondere Jochmann, verdrängt worden, wenn nicht die Verlagsbuchhandlung in Prof. Lehmann einen Herausgeber gefunden hätte, der es verstanden hat, die Eigenart des Buches mit grosser Pietät zu wahren und es doch derart umzugestalten, dass es die grossartigen Errungenschaften der Physik in den letzten beiden Dezennien enthält. Das Material ist aber so enorm reichhaltig, dass trotz der Streichungen, insbesondere bei der Meteorologie, ein stattlicher Band sich ergeben hat. Von ganz besonderem Wert ist die Anordnung des Stoffes; sie ist derart durchgeführt, dass eine Wechselbeziehung zu Frick's physikalischer Technik hergestellt ist, so dass Theorie und Praxis Hand in Hand gehen. Ein weiterer Vorteil ist die Bezugnahme auf grössere Lehrbücher, so dass einzelne Kapitel ohne weitere Mühe auch eingehender behandelt werden können. Bei der Anlage des Buches ist darauf Rücksicht genommen, dass es beim Verlassen der Schule sein Dasein nicht in einem vergessenen Winkel, in Staub gehüllt, beschliessen muss, sondern dass es ein treuer Lebensgefährte bleibt und für die weiteren Studien das Gerippe bildet, an dem das weitere sich anzuklammern vermag. Dass die experimentelle Mechanik einen so grossen Raum einnimmt, ist sehr anzuerkennen, denn sie bildet das Fundament, das bei so vielen Schülern als äusserst mangelhaft befunden wird. So möge denn das Buch in seiner stattlichen Erscheinung sich neue Freunde und Anhänger erwerben, die mit derselben Pietät es bewahren, wie dies bei den Besitzern der früheren Auflagen der Fall war.

B. NEBEL.

Grundriss der Experimentalphysik und Elemente der Chemie, sowie der Astronomie und mathematischen Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Von E. JOCHMANN und O. HERMES. Mit 376 Holzschnitten, vier meteorologischen Tafeln und zwei Sternkarten. Dreizehnte, vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1896, Verlag von Winkelmann & Söhne. 484 S.

Abgesehen von kleineren Zusätzen und Veränderungen ist der Charakter des Buches unverändert geblieben. Durch die kurze, präzise Ausdrucksweise wird das Buch nicht nur auf Gymnasien u. s. w. verwendet, sondern auch häufig auf Universitäten, insbesondere von Medizinern zur Vorbereitung auf das Physikum. Schon die rasche Aufeinanderfolge der verschiedenen Auflagen spricht für die Güte des auch in diesen Blättern häufig besprochenen Buches.

B. NEBEL

Leitfaden der praktischen Physik mit einem Anhang: Das absolute Maßsystem. Von F. KOHLRAUSCH. Mit in den Text gedruckten Figuren. Achte vermehrte Auflage. Leipzig 1896, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 492 S. Preis geb. 7 Mk.

Bei der Betrachtung der verschiedenen Auflagen dieses Leitfadens giebt sich zu erkennen, mit welcher Umsicht und Sorgfalt das Buch den erweiterten Bedürfnissen und Zwecken angepasst worden ist; namentlich zeigt sich dies hinsichtlich der Elektrotechnik und der physikalischen Chemie. Überall wurde eine vorsichtige Auswahl unter dem Neuen getroffen, damit das Buch seinen Charakter beibehalte. Der Übersicht wegen sind die neu hinzugefügten bzw. wesentlich umgearbeiteten Nummern und Tabellen mit einem Sternchen auch in der Inhaltsangabe versehen, wodurch der Vergleich mit den früheren Auflagen ungemein erleichtert wird. Auf diese Weise wird in keiner Weise eine Störung beim Gebrauch im Laboratorium hervorgerufen, in dem es sich so fest schon eingewurzelt hat. — Dass der „Amper“ wieder sein stummes „e“ erhalten hat, ist erfreulich, nur giebt es ein solches in der deutschen Sprache nicht, deshalb wird im Deutschen das Wort falsch gelesen. Hoffentlich erscheint in der nächsten Auflage auch noch der Accent, damit das Ampère gesetzte Denkmal nicht verstümmelt erscheint, und der selige Ampère seine Ruhe wiedererlangt und nicht ungehalten wird, wie wir es berechtigterweise über das Verschweigen von Wilhelm Webers Namen in einem Lehrbuch der Physik sind. Die Wissenschaft muss international bleiben.

B. NEBEL.

Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Von CARL CRANZ. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen, von Artillerieoffizieren, Instruktoren an Schießschulen, Artillerieschulen und Kriegsakademien, Mitgliedern von Artillerie- und

Gewehr-Prüfungskommissionen, Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. Leipzig 1896, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 511 S. Preis 20 Mk.

Den äusseren Anlass zur Herausgabe dieses Buches gab eine Feier der Schule, an welcher der Verfasser als Lehrer der Physik thätig ist. Verfasser beschäftigt sich schon längere Zeit mit Ballistik und hat nun seine eigenen, schon im Druck erschienenen Arbeiten vereinigt und derart mit dem Bekannten verarbeitet, dass daraus ein möglichst abgeschlossenes Kompendium der theoretischen äusseren Ballistik erzielt wird. Mit Rücksicht auf die verschiedenartigen Kreise, in welchen das Buch hilfreich eintreten soll, ist die Abfassung und Einteilung derart gewählt worden, dass auch solche, welche entweder sich nicht in das Ganze hineinarbeiten können, oder mit geringeren mathematischen Kenntnissen ausgerüstet sind, im Gebrauch des Buches nicht gestört sind. Die Praktiker sucht der Verfasser dadurch für sein Buch zu gewinnen, dass er die ihm überlassenen Schiessversuche der Mauser'schen Gewehrfabrik in Oberndorf an den betreffenden Stellen verwertet, und im Anhang eine Reihe nützlicher Tabellen mitteilt. Den zweiten Teil der Ballistik, welcher sich mit der Bewegung des Geschosses im Innern des Laufs beschäftigt, und daher die innere Ballistik genannt wird, gedenkt der Verfasser in einer späteren Ausgabe zu behandeln, um dadurch ein vollständiges Werk über die ballistischen Probleme bis zur Neuzeit den vielfach auf Versuche angewiesenen Fachkreisen an die Hand zu geben. Möge dieser Plan des Verfassers bald zur Reife gelangen!

B. NEBEL.

Jahrbuch der Naturwissenschaften 1896—1897. Enthaltend die hervorragendsten Fortschritte auf den Gebieten: Physik, Chemie und chemische Technologie; angewandte Mechanik; Meteorologie und physikalische Geographie; Astronomie und mathematische Geographie; Zoologie und Botanik; Forst- und Landwirtschaft; Mineralogie und Geologie; Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte; Gesundheitspflege, Medizin und Physiologie; Länder- und Völkerkunde; Handel, Industrie und Verkehr. Zwölfter Jahrgang. Unter Mitwirkung von Fachmännern herausgegeben von MAX WILDERMANN. Mit 49 in den Text gedruckten Abbildungen, zwei Karten und einem Separatbild: Die totale Sonnenfinsternis vom 8.—9. August 1896. Freiburg im Broisgau 1897, Herder'sche Verlagshandlung. 560 S. Preis 6 Mk.

Die einzelnen Zweige der Naturwissenschaften weisen allmählich eine solche Ausdehnung auf, dass auch der einzelne Forscher zum Spezialisten wird und nicht mehr im stande ist, sich in der Litteratur der anderen Zweige umzusehen. Es ist daher ihm ebensowohl wie dem Freunde der Naturwissenschaften in hohem Maße erwünscht, die wesentlichen Fortschritte auf dem Gebiete der Naturwissenschaften von Zeit zu Zeit in

knapper Fassung übersichtlich zusammengestellt zu erhalten. Das vorliegende Werk reicht für den genannten Zweck vollständig aus; denn die einzelnen Artikel sind kurz und präzise gefasst und gewähren ein ausreichend übersichtliches Bild. Dieser zwölfte Band reiht sich würdig seinen Vorgängern an, indem er äusserst interessante Aufsätze enthält, die zum Teil auch mit dem täglichen Leben in engster Berührung stehen. Es kann daher jedem das Buch bestens empfohlen werden.

B. NEBEL.

Leitfaden der Physik mit Einschluss der einfachsten Lehren der mathematischen Geographie nach der Lehr- und Prüfungsordnung von 1893 für Gymnasien von WILLIAM ABENDROTH. II. Band. Kursus der Unter- und Oberprima. Zweite Auflage. Mit 172 Holzschnitten und einer Farbentafel. Leipzig 1897, Verlag von S. Hirzel. 289 S. Preis 4 Mk.

Die Einteilung der Physik in dem vorliegenden Buch ist bedingt durch den Lehrplan, wie er für sächsische Gymnasien vorgeschrieben ist. Ob wir nun damit einverstanden sind oder nicht, kann an der vollendeten Tatsache nichts ändern, es berührt nur merkwürdig, dass erst in den beiden obersten Klassen die Mechanik eingeführt wird, dass also erst Leute mit 16—17 Jahren den Hebel, die Wage etc. kennen lernen. Nach der Mechanik folgen die Optik und die einfachsten Lehren der mathematischen Geographie. — Die zweite Auflage des zweiten Bandes weicht von der ersten äusserlich nicht ab, jedoch hat der Verfasser überall in formeller und sachlicher Weise Änderungen vorgenommen, die in der Spektralanalyse und der theoretischen Optik zu einer vollständigen Umarbeitung ausgedehnt worden sind. Die Darstellung ist derart gewählt, dass der Schüler von dem lästigen Nachschreiben vollständig enthoben wird. Auf diese Weise kann er seine ganze Aufmerksamkeit dem Unterrichte widmen, während er bei den häuslichen Repetitionen sein Gedächtnis an der Hand des Buches wieder auffrischt. Eine derartige Entlastung des Schülers wird dankbar anerkannt.

B. NEBEL.

Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von FRANZ KÖRNER. Mit 642 Abbildungen und zwei Farbentafeln. Wien und Leipzig 1897, Verlag von Franz Deuticke. 432 S. Preis 6 Mk. 60 Pfg.

Das Buch eignet sich sehr für den Unterricht an Gewerbeschulen, deren Schüler später als Monteure, Mechaniker und dergleichen mit der angewandten Physik in engste Verbindung treten. Da die Anschauung wesentlich zum Verständnis beiträgt, so wurde auf eine grosse Zahl von Abbildungen gesehen, die, zum Teil systematisch geordnet, wie z. B. die elektrischen Elemente, den Stoff äusserst übersichtlich gestalten. Das Wesentliche, insbesondere Stichwörter, sind durch fetten Druck stark hervorgehoben, so dass dem Schüler das rasche Repetieren erleichtert wird. Die

ganze Anordnung des Buches macht den Eindruck, dass der Verfasser ein tüchtiger Praktiker ist, der es versteht, dem oft ungeschlachteten Schülermaterial Liebe und Lust zur Physik beizubringen. Die Mathematik ist aufs äusserste beschränkt. Treten aber Formeln auf, so ist auch dafür gesorgt, dass Beispiele, deren Zahlen durch die beigegebenen Tabellen richtig geändert werden können, zur Einübung vorhanden sind. Das Buch sei für den Unterricht an Gewerbeschulen bestens empfohlen. B. NEBEL.

Die Ziele der technischen Hochschulen. Von A. RIEDLER. Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 40. Band. Berlin 1896, A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade). 20 S.

Mit den Vorschlägen des Verfassers sind wir voll und ganz einverstanden und doch vermissen wir in der Einleitung die Umkehrung des Sprichworts: Wo Rechte sind, sind auch Pflichten. Gottlob ist der Sinn unserer Jugend noch so gut, dass sie die Pflichten gerne übernimmt, wenn daraus auch Rechte entstehen. Aber damit sieht es im Deutschen Reich noch sehr traurig aus. So lange der Jurist glaubt, er sei allein berufen, in technischen Dingen die Entscheidung zu treffen, somit allein den Rahm abzuschöpfen, so lange kann man es einem tüchtigen jungen Manne nicht verargen, wenn er sich das angezogene Citat des Verfassers zur Richtschnur macht: Dumm ist, wer sich in der Welt nicht zurecht finden kann. Der Techniker gilt heutzutage meistens noch als Sachverständiger, nicht aber als verantwortlicher Leiter. Wozu stehen an der Spitze unserer Eisenbahnverwaltungen und sonstiger technischer Staatsbehörden Juristen, die sich der Techniker als ihrer Handlanger bedienen? Über die Anschaffung der besten Eisenbahnschienen kann doch kein Jurist entscheiden; wenn er es thut, so bedient er sich des Technikers. Des Juristen Mittelsperson ist unnötig. Die geschäftliche Überlegenheit(!) des Juristen erreicht dieser erst nach dem Studium, das könnte der Techniker ebenso. Der Kriegsminister ist doch auch kein Jurist. Die Realgymnasien eignen sich viel besser zur Vorbereitung für das medizinische Studium, als das Gymnasium, und doch wird diesen Anstalten das Recht vorenthalten. In dieser Hinsicht muss Wandel geschaffen werden. Ein kleiner Anfang ist gemacht durch die Berufung von Vertretern der technischen Hochschulen in das preussische Herrenhaus. Der beste Stützpunkt der Technik ist die enorme Leistungsfähigkeit. Hier muss der Hebel angesetzt werden, um den Juristen von dem unverdienten Platz zu entfernen, dann wird sich zeigen, dass sich die besten Elemente der Nation der Technik zuwenden, von der sie sich vielfach nicht aus Verachtung, sondern der unzulänglichen Verhältnisse wegen abgewendet haben. Wer tüchtig arbeitet, dem soll der Lohn auch nicht vorenthalten sein!

B. NEBEL.

Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus. Herausgegeben von G. HELLMANN:

- Nr. 7. EVANGELISTA TORRICELLI. *Esperienza dell'Argento Vivo. - Accademia del Cimento.* *Instrumenti per conoscer l'Alterazioni dell'Aria.* Mit einer Einleitung. Berlin 1897, A. Asher & Co. 16 S.

In der Einleitung entwickelt der Herausgeber die geschichtlichen Verhältnisse, die so oft zu Prioritätsstreitigkeiten und dergleichen Veranlassung gegeben haben, indem er wichtige Briefe und Stellen aus alten Werken zum Abdruck bringt. Es ist ein sehr verdienstliches Unternehmen, die oft schwer zu erhaltenden Originalwerke durch Neudruck einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen, und dabei die Prioritätsrechte auf Grund eingehender geschichtlicher Studien endgiltig festzulegen. Diese Sammlung ist für den Meteorologen und Physiker von hohem Wert.

B. NEBEL.

- Nr. 8. E. HALLEY, A. VON HUMBOLDT, E. LOOMIS, U. J. LE VERRIER, E. RENON. *Meteorologische Karten 1688, 1817, 1846, 1863, 1864.* Sechs Tafeln in Lichtdruck mit einer Einleitung. Berlin 1897, Asher & Co.

Der Verfasser giebt in der Einleitung des besseren Verständnisses wegen Erläuterungen über die einzelnen Karten selbst. In den Anmerkungen werden die Quellen mitgeteilt, aus denen die Erläuterungen geschöpft worden sind.

B. NEBEL.

- Nr. 9. HENRY GELLIBRAND. *A Discourse Mathematical on the Variation of the Magneticall Needle.* London 1635. Faksimiledruck mit einer Einleitung. Berlin 1897, A. Asher & Co. 22 S.

Aus dem Abdruck der sehr selten gewordenen Schrift kann man ersehen, dass Gellibrand den Nachweis von der Säkularvariation der magnetischen Deklination erbringt. Die Einleitung hebt hervor, dass Unterschiede in der magnetischen Deklination schon früher bekannt waren, dass aber die Schlussfolgerungen daraus nicht gezogen worden sind.

B. NEBEL.

- Oeuvres scientifiques de L. Lorenz.** *Revue et annotées par H. VALENTINER* Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome premier, premier fascicule. Copenhague 1896, Librairie Lehmann & Stage. 210 S.

Die Sammlung der Lorenzschen Arbeiten wird zwei Bände umfassen, von denen der erste in zwei Abteilungen erscheinen wird. Der erste Teil des ersten Bandes enthält sechs Aufsätze aus dem Gebiete der theoretischen Optik und zeigt, in welcher Weise Lorenz thätigen Anteil hat an der Klärung der heutigen Anschauungen über das Wesen des Lichts. Sehen wir von den beigegeführten Noten des Herausgebers ab, so bemerken wir für den deutschen Leser, dass der ganze Inhalt des ersten Teiles in Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie zu finden ist.

B. NEBEL.

Essai sur les éléments de la mécanique des particules. Par H. MAJLERT.
I^{re} Partie: Statique particulaire avec 14 planches. Neuchâtel 1897,
Attinger frères; Paris: Gauthier-Villars et fils. 242 S.

Zum Gegenstand der vorliegenden Studien dienen die Atome der Ur-
materie, die nach dem Verfasser eine sphärische Gestalt besitzen sollen.
Nachdem noch die Eigenschaften der Atome definiert sind, wird deren
Struktur und Vereinigung zu einfachen und zusammengesetzten Molekülen
vom Standpunkt der reinen Geometrie aus betrachtet. Daran schliessen sich
an die elementaren Begriffe der Physik und der angewandten Mechanik,
die kinetische und potentielle Energie und die Möglichkeit, die eine
Energieart in eine andere zu verwandeln. Die speziellen Studien über die
Energie und die verschiedenen Formen, in denen sie sich äussert, sollen
den zweiten Band dieses Werkes bilden, der unter dem Namen *Dynamique
particulaire* erscheinen wird. Aus den Tafeln sind die Gruppierungen der
sphärischen Atome und deren gegenseitige Einwirkungen vor Augen geführt.

B. NEBEL.

Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen
der Mechanik. Von F. E. NEUMANN (1832). Herausgegeben von
A. WANGERIN. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 76.)
Leipzig 1896, Verlag von Wilhelm Engelmann. 52 S. Preis 80 Pfg.

Die vorliegende erste Arbeit Neumanns aus der theoretischen Physik
ist im 25. Bande von Poggendorffs *Annalen der Physik und Chemie* er-
schienen und von da abgedruckt. In den Anmerkungen entwirft der
Herausgeber in wenigen Zügen ein Bild von dem Lebenslauf Neumanns und
setzt hierauf das Prioritätsverhältnis zwischen Neumann und Cauchy aus-
einander. Die weiteren Notizen beziehen sich auf einzelne Stellen der
Arbeit selbst.

B. NEBEL.

Zwei hydrodynamische Abhandlungen von H. HELMHOLTZ. I. Über Wirbel-
bewegungen (1858). II. Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbeweg-
ungen (1868). Herausgegeben von A. WANGERIN. (Ostwalds Klassiker
der exakten Wissenschaften Nr. 79.) Leipzig 1896, Verlag von
Wilhelm Engelmann. 80 S. Preis 1 Mk. 20 Pfg.

Die Anmerkungen beziehen sich zunächst auf Notizen über Helm-
holtz' Leben und Werke, sodann kommen die allgemeinen Bemerkungen
zu den vorliegenden Abhandlungen, die beide den Ausgangspunkt für neue
wissenschaftliche Gebiete bildeten. Den Schluss machen die speziellen
Noten und Erläuterungen zum Text.

B. NEBEL.

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Von H. HELMHOLTZ (1859). Herausgegeben von A. WANGERIN. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 80.) Leipzig 1896, Verlag von Wilhelm Engelmann. 132 S. Preis 2 Mk.

In den Anmerkungen wird zunächst darauf hingewiesen, weshalb die Aufnahme dieser Arbeit in die Sammlung der Klassiker berechtigt ist; denn in physikalischer Hinsicht werden dadurch die Widersprüche der älteren Theorie mit der Erfahrung beseitigt. Die speziellen, sehr ausgedehnten Anmerkungen gehen auf einzelne Punkte der Abhandlung näher ein.

B. NEBEL.

Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. Von MICHAEL FARADAY. I. und II. Reihe (1832). Herausgegeben von A. J. VON ÖTTINGEN. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 81.) Mit 41 Figuren im Text. Leipzig 1896, Verlag von Wilhelm Engelmann. 96 S. Preis 1 Mk. 50 Pfg.

Schon die wenigen Zeilen in den Anmerkungen über das Leben Faradays lassen erkennen, mit welchem Streben und mit welch' hoher idealer Anschauung sich Faraday dem Studium widmete. Die weiteren speziellen Notizen beziehen sich zum Teil auf Unterschiede zwischen dem Original und der seinerzeit von Poggendorff für die Annalen der Physik und Chemie angefertigten Übersetzung.

B. NEBEL.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht. Bearbeitet von SIEGMUND GÜNTHER. Vierte durchgesehene Auflage mit 47 eingedruckten Figuren und zwei Sternkarten. München 1896, Verlag von Theodor Ackermann. 142 S.

Das Büchlein eignet sich sehr gut für Schulen und solche Personen, welche sich über den gestirnten Himmel und die an ihm zu beobachtenden Vorgänge ohne weitschweifige Studien Belehrung verschaffen wollen. Da der Umfang sich dem Lehrziel der bayerischen Gymnasien anzuschließen hat, so dürfen die gesteckten Grenzen durch spezielle, wenn auch berechtigte Wünsche nicht beliebig verschoben werden. Daher ist der Inhalt der vierten Auflage im wesentlichen in Übereinstimmung geblieben mit dem der dritten Auflage. Bei einer künftigen Auflage dürfte der sauberen und sorgfältigen Ausführung der Figuren mehr Rechnung getragen werden. Vielfach sind die Linien zerrissen, unscharf oder verwischt. Die punktierten Linien, wie z. B. in Fig. 30, sind sehr mangelhaft, so dass ein Schüler für eine derartige Zeichnung sicher das Prädikat „gut“ nicht erhalten würde.

B. NEBEL.

Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. VON KARL ZELBR. Mit 12 Figuren im Text. Breslau 1896, Verlag von Eduard Trewendt. 125 S.

Verfasser legt seiner Darstellung der Grundprinzipien des Bahnbestimmungsproblems das W. Olbersche Werk „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen“ und das Gauss'sche Werk: „Theoria motus corporum celestium“ zu Grunde. Das letztere ist als die Erweiterung des ersteren anzusehen, indem Gauss das Problem für jede Kegelschnittlinie als Bahnkurve löst, was Olbers für die parabolische Kometentheorie gelungen ist. Am Schlusse teilt der Verfasser noch eine Litteraturübersicht mit, die aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit machen soll. Dem angehenden Astronomen dürfte durch das vorliegende Buch ein praktisches Werkzeug für die zu berechnenden Beobachtungen in die Hand gegeben werden.

B. NEBEL.

Das Parallelogramm der Kräfte als Grundlage des periodischen Systems in der Chemie. VON JOACHIM SPERBER. Zürich 1896, Verlag von E. Speidel. 37 S.

Mehr und mehr drängt sich dem Chemiker die Überzeugung auf, dass sich das ungeheure, durch Experimente gewonnene Material der Chemie in bestimmte mathematische Gesetze zusammenfassen und dadurch vereinfachen und übersichtlicher gestalten lassen müsse. Viele Versuche sind mit mehr oder weniger grossem Erfolge gemacht worden, wobei manches auf rein theoretischem Wege gefunden worden ist. Doch es bedarf noch einer grossen Energie, bis die Chemie ebenso der Rechnung unterworfen werden kann, wie dies bei der Physik der Fall ist. — Aus Überlegungen, die sich dem Verfasser bei der Allotropie aufgedrängt haben, brach sich die Überzeugung durch, dass die verschiedenen Äquivalentgewichte und die verschiedene Wertigkeit ein und desselben Elementes nur möglich sein können, wenn die Atome unter bestimmten Winkeln in Verbindungen treten, sodass die Valenz nur den Wert der Komponente angiebt, die das Atom in die resultierende Verbindung liefert. Die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Elemente können unmöglich rein zufällig periodische Funktionen der Atomgewichte sein; deshalb brachte sie der Verfasser mit den goniometrischen Funktionen in Beziehung. Das Resultat derartiger Überlegungen wird nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte durch die Formel ausgedrückt:

$$v = a \cos \varphi,$$

wobei a das Atomgewicht, v die Valenz und φ der Äquivalentwinkel eines Elementes bedeutet. Um nun die Theorie zu erproben, sollten experimentell bekannt gewordene chemische Grössen irgend welcher Art auf theoretischem Wege gewonnen werden. Zu dem Zweck bedient sich der Verfasser der Wärmetönungen chemischer Umsetzungen. Welch' grosse

Schwierigkeiten sich nunmehr entgegenstellen, giebt sich deutlich aus den für Ammoniak angestellten Rechnungen zu erkennen. Die Resultate dürfen deshalb zunächst als befriedigend bezeichnet werden. Die weiteren, zur Stütze der Theorie anzustellenden Berechnungen sind einer späteren Zeit vorbehalten, da es vielfach noch an sicheren physikalischen Daten fehlt, die unumgänglich notwendig sind. — Soweit die Sache jetzt überblickt werden kann, dürfte der weitere Ausbau dieser Theorie vielversprechend sein.

B. NEBEL.

Kritik der Formel der Newtonschen Gravitationstheorie. Von A. SINRAM.
Hamburg 1896, Verlag von Lucas Gräfe & Sillem. 44 S. Preis 1 Mk.

Die Thatsache, dass die Kometenschweife stets von der Sonne abgelenkt sind, liess sich durch die Gravitationstheorie nicht nachweisen und gab die Veranlassung zu allerlei erkünstelten Hypothesen. Verfasser sucht den Beweis zu erbringen, dass die Newtonsche Gravitationstheorie lediglich ein mathematischer Ausdruck ist, dem jede physikalische Basis fehlt. Dass Newton dies selbst gefühlt hat, will der Verfasser durch eine Reihe von Citaten aus Newtons eigenen Äusserungen nachweisen. Auch die heutigen Physiker leben mit der Gravitationstheorie auf etwas gespanntem Fusse; denn die modernen Anschauungen in der Elektrizitätslehre lassen die früher vielgepriesenen Fernwirkungen in einem recht zweifelhaften Lichte erscheinen.

B. NEBEL.

Die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und zu dessen Ergänzung. Von A. FÖPPL. Leipzig 1897, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 108 S.

Entgegen der ursprünglichen Absicht, das frühere Buch durch einen zweiten Band zu ergänzen, sah sich der Verfasser, äusserer Umstände wegen, veranlasst, von diesem Plane abzuweichen und sich nur auf die Theorie der Vektorfunktionen zu beschränken. Wenngleich sich der Titel auf die Geometrie der Wirbelfelder bezieht, so soll damit nur angedeutet werden, dass die Behandlung der Wirbelfelder den grössten Raum umfasst. Es werden noch andere Felder berücksichtigt, die sich durch die Kennzeichnung des Feldzustandes unterscheiden und darnach eingeteilt werden in skalare Felder, Vektorfelder und Hypervektorfelder. Von den Gravitationsfeldern wurde abgesehen, die Aufmerksamkeit wird ganz auf die elektrischen und magnetischen Felder gelenkt. Dabei sei aber ausdrücklich erwähnt, dass die Darstellung frei von allen physikalischen Hypothesen ist, dass es sich somit nur um eine streng mathematische Untersuchung handelt, die für jeden ihre Giltigkeit behält, ob er nun Anhänger der Maxwell'schen Theorie ist oder nicht.

B. NEBEL.

Méthode et Principes des sciences naturelles, introduction à l'étude de la médecine par Th. FUNCK-BRENTANO. Paris 1896, Ancienne maison delahaye L. Bataille & Cie. 137 S.

Das Buch zerfällt in drei Teile. In dem ersten, „la méthode“ betitelten, unterzieht der Verfasser die verschiedenen Methoden, deren man sich in den Naturwissenschaften zur Erforschung der Natur bedient, einer eingehenden Betrachtung. Der zweite Teil trägt die Überschrift „les principes“. Verfasser versteht aber darunter nicht z.B. die Principe der Mechanik, sondern er erläutert die Frage: „Was ist ein Prinzip?“ an dem Satze, dass die Wissenschaften nicht durch Prinzipie, sondern durch Definitionen fortschreiten, welche letztere man Prinzipie zu nennen pflege. In diesem Teile werden die Grunderscheinungen, wie die Bewegung, die Schwerkraft, die Anziehung, die Affinität, Elektrizität und Magnetismus, Licht und Wärme, Gewicht und Dichtigkeit, die Kräfte der Mechanik und die Molekularkräfte behandelt. Der dritte Teil umfasst die Entstehung des Sonnensystems, die Bildung der Erdkugel und die Erscheinung des Lebens auf dieser. Den Anhang bildet die Photographie des Unsichtbaren, worin die Röntgenstrahlen mit ihren Vorläufern einer Erklärung unterzogen werden. Das Buch hat einen philosophisch-naturwissenschaftlichen Charakter.

B. NEBEL.

Die Elektrizität. Von Dr. GUSTAV ALBRECHT. Mit 38 Abbildungen. Heilbronn a. N. 1897, Verlag von Schröder & Co. 167 S.

Verfasser beginnt mit dem Magnetismus und bedient sich bei der Behandlung desselben der Faradayschen Anschauungen. Anschliessend hieran werden gleich die elektrischen Ströme und ihre Wechselwirkungen mit Magneten behandelt. Nach den Gesetzen des elektrischen Stromes folgen die Beziehungen zwischen elektrischen Strömen und chemischen Erscheinungen. An dieser Stelle werden erst die galvanischen Elemente aufgeführt, eine Reihenfolge, die der natürlichen Entwicklung der Materie entspricht, von der geschichtlichen und bisher allgemein innegehaltenen Anordnung aber abweicht. An die Elektrostatik, welche zwei Kapitel umfasst, reihen sich die praktischen Anwendungen der elektrischen Erscheinungen und ihre Beziehungen zu Licht und Wärme an. An den Leser werden keine mathematischen Anforderungen gestellt, es kann somit jeder sich mit der Elektrizitätslehre ohne grosse Schwierigkeiten bekannt machen. Die Einheit der Kraft ist „eine Dyne“ und nicht „ein Dyn“. Bei dem so wichtigen elektrodynamischen Prinzip hätte auf seinen Entdecker Werner Siemens etwas deutlicher hingewiesen werden dürfen, als dies jetzt der Fall ist. Die Figuren lassen vielfach zu wünschen übrig. Bei der Kleinheit wirkt die Abschattierung störend, zum Beispiel wird der Laie aus den dunklen Klecksen nicht mit Deutlichkeit erkennen, wie die Elektroden in die Auffangröhren ragen, zumal Text und Figur keine Bezugnahme zu einander haben, welche sonst durch Buchstaben hergestellt wird. Dasselbe

gilt auch bei Figur 15; denn Niemand wird zum Beispiel angeben können, an welcher Stelle sich der Spiegel befindet. Eine schematische Zeichnung wäre weit vorteilhafter gewesen. Hoffentlich werden bei einer Neuauflage diese Fehler beseitigt, wodurch der Wert des Buches nur erhöht wird.

B. NEBEL.

Codex Leidensis 399, 1. Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschadschadii cum commentariis al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. R. O. BESTHORN et J. L. HEIBERG. Partis I Fasciculus II. Hauniae, in libraria Gyldendaliana (F. Hegel et fil.) 1897. S. 89—191.

Seit dem Erscheinen des 1. Fasc. des 1. Teiles dieser arabischen Euklid-Ausgabe sind vier Jahre verflossen, und schon glaubte man, das Werk würde aus irgend einem Grunde keine Fortsetzung mehr erfahren, als zur angenehmen Überraschung der Freunde des Unternehmens endlich vor einiger Zeit der 2. Fasc. erschien, mit der Erklärung, dass der Grund der Verzögerung hauptsächlich in den Schwierigkeiten des arabischen Druckes liege, dass aber für die Zukunft in dieser Hinsicht Vorsorge getroffen worden sei.

Dieser 2. Fasc. enthält die Sätze 20—47 des 1. Buches der Elemente, und schliesst hiermit dieses ab.* Die interessantesten Partien dieses Heftes sind: 1. die Versuche des Geminos, das Parallelenaxiom zu beweisen, in den Zusätzen zu Prop. 28; 2. der Zusatz zum pythagoräischen Lehrsatz (Prop. 46), bestehend in dem Heron'schen Beweise, dass die drei Geraden, nämlich diejenigen zwei, welche die Ecken der beiden Kathetenquadrate mit den gegenüberliegenden Dreiecksecken verbinden und die Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, sich in einem Punkte schneiden; 3. der Tâbit'sche Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Was Nr. 1 anbetrifft, so stellt Geminos vier Hilfssätze auf, mit denen er dann das 5. Postulat beweisen will, diese sind: a) Wenn zwei Geraden parallel sind, so ist ihr Abstand zu jeder von ihnen senkrecht; b) wenn eine Gerade zwei andere Geraden so schneidet, dass sie zu jeder von ihnen senkrecht ist, so sind diese Geraden parallel und die senkrechte Gerade ist ihr Abstand; c) wenn eine Gerade zwei andere parallele Geraden schneidet, so sind je zwei korrespondierende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, je zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte; d) wenn eine Gerade zwei andere Geraden so schneidet, dass entweder zwei korrespondierende Winkel gleich sind, oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte ausmachen, so sind die geschnittenen Geraden parallel; als e) erscheint dann der Hauptsatz, das 5. Postulat. — Wir sehen hieraus, dass dieses Verfahren des Geminos, das Parallelenaxiom zu

* Der Satz 45 der griechischen Ausgabe von J. L. Heiberg, sowie auch der Nasir ed-Din'schen, fehlt hier, daher zählt das erste Buch hier nur 47 statt 48 Sätze.

beweisen, von demjenigen des Nasir ed-Din* ziemlich abweicht, dass also letzterer hierin selbständig vorgegangen ist, wenn er auch, was ja natürlich ist, gerade wie Geminos, der Aufstellung neuer, allerdings etwas einfacherer Axiome oder Postulate nicht entbehren konnte: sein erster Hilfssatz ist eben kein geometrischer Beweis, sondern nur eine anschauliche Darstellung einer geometrischen Thatsache.**

Für Nr. 2, den oben genannten Heron'schen Beweis, der übrigens ja zum Euklidischen Beweise des pythagoräischen Satzes nicht notwendig ist, verweise ich den Leser auf das Werk selbst.

Was Nr. 3 anbetrifft, so vernehmen wir hier zum ersten Male, dass von dem bedeutenden arabischen Mathematiker Tâbit ben Kurra einer der einfachsten Beweise des pythagoräischen Satzes herrühren soll, der in dem Werke von Jury Wipper (Sechshundvierzig Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes etc., aus dem Russischen übersetzt von F. Graap, Leipzig 1880, S. 23, Nr. 18) ohne Angabe des Ursprungs sich befindet.*** Ob dieser Beweis vielleicht noch älter sei als Tâbit, kann natürlich hier nicht entschieden werden.

Über den Text und die Übersetzung habe ich mich gleich lobend wie in der Rezension des 1. Fasc, auszusprechen; es seien mir nur noch zwei Bemerkungen gestattet: Schon im 1. Fasc. und auch hier wieder (S. 89, 93, 153, 155, 165 etc.) setzt Herr Heiberg in dem Ausdruck „in duas partes aequales dividere“ das Wort „aequales“ in eckige Klammern; wir sehen den Grund hierzu nicht ein, ist doch überall im arabischen Text dem Worte قسم (teilen) beigefügt بنصفين d. h. in zwei Hälften, in zwei gleiche Teile. Nur S. 145 (Prop. 34) macht Herr Heiberg eine Ausnahme, obgleich der arabische Text derselbe ist. — Der Anfang des arabischen Textes des nach Prop. 31 eingeschobenen Satzes über die Teilung einer Geraden in drei gleiche Teile ist jedenfalls verdorben, die Worte: لان قسمة خط بثلاثة اقسام (denn die Teilung einer Geraden in drei gleiche Teile etc.) sollten nicht am Ende stehen, wie auch die Übersetzung sie richtig hinter die Anfangsworte: „Locus eius erat post prop. X.“ stellt. Dieser Satz erhält nur dann einen Sinn, wenn man, falls man keine Umstellung zulassen will, entweder an Stelle von لان

* Vergl. diese Euklidausgabe, Rom 1594, S. 28—33, und Kästner, Geschichte der Mathematik Bd. 1, S. 375—81.

** Es ist hier noch von Interesse beizufügen, dass S. 118 (Übers. 119) Geminos صاحبنا genannt wird, was in der Übersetzung durch „magistrum nostrum“ wiedergegeben wird; es könnte aber ebenso gut mit „unsrem Freund“ oder „Genossen“ übersetzt werden; es scheint, als ob diese Stelle aus Simplicios entnommen wäre, dann wäre aber diese Bezeichnung unverständlich; vielleicht ist sie aber aus Herons Scholien herübergenommen und von Nairizi vergessen worden, den Autor zu nennen, dann wäre also konstatiert, dass Heron und Geminos Zeitgenossen gewesen sind.

*** Ein ganz ähnlicher Beweis (im citierten Werke Nr. 17) findet sich zuerst im „Lehrbegriff der reinen Mathematik“ von Hauff, 1803, vor.

(weil, denn) *وان* oder *مع ان* oder *على ان* (wenn auch, obgleich) setzt, oder aber das Citat I, 12 durch ein anderes, auf einen nachfolgenden Satz sich beziehendes ersetzt; doch weder in I, 12 (wie Herr Heiberg bemerkt) noch in einem späteren Satze des 1. Buches kommt die Teilung einer Geraden in drei gleiche Teile zur Anwendung.

HEINRICH SUTER.

P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique par A. VASSILIEF, Professeur à l'Université de Kasan. Turin 1898, Charles Clausen. 56 p.

Die 70 Jahre von 1821 bis 1891 umspannen das Leben Tchebychef's, ein Leben, reich an Leistungen, reich an Erfolgen, aber ziemlich einförmig verlaufend. Das Leben eines Gelehrten bietet verhältnismässig selten erzählenswerte oder gar spannende Zeiträume, und so war es auch bei Tchebychef. Kurz konnte der Lebensabriss werden, welchen Herr Vassilief von dem Landsmanne und Fachgenossen entwarf, um so ausführlicher musste die Schilderung von Tchebychef's wissenschaftlichen Leistungen werden, welche Herr Vassilief zuerst in mehreren Heften des von Herr Gino Lorin seit 1898 herausgegebenen *Bolletino di bibliografia e storia della scienza matematica* (Turin bei C. Clausen) veröffentlichte, und welche heute als besondere Broschüre vor uns liegt. Wir vermögen ihr nicht im einzelnen hier zu folgen. Es genüge, zu sagen, dass Tchebychef mit dem theoretischsten Teile der Mathematik, wenn man so sagen darf, beginnend, mehr und mehr zur angewandten Mathematik überging. Zahlentheoretische Arbeiten, unter welchen die Untersuchungen über Primzahlenmengen unterhalb einer gewissen Grenze hervorragen, liessen Tchebychef's Namen zuerst bekannt werden, Erfindungen der praktischen Maschinenlehre sind die Frucht seiner letzten Anstrengungen. Man kann diesen Entwicklungsgang nicht hübscher schildern, als es Tchebychef selbst gethan hat, indem er sagte: Die ältesten Aufgaben der Mathematik, wie die der Würfelverdoppelung, haben die Götter gestellt; dann kam ein Zeitraum, in welchem Halbgötter: Fermat, Pascal und andere, die Aufgaben stellten; heute liefert das Bedürfnis der Menschen die der Lösung harrenden Aufgaben. Man wird in Tchebychef's Arbeiten vielleicht eine gewisse Vorliebe für französische Schriftsteller bemerken, welche ihn veranlasste, die Verdienste von Gauss zum Beispiel weniger als gerecht zu betonen. Man wird das seinen freundschaftlichen Beziehungen zu französischen Zeitgenossen zu Gute halten.

CANTOR.

Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia volumen I. Syntaxis mathematica edidit J. L. HEIBERG, professor Hauniensis. Pars I libros I—VI continens. Leipzig 1898, B. G. Teubner. VI, 546 p.

Das freudige Lächeln, mit welchem wir den ersten Band der in der Bibliotheca Teubneriana nunmehr erscheinenden Werke des Ptolemaeus und in ihm die von Heiberg herausgegebenen 6 ersten Bücher des *Almagest*

begrüßten, machte, wir gestehen es, bald ernsteren Gesichtszügen Platz. Ungleich den früher von Heiberg herausgegebenen Mathematikern ist nämlich der *Almagest* von keiner Übersetzung begleitet. Herr Heiberg hat gut reden, wenn er in der Vorrede sagt, er habe der Schwierigkeit des Gegenstandes wegen nicht gewagt, eine lateinische oder neuersprachliche Übersetzung beizugeben; darauf mögen Astronomen ihr Augenmerk richten, wenn sie eine Erklärung wünschen. Welcher lebende Astronom weiss denn so viel Griechisch und, setzen wir hinzu, wie viele lebende Philologen ausser Herrn Heiberg wissen so viel Astronomie, dass sie an jenes Wagnis herantreten könnten? Man kann freilich niemand zwingen zu leisten, was er in durchaus befriedigender Weise zu leisten sich nicht im stande fühlt, aber Herr Heiberg hätte sich, meinen wir, sagen müssen, die von ihm geübte Textkritik schliesse ein so genaues Verständnis ein, dass mancher Leser die bescheidene Äusserung der Vorrede als Vorwand betrachten werde.

CANTOR.

Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von ROBERT FRICKE und FELIX KLEIN. Erster Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XIV, 634 S.

Die Theorie der eindeutigen Funktionen einer Veränderlichen, welche bei einer Gruppe von linearen Transformationen ungeändert bleiben, der automorphen Funktionen, gehört der jüngsten Periode der mathematischen Forschung an, und es ist ein schönes Zeugnis für die fortwirkende Fruchtbarkeit der Gauss'schen Gedanken, wenn fast nach einem Jahrhundert die natürliche Entwicklung seiner Ansätze in ihrer Vereinigung zu einem weitreichenden neuen Zweige der Mathematik führt. Vor der hypergeometrischen Reihe, den elliptischen Funktionen, insbesondere den von Gauss selbst in ihrer analytischen Natur erkannten Modulfunktionen, führen die Wege in beständiger Erweiterung über die Arbeiten von Riemann, Fuchs, Schwarz, Schottky von der funktionentheoretischen Seite her zu dem von Poincaré und Klein in allgemeiner Fassung erschlossenen Gebiet, während anderseits die nicht euklidische Geometrie, die Theorie der quadratischen Formen, der algebraischen Zahlen, die Hilfsmittel zu ihrem eingehenden Studium liefern. Allerdings tritt dazu noch als neuer und richtunggebender Verbündeter der von Gauss nicht ausdrücklich formulierte, aber verwendete Gruppenbegriff.

Eine zusammenhängende Darstellung des ganzen Gebietes hat gerade wegen der Mannigfaltigkeit der Hilfsmittel mit bedeutenden Schwierigkeiten zu kämpfen, da alle diese erst für den Endzweck aufbereitet und zurechtgelegt werden müssen.

Um so mehr wird man Klein Dank wissen, dass er an seinem, beim ersten Auftreten der automorphen Funktionen gefassten Plan, ihre Theorie in einer ausgedehnten Publikation zu behandeln, durch so lange Zeit fest-

gehalten und ihn mit eifriger Unterstützung Fricke's soweit gefördert hat, dass uns jetzt der erste Band einer solchen Gesamtdarstellung vorliegt.

Das vor 13 Jahren erschienene Buch über das Ikosaeder von Klein, die erste in der Reihe der geplanten Veröffentlichungen, hatte die Theorie der endlichen Gruppen zur Darstellung gebracht und ging vorwiegend algebraischen Zielen nach. In den Jahren 1890 und 1892 erschien die Theorie der Modulfunktionen, wobei Fricke bereits als Bearbeiter auftritt. Dort wird allseitig die Darstellung eines zufolge der hochentwickelten Theorie der elliptischen Funktionen bis ins einzelne zugänglichen Spezialfalles der automorphen Funktionen verfolgt. Die im Laufe der Bearbeitung dieses Gebietes durch Klein und seine Schüler erlangten Resultate haben vielfach auch über das genannte Spezialgebiet hinaus unsere Kenntnis des algebraischen Gebildes erweitert. Ich erinnere nur an die Theorie der singulären Korrespondenzen von Hurwitz, welche im Anschluss an die Modulkorrespondenzen entstanden ist.

Der vorliegende Band, mit welchem das eigentliche Gebiet der automorphen Funktionen betreten wird, bringt die gruppentheoretischen Grundlagen der allgemeinen Theorie. Äusserlich unterscheidet er sich von den Modulfunktionen dadurch, dass Klein und Fricke nebeneinander auf dem Titelblatt als Verfasser erscheinen und des letzteren Anteil am Buche dadurch mehr betont ist als in den Modulfunktionen.

Die Einleitung führt uns zunächst drei verschiedene Formen der geometrischen Darstellung linearer Substitutionen vor, welche in der Folge gebraucht werden. Von diesen beziehen sich zwei auf beliebige Substitutionen, die dritte aber nur auf eine — freilich die zugänglichste — Art derselben, und erfordert Fallunterscheidungen. Es sind folgende:

1. Werden den beiden komplexen Regelscharen einer einteiligen Fläche zweiter Ordnung, welche der Einfachheit halber als Kugel vorausgesetzt werden mag, nach Plücker zwei lineare Parameter ξ und ζ zugeordnet, so bestimmt ein solches Parameterpaar einen Punkt der Fläche und zwar einen reellen, wenn die beiden Parameter konjugiert komplex sind.

Die Verteilung der ξ Werte auf der Kugel stimmt mit der gewöhnlichen Riemann-Gauss'schen überein und die Kugel soll als ξ Kugel bezeichnet werden. Zwei lineare Substitutionen, auf beide Parameter ausgeübt, bestimmen eine Kollineation der Fläche in sich, welche reell wird, wenn die Substitutionskoeffizienten der einen zu denen der anderen konjugiert komplex sind. Gleichzeitig ist dadurch eine Kollineation des Raumes der ζ Kugel bestimmt, welche in bekannter Weise als „Bewegung“ des hyperbolischen Raumes mit der ξ Kugel als Maßfläche im Cayley'schen Sinne aufgefasst werden kann. Die „Bewegungen“ und „Spiegelungen“ des hyperbolischen Raumes bilden die allgemeine Grundlage der Betrachtungen.

2. Dieser hyperbolische Raum im Innern seiner Maßfläche kann derart eindeutig auf einen von einer Ebene begrenzten Halbraum abgebildet

werden, dass der ξ Kugel die Ebene entspricht, ferner den Ebenen und Geraden des hyperbolischen Raumes zur Ebene orthogonale Halbkugeln und Halbkreise entsprechen und endlich die ξ Werte auf der Ebene in der Gauss'schen Weise ausgebreitet sind.

Dieser Halbraum und seine Begrenzungsebene werden als ξ Halbraum und ξ Ebene bezeichnet.

3. Werden aus der Gesamtheit aller Kollineationen nur diejenigen herausgenommen, welche einen Punkt P des hyperbolischen Raumes festlassen, so wird deren Gesamtheit als eine Rotationsgruppe bezeichnet und je nachdem P im Innern, auf oder ausser der Maßfläche liegt, elliptische, parabolische, hyperbolische Rotationsgruppen unterschieden. Die Rotationsgruppe lässt dann einen Kegel zweiter Klasse unverändert und beim Schnitt des Bündels mit dem Scheitel P durch eine Ebene entsteht in dieser eine Gruppe von „Bewegungen“ und „Spiegelungen“ in Bezug auf einen als Maßkurve betrachteten reellen, ausgearteten oder nullteiligen Kegelschnitt, im zweiten Falle einschliesslich der Ähnlichkeitstransformationen. Dabei wird die Ebene doppelt überdeckt, wenn der Kegelschnitt ein eigentlicher ist, doch sind im hyperbolischen Falle beide Doppelüberdeckungen durch diesen getrennt, während sie im elliptischen Falle im unendlichen der Ebene zusammenhängen. Diese Ebene soll als nichteuklidische Ebene, respektive elliptische, parabolische, hyperbolische, bezeichnet werden.

Auf der ξ Ebene entspricht dem Maßkegelschnitt ein eigentlicher oder degenerierter Kreis, der Hauptkreis, welcher bei allen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt und den Geraden der nicht euklidischen Ebene zu diesem orthogonale Kreise. Diese Gruppen werden daher als Hauptkreisgruppen und speziell die hyperbolischen als eigentliche Hauptkreisgruppen bezeichnet. Diese dritte Darstellung kam gelegentlich schon bei den Modulfunktionen in Verwendung und kann natürlich auch unmittelbar in einer nicht euklidischen Ebene entwickelt werden. Der Inhalt der Einleitung wird hier so ausführlich und in etwas veränderter Anordnung wiedergegeben, weil in der Folge auf jede dieser drei Darstellungsformen abwechselnd Bezug genommen wird.

Im ersten Abschnitt werden die Grundlagen einer Theorie der diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen entwickelt. Aus der — mit Rücksicht auf die symmetrischen Umformungen — gemischten Gruppe von ∞^6 ξ Substitutionen sind nun die eigentlich diskontinuierlichen auszusondern. Dabei ist unter einer diskontinuierlichen Gruppe eine solche verstanden, deren Koeffizienten keinen variablen Parameter enthalten, und unter einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe in einem bestimmten Gebiet eine solche, für welche der Diskontinuitätsbereich von gleicher Dimension ist, wie das Gebiet selbst. Dabei ist der Begriff des Diskontinuitätsbereiches aus den „Modulfunktionen“ herübergenommen als der grösste Bereich, in welchem keine zwei Punkte zufolge der ξ Substitutionen, respektive im hyperbolischen Raum oder der nicht-euklidischen Ebene, zufolge der Kollineationen der Gruppe äquivalent sind. Interessant ist dabei der Hinweis, dass zwei

Gruppen hinsichtlich ihrer Struktur isomorph sein können, ohne beide gleichzeitig diskontinuierlich zu sein. Es folgt eine Rekapitulation der Einteilung der Substitutionen, der Gruppen der regulären Körper und der Einteilungen der elliptischen Ebene, wobei sich die Ikosaederteilung als identisch mit der Figur eines Clebschschen Sechseckes erweist.

Ferner wird die Modulgruppe in die hyperbolische Ebene übertragen und nun die Behandlung der von Picard zuerst untersuchten Gruppe in Angriff genommen. Für diese sind die Substitutionskoeffizienten ganze komplexe Zahlen und die Determinante 1 oder i .

Diese Gruppe erweist sich erst im hyperbolischen Raum, respektive im ζ Halbraum eigentlich diskontinuierlich, nicht aber auf der ζ Kugel. Der Diskontinuitätsbereich und ihre erzeugenden Substitutionen werden bestimmt und erweisen sich als genaue Analoga der bekannten Verhältnisse bei den Modulfunktionen. Im hyperbolischen Raum wird die Einteilung in äquivalente Diskontinuitätsbereiche der mit den Spiegelungen erweiterten Picardschen Gruppe folgendermaßen erhalten: Man schreibe der Kugel ein reguläres Oktaeder ein und vervielfältige dieses nach dem Prinzip der Symmetrie. Wird dann das erste Oktaeder durch seine Symmetrieebenen in 48 Tetraeder zerlegt, und entsprechend alle seine mit Rücksicht auf die Maßbestimmung kongruenten, so erhält man die gesuchte Einteilung. Ein Hinweis auf die Untergruppen der Picardschen Gruppe, sowie ihre Bedeutung für die Theorie der Dirichletschen und Hermiteschen quadratischen Formen, ferner auf die Arbeiten von Picard, Bianchi und Hurwitz schliesst das Kapitel.

Es folgt nun der Beweis des fundamentalen Satzes von Poincaré, das das Fehlen infinitesimaler Substitutionen notwendig und hinreichend für die eigentliche Diskontinuität im ζ Halbraum und damit auch im hyperbolischen Raum ist, und es wird an Beispielen die Existenz von Hauptkreisgruppen, welche über den Hauptkreis hinaus noch eigentlich diskontinuierlich sind, sowie von Gruppen ohne Hauptkreis dargethan.

Die eigentlichen Hauptkreisgruppen hat Poincaré „groupes fuchsien“, die übrigen „groupes Kleinéens“ genannt. Ferner wird für bereits auf der ζ Kugel eigentlich diskontinuierliche Gruppen der Name „Polyongruppe“, für solche aber, welche erst im hyperbolischen Raume diskontinuierlich sind, der Name „Polyedergruppe“ nach Bianchi gebraucht.

Der wichtige Begriff eines „normalen Diskontinuitätsbereiches“ wird nunmehr eingeführt. Er entsteht dadurch, dass man in der hyperbolischen Ebene einen Punkt C_0 und alle seine äquivalenten, zunächst mit genügend kleinen Kreisen von gleichem Radius umgibt, natürlich die Worte Kreis und Radius im Sinne der Maßbestimmung genommen, und nun jeden dieser Bereiche so radial bis zum Zusammentreffen mit den umgebenden Bereichen anwachsen lässt, dass sie im Sinne der Maßbestimmung kongruent bleiben. Man erhält so eine Einteilung der hyperbolischen Ebene in lauter kongruente, centrische Polygone, deren jedes einzelne einen normalen Diskontinuitätsbereich vorstellt. Man kann den zu einem Centrum C_0 gehörigen normalen Diskontinuitätsbereich auch definieren als das grösste Polygon, welche von

den auf die Verbindungslinien von C_0 mit seinen äquivalenten Punkten errichteten Mittelsenkrechten (im Sinne der Maßbestimmung) frei bleibt, dieses Polygon ist dann notwendig nach innen überall konkav. Es können übrigens dabei auch Teile des Maßkegelschnittes als Begrenzungsstücke auftreten, ja der Bereich sogar über den Maßkegelschnitt hinausragen. Dieser Begriff lässt sich dann auch auf den hyperbolischen Raum übertragen. Seine Bedeutung liegt erstens in der Angabe einer bestimmten Regel, überhaupt einen Diskontinuitätsbereich zu bilden, dann aber in einer Reihe von Eigenschaften, wie Konkavität, Ausschluss hyperbolischer Ecken, welche sonst erst durch separate Umgestaltungen vermieden werden müssen, und endlich in einer bestimmten und übersichtlichen Abhängigkeit vom Centrum C_0 .

Nun wird die Definition der Gruppe durch einen geeignet gewählten Diskontinuitätsbereich untersucht. Dabei sind in der Ebene die Ränder des Bereiches paarweise oder in Cyklen durch Substitutionen einander zugeordnet und müssen daher bestimmten Bedingungen genügen. Im hyperbolischen Raume treten ähnliche Bedingungen für die Kanten und Ecken auf. Nun gilt der entscheidende Satz: Ein Polygon P_0 auf der Kugelfläche ist Diskontinuitätsbereich einer Gruppe, wenn es ein Polyeder giebt, welches P_0 zu einer seiner Randflächen hat und dessen Kanten und Ecken den eben erwähnten Bedingungen genügen. Dabei wird das Polyeder aus dem Polygon erhalten, indem man die Ebenen als den Kreisbogen vor ausgesetzten Seiten des Polygons auf die ξ Kugel legt. Dabei ist die Unterscheidung wesentlich, ob das Polyeder ausser P_0 noch andere Begrenzungsstücke auf der Kugel hat oder nicht. Im letztern Falle treten nur isolierte Grenzpunkte, im ersteren immer ganze Grenzkurven auf, ja es werden sogar in der Regel unendlich viele durch die Grenzkurven gegeneinander abgegrenzte verschiedene Polygonetze entstehen. Dabei sind die Grenzkurven von Fixpunkten nicht-elliptischer Substitutionen überall dicht erfüllt. Auf diese Erörterungen gründet sich eine Einteilung der Gruppen nach der Gestalt des Diskontinuitätsbereiches, wobei auf die Einteilung Poincarés ergänzend und berichtigend eingegangen wird. Wird nun ein einzelnes Polygon des Diskontinuitätsbereiches im Sinne der Äquivalenz seiner Ränder in Bezug auf die Substitutionen der Gruppe als eine geschlossene Mannigfaltigkeit aufgefasst, so zeigt diese bestimmten Zusammenhang und kann auch durch ein kanonisches Querschnittsystem in eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit verwandelt werden. Wird eine solche Zerschneidung noch durch n einfache Schnitte, welche den n Klassen elliptischer und parabolischer Ecken des Polygons entsprechen, ergänzt, so kann dazu ein neues Polygon auf der ξ Kugel gefunden werden, welches ebenfalls Diskontinuitätsbereich derselben Gruppe ist, und dessen Ränder den Rändern der Schnitte entsprechen. Ein solches Polygon heisst dann ein kanonischer Diskontinuitätsbereich und ist umgekehrt den Betrachtungen der Gruppe zu Grunde gelegt bei Klein, Math. Ann. 21. Mit Hilfe desselben gelingt die Angabe, dass die Gruppe aus $n + 2p$ Substitutionen erzeugt werden kann, von denen n periodische sind und zwischen denen noch eine Relation besteht. Die

Perioden der n erstgenannten Substitutionen mögen $l_1 \dots l_n$ sein, dann wird später ein solches Polygon von der Gattung (p, n) und der Signatur $(p, n; l_1 \dots l_n)$ bezeichnet. Der Schluss des Abschnittes bringt noch die Komposition der Diskontinuitätsbereiche und die Untersuchung über die Möglichkeit der Spaltung der Substitutionen der Gruppe in ξ in binäre homogene Substitutionen einer isomorphen Gruppe.

Im zweiten Abschnitte werden zunächst die elliptischen und parabolischen Rotationsgruppen sowie die Nichtrotationsgruppen mit zwei Grenzpunkten erledigt. Für die hyperbolischen Gruppen wird dann noch eine besondere Form des Diskontinuitätsbereiches eingeführt. Es zeigt sich nämlich, dass das Centrum des Normalpolygons einen bestimmten Bereich durchlaufen kann, ohne dass letzteres an Seitenzahl verliert. Dieser Bereich ist in der hyperbolischen Ebene von Geraden, eventuell Stücken des Maßkegelschnittes und Kurven dritter Ordnung begrenzt und ebenfalls ein Diskontinuitätsbereich; er wird als „natürlicher“ Diskontinuitätsbereich bezeichnet. Das nächste Kapitel giebt eine eingehende Untersuchung der kanonischen Polygone und ihrer Änderung bei Abänderung des kanonischen Schnittsystems. Es entspricht diese Fragestellung den in der linearen Transformation der Abel'schen Integrale auftretenden, nur dass hier noch die gewöhnlichen als „Schnitte c “ bezeichneten ebenfalls eine Rolle spielen. Der Grund hierfür liegt darin, dass lineare Substitutionen im allgemeinen nicht gegeneinander vertauschbar sind. Dabei werden die Moduln des kanonischen Polygons als gewisse Invarianten der erzeugenden Substitutionen eingeführt und ihre Theorie soweit gefördert, dass ein System von Relationen zwischen ihnen gewonnen wird, welches notwendig und hinreichend für die Existenz der Gruppe ist. Die Abänderung der Erzeugenden bei Abänderung des kanonischen Polygons führt auf gegenseitige birationale Ausdrückbarkeit der „Moduln“, deren Gesamtheit die sogenannte „Modulgruppe“ bildet. Sie ist bloss abhängig von der Signatur des Polygons und lässt sich für $p > 0$ aus $n + 5p - 3$ Transf. erzeugen. Diese Untersuchungen werden für die Gattungen $(0,4)$ in $(1,1)$ näher ausgeführt.

Das dritte Kapitel des ersten Abschnittes ist der Betrachtung jener merkwürdigen Verhältnisse gewidmet, welche bei Gruppen ohne Hauptkreis auftreten können. Diese sind in erster Linie das Auftreten nichtanalytischer Grenzkurven, welche im Spezialfall eines Vierecks mit den Winkeln Null aber ohne Hauptkreis eingehender diskutiert werden. Interessant ist dabei das Auftreten solcher Gebilde bei geometrischen Betrachtungen. In zweiter Linie steht dann das Vorkommen unendlich vieler Netze mit unendlich vielen Grenzkurven.

Zum Schlusse werden noch die von durchaus getrennt verlaufenden Kreisen begrenzten Diskontinuitätsbereiche kurz besprochen.

Damit ist der geometrische Teil der Theorie soweit geführt, als es der Stand der Forschung gestattet, und es tritt nun im letzten Abschnitt ein neues Hilfsmittel ein, nämlich die Theorie der quadratischen Formen. Dabei wird von einem Umstände Gebrauch gemacht, der schon der Inter-

pretation der Gruppen im hyperbolischen Raume zu Grunde liegt, dass jede quadratische Form unendlich viele Transformationen in sich zulässt, aber mit der Verschärfung, dass nun auch von den Transformationskoeffizienten ein bestimmter arithmetischer Charakter verlangt wird, welcher so beschaffen sein muss, dass die Gesamtheit der erhaltenen eine Gruppe, und zwar eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe bildet.

Die Reduktionstheorie der binären Formen mit ganzzahligen Koeffizienten (Gauss'sche Formen), mit ganzen komplexen Koeffizienten (Dirichlet'sche Formen) und jene von Hermite eingeführten bilinearen Formen konjugiert komplexer Variablen wird in geometrischer Gestalt entwickelt, wobei die Picard'sche Gruppe und ihre Rotationsuntergruppen als grundlegend für diese Theorien erkannt werden. Die vorliegenden Untersuchungen von Hermite und Selling über ternäre und quaternäre Formen werden den hier entwickelten Gesichtspunkten eingeordnet und bis zur Durchführung bestimmter Beispiele und der Gewinnung von Diskontinuitätsbereichen weiter entwickelt. Endlich werden noch allgemeinere Polygone und Polyedergruppen gewonnen, indem die Theorie der ternären quadratischen Formen eines beliebigen Zahlkörpers herangezogen wird. Namentlich dieses letzte Kapitel ist die Ausführung früherer Arbeiten Fricke's.

Wenn auch die unmittelbare Ausbeute an arithmetisch definierbaren Gruppen gering ist, und die notwendigen Fallunterscheidungen die Einzeluntersuchung erschweren, so ist doch für die Weiterentwicklung der Theorie dieser Ansatz besonders wichtig, da er vorläufig der einzige ist, bei welchem wir das Bildungsgesetz der Koeffizienten vollständig beherrschen und daher mit den Hilfsmitteln der Zahlentheorie einer eingehenden Untersuchung unterwerfen können. Die hier auftretenden Besonderheiten aber können bei gehöriger Entwicklung gerade den Hinweis auf neue Gesichtspunkte enthalten, wie denn überhaupt das Eintreten zahlentheoretisch ausgezeichneter Probleme die Untersuchung infolge ihrer scharfen Individualität erschwert, aber andererseits eben dadurch zu fruchtbarer Vertiefung und neuen Gedankenkreisen führt.

WIRTINGER.

Verlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von E. CZURER.
Zweiter Band. Leipzig 1898, B. G. Teubner.

Der zweite Band ist in demselben Sinne geschrieben wie der erste. Er zeichnet sich durch Allgemeinheit der Methoden und Reichhaltigkeit des Stoffes aus, daneben ist wiederum auf die Vereinigung mathematischer Strenge mit praktischer Anwendbarkeit besonderes Gewicht gelegt, wobei freilich erstere nicht überall erreicht worden ist.

Das Buch beginnt mit der Definition und dem Existenzbeweis des bestimmten Integrales einer eindeutigen und stetigen Funktion zwischen endlichen Grenzen und entwickelt sodann die ersten und einfachsten Sätze aus der Theorie der bestimmten Integrale bis zu deren Zusammenhang mit

den unbestimmten Integralen. Die letzteren werden in recht sorgfältiger, zum Teil eigenartiger Weise untersucht. Es folgt eine tiefer gehende Theorie der bestimmten Integrale, wobei die vorhin angegebenen Beschränkungen fallen gelassen und einige weitere Integrationsmethoden hinzugenommen werden. An dieser Stelle dürften wohl die Annäherungsmethoden ihren Platz finden, die von dem Herrn Verfasser erst bei dem Quadraturproblem ihren Platz finden. Bei dieser letzteren Anordnung könnte der Anschein erweckt werden, als wenn jene Methoden nur für die Flächenausmessung von Bedeutung wären. Mit der Theorie der Doppel- und dreifachen Integrale schliesst der analytische Teil des Buches zunächst ab.

Die geometrischen Anwendungen sind die gewöhnlichen und in ausführlicher und übersichtlicher Weise entwickelt, daneben finden sich einige Sätze über Massenanziehung und Potential. Referent kann sich mit den letzteren Anwendungen nur einverstanden erklären, da sie durchaus in das Gebiet der Integralrechnung hineingehören.

Den Schluss des Werkes bildet eine Theorie der einfachsten totalen und partiellen Differentialgleichungen nebst den Anfängen der Variationsrechnung, wobei den geometrischen Deutungen besondere Aufmerksamkeit zugewandt worden ist.

M. KRAUSE.

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications. Von LUCIEN LÉVY. Paris 1898. 237 p.

Das in der Überschrift genannte Werk ist in erster Linie für die Bedürfnisse der französischen Ingenieure geschrieben. Es soll einerseits eine kurze Theorie der elliptischen Funktionen ohne funktionentheoretische Grundlage und ohne viele Ausführungen allgemeiner Art geben, andererseits aber diese Theorie bis zu den wirklichen numerischen Berechnungen durchführen und ihre Anwendung auf geeignet erscheinende Probleme der angewandten Mathematik darlegen. Daneben soll es den Studierenden der Mathematik als Einleitung in das Studium grösserer und breiter angelegter Werke über elliptische Funktionen wie etwa des Halphenschen dienen.

Mit diesen Worten wird das Wesen des einfach und durchsichtig geschriebenen Buches am besten charakterisiert. Es kommt gesunden Tendenzen entgegen, wie sie neuerdings auch bei uns in Deutschland in verstärktem Maße auftreten.

Die in Betracht gezogenen Funktionen sind sowohl die von Jacobi als auch von Weierstrass in die Wissenschaft eingeführten. Die Haupteigenschaften aller dieser mannigfachen Grössen werden abgeleitet und ihre Zusammenhänge angegeben, wobei als Grundlage und Ausgangspunkt die Thetareihen als etwas gegebenes angenommen werden. Die wichtigsten Formeln werden am Schlusse nochmals kurz zusammengestellt, was die Übersichtlichkeit wesentlich erhöht. In der grossen Zahl der eingeführten Funktionen dürfte für den Anfänger eine entschiedene Schwierigkeit liegen, die aber, wie die Theorie sich augenblicklich gestaltet hat, kaum vermieden werden kann.

Die Beziehungen zur Integraltheorie werden gegeben, die praktisch wichtigsten Integralreduktionen entwickelt. Hierbei liegt es, wie auch an anderen Stellen, in der Natur des Buches, dass eine Beschränkung auf das Reelle stattfindet. Besonderes Gewicht wird auf die numerischen Berechnungen gelegt, und zwar wird einerseits gezeigt, wie die dem Buche beigegebenen Tabellen vorkommendenfalls am besten zu gebrauchen sind und andererseits Anleitung zur Aufstellung derselben gegeben. Die Zahl der Tabellen ist 4. Zwei von ihnen beziehen sich auf die Berechnung der verschiedenen Arten von Konstanten, zwei andere auf die Berechnung der Funktionen selbst. Bei der ersten Kategorie zeigen sich die Legendreschen Normalintegrale von besonderer Bedeutung, bei der letzteren die Thetareihen und zwar dieses infolge ihrer überaus einfachen Struktur und ihrer schnellen und beständigen Konvergenz.

Die Anwendungen bestehen in einer Reihe einfacher und geschickt durchgeführter Probleme aus den Gebieten der Mechanik, Geometrie und Algebra, wie des Pendelproblems, des Wurfproblems im widerstehenden Mittel, Bestimmung der Oberfläche eines Ellipsoides, Auflösung der Gleichungen vierten Grades und einiger anderer. Bei diesen Anwendungen wird in erster Linie von den Weierstrassschen Funktionen Gebrauch gemacht.

Den einzelnen Kapiteln sind eine Reihe von Aufgaben beigelegt, die zum Teil die entwickelten Theorien ergänzen.

M. KRAUSE.

Lehrbuch der Algebra. Von HEINRICH WEBER, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Zweite Auflage, erster Band. Braunschweig 1898, Vieweg & Sohn. XV und 703 S.

Wert und Brauchbarkeit von H. Webers „Lehrbuch der Algebra“ haben sich aufs glänzendste durch den Umstand dokumentiert, dass in ausserordentlich kurzer Zeit eine Neuauflage dieses Werkes nötig geworden ist. Der Verfasser hat bei der erneuten Redaktion seines Werkes Plan und Einteilung der ersten Auflage, über welche in Bd. 40 S. 179 fg. der historisch-literarischen Abteilung dieser Zeitschrift ausführlich berichtet wurde, vollständig beibehalten. Die neueren Fortschritte der Gruppen- und Zahlentheorie werden in dem bereits gleichfalls erneut in Vorbereitung befindlichen zweiten Bande zu berücksichtigen sein. In dem erschienenen ersten Bande hat der Verfasser keine Mühe gescheut, sein Werk in redaktioneller Hinsicht noch vollkommener zu gestalten. Einige Umstellungen und Ergänzungen erschienen zweckmäßig. So z. B. ist die Besprechung der zerlegbaren und unzerlegbaren Funktionen mit Rücksicht auf die Theorie der Diskriminanten und Resultanten bereits in den ersten Abschnitt verlegt. Hinzugekommen ist in diesem Abschnitte die Besprechung der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen und die Entwicklung derselben nach fallenden Potenzen der Variablen. Die Determinantentheorie (zweiter Abschnitt) ist um einen von Sylvester herrührenden Satz bereichert, der gleichfalls bei den Diskriminanten und Resultanten zur Verwendung kommt; und am

Schlusse des achten Abschnittes ist ein merkwürdiges Kriterium von Hurwitz neu entwickelt dafür, dass eine vorgelegte Gleichung nur Wurzeln mit „negativen“ reellen Teilen besitzt. Diese Ergänzungen treten jedoch in den Hintergrund gegenüber einer weitgehenden Vervollständigung des vierten Abschnittes. Es ist hier zunächst der schöne von L. Baur gefundene Satz zu nennen (§ 51), nach welchem man durch das Verschwinden gewisser aus den Potenzsummen der Wurzeln zu bildenden Determinanten auf die Gesamtzahl unterschiedener Wurzeln der Gleichung zu schliessen vermag. Wesentliche Ergänzungen erfährt die Besprechung der Resultanten durch Hereinnahme des Begriffes des „Gewichtes“ und der „isobarischen Funktion“. Vor allem aber sind grösstenteils neu die in §§ 54 bis 56 gegebenen eleganten Entwicklungen zur Eliminationstheorie.

Das Buch wird auch in der neuen Gestalt zu seinen alten Freunden zahlreiche neue hinzu erwerben. Die Ausstattung ist eine vorzügliche, der Preis (10 Mk.) bei dem grossen Umfange des Bandes ein sehr geringer.

FRICKE.

Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Funktionen einer komplexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie. Ein Handbuch für Lehrer und Freunde der Mathematik. Von ADALBERT BREUER. Wien 1898. VIII und 205 S.

Der Verfasser beschäftigt sich mit geometrischer Deutung komplexer Zahlen, die er auf zahlreiche elementare Funktionen sowie auf die Betrachtung vieler ebener Kurven in Anwendung bringt. Das Buch ist nur für solche „Freunde“ der Mathematik geeignet, welche auf wissenschaftliche Schärfe in den Grundbegriffen keinen Anspruch erheben. Doch ist es schwer, dies aussprechen zu müssen; denn man wird aus der Lektüre des Buches überall die Liebe des Verfassers zu seinem Gegenstande und zugleich seine Bescheidenheit herauslesen. Indessen sehe man, wie bereits im ersten Paragraphen der Begriff der algebraischen Irrationalität mit dem Inbegriff aller durch fortgesetztes Quadratwurzelziehen zu erlangenden Irrationalzahlen verwechselt wird, und überlege, in welcher Beziehung der Schlußsatz dieses Paragraphen zu dem Umstande steht, dass bereits die rationalen Punkte die Zahlenlinie überall dicht bedecken. Was den eigentlichen Gegenstand angeht, so deutet der Verfasser einen komplexen Zahlwert $(a + ib)$ nicht durch einen Punkt der „Zahlenebene“, sondern durch das Punktepaar $a \pm b$ der „Zahlenlinie“. Das geht auch, ist aber nur für die geringere Anzahl der Zwecke vorteilhafter als die sonst übliche Anschauungsweise. FRICKE.

Kritik der exakten Forschung. Von FRIEDRICH EGO. Leiden 1897, E. J. Brill. VI und 81 S.

Das Buch ist auf Kosten des Verfassers gedruckt. Derselbe hätte sein Geld besser anwenden sollen, als durch dieses nicht weiter qualifizierbare Geschreibsel sein wissenschaftliches Renommee für alle Zeiten zu vernichten. FRICKE.

Oeuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. LAUGEL, avec une préface de M. HERMITE et un discours de M. FÉLIX KLEIN. Paris, 1898. Gauthier-Villars. XXV et 453 p.

Wenn während der letzten Dezennien die Ideen deutscher Mathematiker auf die Forschung in Frankreich tief und nachhaltig eingewirkt haben, so haben dazu wesentlich drei Männer beigetragen: J. Liouville, Hoüel, Hermite, denen sich in jüngster Zeit Herr L. Laugel mit schönem Erfolge zugesellt hat. Zahlreichen sorgfältig und verständnisvoll ausgeführten Übersetzungen einzelner Abhandlungen deutscher Mathematiker sind jetzt die *Oeuvres mathématiques de Riemann* gefolgt. Hat dieses Unternehmen, wie die Anzeige in dem Bulletin des Sciences mathématiques zeigt, in Frankreich die beste Aufnahme gefunden, so wird es auch in Deutschland ein jeder mit Dank willkommen heissen, der überzeugt ist, dass die grossen Probleme der Wissenschaft nur in der gemeinsamen Arbeit der verschiedenen Nationen zu lösen sind.

Der Titel „Mathematische Werke“ ist mit Absicht gewählt: es fehlen diejenigen Abhandlungen Riemanns, bei denen das physikalische Interesse mehr in den Vordergrund tritt, sowie die Fragmente philosophischen Inhalts und die Biographie. Zu bedauern ist nur, dass dieses Schicksal auch die *Commentatio mathematica* (1861) nebst Webers Kommentar betroffen hat, der wesentlich mathematischen Inhaltes ist und eine unentbehrliche Ergänzung zu dem Habilitationsvortrage bildet.

Französische Übersetzungen Riemannscher Abhandlungen gab es bis dahin nur zwei: Hoüel hatte kurz nach seinem Erscheinen den Habilitationsvortrag: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, übertragen, und 1873 war in Darboux' Bulletin eine Übersetzung der Habilitationsschrift: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ erschienen. Beide hat Herr Laugel in seine Ausgabe aufgenommen. Die Abhandlung „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“ nebst der zugehörigen Selbstanzeige wurde von Herrn X. Stouff übernommen, während das übrige Herr Laugel selbst besorgt hat. Seine Übersetzung, in der alles Wesentliche treu wiedergegeben wird, verdient hohes Lob; wir verdanken sie gewiss einer durch langjährige Arbeit gewonnenen, liebevollen Vertiefung in Riemanns Werke.

Eine wertvolle Zugabe bildet ein Vorwort des Altmeisters Hermite, der in warm empfundenen Worten ein Bild von Riemanns wissenschaftlicher Leistung giebt, sowie ein Vortrag, den Herr F. Klein 1894 auf der Naturforscherversammlung in Wien gehalten hat und in dem er Riemanns Stellung zu den Fragen der gegenwärtigen Forschung in lichtvoller Weise darlegt.

Die Ausstattung des Werkes an Druck und Papier ist vorzüglich. Aufgefallen sind uns verschiedene störende Druckfehler, z. B. S. 166, Z. 6 und S. 175, Z. 4 v. u.:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} \quad \text{statt} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

S. 167, Z. 8: $(-2\pi i)^{s-1} (-2\pi i)$ statt $(-n2\pi i)^{s-1} (-2\pi i)$.

PAUL STÄCKEL.

MICHEL FROLOW. *La théorie des parallèles démontrée rigoureusement.*
 Essai sur le livre 1^{er} des éléments d'Euclide. Paris 1898. Carré
 et Naud, Batle et Genève, Georg et C^{ie}. 46 p. 8^o. 2 Fracs.

Herr FroLOW hatte bereits 1895 einen „Beweis des elften Axioms“ veröffentlicht, den wir (Jahrg. 1897, Hist.-litt. Abt. S. 179—180) als verfehlt bezeichnen mussten. Auch die vorliegende Schrift enthält einen Versuch, das elfte Axiom zu beweisen. Er bildet den Abschluss einer Darstellung der Elemente der Geometrie, der eine historisch-kritische Einleitung vorausgeht.

Dass wir der Ankündigung, dem Verfasser sei es nach zweijähriger Arbeit gelungen, auf diesem Wege die Geometrie zu einer „exakten, auf unangreifbaren Grundlagen beruhenden Wissenschaft“ zu machen, einiges Misstrauen entgegengesetzten, wird man begreiflich finden. Diese Empfindung verstärkte sich, als die Einleitung erkennen liess, dass der Verfasser von der Geschichte und Litteratur der nichteuklidischen Geometrie, über die er so apodiktisch urteilt, nur sehr mangelhaft unterrichtet ist, und als bei dem Aufbau der Elemente der Geometrie schon die Behandlung der geraden Linie und der Ebene durchaus unzulänglich waren. Der Beweisversuch selbst bildete dagegen insofern eine angenehme Enttäuschung, als er, im Gegensatze zu dem von 1895, auf einem noch nicht benutzten, originellen Gedanken beruht. Damit ist freilich alles erschöpft, was wir zu seinem Lobe sagen können, denn das gewünschte Ziel wird, wie vorauszusehen war, auch von Herrn FroLOW nicht erreicht.

Der Kern des Beweisversuches besteht in folgendem: Man zeichne ein geradliniges Polygon P von $n + p$ Seiten: $A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_p A_1$, bei dem die n Winkel A_1, A_2, \dots, A_n sämtlich gleich einem gegebenen überstumpfen (konvexen) Winkel sind. Wird die Grösse dieses Winkels mit $4R - 2a$ und die Summe der Winkel B_1, B_2, \dots, B_p mit K bezeichnet, so findet man für die Winkelsumme S von P den Ausdruck:

$$S = [2(n + p) - 4]R + 2n(R - a) + K - 2(p - 2)R.$$

Hieraus folgt, dass S , wenn man nur n gross genug wählt, grösser als $[2(n + p) - 4]R$ wird, während doch in der nichteuklidischen Geometrie die Winkelsumme des ν -Ecks kleiner als $(2\nu - 4)R$ sein soll, und das ist, wie Herr FroLOW behauptet, „la contradiction intrinsèque“, aus der die Absurdität der nichteuklidischen Geometrie hervorgeht.

Um zu erkennen, wo der Fehler steckt, beachte man, dass genau dieselbe Überlegung auch auf die euklidische Geometrie anwendbar ist, wo S ebenfalls, wenn n wächst, grösser als $[2(n + p) - 4]R$ wird, während es doch stets gleich $[2(n + p) - 4]R$ sein muss. Man wird hieraus nicht schliessen, dass die euklidische Geometrie mit einem inneren Widerspruche behaftet ist, sondern dass, sobald n eine gewisse Grenze überschreitet, ein Polygon P der verlangten Art nicht existiert. In der That, versucht man P wirklich zu zeichnen, so zeigt sich, dass entweder schon der Linienzug $A_1 A_2 \dots A_n$ sich selbst schneidet oder wenn man das vermeiden will, eine

spiralförmige Gestalt hat. Um das Polygon durch den Linienzug $A_n B_1 B_2 \dots B_p A_1$ zu schliessen, muss man rückwärts um die Spirale herumgehen, und zwar ohne sie zu schneiden, das gelingt jedoch nur, wenn $A_n B_1 B_2 \dots B_p A_1$ aus einer genügend grossen Anzahl von Strecken besteht oder mit anderen Worten, wenn p genügend gross ist. Soll also das verlangte Polygon existieren, so muss man mit wachsendem n auch p wachsen lassen.

Auch in der nichteuclidischen Geometrie muss man n und p gleichzeitig zunehmen lassen. Der innere Widerspruch liegt daher nicht in ihr, sondern in der Forderung, ein Polygon zu zeichnen, dem mit einander unvereinbare Eigenschaften zukommen sollen. Es genügt nicht, wie Herr Frolov es thut, die Frage der Existenz des verlangten Polygons mit einem einfachen „rien n'empêche“ abzuthun.

PAUL STÄCKEL.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Dr. HEINR. BURKHARDT, ordentl. Professor der Mathematik an der Universität Zürich, und Dr. W. FRANZ MEYER, ordentl. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr. Erster Teil: **Reine Mathematik**. Erster Band: **Arithmetik und Algebra**, redigiert von W. FRANZ MEYER. Erstes Heft. S 1—112. Leipzig 1898, B.G. Teubner.

Notwendig und ausreichend lauten zwei Stichwörter der neueren Mathematik, und unter ihrer Anwendung kann man sagen, dass Klügels Wörterbuch ein noch immer notwendiges, aber leider nicht mehr ausreichendes Hilfswerk des Mathematikers darstellt. Das Bewusstsein dieser Thatsache hat wiederholt zu dem Gedanken geführt, ein neues Werk zu schaffen, welches der Gegenwart mit ihren Bedürfnissen angepasst an Stelle des trotz vielfacher Veraltung immer noch unentbehrlichen Musterwerkes treten könne, und eine Verlagsbuchhandlung hat vor etwa 20 Jahren mit dem Verfasser dieser Anzeige und einem anderen Mathematiker ein solches Unternehmen betreffende Unterhandlungen geführt, welche wesentlich daran scheiterten, dass von der einen Seite Bedenken wegen der finanziellen Tragweite des Planes entstanden, während einer der in Aussicht genommenen Bearbeiter andere litterarische Verpflichtungen übernahm, die seine volle Arbeitskraft beanspruchten. Glücklicher war der Erfolg anderer Pläne, welche der Mitte der neunziger Jahre angehören, und deren erste Frucht heute vor uns liegt. Die Akademien von München, Wien und Göttingen haben sich das Verdienst erworben, durch ihre Unterstützung des Unternehmens die damit verknüpfte finanzielle Gefahr soweit herabzumindern, dass die Teubnersche Verlagshandlung sich zur Übernahme derselben verstand, und als wissenschaftliche Leiter sind zwar zunächst nur zwei Gelehrte im kräftigsten Mannesalter an die Spitze gestellt, aber ihnen steht ausser

der eigenen rühmlich erprobten Arbeitslust und Arbeitsfähigkeit ein ganzer Generalstab tüchtiger Mitarbeiter zur Seite, von denen jeder auf dem Gebiete, welches er schon vorher sich erobert hatte, seine Thätigkeit entfalten wird. Freilich gleicht formell das neue Unternehmen, die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, dem Klügelschen Wörterbuche kaum entfernt. Dort erleichterte die alphabetische Anordnung das Nachschlagen in hohem Grade, während anderseits Rückverweisungen von einem Artikel auf frühere unvermeidlich waren, wenn nicht zahllose Wiederholungen eintreten sollten. Jetzt wird das Nachschlagen erst nach Abschluss des ganzen Werkes mittels eines Generalregisters möglich werden, um dessen Herstellung kein Kundiger die damit Betrauten beneiden wird. Rückverweisungen werden aber durch die nach Abschnitten der mathematischen Wissenschaften getroffene Anordnung wenigstens in jedem einzelnen Abschnitte thunlichst vermieden. Das ist ein wesentlicher Unterschied zwischen der neuen Encyklopädie und dem alten Wörterbuche. Ein fast noch einschneidenderer Unterschied besteht darin, dass das Wörterbuch keinen Satz aussprach, ohne ihn zu beweisen, dass die Encyklopädie die Beweise durch die Angabe der Litteratur, wo sie zu finden seien, ersetzt. Uns behagte das alte Verfahren besser, und mancher Mitarbeiter an der Encyklopädie teilt unseren Geschmack, aber freilich darf man nicht vergessen, dass alsdann 6 Bände von je 40 Druckbogen, auf welche die Encyklopädie veranschlagt ist, nicht entfernt ausgereicht hätten. Mindestens der doppelte Raum, die doppelte Arbeitszeit, die doppelten Kosten hätten in Anrechnung gebracht werden müssen, und daran wäre das ganze Unternehmen gescheitert. War demnach nur die Wahl gestellt: *sit ut est, aut non sit*, so muss man wohl oder übel sich mit der getroffenen Entscheidung einverstanden erklären. Wir beabsichtigen nicht, über jede einzelne Lieferung genau zu berichten, werden vielmehr nur beim Schlusse eines Bandes von unserer Pflicht als Berichterstatter uns leiten lassen. Das Erscheinen der ersten aus 7 Druckbogen bestehenden Lieferung dachten wir indessen und mit ihr das ganze Werk begrüßen zu müssen. Ihr Inhalt ist: 1. Grundlagen der Arithmetik, bearbeitet von Hermann Schubert; 2. Kombinatorik, bearbeitet von Eugen Netto; 3. Irrationale Zahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse, bearbeitet von Alfred Pringsheim. Von dem dritten Abschnitte fehlt noch das der zweiten Lieferung vorbehaltene Kapitel über unendliche Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

CANTOR.

Grundzüge der Determinanten-Theorie und der projektivischen Geometrie.

Analytische Geometrie. Von Major E. VON BUDISLAVLJEVIĆ. (Erster Band von Budislavljević und Mikuta, Höhere Mathematik) mit 108 Textfiguren. Wien und Leipzig 1898, Wilhelm Braumüller. X, 492 S.

Die Begrenzung des Lehrstoffes in dem vorliegenden Leitfaden, sagt das Vorwort, entspricht den Bestimmungen des Lehrplanes für die kaiserl. und königl. technische Militär-Akademie. Bezüglich der Behandlungsart

waren die Verfasser bemüht, jene Richtung einzuhalten, welche von Professor Karl Schmitt begründet und während seiner vieljährigen ausgezeichneten Thätigkeit in dieser Anstalt gepflegt worden war.

Man sieht daraus, dass die Verfasser keinen Anspruch darauf erheben, Neues zu bringen. Sie begnügen sich oder, da wir zunächst nur den ersten Band besprechen, müssen wir sagen Herr von Budislavljević begnügt sich damit, die hergebrachten, durch den Titel bezeichneten Gegenstände ohne Anwendung von Infinitesimalrechnung zu behandeln. Er hat dadurch ein ziemlich vollständiges Hilfsbuch für mindestens zwei bis drei Vorlesungen geschaffen, an welches Lehrer und Schüler sich sehr zweckmässig anlehnen können. Zahlreiche Beispiele sorgen dafür, dass die Lehren auch zur Anwendung kommen. Der vornehm ausgestattete Band verdient demnach Empfehlung.

CANTOR.

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Von Hauptmann ALFRED MIKUTA. (Zweiter Band von Budislavljević und Mikuta, Höhere Mathematik.) Mit 142 Textfiguren. Wien und Leipzig 1898, Wilhelm Braumüller. VIII, 607 S.

Auch der von Herrn Mikuta bearbeitete zweite Band der Höheren Mathematik ist den Bestimmungen des Lehrplanes für die kaiserl. und königl. technische Militär-Akademie entsprechend bearbeitet, mithin vermutlich für die Benutzung an jener Anstalt bestimmt. Die Ausstattung ist nicht minder ansprechend als die des ersten Bandes. Dem deutschen Leser werden einige Sprachformen wie *real* statt *reell*, *Binomialfaktor* statt *binomischer Faktor* (während *trinomischer Faktor* vorkommt), absonderlich erscheinen. Wenn auf Seite 7 und 9 von der Annäherung an eine Grenze durch *Oskulieren* die Rede ist, so sollte hier das richtige Wort *Oszillieren* eingesetzt werden, umso mehr als Seite 373 das *Oskulieren von Kurven* in der richtigen Bedeutung dieses Ausdruckes zur Sprache kommt. Die Behauptung (S. 180), eine fallende Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel konvergiere, auch wenn deren Glieder nicht gegen Null abnehmen, ist falsch. Das angeführte Beispiel $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} \dots$ konvergiert nicht, sondern oszilliert. Auch an manchen anderen Stellen hat es sich Herr Mikuta bei etwas schwierigeren Gegenständen recht bequem gemacht. So lässt er Seite 210 eine unendliche Reihe ruhig integrieren und bemerkt in einer Fussnote, das sei nicht immer unbedingt gestattet, verweist aber für das Genauere auf umfangreichere Werke. Nachdem Seite 240 gezeigt ist, dass jede Gleichung von geradem Grade wenigstens zwei reelle Wurzeln entgegengesetzten Vorzeichens besitze, wenn das Absolutglied negativ ist, heisst es weiter: man könne auch nachweisen, dass jede Gleichung von geradem Grade mit positivem Absolutgliede wenigstens eine reelle oder komplexe Wurzel habe, und in Klammern: (von dem Beweise soll hier abgesehen werden). Seite 276 ist schlankweg behauptet, auch jede transzendente

Funktion könne nach der Taylorschen Reihe entwickelt werden. Diese Ausstellungen hindern nicht, zuzugeben, dass für Schüler, welche man an den Schwierigkeiten vorüberzuführen das Recht zu haben glaubt, auch dieses Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung ganz zweckmäßig eingerichtet ist und durch die zahlreichen Beispiele ein Übungsbuch entbehrlich macht.

CANTOR.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von FRIEDRICH SCHUR, Professor der Geometrie an der technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1898, Veit & Comp. X, 216 S.

Wie viel oder wie wenig der Verfasser eines Lehrbuches den Benutzern desselben mitzuteilen wünscht, ist natürlich seine Sache, und niemand ist berechtigt, ihn wegen Weglassungen zu tadeln. Man wird sich einfach des Lehrbuches nicht bedienen, wenn man darin fehlende Dinge für unerlässlich hält. Wer also die Benutzung von Determinanten, von Gleichungssymbolen, von Linienkoordinaten, wer die Besprechung der unendlich fernen Geraden, der Kreispunkte u. s. w. nicht entbehrt wissen will, wird das uns vorliegende Lehrbuch seinen Schülern zuerst nicht empfehlen, aber er wird, wenn er die vielfach eigentümliche Behandlungsweise desselben sich näher ansieht, wenn er erkennt, wie es dem Verfasser gelungen ist, von elementarster Betrachtung ausgehend den Schüler mehr und mehr an die Strenge zu gewöhnen, welche das Kennzeichnende unserer heutigen Mathematik bildet, lebhaft bedauern, jene ablehnende Haltung annehmen zu müssen, und sie vielleicht aufgeben. Um so lieber wird dagegen um der genannten Vorzüge wegen derjenige Lehrer das Buch seinem Unterrichte bis zu einem gewissen Grade zu Grunde legen, der die über das Mindestmaß hinausgehenden Methoden und Sätze dem Eigenstudium seiner Schüler überlassen zu können glaubt. Die zweite Hälfte, der analytischen Geometrie des Raumes gewidmet, wird vermutlich allgemeiner befriedigen als die in der ersten Hälfte behandelte analytische Geometrie der Ebene. Der Verfasser hebt in der Vorrede seine Behandlung der Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte hervor, welche an Eulers Definition anschliesst. Wir können hier nur mit vollster Überzeugung unsere Zustimmung erklären. Wir halten zwar die Eulersche Einführung der Brennpunkte nicht für die einzige natürliche, wir glauben z. B., dass die Definition der Kurven zweiten Grades als Ort des Punktes konstanter Quotienten der Entfernungen von Brennpunkt und Leitlinie, welche M. Simon an die Spitze seiner Kegelschnittbehandlung stellt, nicht minder natürlich ist, aber eins schliesst das andere nicht aus, und Herr Schur hat den Eulerschen Gedanken so schön zur Durchführung gebracht, dass seine Darstellung beifälliger Nachahmung sicher sein dürfte. Besonderen Lobes sind auch die Figuren würdig. Wir kennen kein Buch, welches in dieser Beziehung sich als gleich gut oder gar als besser ausgestattet erwiese. Ein am Schlusse angebrachtes Register ist um so dankbarer zu begrüßen, je seltener man ein solches bei Lehr-

büchern der analytischen Geometrie findet. Die Vollständigkeit desselben lässt allerdings noch einiges zu wünschen übrig, wir vermissen beispielsweise die Wörter Imaginäre Gebilde und Unendlich ferner Punkt, von welchen doch an verschiedenen Stellen des Buches die Rede ist. CANTOR.

Analytische Geometrie des Raumes. Von MAX SIMON. Mit 28 Abbildungen. Leipzig 1898, G. J. Göschensche Verlagshandlung. 200 S.

Die analytische Geometrie des Raumes wird wohl niemals auf Mittelschulen gelehrt, während die analytische Geometrie der Ebene dort nicht selten eine wenn auch nur in engen Grenzen gehaltene Behandlung erfährt; und das ist wahrscheinlich ein Grund dafür, dass die Lehrbücher der analytischen Raumgeometrie ausserordentlich viel seltener auftreten als die der gleichen Art für die Ebene. Je ausschliesslicher aber ein Gegenstand den Hochschulen angehört, um so näher liegt der Wunsch, bei seiner Behandlung alle die Hilfsmittel dienstbar zu machen, über welche die Hochschule gebietet, und das dürfte der Grund für die zweite Thatsache sein, dass unter den analytischen Raumgeometrien die elementar gehaltenen wiederum seltener auftreten als diejenigen, welche Infinitesimalrechnung voraussetzen. In deutscher Sprache dürfte bisher die Wahl auf Schlömilchs und Rudios Bücher über den genannten Gegenstand und auf die zweiten Abteilungen von Budislavljevic und von Schur sich beschränken. Herr Simon hat seiner analytischen Geometrie der Ebene (besprochen auf S. 11) nach kurzer Zwischenzeit eine solche des Raumes folgen lassen, welche gleichfalls ein Bändchen der Sammlung Göschen bildet, und welche fast genau eben so stark ist wie die der Ebene, an welche sie sich vielfach mehr als nur äusserlich anschliesst, indem sie häufig auf sie verweist. Ist doch auch darin eine Ebenmäßigkeit angestrebt, dass Determinanten vermieden scheinen, allerdings nur scheinen, da von Seite 27 an $pp' - qq'$ durch das Zeichen $[pq']$ dargestellt fortwährend in Gebrauch ist. Konnte sich der Verfasser durchaus nicht zur Anwendung der landläufigen Schreibweise entschliessen? Was nun das Verhältnis des Simonschen Buches zu den anderen oben genannten betrifft, so ist eine so geringe Verwandtschaft zwischen denselben vorhanden, dass von einem Wettbewerbe, in welchen das Simonsche Buch zu den übrigen tritt, kaum die Rede sein kann. Das Simonsche Buch verleugnet nirgends eine gewisse Abhängigkeit von den Schriften Reyes, deren synthetisch erworbene Ergebnisse hier in analytischem Gewande erscheinen. Das Simonsche Buch handhabt neben den Punktkoordinaten auch Linienkoordinaten und Ebenenkoordinaten. Das sind Dinge, auf welche keine andere elementare analytische Geometrie des Raumes eingeht. Andererseits vermissen wir bei Simon ausser den Eulerschen Rotationsformeln auch manche bei der Diskussion der quadratischen Gleichung übliche Untersuchung. Man wolle in dieser Bemerkung keinen Tadel erkennen. Sie beabsichtigt nur zu begründen, was wir vorher aussprachen, dass ein gemeinsames Maß zum Vergleiche des Simonschen Buches mit anderen

nicht vorhanden ist. In seiner Eigenart kann es sehr gut neben einem anderen Buche empfohlen werden, wie es den gleichzeitigen Gebrauch eines anderen Buches nicht überflüssig erscheinen lässt.

CANTOR.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. FORT und O. SCHLÖMILCH. Zweiter Teil: **Analytische Geometrie des Raumes.** Von Dr. O. SCHLÖMILCH, Königl. Sächs. Geheimer Rat a. D. Sechste Auflage. Bearbeitet von R. HEGER in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1898, B. G. Teubner. VIII und 338 S.

Im 40. Bande dieser Zeitschrift, historisch-litterarische Abteilung Seite 102 haben wir die von Herrn Heger bearbeitete sechste Auflage des ersten Theiles des Lehrbuches von Fort und Schlämilch angezeigt, heute liegt die sechste Auflage des zweiten Theiles vor uns. Auch hier ist Herr Heger im grossen und ganzen dem alten Gange treu geblieben, und wenn auch in Einzelheiten die verbessernde Hand sich bemerklich macht, so kann man doch ihre Spuren nur bei ziemlich eingehender Vergleichung der neuen Auflage mit den ihr vorhergehenden erkennen. Überall ist das Bestreben festgehalten, mit den denkbar geringsten analytischen Hilfsmitteln auszukommen. Ob die fast unerträgliche Weitschichtigkeit mancher Rechnungen nicht als Mahnung betrachtet werden müsste, das Verbannungsurteil gegen die Anwendung von Determinanten aufzuheben? Seit der ersten Auflage von 1855 sind 44 Jahre vergangen. Der bürgerlichen Freizügigkeit ist eine wissenschaftliche zur Seite gegangen. Die Determinante gehört in vielen Gegenden Deutschlands dem Mittelschulunterricht an. Muss sie auf der technischen Hochschule noch immer einen Pass vorzeigen, wenn sie eingelassen werden will?

CANTOR.

Analytische Geometrie des Raumes. Von GEORGE SALMON, deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Erster Teil: **Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades.** Vierte verbesserte Auflage. Leipzig 1898, B. G. Teubner. XXIV, 448 S.

Die dritte Auflage erschien 1879. Diese Zeitangabe soll keineswegs die bis zur Herstellung der vierten Auflage verflossene Zwischenzeit von 19 Jahren als besonders lang bezeichnen. Werke solchen Umfanges, solchen nicht für jedes Verständnis berechneten Inhaltes, solchen Preises verkaufen sich nicht rasch, und es ist ein glänzendes Zeugnis, wenn es überhaupt zu einer vierten Auflage gelangen konnte. Wir betonen die Zwischenzeit nur, um begrifflich finden zu lassen, dass die jetzige Auflage gegen die letzte mannigfache Veränderungen wird hervortreten lassen. Herr Fiedler selbst kennzeichnet diese Veränderungen in seinem Vorworte, und wir glauben nicht besser thun zu können, als ihm darin fast wörtlich zu folgen. Eine grössere Umgestaltung besteht demnach darin, dass nach den einführenden Kapiteln über Punkt, Ebene, gerade Linie ein eigenes Kapitel IV über die

homogenen projektivischen Koordinaten folgt, und dass nach der Entwicklung der Haupteigenschaften der Flächen zweiten Grades in den drei folgenden Kapiteln die früher nur auf wenigen Seiten skizzierte Lehre von den Kollineationen und Reziprozitäten in Kapitel VIII eingehend untersucht und mit der Lehre von den Flächen zweiten Grades in organische Verbindung gebracht worden ist; dieses Kapitel endigt mit der Salmonschen Darstellung der Theorie der reziproken Polaren. Im folgenden Kapitel konnte nun die Theorie der gewundenen Kurven dritter Ordnung und ihrer Developpabeln gegeben werden, welche früher erst im Kapitel II des zweiten Teiles erschien. Ferner erhielt die projektive Erzeugung der Komplexe zweiten Grades ihren naturgemäßerem Platz, wie auch die lineare Transformation der Flächen zweiten Grades in sich hervortrat. Einzelheiten hervorzuheben möchten wir unterlassen, wenn auch das erwähnte Vorwort die Enthaltbarkeit nicht durchaus übt. Wir erwähnen nur noch, dass die Litteratur-Noten entsprechend ergänzt und auf das Laufende gebracht worden sind.

CANTOR.

K. BOBEK. **Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene.** Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Zweite, wohlfeile Ausgabe. Leipzig 1897, B. G. Teubner. 210 S.

Das vorliegende Buch ist eine Bearbeitung der Vorträge, die Herr C. Küpper seit 1867 an der Prager technischen Hochschule über Geometrie der Lage gehalten hat. Die Vorträge sind so eingerichtet, dass sie auf der einen Seite den Techniker schnell in das Gebiet der projektivischen Geometrie einführen, auf der anderen Seite dem Studenten die Grundlage für das weitere Studium der Geometrie liefern sollen.

Nachdem der Begriff der kollinearen Verwandtschaft erörtert worden ist, wird die Konstruktion des Kegelschnitts durch seine Punkte und seine Tangenten gegeben. Der Begriff der Involution auf dem Kegelschnitte führt zu Pol und Polare und zu den Poldreiecken eines Kegelschnittes. Hieran reiht sich die Konstruktion des Kegelschnittes aus imaginären Bestimmungsstücken, die adjungierte Involution, das Polarsystem und der Begriff der Reziprozität. Der Satz über die Existenz der Hauptpunkte einer Kollineation leitet über zu dem zwei Polarsystemen gemeinsamen Poldreieck, zur Steinerschen Verwandtschaft sowie zu den Schnittpunkten und gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte. Es folgen nun der Kegelschnittbüschel, die Kegelschnittschar, Kegelschnitte in doppelter Berührung, die Brennpunkte der Kegelschnitte und die Faureschen Polkreise. Ein weiteres Kapitel erörtert die Projektivität im Kegelschnittbüschel und das Kegelschnittnetz und bringt Betrachtungen an zwei Kegelschnittbüscheln, die nicht in einem Netze liegen, sowie die biquadratische und kubische Involution. Im letzten Kapitel (S. 179—210) werden die Kurven dritter Ordnung behandelt. Doch betont der Herausgeber, dass es nicht beabsichtigt ist, eine Einleitung in diese Theorie zu geben, er will nur zum weiteren Studium anregen, so besonders durch die

vollständig geometrische Begründung der Polarentheorie für die Kurven dritter Ordnung.

Die Vorträge sind durch Strenge und Klarheit in gleicher Weise ausgezeichnet und verdienen auch an unseren Hochschulen Eingang zu finden.

— — — — —
E. JAHNKE

KOPPE-DIEKMANN. Geometrie. Dritter Teil: Der Koordinatenbegriff. Analytische Geometrie der Ebene. Essen 1897, Baedeker. 110 S. 1,60 M.

Das vorliegende Lehrbuch, welches für beide Arten von Lehranstalten, für Gymnasien sowohl wie für Realgymnasien und Oberrealschulen als Leitfaden dienen soll, bringt das bekannte Pensum in ziemlich ausführlicher Form. Hervorzuheben ist, dass Parabel, Ellipse und Hyperbel vor der analytischen eine kurze geometrische Behandlung erfahren. An dieser Stelle sind eine Reihe von Konstruktionsaufgaben beigegeben, in der Absicht, dem Schüler gleich im Anfang eine gewisse Vertrautheit mit jenen Kurven zu verschaffen. Die übrigen zahlreichen Aufgaben sind recht geschickt ausgewählt.

— — — — —
E. JAHNKE

N. COR et J. RIEMANN. Traite d'algèbre élémentaire à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique et au baccalauréat de l'enseignement moderne et des candidats aux écoles du gouvernement. Paris 1898, Nony. 460 p.

Das vorliegende Lehrbuch ist, wie auch die Herausgeber in der Vorrede bemerken, zum grossen Teile auf den *Leçons d'arithmétique* von Jules Tannery aufgebaut und für den Anfangsunterricht bestimmt.

Die Verfasser beginnen mit den Definitionen der algebraischen Zahlen und Polynome und bedienen sich, um dieselben gewissermaßen zu rechtfertigen, der Möbiusschen Vektortheorie. Es folgen die Gleichungen ersten Grades, wobei in einem besonderen Kapitel die allgemeinen Eigenschaften der Determinanten entwickelt werden. Die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit p Unbekannten wird diskutiert. Hieran schliessen sich die quadratischen Gleichungen und die Gleichungssysteme, welche sich auf den zweiten Grad reduzieren lassen. Die Theorie wird auch auf die Transformation der quadratischen Gleichungen angewandt. Allen Kapiteln sind eine grosse Zahl interessanter Beispiele und Übungen, leichte und schwierigere, beigegeben, auf welche Referent die Fachgenossen und im besonderen die Herausgeber von Aufgabensammlungen aufmerksam gemacht haben möchte.

Die beiden nächsten Kapitel (S. 201—384) sind der Funktionentheorie gewidmet. Nachdem die arithmetischen und geometrischen Reihen besprochen worden sind, werden Definitionen und Theoreme über die Grenzwerte und die Stetigkeit der Funktionen aufgestellt und im besonderen eine Anzahl einfacher Funktionen, wie $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, u. a. untersucht. Von den algebraischen Funktionen kommen die Verfasser zu den transzendenten

und wenden die allgemeinen Theoreme auf die Exponentialfunktion, den Logarithmus und die Kreisfunktionen an. Besondere Paragraphen handeln von dem Gebrauch der Logarithmentafeln für die natürlichen Zahlen und die trigonometrischen Funktionen sowie von der Zinseszinsrechnung. Auch hier sind wieder eine Reihe hübscher Übungen beigegeben.

Das Schlusskapitel führt den Begriff der Ableitung ein. Dadurch ergibt sich eine weitere Mannigfaltigkeit in den algebraischen Übungsaufgaben.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass zur besseren Würdigung der vorgetragenen Methoden und Ideen ausser den erwähnten Leçons von J. Tannery noch Humbert, *Traité d'Arithmétique*, zu empfehlen ist. E. JAHNKE.

JENTZEN. **Elemente der Trigonometrie** zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren technischen Lehranstalten. Zweite Auflage. Dresden 1897, Kühtmann. 53 S. 1 M.

Die erste Auflage dieses Buches hat an dieser Stelle bereits von anderer Hand Besprechung gefunden. Die zweite hat wesentliche Veränderungen nicht erlitten, es sind hier und da nur einige praktische Beispiele eingeschoben worden. E. JAHNKE.

F. REIDT. **Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie.** Zweiter Teil: Stereometrie. Vierte Auflage. Neu bearbeitet von A. MÜCH. Leipzig 1897, B. G. Teubner. 194 S.

Referent hat vor einiger Zeit die Sammlung des Verfassers aus der Trigonometrie an dieser Stelle anerkennend besprochen. Die vorliegenden stereometrischen Aufgaben sind nach denselben Grundsätzen wie jene ausgewählt und geordnet. Auch sie begleiten den theoretischen Unterricht von seinen ersten Anfängen an gleichsam von Stunde zu Stunde; man findet für jede einzelne Stelle derselben den passenden Übungsstoff zusammengestellt, man ist also nicht genötigt, das Material erst zusammenzusehen.

Und dieses Material ist recht reichhaltig. Der erste Abschnitt (S. 1—29) handelt von den geraden Linien und Ebenen in Verbindung mit einander und bringt im besonderen Lehrsätze über Kongruenz und Symmetrie und merkwürdige Linien sowie Konstruktions- und Rechnungsaufgaben an der dreiseitigen Ecke. Der zweite Abschnitt bietet in seinem ersten Kapitel (S. 30—73) Lehrsätze, Konstruktions- und Rechnungsaufgaben an den Körpern (Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel, Kugel, regelmässige Polyeder) überhaupt und an den Linien und Figuren auf denselben. Das zweite (S. 74—91) und dritte (S. 92—171) Kapitel liefern die Aufgaben für Berechnung der Oberfläche bezw. des Volumens. Ausser den genannten Körpern werden noch der Obelisk, das Prismatoid sowie einfache Rotationskörper in den Kreis der Aufgaben gezogen. Ein Anhang (S. 172—187) enthält Maxima- und Minima-Aufgaben, schwierigere Aufgaben aus allen Gebieten und endlich noch Themata zu grösseren Arbeiten

(die Archimedischen Körper, das Apollonische Berührungsproblem für den Raum, Untersuchung der Eigenschaften sphärischer Vielecke, über die Schwerpunkte der Figuren und Körper, über Prismen- und Cylinderhufe u. a.).

Die vierte Auflage weist gegen die dritte nur unwesentliche Veränderungen auf. Referent kann die Sammlung den Fachgenossen warm empfehlen in dem Wunsche, dass sie sich zu den alten neue Freunde erwerben möge.

E. JAHNKE.

A. MAURER. Maxima und Minima. Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Berlin 1897, Springer. 50 S. M. 1,40.

Das Heft zerfällt in drei Teile. Im ersten Abschnitt werden Aufgaben und Sätze mit den Methoden der Geometrie behandelt, im zweiten wird die zur Untersuchung quadratischer Funktionen übliche Methode benutzt, im dritten ist nach dem Vorgang von Schellbach eine allgemeine, der Differentialrechnung nachgebildete Methode aufgestellt. Hier und da ist die Auflösung angedeutet oder vollständig gegeben worden. Die Aufgaben sind meist die bekannten, wie sie sich bereits bei Schellbach, Heilermann, Sohnke, Schlömilch u. a. vorfinden.

Es ist eine geschickte, durch Knappheit ausgezeichnete Darstellung, welche sich sowohl am Gymnasium und Realgymnasium, wie an der Realschule mit Vorteil benutzen lässt.

E. JAHNKE.

H. HARTENSTEIN. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

Diese Tafel unterscheidet sich von der Gauss'schen ausser durch weiteren Druck — wodurch die Übersicht verloren geht — durch den geringeren Inhalt. Sie enthält nur die Briggs'schen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10809 auf Seite 1—32, die natürlichen Winkelfunktionen von 10 zu 10 Minuten und die Logarithmen der Winkelfunktionen von Minute zu Minute auf Seite 34—123.

E. JAHNKE.

H. LIEBER und C. MÜSEBECK. Aufgaben über kubische und diophantische Gleichungen, Determinanten und Kettenbrüche, Kombinationslehre und höhere Reihen. Berlin 1898, Simion.

Die vorliegende Aufgabensammlung will den Schüler zur Lösung kubischer Gleichungen und besonders zur Behandlung von Aufgaben aus der Kombinationslehre und der Theorie der höheren Reihen anleiten. Sie erreicht diesen Zweck dadurch, dass sie bei einzelnen Aufgaben die vollständige Auflösung, bei anderen eine kurze Anleitung giebt, die bisweilen nur darin besteht, dass das Resultat, welches den meisten Aufgaben beigefügt ist, eine besondere Form erhalten hat. Der Hauptwert der Sammlung neben den altbewährten Sammlungen von Bardey, Martus u. a. liegt aber wohl in dem vermehrten Übungsstoff, welchen sie bietet, und dieser ist in der That vortrefflich. Es sei besonders auf den vierten Abschnitt, wo die Theorie der Determinanten mit Anwendung auf Gleichungen gegeben wird, und den vierzehnten Abschnitt mit den goniometrischen Reihen hingewiesen.

E. JAHNKE.

A. SCHÜLKE. **Vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen.** Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

Die zweite Auflage der vorliegenden Tafel, welche bei ihrem ersten Erscheinen an dieser Stelle besprochen worden ist, zeigt gegen die erste eine Reihe kleiner Verbesserungen. E. JAHNKE.

K. SCHWERING und W. KRIMPHOFF. **Anfangsgründe der ebenen Geometrie.** Zweite Auflage. Freiburg i. B. 1897, Herder. 1,80 M.

Die erste Auflage dieses vortrefflichen Lehrbuches hat seiner Zeit hier Besprechung gefunden. Für die zweite Auflage ist der Druck der Lehrsätze in Fettschrift erfolgt. Neu hinzugekommen sind zwei Beweise, einer für den vierten Kongruenzsatz und einer für den Satz des Pappus. E. JAHNKE.

K. STRECKER. **Logische Übungen.** Erstes Heft: Der Anfang der Geometrie als logisches Übungsmaterial, zugleich als Hilfsmittel für den mathematischen Unterricht. Essen 1896, Baedeker. 61 S. 1,80 M.

Dieses Übungsbüchlein der Logik soll zugleich die Einführung in die Geometrie erleichtern, und zwar durch stärkeres Heranziehen der spezifisch geistigen Verstandesthätigkeit, durch Auseinanderhalten der geistigen und sinnlichen Erkenntniselemente, durch genügende Berücksichtigung der Obersätze für die Fassung der Untersätze und für die Anordnung der sinnfälligen Zeichen. Dem gegenüber möchte Referent darauf hinweisen — was er bereits zu verschiedentlichen Malen betont hat —, dass ein nach solchen Grundsätzen geübter Anfangsunterricht dem Schüler die grössten Schwierigkeiten bereiten und zu der bekannten Klage Anlass geben wird, der Schüler brauche eine besondere Anlage für die Mathematik. Es ist vielmehr bei der Einführung in die Geometrie wünschenswert, erstens das schwere Geschütz der starren logischen Formen vorerst nicht heranzuziehen, zweitens: die Grundregeln der Algebra zunächst nicht zu benutzen, drittens: statt dessen auf die Anschauung in grösstmöglichem Umfange zurückzugreifen. E. JAHNKE.

J. POPP. **Ergründung und Lösung des imaginären Problem.** Fundamente einer natürlichen Zahlentheorie. Tachau (Böhmen) 1898, Selbstverlag. 76 S.

Es wird genügen, zum Verständnis des Buches den Schlußsatz desselben hierher zu setzen: „Durch vielseitige Schlüsse und Versuche wurde das grösste mathematische Problem seiner endlichen Entschleierung zugeführt:

$$\sqrt{-1} = -1.$$

E. JAHNKE.

E. GAMBORG. **Logaritmetabel indeholdende logaritmer og antilogaritmer samt logaritmerne til de trigonometriske funktioner.** Kjøbenhavn 1897, Gyldendalske.

Der Unterschied dieser Tafel von der Gauss'schen besteht darin, dass sie erstens in den Abteilungen I und II — Logarithmen und Antilogarithmen —

eine Anordnung à double entrée bietet, zweitens besondere, neu gegossene Typen benutzt und drittens die gewöhnlichen Logarithmen und Antilogarithmen in 1, 3, 2, 3, 1 Reihen bzw. Kolonnen gruppiert. Letztere Teilung soll, wie der Verfasser in einer langjährigen Benutzung von Rechentafeln gefunden hat, der gewöhnlichen Einteilung vorzuziehen sein.

E. JAHNKE.

CH. STURM. **Lehrbuch der Analysis** (Cours d'Analyse). Übersetzt von TH. GROSS. Erster Band 1897, zweiter Band 1898. Berlin, M. Krayn.

Das vorliegende klassische Werk ist eines jener Bücher, welches wohl jeder Student der Mathematik einmal in Händen gehabt hat. Es verdankt seine weite Verbreitung, abgesehen von dem Reichtume seines Inhaltes, jener Klarheit der Darstellung, die den französischen Lehrbüchern eigentümlich ist. Man könnte hiernach wohl im Zweifel sein, ob die Übersetzung eines solchen Werkes geraten erscheint, zumal die Lektüre französischer Werke über Mathematik der heutigen Jugend wohl kaum Schwierigkeiten bietet. Immerhin ist anzuerkennen, dass sich die Übersetzung im allgemeinen gut und fließend liest, der Inhalt ist, nach einigen Stichproben zu schliessen, wenn man von einigen Mängeln absieht, sinnetreu und unverkürzt wiedergegeben. Nur in den Nebenteilen des Originals sind einige Kürzungen vorgenommen worden. So ist das ausführliche Verzeichnis der wichtigsten Definitionen, Lehrsätze und Formeln im ersten Bande unterdrückt und die Notiz über Sturms Leben gekürzt worden. Zu bedauern ist, dass auch das Verzeichnis von Sturms Abhandlungen weggelassen worden ist. Die Gründe, welche den Übersetzer hierzu bestimmten, erscheinen dem Referenten nicht stichhaltig. Ebenso ist bezüglich des zweiten Bandes der Übersetzung zu bemerken, dass die dem Original angehängten Aufsätze über mathematische Spezialfragen von verschiedenen Verfassern, im besonderen die Laurentsche Abhandlung über die elliptischen Funktionen, fortgelassen worden sind. Inzwischen hat der Verfasser seine Meinung insoweit geändert, als er sich entschlossen hat, dem zweiten Bande wenigstens einen Auszug aus der Formelsammlung des Originals anzuhängen.

Die Übersetzung ist nach der achten Auflage des Buches veranstaltet.

E. JAHNKE.

Die geometrisch-optischen Täuschungen. Von WILHELM WUNDT. Auszug aus dem XXIV. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mit 65 Textfiguren. Leipzig 1898, B. G. Teubner. 126 S.

Jeder Mathematiker, der in der Lage war, die Figur eines Würfels an der Tafel zu entwerfen, weiss, dass diese perspektivische Zeichnung, je nach dem Willen des Beschauers den Eindruck auf ihn machen wird, als trete der Würfel aus der Tafel heraus oder hinter die Tafel zurück. Wie aber äussert sich jener Wille? Herr Wundt zeigt, dass dazu ein Fixieren gewisser Punkte der Figur und gewisse Augenbewegungen dienen. Dieser Fall stellt uns eine der einfachsten geometrisch-optischen Täuschungen und

ihre Erklärung dar. Mathematisch sind darin nur die angeschauten Figuren. Wir müssen darum in dieser Zeitschrift Abstand davon nehmen, die schier zahllosen Beispiele und deren Erklärungen anzugeben. Uns persönlich haben die Versuche und deren Beschreibung ungemein gefesselt, und wir zweifeln nicht, dass das gleiche bei jedem Leser der Fall sein werde. CANTOR.

Über das logarithmische Potential einer Pascalschen Schnecke. Von Prof.

Dr. KARL BAER. Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresbericht über die Oberrealschule in Kiel. 1897. Mit einer Figurentafel 24 S.

Der Verfasser hat 1888 und 1892 von Frankfurt a. d. Oder aus zwei Programme veröffentlicht, welche in Band XXXIII Seite 216 und Band XXXVIII Seite 71 der historisch-litterarischen Abteilung angezeigt sind. Inzwischen nach Kiel versetzt, blieb er dem früheren Arbeitsgebiete treu, treu in mehrfacher Beziehung. Erstens sind es abermals Potentialuntersuchungen, die er veröffentlicht, zweitens ist das untersuchte Raumgebilde die Pascalsche Schnecke, welche 1892 als krummlinige Koordinate in Anwendung trat, welche auch jetzt ebendazu benutzt wird, drittens liebt es der Verfasser, sich der hyperbolischen Funktionen zu bedienen, welche gemeinschaftlich mit Kreisfunktionen auftretend den Formeln ein weit symmetrischeres Gepräge aufdrücken, als wenn Exponentialgrößen benutzt würden.

CANTOR.

Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzgleichung. Von Prof. Dr.

KARL BAER, Direktor der Realschule in Kiel. 1898. 25 S.

Nachdem Laurent 1875 gezeigt hat, dass die Kugelfunktion $P_{(x)}^{(n)}$ dem über einen um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreis auszudehnenden Integrale $\int \frac{u^n du}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$ proportional ist, hat Schläfli 1881 dieses Integral zum Ausgangspunkte von Untersuchungen über die Kugelfunktionen gewählt. In den umfassenden Werken von Heine (1878—1881) und Byerly (1895) spielt das Integral dagegen nur eine untergeordnete Rolle oder wird vollständig mit Stillschweigen übergangen. Aus dieser Thatsache nahm Herr Baer Veranlassung, neuerdings auf die Integralform hinzuweisen. Er geht aus von der durch die P sowie durch die Q erfüllten Gausssschen Rekursionsgleichung

$$(n+2)R^{(n+2)}(x) - (2n+3)xR^{(n+1)}(x) + (n+1)R^{(n)}(x) = 0$$

bringt sie auf die Gestalt einer Differenzgleichung

$$(2+n)\Delta^2 z + [(4-3x) + 2(1-x)n]\Delta z + [3(1-x) + 2(1-x)n]z = 0$$

und integriert dieselbe nach Laplace mittels versuchsweiser Annahme von

$$z = \int_a^x u^n f(u) du.$$

Er findet dadurch

$$f(u) = \frac{c}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$$

nebst der Bestimmung der Integrationsgrenzen. Aus dem weiteren Inhalte der Programmabhandlung erwähnen wir noch Umformungen des Inte-

grales z , Bestimmung der erzeugenden Funktion der Kugelfunktionen $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{(n)}(x) \cdot u^n$ nach einer 1848 von Schlömilch angegebenen Methode, endlich Summation von Reihen, welche nach Kugelfunktionen fortschreiten.

CANTOR.

Bibliographie

vom 8. Dezember 1898 bis 16. Februar 1899.

Periodische Schriften.

- Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben von G. und E. WIEDEMANN. Neue Folge. 67—69. Bd. oder Jahrg. 1899. Leipzig, Barth. M. 42.
- Arbeiten, astronomisch-geodätische. Veröffentlichung der königl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 3. Heft. I. Polhöhen und Azimutbestimmung in Kammer. 1886. II. Azimutbestimmung auf dem Wendelstein. 1887. Azimutbestimmungen in München (Sternwarte). 1887—1891. München, Franz. M. 10.
- Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 66. Bd. 1. Hälfte. Wien, Gerolds Sohn. geb. M. 69. 20.
- Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der physik. Gesellschaft zu Berlin. 53. Jahrg. 2. und 3. Abteilung. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
2. Physik des Äthers. Red. von RICH. BÖRNSTEIN. M. 32.
3. Kosmische Physik. Red. von RICH. ASSMANN. M. 21.
- Jahrbuch des königl. sächs. meteorol. Institutes. XIV. Jahrg. 1896. 3. Abt. SCHREIBER, PAUL, Bericht über die Thätigkeit im meteorologischen Institut für das Jahr 1896. Chemnitz, Bülz. M. 10.
- Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben von G. HAUCK u. A. GUTZMER. 6. Bd. 2. Heft. FINSTERWALDER, S., Die geometr. Grundlagen der Photogrammetrie. — FINSTERWALDER, S., Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. — BOHLMANN, G., Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.
- Dasselbe. 7. Bd. 1. Heft. Enthält die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1898, sowie die auf der Versammlung in Düsseldorf gehaltenen Vorträge. Ebenda. M. 4.
- Publication de l'Observatoire central Nicolas sous la direction de O. Backlund. Série II Vol. XI. STRUVE, HERM., Beobachtungen der Saturnstrabanten am 30zölligen Pulkowaer Refractor. Leipzig, Voss. M. 26.

- Publikationen des astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 39. (12. Bd. 1. Stück.) VOGEL, H. C., und WILSING, J., Untersuchungen über die Spectra von 528 Sternen. Leipzig, Engelmann. M. 4.
- Sitzungsberichte, Münchener, Mathemat. Klasse. 1898. 3. Heft. München, Franz. M. 1. 20.
- Sitzungsberichte, Wiener. Mathemat.-naturw. Klasse. Abt. IIa. 107. Bd. 3.—5. Heft. Wien, Gerolds Söhne. M. 9. 90.
- Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 70. Versammlung zu Düsseldorf. 1898. Herausgegeben von ALB. WANGERIN und OTTO TASCHENBERG. 1. Teil. Leipzig, Vogel. M. 4.
- Veröffentlichungen der königl. Sternwarte zu Bonn. Herausgegeben von FRIEDR. KÜSTNER. Nr. 3. WIRTZ, CARL WILH., Bestimmung der Deklinationen von 487 Sternen und der Polhöhe der Bonner Sternwarte aus Beobachtungen am vierzölligen Ertelschen Passageninstrument im ersten Vertical. Bonn, Cohen. M. 3.
- Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. 1894. 3. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen zweiter und dritter Ordnung im Jahre 1894, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1894. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 10.
- Dasselbe. 1897. 2. Heft. Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1897. Ebenda. M. 3. 50.
- Dasselbe. 1898. 1. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen zweiter und dritter Ordnung im Jahre 1898, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1898. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Ebenda. M. 3.
- Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 33. Jahrg. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

Geschichte der Mathematik.

- LEIBNIZ, GOTTF. WILH., Briefwechsel mit Mathematikern. Herausgegeben von E. J. GERHARDT. 1. Bd. Berlin, Mayer & Müller. M. 28.

Reine Mathematik.

- DOLANSKI, Zwei Probleme: Dreiteilung des Winkels und Quadratur des Kreises. Reval, Kluge. M. 4.
- HOCHHEIM, ADF., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 2. Heft. Die Kegelschnitte. Abt. I. 2. Aufl. A. u. B. Leipzig, B. G. Teubner.
A. Aufgaben M. 1. 40.
B. Auflösungen M. 1. 60.
- JELINEK, LAUR., Mathematische Tafeln für technische Anstalten, bes. für höhere Gewerbeschulen. 2. Aufl. Wien, Pichlers Ww. u. S. geb. M. 2. 60.

- LAGRANGE, JOS. LOUIS, Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen von A. J. v. OETTINGEN. Herausgeg. v. H. WEBER (Ostwalds Klassiker Nr. 103). Leipzig, Engelmann. M. 2. 60.
- PEANO, G., Entwicklung der Grundbegriffe des geometrischen Kalküls. Übersetzt von ALOIS LANNER. Leipzig, Fock. M. 1.
- REYE, THDR., Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Rektoratsrede. 2. Aufl. Strassburg, Heitz. M. —. 40.
- Sammlung der Aufgaben des Aufgabenrepertoriums der ersten 25 Bände der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht, unter Mitwirkung von STOLL systematisch geordnet von EMMERICH und C. MÜSEBECK und herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 6.
- SCHAPER, HANS v., Über die Theorie der Hadamar'schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Diss. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.
- SCHMIDT, H. C., Zahlenbuch. Produkte aller Zahlen bis 1000 mal 1000. Entworfen von C. CARIO. 2. Aufl. Aschersleben, Bennwitz. geb. M. 10.
- SCHULTZ, E., Vierstellige mathem. Tabellen. 3. Aufl. Ausg. für Maschinenbauschulen. Essen, Bädeker. kart. M. 1.
- Nebst Anleitung zum Gebrauch der mathem. Tabellen in den technischen Kalendern. 3. Aufl. M. 1. 20.
- SPIEKER, TH., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Übungsaufgaben und einer kurzen Einleitung in die sphärische Astronomie. 4. Aufl. Potsdam, Stein. M. 1. 40.
- Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Herausgegeben von FRDR. ENGEL und PAUL STÄCKEL. I. Lobatschewskij, Nikolaj Iwanowitsch, zwei geometrische Abhandlungen. Aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers von FRDR. ENGEL. 2 Teile in 1 Bd. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
- ZIMMERMANN, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 6. bis 8. Tausend. Berlin, Ernst & Sohn. geb. M. 5.

Angewandte Mathematik.

- EDLER'S Messblatt, ein Apparat zum Bestimmen von Neigungswinkeln, Höhen und Tiefen. Lith. Kreisausschnitt mit kleinem Lot. Nebst Text. Halle, Reichardt. M. —. 50.
- Ergebnisse, die, des Präzisions-Nivellement in der österreich.-ungarischen Monarchie. Nordöstlicher Teil. Herausgegeben vom kais. u. königl. militär-geograph. Institute. Wien, Lechner. M. 2. 40.
- Handwörterbuch d. Astronomie. 16. Lieferung. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.
- MEISSNER, G., Hydraulik. 2. Aufl. 27. Lieferung. Jena, Costenoble. M. 3.
- STURM, Ch., Lehrbuch der Mechanik. (Cours de Mécanique.) Übersetzt von THDR. GROSS. 1. Bd. Berlin, Calvary & Co. M. 6.

Physik und Meteorologie.

- CLAUSIUS, R., Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen (1850). Herausgegeben von MAX PLANCK. (Ostwalds Klassiker Nr. 99.) Leipzig, Engelmann. M. —. 80.
- KIRCHHOFF, G., Abhandlungen über Emission und Absorption. I. Über die Fraunhoferschen Linien (1859). II. Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme (1859). III. Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht (1860—1862). Herausgegeben von MAX PLANCK. (Ostwalds Klassiker Nr. 100.) Leipzig, Engelmann. M. 1.
- KIRCHHOFF, G., Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie. I. Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben (1858). II. Bemerkungen über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind (1858). III. Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure (1858). Herausgegeben von MAX PLANCK. (Ostwalds Klassiker Nr. 101.) Leipzig, Engelmann. M. —. 75.
- LEDÓCHOWSKI, Jos. Graf, Wetterprognose, giltig für Niederösterreich, Teile von Oberösterreich, Südmähren und Westungarn, bezw. für ganz Österreich-Ungarn. 3. Jahrgang 1899. 12 Nummern. Wien, Braumüller. à M. —. 20.
- MAXWELL, JAMES CLARK, Über physikalische Kraftlinien (1861—1862). Herausgegeben von L. BOLTZMANN (Ostwalds Klassiker Nr. 102). Leipzig, Engelmann. M. 2. 40.
- MEWES, RUD., Licht-, Elektrizitäts- und X-Strahlen. Beitrag zur Erklärung der Ätherwellen. 2. Aufl. Berlin, Fischer. M. 2. 50.
- NEWTON, Sir ISAAC, Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichtes (1704). Übersetzt und herausgegeben von WILLIAM ABENDROTH. II. und III. Buch. (Ostwalds Klassiker Nr. 97.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 2. 40.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1898.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Über die Mercatorsche Projektion. H. E. Timerding. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 320.

Abelsche Transcendenten.

2. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1897¹, 608.

Absolute Geometrie.

3. Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie Riemannienne. F. Dauge. Mathesis. Sér. 2, VIII, 5.
4. Sur la limite vers laquelle tend un certain triangle Lobatschewskien. F. Dauge. Mathesis. Sér. 2, VIII, 267.
5. Pour la géométrie non euclidienne. P. Mansion. Mathesis. Sér. 2, VIII, 33.
6. Simple remarque sur le triangle. De Tilly. Mathesis. Sér. 2, VIII, 217.

Analytische Geometrie der Ebene.

7. Propriété du pseudocarré et courbes qui en dérivent. Retali. Mathesis. Sér. 2, VIII, 69. — Mandart *ibid.* 71.
8. Théorèmes sur les cubiques. A. Cazamian. Mathesis. Sér. 2, VIII, 138.
9. Cubique lieu des foyers d'une certaine ellipse. V. Retali. Mathesis. Sér. 2, VIII, 169. — Barisien *etc. ibid.* 171.
10. Sur une cubique circulaire. L. Jeřabek. Mathesis. Sér. 2, VIII, 224.
11. Propriété des limaçons de Pascal. Audibert. Mathesis. Sér. 2, VIII, 123.
12. Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements Bosmans. Mathesis. Sér. 2, VIII, 139.
13. Quartique décrite au moyen d'une ellipse. Barisien *etc.* Mathesis. Sér. 2, VIII, 236. — Droz-Farny et Déprez *ibid.* 237.
Vergl. Geschichte der Mathematik 76. Kegelschnitte.

Analytische Geometrie des Raumes.

14. La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciproité. Cl. Servais. Mathesis. Sér. 2, VIII, Supplément.
15. Courbe décrite dans l'espace par le centre de l'objectif d'un théodolite au moyen duquel on suit un mobile parcourant une droite. Soons. Mathesis. Sér. 2, VIII, 29.
16. Conchoïde de cercle décrite au moyen d'un cylindre de revolution. Audibert. Mathesis. Sér. 2, VIII, 233. — Jeřabek *ibid.* 234.
Vergl. Geometrie (descriptive). Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

17. Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. P. Gerber. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 93.
Vergl. Geschichte der Mathematik 68.

Ausdehnungslehre.

18. Die Bewegung eines starren Körpers. J. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 243.

B.**Bestimmte Integrale.**

19. Bemerkungen zu dem Mittelwertsatz für ein System von n Integralen. G. Kowalewski. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 118. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 50.]
20. Zwei Grenzwerte, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 453.
21. Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen. K. Zindler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 359.

C.**Combinatorik.**

22. Das Problem der 15 Pensionatsdamen. A. F. H. Mertelsmann. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 329.

D.**Determinanten.**

23. Sur un déterminant du troisième ordre prenant la valeur zéro lorsque $xyz = abc = 1$. J. Degueldre. Mathesis. Sér. 2, VIII, 144. D'Avillez ibid. 145. — Déprez ibid. 145.
24. Sur les relations de Ptolémée et de Feuerbach. A. Krahé. Mathesis. Sér. 2, VIII, 83.

Differentialgleichungen.

25. Über die Differentialgleichungen der elektrolytischen Verschiebungen. H. Weber. Berl. Akad. Ber. 1897², 936.
Vergl. Geschichte der Mathematik 80.

Dreiecksgeometrie.

26. Sur la figure du carré de l'hypoténuse. Zahradnik. Mathesis. Sér. 2, VIII, 193.
27. Sur les bissectrices d'un triangle. Goulard et Dés. André. Mathesis. Sér. 2, VIII, 112.
28. Sur les bissectrices d'un angle. Degueldre, Droz-Farny, François. Mathesis. Sér. 2, VIII, 51.
29. Sur deux transversales remarquables du triangle. A. Gob. Mathesis. Sér. 2, VIII, 129. [Vergl. Nr. 148.]
30. Sur deux groupes d'équations ayant lieu pour tout triangle. Déprez, Delahaye, Rose, Plakhovo. Mathesis. Sér. 2, VIII, 173.
31. Propriétés du triangle. Colart etc. Mathesis. Sér. 2, VIII, 100.
32. Über den Feuerbachschen Kreis. B. Sporer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 739.
33. Sur les triangles homologues. J. Neuberg. Mathesis. Sér. 2, VIII, 155.
34. Sur les triangles orthogonalement circonscrits à un triangle donné. Lemoine et Brocard. Mathesis. Sér. 2, VIII, 163.
35. Propriété de deux triangles à côtés parallèles inscrit et circonscrit à un triangle donné. Colart etc. Mathesis. Sér. 2, VIII, 275.
36. Côtés et aires de certains triangles secondaires dérivant d'un triangle donné. Déprez. Mathesis. Sér. 2, VIII, 253.

E.**Elastizität.**

37. Über die Gestalt eines Rotationskörpers ohne Ringspannung. S. Finsterwalder. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 64.
Vergl. Mechanik 132.

Elektrizität.

38. Über irreversible Strahlungsvorgänge. M. Planck. Berl. Akad. Ber. 1897¹, 57; 1897², 715, 1122. — L. Boltzmann. Ebenda 1897¹, 660; 1897², 1016.
39. Über Spannungszustände, bei denen ein Spannungspotential und zugleich ein Verschiebungspotential besteht. G. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 216.
40. Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde. E. R. v. Schweidler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 526.
Vergl. Differentialgleichungen. Geschichte der Mathematik 85.

Ellipse.

41. Lieu d'un sommet d'un triangle rectangle isocèle variable, qui reste homothétique à lui-même. Colart etc. Mathesis. Sér. 2, VIII, 121. — Schiappa Monteiro *ibid.* 122.
42. Propriété d'une ellipse se rapportant à un quadrilatère articulé. Collette. Mathesis. Sér. 2, VIII, 26.
43. Propriétés d'une ellipse coupée par un système de cercles. V. Retali. Mathesis. Sér. 2, VIII, 139. — Droz-Farny *ibid.* 141. — Barisien *ibid.* 143.
44. Propriété de l'ellipse. A. Droz-Farny et Barisien. Mathesis. Sér. 2, VIII, 146.
45. Cercle circonscrit à un triangle MPQ dont le point M se trouve sur un cercle donné tandis que P et Q sont les points de contact des tangentes tirées de M à une ellipse donnée. Cl. Servais. Mathesis. Sér. 2, VIII, 165.
46. Ellipses engendrées au moyen d'un cercle mobile Barisien. Mathesis. Sér. 2, VIII, 74.
47. Ellipse décrite au moyen d'une ellipse donnée et ayant pour enveloppe deux ellipses. Cristesco, Droz-Farny, Deprez. Mathesis. Sér. 2, VIII, 259.
48. Maximum de l'aire d'un triangle dont le sommet se trouve au centre d'une ellipse ayant un côté pour corde. J. Jonesco. Mathesis. Sér. 2, VIII, 120.
49. Sur les ellipses osculatrices à un cercle donné en un point donné et ayant même aire que le cercle. Absolonne. Mathesis. Sér. 2, VIII, 48.
50. Sur deux ellipses semblables et concentriques. Seligmann. Mathesis. Sér. 2, VIII, 277.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 9, 13.

F.**Funktionen.**

51. Über den Begriff der Stetigkeit nach Gauss. G. Kowalewski. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 116.
52. Zur Lehre von den unentwickelten Funktionen. H. A. Schwarz. Berl. Akad. Ber. 1897², 948.
Vergl. Abelsche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Reihen. Transformationsgruppen. Trigonometrie 169. Zahlentheorie.

G.**Geodäsie.**

53. Zur Ausgleichung eines durch Längenmessungen bestimmten Punktes. E. Hammer. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 105.

Geometrie (descriptive).

54. Étude géométrique du point simple d'une courbe gauche. F. Chomé. Mathesis. Sér. 2, VIII, 177.
55. Projection oblique d'une aire plane. Mathesis. Sér. 2, VIII, 193.
Vergl. Abbildung.

Geometrie (höhere).

56. Bemerkung über symmetrische Korrespondenzen ungeraden Grades. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 488.
57. Sur les groupes polaires des systèmes de points. Stuyvaert. Mathesis. Sér. 2, VIII, 20.

58. Die Undulationen ebener Kurven c^4_8 . W. Binder. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 295.
59. Über räumliche Ponceletsche Polygone. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 481.
60. Cissoïde et strophoïde. A. Droz-Farny. Mathesis. Sér. 2, VIII, 164.
61. Sur une cubique circulaire cuspidale. V. Retali. Mathesis. Sér. 2, VIII, 73.
62. Sur une hypocycloïde à trois rebroussements et sur une cardioïde enveloppes des côtés d'un triangle. V. Retali. Mathesis. Sér. 2, VIII, 168.
Vergl. Absolute Geometrie. Kegelschnitte.

Geschichte der Mathematik.

63. Überblick über die Geschichte der Wissenschaften. Waldeyer. Berl. Akad. Ber. 1897¹, 23.
64. On the course in the history of mathematics in the Michigan state normal college. D. Eug. Smith. Biblioth. math. 1898, 13.
65. Ein Tractatus de abaco aus der Wende des XII. und XIII. Jahrhunderts. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, hist.-litt. Abtlg. 122.
66. Sur quelques propositions de planimétrie énoncées dans un manuscrit norvégien du 14^e siècle. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 19.
67. Eine Münze von 1458 mit arabischen Ziffern. G. Wertheim. Biblioth. math. 1898, 120.
68. Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab. M. Curtze. Biblioth. math. 1898, 97.
69. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1898, 5, 33, 79. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 163.]
70. Über zwei arabische mathematische Manuskripte der Berliner Königl. Bibliothek. H. Suter. Biblioth. math. 1898, 73.
71. Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. Carra de Vaux. Biblioth. math. 1898, 3.
72. Zur Geschichte des sphärischen Polardreieckes. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1898, 65.
73. Über den wahren Namen des Josteglio. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1898, 94.
74. À propos de l'interprétation du titre „Saméiois“ d'Albert Girard. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 18.
75. Fermats Observatio zum Satze des Nikomachus. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, hist.-litt. Abtlg. 41.
76. La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice. Gino Loria. Mathesis. Sér. 2, VIII, 265.
77. Leibniz als Schriftsteller. Vahlen. Berl. Akad. Ber. 1897², 687.
78. Sur un point de la querelle au sujet de l'invention du calcul infinitésimal. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 50.
79. Denis Papin. E. Heydenreich. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, hist.-litt. Abtlg. 130.
80. Méthode de Jean Bernoulli pour l'intégration d'une certaine équation différentielle linéaire du n -ième ordre. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 58.
81. Beitrag zur Bibliographie der Eulerschen Schriften. G. Valentin. Biblioth. math. 1898, 41.
82. Die zu Lund gedruckte Ausgabe der Eulerschen Algebra von 1771. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 120.
83. Note historique sur une proposition analogue au théorème de Pythagore. G. Eneström. Biblioth. math. 1898, 113.
84. Über Band XII des Bulletin Boncompagni. M. Curtze. Biblioth. math. 1898, 96.
85. Bemerkung, die Schreibweise Amper betreffend. G. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, hist.-litt. Abtlg. 1.
86. Sur la vie et les travaux de H. J. S. Smith (1826—1883). P. Mansion. Mathesis. Sér. 2, VIII, Supplément.
87. Jean Nicolas Mister 29. XII. 1832—19. X. 1898. P. Mansion et J. Neuberg. Mathesis. Sér. 2, VIII, 241.

Gleichungen.

88. Über einen algebraischen Satz. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 422.
89. Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln. R. Mehmkke. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 80.

90. Über die kubischen und biquadratischen Gleichungen, von denen eine Wurzel durch rational ausführbare Wurzelbeziehungen gefunden werden kann. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 167.
91. Résolution hydrostatique de l'équation du troisième degré. Demanet. Mathesis. Sér. 2, VIII, 81.
92. Über einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 338.
93. Sur la seule racine réelle positive de $12x^5 - 7x^4 + x^3 - 3000 = 0$. Smout. Mathesis. Sér. 2, VIII, 147.
94. Sur les types les plus généraux d'équations représentables par trois systèmes de cercles ou de droites côtés. Application aux équations quadratiques. M. d'Ocagne. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 269.
95. Trouver la condition pour que le système $x^2 = a(x+y)(x+z)$, $y^2 = b(y+z)(y+x)$, $z^2 = c(z+x)(z-y)$ admette une solution non nulle Déprez, Mandart, Legrand. Mathesis. Sér. 2, VIII, 200.
96. Résoudre le système $(y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2 = (x+y)(x-y)^2$. Emmerich. Mathesis. Sér. 2, VIII, 54.
Vergl. Trigonometrie 170, 171, 172, 173.

Graphisches Rechnen.

97. Harmonische Analyse mittels des Polarplanimeters. S. Finsterwalder. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 85.
98. Über den Traktoriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter. A. Korselt. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 312. — Mehmke ebenda 317.
Vergl. Gleichungen 91, 92. Mechanik 128. Perspektive. Winkelteilung.

H.

Hydrodynamik.

99. Zur Frage des Widerstandes, welchen bewegte Körper in Flüssigkeiten und Gasen erfahren. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 1118.
Vergl. Gleichungen 91.

Hyperbel.

100. Hyperbole engendrée par le milieu d'une droite mobile dans un angle. A. Goulard. Mathesis. Sér. 2, VIII, 45.
101. Sur l'hyperbole équilatère. A. Goulard. Mathesis. Sér. 2, VIII, 46.
102. Théorème sur une hyperbole équilatère coupée en deux points donnés par une circonférence. E. Buysens. Mathesis. Sér. 2, VIII, 231.
103. Propriété d'une hyperbole équilatère ayant pour centre un point donné et bitangente à une conique donnée. Cl. Servais. Mathesis. Sér. 2, VIII, 201.
104. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle des trois points l'intersection d'une hyperbole équilatère et d'une parabole variable. A. Goulard. Mathesis. Sér. 2, VIII, 124.

K.

Kegelschnitte.

105. Équations à paramètre d'une conique. Stuyvaert. Mathesis. Sér. 2, VIII, 117.
106. Cuiques se rapportant à un cercle réel et à son cercle conjugué. R. Buysens et Déprez. Mathesis. Sér. 2, VIII, 205.
107. Rayon de courbure des coniques. A. Droz-Farny. Mathesis. Sér. 2, VIII, 115.
108. Sur le lieu des sommets des courbes du second ordre. Barbettes. Mathesis. Sér. 2, VIII, 191.
109. Lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère donné. Mathesis. Sér. 2, VIII, 194.
110. Propriétés des coniques. Cazamian. Mathesis. Sér. 2, VIII, 88.
111. Propriétés des cercles de Chasles. H. Brocard. Mathesis. Sér. 2, VIII, 61. — Droz-Farny ibid. 65.
112. Propriété des coniques passant par les trois sommets d'un triangle donné et ayant leur centre sur une droite donnée. Colart. Mathesis. Sér. 2, VIII, 258.
113. Triangles rectangles inscrits dans une conique et ayant le même sommet de l'angle droit. A. Boutin, G. Gérard, Déprez. Mathesis. Sér. 2, VIII, 127.

114. Coniques décrites au moyen d'un point donné et d'une ellipse donnée dans le même plan. Cl. Servais. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 228. — Barisien etc. *ibid.* 229. Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kinematik.

115. Über die angenäherte Geradföhrung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks. R. Müller. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 36.
116. Sur l'inverseur de Hart. Mannheim. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 87.
117. Über Rollkurven und Rollflächen. M. Disteli. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 1.

Kreis.

118. Théorème se rapportant à un point-cercle. A. Droz-Farny. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 143.
119. Sur quatre points situés sur une même circonférence. Emmerich, Fairon. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 78.
120. Propriétés du cercle. N. Barisien. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 92. — Droz-Farny *ibid.* 97.
121. Circonférences données au moyen d'un angle de grandeur invariable pivotant autour de son sommet. E. Colart. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 98.
122. Propriétés des cercles ayant pour diamètres les deux parties d'une corde d'une circonférence donnée passant par un point donné à l'intérieur de cette circonférence. Droz-Farny et Joneco. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 256.
123. Propriété de deux cercles tangents. Gérard etc. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 148.
124. Sur le triangle formé par les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles exinscrits à un triangle donné. Colart, Déprez, Delahaye. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 203.
125. Sur des triples de cercles associés. Duran Loriga. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 108. Vergl. Dreiecksgeometrie 32. Ellipse 43, 45, 46, 49. Gleichungen 94. Hyperbel 104. Kegelschnitte 106, 111. Rektifikation.

M.**Magnetismus.**

126. Über das Verhalten rotirender Isolatoren im Magnetfeld und eine darauf bezügliche Arbeit A. Campettis. H. Benndorf. *Wien. Akad. Ber.* (Abtlg. IIa) CVI, 1075.
127. Zur Theorie des Erdmagnetismus. W. v. Bezold. *Berl. Akad. Ber.* 1897¹, 414.

Mechanik.

128. Zur graphischen Behandlung der Kräfte im Raume. W. Stückel. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 62.
129. Über verborgene Bewegung und unvollständige Probleme. L. Königsberger. *Berl. Akad. Ber.* 1897¹, 158.
130. Über die Darstellung der Kraft in der analytischen Mechanik. L. Königsberger. *Berl. Akad. Ber.* 1897², 885.
131. Über einen mechanischen Satz Poincarés. L. Boltzmann. *Wien. Akad. Ber.* (Abtlg. IIa) CVI, 12.
132. Über das innere Virial eines elastischen Körpers. Jos. Finger. *Wien. Akad. Ber.* (Abtlg. IIa) CVI, 722.
133. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreisbewegungen der rotirenden Langgeschosse während ihres Fluges. C. Cranz. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 133, 169.
134. Zur Berechnung der Senkungen der Knotenpunkte eines Fachwerks. E. Hammer. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 58.
Vergl. Astronomie. Ausdehnungslehre. Elastizität. Elektrizität. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Optik. Pendel. Wärmelehre.

O.**Oberflächen.**

135. Über Flächen mit Liouvilleschem Bogenelement. E. Waelsch. *Wien. Akad. Ber.* (Abtlg. IIa) CVI, 323.
136. Normales aux surfaces et aux courbes algébriques. Stuyvaert. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 105.

Oberflächen zweiter Ordnung.

137. Zur Hesseschen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.
J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 334.
138. Sur la sphère et les quadriques de douze points du tétraèdre général. L. Ripert.
Mathesis. Sér. 2, VIII, 218.

Optik.

139. Über die Interferenz und die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen.
G. Jaumann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 533.
140. Über die mathematische Bestimmung der Helligkeit in Räumen mit Tagesbeleuchtung, insbesondere Gemäldesälen mit Deckenlicht. R. Mehmke.
Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 41.
141. Über elliptische Anamorphose in der dioptrischen Abbildung. L. Matthiessen.
Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 305.

P.**Parabel.**

142. Propriété de la tangente et de la normale d'une parabole dans un point donnée.
J. Degueldre. Mathesis. Sér. 2, VIII, 205.
143. Théorème sur la tangente et la normale menées dans un point d'une parabole.
E. Colart. Mathesis. Sér. 2, VIII, 212.
144. Sur la généralisation et la dualisation des propriétés de la parabole. L. Ripert.
Mathesis Sér. 2, VIII, 251.
145. Parabole enveloppe d'une droite. J. Neuberg. Mathesis. Sér. 2, VIII, 45.
146. Sur le lieu du foyer d'une certaine parabole variable. A. Cambier. Mathesis.
Sér. 2, VIII, 191. [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 324.]
147. Sur les paraboles qui touchent deux côtés d'un triangle donné et sont normales au troisième. H. Lez. Mathesis Sér. 2, VIII, 207. — J. Déprez
ibid. 262.
148. Sur un groupe de trois paraboles. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, VIII, 131.
[Vergl. Nr. 29.]

Pendel.

149. Über das Foucaultsche Pendel. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 166.

Perspektive.

150. Perspektiv-Reisser. E. Brauer. Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 163.

Philosophie der Mathematik.

151. Über die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 83.
152. Über die Frage nach dem Verhältnis von Denken und Sein und ihre Beantwortung durch die von der Naturwissenschaft nahegelegte Erkenntnistheorie. P. Volkmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 1103.

Planimetrie.

153. Deux nouvelle démonstrations du postulat d'Euclide. P. Mansion. Mathesis.
Sér. 2, VIII, 25.
154. Encore une démonstration du postulat d'Euclide. P. Mansion. Mathesis.
Sér. 2, VIII, 188.
155. Propriétés du triangle. A. Cambier. Mathesis. Sér. 2, VIII, 45.
156. Construire un parallélogramme $ABCD$ semblable à un parallélogramme $abcd$ et tel que les sommets A et C se trouvent sur une circonférence O et les deux autres sommets B et D sur une seconde circonférence O' .
Colart et Déprez. Mathesis. Sér. 2, VIII, 51.
157. Propriété d'un trapèze dont une diagonale égale la base. Poort, François, Jonesco, Déprez, Cristesco, Laurens. Mathesis. Sér. 2, VIII, 26.
Vergl. Dreiecksgeometrie.

R.**Reihen.**

158. Propositions sur les progressions arithmétiques. De Rocquigny. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 57.
 159. Des progressions logarithmiques. E. Barbette. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 135.
 160. Sommation d'une série. A. Boutin. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 249.
 161. Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$. H. v. Mangoldt. *Berl. Akad. Ber.* 1897², 835.

Vergl. Zahlentheorie 180.

Rektifikation.

162. Rectifications approchées de la circonférence. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 88.

S.**Stereometrie.**

163. Propriété d'un quadrilatère gauche. Déprez et Maes. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 172.
 164. Par 3 droites données non situées dans un même plan mener trois plans formant un trièdre trirectangle. Jeřabek et Brien. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 199.
 165. Sur les polyèdres réguliers. J. Wasteels. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 242.
 Vergl. Geschichte der Mathematik 83.

T.**Transformationsgruppen.**

166. Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen. Beez. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 65, 121, 277. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 342.]

Trigonometrie.

167. Parmi tous les triangles rectangles ABC de même hypoténuse BC quel est celui dans lequel le produit du côté AB par la bissectrice de l'angle opposé C est un maximum? Colart etc. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 199.
 168. Quelques propriétés trigonométriques des quadrilatères gauches. J. Wasteels. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 85.
 169. Limite d'une expression trigonométrique. J. Jonesco. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 100.
 170. Résoudre le système d'équations $\sin x = a \sin(y+z)$, $\sin y = b \sin(z+x)$, $\sin z = c \sin(x+y)$. Audibert. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 76. — Neuberg *ibid.* 77.
 171. Résoudre le système $\operatorname{tng}(y+z) = a \operatorname{tng} x$, $\operatorname{tng}(z+x) = b \operatorname{tng} y$, $\operatorname{tng}(x+y) = c \operatorname{tng} z$. Barbette. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 213.
 172. Conditions de la relation $\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) = 0$. Goux et François. *Mathesis*. Sér. 2, VIII, 174.
 173. Résoudre et discuter le système $\sin y \cdot \cos z = \sin a$, $\sin z \cdot \cos x = \sin b$, $\sin x \cdot \cos y = \sin c$. H. Mandart. *Mathesis* Sér. 2, VIII, 273.
 Vergl. Geschichte der Mathematik 68. 72.

W.**Wärmelehre.**

174. Über den dem Liouvilleschen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie. C. H. Wind. *Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa)* CVI, 21.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

175. Die Variabilität der Lebewesen und das Gauss'sche Fehlergesetz. F. Ludwig. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 230.
 Vergl. Geodäsie.

Winkelteilung.

176. Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann. A. Korselt. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIII, 318. [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 416.]

Z.

Zahlentheorie.

177. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1897², 994.
178. Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen. Th. Molien. Berl. Akad. Ber. 1897², 1152.
179. Über eine zahlentheoretische Aufgabe. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 132.
180. Über Dirichlets Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern teilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 254. [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 356.]
181. Über einen asymptotischen Ausdruck. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 411.
182. Über eine zahlentheoretische Funktion. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 761.
183. Über einen Satz der additiven Zahlentheorie. R. Daublebsky v. Sterneck. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 115.
184. Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$ im Intervalle von 0 bis 150000. R. Daublebsky v. Sterneck. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CVI, 835.
185. Théorème d'arithmologie. G. de Rocquigny. Mathesis. Sér. 2, VIII, 246.
186. Problèmes d'arithmétique. A. Boutin. Mathesis. Sér. 2, VIII, 23.
187. Dernier chiffre des neuvièmes puissances. E. N. Barisien. Mathesis. Sér. 2, VIII, 113.
188. Sur les puissances des nombres entiers. F. Mariantoni. Mathesis. Sér. 2, VIII, 244.
189. Sur une équation de Pell. A. Boutin. Mathesis. Sér. 2, VIII, 159.
190. Trouver deux entiers consécutifs dont l'un soit un caré et l'autre un triangulaire. A. Goulard, Emmerich. Mathesis. Sér. 2, VIII, 52. — Boutin ibid. 54.
191. Deux cubes entiers consécutifs ayant pour différence un nombre triangulaire. H. Brocard et Boutin. Mathesis. Sér. 2, VIII, 126.
192. Résoudre en nombres entiers l'équation $2x+1+2x+1=u^2$. J. Jonesco etc. Mathesis. Sér. 2, VIII, 128.
193. Si p est nombre premier, $[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-2)]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$. Colart et Soons. Mathesis. Sér. 2, VIII, 278.
194. Trouver les nombres qui, multipliés par 9, donnent pour produits les mêmes nombres renversés. Barbette, François, Droz-Farny, Mandart. Mathesis. Sér. 2, VIII, 27.
- Vergl. Geschichte der Mathematik 75. Reihen 161. Transformationsgruppe.

Historisch-litterarische Abteilung.

Die Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen.

Von

Prof. N. DELAUNAY

Nowo-Alexandria.

Dem Andenken Sylvesters gewidmet.

Es dauert oft lange, bis die fruchtbarsten Ideen selbst grosser Männer der Wissenschaft genügend verstanden und geschätzt werden.

Trotz des bekannten Rufes Tschebyscheff's sind seine Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen noch sehr wenig von dem Ingenieuren gewürdigt. Es giebt sogar Mathematiker, welche diese Arbeiten Tschebyscheff's zu den geringsten seiner Verdienste rechnen. Diesen Mathematikern ist die technische Bedeutung der Tschebyscheff'schen Mechanismen noch nicht klar geworden; sie sehen in denselben nur eine scharfsinnige Anwendung der mathematischen Theorien Tschebyscheff's. Für Ingenieure ist das Studium der Memoiren dieses grossen Geometers, welche sich auf die Gelenkmechanismen beziehen, durch die äusserst komplizierte Analyse sehr erschwert, da sie nur bei eingehender Bekanntschaft mit der Tschebyscheff'schen „Theorie der am mindestens von der Null abweichenden Funktionen“ verstanden werden kann; um so mehr noch, als Tschebyscheff selbst sich in seinen Memoiren fast gar nicht bei der technischen Bedeutung seiner Mechanismen aufhält. Endlich sind auch nicht alle Arbeiten Tschebyscheff's in die Sprachen West-Europas übersetzt.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich mir folgende Aufgabe gestellt: 1. auf möglichst elementarem Wege die technische Bedeutung der Gelenkmechanismen Tschebyscheff's und seiner auf diesen Gegenstand bezüglichen Ideen darzulegen; und 2. die für Mathematiker interessanten Seiten dieser Art in den Arbeiten des russischen Geometers hervorzuheben.

Die Gelenkmechanismen Tschebyscheff's lassen sich in zwei Klassen einteilen: 1. angenäherte Geradfürungen und 2. Mechanismen zur Übertragung der Rotationen.

I.

Im Gebiete der angenäherten Geradführung hat Tschebyscheff Resultate von hervorragend wichtiger Bedeutung in technischer Beziehung erzielt:*

Er hat einen Mechanismus erfunden, welcher nur aus drei Gliedern besteht und, ungeachtet dieser Einfachheit, nicht die Schwingungen einer Schwinge in angenäherte

Fig. 1.

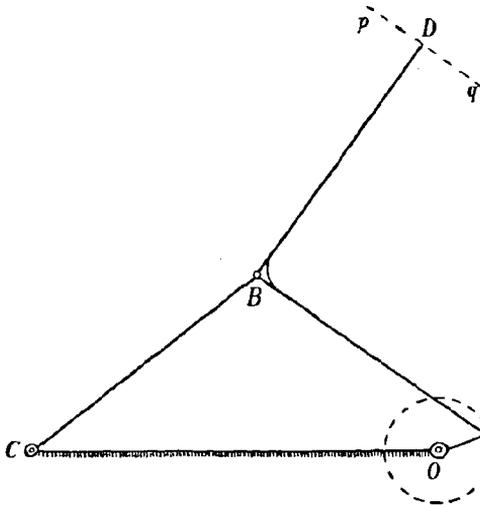
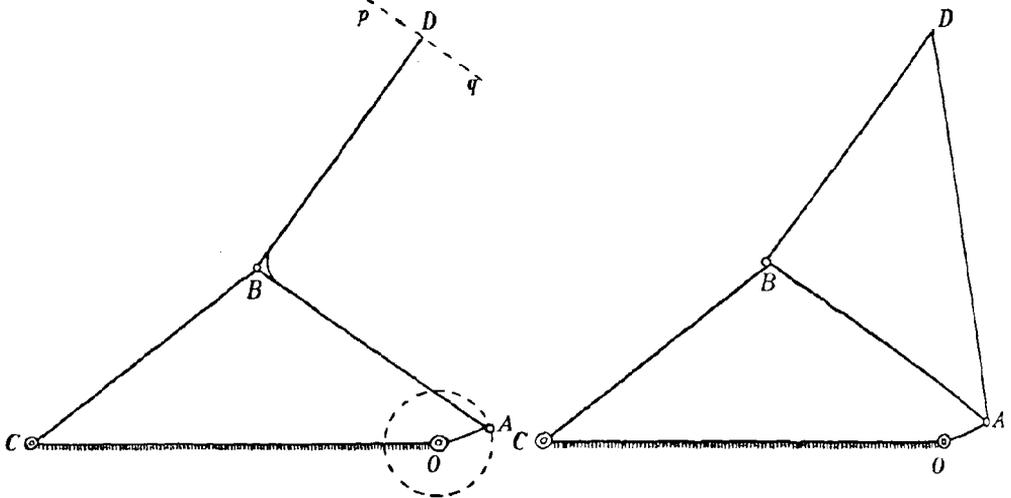


Fig. 2.



geradlinige Bewegung transformiert (was auch mittelst anderer Three-bar-Mechanismen erreicht wird), sondern die stetige Rotation einer Kurbel.

Dieser merkwürdige Mechanismus, welcher gerade in technischer Beziehung alle andere Geradfürungen übertrifft, besteht aus einer Kurbel OA (Fig. 1), einer Schwinge CB und einer Koppel ABD , welche letztere ein Winkelglied vorstellt. Der Winkel ABD ist ein wenig kleiner als ein rechter (siehe weiter unten), $AB = BD = BC$.

Fig. 2 zeigt noch deutlicher, dass der ganze Mechanismus nur aus drei Teilen besteht.

Die Gelenke C und O sind unbeweglich, so dass die Gerade CO den Steg des Mechanismus vorstellt. Bei der Drehung der Kurbel

* „Über das einfachste Gelenkssystem zur Erzielung einer symmetrischen Bewegung um die Axe.“ (Beilage zu Bd. LX der Memoiren der St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, russisch.)

OA beschreibt der Punkt D eine Kurve, deren Gestalt in Fig. 3 dargestellt ist. Diese Kurve läuft zwischen zwei parallelen Tangenten MN und PQ . Der Abstand δ zwischen beiden Geraden ist sehr gering; wenn die relativen Maßverhältnisse des Mechanismus nach den unten angegebenen Formeln Tschebyscheff's bestimmt worden sind, dann erscheint die gesamte Kurve fürs unbewaffnete Auge als eine Gerade (siehe pq Fig. 1), so dass die ununterbrochene Rotation der Kurbel OA , praktisch genommen, durch diesen Mechanismus in eine geradlinige Schwingung des Punktes D transformiert wird.

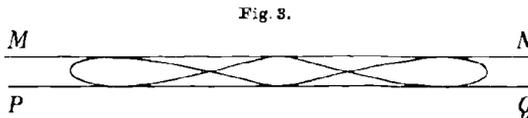
Tschebyscheff nimmt an:

$$\begin{aligned} OA &= r, \\ Oc &= d, \\ AB &= BD = CB = 1 \end{aligned}$$

und giebt die Formeln:

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \sqrt{2 \cos \psi}}{\sin 3\psi}, \\ d &= \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \\ \delta &= \frac{4 \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cdot \cos^5 2\psi}}{\sin 3\psi}, \end{aligned}$$

wo δ (wie schon oben erwähnt) den Abstand zwischen den beiden einander parallelen Geraden MN und PQ vorstellt, zwischen denen



die Koppelkurve läuft. Je kleiner δ ist, um so mehr nähert sich die Trajectorie des Punktes D einer Geraden, welche parallel den beiden Geraden MN und PQ und in gleichem Abstände von denselben verläuft. Die grösste Abweichung von einer Geraden ist $= \frac{\delta}{2}$. Die unabhängige Variable ψ ist gleich dem Winkel $\frac{ABD}{2}$. Die Länge der vom Punkte D beschriebenen Geraden pq und die verhältnismässig geringe Abweichung $\frac{\delta}{2}$ sind aus beifolgender Tabelle zu erschen.

ψ	r	d	pq	δ
44°	0,493	1,345	1,42	0,04959
$44^\circ 50'$	0,190	1,402	0,52	0,00249
$44^\circ 59'$	0,048	1,413	0,13	0,00004

So z. B. ist, bei $AB = BC = BD = 1$ m, $pq = 13$ cm, $\delta = \frac{1}{25}$ mm — eine Abweichung, welche in der Praxis unbeachtet gelassen werden kann.

Die Einfachheit dieses Mechanismus tritt erst recht zu Tage beim Vergleich mit irgend einer anderen Geradföhrung, z. B. mit dem „einfachen“ Watt'schen Parallelogramm (Fig. 4). Um mit Hilfe des Watt'schen Mechanismus eine stetige Rotation in eine geradlinige Bewegung zu transformieren, müssen die drei Glieder des Mechanismus AB , DA , ED noch mit einer Koppel CM und einer Kurbel OM verbunden werden; wir erhalten somit ein fünfgliedriges System, während Tschebyscheff dasselbe Resultat mit Hilfe eines dreigliederigen erzielt.

Je weniger jedoch ein Mechanismus Glieder enthält, desto vollkommener und praktischer ist derselbe.

Diese Einfachheit des Tschebyscheff'schen Mechanismus, welchen ich als den einfachsten Transformator bezeichne, ist von höchst

Fig. 4.

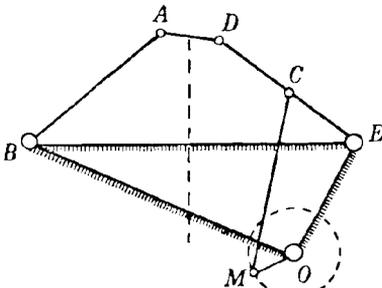
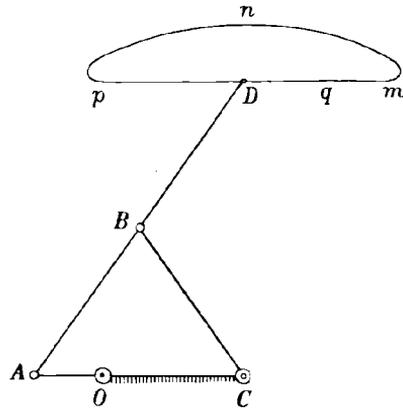


Fig. 5.



wichtiger praktischer Bedeutung, wie das aus der Geschichte der Gelenkmechanismen hervorgeht.

Die Aufmerksamkeit der Gelehrten war durch Watt auf diese Mechanismen gelenkt worden; er hatte die Aufgabe der Geradföhrungen vorgezeichnet. Aber gerade zu gleicher Zeit, als diese Aufgabe (theoretisch genommen) aufs glänzendste durch Peaucellier und Hart gelöst worden war, liessen die Ingenieure immer mehr und mehr von der Föhrung des Kreuzkopfes der Dampfmaschine mit Hilfe der Gelenkmechanismen ab und zogen es vor, zu diesem Zwecke Querhäupter mit Schienenföhrung zu gebrauchen. Es hat sich erwiesen, dass die theoretisch exakten Geradföhrungen, infolge der grossen Zahl der Glieder und Gelenke, viel weniger genau die geradlinige Bewegung des betreffenden Punktes einhalten, als die angenäherten Mechanismen; aber auch die letzteren stehen bezüglich ihrer Einfachheit hinter den Schienenföhrungen zurück.

Sollte es vielleicht dem Tschebyscheff'schen „einfachsten Transformator“, welcher die Konkurrenz mit der Schienenföhrung aushält,

nicht zukommen, den bereits erloschenen Ruhm der geradführenden Gelenkmechanismen von neuem wieder herzustellen?

Ich erachte es nicht als notwendig, hier noch die vielen anderen von Tschebyscheff erfundenen Geradfürungen zu beschreiben; ich möchte aber nur auf eine derselben hinweisen, welche unter anderem Tschebyscheff zur Errichtung der marschierenden Maschine gedient hat. Diese Geradführung* besteht aus den Gliedern OA , AD und BC (Fig. 5) mit festen Centren in O und C . Der Punkt D beschreibt die Kurve $mnpq$, deren ein Teil mqp sehr wenig von einer Geraden abweicht. Diese ganze Kurve ist derjenigen Kurve sehr ähnlich, welche die Fußspitzen eines im Schritt gehenden Menschen beschreiben, die relative Bewegung der Fußspitzen zum ganzen Körper genommen. Der über dem Boden schwebende Fuß beschreibt die Linie mnp , während die Linie pqm in dem Augenblick zurückgelegt wird (hinsichtlich des Körpers), wo der Fuß den Boden berührt. Dieser Eigenschaft hat sich Tschebyscheff bei der Konstruktion seiner marschierenden Karre bedient.

Infolge der geringen Abweichung des Teiles mqp der Koppelkurve von einer Geraden, eignet sich dieser Mechanismus vorzüglich zur Geradführung. Tschebyscheff giebt für dieselben folgende Formeln:

$$Oc = \frac{2AB + AO}{3},$$

$$AB = BD = BC.$$

Der gegenseitige Abstand δ der beiden parallelen Tangenten, zwischen denen sich der Teil mqp befindet, wird durch folgende Formel bestimmt:

$$\delta = \sqrt{\frac{4}{q}(r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^2 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{q}(r-a)(2r+a)},$$

wo

$$a = 2OA$$

$$r = AD.$$

Die Länge des zurückgelegten Weges h lässt sich berechnen durch die Formel:

$$h = \sqrt{\frac{(5r-2a)(r+2a)(4a-r) \cdot r}{(2r+a)^2}}.$$

So z. B. beschreibt der Punkt D bei folgenden maßlichen Verhältnissen des Mechanismus in Centimetern:

$$AB = 64, \quad CO = 50, \quad OA = 22$$

eine Linie von 9 cm, welche von einer Geraden nur um $\frac{7}{100}$ mm abweicht.

* Memoir. der St. Petersburgers kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bd. XIV, S. 45; siehe auch Burmester: Lehrbuch der Kinematik, S 655.

Wenn OA nur ein wenig kleiner als CO ist, so bewegt sich der Punkt D bei gleichmässiger Drehung der Kurbel OA langsam bei der Zurücklegung des Teiles mpq und sehr schnell bei der Zurücklegung des übrigen Teiles der Trajectorie. Die Bewegung ist alsdann eine werfende. Diese Eigenschaft hat Tschebyscheff zur Errichtung einer Windfege benutzt, in welcher ein bei D befestigtes Gefäss das Korn auf eine beträchtliche Entfernung fortschleudert.

II.

Vor Tschebyscheff waren nur drei Gelenkmechanismen bekannt, welche die Rotation transmittierten: 1. das Parallelkurbelgetriebe, 2. das Antiparallelogramm und 3. der Galloway'sche Mechanismus. Von diesen wurde die Zahl der Umdrehungen nur beim letztgenannten verdoppelt.

Tschebyscheff hat uns mehrere sehr interessante Transmissionen der Drehung durch Gelenkmechanismen geliefert.

1. Ein dreigliederiger Reversor. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von einer Geradföhrung nur durch seine maűlichen Verhältnisse. Wenn man nämlich die Maűverhältnisse der Teile OA , OC und AB des Mechanismus (Fig. 5) nach den für den einfachsten Transformator (Fig. 1) gegebenen Formeln bestimmt, so erhalten wir ein System, in welchem bei der Rotation der Kurbel OA der Punkt D eine Koppelkurve beschreibt (Fig. 6); wenn die Kurbel OA sich hierbei in der Richtung eines Uhrzeigers dreht, so beschreibt der Punkt D die erwähnte Kurve in entgegengesetzter Richtung (und umgekehrt). Die ganze Kurve (Fig. 6) kommt zwischen zwei zur selben tangentialen Kreislinien zu liegen, deren Radien gleich R_0 und R_1 sind, so dass die grösste Abweichung der Kurve von einer Kreislinie, deren Radius $\frac{R_0 + R_1}{2}$ ist, $\frac{R_1 - R_0}{2}$ beträgt.

Tschebyscheff gibt für diesen Mechanismus* folgende Formeln:

$$\begin{aligned} OA &= r, \\ AB = BD = BC &= 1, \\ OC &= d, \end{aligned}$$

r und d werden mit Hilfe der Formeln des einfachsten Transformators berechnet und ausserdem:

$$\begin{aligned} \frac{R_0 + R_1}{2} &= \frac{2 \cos \psi \cdot \sin 2 \psi \cdot \sqrt{2 \cos 2 \psi}}{\cos 3 \psi}, \\ \frac{R_1 - R_0}{2} &= \frac{2 \cos 2 \psi}{\sin 3 \psi}. \end{aligned}$$

* Über das einfachste Gliedersystem . . . Memoiren der St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Beilage zu Bd. LX; russisch.

Als Beispiel sei hier folgende Tabelle beigelegt:

ψ	$\frac{R_0 + R_1}{2}$	$\frac{R_1 - R_0}{2}$	r	d
44°	0,519	0,094	0,493	1,345
44° 50'	0,191	0,016	0,190	1,402
44° 59'	0,048	0,008	0,048	1,413

Wenn dieser Mechanismus durch Handbewegung in Gang gesetzt wird, so ist es nicht erforderlich, die möglichst geringe Abweichung der Trajektorie des Punktes D von einer Kreislinie anzustreben, und man kann daher den Griff direct in D befestigen; der Mechanismus wird alsdann die Bewegung der Hand, welche die Koppelkurve (Fig. 1) beschreibt, in die Rotation der Kurbel OA transformieren. Eben

Fig. 6.

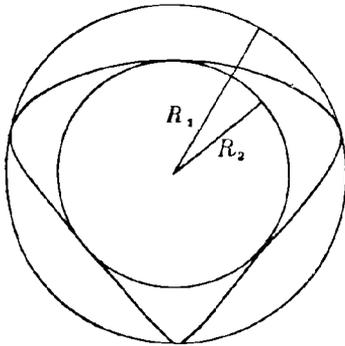
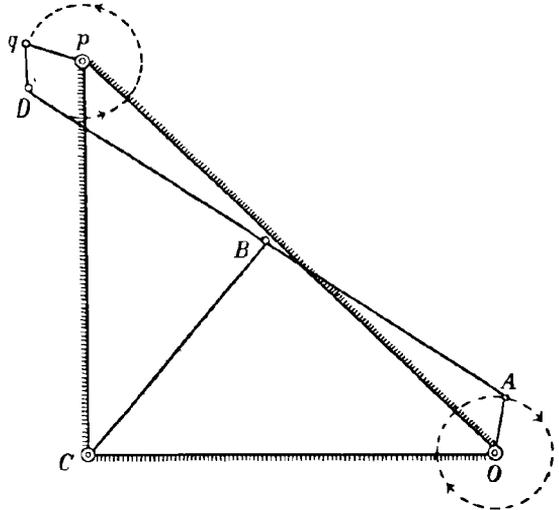


Fig. 7.



diese Transmission hat Tschebyscheff in seinem „Samokat“ (Automobil) angewendet. Bei der Arbeit dieses Mechanismus lässt sich eine interessante Erscheinung beobachten:

Da das Centrum der Trajectorie des Punktes D durch nichts angedeutet ist, so scheint es anfangs schwer, den Mechanismus in Bewegung zu setzen, weil man nicht weiss, in welcher Richtung die Hand zu führen ist. Es genügt jedoch nur das erwähnte Centrum durch irgend ein Abzeichen hervorzuheben, und jede Schwierigkeit in der Handhabung des Mechanismus fällt fort. Diese Erscheinung und die Notwendigkeit eines Abzeichens hat Tschebyscheff selbst bemerkt.

2. Fünfgliedriger Reversor. Zur Umwandlung seines dreigliedrigen Reversors in einen Mechanismus, welcher nicht die Dreh-

ung der Hand, sondern diejenige einer Kurbel in die Rotation einer anderen Kurbel transmittiert, hat Tschebyscheff eine Methode erfunden, welche in vielen Fällen angewandt werden kann und ihrer weitgehenden Bedeutung wegen an und für sich einen wertvollen Beitrag für die Wissenschaft ausmacht. Die Sache ist nämlich die, dass der Punkt D des dreigliedrigen Reversors eine Kurve beschreibt, die sich schliesslich doch von einer Kreislinie unterscheidet, während das Ende q der Kurbel (Fig. 7) eine genaue Kreislinie beschreibt. Wie können dieselben vereinigt werden? Tschebyscheff hat diese Aufgabe äusserst einfach gelöst: er verbindet den Punkt D mit dem Ende der Kurbel q durch ein ergänzendes Glied. Der die Kurve beschreibende Punkt D zieht jetzt (oder stösst) den Punkt q nach sich, welcher eine Kreislinie beschreibt. Die Hinzufügung des ergänzenden Gliedes qD verwischt ausserdem alle Ungenauigkeiten der Konstruktion: sogar bei recht inexakter Ausführung arbeitet der Mechanismus dank dem ergänzenden Gliede vortrefflich.

3. Ein paradoxer Mechanismus. Tschebyscheff hat seinen Mechanismus keine besondere Benennungen gegeben (die hier angeführten Benennungen gehören dem Autor dieser Notiz), aber der Mechanismus, welcher hier beschrieben werden soll, ist wirklich paradox; denn die Zahl der Umdrehungen der Kurbel, auf welche die Rotation übertragen wird, hängt davon ab, bei welcher Lage des ergänzenden Gliedes wir den toten Punkt passieren. Die Konstruktion dieses Mechanismus ist eben dieselbe, wie diejenige des fünfgliedrigen Transformators; er unterscheidet sich von demselben nur dadurch, dass für denselben nach den oben angeführten Formeln nur diejenigen Maße berechnet werden, bei welchen die Abweichung $\frac{R_1 - R_0}{2}$ vom Trajektorium recht bedeutend ist. Dabei erscheint die Wirkung des ergänzenden Gliedes wirklich paradox: der Mechanismus erhält vier tote Punkte; je nach der Lage des ergänzenden Gliedes, bei welcher Dq den toten Punkt verlässt (so dass der Punkt D den Punkt q entweder nach sich zieht oder vor sich stösst) — wird der Mechanismus die Drehung der Kurbel OA auf die Kurbel q entweder in verdoppelter oder vierfachter Zahl der Umdrehungen transmittieren. Zwecks Passierens der toten Punkte wird an der Kurbel pq ein Schwungrad befestigt. Der Mechanismus arbeitet jedoch stossweise.

Tschebyscheff hat keine Beschreibung dieses Mechanismus hinterlassen und ich beschreibe denselben nur nach dem Gedächtnis nach einem Modell, das ich einmal gesehen habe.

Das Bestreben, Gelenkmechanismen mit Vergrösserung der Zahl der Umdrehungen zu erfinden, war bei Tschebyscheff keinswegs zufälliger Art. Das schliesse ich daraus, dass Tschebyscheff mir mit Entzücken von den bemerkenswerten Eigenschaften seines paradoxen Mechanismus erzählte, dass er sich für die in diese Richtung schlagende Arbeiten

interessierte und mir gegenüber einmal folgende bedeutungsvolle Worte äusserte: „Unsere grösste Lehrerin ist die Natur, aber sie bedient sich weder der Zahnräder noch der Scheiben, sondern ausschliesslich der Gelenkmechanismen in der Einrichtung der Bewegungsapparate der Tiere. Freilich sind die Gelenkmechanismen heutzutage noch nicht im Stande mit den Zahnrädern und Scheiben in der Transmission der Rotationen zu konkurrieren; aber auch die ersten Zahnräder waren mal sehr unvollkommene Mechanismen und haben ihre regelrechte Konstruktion erst allmählich erreicht.“

Es sei jedoch bemerkt, dass — wie schon oben erwähnt — vor Tschebyscheff nur ein Gelenk-Gliedermechanismus bekannt war, welcher die Rotation mit Vermehrung (Verdoppelung) der Zahl der Umdrehungen transmittierte; es war der Gallowaysche Mechanismus. Bei Tschebyscheff ist das Bestreben zur Konstruktion solcher Transmissionen jedoch sehr ausgeprägt.

Diese Frage ist in der That von grossem Interesse. Bisher war die Theorie der Gelenkmechanismen nur in einer Richtung entwickelt, welche die Erfindung von Geradfürungen erstrebte. Jetzt jedoch, zu einer Zeit, wo die Frage nach Geradfürungen als erschöpft gelten kann, tritt die Frage der Konstruktion von Gelenkgliedertransmissionen der Umdrehungen in den Vordergrund. Bemerkenswert ist das Vorhandensein eines gewissen Parallelismus in diesen beiden Fragen: es existieren exakte Geradfürungen (Peaucellier, Hart, Bricard) und angenäherte (Watt, Evans, Tschebyscheff); ebenso können auch die Gelenkgliedertransmissionen exakt (das Parallelkurbelgetriebe, der Pantograph) und angenähert (die Mechanismen Galoway's und Tschebyscheff's) sein. Ohne Zweifel bildet die Trägheit der oscillierenden Glieder bei den Gelenktransmissionen einen sehr wesentlichen Mangel. Aber dieser Umstand bildet nicht in allen Fällen ein ernstes Hindernis, und auf jeden Fall haben wir es hier mit einer neuen höchst interessanten Frage zu thun. Wer weiss, zu welchen nützlichen Ergebnissen das Studium derselben noch führen kann.

III.

Indem wir die mathematische Seite der Tschebyscheff'schen Arbeiten über die Gelenkgliedermechanismen betrachten, fällt uns vor allem auf, dass in allen diesen Arbeiten die Tschebyscheff'sche Theorie der am mindesten von der Null abweichenden Funktionen zur Anwendung kommt, welche an und für sich von grossem mathematischen Interesse ist. Da diese Theorie schon fast klassisch geworden ist (Bertand: *Traité de calcul différentiel*), so will ich mich nur mit einer möglichst kurzen Wiedergabe derselben begnügen. In seinem

fundamentalen Memoire* stellt sich Tschebyscheff die Lösung folgender Aufgabe: Es soll ein Polynom:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

bestimmt werden, welcher — ohne aufzuhören, sich innerhalb der gegebenen Grenzen zu vergrössern oder zu verringern —, am mindesten von der Null abweicht. Überhaupt kann man die Aufgabe dieser Theorie in Folgendem zusammenziehen:

Gegeben ist eine $F(x)$, welche n Parameter $p_1, p_2 \dots p_n$ hat; es sollen für diese Parameter solche Werte gefunden werden, bei denen die maximale Abweichung der $F(x)$ von der Null bei den zwischen $+h$ und $-h$ liegenden Werten von x am mindesten ist. Diese Theorie stellt ein sehr scharfes Mittel für die angenäherte Analyse vor und daher eignet sie sich ausgezeichnet zur Berechnung angenäherter Mechanismen.

Das mathematische Interesse der in Rede stehenden Tschebyscheff'schen Arbeiten beschränkt sich nicht nur auf diese Theorie allein: sie liefern auch recht viele interessante Objekte zu geometrischen Studien. Die Forschungen dieses Jahrhunderts haben gezeigt, dass bei den Kurven solche Abweichungen vorkommen, die nur mit Hilfe der Analyse entdeckt werden können und fürs Auge s. z. s. nicht wahrnehmbar sind: solcher Art sind z. B. die Undulationspunkte.

Die Forschungen Tschebyscheff's liefern uns in der Trajektorie des Punktes D , des einfachsten Transformators, ein bemerkenswertes Beispiel einer Kurve sechster Ordnung, von welcher ein ganzer Zweig dem Auge als eine Gerade erscheint; — das scheint jedoch nur so, die Analyse entdeckt vielmehr die höchst komplizierte Form dieses Zweiges, dessen Abweichungen von einer Geraden jedoch äussert gering sind. Dieser Umstand stellt eine ganz neue Thatsache vor, welche (wie mir bekannt) vor Tschebyscheff nicht erforscht worden ist. In den Watt'schen, Evans'schen und anderen Kurven weisen nur einige Zweigteile geringe Abweichung von der Geraden auf. In der Tschebyscheff'schen Kurve unterscheidet sich ein ganzer Zweig dem Augenscheine nach nicht im geringsten von einer Geraden.

Von grossem Interesse sind auch andere Kurven Tschebyscheff's: 1. die Kurve, welche zwischen zwei gegenseitig parallelen Geraden läuft, wobei sie jede derselben dreimal berührt; 2. die zwischen zwei konzentrischen Kreislinien verlaufende Kurve.

Nicht weniger merkwürdig ist der Gesamtcharakter der Tschebyscheff'schen Arbeiten. Tschebyscheff, wenn er auf irgend welche mathematische Frage stiess, suchte auf alle Fälle irgend eine Lösung zu

* Über die am mindesten von der Null abweichenden Funktionen. Beilage zu Bd. XXII der Memoire St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, russisch.

finden, wenn keine exakte, so doch irgend eine angenäherte. Dabei wusste er jedoch seinen angenäherten Lösungen eine solche allgemeine Form zu geben (siehe z.B. die oben angeführten Formeln), welche ganz deutlich das die gegenseitige Abhängigkeit der betreffenden Werte bestimmende Gesetz zu Tage treten lässt.

Die Mathematikerversammlung im Jahre 1900.

Die Französische Mathematische Gesellschaft hat bekanntlich 1897 in Zürich den Auftrag erhalten, alle Vorbereitungen für die Versammlung zu treffen, welche im Jahre 1900 in Paris stattfinden soll. In Erfüllung dieses Auftrages hat die Gesellschaft jetzt schon ein Rundschreiben erlassen, dessen wesentlichen Inhalt wir auf Wunsch hier mitteilen. Die Versammlung soll vom 6. zum 12. August stattfinden, und während dieser Zeit sollen mindestens zwei allgemeine Sitzungen abgehalten werden. Daneben sind Abteilungssitzungen und Besichtigungen wissenschaftlicher Sehenswürdigkeit vorgesehen. Ein gemeinschaftliches Bankett wird alle Mitglieder vereinigen. Ausflüge werden vorbereitet. Jedes Mitglied zahlt frs. 30 und hat dafür Zutritt zu allen Sitzungen und Besichtigungen sowie zum Bankett, erhält auch den gedruckten Bericht über die Versammlung. Familienangehörige können zu einem herabgeminderten, noch festzustellenden Preise an einzelnen Veranstaltungen teilnehmen. Mit Wohnungsbeschaffung für die Mitglieder bedauert das Organisationskomité sich nicht befassen zu können; wohl aber wird es in Anerkennung der grossen Wichtigkeit der Wohnungsfrage noch eine besondere Anweisung darüber erlassen. Alle auf die Versammlung bezüglichen Anfragen und Mitteilungen sind an den Vorsitzenden der Französischen Mathematischen Gesellschaft unter der Aufschrift:

Monsieur le Président de la Société mathématique de France
7 rue des Grands-Augustins
Paris

zu richten. Das Organisationskomité bittet dringend um thunlichst frühzeitige, womöglich schon jetzt nach Paris zu richtende, natürlich noch nicht verpflichtende Anzeige, ob man kommen werde oder nicht. Der Zweck dieser Bitte ist offenbar der, eine Statistik sämtlicher Mathematiker zu erhalten, welche für künftige Versammlungsmaßnahmen zu besitzen von Wichtigkeit ist.

Rezensionen.

G. VERONESE. 1. *Elementi di Geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici (1 biennio) trattati con la collaborazione di PAOLO GAZZANIGA.* VIII u. 392 S. 2. *Appendice agli elementi di geometria.* VIII u. 90 S. Verona u. Padua, 1897 u. 1898. Fratelli, Drucker.

Von den Ergebnissen, mit denen die geometrische Forschung dieses Jahrhunderts uns in so reichem Maße beschenkt hat, sind für die Schule von besonderer Wichtigkeit diejenigen, die uns über die Grundlagen der Geometrie Aufklärung verschafft haben. In Deutschland sind — wohl infolge von Vernachlässigung der Geometrie an den Universitäten — diese Forschungen in den Kreisen der Mathematiker der höheren Schulen immer noch nicht in dem Grade bekannt geworden, in dem sie es verdienen. Schriften auch bekannterer Schulmathematiker noch aus der neuesten Zeit, die sich mit den geometrischen Grundbegriffen und Grundsätzen (Begriff der Geraden, der Ebene, des Abstandes, der Richtung, des Winkels, dem Parallelenaxiom) beschäftigen, können hierfür zum Beweise dienen.

Nun wird es nicht jedem Schulmathematiker möglich sein, bei den Anforderungen, welche die Praxis des Unterrichts an ihn stellt, sich nebenbei noch nachträglich durch die auf den Gegenstand bezüglichen Forschungen eines GAUSS, LOBATSCHESKY, RIEMANN, HELMHOLTZ, BELTRAMI, F. KLEIN, LIE, VERONESE u. a. hindurchzuarbeiten. Wohl aber ist es möglich und durchaus notwendig, dass auch der Mathematiker der höheren Schulen eine logisch-strenge Begründung der Elementargeometrie, die dem heutigen Stande der geometrischen Wissenschaft entspricht, kennen lernt. Er muss beurteilen können, welche der Beweise in den landläufigen Schulbüchern wirklich strenge Beweise sind, muss die Mängel und Lücken in der Begründung kennen; er muss die Schüler der oberen Klassen auf die logische und wissenschaftliche Bedeutung der schwierigeren Punkte des Systems aufmerksam machen können.

Wissenschaftlich strenge Darstellungen der Elemente der Geometrie sind nun allerdings schon vorhanden; es sind dies die „Vorlesungen über neuere Geometrie“ von PASCH und die Schrift: „Sui fondamenti della geometria“ von G. PEANO. Das Studium dieser Schriften wird jedem Mathematiker für Klärung seiner wissenschaftlichen Anschauungen von besonderem Werte sein.

Das erste und bisher einzige Schulbuch, das ein vollständiges, in sich wissenschaftlich allseitig begründetes System der Elementargeometrie

geben will, das in Beziehung auf Strenge der Begründung über die bisherigen Lehrbücher, auch über den meist unerreichten Euklid hinausgeht, verdanken wir dem bekannten italienischen Geometer G. Veronese. Da das Bedürfnis für ein derartiges Werk gerade in Deutschland ein dringendes ist, sei es gestattet, an dieser Stelle auf die hervorragende Veröffentlichung hinzuweisen.

Veronese hat die Ergebnisse seiner Forschungen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen, 1892 in dem umfangreichen Werke „*Fondamenti di Geometria a piu dimensioni*“ im Zusammenhange dargestellt; eine deutsche Übersetzung dieses Werkes erschien 1894 im Verlage von B. G. Teubner. Die vorliegenden Elementi sollen die Resultate seiner Untersuchungen dem praktischen Schulunterricht zu Gute kommen lassen. Eine wertvolle Unterstützung bei der Abfassung der Elemente fand Veronese namentlich in der methodischen Behandlung des Stoffes an P. Gazzaniga, der auch schon in der Lage war, mit der neuen Art der Behandlung der Elemente im Unterricht einen praktischen Versuch zu machen.

Der Stoff, den Veronese in den vorliegenden Elementen behandelt, stimmt dem Umfange nach im wesentlichen mit dem in den Elementen Euklids gebotenen überein; seine Aufgabe sieht der Verfasser in der logisch strengen Ableitung der von den Elementen umfassten Lehren.

Der Entwicklung der geometrischen Lehren legt Veronese 16 Postulate (Axiome) zugrunde. Die Postulate selbst erscheinen als Ergebnisse empirischer Beobachtungen; doch ist dies für ihre weitere logische Verwertung nicht von Bedeutung.

Nicht alle diese Postulate sind für die logische Ableitung der Lehren notwendig. Zwei der Postulate werden als „*postulato pratico*“ bezeichnet; allerdings verdient wohl nur das zweite voll diese Bezeichnung, insofern es für die praktischen Anwendungen der Sätze der Geometrie notwendig ist. Auch die übrigen 14 Postulate sind noch nicht sämtlich für die Entwicklung erforderlich. Dies ist nur der Fall mit den Postulaten I, II, IV, V, VI, VII, X, XI, XII; aus diesen lassen sich die übrigen ableiten. Um aber dem Anfänger die Arbeit zu erleichtern, also aus didaktischen Gründen, sind noch 5 weitere Postulate benutzt worden.

Das ganze Werk gliedert sich in 10 Bücher.

Das erste Buch behandelt als Grundlage des ganzen Systems die Geometrie der Geraden. Für Veronese ist die Gerade die Fundamentalfigur der ganzen Geometrie sowohl für die Konstruktion wie für die Messung der geometrischen Gebilde.

Unter der Voraussetzung, dass es Punkte gibt (Postulat I), und dass es ein lineares System von Punkten (Gerade genannt) gibt, in der es gleiche Segmente (Teile) gibt, in der das Segment AB dem Segment BA gleich ist, in dem von einem Punkte A aus zwei einem beliebigen Segment XY gleiche Segmente AB und AC existieren (Post. II), wird bewiesen, dass eine Gerade keine Knoten hat, und wird das Rechnen mit Segmenten gelehrt. Als gleich bezeichnet der Verfasser zwei Dinge, wenn sie in uns

dieselbe Vorstellung hervorrufen, so dass man in jedem Urteil das eine für das andere setzen kann. Veronese legt Wert darauf, dass seine Definition der Gleichheit nur von der rein logischen Ersetzbarkeit der Merkmale Gebrauch macht; der Begriff der Kongruenz oder gar der der Bewegung liegt dem Begriff der Gleichheit hier nicht zu Grunde.

Weiter setzt der Verf. voraus, dass jedes geradlinige Segment in zwei gleiche Teile zerlegbar ist (Post. III), dass es ausserhalb der Geraden Punkte giebt, und dass es eine einzige Gerade giebt, die zwei gegebene Punkte enthält (Post. IV). Daran schliesst sich die Definition übereinstimmender Figuren (*Figure eguali*). Veronese nennt zwei Figuren übereinstimmend, wenn man zwischen ihren Punkten eine derartige eindeutige in der Anordnung übereinstimmende Beziehung herstellen kann, dass den Segmenten der einen Figur gleiche aus der andern entsprechen. Wie die Erklärung gleicher Segmente einer Geraden ist auch diese Definition übereinstimmender Figuren (*corrispondenza di eguaglianza*) völlig unabhängig von der Beweglichkeit der Figuren gehalten. Auf Grund dieser Erklärung und der angegebenen Postulate wird nun eine Reihe von Eigenschaften übereinstimmender Figuren abgeleitet.

Die weitere Entwicklung benutzt zwei neue Postulate: „In jeder Geraden giebt es ein Segment, das einem beliebigen Segment gleich ist“ (Post. V), und „das Strahlenpaar (ab) mit dem Scheitel O ist dem umgekehrten Strahlenpaar (ba) gleich“ (Post. VI). Auf Grund dieser Postulate wird bewiesen, dass alle Geraden gleich sind, dass ein Strahlenpaar mit dem aus den Verlängerungen über den Scheitel bestehenden Strahlenpaar (gegenüberliegenden Strahlenpaar) übereinstimmend ist. Daran schliesst sich die Betrachtung von Figuren, die in Beziehung auf einen Punkt gegenüberliegen (symmetrisch sind), und im Anschluss daran ergibt sich der Begriff paralleler Geraden. Der Begriff paralleler Geraden ist in dieser Darstellung unabhängig vom Begriff der Ebene, vom Begriff der Richtung und vom Begriff des Unendlichen.

Der Lehre von den Parallelen legt Veronese das Postulat zu Grunde: „Zwei parallele Geraden sind in Bezug auf die Mitte jedes sie verbindenden Segments gegenüberliegend (symmetrisch)“ (Post. VII). Aus diesem Postulat wird gefolgert, dass es durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele giebt, und dass zwei Parallelen keinen Punkt gemeinsam haben.

Darauf folgt das Postulat VIII: „Wenn man von einem Punkte einer Seite eines Dreiecks (oder ihrer Verlängerung) zu einer zweiten die Parallele zieht, so trifft diese die dritte Seite.“ Aus diesem Postulat, das, wie im Anhang gezeigt wird, eigentlich ein beweisbarer Satz ist, wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet, die für die Behandlung der Ebenen von Wichtigkeit sind.

Das zweite Buch bringt nun den bis dahin entbehrlichen Begriff der Ebene. Die Ebene wird mittelst der Strahlen definiert, die durch einen Punkt gehen und eine nicht durch den Punkt gehende Gerade treffen, und des Strahls, der jener Geraden parallel ist. Auf Grund der Definition

werden die Eigenschaften der Ebene (z. B. dass eine Gerade, die mit der Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in ihr liegt, dass eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist) wirklich deduktiv abgeleitet und nicht, wie es bei Euklid und sonst gewöhnlich geschieht, ohne Beweis postuliert.

Nach Erörterung der Beziehungen der Ebene zu den in ihr liegenden Geraden giebt der Verfasser den Begriff des Winkels als eines von zwei Strahlen begrenzten Teiles eines Strahlenbüschels. Daran schliessen sich die einfachsten Sätze über Winkel an demselben Scheitel, an Parallelen, im gleichschenkeligen Dreieck. Ein neuer Paragraph bringt die Bezeichnung Abstand zweier Punkte, die Sätze über Summe und Differenz der Seiten eines Dreiecks, ein weiterer behandelt die Übereinstimmung (Kongruenz) der Dreiecke und Anwendungen dieser Sätze auf Dreiecke und Polygone. Wie die Erklärung der Kongruenz sind auch die Beweise unabhängig von der Beweglichkeit der Figuren.

Die weiteren Paragraphen des zweiten Buches beschäftigen sich mit dem Kreise. Zur Erledigung der den Kreis betreffenden Fragen setzt Veronese noch das Postulat IX voraus: „Wenn die Entfernungen eines Punktes P von den Enden A und B eines geradlinigen Segments oder eines Kreisbogens (AB) a und b sind und $a < b$ ist, so giebt es in (AB) wenigstens einen Punkt X derart, dass PX einem gegebenen Segment c , das der Grösse nach zwischen a und b liegt, gleich ist.“ Den Schluss des zweiten Buches bilden die planimetrischen Fundamentalaufgaben.

Das dritte Buch behandelt die entsprechenden Fragen im Raume von drei Dimensionen. An die Spitze der Untersuchung gestellt ist das Postulat X: „Es giebt Punkte ausserhalb der Ebene“ und das erste s. g. praktische Postulat, durch das die Betrachtung auf drei Dimensionen beschränkt wird: „Jede Gerade, die durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene geht, trifft entweder die Ebene in einem Punkte oder ist einer Geraden der Ebene parallel.“ Hieraus werden alle die Eigenschaften über die Lagenbeziehungen von Geraden, Ebenen, ebenflächigen (Flächenwinkel, Ecken, Polyeder) und krummflächigen (Kegel, Cylinder, Kugel) Gebilden abgeleitet, die man auch sonst wohl findet. Nur ist der Stoff hier mehr gesichtet als in den landläufigen Lehrbüchern. Auch tritt hier das Gemeinsame der Eigenschaften der Geraden, des Geradenbüschels, des Parallelenbüschels, des Kreisbogens, des Ebenenbüschels einerseits, der Ebene und des Strahlenbündels andererseits klarer als sonst zu Tage. Von den zwischen den verschiedenen Gebilden bestehenden Analogien hat der Verfasser hier vielfach Nutzen gezogen; ein blosser Hinweis auf die Eigenschaften der Geraden und der Ebene erledigt die entsprechenden Fragen bei den übrigen Gebilden.

Das vierte Buch behandelt eine Reihe von Eigenschaften, die in den meisten Lehrbüchern nur eine sehr unvollkommene Berücksichtigung erfahren. Nach Ableitung einiger weiterer Eigenschaften übereinstimmender Figuren (eindeutige Bestimmung) folgt ein Paragraph, in dem für die verschiedenen Gebilde festgestellt wird, was man unter dem Sinn der Figur versteht,

wann sie gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. Hieran schliessen sich jetzt erst die Begriffe der Kongruenz und der Symmetrie in der hergebrachten Bedeutung und daran dann auch die Bewegung der Figuren unter Benutzung des zweiten praktischen Postulats: „Eine Figur kann sich frei in der Geraden, in der Ebene und im Raume bewegen und dabei sich selbst kongruent bleiben, auch wenn einige Punkte von ihr festbleiben.“

Das fünfte Buch behandelt die Äquivalenz (Flächen- und Volumengleichheit) ebener und räumlicher Figuren. Die Betrachtungen stützen sich auf folgende vier Postulate: „Wenn ein beliebiges Segment XX^1 der Geraden im entgegengesetzten Sinne bewegliche Endpunkte besitzt, so enthält es wenigstens einen von den Endpunkten verschiedenen Punkt“ (Post. XI), „Sind zwei verschiedene Segmente der Geraden gegeben, so giebt es immer ein Vielfaches des kleineren, welches grösser ist als das grössere“ (Post. XII, Post. des Archimedes), „Es ist nicht möglich, ein Polygon (Polyeder) so in Teile zu teilen, dass nach Weglassung einzelner die übrigen Teile, anders zusammengesetzt, ein gleiche (äquivalente) Figur bilden“ (Post. XIII u. XIV). Die Postulate XIII und XIV sind nicht notwendige, sie werden dementsprechend in dem beigegebenen Anhange bewiesen.

Die Entwicklungen unterscheiden sich wieder durchaus von denen, die man sonst in der Lehre von den gleichen Figuren findet. Das Buch beginnt mit der Ableitung des Begriffs der Stetigkeit der Geraden. Zur vollen Erledigung der zugehörigen Fragen führt der Verfasser die Begriffe unendlich kleiner und unendlich grosser Segmente, den Begriff des Grenzpunktes ein. Dann wird erklärt, was man unter geometrischer Grösse versteht, was Summe zweier Polygone oder Polyeder ist, was im Gegensatz zur Gestalt der geometrischen Figur unter intensiver Grösse der Figur, unter Abstand, Winkel, Fläche, Volumen als intensiver Grösse zu verstehen ist. Äquivalent werden zwei Figuren genannt, wenn sie Summen gleicher Teile sind. Allein auf Grund dieser Begriffe werden die Sätze über Gleichheit der ebenen und räumlichen Figuren abgeleitet. Nicht werden etwa Sätze der Arithmetik auf Flächenstücke angewandt, ohne erst nach einem vielfach geübten Verfahren die Berechtigung hierzu zu untersuchen; z. B. verlangt und findet hier der scheinbar selbstverständliche Satz: „Zwei Figuren, die derselben dritten äquivalent sind, sind unter einander äquivalent“, einen Beweis.

Das sechste Buch enthält die Lehren von der Proportionalität und Ähnlichkeit. Zu Grunde liegt diesem ganzen Abschnitt der Begriff des linearen Systems von Grössen. Ein lineares homogenes stetiges System von Grössen ist eine Gruppe von Grössen, die eindeutig auf die Segmente einer Geraden bezogen werden können. Sind zwei homogene Grössen gegeben, so lässt sich beweisen, dass sich die eine aus der andern durch eine endliche oder unendliche Zahl geometrischer Teilungen oder Vervielfachungen ableiten lässt. Nach diesem Beweise folgt die Erklärung proportionaler Grössen: „Wenn vier Grössen A und B , C und D so beschaffen sind, dass sich die erste aus der zweiten durch dieselbe Operation (dieselben Teilungen

und Vervielfachungen) ableiten lässt wie die dritte aus der vierten, so sagt man, dass sich die erste zur zweiten verhält wie die dritte zur vierten.“ An diese Erklärung schliessen sich dann alle die bekannten Sätze über Proportionalität und Ähnlichkeit ebener und räumlicher Figuren.

Das siebente Buch behandelt die Konstruktion regulärer Polygone und Polyeder, das achte Buch giebt unter Benutzung des Begriffs des Unendlichkleinen und des Grenzbegriffs die Sätze über die Verhältnisse von Umfang und Inhalt des Kreises, von der Oberfläche und dem Rauminhalt des Cylinders, des Kegels und der Kugel.

Das neunte Buch endlich bringt die Ausrechnung des Flächen- und Rauminhaltes der geometrischen Grössen und die Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Alle früheren Entwicklungen in dem vorliegenden Werke haben es mit rein geometrischen Operationen zu thun, sie sind von algebraischen Begriffsbildungen durchaus unabhängig.

Dem eigentlichen Lehrgange folgt noch eine wertvolle Sammlung von 307 Übungsaufgaben. Auch diese haben zum grossen Teil selbständiges Gepräge und weichen vielfach vom Herkömmlichen ab; die stereometrischen Aufgaben sind auch nicht, wie man es bei uns leider immer noch findet, nur Rechenaufgaben.

Das Vorstehende soll eine ungefähre Übersicht über den Inhalt der Elemente der Geometrie von Veronese geben. Zu den Elementen hat der Verfasser ein Jahr später noch einen Anhang erscheinen lassen. In diesem giebt er für die Lehrer nähere Erläuterungen über einzelne wichtige Grundbegriffe und über die benutzten Postulate, beweist die nur aus didaktischen Gründen zugelassenen Postulate, welche Folgerungen anderer Postulate sind, und giebt zum Schluss noch einzelne Vereinfachungen des Lehrganges an.

Die Frage, ob die Elemente von Veronese sich für den praktischen Unterricht in den höheren Schulen eignen, soll hier nicht eingehender erörtert werden. Versuche, die in Italien mit dem neuen Lehrgange gemacht wurden, sind günstig ausgefallen. So manche Abweichung vom Hergebrachten, die uns zunächst fremdartig anmutet, macht den Schülern, die ohne Vorurteil an die Sache herantreten, vielleicht weniger Schwierigkeiten, als wir glauben. Für Anfänger schwierig ist nach Ansicht des Berichterstatters z. B. die rein abstrakte Definition der Gleichheit, ebenso auch die Hineinziehung des Begriffes des Unendlichkleinen in den Unterricht. Indes ein volles Urteil über die didaktische Frage kann niemand fällen, der nicht selbst dahingehende unparteiische Versuche angestellt hat. Diese sind bei uns in Deutschland vorläufig wohl überall ausgeschlossen.

Notwendig scheint zunächst, dass jeder Lehrer der Mathematik sich diejenige Klärung der Anschauungen verschafft, welche die neueren geometrischen Forschungen ermöglichen, dass er sich mit einem wirklich logisch unanfechtbaren Aufbau der Elementargeometrie bekannt macht, um ein wirkliches Urteil in Fragen der Elementarmathematik zu gewinnen. Für diesen Zweck können neben den erwähnten Schriften von Pasch und Peano die vorliegenden Elemente von Veronese sowie der dazu gehörige Anhang

von grossem Werte sein; allerdings soll doch auch nicht unerwähnt bleiben, dass einzelne Ansichten des Verfassers, z. B. die Ansichten über die infiniti actuali, den Widerspruch namhafter Geometer gefunden haben.

Von den „Fondamenti di Geometria“ ist eine deutsche Übersetzung erschienen. Bei der Bedeutung der Elementi vor anderen gleichartigen Werken wäre ihre Übertragung ins Deutsche ebenfalls wünschenswert. Aber auch im Original sei das Werk den Fachgenossen angelegentlichst empfohlen.

H. THIEME.

L'enseignement mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C. A. LAISANT, Docteur ès sciences, Répétiteur à l'École polytechnique de Paris, H. FEHR, Privat-docent à l'Université de Genève, Professeur au Collège et à l'École professionnelle. Paris 1899. G. Carré et C. Naud.

Die deutsche Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht hat unter Leitung von J. C. V. Hoffmann ihren 30. Jahrgang begonnen. Ob ähnliche Zeitschriften in anderen Ländern erscheinen, bezweifeln wir. Jedenfalls gab es bis jetzt keine Zeitschrift für vergleichenden mathematischen Unterricht, und diese Lücke beabsichtigen die Herren Laisant und Fehr auszufüllen. Sie haben sich zu diesem Zwecke mit 20 Mathematikern aus Amerika, Belgien, Dänemark, Deutschland, England, Frankreich, Griechenland, Holland, Italien, Österreich, Portugal, Russland, Schweden, Schweiz, Spanien in Verbindung gesetzt, welche ihr Interesse für das neue Unternehmen dadurch kundgaben, dass sie gestatteten, ihre weithin bekannten Namen als zu einem Befürwortungscomité vereinigt zu veröffentlichen. Unter Berufung auf diese moralische Unterstützung ihrer Bestrebungen haben die beiden Herausgeber das erste Heft der neuen Zeitschrift der Öffentlichkeit übergeben und zwar in französischer Sprache. Man konnte auch die Vielsprachigkeit zum Grundsatz erheben, und der internationale Charakter der Zeitschrift wäre dadurch, wie die Herausgeber selbst betonen, schärfer äusserlich hervorgetreten. Gleichwohl haben sie es vorgezogen, die Einheit der Sprache obwalten zu lassen, um die Freiheit von Druckfehlern nach Möglichkeit zu sichern, dann auch um in Frankreich einen um so grösseren Leserkreis zu werben, da der buchhändlerische Erfolg einer Zeitschrift doch wohl zumeist in dem Lande ihres Erscheinens zu suchen sein wird. Wie wir den Herausgebern gern gestattet haben, unseren Namen in jenes Comité der Freunde, wie man es auch wohl nennen könnte, aufzunehmen, so wünschen wir hiermit öffentlich dem Unternehmen allen Erfolg. Der Unterricht in den mathematischen Wissenschaften und mit ihm die Mathematik selbst kann nur gewinnen, wenn, was in dem einen Lande daran zu loben oder zu tadeln ist, auch in anderen Ländern bekannt wird.

CANTOR.

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Herausgegeben von Dr. FERDINAND RUDIO, Prof. am Eidgenössischen Polytechnikum. Mit einem farbigen Titelbild und sechs in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1898. B. G. Teubner. VIII, 306 S.

Nicht weniger als 208 Mathematiker aus allen Ländern sind im August 1897 in Zürich zusammengetroffen und haben dort drei sicherlich jedem Teilnehmer unvergessliche Tage heiteren und doch auch wieder wissenschaftlich fruchtbaren Zusammenseins verbracht. Den Veranstaltern der Versammlung, in diesem Falle den Züricher Kollegen, blieb dann noch die niemals geringe Mühe der Herausgabe der Verhandlungen. Ein hübscher Band liegt gegenwärtig vor uns, und wie das Lesen desselben unsere Erinnerung in angenehmer Weise auffrischte, wird es auch solche Fachgenossen, die nicht in Zürich waren, erfreuen können. War doch die Zahl der Vorträge eine sehr ansehnliche, und wenn auch, wie bei jeder Versammlung, manche Auseinandersetzung nur für wenige Interessenten berechnet war, so gab es dafür weit zahlreichere, unter welche insbesondere die Berichte über den gegenwärtigen Zustand gewisser Kapitel gehören, die jeden Mathematiker fesseln dürften.

CANTOR.

Zur Definition der Konvergenz der unendlichen Reihen und der unendlichen Produkte. Mehrfache Grenzgleichungen. Grenzgleichungen periodischer Reihen. Von Dr. ERNST SCHIMPF. Beilage zu dem Jahresbericht des städtischen Gymnasiums zu Bochum. (Programm Nr. 364.) Bochum 1898. 30 S.

Wir haben in Band XLII, historisch-litterarische Abteilung, Seite 37—38 das 1895er Programm des Verfassers angezeigt, dessen Fortsetzung das 1898er Programm bildet. Nach dem Vorgang von Rob. Grassmann und O. Stolz bedient sich Herr Schimpf eines kleinen Kreises \circ als Verknüpfungszeichen, mittels dessen er aus den Grössen $a_0, a_1, \dots, a_k \dots$ ein endliches oder unendliches Gebilde f herstellt. Ihm ist also

$$f_k = a_0 \circ a_1 \circ \dots \circ a_k$$

$$f_\infty = a_0 \circ a_1 \circ \dots \circ a_k \circ \dots$$

Rest r nennt er die Glieder, welche die Entwicklung f_k zur Entwicklung f_{k+1}

f_{k+v} ausdehnen, oder

$$r = a_{k+1} \circ a_{k+2} \circ \dots \circ a_{k+v}$$

und

$$f_k \circ r = f_\infty.$$

Man sieht, dass durch diese ganz allgemeinen, von der Art der Verknüpfung unabhängigen Betrachtungen die Definition der Konvergenz sich wesentlich erweitert und nur auf das Vorhandensein oder Nichtvorhanden-

sein einer wertverändernden Wirkung des Restes hinausläuft. Herr Schimpf bedient sich bei dieser Untersuchung einer Hilfsfolge von Grössen $a_0, a_1, a_2 \dots$ welche die Eigenschaft besitzt, dass, wenn in dem Reste jedes a durch das gleich indizierte a ersetzt wird und r dadurch in r übergeht, eine wertverändernde Wirkung von r überhaupt nicht stattfindet. Den Begriff der Grenzgleichungen hat Herr Schimpf schon 1895 aufgestellt. Er zeigt gegenwärtig, wie dieselben für gewisse Reihen gebildet werden können. Er dehnt endlich die gleichen Betrachtungen auf periodische Reihen aus.

CANTOR.

Mélanges mathématiques (1883—1898) par PAUL MANSION, Professeur ordinaire à l'université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique et de la Société royale des Sciences de Bohême, Correspondant de la Société royale des Sciences de Liège, de la Société mathématique d'Amsterdam et de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne. Paris 1898. Gauthier-Villars. 213 p.

Das uns vorliegende Bändchen enthält die kleineren und grösseren Abhandlungen, welche der Verfasser innerhalb eines Zeitraumes von 15 Jahren veröffentlicht hat, und welche jetzt vereinigt erscheinen. Ein nach dem Inhalte geordnetes zu Anfang abgedrucktes Verzeichnis gestattet, die Reichhaltigkeit der Gebiete zu überschauen, auf welchen Herr Mansion thätig gewesen ist. Geschichte bildet eine erste Gruppe. Algebraische und höhere Analysis, Mechanik, Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden eine zweite Gruppe. Eine dritte Gruppe ist der euklidischen und der nichteuklidischen Gruppe gewidmet. Es will uns fast scheinen, als seien in dieser letzten Gruppe des Verfassers Lieblingskinder zu finden.

CANTOR.

Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung, verfasst von Dr. ARWED FUHRMANN, ordentl. Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden. Erste Hälfte (S. 1—180) mit 73 Holzschnitten. Teil III, 1 der Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Berlin 1898. Wilh. Ernst & Sohn.

Das I. Heft dieser Aufgabensammlung erschien 1888, das II. 1890. Wir haben jenes in Band XXXIV, hist. litter. Abteilung S. 195—196, dieses in Bd. XXXVI, hist. litter. Abteilung S. 155—156 angezeigt. Nach längerer Pause liegt das III. Heft vor.

Die Fortsetzung der Fuhrmannschen Übungsbeispiele leistet das Gleiche, was dem Anfange nachgerühmt werden durfte. Man wird dort eine ganze Fülle von Aufgaben finden, welche, dem praktischen Leben entnommen, den Lehrern dazu dienen können, ihren Vorlesungen erhöhtes Interesse zu verleihen, welche von den Studierenden andererseits gern gerechnet werden. Wenn wir eine Ausstellung zu machen hätten, so wäre es gegen den Titel. Gleich von Anfang an begegnet man so vielen Dingen aus der Feldmessenkunst, dass es richtiger gewesen wäre, feldmessenrische und bauwissenschaftliche Anwendungen als nur die letzteren allein anzukündigen. CANTOR.

Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen von Dr. H. DÖLP, weiland Professor am Polytechnikum zu Darmstadt. 7. Auflage neu bearbeitet von Dr. EUGEN NETTO, Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. Giessen 1898. J. Ricker. 216 S.

Der in Band XLI histor.-litter. Abteilung S. 32 angezeigten 6. Auflage von 1895 ist innerhalb 3 Jahren abermals eine neue Auflage gefolgt, bei welcher Herr Netto das frühere Inkognito aufgegeben und sich als neuen Bearbeiter genannt hat. Galt es in der 6. Auflage, die nicht seltenen Druckfehler der früheren Auflagen zu beseitigen, so hat Herr Netto in der 7. Auflage sein Augenmerk wesentlich auf die theoretischen Erläuterungen gerichtet, welche er sich bemüht hat strenger zu fassen, ohne sie an ihrer bekannten Klarheit und Leichtverständlichkeit einbüßen zu lassen.

CANTOR.

W. FR. MEYER. **Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs.** Traduit et annoté par H. FEHR, Privat-Dozent à l'Université de Genève. Avec une préface de MAURICE d'OCAGNE, professeur à l'école des ponts et chaussées, répétiteur à l'école polytechnique. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils. X, 126 p.

Die letzten Jahrgänge dieser Zeitschrift boten wiederholt die Gelegenheit zur Anzeige französischer Übersetzungen deutscher mathematischer Schriften. Herr Laugel hat es insbesondere zu seiner Aufgabe gemacht, unter seinen weniger als er selbst der deutschen Sprache kundigen Landsleuten die Kenntnis solcher Schriften zu verbreiten, welche als klassisch zu gelten haben. Heute ist Herr Fehr als weiterer Gehilfe auf diesem Arbeitsfelde erschienen und hat den Bericht, welchen Herrn Franz W. Meyer 1892 für den I. Band der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung über die Invariantentheorie verfasste, unter Mitwirkung von Herrn Meyer selbst französisch bearbeitet. Manches erscheint dabei gekürzt, dagegen ist die Berücksichtigung der neueren Litteratur seit 1892 eine willkommene Ergänzung. Die Hinzufügung eines alphabetisch geordneten Namensregisters erscheint als eine nicht minder angenehme Vermehrung.

CANTOR.

MARCO NASSO. **Algebra elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici** (I^o Biennio) secondo i programmi governativi. Con copiose note storiche, molti consigli pratici per indirizzare l'alunno alla risoluzione degli esercizi, più di 2000 esercizi e problemi graduati da risolvere e circa 400 esercizi e problemi minutamente risolti. Torino 1898. Libreria Salesiana. 426 p.

Die neueste mathematische Litteratur der Italiener zeichnet sich vielfach durch Anwendung wissenschaftlicher Strenge, auch auf solchen Gebieten aus, auf welchen man anderswo nicht gar so ängstlich zu verfahren liebt. Diese Kennzeichnung gilt wieder für das uns vorliegende Lehrbuch der elementaren

Algebra. Es überschreitet nirgends die Grenzen elementaren Wissens, es umfasst kaum mehr als auf deutschen Mittelschulen etwa gelehrt zu werden pflegt, aber es lehrt diesen eingeschränkten Stoff so, dass der Schüler beim Weitergehen nicht nötig hat, das früher Erworbene beiseite zu werfen oder es in einer Weise zu ergänzen, dass man jenes früher Erworbene nicht wiederzuerkennen vermag. Wir müssten zu viele Einzelheiten anführen, wenn wir dieses unser beistimmendes Urteil genauer begründen wollten. Wir ziehen vor, auf das Buch selbst zu verweisen, dem wir auch unter deutschen Mathematikern zahlreiche Leser wünschen. Die Einführung des Grenzbegriffes z. B. und der mit seiner Hilfe hergeleiteten Irrationalzahl kann, wie sie den Schüler bei den Anfangsgründen sicher leitet, ihm nicht minder als Einleitung in die allgemeinste Mannigfaltigkeitslehre dienen. Aus einem anderen Abschnitte nennen wir die Gleichungen zwischen Irrationalitäten. H. Nasso versäumt nicht zu beweisen, dass die Wurzeln dieser Gleichungen unter den Wurzeln der rational gemachten Gleichung sich befinden müssen, er versäumt ebensowenig zu zeigen, dass wenn $A = B$ die Folgerung $A^m = B^m$ oder $A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1}) = 0$ nach sich zieht, letztere Gleichung auch durch solche der ursprünglichen Gleichung fremde Wurzeln erfüllt wird, welche $A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1} = 0$ zu Stande bringen. Wir empfehlen nochmals aufs wärmste das Buch unseres italienischen Fachgenossen, welches auf uns persönlich auch durch die zahlreichen eingestreuten geschichtlichen Angaben einen angenehmen Eindruck machte.

CANROR.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. Von Dr. HERMANN SCHUBERT.
Leipzig 1898. G. J. Göschen. 128 S.

Wir haben im XLIII. Bande (1898) dieser Zeitschrift histor.-litter. Abteilung S. 55—56 fünfstellige Tafeln und Gegentafeln von H. Schubert angezeigt, welche bei B. G. Teubner erschienen sind. Dem umfangreicheren Buche hat der gleiche Verfasser in der Sammlung Göschen ein kleineres folgen lassen, welches von ersterem in zwei Beziehungen abweicht. Erstens sind fortwährend zwei Farben in Gebrauch, die rote für die Logarithmen, die schwarze für die Zahlen und für die Winkel, welche den Logarithmen trigonometrischer Funktionen entsprechen. Zweitens begnügt sich die neue Veröffentlichung mit nur vier Dezimalstellen.

CANTOR.

R. NIEMEYER. **Die Zahlenkunst.** 1. Teil. Das Zählen (68 S. Dortmund 1897).
2. Teil. Das Rechnen mit ganzen Zahlen (74 S. Dortmund 1898).
Selbstverlag des Verfassers.

Die Zahlenkunde, deren beide erste Hefte uns vorliegen, während ein drittes Heft über den Bruch noch in Aussicht steht, hat Herrn Pastor Niemeyer in Peckelaheim in Westfalen zum Verfasser, welcher, wie eine Vorbemerkung zum ersten Hefte uns belehrt, „an der kleinen Volksschule

seiner Gemeinde den Unterricht (vermutlich den Rechenunterricht?) erteilt, also in der Praxis steht“. Wer dieser Erklärung entnehmen zu sollen glaubte, der Verfasser mache uns mit neuen Methoden des Rechenunterrichtes bekannt, würde sich sehr täuschen. Der Inhalt der beiden Hefte lässt sich vielmehr kurz dadurch schildern, dass wir sagen, das erste Heft handle von den Zahlwörtern, das zweite von den Zahlzeichen der verschiedensten Völker. Referent hat selbst wiederholt über diese Dinge geschrieben, ist also gewiss weit entfernt davon, ihnen die Wissenswürdigkeit abzusprechen; ihren Nutzen für die Volksschule vermag er indessen nicht einzusehen. Herr Niemeyer bediente sich bei seiner Zusammenstellung teils unserer Schriften und der Quellen, von welchen wir Gebrauch machten, teils anderer Vorarbeiten, die uns fremd geblieben waren. Überdies sucht er, und das dürfte ihm eigentümlich sein, philosophisch zu begründen, warum dieses Volk so, jenes Volk so verfuhr, um seine Wörter und Zeichen zu bilden. Bemerkungen über unbestimmte Vielheiten und dergleichen sind vielfach eingestreut. Ein Druckfehlerverzeichnis wäre wünschenswert.

CANTOR.

Gemini Elementa astronomiae ad codicum fidem recensuit, germanica interpretatione et commentariis instruxit CAROLUS MANITIUS. Leipzig 1898.
B. G. Teubner. XLIV und 369 S.

Fast alle Schriftsteller, welche sich in neuerer Zeit mit der Frage nach dem Zeitalter des Geminus von Rhodos beschäftigt haben, sind zu dem übereinstimmenden Ergebnisse gelangt, dieser Verfasser einer Einleitung in die Astronomie habe eine Schrift um das Jahr 75 vorchristlicher Zeitrechnung niedergeschrieben, die Ansicht, als ob jene Einleitung rund 60 Jahre älter sei, sei irrig, und auch die Meinung, man müsse Geminus noch weitere 35 Jahre herabrücken, so dass er ein Altersgenosse des Strabon gewesen sei, habe nicht viel Bestechendes. Ferner herrscht ziemliche Einstimmigkeit darüber, der Astronom Geminus sei es auch gewesen, der ein mathematisch-philosophisches, an geschichtlichen Bemerkungen reiches Werk verfasste, das von Proklos häufig benutzt worden ist. Über die Einleitung in die Astronomie, ihre Entstehung und ihr Verhältnis zu dem, was uns als Gemini *Elementa astronomiae* (*Γεμίνου εισαγωγή εις τὰ φαινόμενα*) vorliegt, gehen dagegen die Meinungen weit auseinander. Die von Herrn Manitius aufgestellte neueste Vermutung, über welche wir allein berichten, indem wir voraussetzen, dass unsere Leser mit den älteren Ansichten bekannt sein dürften oder dieselben anderwärts leicht kennen lernen können, ist folgende: Posidonius von Rhodos (135—51) hat ein Werk über die Naturerscheinungen verfasst. Dazu hat Geminus einen grossen Kommentar geschrieben, in welchen er auch vieles hineinverarbeitete, was er aus Schriften alexandrinischer Fachastronomen entnahm. Dann hat wieder Geminus einen Auszug aus seinem eigenen Kommentar, eine Epitome desselben, gefertigt, und aus dieser Epitome endlich hat im IV. oder gar erst im V. Jahrhunderte ein vielleicht in Konstantinopel lebender „Kompendienschreiber mit sehr mangelhaftem Ver-

ständniß für Astronomie einen Auszug für Schulzwecke veranstaltet, den er sowohl aus anderen Quellen, als auch gelegentlich durch eigene Zuthaten ergänzte, wodurch manches Minderwertige und Verkehrte in das übrige praktische Büchlein hineingetragen worden ist.“ Wir müssen ein Urteil über diese Annahmen solchen Persönlichkeiten überlassen, welche mehr als wir von Astronomie verstehen. Jedenfalls schliesst, wie Herr Manitius selbst im IV. Kapitel der Vorrede berichtet, während unsere seitherigen Angaben dem Anhang entnommen waren, die Geschichte der Eisagoge mit der Niederschrift durch den erwähnten Kompendschreiber nicht ab. Vier Kapitel (Kap. IV, V, XV, III) wurden wörtlich übernommen und aus ihnen *Πρόκλου Σφαιρα*, die sogenannte Sphärik des Proklos, gebildet, eine Eigentumsentfremdung, an welcher Proklos selbst unschuldig sein dürfte. Herr Manitius hat die Eisagoge unter Benutzung fast aller vorhandenen Handschriften neu herausgegeben und hat, wofür Mathematiker und Astronomen ihm besonders dankbar sein werden, eine deutsche Übersetzung und deutsche Anmerkungen hinzugefügt. Auch sind zwei Fragmente der ursprünglichen Epitome des Geminus abgedruckt und zwei Proben einer mittelalterlichen, mutmaßlich von Gerhard von Cremona herrührenden lateinischen Übersetzung der Eisagoge.

CANTOR.

Keplers Traum von Monde. Von LUDWIG GÜNTHER. Mit dem Bildnis Keplers, dem Faksimile-Titel der Originalausgabe, 24 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Leipzig 1898. Bei B. G. Teubner. XXII u. 185 S.

Etwa im Jahre 1593 ersann, 1609 verfasste Kepler seinen Traum vom Monde, 20 Jahre später, 1629, legte er die letzte Hand an Anmerkungen, welche zur Erläuterung der so ganz eigenartigen Schrift bestimmt waren. Ende 1630 starb Kepler und endlich 1634 erschien der Traum im Drucke. Erst die letzten 20 Jahre unseres Jahrhunderts haben die ganze wissenschaftliche Bedeutung jener Schrift erkennen lassen, welche weit mehr ist als ein bloss phantastisches Gebilde, und nachdem insbesondere S. Günther auf die darin auseinandergesetzte Lehre eines kosmischen Magnetismus hingewiesen, stellte sich Herr Ludwig Günther die Aufgabe, Keplers Traum und Anmerkungen zu demselben ins Deutsche zu übertragen und mit neuen reichhaltigen Erläuterungen zu versehen. Es lohnt, diese Übersetzung, diese Erklärungen zu lesen, denn vielleicht in keinem Werke Keplers erkennt man deutlicher als in diesem Traum vom Monde die Genialität des Mannes, der, auch wo er unrichtige Meinungen seiner Zeit wie die von dem Vorhandensein einer der Erdatmosphäre vergleichbaren Mondatmosphäre teilte, mit prophetischem Auge über die Kluft hinüberblickte, welche ihn von dem heutigen Standpunkte trennte, und der bereits ahnte, was zu wissen ihm noch nicht gegeben war. Wir nennen unter diesen Ahnungen die verschwindende Kleinheit des Durchmesser der Erdbahn gegenüber der Entfernung der Erde von einem Fixsterne, Versuche zur Kenntnis der Wärmewirkung der Mondstrahlen, Einsicht in das Anpassungsvermögen der Erdgeschöpfe an ihre Umgebung.

CANOTR.

Kepler als Geograph. Eine historisch-geographische Abhandlung von RUDOLF PIXIS. München 1899. Bei Theodor Ackermann. VII, 142 S. (Sechstes Stück der Münchener geographischen Studien herausgegeben von Siegmund Günther.)

Der Titel deckt sich nur in sehr geringem Maße mit dem Inhalte. Kepler war alles andere mehr als Geograph, und so würde die Abhandlung, wenn wirklich ausschliesslich Geographisches in ihr hätte behandelt werden wollen, sich auf wenige und kurze Erörterungen beschränken müssen. Herr Pixis hat es vorgezogen, in seiner Darstellung über den vielleicht durch den Ort der Veröffentlichung begründeten Titel hinauszugehen und eine interessante Studie zu verfassen, welche unter vielem anderen auch einige Ansichten Keplers über Meeresströmungen, über Gefällverhältnisse der Flüsse, über die Wahl des Anfangsmeridians auf der Erde berücksichtigt. Daneben kommen die meteorologischen Ansichten Keplers, Optisches, Magnetisches, Selenographisches u. s. w. zur Rede. Manches ist überholt, seitdem Keplers Traum, auf welchen Herr Pixis vielfach eingeht, durch Herrn Ludwig Günther zu grösserer Verbreitung gelangt ist, aber manches übt auf den heutigen Leser, der Keplers Gesamtwerke nicht selbstständig durchforscht hat, den Reiz der Neuheit. Keplers Phantasien waren immer die einer hochentwickelten Genialität, auch wo sie sich nicht bewährten.

CANTOR.

Valentin Mennher und Antich Rocha. 1550—65. Ein Beitrag zur Geschichte der Buchhaltung von CARL PETER KHEIL. (Sonder-Abdruck aus der Zeitschrift für Buchhaltung.) Prag 1898. Bursik & Kohout. 56 S.

Die kleine aber wertvolle Einzeluntersuchung lässt sich als Fortsetzung der Schrift des gleichen Verfassers: Über einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungs-Traktates von Luca Pasioli (Prag 1896) bezeichnen, welche wir Band XLII histor.-litter. Abteilung S. 46 angekündigt haben. Herr Kheil verfolgt die Schriften über die Buchführung um 20 Jahre über Jan Ympyn hinaus und zeigt uns in dem aus Kempten nach Antwerpen übersiedelten Rechenmeister Valentin Mennher einen nach manchen Richtungen selbständigen Bearbeiter eines Gegenstandes. Antich Rocha dagegen kann nur als Übersetzer des Mennher ins Spanische die Aufmerksamkeit fesseln. Gelegentlich werden die von spanischen Gelehrten erhobenen Ansprüche auf das Erfinderrecht der doppelten Buchhaltung für ihre Landsleute gestreift.

CANTOR.

Dr. W. GROSSE. Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung. Leipzig 1897. Quandt & Händel.

Einer detaillierten inhaltlichen Besprechung des vorliegenden Buches fühlen wir uns um so mehr überhoben, als dasselbe zum grossen Teile nur eine Übersetzung des auch im Vorwort als „in erster Linie benutzt“ angegebenen Werkes von Edouard Lucas (Récréations mathématiques, Paris, Gauthier Villars et fils, 1891—94) unter Reproduktion der dort gegebenen Figuren und Tabellen ist. Selbstverständlich wird für ein Buch über Unter-

haltungsspiele in mathematischer Behandlung das grundlegende Werk Lucas' stets benutzt werden müssen, jedoch kann die Art, wie dies von Herrn Grosse geschieht, welcher sein Werk doch offenbar nicht als eine Übersetzung jenes angesehen wissen will, nach Ansicht des Referenten nicht scharf genug verurteilt werden. Zudem ist die Übersetzung nichts weniger als gut; so giebt Herr Grosse z. B. bei Behandlung des 8-Königinnen-Problems das „fou“ seines französischen Originals unbegreiflicherweise fortgesetzt mit „Bauer“ (statt „Läufer“) wieder und erreicht hiermit sicher alles andere, nur nicht eine „gebildeten Laien verständliche Form“ der Darstellung. Die letzten Abschnitte basieren auf den „Zwölf Geduldspielen“ des Herrn Schubert (Dümmler, Berlin 1895).

Wir hätten erwartet, dass Herr Grosse seiner französischen Fundgrube seine Dankbarkeit in anderer Weise bezeugen würde, als von „einer ganzen Reihe von Fehlern“ derselben zu sprechen. Herr Grosse behauptet nämlich, im neunten Abschnitte (Dominospiel) „einige Fehler der bei Lucas sich vorfindenden Berechnung“ nachgewiesen zu haben. Da Herr Grosse dies im Vorwort anführt, scheint er dieser Verbesserung des Lucas'schen Werkes grössere Bedeutung beizulegen, und wir sehen uns daher veranlasst, die Sachlage in richtigem Lichte darzustellen. „Die ganze Reihe von Fehlern“, welche sich bei Lucas (t. IV, p. 148—150) vorfinden sollen, sind 5 harmlose Druckfehler, welche zu korrigieren selbst „gebildeten Laien“ sehr leicht fallen dürfte. Dass in der That nur Druckfehler vorliegen, zeigt nicht nur die Natur der Fehler, sondern insbesondere die Richtigkeit der weiteren, auf jenen beanstandeten Formeln beruhenden Rechnungen.

Die „Verbesserungen“ des Herrn Grosse enthalten jedoch Fehler, welche jedenfalls nicht ausschliesslich Druckfehler sind. Eine Gegenüberstellung im Anschluss an die von Herrn Grosse S. 150 gegebene mag dies zeigen:

Grosse	Lucas	richtige Formel
$P_4 = 2Q_1 + Q_5 + Q_6$	$P_4 = 2Q_1 + Q_6$	$P_4 = 2Q_1 + Q_5$
$Q_5 = 48T_2 + 40T_3$	$Q_5 = 48T_2 + 24T_3$	$Q_5 = 48T_2 + 24T_5$
$H = 8\ 645\ 088$ (Druckfehler)	$H = 86\ 665\ 088$	$H = 8\ 665\ 088.$

Die „Verbesserung“ $40T_3$ des Herrn Grosse ist insbesondere charakteristisch, da dieselbe nur gemacht erscheint, um ein numerisch richtiges Resultat zu erzielen, während eine Begründung für das Auftreten der Konfiguration T_3 hier schwerlich gefunden werden kann. Die anderen beiden von Herrn Grosse richtig verbesserten „Fehler“ bei Lucas sind ebenso belanglos, desgl. auch einige weitere, von Herrn Grosse nicht bemerkte Druckfehler in diesem Abschnitt des sonst durch grosse Exaktheit ausgezeichneten französischen Werkes. Herrn Grosses Fehler im Laufe dieser Rechnung sind hiermit jedoch noch nicht erschöpft; so benutzt Herr Grosse z. B. bei der numerischen Berechnung von P_4 nicht seine, oben angegebene falsche Formel, sondern die Lucas'sche mit dem Druckfehler, verwendet aber den hieraus resultierenden falschen Wert bei der Schlussrechnung nicht, sondern okkupiert dort einfach wieder den richtigen numerischen Wert Lucas'. Dies wird zur Charakteristik des Buches genügen.

Dr. W. AHRENS.

Handbuch der Geophysik. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. Zwei Bände. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. I. Band mit 157 Abbildungen im Text. Stuttgart 1897. Verlag von Ferd. Enke. Gr. 8^o. XII, 648 S.

Der Verfasser hat es vor anderthalb Jahrzehnten unternommen, den riesigen Stoff der Erdphysik, nämlich Thatsachen und Lehrmeinungen, soweit möglich, erneut zu sammeln, zu sichten und sowohl nach seiner geschichtlichen Entwicklung, als auch nach seiner dogmatischen Gliederung und Verknüpfung, sowie nach seiner litterarischen Festlegung zur Darstellung zu bringen. Es war ein dankenswertes Werk. Dass es seinen Zweck erfüllte und seinen Leserkreis gefunden, beweist die Notwendigkeit einer neuen Auflage, deren erster Band jetzt vorliegt, zwölf Jahre nach Abschluss der ersten Auflage.

Bei unserer öffentlichen Anzeige dieser letzteren (Bd. XXIX, S. 226 ff. und Bd. XXX S. 108 ff.) hatten wir zwei Eigentümlichkeiten des Werkes als schon bei oberflächlichem Durchblättern in die Augen fallend hervorgehoben: die Menge der je am Ende der einzelnen Kapitel angegebenen Zitate und die streng durchgeführte Rücksichtnahme auf die geschichtliche Entwicklung der jeweils darzustellenden Lehren. Diese Besonderheiten des Werkes sind ihm in der neuen Auflage nicht nur erhalten geblieben, sie treten sogar verstärkt hervor, zumal auf dem Gebiete der litterarischen Fingerzeige: gegen 4000 genaue Verweisungen, also fast in doppelter Zahl gegen früher, geben, ohne die Übersicht im ganzen zu stören, abermals Zeugnis von den weit ausgedehnten Vorstudien des Verfassers und ermöglichen es dem Leser, falls diesem eine ebenso grosse öffentliche Bibliothek wie dem Verfasser zu Gebote steht, in bequemster und ausreichendster Weise sich ganz eingehend über all' das zu unterrichten, was bis jetzt über jede der zur Besprechung kommenden Fragen geleistet ist.

Eben die Fülle des verarbeiteten und mitgeteilten Stoffes liess uns schon bei der ersten Auflage die Meinung aussprechen, dass das Werk mehr den Charakter eines „Handbuches“ als den eines „Lehrbuches“ trage. Der Verfasser hat jetzt den Titel in diesem Sinne abgeändert; es war dies in der That auch noch notwendiger als früher. Warum übrigens dem Werke nicht der Titel einer „Erdphysik“ gegeben wurde, ist nicht recht erfindlich — geht doch sogar der altüberkommene Name der „Geographie“ heute mehr und mehr in den der „Erdkunde“ über.

Aber nicht nur der Titel des Werkes hat sich geändert, es erscheint thatsächlich in „umgearbeiteter Auflage“, ja der Verfasser bezeichnet diese sogar als „gänzlich umgearbeitet“, was wir nicht völlig billigen können. Denn nicht nur ist wie gesagt der Charakter des ganzen Werkes erhalten geblieben, auch die Anordnung des Stoffes, seine Gliederung, die Einteilung in Abteilungen und Kapitel und deren Stoffgebiet ist im grossen und ganzen gleich geblieben.

Im einzelnen freilich ist ungemein viel anders geworden. Da Günther die Geophysik jetzt im engeren Sinne nur als einen Teil der Wissenschaft vom Anorganischen auffasst, fällt in der neuen Auflage die früher anhangs-

weise mit behandelte biologische Erdkunde weg; da er ferner ebenso wie der Verleger eine gleichmäßigere Stärke der beiden Bände des Werkes erwünschte, so ist die ganze vierte Abteilung mit ihren vier Kapiteln, von den magnetischen und elektrischen Erdkräften handelnd, aus dem zweiten in den ersten Band herübergewonnen worden. Aber auch diesen Abschnitt mitgerechnet, ist gleichwohl der Umfang des Ganzen äusserlich um mehr als ein Drittel des früheren gewachsen.

Denn nicht nur ist die Darstellung vielfach neu bearbeitet, sie ist auch überall erweitert und nach der Seite des Stofflichen, des Geschichtlichen, des Litterarischen ergänzt und bis auf die Gegenwart fortgeführt. Gleichwohl hat es der Verfasser verstanden, die Übersichtlichkeit und Durchsichtigkeit des Massenstoffes genügend zu wahren: er giebt die Hauptgedanken der Entwicklung in grösserem Druck und verweist Nebengedanken oder Einzelausführungen in deutlich geschiedene, zwischengeschobene Textstellen von kleinerem Druck.

Ausser diesen Abänderungen und Erweiterungen des früher Vorhandenen zeigt die neue Auflage aber auch eine ganze Reihe neuer Paragraphen. Wir wollen dieses wesentlich Neue hier in der Hauptsache hervorheben, indem wir zugleich den Inhalt des ganzen Bandes vor unserem Auge vorüberziehen lassen.

In der ersten Abteilung (S. 44—137), die der kosmischen Stellung unserer Erde gewidmet ist, werden bei der Kant-Laplaceschen Nebulartheorie (1. Kapitel) die neueren Bestrebungen zur Verbesserung dieser Theorie vorgeführt; bei der Erzählung von der natürlichen Beschaffenheit der Körper unseres Sonnensystems (2. Kapitel) gelangen jetzt die Sternphotographie und die Spektralanalyse zu ihrem Recht, ebenso die neueren Auffassungen über die Bildung der Sonnenflecken sowie über das Wesen der Meteoriten; beim Bericht über unsere Erdnachbarn (3. Kapitel) kommt die Bereicherung wesentlich der Lehre vom Mondvulkanismus zu gute.

In der den allgemeinen mathematischen und physikalischen Verhältnissen der Erde gewidmeten zweiten Abteilung (S. 137—328), die zunächst von der Erde als Kugel handelt (1. Kapitel), kommen wesentliche stoffliche Erweiterungen hauptsächlich im 2. Kapitel vor bei dem Studium der geographischen Verteilung des Schwerebetrages und ihrer Bedeutung für die Erdgeschichte, sowie bei dem, was über Dichte und Dichtevertelung der Erde zu sagen ist, ebenso bei der Lehre von den Lotablenkungen im 3. Kapitel, das dem Geoid gewidmet ist. Die Betrachtung der Tagesschwankungen der Erdachse, und deren Verlegungen im Erdinnern, sowie die Pulsationen der Erd feste sind die Hauptzugaben zum 4. Kapitel, ebenso in dem der Graphik vorbehaltenen 5. Kapitel die Lehre von den photogrammetrischen Errungenschaften der letzten Zeit.

Eine dritte Abteilung (S. 228—505) behandelt wie früher das Erdinnere und seine Einwirkungen auf die Aussenwelt. Hier wird aus den ermittelten Wärmeverhältnissen des Erdinneren (1. Kapitel) auf den Zustand dieses Erdinneren geschlossen (2. Kapitel): nach lichtvoller Darlegung der

gegensätzlichen Meinungen entscheidet sich der Verfasser für die Annahme eines etwa durch sieben Hauptstufen vermittelten stetigen Überganges von voller Starrheit der Erdstoffe bis zu voller Dissociation. Naturgemäß schliesst sich die Betrachtung der vulkanischen Erscheinungen an: dieses 3. Kapitel ist nach Inhalt und Anordnung fast ein neu geschriebener Teil des Buches geworden und bietet wie das vorige eine äusserst anregende Lektüre. Dasselbe lässt sich von dem jetzt ebenfalls fast auf doppelten Umfang gebrachten 4. Kapitel sagen, das von den Erdbeben handelt. Überschaute man, wie die jetzt vorliegende dritte Abteilung um etwa zwei Drittel ihres früheren Umfangs gewachsen ist, so erkennt man mit freudigem Staunen, welch' reges wissenschaftliches Interesse in den letzten zwei Jahrzehnten gerade dem Studium des Erdinneren gewidmet war, aber auch wie geschickt der Verfasser dem Leser die Ergebnisse darzubieten versteht.

Die vierte Abteilung (S. 505—617), jetzt, wie schon gesagt, aus dem seitherigen zweiten Bande herübergenommen, behandelt die magnetischen und elektrischen Erdkräfte. Die Stoffanordnung ist insofern geändert, als das frühere erste Kapitel im wesentlichen an dritte Stelle gesetzt ist. Zunächst wird der Erdmagnetismus mit seinen drei Elementen behandelt (1. Kapitel): hier haben die magnetischen Landesaufnahmen und die säkularen Schwankungen des Erdmagnetismus eingehendere Bearbeitung erfahren. Die Theorie des Erdmagnetismus (2. Kapitel), wie im einzelnen ergänzt, erfährt im ganzen eine Erweiterung in den Beziehungen von Erde zu Sonne und Mond; ebenso haben auch das 3. und 4. Kapitel, jenes von den örtlichen magnetisch-elektrischen Kräften in den obersten Erdschichten, und dieses von den Polarlichtern handelnd, dem Gange der Wissenschaft entsprechend beträchtliche Bereicherungen erfahren: dort in der Lehre von den magnetischen Strömungsgebieten, hier in den Angaben über Periodizität, künstliche Nachbildung und Wesenserklärung der Polarlichter.

Wir stehen am Ende unserer Übersicht, die wesentlich die Änderungen gegenüber der ersten Auflage hervorzuheben hatte. Erneut müssen wir unserer staunenden Bewunderung Ausdruck geben über die Beischaufung des riesigen, zumal geschichtlichen Lehrstoffes und die im ganzen doch wohl gelungene Verarbeitung, Anordnung und Gestaltung dieses Stoffes, aber auch Ausdruck geben dem Dank dafür, dass der Verfasser den so reichen, aber weithin in der Litteratur zerstreuten Stoff mit ausdauerndem Fleisse gesammelt und ihn mitsamt den neuesten Errungenschaften, oft auch nur Ansichten der Wissenschaft hier bequem vor den Augen des Lesers ausbreitet. Ein äusserst bequemer und anregender Führer in dem weiten Gebiete der Erdphysik ist das vorliegende Werk, ein Führer zumal, der nicht vorgiebt alles selbst zu wissen oder sagen zu können, der aber stets getreue Auskunft darüber bietet, wo nähere Aufschlüsse zu erlangen sind. In jedem Zweige der Wissenschaft ist es ein verdienstliches Unternehmen, von Zeit zu Zeit Heerschau zu halten über die Thatsachen und Meinungen, die bis dahin festgestellt oder aufgestellt worden sind; Schriftsteller und Werke, die dies übernehmen, üben Gerechtigkeit gegen die Vergangenheit und bieten

ausserordentliche Anregung für die Zukunft. In jedem Falle verdient solche Arbeit Dank, um so mehr, wenn sie nicht, wie neuerdings vielfach durchgeführt, von Vereinigungen gelehrter Männer oder ganzer Akademien, sondern von Einzelnen ausgeführt wird.

Wir haben nachzutragen, dass vollständige Sach- und Namenverzeichnisse den Gebrauch des Buches sehr erleichtern, auch dass ein Schlüssel für die vielen Verweisungen auf Zeitschriften eine recht angenehme Beigabe ist.

Für eine etwaige dritte Auflage, die wir den beteiligten Unternehmern ebensowohl wie den Benützern und der Wissenschaft wünschen, dürften wohl einige Wünsche Beachtung finden. Zunächst dürfte es gewiss möglich sein, ohne dem berechtigten Gebrauche von Fremdwörtern zu entsagen, an einer grossen Zahl von Stellen durchaus entbehrliche Fremdwörter zu vermeiden — auch Reinheit der Sprache ist eine durchaus zu verlangende Eigenschaft selbst eines wissenschaftlichen Werkes. Dann aber dürfte das schon in der jetzigen Auflage sehr zum Vorteil des Buches hervortretende Bestreben noch mehr in die Erscheinung treten, das Bestreben, nicht sowohl den Gang der geschichtlichen Entwicklung der einzelnen Lehren, als vielmehr die Ergebnisse dieser geschichtlichen Entwicklung in den grösser gedruckten Text aufzunehmen, dagegen den Verlauf der Entwicklung, wie schon zum guten Teile geschehen, kleiner gedruckten Textesabschnitten zuzuweisen, und stets zum Schlusse, soweit möglich und jetzt schon vielerorts durchgeführt, die heutige Lehre der Wissenschaft bezw. die Meinung des Verfassers klar und durch Druck hervorgehoben festzustellen. Ein erneutes Durcharbeiten des Stoffes wird es auch dem Verfasser ermöglichen, noch mehr die Durchsichtigkeit des Werkes zu steigern durch übersichtliche Gliederung des Stoffes und noch weiteres Wegschieben litterarischer Notizen aus dem eigentlichen Text, dann aber auch — und selbst auf die Gefahr hin, dass das Werk dreibändig würde — durch etwas grössere Ausführlichkeit, die sich gleich sehr fern zu halten hätte von einer Monographie wie von einer nur ganz skizzenhaften Andeutung, und durch wieder etwas stärkere Aufnahme mathematischer Behandlung, die freilich räumlich abgetrennt zu halten wäre. Endlich wäre es sehr angenehm, wenn den Zitaten aus Zeitschriften jeweils in Klammern die betreffende Jahreszahl der Veröffentlichung beigelegt würde.

Druck und Ausstattung sind schön — Dank auch der Verlagshandlung.

P. TREUTLEIN.

STAUDE, OTTO. **Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung.**

Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1896. B. G. Teubner. VIII u. 185 S. 8^o, 7 Mk.

Während die Fokaleigenschaften der Kegelschnitte seit langer Zeit bekannt sind und überall in den elementaren Lehrbüchern der analytischen Geometrie behandelt werden, war es nicht möglich, ähnliche Eigenschaften auch bei den Flächen zweiten Grades aufzufinden, und alle dahin gehenden Versuche blieben ohne Erfolg. Der Begriff der Fokaldistanz in der Ebene liess sich nicht ohne weiteres auf den Raum übertragen, da an Stelle der 2 Brenn-

punkte der Kegelschnitte 4 Hauptbrennpunkte der Flächen zweiter Ordnung treten. Da führte Herr Staude den Begriff der gebrochenen Fokaldistanz ein, und mit diesem war die Grundlage zur Ausdehnung der Fokaleigenschaften der Kegelschnitte auf die Flächen zweiter Ordnung gewonnen. In den Berichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Jahrgang 1882 und in den Mathematischen Annalen, Bd. XX und XXVII wurden die Ergebnisse dieser Untersuchungen veröffentlicht. Dieselben liegen uns jetzt in einem Buche vor, das den angegebenen Schriften gegenüber bedeutend einfachere Beweise und eine wesentliche Vervollständigung der Theorie bietet, da dieselbe im zweiten Teile in völlig entsprechender Weise auch auf die Paraboloiden ausgedehnt ist.

Nach Herleitung der allgemein bekannten Eigenschaften konfokaler Systeme von Ellipsoiden und Hyperboloiden, der Besprechung der elliptischen Koordinaten werden die Fokalkegel und die Fokallinien eines Punktes eingeführt. Die ersteren sind bekanntlich die beiden Kegel, welche von einem Punkte des Raumes über den Fokalkegelschnitten eines Systems konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide errichtet werden, die letzteren definiert der Herr Verfasser als die 4 Schnittlinien dieser beiden Kegel, also diejenigen Geraden durch einen Punkt, welche die beiden Fokalkegelschnitte schneiden. Die gebrochenen Fokaldistanzen, welche an Stelle der Fokaldistanzen der Kegelschnitte treten, ergeben sich nun auf folgende Weise: Ist P ein beliebiger Punkt einer Kurve, so verstehen wir unter einer gebrochenen Entfernung der Punkte P_1 und P_2 über diese Kurve die gebrochene Linie P_1PP_2 und dieselbe heisst Gleichgewichtsdistanz, wenn die Halbierungslinie des Winkels P_1PP_2 auf der Tangente der Kurve im Punkte P senkrecht steht. Es ist dieses die Lage von P_1PP_2 bei freigleitendem P , wenn ein Faden P_1PP_2 bei P_2 gespannt ist. Die gebrochene Entfernung P_1PP_2 wird nun eine Gleichgewichtsdistanz, wenn die beiden Halbstrahlen PP_1 und PP_2 verschiedenen Mänteln des Rotationskegels angehören, der den Gleitpunkt als Spitze, die Tangente der Kurve in ihm als Achse hat und durch einen Halbstrahl bestimmt ist und umgekehrt. Nehmen wir jetzt als Kurve die Fokalhyperbel eines konfokalen Systems von Ellipsoiden und Hyperboloiden, so ergibt sich der Satz: Zwischen einem beliebigen Punkte P , der kein Fokalpunkt ist, und einem Fokalellipsenpunkte giebt es stets eine und nur eine kürzeste Entfernung über einen gegebenen Zweig der Fokalhyperbel (dieselbe ist immer zugleich eine Gleichgewichtsdistanz), wobei die Verbindung von P mit der Fokalhyperbel eine Fokallinie ist. Analoges gilt, wenn wir an Stelle der Fokalhyperbel die Fokalellipse, an Stelle des Fokalellipsenpunktes einen solchen der Fokalhyperbel setzen. Eine solche kürzeste gebrochene Entfernung wird gebrochene Fokaldistanz genannt und für den Fall, dass der gegebene Punkt der Fokalkegelschnitte ein Hauptbrennpunkt ist, Hauptfokaldistanz, sodass jeder Punkt des Raumes 4 gebrochene Hauptfokaldistanzen hat; je zwei von ihnen sind gleichseitig, d. h. der Fokalpunkt, der nicht mit dem Hauptfokalpunkte zusammenfällt, liegt an derselben Seite der yz -Ebene mit P , je zwei sind gleichnamig, d. h. beide gehen über die

Fokalellipse bez. Fokalhyperbel. — Nachdem die Längen der gebrochenen Fokaldistanzen, bez. gebrochenen Hauptfokaldistanzen bestimmt sind, wird daraus auf einfachste Weise eine Reihe schöner Sätze abgeleitet, von denen wir hier nur folgende zwei angeben wollen:

1. Für jeden Punkt eines Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der Hauptachsenlänge des Ellipsoides, vermehrt um die halbe Differenz seiner beiden Hauptbrennweiten und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale des Ellipsoides halbiert. Daraus ergibt sich zugleich eine Fadenkonstruktion eines Ellipsoides aus den Fokalkegelschnitten.

2. Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der Hauptachsenlänge des Hyperboloides, vermindert um die halbe Summe seiner beiden Hauptbrennweiten und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Hyperboloids halbiert.

Ganze analoge Untersuchungen werden sodann im zweiten Abschnitte über das System konfokaler Paraboloiden angestellt, die zu entsprechenden Ergebnissen führen.

Eine grosse Zahl von Figuren erhöht das Verständnis des klar geschriebenen Textes und zur weiteren Erleichterung für den Leser sind im Anhang dankenswerter Weise die entsprechenden Sätze aus der Lehre der Kegelschnitte zusammengestellt, die im Buche als bekannt vorausgesetzt werden, sowie auch zu einigen im Text auftauchenden allgemeinen Fragen eingehende Erläuterungen gegeben.

Das Buch liefert uns somit eine wichtige Ausdehnung der Lehre von den Flächen zweiten Grades, es füllt eine Lücke aus, die von den Geometern schon seit langer Zeit schwer empfunden wurde, und sein Erscheinen ist daher wohl allseitig aufs freudigste begrüsst worden. H. WILLGROD.

RAFFY, LOUIS. *Leçons sur les applications géométriques de l'analyse.* Paris 1897, Gauthier-Villars et fils. 8^o. 251 S.

Wie der Herr Verfasser in der Vorrede angiebt, ist das Buch aus der Lehrthätigkeit heraus entstanden, und wir haben ein Werkchen vor uns, das nicht nur in sachlicher, sondern vor allem auch in methodischer Hinsicht uns vollauf befriedigen kann. Die methodischen Gesichtspunkte sind insofern stärker berücksichtigt, als an manchen Stellen statt der eleganten klassischen Beweise solche gegeben werden, die möglichst einfach und für die Entwicklung an der betreffenden Stelle passender sind. Da die analytischen Fragen eingehend erörtert werden, so ist das Buch auch für diejenigen lesbar, welche in der höheren Analysis nicht über das erste Studium hinausgekommen sind. Auf Vorzeichenbestimmung bei Wurzelgrössen ist besonderes Gewicht gelegt.

Der Inhalt umfasst alles, was man für eine allgemeine Einleitung in die höhere Geometrie wünschen kann, auf besondere Flächenklassen ist mit Ausnahme der mehr hervortretenden geradlinigen Flächen nicht eingegangen; die illustrierenden Beispiele sind die in den meisten Lehrbüchern der Geometrie angewendeten und recht passend gewählt. H. WILLGROD.

Bibliographie.*

Periodische Schriften.

- Annalen der schweizerischen meteorologischen Centralanstalt 1896. „Der schweizer. meteorolog. Beobachtungen“ 33. Jahrg. Zürich, Fäsi & Beer. M. 18.
- Arbeiten, astronomische, des kaiserl. königl. Gradmessungsbureaus. 10. Bd. Längenbestimmungen. Publikationen für die internationale Erdmessung. Leipzig, Freytag. M. 16.
- Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physikalische Klasse. 50. Bd. 1898. Naturwissenschaftlicher Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 20.
- Jahrbuch, Berliner astronomisches, für 1901 mit Angaben für die Oppositionen der Planeten (1) — (436) für 1899. Berlin, Dümmler. M. 12.
- Jahrbuch des königl. sächs. meteorolog. Institutes. 1897. 15. Jahrg. 1. Abt. Zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1897. Beobachtungssystem des Königreich Sachsen. Herausgegeben von PAUL SCHREIBER, Chemnitz, Bülz. M. 5.
- Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Herausgegeben von HERM. J. KLEIN. 9. Jahrg. 1898. Leipzig, Mayer. kart. M. 7.
- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1897. Beobachtungssystem der deutschen Seewarte. 20. Jahrg. Herausgegeben von der Direktion der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 13.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von EMIL LAMPE. 27. Bd. Jahrg. 1896. 3. (Schluss-) Heft. Berlin, Reimer. M. 12.
- Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Redigiert von REPSOLD, SCHRÖDER, BUSCH. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 20.
- Rundschau, astronomische. Herausgegeben von der Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo (Österreich). 1. Bd. 12 Hefte. M. 12.

* Bis jetzt sind in dieses Verzeichnis nur die neuen Erscheinungen des deutschen Buchhandels, sogar mit Ausnahme der meisten Dissertationen und der Programmschriften aufgenommen worden. Es wird denen, die dasselbe benützen, ohne Zweifel erwünscht sein, wenn künftighin nicht nur die bezeichneten Lücken ausgefüllt, sondern auch die wichtigsten ausländischen Werke berücksichtigt werden. Die fragliche Erweiterung konnte zwar im vorliegenden Heft nur teilweise stattfinden, jedoch soll in den Schlussheften dieses Bandes bis auf den Anfang des Jahres zurückgegriffen werden.

- Sitzungsberichte, Münch. Mathem. Klasse. 1898. 4. Heft. München, Franz.
M. 1. 20.
- Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. 1. Jahrg. 1899.
Leipzig, Barth. M. 4.
- Veröffentlichungen des königl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin.
Nr. 8 und 9. Berlin, Dümmler.
8. BAUSCHINGER, JUL., Untersuchungen über den periodischen
Kometen 1889 V, 1896 VI (Brooks). 2. Teil. Die Erscheinung
1896—97 und ihre Verbindung mit d. v. Jahre 1889—90. M. 2.
9. BAUSCHINGER, JUL., Genäherte Oppositions-Ephemeriden von
52 kleineren Planeten für 1899, Januar bis August. M. 1. 20.
- Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. 33. Jahrg. 4. Heft. Leipzig,
Engelmann. M. 2.

Geschichte der Mathematik und Physik.

- GERLAND, E., und TRAUMÜLLER, F., Geschichte der physikalischen Experi-
mentierkunst. Leipzig, Engelmann. M. 14.

Reine Mathematik.

- BARINGER, W., Was muss man von der Arithmetik und Algebra wissen?
Berlin, Steinitz. M. 1.
- BOUTON, C. L., Invariants of the general Linear Differential Equation and
their relation to the theory of Continuous Groups. Dissertation.
Leipzig, Fock.
- BUCHHOLZ, AUG., Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Mannigfaltig-
keiten, deren Linienelemente auf die Form $ds = f(\sqrt{\Sigma x_i^2}) \sqrt{\Sigma dx_i^2}$ ge-
bracht werden können. Bonn, Cohen. M. 7.
- BURKHARDT, HEINR., Funktionentheoretische Vorlesungen. 2. (Schluss-) Teil.
Elliptische Funktionen. Leipzig, Veit & Co. M. 10.
- Encyklopädie der mathem. Wissenschaften. 1. Teil. 1. Bd. 2. Heft. Leipzig,
B. G. Teubner. M. 3. 40.
- ESCHERICH, G. v., Die zweite Variation der einfachen Integrale. 1.—3. Mit-
teilung. (Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akad.) Wien, Gerolds
Sohn. M. 3. 10.
- FRANZ, C., Untersuchungen über die lineare homogene Differentialgleichung
zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit drei im Endlichen ge-
legenen singulären Stellen. Dissert. Halle. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.
- FUCHS, L., Bemerkungen zur Theorie der associierten Differentialgleichungen
(aus den Sitzungsber. der Berl. Akad.). Berlin, Reimer. M. —. 50.
- HAMBURGER, M., Über die singulären Lösungen der algebraischen Differential-
gleichungen höherer Ordnung (aus den Sitzungsber. der Berliner Akad.).
Berlin, Reimer. M. —. 50.
- HENSCHEL, A., Untersuchungen über Berührungskugeln. Progr. Weimar.
- LIPSCHITZ, R., Bemerkungen über die Differentiale von symbolischen Aus-
drücken (aus den Sitzungsber. d. Berl. Akad.). Berlin, Reimer. M. —. 50.

- PESCHKA, GUST. AD. V., Darstellende und projekt. Geometrie nach dem gegenw. Stande dieser Wissenschaft, mit bes. Rücksicht auf d. Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. 1. Bd. 2. Aufl. Mit Atlas. Wien, Deuticke. M. 14.
- PIETSCH, C., Katechismus der Rannberechnung. (Webers illustr. Katechismen Nr. 49). 4. Aufl. Leipzig, Weber. geb. M. 1. 80.
- WITTING, A., Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Programm. Dresden.

Angewandte Mathematik.

- BATTERMANN, H., Resultate aus den Polhöhenbestimmungen in Berlin, ausgeführt in den Jahren 1891 und 1892 am Universal-Transit der königl. Sternwarte. Herausgegeben vom Centralbureau der internationalen Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.
- FOERSTER, WILH., Kalender und Uhren am Ende des Jahrhunderts. Braunschweig, Westermann. M. 1. 50.
- FOERSTER, W., und LEHMANN, P., Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders für 1900. Berlin, königl. statist. Bureau. M. 5.
- FÜRLE, H., Zur Theorie der Rechenschieber. Progr. Berlin.
- Handwörterbuch der Astronomie. 17. Lfg. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.
- Kotentafeln zum Gebrauch bei Messtischaufnahmen. Berlin, Mittler & Sohn. geb. M. —. 50.
- LANGER, WILH., Was muss man von der Astronomie (Himmelskunde) wissen? Berlin, Steinitz. M. 1.
- LAUENSTEIN, R., Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für techn. Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 5. Aufl. Stuttgart, Bergsträsser. M. 5. 40.
- THÖLDTE, Das logarithmische Potential von sich einander anschliessenden Kreisflächen. Programm. Dessau.
- WEBER, W., Graphische Tafeln zur Bestimmung der Tragfähigkeit gusseiserner und schmiedeiserner Säulen und Träger. Berlin, Springer. M. 6.
- WEISSTEIN, JOS., Die rationelle Mechanik. 2. Bd. Dynamik der Systeme. — Statik und Dynamik flüssiger Systeme. Wien, Braumüller. M. 7.

Physik und Meteorologie.

- Bericht über die internationale meteorolog. Konferenz zu Paris 1896. Herausgegeben vom königl. preuss. meteorolog. Institut. Berlin, Asher & Co. M. 4.
- BOLTZMANN, LUDWIG, Vorlesungen über Gastheorie. 2. Teil. Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen, Gasdissociation; Schlussbemerkungen. Leipzig, Barth. M. 7.
- DANIËLS, M. Fr., Elektrizität und Magnetismus, deutsch von A. GOCKEL. Freiburg (Schweiz), Universitätsbuchhandlung. M. 4. 50.

- FRITSCH, H., Die Newtonsche Gravitation abgeleitet von Ätherstößen. Programm. Königsberg.
- HAAS, E., Was ist Elektrizität? Programm. Kattowitz.
- HELLMANN, G., Regenkarte der Provinz Schlesien, auf Grund 10jähriger Beobachtungen (1888—1897) entworfen. 1:125000. Farbendruck. Mit erläuterndem Text und Tabellen. Berlin, Reimer. M. 1.
- JÄGER, GUST., Theoretische Physik. III. Elektrizität und Magnetismus. (Sammlung Göschen Nr. 78). Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- LEISS, C., Die optischen Instrumente der Firma R. Fuess. Deren Beschreibung, Justierung und Anwendung. Leipzig, Engelmann. M. 11.
- LOMMEL, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl. Leipzig, Barth. M. 6. 40.
- LÜDELING, G., Über den täglichen Gang der erdmagnetischen Störungen an Polarstationen. (Aus den Sitzungsberichten der Berliner Akad.) Berlin, Reimer. M. —. 50.
- MEYER, OSK. EMIL, Die kinetische Theorie der Gase. In elementarer Darstellung mit mathematischen Zusätzen. 2. Aufl. 2. Hälfte. Breslau, Maruschke & Berendt. M. 7.
- PERLEWITZ, P., Die Temperatur-Verhältnisse von Berlin (nach 50 jährigen Beobachtungen: 1848—1897). Programm. Berlin.
- PILLING, O., Über die Bedeutung der Energie in der Naturwissenschaft. Programm. Schleusingen.
- REHDANS, Foucaults Pendelversuch. Programm. Graudenz.
- SCHMIDT, B., Über den Arbeitswert der Elektrizität und einen Apparat zur Veranschaulichung elektrischer Ströme. Programm. Wurzen.
- SCHULTZ, CARL, Die Ursachen der Wettervorgänge. Neuerungen und Ergänzungen zum Weiterbau der meteorologischen Theorien. Wien, Hartleben. M. 2.
- SERVUS, H., Witterungs-Prognosen für das Jahr 1899. Berlin, Staude. M. —. 50.
- WAALS, J. D. VAN, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Aufl. 1. Teil. Leipzig, Barth. M. 4.

Historisch-litterarische Abteilung.

Ein wiedergefundener Diophantuscodex.

Von

EDUARD GOLLOB.*

Bekanntlich sagt Tomasinus (p. 121): „In Bibliotheca Alexandri Synclitici Viri Clarissimi et Primi Juris Civilis Professoris instructissima videbatur non ita dudum graece scriptus elegantissime Diophantus fol. ch. vet. longe copiosior et emendatior illo, qui Parisiis prodiit. Eum vir optimus concessit Viro Cl. Joanni Broscio Mathematico Cracoviensi, ut ipsius cura et studio in lucem ederetur, quem nunc eruditi omnes avide expectant.“

Diese Publikation ist nicht erfolgt und der Codex gilt als verschollen, ebenso wie ein Regiomontanus, der dreizehn Bücher des Diophantus umfasst haben soll.

Tannery bemerkt hierzu in den Prolegomenis seiner Diophantusausgabe (Leipzig 1895) vol. II. p. XXXIV: „Sed quae de Regiomontano ibi dicta sunt, omnino falsa esse facile demonstratur, nec maiorem fidem merentur Perronii vel Synclitici testimonia de integro vel copiosiore (Planudeo?) codice, nimis saepe talia fucum fecerunt, at vanos rumores explosisse sat erit.“

Diese letztere Behauptung dürfte durch das Folgende in Bezug auf den Codex des Broscius wohl modifiziert werden.

Die k.k. Universitätsbibliothek in Krakau besitzt unter der Signatur Nr. 544 eine griechische Handschrift, die W. Wisłocki im „Katalog rękopisów biblioteki uniwersytetu Jagiellońskiego (Cracov, 1877—1881) folgendermaßen beschreibt: Kod. pap, z. w. XVI. fol. wieksze.

* Dieser Aufsatz war schon in unseren Händen als Herr Max Curtze im Centralblatt für Bibliothekswesen, Juni-Juliheft 1899, S. 258 und 295 in dem Berichte über seine 1896 gemachte Studienreise durch Deutsche und Österreichische Bibliotheken auf den gleichen Codex hinwies. Herrn Gollob's Unabhängigkeit ist demnach festgestellt. Herr Gollob schreibt uns überdies, nachdem wir ihn auf Curtze's Veröffentlichung aufmerksam gemacht hatten, er halte die dort gegebenen Kollationsproben nicht für genügend, um einen Begriff von dem Wert oder Unwert der Handschrift zu geben. M. Cantor.

kart. 223 i 4 prożne na poczatku i koncu, Diophanti Alexandrini opus arithmeticum. Kod. pisany po grecku. Na kartce katalogowej zanotowal J. S. Bandtkie: Codicem Joannes Broscius comparasse videtur, nam in fronte codicis et ante textum quaedam manu sua annotavit. Na oprawie znak dawny „D. D. IV. 56“ przekr siony i dopisane obok F. F. I. 5“ d. h.: „Papierhandschrift, 16 saec., Gro folio, 223 Blätter und 4 leere am Anfang und Ende, sie enthält das opus arithmeticum des Diophantus Alexandrinus, griechisch. Auf dem Blatte des Zettelkatalogs hat J. S. Bandtkie notiert: „Codicem u. s. w.“ Als Verbesserung einer alten Signatur D. D. IV. 56 steht (an der Innenseite des vorderen Einbanddeckels) eine zweite Signatur nämlich F. F. I, 15.“ Die Handschrift enthält:

Fol. 1a— 20b	<i>Διοφάντου Ἀλεξανδρέως Ἀριθμητικῶν</i> A,
„ 21a— 85b	„ „ „ B,
„ 86a—129b	„ „ „ Γ,
„ 130a—141b	„ „ „ Δ,
„ 142a—172b	„ „ „ E,
„ 172b—190a	„ „ „ Ϛ,
„ 190b—203a	„ „ „ Ζ,
„ 203b—211a	„ „ <i>περὶ πολυγόνων βιβλίον</i> H,
„ 211b—224b	das Rechenbuch des Planudes (Fragment).

Zum I.—III. Buche folgen auf die Probleme ohne Überschrift die Scholien des Planudes. Das zweite Buch beginnt auf Fol. 21a mit: *καὶ τῶν πολλαπλασιασµιῶν σοι σαφησιθέντων* — Dioph. Alex. op. ed. Tannery, vol. I. Lipsiae 1893 p. 14 im ersten Buche. Es ist demnach das erste Buch im Krakauer Codex in zwei Teile geteilt, und so erscheinen in dieser Überlieferung 7 Bücher, an welche sich obendrein noch als achttes Buch die Schrift *περὶ πολυγόνων* anreicht. Die handschriftliche Überlieferung pflegt sonst nur 6 Bücher zu enthalten. Es ist daher die Annahme nicht ungerechtfertigt, dass diese Einteilung allein schon im Stande war, der Krakauer Handschrift, die wir H nennen wollen, das Epitheton, „longe copiosior“ zu verleihen, zumal das Rechenbuch des Planudes ohne jede Überschrift auf das achte Buch folgt.

H repräsentiert sich als ein stattlicher Band von der Größe 43 cm × 30 cm, ist in massive Holzdeckel gebunden, die zur Hälfte mit rothem mit eingepressten Linienornamenten versehenem Leder überzogen sind. In der Mitte des Leders des Vorderdeckels ist ein 2½ cm langes Ornament eingepresst, Christus am Kreuze, zu seinen Füßen Maria, einen Tottenkopf und einen Kelch darstellend, dessen exakte, detaillierte Ausführung unter der Lupe einen geradezu überraschenden Eindruck hervorrufft.

H ist auf starkem gerippten Papier geschrieben, die Größe des Blattes beträgt 42 cm × 28 cm; die Schriftfl che 27 cm × 16 cm; auf

jeder Seite stehen, da die Schrift groß ist, durchschnittlich nur 21 Zeilen. Custoden sind vorhanden, aber die Zählung ist falsch (vergl. Fol. 131a und b). Die 224 Folien zerfallen mit zwei sich anschließenden leeren Blättern in eine Quinternion, von welcher das letzte Blatt fehlt, + 26 Quaternionen, + 1 Quinternion mit fehlendem letzten Blatt. Alle Lagen sind unten signiert; als Wasserzeichen erscheint von Fol. 6—221 eine Kanne mit dem Henkel. Die Schrift ist groß, rund, steil, von Abkürzungen zum großen Teile frei und nur mitunter in den Endungen stark verschlungen. Das Jota hat bald zwei bald einen Punkt.

Der Gelehrte J. S. Bandtkie behauptet, dass die einleitenden Notizen in H aus der Hand des Broscius stammen. Diese Behauptung wird durch den Umstand gestützt, dass Adrianus Romanus, dessen Ausspruch zunächst zitiert wird, ein Zeitgenosse des Broscius war. Auf der Innenseite des Vorderdeckels steht: *Adriani Romani dictum 1611 Crac.*: „Si nescis Euclidem, si ignoras Diophantum, Apollonium Pappum et alios veteres, magnam partem philosophici et dialectici organi disciplinarum nescis. In illis enim authoribus analyseos vis et natura explicatur, quam Aristoteles generaliter ex specialibus collegit, et propterea admirabilis est et erit apud omnem posteritatem“ auf dem ersten Blatte: *Μαξίμου τοῦ Ἰλλανόουδου*, darunter: Maximus Planudes, monachus Graecus, vixit anno Christi circiter 1362,* circa quae tempora haec charta pro sequenti putridina corrupta videtur esse substituta ab eodem Maximo, de quo vide Volaterranum lib. 17 Anthropol., qui vixit circa 1501 anno Christi Domini aeris vulgaris. Nun folgt aus „Raph. Volaterrani Commentariorum XXXVIII libri“ ein Citat und zwar nach der Baseler Ausgabe vom Jahre 1543 aus dem XVII. Buche von Fol. 196b Z. 51 Maximus bis Fol. 197a Z. 5 praebuerit. Das gleiche Citat erwähnt Treu in „Maximi Monachi Planudis epistulae“ p. 195 und verwirft dessen historischen Inhalt.

Das erste Blatt enthält thatsächlich das Gleiche, wie das zweite, welches stark abgenützt ist. Nachdem die Schrift des ersten Blattes mit der Schrift des Planudes, von welcher Treu a. a. O. p. 182 eine Probe bringt, keine Ähnlichkeit besitzt, wird die Vermuthung des Broscius, Planudes habe das erste Blatt selbst geschrieben, hinfällig.

H macht den Eindruck des Unfertigen. Die Überschriften zu den einzelnen Büchern sind nur provisorisch in kleiner Schrift am obersten Rande der Blätter eingetragen. Für die eigentliche Überschrift aber ist ein großer Raum leer gelassen. Ebenso fehlen bei freiem Raume häufig die ersten Buchstaben oder das ganze erste Wort der einzelnen Probleme. Die numeri ordinales zu den einzelnen Problemen sind mit wenigen Ausnahmen weggelassen. Ähnliche Eigenschaften haben die

* Nach Krumbacher, *Gesch. d. byz. Litt.*, II. Aufl., 1897 p. 543 starb Planudes schon um 1310. Vergl. auch Treu: „Planudis epistulae“ p. 193.

Scholien, die sich im Texte unmittelbar an die einzelnen Probleme des Diophantus anschließen, und nur hie und da durch die am äußersten Rande per comp. angebrachten Bemerkungen *ἐξηγήσεις* oder, wenn des Diophantus Text wieder beginnt, durch *διοφάντου* von dem Folgenden getrennt sind. Die von Tannery in den Scholien publizierten Diagramme fehlen durchgehends, nur ein leerer Raum bezeichnet ihren Platz, allerdings finden sich in *H* auch der Form nach offenbar für Diagramme bestimmte unbeschriebene Räume dort, wo in Tannery's Ausgabe gar kein Diagramm verzeichnet ist. *H* enthält weder im Texte des Diophantus noch in den Scholien des Planudes größere neue Stücke, aber auch keine größeren Lücken, nur fehlt das Problem XXIII im II. Buche (nach Tannery); die Anordnung der Scholien aber weicht mitunter von der des Tannery ab.

Für die ersten drei Bücher (nach Tannery I und II) ist *H* planudeisch; zur Vollständigkeit sei noch bemerkt, dass dem Diophantustexte auch die von Tannery a. a. O. vol. II. p. XXII erwähnten charakteristischen Merkmale, welche der besten Handschriftenklasse im I. Buche zukommen, fehlen. Andererseits aber führen uns Merkmale, die *H* besitzt, gerade wieder zur besten Klasse zurück. So fehlen die numeri der Probleme auch dem Vaticanus V, der zur besten Handschriftenklasse gehört, desgleichen hat die manus prima dieser Handschrift nur teilweise die Bücherüberschriften. Ferner überliefern nur noch einige wenige Handschriften das erste Buch in der gleichen Teilung in zwei Bücher wie *H* und schließen das Buch *περὶ πολυγώνων* als achttes Buch an. Diese sind die Scorialenses Ω—I—15 und R—II—3 (vergl. Tannery, a. a. O. p. XXXII). Sie werden von Tannery auf den Parisinus C zurückgeführt, der als Haupt einer Mischklasse aufgestellt wird, die in den ersten beiden Büchern planudeisch ist, in den weiteren aber auf die besten Handschriften zurückgeht.

Bisher durchgeführte Collationsproben* ergeben als vorläufiges Resultat, dass *H* vorwiegend mit dem Codex Matritensis 48 (also der besten Handschrift), dem Marcianus 308 und dem Parisinus übereinstimmt, aber aus dem Umstande, daß *H* Stellen enthält, die im Marc. und Par. fehlen, läßt sich auch schon schließen, dass *H* weder vom Marc. noch vom Par. eine Abschrift ist.

Das Fragment des Rechenbuches des Planudes stimmt in seinem Hauptteile von Fol. 212a Z. 14 *ἀλλὰ γὰρ* bis zum Schlusse mit dem Fragmentum Gudianum überein (vergl. Gerhardt, das Rechenbuch des Planudes, Halle 1865 p. 33 Z. 9 — p. 46 Z. 21). Die vor Fol. 212 stehenden 1½ Folioseiten sind in Gerhardts Rechenbuch nicht enthalten.

* Eine vollständige Collationierung ist in Vorbereitung und wird anderweitig erscheinen.

Olmütz, im April 1899.

Rezensionen.

LILIENTHAL, R. v. **Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen.** Leipzig 1896, B. G. Teubner. IV und 112 S. 8^o.

Der Cartesius'sche Koordinatenbegriff lässt sich einmal dahin erweitern, dass statt der drei zu einander senkrechten Scharen paralleler Ebenen drei zu einander senkrechte Flächenscharen gesetzt werden, wodurch man die Lamésche Theorie erhält. Eine andere Verallgemeinerung liegt dem vorliegenden Werkchen zu Grunde, bei welcher „die drei zu einander senkrechten Scharen paralleler gerader Linien durch drei zu einander senkrechte Scharen gekrümmter Linien ersetzt werden oder, was dasselbe ist, durch eine Kurvenschar nebst zwei zu einander senkrechten Scharen ihrer orthogonalen Trajektorien. Sollen die beiden letzten durch die erste bestimmt sein, so bieten sich naturgemäss an Stelle derselben die beiden Scharen der Krümmungslinien erster Art der ersten Kurvenschar dar.“ (Aus der Vorrede.)

Dabei macht sich zunächst nötig, Differentiationen nach den Bogenlängen der Koordinatenlinien einzuführen, von ihnen nachzuweisen, dass es invariable Operationen sind und den Übergang von den gewöhnlichen Koordinaten zu diesen krummlinigen klar zu legen. Auch die Laméschen bez. Beltramischen Differentialparameter werden abgeleitet. Der Herr Verfasser behandelt im ersten Teile die einfach unendliche Kurvenschar, zunächst den einfachsten Fall, die in der Ebene und dann die im Raume und geht sodann zum Hauptteil, der doppelt unendlichen Kurvenschar über. Dass wir in demselben zugleich eine Verallgemeinerung der Krümmungslehre der Flächen erhalten, ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich. Ehe die Verallgemeinerung der Koordinatenlinien für diesen allgemeinen Fall durchgeführt wird, werden, um das Verständnis zu erleichtern, die dazu nötigen bekannten Formeln und Sätze über Kurvenscharen im Raume mit ihren Spezialisierungen, Normalscharen, besonderen Scharen, isotropen Kurvenscharen, über Krümmungslinien erster und zweiter Art und über geradlinige Strahlensysteme in kurzer aber klarer Weise abgeleitet. Nachdem dann die allgemeinen Koordinatenlinien eingeführt und die Krümmungslinien erster Art der gegebenen Kurvenschar als Koordinatenlinien genommen sind, wird eine Reihe von Gleichungen abgeleitet, die in der Theorie der Kurvenscharen dieselbe Rolle spielen, wie die sogenannten Fundamentalgleichungen in der Flächen-

theorie. Daran anknüpfend werden Fragen spezieller Art behandelt, insbesondere ergibt sich aus den Fundamentalgleichungen ein neuer einfacher und eleganter Beweis des Ribaucourschen Satzes, dass, wenn eine Kurvenschar aus den orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar besteht, letztere einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. Überhaupt zeigt eine Reihe weiterer Untersuchungen, besonders über den Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien eines Strahlensystems, wie sich bei gewissen Fragen die Entwicklung durch die Einführung der Ableitungen nach Bogenlängen bedeutend vereinfacht. Der dritte Teil behandelt den Fall, dass die gegebene Kurvenschar durch Differentialgleichungen von der Form:

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta$$

bestimmt ist. Hier werden besonders isotrope Kurvenscharen und solche mit einer vorgeschriebenen Schar von Asymptotenlinien in Berücksichtigung gezogen.

H. WILLGROD.

Die darstellende Geometrie. I. Teil. Vorlagen mit erläuterndem Texte. Bearbeitet im Einvernehmen mit der grossherzoglich hessischen Centralstelle für die Gewerbe von Bauingenieur C. ALBERTI, Hauptlehrer an der grossherzoglichen Landesgewerkeschule zu Darmstadt. Atlas mit 41 Blättern und 294 einzelnen Figuren. Textbuch mit 78 zinkographischen Abbildungen. Stuttgart 1898. Verlag von C. Wittwer. Preis 34 Mk.

Vor uns liegt ein mit allen Hilfsmitteln moderner Technik ausgestattetes Prachtwerk, welches der Leistungsfähigkeit des Verlegers alle Ehre macht. Es ist das zweite der „Lehrbücher für technische Schulen und zum Selbstunterricht nach System Alberti“ und behandelt die darstellende Geometrie. Dasselbe ist für die Stufe einer technischen Mittelschule berechnet und beschränkt sich in dem bis jetzt vorliegenden 1. Teile auf die Darstellung von Objekten des ersten Quadranten.

Das Werk soll, wie der Verfasser in seinem Vorworte sagt, den Lehrern einen systematisch durchgeführten Lehrgang bieten und ihnen die Mühe abnehmen, sich selbst einen solchen zu schaffen und „den zugehörigen Text zu verfassen und zu diktieren“. Zugleich sollen die Blätter den Schülern in die Hand gegeben werden — etwa je für zwei ein Blatt — damit sie darnach zeichnen können.

So dankenswert nun diese Absicht den Lehrern gegenüber ist, so müssen wir doch im Interesse eines lebendigen Unterrichtes wünschen, dass die Lehrer sich selbst dieser Mühe unterziehen, welche ihnen da abgenommen werden soll. Wir glauben auch, dass denjenigen, welche auf einer Hochschule für darstellende Geometrie ausgebildet wurden, diese Aufgabe nicht allzu schwer fallen sollte. Freilich wenn sie dort nur so nebenbei etwas darstellende Geometrie hören und das Zeichnen für unakademisch halten,

so werden sie in der Praxis ratlos dastehen und sich gerne so schöner Vorlagen bedienen, wie es die gebotenen sind. Sie werden aber damit nicht allzuweit kommen und höchstens bei Ausstellungen mit einer Serie von „Bildern“ brillieren, welche bei den Laien Effekt machen. Die Kenner wissen aber, was davon zu halten ist. Überdies muss ein Lehrer, welcher Jahre hindurch die gleichen Zeichnungen ausführen lässt und dabei so genaue Musterblätter vorlegt, „dass es dem Lernenden möglich ist, durch Vergleichen mit dem Zirkel sich zu überzeugen, ob er auf dem richtigen Wege ist“ — ein solcher Lehrer muss die Schüler zum Kopieren verleiten. Gerade weil die Raumschauung — wie der Verfasser hervorhebt — so grosse Schwierigkeiten bietet, liegt diese Gefahr allzu nahe. Die gerühmte gleichmässige Ausbildung ist dann freilich begreiflich, hat aber keinen grossen Wert.

Wir sind mit dem Verfasser vollkommen einig, dass auf der Stufe, für welche dieses Werk berechnet ist, die Zeichnungen nach gegebenen Dispositionen ausgeführt werden müssen. Vor Jahren schon haben wir dies in einem ähnlichen Unterricht aber nach einer Methode praktiziert, welche uns zweckmässiger erscheint als das Kopieren. Wir geben einzelne Punkte durch x , y , z und können dadurch die verwickeltesten Aufgaben mit wenigen Zahlen fixieren und leicht mit den Dispositionen wechseln.

Was die Zeichnungen selbst betrifft, so sind diese als Figuren zu dem Textbuche gedacht und bringen die bekannten Konstruktionen eines elementaren Lehrganges. Derselbe vermeidet so viel als möglich allgemeine theoretische Erörterungen und geht stets schnell auf die speziellen Fälle über. Es hat das gewisse Vorzüge und leuchtet besonders den Praktikern ein. Wir bekennen aber, dass wir auch auf dieser Stufe einen etwas allgemeineren Aufbau vorziehen, dem bestimmt formulierte Aufgaben eingefügt werden. Wir glauben, dass dadurch der Schüler einen gewissen Überblick erhält, sich nach und nach vom besonderen Falle frei macht und sich im Raume zurecht finden lernt. Und das ist ja doch Hauptzweck des Unterrichtes und weniger der, eine musterhafte Sammlung von einzelnen Fällen mit allerlei koloristischen Zuthaten ausgeführt zu haben.

Die Blätter der Sammlung sind vorzüglich gezeichnet. Oft werden die Farben in geschickter Weise angewendet, besonders zur Unterscheidung der Linien. Weniger können wir uns mit dem Anstreichen von ganzen Flächen befreunden und manche Blätter sind dadurch sehr unruhig geworden. Auch wird oft das Hervortreten des räumlichen Gegenstandes durch alle diese roten, gelben und blauen Flächen nur beeinträchtigt. Mit einfachen, zum Teile kräftigen, zum Teile schwachen schwarzen Linien lässt sich für die räumliche Vorstellung viel mehr erreichen — ganz abgesehen davon, dass die Malerei viel Zeit braucht, oft misslingt und dem Schüler schliesslich als Hauptsache bei dem ganzen Unterrichte erscheint. Will man absolut ganze Flächen durch Farben auszeichnen, so geschieht es am einfachsten und schnellsten durch Schraffieren mit farbigen Stiften.

Verwirrend finden wir es auch, wenn die oft wiederkehrende Konstruktion, mit der z.B. Punkte einer Kurve gefunden werden müssen, immer wieder vollkommen ausgezogen wird. Das giebt ein Meer von farbigen Linien, in welchen das Raumbild untergeht. Dass überdies bei den Konstruktionen Proben angegeben und Linien gesparrt werden sollen und dass für die Zeichnung der Kurven oft die Tangenten sehr nützlich sind, darauf ist wenig Bedacht genommen.

Zum Schlusse bemerken wir noch, dass wir es kaum wagen würden, durch Schüler soviel auf einem Blatte ausführen zu lassen als auf den vorliegenden Blättern verlangt wird. Wir ziehen für die einzelnen Figuren einen grösseren Maßstab vor und begnügen uns mit weniger Figuren. Soll der Schüler selbstthätig mitkonstruieren, so wird ihm das Verständnis durch eine grosse Figur erleichtert, und einem Raumbilde dürfen nicht andere im Wege stehen. Auch weiss jeder Lehrer, dass die Blätter, an denen allzu lange gearbeitet wird, durch das Lagern nicht gewinnen.

Wir denken, dass manche technische Schule das vorliegende Werk ihrer Sammlung von Vorlageblättern einverleiben wird und dass manche Lehrer aus denselben lernen können. Aber wir hoffen dann, dass sie unabhängig davon ihren Unterricht abwechselnd nach den jeweiligen Bedürfnissen gestalten und vor allem ihre Schüler davor bewahren werden, diese technisch so reizvoll ausgeführten Blätter zu kopieren.

Dr. BEYEL.

TANNERY et MOLK: *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*. Paris, Gauthier-Villars. Tome I, 1893; tome II, 1896; tome III, 1898.

Von dem in der Überschrift genannten Werke sind bisher drei Bände erschienen und zwar resp. in den Jahren 1893, 1896 und 1898. Da seit dem Erscheinen der beiden ersten Bände schon einige Jahre verflossen sind, dürfte es wohl als das richtige erscheinen, dieselben nur kurz zu behandeln, dagegen den soeben erschienenen dritten Band etwas ausführlicher zu besprechen.

In der Einleitung zu ihrem Werke setzen die Herren Verfasser es als Aufgabe und Zweck desselben die Studierenden zu befähigen, leichte Anwendungen der elliptischen Funktionen durchzuführen und die vorhandene Litteratur, vor allem das Werk von Halphen, sowie die Arbeiten von Weierstrass, Abel, Jacobi, Kronecker und Hermite zu verstehen. Die Absicht der Herren Verfasser dürfte in vollstem Maße erreicht sein. Das Werk muss als eine wichtige Erscheinung in der Litteratur über periodische Funktionen bezeichnet werden. Als charakteristische Eigenschaften sind die Klarheit, sowie die mathematische Schürfe und Gründlichkeit hervorzuheben, die sich durchweg in den drei ersten Bänden zeigt, daneben die gleichmässige Behandlung der Jacobischen und der Weierstrassschen Funktionen. Die Herren Verfasser sind mit Recht der Ansicht, dass viele der wichtigsten Eigenschaften sowohl in der Algebra wie

in der Arithmetik erst hervortreten, wenn man die Perioden trennt und damit die Thetafunktionen einführt, während andererseits für eine Fülle von Anwendungen, besonders in der Geometrie und Mechanik die Weierstrassschen Funktionen entschiedene Vorzüge besitzen.

Der erste Band beginnt mit einer ausführlichen funktionentheoretischen Einleitung, die im Weierstrassschen Sinne gehalten ist. Von den unendlichen Reihen und Produkten ausgehend, führt dieselbe zu der Definition der analytischen Funktion. Den Schluss der Einleitung bildet die Betrachtung der ganzen und gebrochenen transzendenten Funktionen, für welche die Produkt- resp. Partialbruchentwicklung gegeben wird. Das Problem, ganze transzendenten Funktionen mit gewissen vorgeschriebenen Nullstellen zu konstruieren, führt zur σ -Funktion, aus welcher sich die ζ - und p -Funktion unmittelbar ergibt. Aufgabe der folgenden Entwicklungen des ersten Bandes ist es, die elementarsten und wichtigsten Eigenschaften der eingeführten Funktionen auseinander zu setzen.

Der zweite Band beschäftigt sich zunächst in eingehender Weise mit den Thetafunktionen, die sich aus den Reihenentwicklungen der σ -Funktion ergeben. In besonders ausführlicher Weise wird die lineare Transformation untersucht und zwar nicht nur die der Thetafunktionen, sondern auch einiger anderer mit ihnen aufs engste zusammenhängenden Funktionen, vor allem der bekannten Funktionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$, welche Hermite bei seiner berühmten Auflösung der Gleichungen 5. Grades eingeführt hat. Es folgt die quadratische und die allgemeine Transformation, wobei die Produktentwicklung der transformierten Funktionen in erster Linie berücksichtigt wird. Das Hermitesche Prinzip und die Anwendung desselben auf die Ableitung von Thetarelationen bildet den Schluss des auf die Thetafunktionen bezüglichen Abschnittes.

Demselben schliesst sich die Theorie der σ -Quotienten und der Jacobi'schen elliptischen Funktionen an, die in ganz ähnlicher Weise wie die der Thetafunktionen durchgeführt wird. Auch hier sind bei der allgemeinen Transformation in erster Linie die Produktdarstellungen untersucht. Am Schlusse findet sich eine Zusammenstellung der wichtigsten in den beiden ersten Bänden entwickelten Formeln. Es ist das von besonderer Bedeutung für das Verständnis, da die Zahl der von den Herren Verfassern eingeführten Grössen und abgeleiteten Formeln eine recht bedeutende ist. Ohne eine zusammenfassende Darstellung der gewonnenen Resultate würde die Übersicht leicht verloren gehen. Bei der Wahl der Bezeichnungen weichen die Herren Verfasser einige Male von den in deutschen Lehrbüchern gebrauchten ab, so bezeichnen sie z. B. die vier Thetafunktionen durch $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_4(v)$.

Der dritte Band beschäftigt sich mit allgemeineren Theorien als die beiden ersten (die Einleitung ausgenommen). Im ersten Kapitel wird der Cauchy'sche Integralsatz entwickelt und dazu verwandt, um die Summenentwicklung und die wichtigsten Eigenschaften der doppeltperiodischen Funktionen der drei Arten — die in voller Allgemeinheit definiert werden — in eleganter Weise zu entwickeln. Aus der Summendarstellung ergeben sich

durch Zurückführung auf die ξ -Funktionen die bekannten Produktdarstellungen derselben Funktionen.

Im zweiten Kapitel werden zunächst auf Grund der gewonnenen allgemeinen Sätze einige zum Teil schon früher bewiesene einfache Eigenschaften der Weierstrassschen Funktionen abgeleitet, dann aber wird die Entwicklung der p -Funktion in unendliche Reihen durchgeführt. Bei dieser Gelegenheit wird in recht ausführlicher Weise das Problem besprochen, die einzelnen Potenzen von $p(v)$ durch die Differentialquotienten von $p(v)$ darzustellen, ein Problem, welches für die Integration von $p^n(v)$ von Bedeutung ist. Sodann werden in analoger Weise die Jacobischen Funktionen untersucht, wobei bei der Funktion cnu die bekannte Hermite'sche Methode der Reihenentwicklung hinzugezogen wird, die auf der Transformation zweiten Grades beruht.

Im dritten Kapitel handelt es sich darum, die gefundenen Sätze dazu zu verwerten, um Beziehungen allgemeiner Art zwischen gewöhnlichen doppelperiodischen Funktionen herzustellen und zwar entweder Differentialbeziehungen oder algebraische Beziehungen. Nach ersterer Beziehung begnügen sich die Herren Verfasser mit der Ableitung der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades, denen eine jede doppelperiodische Funktion zweiter Ordnung Genüge leisten muss; die algebraischen Beziehungen dagegen sind in reicherer und ausgiebiger Weise entwickelt worden. Hier findet sich z. B. der Satz, dass eine jede doppelperiodische Funktion mit den Perioden $2\omega_1, 2\omega_2$ sich rational durch zwei doppelperiodische Funktionen z und t darstellen lässt, wenn z von der Ordnungszahl m ist und die einem Werte von z entsprechenden Werte von t im allgemeinen von einander verschieden sind, und ähnliche Sätze.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit der allgemeinen Addition und Multiplikation. In Bezug auf erstere wird die bekannte Formel abgeleitet, welche von Kiepert im 76. Bande des Crelleschen Journals mitgeteilt worden ist und eine Determinante aus p -Funktionen und deren Ableitungen durch σ -Funktionen darstellt, daneben wird eine kurze Darstellung der Jacobischen Funktionen $sn u, cn u, dn u$ für $u = u_1 + u_2 + \dots + u_{2n-1}$ gegeben. Die Theorie der Multiplikation beschränkt sich auf die Weierstrassschen Funktionen. Sie knüpft an die vorhin angedeutete Formel für die Addition an und giebt eine Darstellung von $\sigma(nu): \sigma^{n^2}(u)$ in Determinantenform. Daneben wird eine zweite Darstellung in der Produktform gegeben und gezeigt, wie aus den entwickelten Formeln die Multiplikation von $p(u)$ hergeleitet werden kann. Ein tieferes Eindringen in die allgemeinen Theorien findet nicht statt.

Das fünfte Kapitel hat die Entwicklung der doppelperiodischen Funktionen in trigonometrische Reihen zum Gegenstande. In sehr strenger und präziser Weise wird wiederum mit Hilfe von Integraltheorien gezeigt, dass und wie sich die sechzehn Quotienten $\vartheta_\alpha(v+w): \vartheta_\beta(v)$ in trigonometrische Reihen entwickeln lassen, und zwar werden drei verschiedene Formen der Entwicklung gegeben. Aus ihnen ergeben sich durch passend

gewählte Werte der Variablen u und v interessante Ausdrücke für die gewöhnlichen Thetaquotienten, die reziproken Thetafunktionen und deren Quadrate, endlich für die reziproken Produkte von je zwei Thetafunktionen. Das allgemeine Problem gehört zur Theorie der Funktionen zweiter Art, die speziellen Probleme mit Ausnahme des ersten in die Theorie der Funktionen dritter Art. Weitergehende Entwicklungen aus der Theorie der Funktionen dritter Art finden sich nicht vor. Das Kapitel schliesst mit der Entwicklung einiger Konstanten in q -Reihen.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit den Integralen allgemeiner doppeltperiodischer Funktionen erster Art längs beliebig vorgeschriebener Wege. Es wird zunächst der Fall erledigt, dass das Integral geradlinig ist und die Grenzen sich nur um Perioden unterscheiden, dann aber der allgemeine Fall besprochen. Derselbe reduziert sich auf die Betrachtung des Integrals der Funktion $\zeta(u - a)$. Alle Integrale dieser Funktion sind bis auf Multipla von $2\pi i$ bestimmt. Die Schwierigkeit besteht in der Auswertung dieses Multiplums. Das Problem wird auf doppelte Weise gelöst, auf die zweite Weise unter der Voraussetzung, dass $\frac{\tau}{i}$ reell und positiv ist. An einzelnen Beispielen wird die Anwendbarkeit der Methode gezeigt.

Im siebenten Kapitel wird im wesentlichen das Problem behandelt, bei gegebenem k^2 die entsprechenden Werte von τ zu bestimmen. Wenn k^2 weder negativ noch positiv und grösser als 1 ist, so wird eine Lösung in der Form eines Quotienten zweier einfacher elliptischer Integrale dargestellt. Die lineare Transformation giebt dann alle Lösungen des gestellten Problems. Die Untersuchung der beiden elliptischen Integrale führt zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die ihrerseits analytische Darstellungen und numerische Berechnungen ermöglicht. Hierbei werden auch die vorhin ausgeschlossenen Fälle von k^2 erledigt.

Die Untersuchung ist mit grosser Ausführlichkeit und mathematischer Schärfe geführt.

Das letzte Kapitel behandelt in ähnlicher Weise bei gegebenem z die Grösse u aus der Gleichung $z = \sin u$ zu bestimmen. Auch hier sind es die Integraltheorien, die zum Ziele führen.

Referent ist geneigt, in den letzten drei Kapiteln die Hauptbedeutung des dritten Bandes zu erblicken, da in ihnen die skizzierten Integraltheorien mit einer solchen Ausführlichkeit und Gründlichkeit behandelt sind, wie nur an wenigen anderen Stellen.

M. KRAUSE.

E. BOREL. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris 1898, Gauthier-Villars. 136 p. 3 Fr. 50 C.

Das vorliegende, Herrn Jules Tannery gewidmete Buch soll weder eine vollständige Entwicklung der Funktionentheorie geben, noch auch deren Prinzipien, die in den berühmten autographierten Vorlesungen von Herrn Hermite eine klassische Darstellung gefunden haben, auf eine neue Basis

stellen. Der Verfasser beabsichtigt neuere Untersuchungen, welche sich auf die Theorie der Bereiche beziehen, soweit sie zu praktischen Anwendungen führen, elementar darzustellen.

In den drei ersten Kapiteln werden die Elemente der Theorie der Bereiche im Anschluss an die Untersuchungen von Weierstrass, Hermite, Liouville und G. Cantor entwickelt. Im besonderen ist das zweite Kapitel den algebraischen und transzendenten Zahlen gewidmet. Nach Besprechung der epochemachenden Hermiteschen und der sich anschliessenden Lindemannschen Untersuchungen geht der Verfasser genauer auf die bezüglichen Liouvilleschen Arbeiten ein und setzt das Liouvillesche Verfahren auseinander, welches zu einer nicht abzählbaren unendlichen Menge transzendenter Zahlen führt.

Die drei letzten Kapitel enthalten Anwendungen der Funktionentheorie. Nachdem auf Grund der Untersuchungen von Weierstrass und Poincaré der Begriff der analytischen Fortsetzung entwickelt worden ist, geht der Verfasser zu dem Begriff der Funktion einer komplexen Variablen über und giebt zunächst eine kurze historische Übersicht, worin er, gegenüber einer Bemerkung Mittag-Lefflers in seinem Nachruf auf Weierstrass, die Verdienste Cauchys um die Funktionentheorie hervorhebt. Hieran schliesst sich eine Darlegung der fundamentalen Begriffe der analytischen Funktion und des analytischen Ausdrucks. Weierstrass hat das Problem gestellt: Kann man einen analytischen Ausdruck bilden, der in jedem Punkte des natürlichen Existenzbereichs einer gegebenen Funktion konvergiert und diese Funktion — und nur diese — darstellt? Die hierher gehörigen Untersuchungen von Mittag-Leffler, Poincaré, Appell, Runge, Painlevé finden eingehende Würdigung.

In drei Anhängen (S. 102—134) geht der Verfasser noch auf den Potenzbegriff bei den Bereichen, auf die G. Cantorsche Zahlen und auf den Begriff der unstetigen und arbiträren Funktionen genauer ein.

E. JAHNKE.

J. THOMAE. Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen. 2. Auflage. Halle a. S., 1898. VIII und 150 Seiten in 4^o.

Hr. Thomae huldigt betreffs der Einführung in die Funktionentheorie der Meinung, dass es ratsam sei, dem Lernenden gleich anfangs die namentlich durch Cantor und Dedekind geschaffenen scharfen Zahlbegriffe zu vermitteln, eine Ansicht, die neucostens an Pringsheim einen besonders beredten Verteidiger fand. Verfasser nennt aber seine Behandlung der Funktionentheorie „elementar“, weil er jede Benutzung der Infinitesimalrechnung vermeidet. Der hiermit bezeichnete Standpunkt ist klar ausgesprochen und vom Verfasser konsequent zur Durchführung gebracht. Allerdings dürfte keinem Zweifel unterworfen sein, dass die Mehrzahl der Studierenden, bereits ausgerüstet mit den Grundsätzen der Differential- und Integralrechnung, an die Funktionentheorie herangeht; und für solche würde

die Verwendung der Infinitesimalrechnung, wie sie vor allem in Cauchys Methoden zur schönsten Entfaltung gelangt, naturgemäss erscheinen. Auch giebt es vielleicht einige Lernende, denen der „Eingang“ in die Funktionentheorie durch ein ausführlicher angelegtes Kapitel „Zahlentheorie“ gegen Anlage und Geschmack ist. Indessen ist durch die beifällige Aufnahme der ersten Auflage bewiesen, dass der Standpunkt des Herrn Verfassers viele Anhänger für sich hat; und es wird zumal heute, wo die von Weierstrass geschaffenen Grundlagen sich durch Hadamard, Borel u. A. zu neuer Blüte entfalten, das vorliegende Buch recht eigentlich als modern bezeichnet werden können.

Gegenüber der ersten Auflage, über welche sich in Bd. 26 dieser Zeitschrift eine ausführliche Anzeige aus Herrn Lüroths berufener Feder findet, sind einige Veränderungen festzustellen. Einmal ist der Verfasser dem Winke Lüroths gefolgt und hat das Kapitel über ϑ -Reihen und doppelt-periodische Funktionen nicht wieder aufgenommen. Hinzugekommen sind eine ausführlichere Untersuchung der Γ -Funktion und des Arcussinus, mehrere allgemeine Sätze der Funktionentheorie, wie z. B. der vom wahren Konvergenzkreise, endlich das Sturmsche Theorem der Algebra.

FRICKE.

K. DOEHLEMANN. Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung.

162 Seiten in 8^o. Sammlung Göschen Nr. 72. Leipzig 1898.

In einem nur 10 Bogen kleinen Oktavformats starken Bändchen behandelt Herr Doehlemann die Grundlagen der neueren projektiven Geometrie für das einführende Studium in klarer wohlgeordneter Darstellung. Über die bei der Abfassung befolgten Grundsätze spricht sich Verfasser zu Beginn seines Werkchens selbst aus. Am bemerkenswertesten ist, dass der Herr Verfasser die konstruktive Seite seines Gegenstandes zum Zwecke der Ausbildung der Raumanschauung besonders in den Vordergrund stellt. Dabei werden aber Rechnungen durchaus nicht prinzipiell ausgeschlossen, sondern überall da, wo es naturgemäss erscheint, herangezogen. Ausführlichere Entwicklungen der analytischen Geometrie giebt Verfasser nicht in extenso, sondern beruft sich vorkommendenfalls auf bekannte Theoreme der analytischen Geometrie. Die ebene Geometrie wird von der räumlichen nicht getrennt, sondern beide werden in unmittelbarer Verbindung behandelt. Die projektiven Maßbestimmungen werden insoweit behandelt, dass die Entstehung der Metrik aus der Projektivität dargethan wird. Aber dem Standpunkte des Buches entsprechend wird jedes Eingehen auf die Nichteuklidische Geometrie gemieden.

FRICKE.

Die Konfiguration des Pascalschen Sechseckes im allgemeinen und in vier speziellen Fällen. Von Dr. LEOPOLD KLUG, Dozent an der Universität Kolozsvár. 132 Seiten und 3 Figurentafeln. Kolozsvár 1898.

Es handelt sich um eine sehr gründliche und klar abgefasste Monographie über die Figur des Pascalschen Sechseckes, dessen Theorie der Herr Verfasser

ab ovo entwickelt und durch verschiedene neue Resultate bereichert. Die eigenen Untersuchungen des Verfassers schliessen sich an die Resultate an, welche Veronese 1876 gewann. Letzterer fand unendlich viele aus je 60 Geraden und 60 Punkten bestehende Konfigurationen, welche z. T. (und insbesondere betreffs der Desarguesschen Figuren) die Eigenschaften der Pascalschen Geraden und Kirkmannschen Punkte besitzen. Verfasser findet und untersucht eine neue Reihe unendlich vieler Systeme zu je 60 Punkten und 60 Geraden, welche zu den Veroneseschen Figuren in einem entsprechenden (nur formalen) Dualismus stehen, wie die Kirkmannschen Punkte zu den Pascalschen Geraden. Verfasser spezialisiert seine Untersuchungen für diejenigen Fälle, dass die Ecken des Sechsecks auf dem zu Grunde liegenden Kegelschnitt einfach bzw. mehrfach involutorisch liegen. Die Involutionsaxen und -zentren sind hier immer mehrfach zählende Pascalsche Gerade bzw. Kirkmannsche Punkte.

FRICKE.

W. SCHELL. **Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung** in rein geometrischer Darstellung. Zweite, erweiterte Auflage. VIII und 163 Seiten. Leipzig 1898.

Das seit lange geachtete Buch Schells zur Einführung in das Studium der Theorie der Raumkurven (die erste Auflage erschien im Jahre 1859) liegt hier in neuer und wesentlich erweiterter Gestalt vor. Jedoch ist der Charakter der ersten Auflage durchaus gewahrt geblieben. Es handelt sich hier nicht um eine mit algebraisch-invariantentheoretischen Mitteln arbeitende projektive Behandlung der Raumkurven, und demnach darf man auch keinerlei Spezialentwicklungen etwa über algebraische Kurven niederer Ordnung oder auch über die Beziehung der Kurventheorie zur Funktionentheorie und Verwandtes erwarten. Verfasser hat auch keinerlei weitgehende Verwendungen des Differentialkalküls beabsichtigt, wie sie in der Differentialgeometrie stattfinden. Vielmehr sind es nur die elementarereren Differentialbegriffe der Kurventheorie (Tangente, Normale, Schmiegungebene, rektifizierende Ebene u.s.w.), welche zu Grunde gelegt werden. Die naturgemässen Verwendungen und Erweiterungen dieser Begriffe bilden das Feld, auf welchem der Herr Verfasser unter möglichster Bevorzugung geometrisch-anschaulicher Überlegung und Zurückdrängung der Rechnung seine Behandlung der Raumkurven durchführt. Die Übersichtlichkeit und Klarheit der Darstellung werden der neuen Auflage viele neue Freunde erwerben.

FRICKE.

H. ANDOYER. **Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques**, à l'usage des candidats à l'agrégation des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, Paris 1898. 184 p. 8 Fr.

Die vorliegenden Vorlesungen bilden den ersten Teil eines grösseren Werkes über Formentheorie, welches der Verfasser in Vorbereitung hat.

Es wird in fünf Kapiteln (S. 1—110) die Invariantentheorie für die binären und ternären Formen vollständig, doch möglichst elementar entwickelt, wobei sich der Verfasser bei den binären Formen auf die Untersuchung der Formen der vier ersten Grade und der bilinearen Form, bei den ternären Formen auf die Untersuchung der linearen, quadratischen und bilinearen Formen beschränkt. Zur Vermeidung von Wiederholungen sind die beiden ersten Kapitel (S. 1—54) der allgemeinen Theorie der invariantiven Bildungen gewidmet.

Die folgenden vier Kapitel enthalten Anwendungen. Im besonderen behandelt der Verfasser die Polarentheorie, die Theorie der Singularitäten, wo die Plücker'schen Formeln hergeleitet werden, und die homographische Korrespondenz.

Bei der musterhaften Klarheit und elementaren Einfachheit, in der die Vorlesungen gehalten sind, können dieselben dem Studenten, sowie allen, denen daran liegt sich möglichst schnell in die Formentheorie und ihre geometrischen Anwendungen einzuarbeiten, angelegentlichst empfohlen werden.

E. JAINKE.

Corso di calcolo infinitesimale di GIULIO VIVANTI, professore nella R. Università di Messina. Messina 1899. Libreria editrice Ant. Trimarchi. 576 p.

Das Kennzeichnende an Vivanti's Infinitesimalrechnung ist das Bestreben, äusserste Strenge mit Verständlichkeit zu vereinigen und in den Fällen, in welchen eine solche Vereinigung nicht möglich erscheint, nur insoweit auf die Strenge zu verzichten, dass der Verzicht ausdrücklich ausgesprochen und durch irgend ein bestimmtes Beispiel belegt ist, welches eine Ausnahme von der im allgemeinen gültigen Regel erläutert. Jene Strenge zu erzielen, ist eine umfangreiche Einleitung vorausgeschickt, welche, nachdem der Begriff des bestimmten Integrals an der Quadratur eines ebenen Flächenstückes, der der Ableitung an der ungleichmässigen Bewegung erkannt ist, das Prinzip der Einsetzung unendlicher kleiner Grössen ausspricht, worunter Herr Vivanti versteht, dass

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots}{\beta + \beta' + \beta'' + \dots},$$

wenn $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \beta, \beta', \beta'', \dots$ unendlich klein und zwar α', α'', \dots unendlich klein von höherer Ordnung als α und β', β'', \dots unendlich klein von höherer Ordnung als β werden. Nun folgt ein Abriss der Mengenlehre und in ihm der Lehre von den Successionen. Der Begriff des Grenzwertes wird schärfer gefasst, der der Stetigkeit erklärt und beiläufig als nicht identisch mit dem der gleichmässigen Konvergenz einer Reihe bezeichnet. Wie bei den Funktionen einer einzigen Veränderlichen wird auch bei solchen mit mehreren und insbesondere mit zwei Veränderlichen die Stetigkeit untersucht. Soweit der erste Abschnitt des Buches. Im zweiten Abschnitte ist von den Ableitungen und den Integralen der Funktionen einer reellen Ver-

änderlichen die Rede, und wir bemerken, dass im ganzen Bande diese Beschränkung auf reelle Veränderliche festgehalten bleibt. Die Differentierbarkeit wie die Integrität werden untersucht, letztere mit Rücksicht auf das bestimmte Integral, von welchem aus erst der Zugang zum unbestimmten Integrale gewonnen wird. Dann folgen Betrachtungen über die Integrität einer Reihe. Mit § 102, dem ersten des Kapitels über Ableitungen und Integrale der elementaren Funktionen, lenkt das Buch in aus anderen Druckschriften über Infinitesimalrechnung bekannte Bahnen ein, ohne dass damit gesagt sein soll, es lasse von da an jede Eigentümlichkeit vermissen. Aber die Herleitung der Taylorsche Reihe mit Hilfe von Rolles Lehrsatz, die Aufsuchung von Maximal- und Minimalwerten, von Funktionen einer Veränderlichen, die Auswertung unbestimmter Formen, die Aufstellung von bei Integrationen unentbehrlichen Reduktionsformeln sind häufig ganz ähnlich gelehrt worden. Nun kommt der dritte Abschnitt von den Ableitungen und Integralen der Funktionen mehrerer Veränderlichen, aus welchem wir die Lehre von den homogenen Funktionen und die von den Funktionaldeterminanten hervorheben, welche in grösserer Ausführlichkeit auftreten, als man es sonst gewohnt ist. Der vierte Abschnitt von den geometrischen Anwendungen, der fünfte von den Differentialgleichungen, der sechste von der Variationsrechnung ähneln wiederum mehr dem landläufigen Gange. Aus allen Abschnitten könnten wir Einzelheiten namhaft machen, in welchen meistens, wie wir am Anfange sagten, gewisse Ausnahmefälle an Beispielen erläutert werden. In fast zufälliger Auswahl wollen wir solche hervorheben. Auf Seite 61 ist das Prinzip der Einsetzung unendlich kleiner Grössen zur Auffindung von

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin a}{\operatorname{tng}(a+x) - \operatorname{tng} a} = \cos a^3$$

benutzt. Das Aufhören der Wahrheit von $\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = 0$ trotz $\lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \dots = \lim \alpha_n = 0$ unter der Voraussetzung $n = \infty$ ist auf Seite 62 an $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ dargethan. Auf Seite 70 ist die Unstetigkeit von $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ bei $x = 0, y = 0$ erörtert. Auf Seite 75 erscheint die

ableitungslose Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ bei $a < 1$ und b als ungerader Zahl.

Auf Seite 140 ist von dem bei $x = 0$ auftretenden Minimum von $e^{-\frac{1}{x^2}}$ die Rede, welches der Auffindung durch die gewöhnlichen Mittel sich entzieht. Auf Seite 212 ist die Funktion $xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ erörtert, deren zweiter partieller Differentialquotient im Nullpunkte verschiedene Werte annimmt, je nachdem erst nach x und dann nach y oder erst nach y und dann nach x differenziert wird. Als die Umkehrung der Integrationsfolge trotz konstanter endlicher Grenzen nicht gestattend, ist auf Seite 261 angegeben

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Auf Seite 317 ist von den Skrupeln gesprochen, welche mit Scheeffers Untersuchungen dem Begriffe der Kurvenlänge entgegengebracht werden, und auf Seite 397 von den Bedenken, welche H. A. Schwarz in Bezug auf die Komplanation von krummen Flächenstücken angeregt hat. Auf Seite 429 sind Krümmungsmaße von Oberflächen nach Gauss, nach Sophie Germain, nach Casorati erwähnt. Man mag diesen Beispielen entnehmen, dass H. Vivanti an den Schwierigkeiten nicht stumm vorübergeht. Die Ausstattung des Buches ist eine gefällige und kann ihm gleichfalls zur Empfehlung dienen.

CANTOR.

Éléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens.
Cours professé à l'École centrale des Arts et Manufactures par
M. APPELL, membre de l'Institut. Paris 1898. Georges Carré et
C. Naud. 719 p.

Es gehört zu den Eigentümlichkeiten, durch welche französische Mathematiker hoher wissenschaftlicher Stellung sich von deutschen Fachgenossen gleichen Ranges seit vielen Jahrzehnten unterscheiden, dass Erstere neben den dem Fortschritte der Wissenschaft dienenden neuen Untersuchungen auch Lehrbücher ziemlich elementaren Inhaltes zu schreiben für nicht unangemessen ansehen, während letztere meistens ein Übriges zu thun glauben, wenn sie eine Vorlesung über solche Gegenstände halten. Wollte man dem Grunde dieser Eigentümlichkeit nachspüren, so würde man ihn vermutlich in der wissenschaftlichen Centralisation Frankreichs finden, welche uns Deutschen fremd ist, ob zu unserem Nutzen oder zu unserem Schaden ist der Thatsache gegenüber gleichgiltig. Auch Herr Appell, ein noch verhältnismässig junges Mitglied der Pariser Akademie (er ist 1855 in Strassburg geboren), hat der französischen Sitte huldigend Elemente der mathematischen Analysis verfasst, ein Lehrbuch, welches den Inhalt seiner Vorträge an der höheren Gewerbeschule in Paris, wie man *École centrale des Arts et Manufactures* wird übersetzen dürfen, wiedergibt. Freilich ist der Begriff der Elemente selbst ein von Ort zu Ort wechselnder, und wir bekennen, dass wir mit einiger Verwunderung auf Seite 21 lesen, die Ableitungen der einfachen Funktionen seien schon aus der Algebra bekannt, auf Seite 197 die gleiche Verweisung bei der Auswertung unbestimmter Formen wie auf Seite 126 bei der Zorlegung eines Bruches in Partialbrüche fanden. Deutschen Studierenden wird aus diesem Grunde das neue Lehrbuch nicht empfohlen werden können. Mit um so grösserem Interesse wird der Lehrer sich des Werkes bedienen können, um demselben bald da bald dort fesselnde Beispiele oder das Verständnis vertiefende Erläuterungen zu entnehmen, die uns wenigstens in dem Grade neu waren, dass wir geneigt sind, in ihnen Herrn Appells geistiges Eigentum zu erblicken. Greifen wir einige solche Einzelheiten heraus. Sind die Grössen $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$, unendlich klein und $\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1$ sowie $\lim \frac{\gamma'}{\gamma} = 1$, so ist $\lim \frac{\beta'}{\gamma'} = \lim \frac{\beta}{\gamma}$. Ein zweiter

Satz über unendlich kleine Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, welche dem Gesetze $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \dots = \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$ gehorchen, besteht in

$$\lim \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right) = 1,$$

aber dieser Satz gilt nur, wenn sämtliche α und β gleichen Vorzeichens sind. Ist z. B. $\alpha_1 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{2\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$,

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_{2\mu} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

nebst $\beta_1 = \beta_3 = \dots = \beta_{2\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\beta_2 = \beta_4 = \dots = \beta_{2\mu} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, so wird die

Summe der β als 0, die der α als $\frac{2\mu}{n}$ erscheinen, welcher letzterer Wert bei $2\mu = n$ zu 1 wird, und dann ist $\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = 0$. Wo von Reihen-

entwickelungen die Rede ist, wird der Satz ausgesprochen, im allgemeinen sei $f(x)$ die Summe einer aus dieser Funktion hergeleiteten Reihe, aber es gebe auch Fälle, in welchen diese Behauptung nicht zutreffe, und deshalb müsse sie von Fall zu Fall bewiesen werden. Für die Sinus- und Cosinus-

reihe wird dann der Beweis folgendermaßen geführt. Sei $x = \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = u$

und $1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots = v$, so zeigt sich $\frac{du}{dx} = v$, $\frac{dv}{dx} = -u$, mithin

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0.$$

Daraus folgt $u^2 + v^2 = C$. Aus den Reihen ist ersichtlich $u_{(x=0)} = 0$, $v_{(x=0)} = 1$, mithin $u^2 + v^2 = 1$, $v = \sqrt{1-u^2} = \frac{du}{dx}$, $x = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$, $u = \sin x$.

Um zu zeigen, dass die Differentiation unter dem Integralzeichen nur dann gestattet ist, wenn dadurch ein Integral entsteht, dem ein bestimmter Sinn

innewohnt, wird $\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx$ nach λ differentiert. Differentiation unter dem Integralzeichen würde das sinnlose $\int_0^\infty \cos \lambda x dx$ hervorbringen und ist nicht gestattet. Damit sei aber keineswegs gesagt, man könne $\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx$ nicht

nach λ differentieren, sondern nur, dass man anders als gewöhnlich zu verfahren habe. Mittels der Substitution $\lambda x = u$ wird

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

von λ unabhängig, also $\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx = 0$. Mit besonderer Vorliebe hat

Herr Appell die geometrischen Kapitel behandelt, die demzufolge weit ausgiebiger geworden sind, als man sie in anderen Werken über Differential-

und Integralrechnung antrifft. Der geometrischen und analytischen Abteilung gemeinsam möchten wir es nennen, dass wiederholt auf die bestimmte Integration längs einer Kurve eingegangen ist, ein Gegenstand, den wir uns nicht erinnern in anderen Werken verhältnismässig elementarer Art angetroffen zu haben. Die Ausstattung des Bandes ist eine glänzende. Leicht zu verbessernde Druckfehler sind uns auf S. 6 Zeile 6, S. 181 Zeile 3 und 4, S. 188 Zeile 11, S. 217 Zeile 11, S. 381 Zeile 4, S. 487 Zeile 9 aufgestossen.

CANTOR.

Text-Book of Algebra with exercises for secondary schools and colleges
by GEORGE EGBERT FISHER, M. A., Ph. D. and ISAAC J. SCHWATT, Ph. D.
assistant professors of mathematics in the university of Pennsylvania.
Part. I. Philadelphia 1898. Fisher and Schwatt. XIII, 683 p

Unter dem Namen der Algebra verstehen Engländer wie Franzosen meistens dasjenige, was im Deutschen Buchstabenrechnung heisst, nebst den Anfängen der Lehre von den Gleichungen. Auch der heute uns vorliegende erste Band eines Lehrbuches der Algebra verlangt die erwähnte Deutung seines Titels. Er enthält die Buchstabenrechnung bis zur und mit Einschluss der Potenzrechnung, aber ohne Logarithmen, welche mutmaßlich dem zweiten Bande vorbehalten sind, und Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Als kennzeichnend ist die grosse Menge von Beispielen hervorzuheben, welche das Lehrbuch zugleich zu einem Übungsbuche macht, und das Bestreben, bei grösster Verständlichkeit der Wissenschaftlichkeit ihr Recht angeedeihen zu lassen. So ist beispielsweise an die Spitze der Lehre von den Gleichungen der Begriff der äquivalenten Gleichungen gestellt, worunter verstanden wird, dass alle Werte der Unbekannten, welche die eine Gleichung erfüllen, auch der anderen genügen und umgekehrt. Man sieht sofort, wie an diesen Seite 156 entwickelten Begriff im ganzen Verlaufe des Bandes angeknüpft werden muss und kann, wo es sich um das Verlorengehen oder um das Hinzutreten von Gleichungswurzeln handelt. Letzteres ist insbesondere beim Wegheben von Brüchen und beim Rationalisieren zu befürchten, und man wird gern bei den Auseinandersetzungen verweilen, welche auf die bei der Weghebung von Brüchen zu beobachtende Vorsicht hinweist. Auch dass ein ganzes Kapitel (Seite 439—454) den anderwärts recht stiefmütterlich behandelten Ungleichungen eingeräumt ist, verdient Beifall. Da die Verfasser in ihrer Vorrede geradezu darum bitten, man möge mit Ausstellungen nicht zurückhalten, so wollen wir auf zwei Gegenstände hinweisen, welche, wie uns scheint, der Änderung bedürfen. Seite 45 wird als Beweis der Kommutativität der Addition ausgesprochen, die Gesamtsumme von Einheiten sei die gleiche, wie man sie auch in Gruppen fasse oder anordne. Das ist kein Beweis, sondern eine Tautologie. Entweder muss also die Kommutativität der Addition als Forderung ausgesprochen werden, oder die Herren Verfasser müssen einen anderen Beweis geben. Ferner ist Seite 453 aus

$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^n$ wenn $a > b$ die Folgerung gezogen, es müsse $\left(\frac{a}{b}\right)^\infty = \infty$ sein, wenn $a > b$. Dass fortwährendes Wachsen nicht ein Wachsen ins Unendliche bedingt, zeigt auf ganz elementarem Gebiete jeder unendliche Dezimalbruch. Es muss um so mehr verwundern, dass die Herren Verfasser sich diesen Trugschluss entgehen liessen, als auf der gleichen Seite 453 unter Nr. 17 der Satz $(1+d)^n > 1+nd$ bewiesen ist, aus welchem sie die von ihnen für spätere Benutzung gewünschte Folgerung in aller Strenge hätten ziehen können.

CANTOR.

Höhere Analysis. 1. Teil: Differentialrechnung von Dr. FRIEDRICH JUNKER.
Mit 63 Figuren. 192 S. Leipzig 1898 (Sammlung Göschen).

Das Nichtvorhandensein einer Vorrede ist für den Berichterstatter über ein Buch stets sehr unbequem. Jeder Verfasser hat das Recht, nach den Zwecken, die er verfolgt, beurteilt zu werden, aber woran soll man diese Zwecke erkennen, wenn der Verfasser sich nicht darüber äussert? Man muss dann aus der Art des Buches auf die Absicht des Verfassers schliessen und trifft diese vielleicht nicht vollständig. Mit diesem Vorbehalte kennzeichnen wir das uns vorliegende Bändchen als dazu bestimmt, einen Einblick in die Aufgaben der Differentialrechnung und in die Mittel, welche sie zur Auflösung dieser Aufgaben anwendet, zu gewähren. Weder Vollständigkeit noch besondere Strenge sind angestrebt, vielmehr ist meistens das leichte Verständnis der Regeln vorzugsweise beabsichtigt und auch wohl erreicht. Für viele Leser genügt es ja thatsächlich, wenn beispielsweise auf Seite 93 die Maclaurinsche Reihe für den Fall ihrer Konvergenz hergeleitet und alsdann hinzugefügt wird, man müsse, wenn die Reihe nicht konvergiere, ein Restglied beifügen, welches nach Lagrange $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x)$ heisse. Andere Stellen sind ähnlicher Art. Unrichtigkeiten wird man sie nicht schelten, wenn auch schwerlich viele Lehrer der Differentialrechnung geneigt sein dürften, von ihren Schülern eine so weitgehende Genügsamkeit zu beanspruchen. Aber das eigentliche Differentieren, die Auswertung unbestimmter Formen, die Lösung von Maximal- und Minimalaufgaben, Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie und Mechanik wird der Leser ganz gut erlernen.

CANTOR.

Calcul de généralisation par P. OLTRAMARE, doyen de la faculté des sciences de l'université de Genève. Paris 1899. Librairie scientifique A. Hermann. VIII, 191 p.

Schon 1893 hat Herr Oltramare in Genf einen Essai sur le calcul de la généralisation dem Drucke übergeben, der im 40. Bande dieser Zeitschrift Hist. litter. Abtlg. S. 94—95 durch Herrn W. Franz Meyer angezeigt wurde. Wir sind nicht in der Lage angeben zu können, ob der dem Essai nunmehr gefolgte Calcul, der auf 191 Seiten angewachsen ist,

während jener nur 132 Seiten umfasste, sehr viel Neues enthält. Jedenfalls haften ihm die gleichen kennzeichnenden Merkmale an, welche bei dem Essai hervorgehoben wurden: formale Fruchtbarkeit ohne materielle Sicherung des Hervorgebrachten, da jede Untersuchung über Giltigkeit der Entwicklungen, welche unser geschätzter Mitarbeiter damals als unerlässlich nachforderte, abermals unterblieben ist.

CANTOR.

Opinions et curiosités touchant la mathématique d'après les ouvrages français des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles par GEORGES MAUPIN, licencié ès sciences mathématiques et physiques, membre de la société mathématique de France, surveillant général au lycée de Nantes. Paris 1898. Georges Carré et C. Naud. 199 p.

Das kleine hübsch ausgestattete Buch ist offenbar für Nichtmathematiker bestimmt, welche aus ihm zahlreiche sonderbare und unterhaltende Geschichten und Meinungsäußerungen von Leuten kennen lernen, welche Mathematiker waren oder sich für solche hielten. Die meisten genannten Schriftsteller sind der Aussage der Titelworte entsprechend Franzosen, wenn diese Beschränkung auch nicht durchweg festgehalten ist. Mathematische Leser würden vielleicht vorziehen zu erfahren, was eigentlich in den mit Grund berühmten Schriften eines Barrême, eines Prestet, eines Lamy stehe, als dass sie mit Bruchstücken aus Vorreden und dergleichen sich begnügen müssen und ausserdem eine Anzahl von Namen kennen lernen, welche des Behaltens wenig würdig erscheinen. Der Verfasser ist auf den Unterricht an den Mittelschulen, wie er in Frankreich erteilt zu werden pflegt, recht übel zu sprechen, und benutzt jede Gelegenheit, über ihn loszuziehen. Die lateinische Sprache und die auf ihre Erlernung verwandte Zeit scheint ihm ganz besonders Ärger zu bereiten. Dem Referenten waren diese Auslassungen besonders lehrreich, wenn er sie in Vergleich mit den Behauptungen gewisser deutscher Schulmänner brachte, welche sich von dem vorausgehenden französischen Unterricht viel, wenn nicht alles für die Abkürzung des lateinischen Unterrichtes versprechen. Französische Knaben pflegen doch französisch zu können, wenn sie in die Mittelschule eintreten, und dennoch bedürfen sie eines so langatmigen lateinischen Unterrichtes? Wie reimt sich das zusammen? Der ehemals allgemeine Gebrauch der lateinischen Sprache als ausschliessliche Gelehrtensprache, über welchen der Verfasser gleichfalls den Stab bricht, war übrigens so übel nicht, und Referent bedauert herzlich, dass es nicht bei der alten Übung blieb, welche jetzt neuerdings einzuführen freilich eine Unmöglichkeit geworden ist. Noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts war jedes wissenschaftliche Werk jedem Gelehrten in Europa zugänglich und heute? Herr Maupin beklagt es vielleicht nicht, so und so vielen weder französisch noch lateinisch geschriebenen Werken fremd gegenüber zu stehen, aber sein Buch würde durch das Gegenteil vielleicht gewonnen haben.

CANTOR.

Bestimmung der Gravitationskonstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde durch Wägungen. Von FRANZ RICHARZ und OTTO KRIGAR-MENZEL. Mit 4 Tafeln. 4^o. Berlin 1898. Verlag der königl. Akademie der Wissenschaften (G. Reimer). 196 S.

Durch diese Schrift, welche als Anhang zu den „Abhandlungen“ der Berliner Akademie erschien, ist die langjährige Untersuchung, welche die beiden Autoren der exakten Bestimmung der Erdschwere und Erddichte gewidmet haben, zum Abschluss gekommen. Das dabei verwendete Instrument war die Wage, die nun einmal von allen Apparaten unzweifelhaft die grösste Genauigkeit gewährt, und so war es vollkommen gerechtfertigt, auch wieder auf das Wägungsverfahren zurückzugreifen. Dasjenige, welches hier zur Anwendung kommt, hat jedoch sowohl gegenüber demjenigen v. Jollys, als auch im Vergleiche mit demjenigen Poyntings seine entschiedenen Vorzüge. Die 1884 zuerst von Richarz und A. Koenig angebahte Verbesserung besteht nämlich darin, dass zwischen die oberen und unteren Schalen der Doppelwage, wie sie v. Jolly im Münchner Universitätsgebäude angebracht hatte, ein massenkräftiger Körper gebracht wurde, so dass, wenn wir kurz dessen Anziehungskraft mit a bezeichnen, die Schwere am Orte der oberen Wageschalen um a vergrössert und am Orte der unteren Wageschalen um a vermindert wurde. Dadurch wurde, je nachdem man den Zwischenkörper aus- und einschaltete, die vierfache Attraktion des letzteren ermittelt. Das königl. preuss. Kriegsministerium stellte einen parallelepipedischen Bleiklotz von 100000 kg Gewicht und ausserdem eine Spandauer Kasematte als Versuchsraum zur Verfügung. Hier wurde denn also seit einer Reihe von Jahren experimentiert; als ein interessantes Nebenresultat der dem Hauptziele zugewandten Arbeiten sei das vermerkt, dass man die Abnahme der Schwere mit der Höhe selbst für die geringen Vertikaldimensionen eines gewöhnlichen Zimmers sinnfällig nachzuweisen imstande ist. Durch Dr. Richarz Habilitation in Bonn und Berufung an die Universität Greifswald, sowie durch anderweite Zwischenfälle wurden die Beobachtungen, an denen Dr. Koenig bis 1889, Dr. Krigar-Menzel seit 1887 teilnahm, mehrfach unterbrochen, und erst jetzt war deren systematische Bearbeitung möglich geworden, so wie sie uns gegenwärtige Schrift in Vorlage bringt.

Die Verfasser beschreiben zuerst eingehend die Versuchsanordnung und die Hilfsmittel, deren man sich bediente, um die zahlreichen Ablesungen von äusseren Störungen und anderweiten Fehlerquellen möglichst frei zu halten. Da es selbstverständlich erforderlich war, sämtliche Messungen auf den leeren Raum zu reduzieren, so mussten die wichtigsten meteorologischen Elemente jedesmal in Rechnung gezogen werden. Sehr interessant ist, was über die Anfertigung der Bleimasse gesagt wird, die natürlich nicht als Ganzes gegossen werden konnte, sondern aus einzelnen — kongruenten und homogenen — Schichten aufgebaut werden musste; da von diesem gewaltigen Eigengewichte ein starker Druck auf das Fundament des Festungswerkes zu erwarten war, so wurde Bedacht darauf genommen, die Wage

selbst in ihrer Aufhängung vom Grunde des Gebäudes ganz und gar unabhängig zu machen. Sehr umfangreich ist das von Wage und Wägung handelnde Kapitel; man kann sich denken, dass alle die Vorsichtsmaßregeln, welche bei Arbeiten dieser Art eine Notwendigkeit bilden, in unserem Falle ganz besonders ausgiebig genommen wurden; so musste zumal die elastische Nachwirkung thunlichst unschädlich gemacht werden, und auch die Gewichtstücke erheischten eine eigene Prüfung. Bei den Wägungen ward nicht bloss die übliche horizontale, sondern, da ja eine Doppelwage in betracht kam, auch eine vertikale Vertauschung vorgenommen, und der Luftauftrieb wurde nach teilweise neuen, dem Principe nach allerdings schon von Kohlrausch angegebenen Formeln berechnet. Die ohne und mit Klotz ausgeführten Wägungen unterlagen sorgfältiger Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. So gelang es, den Betrag der Attraktion mit sehr grosser Genauigkeit experimentell zu ermitteln, und wenn man diese Zahl derjenigen gleichsetzt, welche aus der Rechnung hervorging, so war in der so gebildeten Gleichung die Gravitationskonstante als einzige Unbekannte enthalten. Die Anziehung, welche ein homogenes rechtwinkliges Parallelepipedum auf einen ausserhalb gelegenen Massenpunkt ausübt, lässt sich in geschlossener Form darstellen; mit dieser Aufgabe beschäftigten sich, beiläufig bemerkt, schon früher Aufsätze von Mehler und Mertens im Borchardtschen Journale. Das zweite Problem des Attraktionskalküls bezieht sich auf einen geraden Kreiscylinder, denn da erwähnstermaßen der Versuchsklotz röhrenförmig durchbohrt war, um eine symmetrische Lage gegen die Wagebalken zu erhalten, so mussten die Anziehungskomponenten des Parallelepipedums mit denen des — der Masse entbehrenden — Cylinders entsprechend kombiniert werden. Auch die dafür erhaltene Formel gestattet eine einfache Interpretation.

So fand sich, unter Beachtung zahlreicher und sinnreicher Vorsichtsmaßregeln, die Gauss'sche Konstante G , im üblichen Centimeter-, Gramm- und Sekundenmaße, gleich $(6,685 \pm 0,011) \cdot 10^{-8}$. Geht man mit diesem Werte in den Helmerischen Ausdruck

$$g = \frac{4}{3} \pi R \Delta G \left(1 + \alpha - \frac{3}{2} c \right) \left[1 + \left(\frac{5}{2} c - \alpha \right) \sin^2 \varphi \right]$$

ein, wo R den Polarhalbmesser, Δ die Erddichte, α die Abplattung, φ den Winkel der Normale mit der Äquatorialebene und c das am Äquator bestehende Verhältnis der Schwung- zur Schwerkraft bedeutet, so ist, da g durch den v. Sterneckschen Pendelapparat mit äusserster Schärfe bestimmt werden kann, Δ leicht zu berechnen, und zwar fand sich die Dichte der Erde gleich $5,505 \pm 0,009$. Von der durch Boys und K. Braun mittelst einer — beträchtlich verbesserten — Cavendish'schen Drehwage eruierten Zahl (0,5270) weicht der Richarz'sche Wert immerhin genug ab, um vielleicht mit der Zeit aus der Differenz auf den Vorzug der einen oder anderen Messungsmethode schliessen zu lassen.

Sehr wertvoll ist die beigefügte Litteraturübersicht, welche die Phasen der Erddichtebestimmung von Newton — bei dem bereits eine sehr zu-

treffende Auffassung hervortritt — bis zur allerneuesten Zeit zu verfolgen erlaubt. Auch das ist ein interessantes Nebenprodukt der mühevollen Untersuchung, dass auf die Zusammensetzung der Erdrinde in der Umgebung der Reichshauptstadt ein Streiflicht fällt. Die Rechnungen stimmten, wenn es sich um die vertikale Verteilung der Erdschwere handelte, deshalb nicht vollkommen mit den Beobachtungen überein, weil, wie man schon anderweit wusste, unterhalb des Bodens, auf welchem Berlin erbaut ist, ein gewisser Massendefekt sich geltend macht, der die theoretisch bestimmte Attraktion verringert.

Dr. S. GÜNTHER.

Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885.0, analytisch dargestellt von ADOLF SCHMIDT in Gotha. Hamburg 1898. Gedruckt bei Hammerich und Lesser in Altona. 76 S. 4⁰.

Das „Archiv der Deutschen Seewarte“, welches von Geheimrat Neumayer in Hamburg herausgegeben wird, enthält von jeher wertvolle Beiträge zur Lehre vom Erdmagnetismus. Einer früheren Abhandlung des gleichen Autors aus dem Jahre 1889, welche die ganze Berechnungsarbeit auf eine neue Grundlage stellte, schliesst sich die vorliegende an, welche gleichfalls einen separaten Abdruck aus jenem Sammelwerke darstellt und die gewonnenen theoretischen Ergebnisse dazu verwertet, ein Bild des magnetischen Verhaltens unseres Planeten zu entwerfen — ein Momentanbild natürlich, da ja sämtliche Elemente säkulären Änderungen unterworfen sind. Statt dieser Elemente, welche bei der kartographischen Wiedergabe fast ausschliesslich berücksichtigt zu werden pflegen, hat die Wissenschaft selbst, seit Gauss die Bahn gebrochen, zumeist die drei — horizontal nach Norden, horizontal nach Osten und radial nach unten wirkenden — Komponenten X, Y, Z der geomagnetischen Totalkraft als die eigentlichen Repräsentanten der Kraftverteilung an einem gegebenen Orte gewählt, und jede Seitenkraft wird als Funktion der geographischen Länge λ ausgedrückt; so ist z. B.

$$Z = k_0 + \sum_{i=1}^{i=4} k_i \cos(\lambda i) + \sum_{i=1}^{i=4} K_i \sin(\lambda i),$$

und ebenso sehen die Reihenformeln für Y und X aus. Die Grösse Z kann dann direkt nach Kugelfunktionen der geographischen Breite entwickelt werden, während für Y und X , da obige Ausdrücke an dem Pole unstetig werden, gewisse Kombinationen eintreten müssen, welche von diesem Nachteile frei sind. Herr Schmidt will nun aber seine Berechnung nicht für die sphärische, sondern für die sphäroidische Erde durchführen, indem er statt der geographischen Breite die geozentrische Breite v einführt und, wenn

$$\alpha = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 v}, \quad \beta = \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 v} : \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

gesetzt wird, und ε die Exzentrizität der (Besselschen) Meridianellipse bedeutet, den Komponenten X, Y, Z resp. die Vermittlungsgrössen $\alpha X, \beta Y, \gamma Z$

substituiert. Dann sind nach Kugelfunktionen des Argumentes v die Ausdrücke $\alpha X \sin v$, $\beta Y \sin v$ und γZ zu entwickeln; da, wie wir sahen, für λ die Entwicklung bereits stattgefunden hat, so muss, insoweit X in Betracht kommt, jeder der Koeffizienten $\alpha k_m \sin v$ und $\alpha K_m \sin v$ auf Kugelfunktionen m^{ten} Ranges zurückgeführt werden. Dieser ungeheuren Rechnungsarbeit, deren Wesen wir vorstehend andeuteten, hat sich nun der Verfasser mit der an ihm bekannten Hingebung unterzogen, indem er sich dabei der Neumann-Seeligerschen Vereinfachung der Koeffizientenberechnung bediente; dass es trotz dieses Erleichterungsmittels noch ungemein viel zu thun gab, sieht jeder ein, der diesen Dingen einmal irgendwie näher zu treten Gelegenheit hatte. Immerhin verdient es als eine bemerkenswerte Thatsache hervorgehoben zu werden, dass die Ausdehnung des Problems von der Kugel auf das Umdrehungsellipsoid nicht, wie man wohl erwarten könnte, namhafte Erschwerungen des Kalküls im Gefolge hat.

Die numerischen Entwicklungen gestatten ebensowenig wie die umfangreichen Tabellen eine eingehende Berichterstattung an dieser Stelle. Als besonders erwähnenswert wollen wir nur noch den Umstand bezeichnen, dass sich aus den für $\alpha X \sin v$ und $\beta Y \sin v$ erhaltenen Reihen das Potential der ganzen magnetischen Horizontalkraft herleiten lässt, und dass dasselbe (S. 22 ff.) auch wirklich hergeleitet wird. Von grossem Interesse erweist sich dabei eine auch schon von anderen Physikern betrachtete Funktion, welche zur Entscheidung der Frage, ob ausser dem berechneten Potentiale noch andere Faktoren bei der Erzeugung der horizontalen Intensität mitwirken, von fundamentaler Bedeutung ist. Es hat neuerdings den Anschein gewonnen, als ob der erwähnten Funktion keine wirkliche Realität zukomme, und damit wäre selbstverständlich auch eine beträchtliche Vereinfachung aller die eigentliche Herkunft der geomagnetischen Kraft zum Ziele nehmenden Forschungen erreicht. Am Schlusse seiner überaus verdienstlichen Studie weist der Verfasser darauf hin, dass tiefere Einsicht in diese Verhältnisse erst dann zu erwarten ist, wenn unser empirisches Wissen von der Kraftverteilung auf der Erdoberfläche ein befestigteres geworden sein wird. Zumal die absolute Unkenntnis der Antarktis, wo noch ein die Grösse Europas doppelt übertreffendes Areal von keines Menschen Fuss betreten worden ist, verhindert einstweilen vollständige Aufklärung jener Schwierigkeiten, weshalb wohl auch keine beteiligte Gelehrtengruppe der Erschliessung der Südpolargegenden eine so lebhaftige Teilnahme entgegenbringt, wie dies von seiten der Geomagnetiker geschieht.

Dr. S. GÜNTHER.

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage, von C. BACH. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 18 Tafeln in Lichtdruck. Dritte vermehrte Auflage. Berlin 1898. Verlag von Julius Springer. 570 S.

Die dritte Auflage ist namentlich durch die Mittheilung zahlreicher Versuchsergebnisse bereichert worden, wobei die Anstellung der Versuche so

eingehend mitgeteilt war, dass Jedermann sich über die einzelnen Vorgänge genau orientieren kann. Erwähnt seien insbesondere die Versuche über die Längenänderung verschiedener Stoffe und das auf Grund der Resultate aufgestellte Gesetz der Längenänderungen. Für den Techniker ist ein solches Werk von enormer Wichtigkeit, da er an der Hand praktisch durchgeführter Beispiele mit der theoretischen Seite vertraut gemacht wird. Das Vertrauen wird nicht auf die Probe gestellt, so dass der sogenannte Praktiker, dem die Theorie bisher ein Schrecken war, sich mit dieser allmählich anfreundet, wodurch ihm viel Zeit und Geld erspart wird. — Verfasser, ein Mann der Praxis, von rastlosem Eifer, sieht mit klarem Blick, wie ausserordentlich wichtig die Theorie für den schaffenden Ingenieur ist, wofern sie mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Theorie und Praxis dürfen sich nicht feindlich gegenüberstehen, sondern müssen Hand in Hand gehen, um das erstrebte Ziel zu erreichen. Die Bachschen Werke sind daher für alle Techniker, denen es nicht vergönnt ist, diesem anerkannt tüchtigen Lehrer zu Füßen zu sitzen, wenigstens ein Ersatz, um zu erkennen, in welcher Weise der Unterricht an den heutigen Technischen Hochschulen betrieben werden muss, um den Aufschwung der Technik in Deutschland mehr und mehr zu fördern. Alle Kräfte müssen angespannt werden, keine darf eine andere bekämpfen; denn die Lösung in dem Ringen mit den übrigen Nationen muss für uns Deutsche sein: unitis viribus.

B. NEBEL.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1896. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 52. Jahrgang. Braunschweig 1897. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

Erste Abteilung, enthaltend: **Physik der Materie.** Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 476 S. Preis 20 Mk.

Zweite Abteilung, enthaltend: **Physik des Äthers.** Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 820 S. Preis 30 Mk.

Dritte Abteilung, enthaltend: **Kosmische Physik.** Redigiert von RICHARD ASSMANN. 531 S. Preis 21 Mk.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 53. Jahrgang. Braunschweig 1898. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

Erste Abteilung, enthaltend: **Physik der Materie.** Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 573 S. Preis 23 Mk.

Dass die Fortschritte der Physik für den praktisch arbeitenden Physiker unumgänglich notwendig sind, dies von neuem zu begründen, dürfte überflüssig sein, ebenso, dass wir uns mit der Physikalischen Gesellschaft und den tüchtigen Redakteuren freuen, dass die schwere Krisis glücklich überstanden und der Wagen wieder im Geleise ist. — Damit, dass alles nun glatt weiter läuft, dürfen wir uns aber nicht zufrieden geben; denn der

alte Zustand ist trotzdem noch nicht erreicht, geschweige denn, dass den Bedürfnissen der raschlebigen Zeit Rechnung getragen wird. Ohne dem Vorwurf der Übereilung zu begegnen, glaube ich, dass es jetzt an der Zeit ist, eine weitere Wandlung mit den Fortschritten der Physik vorzunehmen. Wie nötig und wichtig der angedeutete Umschwung ist, wird eine kurze geschichtliche Entwicklung darthun.

Die Entstehung der Fortschritte der Physik verdankt man der physikalischen Gesellschaft zu Berlin, d. h. einer Vereinigung von überwiegend solchen Männern, die die Wissenschaft auch durch eigene Arbeiten förderten. Jeder dieser Männer empfand es ursprünglich als eine Ehrenpflicht, sein Scherflein zu diesem Sammelwerk beizutragen. Mit der Erkenntnis, dass jede Hochschule ein dem Magnusschen Privatinstitut nachgebildetes physikalisches Laboratorium besitzen sollte, ist die physikalische Litteratur rapid angewachsen, so dass die Anforderungen bezüglich der für die Sammelarbeit erforderlichen Zeit bei den einzelnen Forschern mehr und mehr ins Gewicht fielen. Indessen mehrten sich auch die Ansprüche an die wissenschaftlichen Leistungen, so dass die wenig befriedigende Sammelthätigkeit allmählich in den Hintergrund gerückt wurde. Die Folge war das immer langsamere Erscheinen der Fortschritte, wodurch deren Wert ungemein beeinträchtigt wurde. Dazu kommt, dass durch die rasch anschwellende Zahl der Arbeitskräfte der einzelne Physiker sich nicht mehr der früher üblichen auf Wohlanständigkeit gegründeten Fernhaltung von dem Arbeitsgebiet des anderen befeissigen konnte, im Gegenteil sogar, die Mode zwang ihn mehr oder weniger, sich an dem wilden Kampf zu beteiligen, der sich um ein neu eröffnetes Arbeitsfeld heutzutage entspinnt. Unter solchen Umständen ist die Sammlung der neuesten Litteratur das mindeste, was verlangt werden kann, eigentlich sollte man schon über die in Angriff genommenen Arbeiten orientiert werden, ähnlich wie bei den sich unter der Presse befindlichen Werken des Buchhandels. — Es war daher bei einer solchen Sachlage nicht zu verwundern, dass die Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie bei ihrer Gründung nicht nur auf keinerlei Schwierigkeiten gestossen sind, sondern überall eine willkommene Aufnahme gefunden haben. Schon damals hätte sich die physikalische Gesellschaft ermannen sollen, um durch eine gründliche Reorganisation in der Redaktion der Fortschritte der Physik sich dieses gefährliche Konkurrenzunternehmen vom Leibe zu halten. Dem Gelehrten fehlt aber häufig der kaufmännische, organisatorische Blick, weshalb die Fortschritte in ihrem Weiterbestehen schliesslich ernstlich bedroht wurden. Wenn auch diese Gefahr zunächst beseitigt ist, so sind die Fortschritte doch durch die Beiblätter vollständig in den Schatten gestellt worden. Die Frage, weshalb die Fortschritte eigentlich noch existieren, ist deshalb keineswegs eine müssige. Wollen die Fortschritte wieder ihr altes Ansehen erreichen, so müssen die Redakteure unter Berücksichtigung der Zeitverhältnisse in der Reorganisation weiterstreiten und sich nicht mit dem ersten Erfolg begnügen, der basiert auf dem Ersatz der praktisch arbeitenden Physiker als Mitarbeiter durch solche

Physiker, denen ihre berufliche Stellung keine Zeit zu experimentellen Untersuchungen übrig lässt. Die Fortschritte müssen monatlich erscheinen und zwar noch besser als die Beiblätter äusserlich gruppiert, damit am Schluss des Jahres die gleichartigen Teile durch den Buchbinder leicht zusammengenommen werden können. Ist das erreicht, so genügen die Fortschritte der Physik vollständig für Deutschland und der Physiker spart nicht nur viel Zeit, sondern auch Geld für die durchaus gleichartigen Beiblätter. Zur Durchführung dieser Umwandlung sollten unter Umständen die physikalische Gesellschaft in Berlin und die über Deutschland verbreiteten physikalischen, bezw. naturwissenschaftlichen Vereine Geldunterstützungen gewähren; denn wenn für die forschende Physik die Annalen für Deutschland ausreichen, so sind zwei physikalische Sammelwerke gleichen Inhalts überflüssig. — Also — auf zur That!

B. NEBEL.

Vorlesungen über theoretische Physik von H. VON HELMHOLTZ.

Band I. Abteilung 2. **Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte.** Herausgegeben von OTTO KRIGAR-MENZEL. Mit 21 Figuren im Text. Leipzig 1898. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 380 S., Preis 16 Mk., geb. 16 Mk. 50 Pf.

Der durch v. Helmholtz in dem ersten Semester seines Vorlesungszyklus über theoretische Physik vorgetragene Stoff ist zum grössten Teil in dem vorliegenden Bande niedergelegt. Ehe v. Helmholtz sich mit dem eigentlichen Thema: die Dynamik diskreter Massenpunkte befasste, schickte er eine Reihe allgemeiner Auseinandersetzungen über die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Physik voraus, welche die Herausgeber in der ersten Abteilung des ersten Bandes zu einem besonderen Buche zusammenfassen. — Auch bei dem vorliegenden Bande ergibt sich deutlich zu erkennen, wie ausserordentlich schwierig es ist, die Genialität des v. Helmholtz'schen Vortrages in Fesseln zu schlagen. Die Gedankenblitze erhöhen den Vortrag ungemein, lassen sich aber mit Druckerschwärze nicht festhalten. Daher war der Herausgeber vielfach genötigt, auf frühere Vorlesungen zurückzugreifen, oder von der Ausarbeitung gewisser Andeutungen abzusehen. B. NEBEL.

Band III. **Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik.** Herausgegeben von ARTHUR KÖNIG und CARL RUNGE. Mit 21 Figuren im Text. Leipzig 1898. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 256 S., Preis 12 Mk., geb. 13 Mk. 50 Pf.

Während der erste Teil nahezu vollständig v. Helmholtz noch vorgelegen hat und von diesem vielfach geändert und erweitert worden ist, kam der letzte Abschnitt wegen Semesterkürze gar nicht mehr zum Vortrag. Glück-

licherweise war dieser Teil schon früher in Crelles Journal erschienen, aus dem er nun, abgesehen von einigen Änderungen, abgedruckt worden ist. Der Umfang des hier behandelten Stoffes entspricht ganz den Intentionen Helmholtz's. Die Schüler konnten ihrem Meister kein schöneres Denkmal errichten, als durch die Herausgabe seiner Vorlesungen. B. NEBEL.

Die Lehre von der Elektrizität von GUSTAV WIEDEMANN. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der **Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus**. Vierter Band. Mit 269 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1898. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1237 S., Preis 32 Mk., geb. 34 Mk.

Kein Gebiet der Physik hat in den letzten Jahren eine auch nur ähnliche Entwicklung erfahren, wie die Elektrizitätslehre. Der Stoff hat so gewaltig zugenommen, dass es trotz Vermehrung der Seitenzahlen nötig war, die Gasentladungen in einem besonderen fünften Bande unterzubringen, den der Sohn des Verfassers, Herr Eilhard Wiedemann, bearbeiten wird. — Der vorliegende vierte Band beginnt mit der Induktion. Hierauf folgt das absolute Maß der elektrischen Konstanten. Den Schluss bildet ein theoretisches Kapitel: Hypothetische Ansichten über das Wesen und die Wirkungsweise der Elektrizität. Um aber diesem Teil nicht einen über den Rahmen dieses Werkes hinausgehenden Umfang geben zu müssen, wird ein Litteratur-Verzeichnis beigegeben, in welchem insbesondere auch die grösseren, zusammenhängenden Arbeiten berücksichtigt sind. — Der leichten Orientierung wegen ist ein ausführliches Inhaltsverzeichnis, ein Namen- und ein Sachregister diesem Bande beigelegt worden. Die Litteratur ist bis zum Beginn des Jahres 1897 berücksichtigt. —

Der Leser der Korrekturbogen wäre künftig auf grössere Beachtung der Schreibweise aufmerksam zu machen, z. B. S. X Literatur, S. XIII dagegen Litteratur; S. XIII Z. 5 von unten Verzeichnis, Z. 4 und 1 von unten Verzeichniss u. dergl. — Den Verfasser beglückwünschen wir zu der Vollendung dieser Riesenarbeit. Die Physik und kein geringer Teil der Elektrotechnik ist dadurch in hohem Maße befriedigt worden. B. NEBEL.

MÜLLER-POUILLET'S Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von LEOPOLD PFAUNDLER unter Mitwirkung von OTTO LUMMER. In drei Bänden. Mit gegen 2000 Holzstichen, Tafeln, zum Teil in Farbendruck. Zweiter Band. Erste Abteilung. Dritte Lieferung. (Schluss der I. Abteilung.) Optik 584 S., und zweite Abteilung (Schluss des zweiten Bandes) Wärme und meteorologische Erscheinungen, 786 S., Preis 10 Mark. Braunschweig 1897 und 1898. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

Auch diese Lieferungen stehen ihren Vorgängerinnen in nichts nach. Dieses Werk ist eine wahre Freude für den Physiker und kann nicht genug empfohlen werden allen, die sich in der Physik gründlich unterrichten wollen.

B. NEBEL.

Physikalisches Praktikum mit besonderer Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden von EILHARD WIEDEMANN und HERMANN EBERT. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 316 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1897. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 490 S. Preis 9 Mk.

Die in relativ kurzer Zeit nötig gewordene dritte Auflage beweist zur Genüge, wie sehr es den Verfassern gelungen ist, den bestehenden Bedürfnissen Rechnung zu tragen. Das Buch soll nicht nur während der Studienzeit, sondern auch nach derselben ein treuer Berater sein für die, welche z. B. plötzlich an einer kleinen Anstalt mit geringen physikalischen Lehrmitteln auf eigene Füße gestellt werden. In solcher Lage wird der Betreffende erst recht inne, wie sehr er noch in allen Dingen des Rates bedarf, was ihm in einem reich ausgestatteten Institut in Gegenwart von Professor und Assistenten nicht zum Bewusstsein kam.

Die vielen Abbildungen, die praktischen Winke und das mathematische Rüstzeug bilden ein wertvolles Beiwerk, das im übrigen auch die Assistenten zu entlasten vermag bezüglich der vielen Anfragen von Seiten junger Praktikanten. Dass sich ein solches Buch mehr und mehr ausbreiten wird, darüber besteht keinerlei Zweifel.

B. NEBEL.

Lehrbuch der Experimentalphysik von ADOLF WÜLLNER. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Dritter Band. Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundsätze der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1897. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1414 S. Preis 18 Mk.

Sowohl aus historischen, als auch aus pädagogischen Gründen hat der Verfasser die Einteilung des Stoffes der früheren Auflagen auch hier beibehalten, so dass die Kontinuität in dieser Beziehung vollständig gewahrt bleibt. Ob aber diese Gründe allein maßgebend sein dürfen, und ob sie die rein praktischen Gründe, die auf eine Änderung hindrängen, überwiegen, darüber dürften sich doch Zweifel geltend machen. Obwohl kein Freund von Modeströmungen, glaubt Rezensent, dass mit Rücksicht auf die in der Elektrotechnik allgemein angenommene und im physikalischen Unterricht schon weit verbreitete Behandlung nach der Kraftlinientheorie nicht bei Seite gelassen werden darf, wenn nicht das Buch in kurzer Zeit nur noch einen historischen Charakter besitzen soll. Sobald die jüngere Generation der Anhänger der Kraftlinientheorie in Amt und Würden gelangt sein wird,

wird diese Frage entschieden sein, also ungefähr in zehn Jahren. — Die grossen Errungenschaften in der Elektrizitätslehre bedingten, abgesehen von sonstigen zahlreichen Ergänzungen, die Schaffung eines besonderen Kapitels, das die elektrischen Schwingungen zum Gegenstand hat. — Der vorliegende, auch einzeln käufliche Band ist ungemein reichhaltig und wegen der sorgfältigen Litteraturangabe der angeführten Untersuchungen sehr wertvoll für den Physiker, der die ersten Semester hinter sich hat.

B. NEBEL.

NEUMANN. Die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorien. Zweiter Teil. Über die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. Leipzig 1898, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 462 S.

Der zweite Teil entspricht nicht ganz dem Programm, das dem vor 25 Jahren erschienenen ersten Teile zu grunde gelegt worden war; denn sonst würde jetzt das Weber'sche Gesetz und seine durch accessorische Annahmen zustande gekommene Erweiterung auf ponderomotorische Wirkungen den Inhalt dieses Bandes bilden. Verschiedene Versuche des Verfassers zur Vervollständigung dieses Gesetzes haben aber zu keinem befriedigenden Resultat geführt, so dass dieser Plan aufgegeben worden ist. Von nicht geringerem Interesse sind aber die von Helmholtz'schen Arbeiten, von denen sich die älteren scharf abgrenzen von den neueren. Für die Wissenschaft ist es von hohem Wert, dass es von Helmholtz noch vergönnt war, auch Stellung zu den neueren Anschauungen zu nehmen. — Für die studierende Jugend, welche zu leicht geneigt ist, das Neue schon als Evangelium hinzunehmen und das Frühere als überwunden anzusehen, ist die vorliegende Behandlung und kritische Gegenüberstellung der beiden von v. Helmholtz eingeschlagenen Richtungen von grösstem Nutzen, indem jene einen Überblick erhält und dadurch zu der Erkenntnis gelangt, dass wir vom Endziel leider noch sehr weit entfernt sind. Die den älteren v. Helmholtz'schen Arbeiten zu grunde liegenden Vorstellungen basieren auf der Newton'schen Gravitationstheorie, mit der im engsten Zusammenhang die Elastizität und die Kapillarität stehen. Diesen unvermittelten Fernwirkungen gerade entgegengesetzt sind die neuen Anschauungen, nach denen die Ursachen über die Veränderungen eines Punktes im Weltenraum in seiner unmittelbaren Umgebung zu suchen sind, und stehen deshalb in nächster Beziehung zu Wärme und Licht. Da sich aber wohl annehmen lässt, dass die Elektrizität auch mit dem Wesen der Gravitation im Zusammenhang steht, so wird das Ziel zur Erforschung der wahren Prinzipien der elektrischen Erscheinungen darin zu suchen sein, die universalen Prinzipien zu ergründen, welche die elektrischen Erscheinungen mit denen der Gravitation und denen der Wärme (bezw. Licht) zu einem einheitlichen Ganzen vereinigen. Diesen universalen Prinzipien suchte man sich früher an der Hand der Newton'schen Gravitationstheorie zu nähern, während

man jetzt von der Fourier'schen Wärmetheorie ausgeht. In der Verfolgung des einen Weges dürfen aber die Spuren des anderen Weges nicht ausser Auge gelassen werden und, um dies zu ermöglichen, hat der Verfasser in dem vorliegenden Bande beide Methoden sorgfältig durchgearbeitet und soweit als möglich vervollständigt, eine That, die für die Weiterentwicklung von grösstem Interesse ist.

B. NEBEL.

Lehrbuch der Physik. Von J. VIOLLE. Deutsche Ausgabe von E. GUMMICH, W. JÄGER, St. LINDECK. Zweiter Teil: Akustik und Optik. Zweiter Band. Geometrische Optik. Mit 270 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1897, Verlag von Julius Springer. 675 S. Preis 8 Mk., geb. 9. 20 Mk.

Wenngleich durch Fresnel die Wellentheorie heute unumschränkt dominiert, so sah sich der Verfasser auf Grund der verschiedenen Vorstellungen vom Wesen des Lichtes doch veranlasst, nicht von einer Hypothese auszugehen und durch sie sämtliche Erscheinungen in der Optik zu erklären, sondern ohne jede Hypothese alle Thatsachen zu behandeln, die aus der geradlinigen Fortpflanzung des Lichts, dem Lichtstrahl, sich auf geometrische Weise ergeben. Diesen Teil nennt er geometrische Optik, im Gegensatz zur physikalischen Optik, welche diejenigen Erscheinungen umfasst, die zu ihrer Erklärung die Wellentheorie benötigen. Die geometrische Optik ist hier etwas anders definiert und umfasst mehr, als wir sonst unter dem Begriff „geometrische Optik“ zu verstehen gewohnt sind. In dem ersten Kapitel wird die geradlinige Fortpflanzung des Lichts gezeigt und mit ihrer Hilfe die Verhältnisse bei den Gestirnen, insbesondere die Finsternisse erläutert. Die nächsten Kapitel haben die Reflexion, die Brechung und die Dispersion zum Gegenstand. In dem Schlusskapitel werden die optischen Instrumente, ausgehend von dem Auge, behandelt. So sehr wir mit dem Inhalt des vorliegenden Bandes einverstanden sind, so können wir es nicht bei allen Figuren sein. Die Linien und Buchstaben auf dem schwarzen Hintergrund sind manchmal so fein ausgeführt, dass die Deutlichkeit darunter leidet, z. B. bei Fig. 433, bei welcher doch die Linsen, und nicht das sie umschliessende Rohr, die Hauptsache sind, ferner in Fig. 424 der Teil A, B, l, l' ; in Fig. 429 der Teil M, M', N, N', P u. s. w. Die Figuren sollten durchweg einen einheitlichen Charakter zeigen und nicht solche Gegensätze aufweisen wie z. B. die Figuren 300 und 304.

B. NEBEL.

Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Von EUGEN DREHER und K. F. JORDAN. Berlin 1898, Verlag von Julius Springer. 18 S. Preis 60 Pf.

Aus den höchstinteressanten Versuchen über rechts und links gewundene Solenoide und den Magneten mit verschieden gestalteten Enden ergibt sich, dass die Ampère'sche Theorie, wonach die Magnete als von Kreisströmen umflossen anzusehen sind, nicht mehr aufrecht gehalten werden kann, dass

vielmehr die Ströme in Spiralen verlaufen, und dass sich der Magnetismus nur an den Oberflächenschichten zeigt. Es folgt ferner, dass die Faradayschen, durch Eisenfeile sichtbar gemachten Kraftstrahlen eines Magneten als das Resultat einer elektrischen Ausgleichung zwischen den aus dem Nordpol und dem Südpol des Magnets ausströmenden ungleichnamigen Elektrizitäten anzusehen sind, sofern der Magnetismus auf Elektrizität zurückzuführen ist. Daraus erklären sich die Polarlichter und zwar ergibt sich aus deren Erscheinen und den Lichterscheinungen in Geissler'schen Röhren, dass die Erde als ein linksgewundenes Solenoid aufzufassen ist, bei dem die positive Elektrizität aus dem Nordpol strömt, um von hier aus die höheren Luftschichten nach dem Südpol hin zu durchdringen und bei diesem in den festeren Erdkörper einzutreten.

B. NEBEL.

Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. Von MICHAEL FARADAY. (Aus den Philosoph. Transact. für 1833.) Herausgegeben von A. J. v. OETTINGEN. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 86.) III. bis V. Reihe. Mit 15 Figuren im Text. Leipzig 1897, Verlag von Wilhelm Engelmann. 104 S. Preis M. 1. 60.

— Dasselbe. (Aus den Philosop. Transact. für 1834.) Herausgegeben von A. J. v. OETTINGEN. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 87.) VI.—VIII. Reihe. Mit 48 Figuren im Text. Leipzig 1897, Verlag von Wilhelm Engelmann. 180 S. Preis M. 2. 60.

In der III. Reihe weist der Verfasser entgegen den damaligen Anschauungen nach, dass es nur einerlei Elektrizität giebt.

Die IV. Reihe enthält eine Reihe von Thatsachen, die einen Unterschied zwischen metallischer und elektrolytischer Leitung erkennen lassen.

Die V., sehr wichtige Reihe umfasst die Versuche über elektrochemische Zersetzung, vermöge deren die bisherige Anschauung über die von den Polen ausgehenden, anziehenden Kräfte widerlegt wird und die fundamentalen Gedanken der Faradayschen Theorie zur Entwicklung kommen.

Die vorstehenden drei Reihen bilden die Vorbereitung zu den ausgedehnten Untersuchungen Faradays über Elektrolyse.

In der VI. Reihe werden die wichtigen Erscheinungen der langsamen Verbrennung explosionsfähiger Gase bei Gegenwart von Metallen mitgeteilt, die zur sicheren Verfolgung der fundamentalen Gesetze der Elektrolyse wesentlich beitragen.

Die VII. Reihe enthält die Basis der noch heute giltigen Anschauung über die Elektrolyse.

In der VIII. Reihe bringt Faraday die Versuche zur Darstellung, die er über die Elektrizität der Voltaschen Säule, deren Abkunft, Menge, Stärke und deren allgemeine Kennzeichen angestellt hat.

Die sorgfältig durchdachten Untersuchungen des genialen Autodidakten zeigen der heranwachsenden Jugend, wie ein Gelehrter arbeiten soll.

Wo es nötig erschien, hat der Herausgeber ergänzende Anmerkungen beigelegt.

B. NEBEL.

Machs Grundriss der Physik für die höheren Schulen des deutschen Reiches, bearbeitet von FERDINAND HARBORDT und MAX FISCHER. I. Teil: Vorbereitender Lehrgang. Ausgabe für Real-Anstalten. Mit 298 Abbildungen. Zweite, verbesserte Auflage. Leipzig 1897, Verlag von G. Freytag. 176 S. Preis gebd. M. 2.

Die in relativ kurzer Zeit nötig gewordene zweite Auflage lässt erkennen, dass die Herausgeber mit der Bearbeitung des Machschen Grundrisses der Physik für die deutschen Schulverhältnisse das Richtige getroffen haben.

Einfachheit in der Darstellung, zahlreiche Figuren und grosse Übersichtlichkeit sind die Bedingungen, welche bei dem Schüler Liebe und Lust zur Physik erwecken. — Bei einer Neuauflage mögen die Herausgeber auch das Selbststudium berücksichtigen, indem zum Beispiel gleich bei den Maßen auch die Definitionen und die Erläuterungen der Abkürzungen beigelegt werden von 1 m (Meter) = ... , oder 1 a (Ar) = ... Das Buch soll auch ohne Gegenwart des Lehrers und nach Absolvierung der Schule seine Dienste thun. Für Realschulen passen griechische Buchstaben nicht (vergl. S. 140, § 170), die Marskarte dürfte überflüssig sein, dagegen wären die Figuren der wichtigsten Sternbilder an unserem Himmel von grösserer Bedeutung. Man muss sich bei der Stoffauswahl stets das betreffende Schülermaterial vor Augen stellen.

B. NEBEL.

Physikalisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik in zwei Stufen von H. BÖRNER. Zweite Auflage. IV. Lehrbuch der Physik für die drei oberen Klassen der Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 365 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1898, Verlag der Weidmannschen Buchhandlung. 488 S. Preis M. 6.

Der Plan zu dem vorliegenden Unterrichtswerk ist genau den preussischen Lehrplänen angepasst. Die Behandlung des Stoffes schliesst sich eng an die neueren Anschauungen an, so dass ein Schüler nach einer solchen Vorbereitung ohne jede Schwierigkeit weiter bauen kann, da er mit den jetzigen Hilfsmitteln, wie Kraftlinien u. s. w., zu operieren gewohnt ist. — Das Buch beschränkt sich nicht auf die in der Schule durchzunehmenden Teile, sondern es bietet dem Lehrer eine Stoffauswahl und dem strebsamen Schüler noch Gelegenheit zum Weiterstudium. Bei der Reichhaltigkeit ist es eigentlich zu verwundern, weshalb das elektrodynamische Maßsystem übergangen und auf den Zusammenhang der drei elektrischen Maßsysteme

unter einander nicht aufmerksam gemacht worden ist. Ein solcher Einblick ist dem Verständnis sehr förderlich und wirkt für die elektromagnetische Lichttheorie vorbereitend. — Bezüglich der äusseren Form dürfte eine grössere Übersicht dadurch geschaffen werden, dass die Gesetze z. B. durch den Druck schärfer hervorgehoben würden, wodurch namentlich der Überblick gefördert und die Repetitionen grösserer Teile wesentlich erleichtert würden. Eine Änderung in dieser Hinsicht würde den Wert des an sich vorzüglichen Werkes noch erhöhen.

B. NEBEL.

Physik und Chemie. Gemeinfassliche Darstellung ihrer Erscheinungen und Lehren von B. WEINSTEIN. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1898, Verlag von Julius Springer. 427 S. Preis M. 4.

Das Buch verdankt seine Entstehung einer weiteren Durcharbeitung eines vor einigen Jahren zur Unterweisung rein praktisch beschäftigter Männer herausgegebenen Werkes, das in den betreffenden Kreisen günstig aufgenommen worden sei. Die Behandlungsweise des Stoffes macht den Eindruck, als ob das Buch für die vor kurzer Zeit lebhaft erörterten Volkshochschulen bestimmt wäre. Ungeheuer viel Material wird geboten, sodass der Verfasser in dem Vorwort sich das Zeugnis ausstellt, dass die Vollständigkeit derartig erzielt sei, dass kaum eine wichtigere Thatsache übergangen worden sei. Nach unserer Ansicht ist dies kein Vorteil, sondern ein Nachteil; denn es werden Dinge erwähnt, über die selbst die Fachleute noch nicht schlüssig sind. Für das Publikum genügte z. B. die Erwähnung der Röntgenstrahlen; die Lenard-Strahlen könnten sicher übergangen werden, ebenso dass der Verfasser nicht anzugeben weiss, wie es geschieht, dass die Kathodenstrahlen die Salze zu färben vermögen. Nicht gerade formvollendet ist die Ausdrucksweise hinter den v. Helmholtzschen Anschauungen über die Farbenreize: „Die Akten hierüber sind noch keineswegs geschlossen.“ Bei der Durchsicht des Buches wird man an jenen Berliner erinnert, der vermöge seines guten Gedächtnisses über alles zu sprechen weiss, bei dem sich aber bei näherem Eingehen alles nur als Tünche und Blendwerk zeigte. Wäre weniger geboten worden, aber etwas gründlicher, so würde nach unserer Ansicht der Nutzen des Buches hinsichtlich der Belehrung ein grösserer sein.

B. NEBEL.

Das Mikroskop und seine Anwendung. Von LEOPOLD DIPPPEL. Zweite, umgearbeitete Auflage. Zweiter Teil. Anwendung des Mikroskopes auf die Histiologie der Gewächse. Zweite Abteilung (Schluss des Werkes). Mit 132 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1898, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 216 S.

Der Schluss des zweiten Teils umfasst die Untersuchungen über den Bau der vegetativen Organe der Stengelpflanzen und die Untersuchungen

aus der Entwicklungsgeschichte. Der Inhalt hat namentlich für Botaniker hervorragendes Interesse. Die zahlreichen Abbildungen tragen zum Verständnis ungemein viel bei.

B. NEBEL.

Das Licht. Grundriss der Optik für Studierende und Schüler. Von R. T. GLAZEBROCK. Deutsch herausgegeben von E. ZERMELO. Mit 134 Figuren im Text. Berlin 1897, Verlag von S. Calvary & Co. 273 S.

Das kleine Buch eignet sich vorzüglich für Schüler, um die einfacheren Erscheinungen der Optik gründlich kennen zu lernen. Die angestellten Versuche werden mit den einfachsten Mitteln ausgeführt, sodass sie der Lernende jederzeit nachmachen kann, wodurch sich die Materie dem Gedächtnis viel schärfer einprägt. Um aber von vornherein nicht den Verdacht der Spielerei aufkommen zu lassen, sind zahlreiche Übungsbeispiele eingeschaltet, die zum selbständigen Denken Veranlassung geben. Schon äusserlich ist auf Übersichtlichkeit ein grosser Wert gelegt, so sind die Definitionen und Grundgesetze, sowie die Experimente durch den Druck scharf hervorgehoben.

B. NEBEL.

Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik. Von LUDWIG BOLTZMANN. I. Teil, enthaltend die Prinzipie, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integriert werden, welche Variationen der Koordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten. Mit 16 Figuren. Leipzig 1897, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 241 S. Preis M. 6.

In dem Vorwort giebt der Verfasser die Gründe an, welche ihn veranlasst haben, den zweiten Teil der Gastheorie noch hintanzuhalten und sich zunächst der Mechanik zu widmen. Nachdem dieser Gegenstand für die Vorlesungen ausgearbeitet war, wurde aus anderen Gründen von dem Vortrage in dieser Form abgesehen, sodass wir es demnach mit ungehaltenen Vorlesungen zu thun haben. Der Verfasser hat es sich darin zur Aufgabe gemacht, der modernen Strömung, die Dunkelheiten in den Prinzipien der Mechanik nur durch Einkleidung der Mechanik in ein ganz neues, fremdartiges Gewand beseitigen zu können, einen kräftigen Widerstand entgegenzusetzen. Dies Ziel erreicht er, indem er Schritt für Schritt den Nachweis liefert, wie sich, ohne Aufgabe der alten klassischen Darstellungsweise der Mechanik, die Dunkelheiten ebenfalls vermeiden lassen. Er fordert die Gegner seiner Anschauungsweise auf, ein Gleiches auf energetischer oder rein phänomenologischer Basis mit gleicher Klarheit vom Anfang bis zum Ende zu thun. Es hiesse, das Kind mit dem Bade ausschütten, wenn man die Atomistik deshalb aufgeben wollte, weil Unberufene damit auch allerlei Phantastereien getrieben haben. Für das Fortschreiten der Wissenschaft ist es ein wahres Glück, in dem Verfasser einen Mann zu besitzen, der die falschen Propheten von den wahren trennt und bemüht ist, der Anhängerschaft jener den richtigen Weg zu zeigen.

B. NEBEL.

ROBERT MAYER und HERMANN VON HELMHOLTZ. **Eine kritische Studie.**
 Von Dr. TH. GROSS. Berlin W 1898, Fischers technologischer Verlag M. Krayn, Steglitzerstr. 86. 174 S. Preis M. 4. 50.

Die Leistungen von v. Helmholtz in wissenschaftlicher Beziehung sind von solcher Tragweite, dass viele seiner Zeitgenossen, namentlich auch seine Schüler auf sein Urteil sehr grossen Wert legten, und zwar mit Recht. Das v. Helmholtzsche Gestirn glänzte viele Jahre ungetrübt am wissenschaftlichen Himmel, sodass es sich jedem tief einprägte und eine nachhaltige Wirkung hinterliess, während Robert Mayer mit einem zwar äusserst glänzenden, aber nur kurze Zeit sichtbaren Stern zu vergleichen ist. Die Nachwelt wird daher bei solcher Sachlage in der Stellungnahme eines v. Helmholtz zu Robert Mayer zu leicht geneigt sein, das Mayersche Gestirn nicht so glänzend zu finden, als es thatsächlich war, und störende Schlacken in seiner Atmosphäre zu entdecken, schon nach dem Grundsatz: *semper aliquid haeret*. Daher ist es die Pflicht aller Zeitgenossen, alles Material zu sammeln und kritisch zu sichten, um von Mayers Verdienst jedweden Schatten zu nehmen. Weyrauch hat sich bezüglich des Mayerschen litterarischen Nachlasses dieser Aufgabe in dankenswerter Weise unterzogen. Angeblich aus Zartgefühl hat v. Helmholtz erst nach Meyers Tode geglaubt, diesem seinen wahren Platz in der Wissenschaft anweisen zu müssen, der allerdings sehr unscheinbar ausgefallen ist. Nachdem nun auch v. Helmholtz aus dem Leben geschieden ist, ist es die Aufgabe des vorliegenden Buches, Mayer an seinen richtigen Platz zu stellen. Das Buch enthält gleichsam die von den Zeitgenossen der Nachwelt überlieferte, ohne Rücksicht auf die Person gemachte Schlussabrechnung zwischen Robert Mayer und v. Helmholtz, wobei sich leider ergibt, dass v. Helmholtz dem Mayer, gelinde gesagt, nicht gerecht geworden ist. Zu bedauern ist, dass v. Helmholtz dieses Buch nicht mehr erlebt hat.

B. NEBEL.

Aufgaben über Wärme, einschliesslich der mechanischen Wärmetheorie und der kinetischen Theorie der Gase. Für Studierende an Mittel- und Gewerbeschulen, zum Selbststudium für angehende Techniker, Physiker u. a. Von EDUARD MAISS. Mit 29 Figuren im Text. Wien 1898, Verlag von A. Pichlers Wittve und Sohn, Buchhandlung für pädagogische Litteratur und Lehrmittelanstalt. V. Margaretenplatz 2. 118 S.

Ermuntert durch die günstige Aufnahme der im Jahre 1893 erschienenen Aufgaben über Elektrizität und Magnetismus, hat der Verfasser nunmehr auch die gesammelten Aufgaben über Wärme herausgegeben. Jedem soll etwas geboten werden, deshalb beziehen sich die Aufgaben nicht allein auf die Hauptlehren der Wärmelehre, sondern sie berücksichtigen zum Teil auch die Technik. Für den Physiker sind die Aufgaben aus der kinetischen

Theorie der Gase bestimmt. Das absolute Maßsystem fand durchgehend seine Anwendung. In dem zweiten Teil sind die Lösungen der Aufgaben nebst Fingerzeigen über die Behandlungsweise enthalten. Das beste Mittel zur vollständigen Beherrschung des Stoffes bilden für Studierende doch die Aufgaben; denn auch hier gilt: Übung macht den Meister. B. NEBEL.

Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Von ALOIS WALTER.

Veröffentlicht mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mit 4 Textfiguren. Leipzig 1898, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 74 S.

Die vorliegende Theorie unterscheidet sich prinzipiell von allen bisherigen Theorien darin, dass sie zunächst auf einer rein geometrischen Basis aufgebaut ist. Dadurch wird erreicht, dass die gewonnenen Formeln auch gültig bleiben, wenn sich die Anschauungen über die physikalische Beschaffenheit der Atmosphäre ändern; denn diese haben nicht, wie seither, auf die ganze Theorie, sondern nur auf einzelne Grössen in den Formeln Einfluss. Bisher fiel mit dem Wechsel des Fundaments das ganze Gebäude, während jetzt das Gerippe stehen bleibt.

Der erste Teil des Buches ist demnach rein geometrischer Natur, so dass die physikalisch-meteorologische Seite des Problems erst in dem zweiten Teil behandelt wird. In diesem beschränkt sich der Verfasser nur auf das für die neue Theorie wünschenswerte Beobachtungsmaterial; beabsichtigt ist also, keine systematische Darstellung der empirischen Ergebnisse auf dem Gebiete der atmosphärischen Strahlenbrechung zu liefern.

B. NEBEL.

LORENZ, DR. HANS, Professor an der Universität Halle, dipl. Ingenieur, **Neuere Kühlmaschinen**, ihre Konstruktion, Wirkungsweise und industrielle Verwendung. Ein Leitfaden für Ingenieure, Techniker und Kühlanlagen-Besitzer. Zweite, durchgesehene und vermehrte Auflage. München und Leipzig 1899, Verlag von R. Oldenbourg.

Die modernen Kälteerzeugungsmaschinen verdanken ihre Entstehung der Übersetzung wärmetheoretisch festgelegter Vorgänge in die Praxis. Ihre Ausführung hatte jedoch sehr verschiedenen Anforderungen zu genügen, sodass an der Hand der Erfahrung eine grosse Auswahl von Konstruktionen und Anlagen entstanden ist. In neuester Zeit haben durch die Verflüssigung der Gase und das Studium der Erscheinungen bei tiefsten Temperaturen auch weitere Kreise für die Kälteerzeugung Interesse gewonnen. Es wurde daher gewiss Vielen ein Dienst geleistet, als der sehr berufene Herausgeber der Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie 1896 einen leicht fasslichen Überblick über das bis dahin vorwiegend in der Journallitteratur behandelte Gebiet erscheinen liess. Die kleine Schrift war im Laufe von zwei Jahren vergriffen und so liegt uns heute die zweite Auflage vor.

Da das Werkchen nur den Bedürfnissen der Praxis, insbesondere auch denjenigen der Kühlanlagenbesitzer entgegen kommen will, so sind mathematische Formeln gänzlich ausgeschlossen. Doch hat der Verfasser in der neuen Auflage die Begriffe und Sätze der Wärmelehre, welche bei Kälteerzeugungsmaschinen eine Rolle spielen, in einfacher Form vorgeführt. Die erforderlichen Berechnungen werden numerisch erledigt, eventuell mit Hilfe beigegebener Tabellen. Bezüglich schärferer Verfolgung der Vorgänge konnte der Verfasser auf seine eigenen Aufsätze an anderer Stelle verweisen. Weiter sind in der vorliegenden Auflage erstmals die Absorptions-Kaltdampfmaschinen berücksichtigt, da dieselben doch noch häufiger vorkommen, als gewöhnlich angenommen wird. Ausser Betracht blieben die bei uns wegen ihres unökonomischen Betriebes vollständig aus der Praxis verschwundenen Kaltluftmaschinen. (Nach Linde sollen in England noch offene Kaltluftmaschinen in beschränkter Anzahl gebaut werden.) Der grösste Teil des Raumes ist, wie billig, auch diesmal den Kompressions-Kaltdampfmaschinen gewidmet, wobei alle Neuerungen gebührende Berücksichtigung gefunden haben.

Das Buch umfasst nun auf ca. 300 Seiten folgende neun Kapitel: Die Hauptsätze der Wärmelehre; Methoden und Energieverbrauch der Kälteerzeugung; die Konstruktion der Kompressoren; die Apparate zur Abgabe und Aufnahme der Wärme; die Einrichtung der Absorptionsmaschinen; die Abkühlung und Kühllhaltung von Flüssigkeiten; die Luftkühlung; die Eis-erzeugung; die Erzeugung und Verwendung von Kälte bei abnorm tiefen Temperaturen (Verfahren von Pictet, Olzewski, Dewar und Linde). Die Darstellung ist recht klar und reichlich durch Figuren unterstützt. Erwünscht wäre wohl mit Rücksicht auf manche der vorausgesetzten Leser, wenn künftig Ausdrücke wie Energieformen, latent, Äquivalenz, perpetuum mobile etc. beim ersten Auftreten kurz erklärt oder verdeutscht würden. Das angefügte Sachregister erleichtert die Benutzung und auch das Litteraturverzeichnis ist dankenswert. Wir können das handliche Werkchen allen Interessenten aufs beste empfehlen.

WEYRAUCH.

K. ROHN und E. PAPPERITZ. **Lehrbuch der darstellenden Geometrie.**

In zwei Bänden. Zweiter Band. Leipzig 1896, Veit & Comp. 528 S.

Unter den deutschen Werken über darstellende Geometrie gebührt dem vorliegenden nach den beiden Lehrbüchern von Fiedler und Wiener unzweifelhaft der erste Platz. Die Fülle, zum Teil Neuheit des behandelten geometrischen Stoffes, die sichere, oft elegante Handhabung der geometrischen Beweismethoden und die fast durchgehends prägnante Schreibweise berechtigen zu diesem Urteil.

Der vorliegende zweite Band* beschäftigt sich zunächst (auf 363 S.) mit der Theorie der Flächen und Kurven im Raume, dann mit der schiefen

* Besprechung des I. Bandes durch W. Fr. Meyer, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 40, S. 98.

und orthogonalen Axonometrie (48 S.), der Perspektive (69 S.) und der Beleuchtung von Flächen (48 S.). Wie auch sonst üblich gelangen in dem zuerst angeführten Teile ausser den cyklischen Linien und Schraubenlinien der Reihe nach die folgenden Flächenklassen zur Behandlung: Rotationsflächen (insbes. Rotationsflächen zweiten Grades), Schraubenflächen, Flächen zweiten Grades, abwickelbare und windschiefe Regelflächen, Hüllflächen und topographische Flächen, woran sich noch ein Kapitel über die Krümmung der Flächen anschliesst. Hierbei wird nicht allein die Konstruktion der Tangentialebenen, ebenen Schnitte, Eigen- und Schlagschattengrenzen,* sowie scheinbaren Umrissen in orthogonaler Projektion gelehrt, sondern es werden auch für eine grosse Anzahl Flächen diese Schnittkurven und Schattengrenzen auf geometrischem Wege genau untersucht und für ihre Projektionen einfache Konstruktionen abgeleitet. In dieser Hinsicht möchte ich besonders auf das ausführliche X. Kapitel über Schraubenflächen hinweisen, das den tüchtigen Mathematiker als Verfasser verrät und viel nicht allein für den darstellenden Geometer Interessantes und Neues enthält.

Charakteristisch für das Werk ist überhaupt die gediegene und eingehende Behandlung fast alles geometrisch Interessanten, das zur Zeit der darstellenden Geometrie zugänglich ist. Um nur einiges aus diesem Hauptteile des zweiten Bandes herauszugreifen, erwähne ich: die konstruktive Behandlung der Ringfläche, die Konstruktion von zwei Rotationsflächen, die sich längs einer Kurve berühren, die Konstruktion des Umrisses einer Fläche zweiten Grades aus einer Projektion dreier ihrer ebenen Schnitte oder des Umrisses eines Ellipsoides aus einer Projektion dreier konjugierter Durchmesser, die Ermittlung der Eigenschattengrenze eines Ellipsoides aus seinem scheinbaren Umriss in einer Projektion und dem Schatten eines Punktes der Fläche auf die Umrisebene, die Benutzung der Projektionen von Flächen zweiten Grades zur zeichnerischen Lösung von Aufgaben über Kurven zweiter Ordnung (wie z. B. „durch drei Punkte einen Kegelschnitt zu legen, der eine gegebene Ellipse oder Hyperbel in zwei Punkten berührt“); ferner die konstruktive Behandlung der Fläche gleichförmiger Neigung mit einer Ellipse als Spurkurve, des Plücker'schen Konoids, der Regelflächen dritten und vierten Grades (insbesondere der Normalenfläche für einen ebenen Schnitt eines Kegels zweiter Ordnung) des Cylindroids und der Dupin'schen Cyklide, die Konstruktion der Striktionslinien an verschiedenen dieser Regelflächen und der Krümmungslinien für die Flächen zweiten Grades. Das meiste davon ist eingehender behandelt, als man es bisher irgendwo fand.

Hingegen vermisst man auch in diesem Werke manches, was für die praktische Anwendung der darstellenden Geometrie Wichtigkeit hat. Die Schattenkonstruktion z. B., die für eine grosse Gruppe von Technikern, die Architekten, von grossem Werte ist, wird nach ihrer praktischen Seite

* Der Gebrauch des Wortes „Lichtgrenze“ für „Eigenschattengrenze“ scheint mir nicht nachahmenswert.

sehr stiefmütterlich behandelt. Dies trat schon im ersten Bande hervor, und der Referent sprach damals die Hoffnung aus, dass die Anwendungen der darstellenden Geometrie im zweiten Bande vorkommen würden. Die Hoffnung hat sich nicht erfüllt.

Die Prinzipien, nach denen der Schatten an einer beliebigen Rotationsfläche bestimmt wird, sind wohl präzise besprochen, aber ihre Durchführung ist nur an einem einzigen, sehr einfachen Beispiele (S. 9) gezeigt; dass jemand nach Durchstudierung dieses Werkes im stande sei, auf einigermaßen geschickte Art die Schatten nur an einer dorischen oder toskanischen Säule zu bestimmen, möchte ich sehr bezweifeln. Es hätte doch wenigstens gezeigt werden müssen, wie man auf einfache Weise den Schatten einer quadratischen Platte auf eine Rotationsfläche bestimmt oder den Schatten, den eine Eigenschattengrenze wieder auf die Fläche wirft. Es fehlen auch Hinweise auf die mancherlei Vereinfachungen, die sich daraus ergeben, dass in der Praxis die Lichtstrahlenrichtung im Grund- und Aufriss unter 45° gegen die Projektionsaxe geneigt angenommen wird. Auch die Vereinfachungen, die sich bei diesen Konstruktionen daraus ergeben, dass man den Grundriss nicht getrennt zeichnet, sondern nach Bedarf in den Aufriss hineinlegt, sollten Erwähnung finden. Es wird ferner wohl gezeigt, wie man bei einer Rotationsfläche in einem Punkte der Eigenschattengrenze die Tangente an diese bestimmen kann, aber die für den praktischen Zeichner wichtigere Thatsache, dass die Eigenschattengrenze in denjenigen Parallelkreisen Unstetigkeiten besitzt, für welche die Meridiankurve eine Unstetigkeit in der Krümmung besitzt etc., finde ich nicht erwähnt.

Auch bei der Aufsuchung der Durchdringungskurve zweier Rotationsflächen mit sich schneidenden Axen (S. 8) fehlen Beispiele; gerade diese Methode lässt sich im technischen Zeichnen vorteilhaft anwenden.

Das XIV. Kapitel trägt die Überschrift „Schiefe und orthogonale axonometrische Projektion“ nicht mit vollem Rechte; wohl wird der Begriff der Axonometrie erklärt, über die Wahl der Axensysteme gesprochen und der Pohlke'sche Lehrsatz kurz und klar bewiesen, aber es ist an keinem Beispiele die Anwendung des axonometrischen Zeichnens gezeigt. Das in den Nr. 818—830 gelehrt „Verfahren der schiefen Projektion“ kann doch nicht „Axonometrie“ genannt werden; es ist eine Art freie schiefe Projektion (wie sie zuerst wohl Staudigl* auseinandergesetzt hat), die zum praktischen Gebrauche gut geeignet ist. Es wird nämlich nicht allein die Originalfigur, sondern auch deren Grundriss auf einer angenommenen Horizontalebene in schiefer Projektion dargestellt, ein Punkt also durch sein Bild und das Bild seines Grundrisses bestimmt. Die Grundaufgaben über Punkte, gerade Linien und Ebenen werden elegant gelöst und ihre Anwendung hauptsächlich bei der Darstellung von Flächen zweiten Grades und bei der Bestimmung des Umrisses einer Rotationsfläche gezeigt. Eine ähnliche Behandlung erfährt die orthogonale Axonometrie. Anwendungen

* „Die axonometrische und schiefe Projektion“, Wien 1875.

auf die Konstruktion der Schatten an in schiefer Projektion dargestellten technischen Gebilden fehlen, obwohl solche Beispiele eine gute Vorübung für die Konstruktion der Schatten an perspektivisch dargestellten Objekten abgeben.

Die nächsten beiden Kapitel, die offenbar aus verschiedener Feder stammen, beschäftigen sich mit der Perspektive, und zwar das XV. Kapitel mit der „Freien Perspektive“, das XVI. Kapitel mit der „Angewandten Perspektive“, deren Hauptaufgabe sein soll: „in einer gegebenen Ebene und für einen gegebenen Augpunkt („Augenpunkt“ ist wohl nur ein Druckfehler!) das perspektivische Bild eines durch Grund- und Aufriss gegebenen Objekts zu konstruieren.“ In ersterem wird die übliche Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen in Centralprojektion und die Ausführung der Hauptkonstruktionen erklärt, hierauf deren Anwendung zur Darstellung von Körpern, insbesondere zur Umrissbestimmung von Kugeln und Flächen zweiten Grades gezeigt.

Das Kapitel über „Angewandte Perspektive“ ist ausführlicher und elementarer geschrieben als die vorhergehenden, nimmt auch an manchen Stellen auf früher besprochene Dinge keine Rücksicht (auf die schon in Nr. 880 erwähnte Darstellung eines horizontalen Kreises z. B. wird in Nr. 898 nochmals ziemlich ausführlich eingegangen; statt des für das Projektionszentrum vorher gebrauchten Namens „Augpunkt“ wird jetzt meist „Auge“ gesagt). Das Zeichnen perspektivischer Bilder wird mittelst der Flucht- und Teilungspunkte unter gleichzeitiger Benützung des umgelegten Grundrisses, der dabei wohl ziemlich entbehrlich ist, an einigen Beispielen gezeigt und auch die Konstruktion der Schatten erklärt. Die scharfe Unterscheidung zwischen „gerader Ansicht“ und „schräger Ansicht“ ist dem hohen Standpunkte, den das Buch in theoretischer Beziehung einnimmt, kaum angemessen. Die Bemerkung auf S. 450: „das Objekt wird hinter der Bildebene befindlich angenommen“ kann die irrtümliche Meinung erwecken, dass dies immer so sein müsse. Über die richtige Wahl der Bildebene und des Auges gegenüber dem zu zeichnenden Gegenstande fehlen Erläuterungen, da sie dem Anfänger stets schwer fällt. Abbildungen nach Art der Fig. 574, vielleicht noch in etwas grösserem Maßstabe, wären im Werke mehr erwünscht. Eine kurze Ableitung der Hauptgesetze über Reliefperspektive aus dem Begriffe der Centraalkollineation zweier räumlichen Figuren bilden den Schluss dieses Kapitels.

Das letzte Kapitel des Werkes endlich beschäftigt sich mit der Lehre von der Beleuchtung der Flächen. Die Konstruktionen der Isophoten für Cylinder-, Kegel-, Kugel-, Rotations- und Schraubflächen, sowie Regelflächen und Flächen zweiten Grades werden erklärt. Bei der Darstellung der Lichtgleichen eines geraden Kreiscylinders in schiefer Lage hätte durch Zeichnen von zwei Seitenrissen (die in diesem Werke so gut wie keine Verwendung finden) die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt und dadurch ihre Lösung übersichtlicher gestaltet werden können.

Etwas unangenehm empfindet man beim Gebrauche dieses Werkes das Fehlen fast jeder Litteraturangabe. Wenn die Autoren zu ihrer Rechtfertigung anführen, dass der Lernende dafür wenig Interesse habe, so hätten sie auch bedenken müssen, dass ihr Buch, besonders in den Kapiteln über Kurven und Flächen, vielleicht von ebenso vielen „in der Sache bereits heimischen Lesern“ benützt werden würde als von solchen, die daraus erst die darstellende Geometrie lernen wollen.

Die Beurteilung eines Werkes über darstellende Geometrie hängt mehr wie sonst von dem prinzipiellen Standpunkte ab, den man einnimmt, ob man nämlich die darstellende Geometrie als Wissenschaft betrachtet, die um ihrer selbst willen betrieben werden soll, oder in erster Linie als eine Hilfswissenschaft der Technik. Vom letzteren Standpunkte aus kann man nicht sagen, dass durch das vorliegende Werk dem Mangel an einem brauchbaren, den Bedürfnissen der technischen Hochschulen angepassten Lehrbuche der darstellenden Geometrie abgeholfen wäre. Zur Förderung der reinen Wissenschaft werden jedoch die meisten Kapitel dieses Bandes beitragen, und ein Studierender oder Kenner der Mathematik, der sich mit den Lehren der darstellenden Geometrie bekannt machen will, wird viel des Interessanten darin finden.

E. MÜLLER.

BORK, CRANTZ, HAENTZSCHEL, Mathematischer Leitfaden für Realschulen.

Erster Teil: Planimetrie und Arithmetik, 184 S. — Zweiter Teil: Trigonometrie und Stereometrie, 128 S. Leipzig 1897, 1898, Dürr.

Im letzten Jahrzehnt sind auf dem litterarischen Markt zahlreiche Lehrbücher für Elementar-Mathematik erschienen, welche, sei es in der Anordnung oder Abgrenzung des Stoffes, Abänderungen treffen, sei es hinsichtlich der zu befolgenden Methode reformatorisch vorgehen. Der vorliegende Leitfaden, welcher in erster Linie für die Berliner Realschulen bestimmt ist, bietet nach beiden Richtungen hin neues; dies liess sich allerdings nach den Namen der Verfasser erwarten, von denen der dritte sich durch wichtige Untersuchungen auf dem Gebiete der Potentialtheorie hervorgethan hat.

Wir beschränken uns im folgenden darauf, einige charakteristische Punkte hervorzuheben, indem wir auf ein Begleitschreiben aufmerksam machen, das der Verlag als Vorwort zu dem Leitfaden gesondert hat erscheinen lassen und das durch seine historischen Ausführungen auch über den Rahmen des Buches hinaus Interesse erweckt.

Unter den einführenden Paragraphen der Planimetrie verdient derjenige, welcher von den Parallelen handelt, besondere Erwähnung. Die von den Verfassern gewählte Behandlung verleiht der Parallelentheorie eine bemerkenswerte Kürze und Klarheit und dürfte dem Auffassungsvermögen des Quartaners entsprechen.

Einer der nächsten Paragraphen bringt die Kongruenzsätze. Schon hier tritt das Bestreben der Verfasser, wo irgend möglich praktische Aufgaben in den Gesichtskreis der Schüler zu ziehen, in glücklicher Weise zu Tage. Es werden schon hier Fälle angegeben, wo eine Verwertung der

Feldmesskunst möglich ist. Im weiteren Verlaufe mehren sich die praktischen Beispiele.

Dass die Verfasser den Begriff der kommensurablen und inkommensurablen Strecken nicht eingeführt haben, verdient uneingeschränkte Billigung; denn es kann nicht bestritten werden, dass ein klares Verständnis dieser Begriffe seitens des Tertianers nicht zu erzielen ist.

Die Arithmetik bildet den zweiten Teil des ersten Bandes. Es stimmt nicht bloss mit den Forderungen der „neuen“ Lehrpläne, sondern mit alter Schulmeisterpraxis überein, wenn die Verfasser den Schüler so früh als möglich in den Begriff der Gleichung und in die Anwendung desselben auf sogenannte eingekleidete Aufgaben einzuführen streben.

Die Trigonometrie des zweiten Bandes, im wesentlichen wohl aus der Feder des Herrn Haentzschel hervorgegangen, trägt ein durchaus originales Gepräge. Der erste Abschnitt behandelt die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel und die Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke, der zweite die trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel und die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke, der dritte die Additionsformeln und den Koordinatenbegriff. Schon diese Inhaltsangabe lässt die Absicht des Verfassers hervortreten: den Geltungsbereich der trigonometrischen Funktionen ohne Hilfe des Additionstheorems auf stumpfe Winkel auszudehnen. Der Verfasser erreicht dadurch die strenge Erfüllung einer durch die 1882er Lehrpläne für die Berliner Realschulen erlassenen Vorschrift: nur diejenigen Formeln einzüben, welche sich auf die Funktionen eines Winkels beziehen. Wer indessen auf dem Standpunkt steht, durch Einführung des Koordinatenbegriffes lasse sich die oben genannte Aufgabe am einfachsten lösen, und das Additionstheorem, insofern es die charakteristische Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen ausdrückt, könne nicht entbehrt werden, hat nur nötig, eine Umstellung der Paragraphen vorzunehmen.

Ausführlich spricht sich hierüber der Verfasser in einer interessanten historisch-kritischen Studie „Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie“ aus, welche in demselben Verlag erschienen ist.

Dass die Verfasser auch in diesem Teile des Buches auf praktische Anwendungen, wie sie insbesondere von Herrn Martus herrühren, hinreichend Rücksicht nehmen, mag noch einmal betont werden.

Der stereometrische Teil endlich enthält das gewöhnliche Pensum in einer durchaus ansprechender Form; ausserdem bringt er eine eingehendere Behandlung der Projektionslehre, insbesondere der Perspektive und senkrechten Projektion. Dementsprechend sind die Figuren durchweg trefflich und genügen den Anforderungen des Projektionszeichnens.

Auch diesem Teile sind eine Reihe hübscher Aufgaben beigegeben.

Wir können das Buch den Fachgenossen, welche bei ihrem Unterricht eines Leitfadens bedürfen, aufs wärmste empfehlen.

E. JAHNKE.

W. ERLER. **Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung.** Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. Fünfte Auflage besorgt von L. HUEBNER. Leipzig 1898, B. G. Teubner, 60 S.

Die vorliegenden Elemente sind ein Separatabdruck von Blättern, welche der Verfasser zuerst in der Hoffmannschen Zeitschrift im Jahre 1877 veröffentlicht hat, um den Beweis zu liefern, dass die Elemente der Kegelschnitte sich recht wohl auf synthetischem Wege mit sehr mässigem Zeitaufwande in der Gymnasialprima behandeln lassen. Der Verfasser hat seine Aufgabe meisterhaft gelöst, und die Elemente haben weiteste Verbreitung gefunden. Dieser günstige Erfolg ist „der methodischen Behandlung zuzuschreiben, welche bei wissenschaftlicher Strenge einerseits genau die mathematische Vorbildung einer gewöhnlichen Gymnasialprima ins Auge fasst, andererseits auf Erweiterung nicht bloss der Kenntnisse selbst, sondern auch der Beweisform Bedacht nimmt, ganz besonders aber der Beschränkung, welche es dem Lehrer ermöglicht, die wichtigsten Grundeigenschaften der Kegelschnitte unter alleiniger Voraussetzung der gewöhnlichen Primanerkenntnisse in noch nicht 25 Stunden zum allgemeinen Verständnis zu bringen.“

Die fünfte Auflage zeigt einige wesentliche Änderungen. Die Figuren sind im Text untergebracht, mehrere vereinfacht und zwölf neue hinzugefügt worden. Die bekannten Ableitungen der Kegelschnittgleichungen mit Hilfe des Pythagoras sind durch neue ersetzt, die der synthetischen Behandlung besser entsprechen. Bei der gemeinsamen Behandlung der drei Kegelschnitte sind dieselben zuerst als Central- und Parallelprojektionen des Kreises, später in Anlehnung an Milinowki's Ableitung als harmonische Abbildungen des Kreises aufgefasst worden. Das Kapitel mit der Überschrift: Ähnlichkeit der Kegelschnitte, rührt vom Herausgeber her und hebt die Eigenschaften der Asymptoten aus ihrer Isolierung heraus. Weitere Änderungen und Zusätze beziehen sich auf die Aufgaben.

Infolge der Erweiterungen, welche die neue Auflage erfahren hat, erscheint die Schrift auch für die Prima realistischer Lehranstalten geeignet, was durch die Änderung im Titel angezeigt wird.

E. JAHNKE.

W. DÜRK. **Die Probleme des logarithmischen Potentials für eine von zwei Kreisbogen begrenzte ebene Fläche.** Ein Beitrag zur Potentialtheorie. Mit 2 Tafeln. Inaugural-Dissertation. Leipzig 1898.

Der Verfasser formuliert die zu behandelnden Probleme folgendermaßen: Gegeben zwei sich schneidende Kreisbogen und innerhalb der von ihnen begrenzten ebenen Fläche T' ein beliebiger Punkt p . Alsdann soll ermittelt werden 1. die zu p entsprechende Greensche Funktion, 2. die Greensche Belegung der Kreisbogen, 3. der Wert der Greenschen Belegung in den Schnittpunkten der Kreisbogen, 4. die Verteilung der Gesamtmasse der Greenschen Belegung auf die Kreisbogen.

Zur Lösung dieser Probleme bedient sich der Verfasser unter Verwendung dipolarer Koordinaten nacheinander der Methode der Spiegelpunkte und der Methode des Fourierschen Integrals. Während die erstere nur unter den beiden Bedingungen, dass der Winkel, unter dem sich die beiden Kreisbogen schneiden, ein aliquoter Teil von π ist, und dass p innerhalb F liegt, anwendbar ist, ist die zweite Methode von diesen Einschränkungen frei.

Nach Ableitung einiger Hilfssätze werden die genannten Probleme in je fünf Kapiteln behandelt, und zwar in einem ersten Teile mittels der Methode der Spiegelpunkte, in einem zweiten nach der Methode des Fourierschen Integrals, und in einem dritten werden die Resultate der ersten Methode auf die der zweiten zurückgeführt.

Die Resultate der interessanten Arbeit können wegen der Länge der Formeln hier nicht wiedergegeben werden. Es muss dieserhalb auf die Arbeit verwiesen werden.

Der Verfasser teilt noch mit, dass er sich die Veröffentlichung des zweiten Teiles seiner Dissertation unter dem Titel: „Die analogen Probleme des Newtonschen Potentials für einen von zwei Kugelcalotten begrenzten Raum“ für später vorbehält. ——— —

E. JAHNKE.

A. KRAUSE. Über Fuchs'sche Differentialgleichungen vierten Grades.

Berlin 1897, Mayer & Müller. 58 S.

Seit den grundlegenden Untersuchungen von Herrn Fuchs (vergl. Sitzungsberichte der Berl. Akademie 1884) sind die Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, wiederholt zum Gegenstand eingehender Studien gemacht worden. Herr Fuchs hat allgemein für diese Differentialgleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. Hierauf hat u. a. Herr Wallenberg in seiner Inaugural-Dissertation (vergl. Zeitschrift für Mathem. und Physik Bd. 35) die — von ihm Fuchs'sche genannten — Differentialgleichungen erster Ordnung und insbesondere diejenigen dritten Grades genauer untersucht. In engem Anschluss an die Wallenberg'sche Arbeit behandelt der Verfasser der vorliegenden Dissertation die Fuchs'schen Differentialgleichungen vierten Grades und gelangt hierbei zu interessanten Resultaten über die expliziten Formen solcher Differentialgleichungen.

Im ersten Abschnitt wird die Differentialgleichung der Form

$$y'^4 + 4\varphi_1 y'^3 + 27\varphi_2 = 0, \quad y' = \frac{dy}{dz}$$

behandelt. Es werden die Koeffizienten den Fuchs'schen Bedingungen gemäss bestimmt. Der Verfasser findet folgende Form der Differentialgleichung:

$$y'^4 - \frac{\lambda'}{3\lambda} y y'^3 + \frac{\lambda'^4}{\lambda^3} = 0,$$

wo λ nur von z abhängt. Ihr Integral ist algebraisch, es lautet:

$$y = -c \sqrt[3]{\lambda - 81c^{-3}},$$

wo c eine Konstante.

Der zweite Abschnitt ist der Untersuchung der Differentialgleichung

$$y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y'^2 + \psi_3 = 0$$

gewidmet. Soll diese eine Fuchs'sche sein, so muss sie folgende Gestalt haben:

$$y'^4 + \frac{2}{3} \varrho \varrho' y'^3 + \frac{2}{3} \varrho^3 \varrho'^2 (4\varrho + g)^{-1} y'^2 + \frac{4}{9} \varrho^4 \varrho'^4 (4\varrho + g)^{-2} y = 0,$$

wo ϱ eine beliebige Funktion von z und g eine Konstante. Auch diese Differentialgleichung hat das Geschlecht Null. Ihr Integral lautet:

$$72y = -6\varrho^2 + c(2\varrho - g)\sqrt{4\varrho + g} + \text{const.}$$

Der dritte Teil handelt von den Differentialgleichungen der Form

$$y'^4 + \psi_1 y'^2 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0.$$

Hier können, wie der Verfasser findet, nur die beiden Fälle eintreten: 1. ψ_1 ist höchstens vom zweiten Grade in y ; alsdann ist ψ_2 höchstens vom dritten und ψ_3 vom vierten Grade; 2. ψ_1 ist vom vierten Grade in y ; alsdann muss ψ_2 vom dritten und ψ_3 vom achten Grade sein. Auch hier werden die Differentialgleichungen nebst ihren Integralen explizite aufgestellt. Wegen der komplizierteren Gestalt derselben mag hier ihre Wiedergabe unterbleiben und auf die Arbeit selber verwiesen werden.

Im vierten Abschnitt endlich beschäftigt sich der Verfasser mit den Differentialgleichungen der Form

$$y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0.$$

Im einfachsten Falle findet er folgende Form:

$$y'^4 - \varrho^{-1} \varrho' y y'^3 - \alpha_1 \varrho^{-1} \varrho'^3 y' + \alpha_2 \varrho^{-1} \varrho'^4 = 0,$$

$$y = c\varrho + \alpha_1 c^{-2} + \alpha_2 c^{-3}.$$

Die explizite Wiedergabe der übrigen Gestalten an dieser Stelle muss aus demselben Grunde wie oben unterbleiben.

Es ist zu wünschen, dass der Verfasser seine an Resultaten reiche Studie für Fuchs'sche Differentialgleichungen noch höheren Grades fortsetzen möge.

E. JAHNKE.

E. SALLER. Die Aufgaben aus der Elementar-Mathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den königl. bayer. humanistischen und technischen Unterrichtsanstalten in den Jahren 1873 bis 1893 gestellt wurden. München 1898, Th. Ackermann. 167 S. M. 3.80.

Die Sammlung zerfällt in drei Teile: Der erste enthält die auf Planimetrie, der zweite die auf Stereometrie, der dritte die auf ebene Trigonometrie bezüglichen Aufgaben. Die Lösung jeder Aufgabe wird vollständig mitgeteilt; wo die Aufgabe eine Determination erfordert, wird auch diese ausführlich entwickelt; wo die Aufgabe eine numerische Rechnung

verlangt, wird diese gleichfalls ausgeführt. Ferner sind zu jeder Aufgabe die zugehörigen Figuren gezeichnet.

Von den Aufgaben sind besonders die der Planimetrie angehörigen zum Teil hochinteressant. Referent kann die Sammlung den Fachgenossen aufs wärmste empfehlen.

E. JAHNKE.

Annuaire pour l'an 1899, publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 658 S. Prix: fr. 1.50.

Das am 25. Juni 1795 gegründete Bureau des longitudes veröffentlicht alljährlich ein Jahrbuch, welches eine grosse Menge von Tabellen enthält, wo man sämtliche wissenschaftlichen Zahlen aus der Physik, Chemie, Astronomie, Zinsrechnung, Statistik und Münzkunde findet. Diese Zahlen werden jährlich auf Grund der neuesten Untersuchungen korrigiert. Ausser diesen Korrekturen weist das diesjährige Annuaire gegen das vorjährige noch andere Veränderungen auf. So hat Cornu dem Kapitel über das metrische System eine sechs Seiten lange Note „Sur les unités C. G. S.“, in der Optik verschiedene Angaben bezüglich der Photometrie und Wellenlängen, in der Elektrizität eine wichtige Note über die in den Anwendungen der Elektrizität üblichen elektrischen Einheiten hinzugefügt.

Endlich sind noch die diesjährig beigegebenen populär wissenschaftlichen Aufsätze aus der Feder berühmter französischer Gelehrten zu erwähnen: Sur les ballons-sondes; par M. Bouquet de la Grye. — La Géodésie moderne en France; par M. Bassot. — Sur le sidérostat à lunette de 60 m de foyer et de 1,25 m d'ouverture en construction chez M. Gautier. — Sur les travaux exécutés à l'observatoire du mont Blanc en 1898; par M. J. Janssen.

Die Mannigfaltigkeit des Inhalts und die leichtfassliche Darstellung in Verbindung mit dem erstaunlich niedrigen Preise machen es erklärlich, dass man das Annuaire in Paris in den Händen von Vertretern der verschiedenartigsten Berufsklassen findet.

E. JAHNKE.

M. GIRNDT. Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. Erster Teil: Lehre von den ebenen Figuren. Leipzig 1897, B. G. Teubner. 98 S.

Bei der Abfassung des vorliegenden Leitfadens hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, im mathematischen Unterricht an niederen und mittleren Fachschulen erstens alles auszuschneiden, was in keiner Beziehung zu der fachlichen Praxis sowie zu den übrigen auf den Fachschulen gelehrt Unterrichtsfächern steht, und was für die Herstellung eines genetischen Zusammenhanges zwischen den einzelnen Teilen des theoretischen Lehrgebäudes entbehrlich ist, zweitens auf die Bedürfnisse des bautechnischen Unterrichts und der baugewerblichen Praxis beständig Rücksicht zu nehmen. Dementsprechend sind diejenigen Kapitel, welche im bautechnischen Leben

besondere Wichtigkeit haben, mit grösserer Breite behandelt worden, als es meistens geschieht. So ist die Symmetrie in einem besonderen Kapitel behandelt und auch in den übrigen Teilen des Lehrgebäudes gebührend berücksichtigt worden. Ebenso ist den Inhaltsbestimmungen von ebenen Figuren ein angemessener Platz eingeräumt worden.

Was die Beweise zu den Lehrsätzen anlangt, so beschränkt sich der Verfasser auf diejenigen Sätze ganz kurz hinzuweisen, mit deren Hilfe der Beweis zu führen ist.

Besonderes Interesse verdient das Aufgabenmaterial des vorliegenden Leitfadens. Die 400 Aufgaben betreffen grossenteils den Hochbau, zum kleineren Teile den Tief-, Wege- und Kanalbau, sowie die Mechanik und das Feldmessen. Vor allen Dingen werden eine grosse Anzahl von mit sauberen Meßskizzen versehenen Aufgaben beigebracht, die den Übungsstoff so bringen, wie er später in der Praxis an den Bautechniker herantritt. Sie umfassen alle Gebiete des Hoch-, Tief- und Strassenbaues, sie behandeln Eisenprofile, Pfeilerquerschnitt, Futtermauern, Erdkörper im Auftrag und Einschnitt, Hinterfüllungen, Baugruben, Rampen, Zelt-, Walm- und Mansard-Dächer gleicher und ungleicher Neigung, Grundrisse von Gebäuden, Kanalprofile, Treppenhäuser, Querschnitte durch Gewölberkörper u. a. m.

Dieses Übungsmaterial ist ausserordentlich wertvoll und bietet eine grosse Anzahl von Aufgaben, die auch für nichtfachliche Lehranstalten mit Erfolg verwendet werden können.

E. JAHNKE.

FR. BUSSLER. **Die Elemente der Mathematik.** Teil I. Pensum für die Mittelklassen (Quarta bis Untersekunda). 151 S. M. 1.50. — Teil II. Pensum für die Oberklassen (Obersekunda und Prima). Zweite Auflage. Dresden-Berlin 1897, L. Ehlermann. 234 S. M. 2.60. FR. BUSSLER. **Mathematisches Übungsbuch.** Erster Teil. Für den Gebrauch in den mittleren Klassen (Untertertia bis Untersekunda). 88 S. M. 1. — Zweiter Teil. Für den Gebrauch in den oberen Klassen (Obersekunda und Prima). Zweite vermehrte Auflage. Dresden-Berlin 1897, Ehlermann. 206 S. M. 2.80.

Das vorliegende Lehrbuch zerfällt in zwei Teile, deren erster für das Untergymnasium, der zweite für das Obergymnasium bestimmt ist. Der erste Teil schliesst mit einer Einleitung in die ebene Trigonometrie und Stereometrie und sucht hierin einen gewissen Abschluss zu erreichen.

Bemerkenswert ist, dass die einzelnen mathematischen Zweige nicht gesondert für sich behandelt, sondern dass nach dem Vorgange von Holzmüller für jede Klasse die Pensen aus jeder einzelnen Disziplin zusammengesetzt worden sind. An geeigneten Stellen des Textes sind historische Notizen beigelegt.

Sonstige Eigenheiten, die einen Fortschritt in der Lehrbuchlitteratur kennzeichnen, sind dem Referenten an dem Buche nicht entgegengetreten.

Das mathematische Übungsbuch besteht entsprechend dem Lehrbuch ebenfalls aus zwei Teilen, wo die Aufgaben nach den Pensen der einzelnen Klassen geordnet sind. Ausserdem sind die Aufgaben durchweg in Gruppen zu je vier gleichartigen und ziemlich gleich schweren zusammengestellt, einmal um die Übersicht zu erleichtern, dann auch um bei Klassenarbeiten neben einander sitzenden Schülern verschiedene Beispiele geben zu können. Auch Anwendungen sind in grosser Menge vorhanden, und teils der Geometrie, teils der Physik entnommen. In bezug auf die rein algebraischen Aufgaben sei noch folgendes bemerkt. Verschiedentlich finden sich Aufgabengruppen, von denen sich kaum behaupten lässt, dass Aufgaben ähnlicher Art bei mathematischen Problemen häufig auftreten werden. Es wäre daher bei einer neuen Auflage vielleicht zu erwägen, ob derartige Aufgaben nicht besser unterdrückt würden. Dem Referenten sind in dieser Hinsicht besonders die Aufgaben zur Anwendung der Wurzelregeln und für die Einübung des Verfahrens zur Ausziehung der Kubikwurzel aufgefallen.

E. JAHNKE.

A. RICHTER. Trigonometrische Aufgaben mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig 1898, B.G.Teubner. 41 S.

Die vorliegende Sammlung bringt Aufgaben aus der Goniometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass u. a. das Gebiet der Nautik sowohl in der ebenen wie in der sphärischen Trigonometrie eingehende Berücksichtigung gefunden hat. Dem gegenüber sind die Aufgaben aus der praktischen Geometrie wohl nicht in solcher Menge vorhanden, dass „der Lehrer nicht genötigt wäre, jedes Jahr dieselben Aufgaben durchzunehmen.“ Sonst aber bietet auch diese Sammlung des Verfassers den Fachgenossen wertvolles Material und kann denselben angelegentlichst empfohlen werden.

Auch zu dieser Sammlung ist ein besonderes Resultatenheft erschienen.

E. JAHNKE.

Bibliographie.

Periodische Schriften.

- Abhandlungen, physikalische, der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1898. Berlin, Reimer. kart. M. 14. 50.
- Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 19. Bd. München, Franz. M. 11.
- Dasselbe. 20. Bd. (Denkschriften 71. Bd. 1. Abt.) München, Franz. M. 16.
- Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 24. Bd. Nr. VI. HANKEL, W. C., Elektrische Untersuchungen. 21. Abhandl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
- Dasselbe. 25. Bd. Nr. I. FISCHER, OTTO, Der Gang des Menschen. 2. Teil. Die Bewegungen des Gesamtschwerpunktes und die äusseren Kräfte. M. 8. — Nr. II. SCHEIBNER, W., Über die Differentialgleichungen der Mondbewegung. M. 1. 50.
- Annalen der kaiserl. königl. Universitäts-Sternwarte in Wien. 13. Bd. Wien, Künast. M. 15.
- Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt und herausgegeben von der deutschen Seewarte. 8. Heft. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 7.
- Beobachtungs-Ergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 8. Heft. BATTERMANN, H., Resultate aus Beobachtungen von 379 Anhaltsternen und 1640 durch Anschluss bestimmten Sternen, angestellt in den Jahren 1892—1897 am grossen Berliner Meridiankreise. Berlin, Dümmler. M. 8.
- Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. Mathem. Teil. 1899. I. und II. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 50.
- Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. 15 Bd. 1897. Budapest, Kilián. M. 8.
- Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Klasse. 65. Bd. Wien, Gerolds Sohn. M. 57.
- Dasselbe. 67. Bd. Ebenda. M. 68.
- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1897. Meteorologische Station erster Ordnung in Magdeburg. Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburger Zeitung im Jahre 1897. XVI. Bd. XVII. Jahrg. Magdeburg, Fabersche Buchdr. kart. M. 7.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 28. Bd. Jahrgang 1897. 1. Heft. Berlin, Reimer. M. 13.

- Jahresbericht, 7., d. Sonnblick-Vereines f. d. Jahr 1898. Wien, Gerold & Co. M. 3.
Mitteilungen, mathematisch-naturw., im Auftrag des mathematisch-naturw.
Vereins in Württemberg, herausgegeben von O. BÖKLEN und E. WÖLFFING.
2. Serie. 1. Bd. 3 Hefte. Stuttgart, Metzler. M. 3.
Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr.
39. Jahrgang. 1898. Königsberg, Koch. M. 6.
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.
Mathem.-naturw. Klasse. Jahrg. 1898. Prag, Rivnáč. M. 9.
Sitzungsberichte, Münch. Mathem. Klasse. 1899. 1. Heft. München, Franz.
M. 1. 20.
Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. Abt. II a. 107. Bd. 8. bis
10. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 10. 30.
— Dasselbe. Abt. II b. 107. Bd. 8.—10. Heft. Ebenda. M. 4.
Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 34. Jahrg. 1. Heft. Leipzig,
Engelmann. M. 2.
Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der kaiserl. u. königl. Kriegs-
marine in Pola. 8. Gruppe. II. Jahrbuch der meteorol. und erdmagnet.
Beobachtungen. Neue Folge. 3. Bd. Beobachtungen des Jahres 1898.
Wien, Gerold & Co. M. 12.
Veröffentlichungen des königl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin.
Nr. 12. Berlin, Dümmler.
12. BAUSCHINGER, JUL., Genäherte Oppositions-Ephemeriden von
52 kleinen Planeten für 1899. Juli bis Dezember. M. 1. 20.
Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Institutes. Ergebnisse der
meteorol. Beobachtungen in Potsdam i. Jahre 1897. Berlin, Asher & Co. M. 8.

Geschichte der Mathematik.

- CANTOR, MOR., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Bd. 1. Halbbd.
Von 1200—1550. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
CURTZE, M., NICOLAUS COPERNICUS. (Sammlung popul. Schriften d. „Urania“
Nr. 54.) Berlin, Paetel. M. 2.
Euclidis opera omnia. Edd. I. L. HEIBERG et H. MENGE. Suppl.: Anaritii in
decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Ex inter-
pretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata.
Ed. MAX CURTZE. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.
DAUL, A., Das Perpetuum mobile. Wien, Hartleben. M. 2.
GERBERTI, postea Silvestri II papae, opera mathematica (972—1003).
Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligendosque
necessaria per septem appendices distributa. Collegit etc. NICOL. BUBNOW.
Berlin, Friedländer & Sohn. M. 24.
GÖRLAND, ALB., Aristoteles u. die Mathematik. Marburg, Elwert. M. 4. 50.
KOEHRER, FEL., Karl Friedrich Zöllner. (Sammlung populärer Schriften der
„Urania“ Nr. 53.) Berlin, Paetel. M. 2. 40.
LANGE, JUL., Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863. Nach
seinen Personalakten dargestellt. Berlin, Gaertner. M. 2.

TROPFKE, JOHS., Erstmaliges Auftreten der einzelnen Bestandteile unserer Schulmathematik. 1. Teil. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

Reine Mathematik.

- BIANCHI, L., Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. 2 Parti. lith. Pisa, Spoerri. Parte I L. 8, Parte II. L. 12.
- BIANCHI, L., Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzione e delle equazioni algebriche secondo Galois. Pisa, Spoerri. L. 10.
- BRENNERT, E., Geometrische Konstruktionsaufgaben mit vollständiger Auflösung. Ein Hilfsbuch für Lehrer. 2. Aufl. Berlin, Nicolai. M. 1. 50.
- CRÉPŒEUR, A., Recueil de Formules mathématiques. Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Trigonométrie, Mécanique. Bruxelles, Schepens & Co. Fr. 2.
- DÖRRIE, HEINR., Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. Dissertation. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2. 40.
- FEHR, H., Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale. Thèse. Paris, Carré & Naud.
- FISCHER, ED., Über Potenzen mit imaginären Exponenten. Beiträge zum mathematischen Unterrichte an höheren Lehranstalten. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- FOURREY, E., Récréations arithmétiques. Paris, Nony & Co. Fr. 3. 50.
- FRIAUCOURT, G., Tables de Logarithmes a six decimales pour les nombres et les lignes trigonometriques et Tables de Navigation. Paris. M. 7. 50.
- GEIGENMÜLLER, ROB., Elemente der höheren Mathematik, zugleich Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der analytischen Geometrie, algebraischen Analysis, Differential- und Integralrechnung. 2 Bde. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung.
1. Die analytische Geometrie. 5. Aufl. M. 5.
 2. Die niedere und höhere Analysis mit Rücksicht auf Funktionen einer reellen Urvariablen. 4. Aufl. M. 7.
- GENOCCHI, ANGELO, Differentialrechnung und Grundzüge d. Integralrechnung. Herausgegeben von GIUS. PEANO. Deutsch von G. BOHLMANN und A. SCHEPP. 2. Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.
- GLASER, Stereometrie. (Sammlung Göschen Nr. 97.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- GOLDSCHIEDER, FRZ., Über die Gauss'sche Osterformel. 2. Teil. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- HAMILTON, Sir W., Elements of Quaternions. 2. edit. by C. J. JOLY. Vol. I. London, Longmans. Sh. 21.
- HARKNESS, J., and MORLEY, F., Introduction to the Theory of analytical Functions. London. M. 12. 80.
- HESSENBERG, GERH., Ebene und sphärische Trigonometrie. (Sammlung Göschen Nr. 99.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.

- JUNKER, FRDR., Höhere Analysis. (Sammlung Göschen Nr. 88.) 2. Teil.
Integralrechnung. Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- KLEYER, Aufgabensammlung. 1387—1394. Heft. Stuttgart, Maier.
à M. —. 25.
- KRONECKER'S, LEOPOLD, Werke. 3. Bds. 1. Halbbd. Leipzig, B. G. Teubner.
M. 36.
- LONGCHAMPS, G. de, Cours de problèmes de géométrie analytique. T. 3.
Géométrie à trois dimensions. Paris, Delagrave.
- MÜLLER, HUB., Die Elemente der Planimetrie. 7. Aufl. Metz, Scriba.
M. 1. 20.
- Die Elemente der Stereometrie. 3. Aufl. Ebenda. M. 1. 20.
- MUTH, P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig, B. G. Teubner.
M. 8.
- NEPPI MODONA, A., e VANNINI, T., Questioni e formole di geometria ana-
litica ad una o due dimensioni. 2. ediz. Palermo. L. 3.
- NIEWENGLOWSKI, B., et GÉRARD, L., Cours de géométrie élémentaire. Géomé-
trie plane. Paris. Carré & Naud. Fr. 4.
- PASCAL, ERNST, die Variationsrechnung. Deutsch von ADF. SCHEPP. Leipzig,
B. G. Teubner. geb. M. 3. 60.
- PIETZKER, FRDR., Beiträge zur Funktionenlehre. Leipzig, B. G. Teubner.
M. 2. 80.
- RUDIO, FERD., Die Elemente der analyt. Geometrie. 2. Teil. Die analyt.
Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 40.
- SCHUBERT, HERM., Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra. (Sam-
mlung Göschen Nr. 48.) 2. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. M. —. 80.
- SCHWERING, KARL, Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten.
2. Aufl. Freiburg, Herder. M. 1.
- 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lös-
ungen. 2. Aufl. Ebenda. M. 2.
- Raumlehre für sechsstufige Schulen und Lehrerseminare, nach den
neuen Lehrplänen bearbeitet. 2. Aufl. Ebenda. M. —. 25.
- TIMPE, WILLY, Mathematische Aufgaben. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- ULRICH, GEO., Ausführliches Lehrbuch der Geometrie sowie der ebenen und
sphärischen Trigonometrie f. d. Selbstunterricht. Berlin, Schultze. M. 4.
- WEBER, HEINR., Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. 2. Bd. Braunschweig,
Vieweg & Sohn. M. 12.
- WELLSTEIN, J., Zur Funktionen- und Invariantentheorie der binomischen
Gebilde. („Acta nova“ Bd. 74 Nr. 2.) Leipzig, Engelmann. M. 4.
- WETH, RUD., Über eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differential-
gleichung. Programm. Zürich, Basel, Schwabe. M. 1. 60.

Angewandte Mathematik.

- ALBRECHT, TH., Bericht über den Stand der Erforschung der Breiten-
variation am Schlusse des Jahres 1898. Herausgegeben vom Central-
bureau der internationalen Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.

- D'ALEMBERT, Abhandlung über Dynamik (1743). Übersetzt und herausgegeben von ARTH. KORN. (Ostwalds Klassiker Nr. 106.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 3. 60.
- BATTERMANN, H., Resultate aus den Polhöhenbestimmungen in Berlin, ausgeführt in den Jahren 1891 und 1892 am Universal-Transit der königl. Sternwarte. Herausgegeben vom Centralbureau der internationalen Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.
- BERNOULLI, JAK., Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi), (1713). 1. u. 2. Teil. Übersetzt und herausgegeben von R. HAUSSNER. (Ostwalds Klassiker Nr. 107.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 2. 50.
- Dasselbe. 3. und 4. Teil mit dem Anhang: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de paume). Übersetzt und herausgegeben von R. HAUSSNER. (Ostwalds Klassiker Nr. 108.) Ebenda. kart. M. 2. 70.
- BOLTE, F., Nautische Tafelsammlung. Nebst vier magnet. Karten. Hamburg, Eckardt & Messtorff. geb. M. 7.
- BORTFELDT, JUL., Azimute circumpolarer Sterne. 2. Teil. Südbreite nebst Sternkarte. Leipzig, Heinsius Nachf. kart. M. 3.
- BRUNO, KARL, Der Stoss elastischer Kugeln. Programm. Klagenfurt, von Kleinmayr. M. 1.
- Katalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abt. Katalog der Sterne bis zur 9. Größe zwischen 80° nördl. und 2° südlicher Deklination für das Aequinoctium 1875. 13. Stück. Leipzig, Engelmann. M. 23.
- DEVILLE, E., Photographic Surveying, including the Elements of Descriptive Geometry and Perspective. London, Low. Sh. 10. 6.
- EBSEN, JUL., Azimut-Tabellen, enthaltend die wahren Richtungen der Sonne, des Mondes und anderer Gestirne, deren Declination 29° Nord oder Süd nicht überschreitet, für Intervalle von 10 Zeitminuten zwischen den Breitenparallelen von 30° Nord bis 30° Süd. Hamburg, Eckardt und Messtorff. geb. M. 7.
- Dasselbe zwischen den Breitenparallelen von 30° bis 72° Nord oder Süd. Ebenda. geb. M. 6.
- Dasselbe zwischen den Breitenparallelen von 72° Nord bis 72° Süd. Ebenda. geb. M. 12.
- Fixpunkte, die, des schweizerischen Präcisionsnivelements. Herausgegeben durch das eidgenöss. topograph. Bureau. 8. Lieferung. Bern, Schmid und Francke. M. 3. 20.
- FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. 4. Bd. Dynamik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.
- FREYBERGER, HANS, Perspektive, nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive. (Sammlung Göschen Nr. 57.) 2. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. M. —. 80.
- FUHRMANN, ARWED, Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. 3 Teil. Bauwissenschaftl. Anwendungen der Differentialrechnung. 2. Hälfte. Berlin, Ernst & Sohn. M. 5. 50.

- GINZEL, F. K., Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften und den Zeitraum von 900 v. Chr. bis 600 n. Chr. Berlin, Mayer & Müller. M. 36.
- HAEDER, Konstruieren und Rechnen, für Schule und Praxis bearbeitet. 2 Bde. Düsseldorf, Schwann. geb. M. 10.
- KÖTTER, FRITZ, Bemerkungen zu F. KLEINS und A. SOMMERFELDS Buch über die Theorie des Kreisels. Berlin, Mayer & Müller. M. —. 80.
- KORN, ARTH., Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume. Berlin, Dümmler. M. 9.
- LAUENSTEIN, R., Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis. 5. Aufl. Stuttgart, Bergsträsser. M. 4.
- MARTIN, W. R., Treatise on Navigation and Nautical Astronomy. 3. ed. London, Longmans. Sh. 18.
- D'OCAGNE, M., Traité de Nomographie. Théorie des Abaques: Applications pratiques. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 14.
- OLBERS, WILH., Sein Leben und seine Werke. Ergänzungsband. Reduktion, neue, der von Wilhelm Olbers im Zeitraum von 1795—1831 auf seiner Sternwarte in Bremen angestellten Beobachtungen von Kometen und kleinen Planeten. Nach den Originalmanuskripten berechnet von WILH. SCHUR und ALB. STICHTENOTH. Berlin, Springer. M. 4.
- Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Photographische Himmelskarte. Zone + 31° bis + 40°. Deklination. 1. Bd. Leipzig, Engelmann.
1. SCHEINER, J., 20627 scheinbare rechtwinklige Koordinaten von Sternen bis zur 11. Grösse nebst genäherten Örtern für 1900. 0. M. 25.
- REINHERTZ, C., Geodäsie. Einführung in die wesentlichsten Aufgaben der Erdmessung und der Landesvermessung. (Sammlung Göschen Nr. 102.) Leipzig, Göschen. M. —. 80.
- Résultats, les, de la triangulation de la Suisse. 5. livr. Canton de Fribourg. Bern 1898, Schmid & Francke. M. 4.
- ROBSON, HERBERT, The Principles of Mechanics. In 2 parts. Part 1, Mechanics of Solids; Part 2, Mechanics of Fluids. London, Scientific Press. Sh. 2. 6.
- SCHUBERT, FRZ., Die darstellende Geometrie an maschinentechnischen Lehranstalten, Gewerbe- und Fachschulen. (In drei Teilen.) 1. Teil. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung. geb. M. 4.
- TARLETON, F. A., Introduction to the mathematical Theory of Attraction. London. cloth. M. 10. 80.
- TISSERAND, F., Leçons sur la détermination des orbites, professées à la Faculté des sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 6. 50.
- Veröffentlichungen des königl. preuss. Instituts. 1898. 2. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. u. 3. Ordnung im Jahre 1898, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1898. Beobachtungssystem des Königr. Preussen und benachb. Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3.

Physik und Meteorologie.

- AUERBACH, FEL., Kanon der Physik. Die Begriffe, Prinzipien, Sätze, Formeln, Dimensionsformeln und Konstanten der Physik, nach dem neusten Stande der Wissenschaft systematisch dargestellt. Leipzig, Veit & Co. M. 11, geb. M. 12.
- BEYER, OSC., Versuche zur Erforschung der höheren Luftschichten. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- BÖRNER, H., Physikalisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. In zwei Stufen. 1. Stufe. II. Leitfaden der Experimentalphysik für Realschulen, sowie für den Anfangsunterricht an Oberrealschulen. 4. Aufl. Berlin, Weidmann. geb. M. 2. 20.
- BRAUN, FERD., Über physikalische Forschungsart. Rede. Strassburg, Heitz. M. —. 80.
- CRANZ, C., und KOCH, K. R., Untersuchungen über Vibration des Gewehrlaufs. I. Schwingungen in vertikaler Ebene bei horizontal gehaltenem Gewehr. A. Gewehre vom Typus des Mausergewehrs Modell 71. (Aus: „Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften“.) München, Franz. M. 2.
- DONATI, LUIGI, Lezioni sulla fisica matematica dettate nella R. Università di Bologna. Parte II. Bologna. L. 6.
- FALB'S, RUD., Neue Wetterprognosen und Kalender der kritischen Tage für 1899 Juli bis Dezember. Berlin, Steinitz. M. 1.
- FRITSCHÉ, H., Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 und 1885 und ihre säkularen Änderungen, berechnet mit Hilfe der aus allen brauchbaren Beobachtungen abgeleiteten Koeffizienten der Gaussischen „Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus“. Ratzeburg, Frä. Luise Fritsche. M. 5.
- Gezeitentafeln für das Jahr 1900. Herausgegeben vom Reichsmarineamt. Berlin, Mittler & Sohn. M. 1. 50.
- GRUNMACH, LEO, Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Erkenntnis und Verwertung im praktischen Leben. (Aus: „Buch der Erfindungen“.) Leipzig, Spamer. M. 6.
- JAHR, E., Die Urkraft, oder Gravitation, Licht, Wärme, Magnetismus, Elektrizität u. s. w. sind sekundäre Erscheinungen der Urkraft der Welt. Berlin, Enslin. M. 2.
- KERBER, ARTH., Beiträge zur Dioptrik. 5. Heft. Leipzig, Fock. M. —. 50.
- KERTTLER, FRZ., Die Möglichkeit einer experiment. Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen. Nachtrag zu der Abhandlung: „Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz“. Leipzig, B. G. Teubner. M. —. 50.
- KOPPE, MAX, Die Ausbreitung einer Erschütterung an der Wellenmaschine darstellbar durch einen neuen Grenzfall der Besselschen Funktionen. Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

- LEHMANN, O., Versuchsergebnisse und Erklärungsversuche, nebst einem Verzeichnis sämtlicher Publikationen. Karlsruhe, Jahraus. M. 1.
- LIESEGANG, R. ED., Beiträge zum Problem des elektrischen Fernsehens. 2. Aufl. Düsseldorf, Liesegang. M. 3.
- MÖLLER, M., Witterungskalender. Eine nach Monaten geordnete Zusammenstellung der Witterung für die Beurteilung der Wetterlage der Monate Januar bis Dezember 1899. 1. Teil. Braunschweig, Limbach. M. —. 30.
- Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus, herausgeg. von G. HELLMANN. Nr. 12. Wetterprognosen u. Wetterberichte des XV. und XVI. Jahrhunderts. Berlin, Asher & Co. M. 20.
- PERLEWITZ, PAUL, Die Temperaturverhältnisse von Berlin. Nach 50jähr. Beobachtungen: 1848—1897. Programm Berlin, Gaertner. M. 1.
- POINCARÉ, H., La Théorie de Maxwell et les Oscillations Hertiennes. Paris. M. 1. 80.
- RICHARZ, F., Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. (Aus „Natur u. Geisteswelt“ Nr. 9.) Leipzig, B.G. Teubner. M.—. 90, geb. M. 1. 15.
- SCHOLLMAYER, G., Was muss der Gebildete von der Elektrizität wissen? Gemeinverständliche Belehrung über die Kraft der Zukunft. 8. Aufl. Neuwied, Heuser. M. 1. 50.
- SKINNER, CLARENCE A., Über das Anodengefälle bei der Glimmentladung. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 1. 20.
- SPIES, P., Das Nernstsche Licht. (Sammlung popul. Schriften der „Urania“ Nr. 52.) Berlin, Paetel. M. —. 60.
- TRABERT, WILH., Die Erforschung der höheren Schichten unserer Atmosphäre. Vortrag. (Aus: Vorträge des Vereins zur Verbreitung naturw. Kenntnisse in Wien, 39. Jahrg.) Wien, Braumüller. M. —. 60.
- Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Institutes: HAASEMANN, L., Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 55 Stationen von Hadersleben bis Coburg und in der Umgebung von Göttingen. Berlin, Stankiewitsch. M. 6.
- WARBURG, EMIL, Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. 4. Aufl. Freiburg i. Br., Mohr. M. 7.
- WINTER, WILH., Grundriss der Mechanik und Physik, für Gymnasien bearbeitet. 3. Aufl. München, Ackermann. M. 3. 20.
- WRAPSON, J. P., and GEE, W. W. H., Mathematical and physical Tables for Students in Technical Schools and Colleges. London. M. 7. 70.
- WÜLLNER, ADPH., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl., 4. Bd. Die Lehre von der Strahlung. 1. Halbbd. Leipzig, B. G. Teubner. M. 7.
- ZACHARIAS, JOHS., Galvanische Elemente der Neuzeit. Halle, Knapp. M. 6.
- ZENGER, K. W., Die Meteorologie und das Wetter im Jahre 1889, zugleich Wetterprognose für das Jahr 1899. Prag, Řivnáč. M. 2.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1898.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

A.

Abbildung.

195. Studien über die geodätische Abbildung. J. Lüroth. Mathem. Annal. LI, 161.
196. Sur la représentation conforme d'une surface sur une autre. G. Sourslow. Compt. Rend. CXXVI, 30.
197. Sur deux courbes décrites par des variables z, z' entre lesquelles il existe la relation homographique $z = \frac{az' + b}{cz' + d}$. J. Destoux. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 385.
198. Sur un cas particulier de la transformation homographique. X. Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 489.

Abelsche Transcendenten.

199. Sur les fonctions abéliennes singulières. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVI, 508.
200. Sur la transformation des fonctions abéliennes. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVI, 814.
201. Sur les transformations singulières des fonctions abéliennes. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVI, 882.
202. Über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Verzweigungspunktes. R. Fuchs. Crelle CXIX, 1.
203. Zur Reduktion hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades. O. Bolza. Mathem. Annal. L, 314. LI, 478. (Vergl. Nr. 289.)
204. On the hyperelliptic sigma functions. H. F. Baker. Mathem. Annal. L, 462.

Absolute Geometrie.

205. Gutachten betreffend den 3. Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises. F. Klein. Mathem. Annal. L, 583.
206. Le groupe d'équivalence et ses bases cinématiques. J. Andrade. Compt. Rend. CXXVI, 1775. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 449.]

Analytische Geometrie der Ebene.

207. Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungskurven. C. W. Meyer. Grun. Archiv 2. R. XVI, 153
208. Sur la détermination des courbes par une équation entre les distances tangentielles de leurs points à des courbes données. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 115.
209. Construction d'une certaine quartique. G. Gallucci. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 482.
210. Zur Theorie der Lemniskate. K. Zahradnik. Grun. Archiv 2. R. XVI, 327.

211. Ellipse de Cassini décrite par le sommet d'un triangle curviligne. C. A. Laisant. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 181.
 212. Engendrement d'une strophoïde droite. H. Lez. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 177. Vergl. Ellipse. Hyperbel. Invariantentheorie. Kegelschnitte.

Analytische Geometrie des Raumes.

213. Zur Theorie der Berührungstransformationen. R. v. Lillienthal. Mathem. Annal. L, 303.
 214. Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Kurven und Flächen, welche H. Mangeot gefunden hat. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XVI, 112.
 215. Sur les congruences conjuguées aux réseaux C. C. Guichard. Compt. Rend. CXXVI, 718.
 216. Sur les congruences qui sont de plusieurs manières des congruences K. C. Guichard. Compt. Rend. CXXVI, 1011.
 217. Sur les congruences rectilignes. C. Guichard. Compt. Rend. CXXVI, 1183.
 218. Conséquence d'un théorème sur les congruences pseudosphériques. G. Candido. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 275.
 219. On certain doubly infinite systems of inscribed and circumscribed figures in space. R. A. Roberts. Quart. Journ. math. XXIX, 179.
 220. On certain analogues of anharmonic ratio. J. Brill. Quart. Journ. math. XXIX, 286.
 221. Relation entre les lieux décrits par deux points diamétralement opposés sur une sphère. V. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 285. — A. Mannheim ibid. 288.
 Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

222. Sur l'extension du système décimal au jour et au cercle entiers: avantages et procédés pratiques. J. de Rey-Pailhade. Compt. Rend. CXXVI, 505.
 223. Sur le système de l'heure décimale, les divisions du jour et du cercle, et la Table géographique. H. de Sarrauton. Compt. Rend. CXXVI, 192.
 224. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXVI, 370.
 225. Sur le développement de la fonction perturbatrice. A. Féraud. Compt. Rend. CXXVI, 1402.
 226. Sur l'ellipsoïde de Jacobi. P. Krüger. Compt. Rend. CXXVI, 715, 1126.
 227. Periodic orbits. G. H. Darwin. Mathem. Annal. LI, 523.
 228. Der Ring des Saturn. A. Niemann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 241.
 229. Relations de commensurabilité entre les moyens mouvements des satellites de Saturne. J. Mascart. Compt. Rend. CXXVI, 1260.
 230. Sur les quatre grosses planètes. E. Anceaux. Compt. Rend. CXXVI, 199.
 231. Sur l'astronomie apparente d'un habitant de la Lune. Gardès. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 433.
 Vergl. Geschichte der Mathematik 340. Trigonometrie 479.

Ausdehnungslehre.

232. Application des méthodes de Grassmann à la recherche du centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone. F. Caspary. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 389.

B.

Bestimmte Integrale.

233. Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges. Th. Cristen. Grun. Archiv 2. R. XVI, 1.
 234. Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss. H. Bourget. Compt. Rend. CXXVI, 634.
 235. Sur les intégrales de Fresnel. Godefroy. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 205.
 236. Sur une extension d'une formule de M. Léauté. Karagiannidès. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 539.
 237. Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques. E. Picard. Compt. Rend. CXXVI, 297, 1116, 1457. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 468.]

C.**Combinatorik.**

238. On the four-colour map theorem. P. J. Heawood. Quart. Journ. math. XXIX, 270.
 239. Sur l'application de la logique à la théorie des régions. Dumont. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 547.

Cubatur.

240. Sur la généralisation des théorèmes de Guldin. Kuscow. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 209.

D.**Determinanten.**

241. Über Potenzen von Determinanten. C. Weltzien. Mathem. Annal. I, 282.
 242. Remarques sur une matrice. L. Ravut. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 118.
 Vergl. Differentialgleichungen 256.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

243. Die Übertragung eines geometrischen Lehrsatzes auf Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinante. H. Kühne. Crelle CXIX 186.
 244. Über die 9 Schnittpunkte zweier ebenen Kurven 3. Ordnung. F. Schottky. Crelle CXIX, 72.

Differentialgleichungen.

245. Sur les équations aux différentielles totales. A. Guldberg. Compt. Rend. CXXXVI, 1335.
 246. Sur certains exemples singuliers d'approximations successives. Em. Picard. Compt. Rend. CXXXVI, 497.
 247. Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du première ordre. M. Petrovitch. Mathem. Annal. I, 103.
 248. Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation. W. Anissimoff. Mathem. Annal. LI, 181.
 249. Über die Differentialgleichung $\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \psi(x)y\frac{dy}{dx} + \chi(x)y^2 + \vartheta(x) = 0$.
 W. Heymann. Crelle CXIX, 253.
 250. Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. J. Horn. Crelle CXIX, 196, 267. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 486.]
 251. Untersuchung der Integrale von Differentialgleichung erster Ordnung vermittelt successiver Annäherungen. J. Horn. Mathem. Annal. LI, 346.
 252. Über eine Differentialgleichung erster Ordnung. J. Horn. Mathem. Annal. LI, 360.
 253. Zum Existenzbeweis des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von Paul Günther. A. Gutzmer. Crelle CXIX, 82.
 254. Nachtrag zu P. Günther's Abhandlung über lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten (Crelle CV, 1). L. Schlesinger. Crelle CXIX, 330.
 255. Über lineare Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Koeffizienten. L. W. Thomae. Crelle CXIX, 131. [Vergl. Bd. XLII Nr. 59.]
 256. Sur une formule nouvelle relative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires. W. Anissimoff. Mathem. Annal. LI, 388.
 257. Sur la détermination du groupe de rationalité des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. F. Marotte. Compt. Rend. CXXVI, 715.
 258. Über eine Klasse linearer Differentialgleichungen. J. Horn. Mathem. Annal. I, 525.
 259. Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. J. Horn. Compt. Rend. CXXVI, 205.

260. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXXVI, 1185, 1329, 1697.
261. Über nichtlineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung. G. Wallenberg. *Crelle* CXIX, 87.
262. A proof of Klein's theorem in connection with Lamé's functions. Lawr. Crawford. *Quart. Journ. math.* XXX, 307.
263. Les fonctions fuchsienues et l'équation $\Delta u = eu$. H. Poincaré. *Compt. Rend.* CXXVI, 627.
264. On the factors of the solutions in finite terms of Lamé's equation

$$\frac{d^2 u}{du^2} = U[n(n+1)pu + B].$$
 Lawr. Crawford. *Quart. Journ. math.* XXIX, 196.
265. Über die Differentialgleichungen der F -Reihen 4. Ordnung. L. Pochhammer. *Mathem. Annal.* I, 285.
266. Suggestions towards the formation of a general theory of systems of Pfaffian equations. J. Brill. *Quart. Journ. math.* XXX, 221.
267. Über die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichung. P. Stückel. *Crelle* CXIX, 339.
268. Sur l'existence des intégrales d'un système partiel, déterminées par certaines conditions initiales. Riquier. *Compt. Rend.* CXXVI, 208.
269. Sur la théorie générale des caractéristiques des équations aux dérivées partielles. E. Goursat. *Compt. Rend.* CXXVI, 1332.
270. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre. J. Beudon. *Compt. Rend.* CXXVI, 324, 388.
271. Sur les invariants des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. J. Le Roux. *Compt. Rend.* CXXVI, 721.
 Vergl. Iterationen 374. *Mechanik. Reihen* 448.

Differentialquotient.

272. Sur les formes canoniques d'une expression différentielle
 $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p.$
 C. Roussianc. *Mathem. Annal.* I, 247.
273. Sur les dérivées d'une fonction algébrique. D. Sintsof. *N. ann. math. Sér. 3,* XVII, 411.
 Vergl. Thetafunktionen 474.

Differenzenrechnung.

274. General summation — formulae in infinite differences. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math.* XXIX, 303.
275. On the sums of the series $1^n + 2^n + \dots + x^n$ und $1^n - 2^n + \dots + x^n$. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math.* XXX, 166.

Dreiecksgeometrie.

276. Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreiecks. Konst. Karamata. *Grun. Archiv.* 2. R. XVI, 113.
277. Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks, als besonderen Fall die Steiner'sche Kurve des Dreiecks. Bücking. *Grun. Archiv.* 2. R. XVI, 271.
278. Sur les segments des côtés d'un triangle déterminés par trois droites issues des sommets opposés. Franc. Ferrari. *N. ann. math. Sér. 3,* XVII, 94.
279. Propriété du triangle dont les sommets sont les points d'intersection des trois perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné avec une transversale quelconque. H. Lez. *N. ann. math. Sér. 3,* XVII, 336.

E.

Elastizität.

280. Sur les équations de la théorie de l'élasticité. E. et F. Cosserat. *Compt. Rend.* CXXVI, 1089.
281. Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité. E. et F. Cosserat. *Compt. Rend.* CXXVI, 1129.

Elektrizität.

282. De l'énergie d'un système électrisé, considérée comme répartie dans le diélectrique. H. Pellat et P. Sacerdote. *Compt. Rend.* CXXVI, 817.
 283. Sur les déformations qu'éprouve un diélectrique solide lorsqu'il devient le siège d'un champ électrique. P. Sacerdote. *Compt. Rend.* CXXVI, 1019.

Ellipse.

284. Propriété des quatre cercles de Joachimsthal d'une ellipse. A. Droz-Farny. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 479.
 285. Ellipse lieu des points de rencontre des tangentes communes à une circonférence donnée et une circonférence variable. H. Lez. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 386.

Ellipsoid.

286. Relation entre les axes d'une section centrale d'un ellipsoïde et la distance du centre au plan tangent de l'un des sommets de la section. Lacour. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 272.
 Vergl. *Astronomie* 226. *Oberflächen zweiter Ordnung* 441.

Elliptische Transcendenten.

287. Sur les fonctions elliptiques de première espèce. E. Jaggi. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 367.
 288. Zur Theorie der Zweiteilung elliptischer Funktionen. B. Igel. *Crelle* CXIX, 50.
 289. Die kubische Involution und die Dreiteilung und Transformation dritter Ordnung der elliptischen Funktionen. O. Bolza. *Mathem. Annal* L, 68. (Vergl. Nr. 203.)

F.**Faktorenfolge.**

290. Über die Darstellung von reellen Funktionen mit unendlich dicht liegenden Nullstellen durch unendliche Produkte, deren Faktoren ganze analytische Funktionen sind. T. Broden. *Mathem. Annal.* LI, 299.
 291. Sur la décomposition de $\sin x$ en facteurs. H. Padé. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 312.

Formen.

292. Sur les formes arithmétiques linéaires à coefficients réels quelconques. A. Hurwitz. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 64.
 293. Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne. L. Berzolari. *Mathem. Annal.* LI, 473. (Vergl. Nr 289.)
 294. Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren. A. Brill. *Mathem. Annal.* L, 157.
 295. Resultanten ternärer Formen. P. Gordan. *Mathem. Annal.* L, 113.
 296. Über bilineare Formen mit conjugiert imaginären Variabeln. A. Loewy. *Mathem. Annal.* L, 557.
 297. Zur Theorie der zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Formen. G. Pick. *Mathem. Annal.* L, 381.
 Vergl. *Invariantentheorie. Oberflächen* 424.

Funktionalgleichung.

298. Über rationale Auflösungen einer Funktionalgleichung. L. Saalschütz. *Crelle* CXIX, 291.
 Vergl. *Iterationen* 378.

Funktionen.

299. Über die Verzweigung der dreiblätterigen Riemann'schen Flächen. L. Baur. *Crelle* CXIX, 171.
 300. Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXXVI, 200.
 301. Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXXVI, 318.

302. Sur le développement des fonctions analytiques pour les valeurs réelles des variables. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXXVI, 385.
303. Sur le développement des fonctions réelles non analytiques. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXXVI, 459.
304. Sur les fonctions discontinues développables en série de fonctions continues. R. Baire. *Compt. Rend.* CXXVI, 884.
305. Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues. R. Baire. *Compt. Rend.* CXXVI, 1621.
306. Sur les types de croissance et sur les fonctions entières. E. Borel. *Compt. Rend.* CXXVI, 321.
307. Sur la forme que prend, par la suppression de certains termes, un développement en série entière. Riquier. *Compt. Rend.* CXXVI, 1558.
308. Algebraische Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz. G. Landsberg. *Mathem. Annal.* L, 333.
309. Über das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen. G. Landsberg. *Mathem. Annal.* L, 577.
310. Sur les groupes qui se présentent dans la généralisation des fonctions analytiques. P. Medolaghi. *Compt. Rend.* CXXVI, 1188.
311. Sur un problème de Riemann. L. Schlesinger. *Compt. Rend.* CXXVI, 723.
312. Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Funktionen. A. Hurwitz. *Mathem. Annal.* LI, 196.
313. The Bernoullian function. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math.* XXIX, 1.
314. On the relations between Bernoulli's und Euler's numbers. W. F. Sheppard. *Quart. Journ. math.* XXX, 18.
315. Sur les expressions dites surpuissances. D. Gravé. *N. ann. math. Sér. 3.* XVII, 80. — E. M. L'émeray *ibid.* 139. [Vergl. Bd. XLII Nr. 591.]
316. Sur une relation entre 7 fonctions algébriques entières. P. Sondat. *N. ann. math. Sér. 3.* XVII, 190.
317. Über die Theorie der symmetrischen S-Funktionen mit einem einfachen Nebenpunkte. Fr. Schilling. *Mathem. Annal.* LI, 481.
318. The conditions that a quadri-quodric relation may be poristic. G. B. Mathews. *Quart. Journ. math.* XXX, 16.
319. Sur la transformation d'Euler. S. Pincherle. *Crelle* CXIX, 347.
Vergl. Abelsche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Faktorenfolge. Formen. Funktionalgleichungen. Gleichungen. Integration (unbestimmte). Invariantentheorie. Iterationen. Maxima und Minima. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Trigonometrie 477. Variationsrechnung.

G.

Geometrie (descriptive).

320. Un parallélogramme étant projeté orthogonalement suivant un carré trouver la diagonale du carré en fonction des côtés et de l'angle du parallélogramme. Dulimbert. *N. ann. math. Sér. 3.* XVII, 192.
321. Construction de la perspective conique d'une sphère. M. d'Ocagne. *N. ann. math. Sér. 3.* XVII, 44.

Geometrie (höhere).

322. Sur le fondement de la géométrie projective. H. G. Zeuthen. *Compt. Rend.* CXXVI, 213. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 522.]
323. Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie. Fr. Schur. *Mathem. Annal.* LI, 401.
324. Sur le principe de correspondance. H. Burkhardt. *Compt. Rend.* CXXVI, 1854.
325. Sur la correspondance quadratique et rationnelle de deux figures planes et sur un déplacement remarquable. E. Duporcq. *Compt. Rend.* CXXVI, 1405.
326. Sur l'application du principe de dualité aux théorèmes de géométrie plane. L. Ripert. *N. ann. math. Sér. 3.* XVII, 446.
327. Sopra le figure polari delle curve piane del terzo ordine. G. Scorza. *Mathem. Annal.* LI, 154.
328. Some polar constructions. F. Morley. *Mathem. Annal.* LI, 410.

329. Studies in transformation of plane algebraic curves. Miss C. A. Sott. Quart. Journ. math. XXIX, 329.
330. Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. F. Gerbaldi. Mathem. Annal. L, 473.
331. Sur les relations entre les éléments infinitésimaux de deux figures homographiques ou corrélatives. A. Demoulin. Compt. Rend. CXXVI, 390.
332. Sur l'interprétation géométrique des racines d'un polynôme $R(x)$ du quatrième degré. E. Malo. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 128.
333. Reclamation de priorité pour plusieurs théorèmes relatifs à l'hypocycloïde à trois rebroussements. S. Kantor. Compt. Rend. CXXVI, 928. [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 534.]
334. Sur le déplacement d'un triangle variable semblable à un triangle donné. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 47. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 532.]
335. Sur une certaine famille de courbes algébriques. H. E. Timerding. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 351.
336. Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 215. — Ripert *ibid.* 333.
337. Mémoire sur les cubiques gauches. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 53. — Gallucci *ibid.* 422.
338. Sur la définition de tétraèdres semblablement situés. C. A. Laisant. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 186.
- Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung. Dreiecksgeometrie, Geschichte der Mathematik 339.

Geschichte der Mathematik.

339. Desargues' Verdienste um die Begründung der projektivischen Geometrie. St. Chrzaszczewski. Grun. Archiv 2. R. XVI, 119.
340. Sur l'histoire céleste du XVII^e siècle de Pingré. G. Bigourdan. Compt. Rend. CXXVI, 712. — Callandreau *ibid.* 941.
341. Schleiermacher als Mathematiker. H. Borkowski. Grun. Archiv 2. R. XVI, 337.
342. James Joseph Sylvester 3. IX. 1814 — 15. III. 1897. M. Noether. Mathem. Annal. L, 133.
343. Ernst Christian Julius Schering 13. VII. 1833 — 2. XI. 1897. Crelle CXIX, 86.
344. Francesco Brioschi 22. XII. 1824 — 13. XII. 1897. Crelle CXIX, 259.
345. Francesco Brioschi 22. XII. 1824 — 13. XII. 1897. M. Noether. Mathem. Annal. L, 477.
346. Alb. Gauthier-Villars †, Ch. Wolf, J. Bertrand, G. Darboux. Compt. Rend. CXXVI, 453.
347. J. A. Gauthier-Villars †, 5. II. 1898. Laisant et Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 100.
348. Souillart †. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXVI, 1455.
349. Nécrologue de Charles Brise † 1898. Antomari et Laisant. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 533.
350. Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. F. Klein. Mathem. Annal. LI, 128.
351. Les membres du comité d'organisation du Congrès international des mathématiciens de 1900. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 245.
352. Über eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Funktionen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. L, 442.
353. Notes bibliographiques sur quelques courbes. Haton de la Goupillière. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 153.
354. Sur l'agrandissement des disques du soleil et de la lune à l'horizon. D. Eginitis. Compt. Rend. CXXVI, 1326.
- Vergl. Absolute Geometrie 205. Astronomie 226. Geometrie (höhere) 333. Mechanik 395.

Gleichungen.

355. Anwendungen von Dührings's Begriff der Wertigkeit. K. Wessely. Grun. Archiv. 2. R. XVI, 225.
356. Sur les équations à coefficients rationnels. R. Dedekind. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 201.

357. Über die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. L. Baur. *Mathem. Annal.* L, 241.
358. Sur le calcul des racines des équations par approximations successives. E. M. L'émeray. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 534.*
359. Sur l'équation du troisième degré à coefficients fonctions de $u = x^2 + y^2 + z^2$, qui admet u comme racine, étant données des équations différentielles entre x, y, z et une variable t . *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 225.*
360. Le théorème de Jerrard. C. A. Laisant. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 179.*
361. Die Differentialresolventen einer algebraischen Gleichung sechsten Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung. L. Lachtin. *Mathem. Annal.* LI, 463.
362. On the solution of certain equations of the seventh degree. E. M. Radford. *Quart. Journ. math.* XXX, 263.
363. Concerning the general equations of the seventh and eighth degrees. E. H. Moore. *Mathem. Annal.* LI, 417.
364. Sur une équation du degré $2n$ ayant toutes ses racines réelles. C. A. Laisant. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 187.*
365. Sur un système remarquable de n relations entre deux systèmes de n quantités. G. Fontené. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 317.*
366. Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues. F. Enriques. *Mathem. Annal.* LI, 134.
- Vergl. Geometrie (höhere) 332. Iterationen.

H.

Hydrodynamik.

367. Über eine Klasse hydrodynamischer Probleme mit besonderen Grenzbedingungen. P. Rudzki. *Mathem. Annal.* L, 269.
368. Note on a problem in hydrodynamics. A. E. Love. *Mathem. Annal.* LI, 158.
369. Sur un cas particulier du mouvement des liquides. E. Fontaneau. *Compt. Rend.* CXXXVI, 630.

Hyperbel.

370. Sur un triangle inscrit dans une hyperbole. A. Droz-Farny. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 94.* [Vergl. Bd. XLII Nr. 604.]
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 211.

I.

Integration (unbestimmte).

371. Sur le problème de l'intégration par changement des variables réelles. R. Baire. *Compt. Rend.* CXXXVI, 1700.
372. Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques sous forme finie. J. Petersen. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 6.*

Invariantentheorie.

373. Représentation géométrique de l'invariant absolu et des covariants d'une forme biquadratique. Lacour. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 341.*
Vergl. Bestimmte Integrale 217. Differentialgleichungen 271. Optik 445.

Iteration.

374. L'intégration par itération et le calcul des fonctions itératives. Ferber. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 509.*
375. Sur l'itération. C. Boulet. *Compt. Rend.* CXXXVI, 583.
376. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. L'émeray. *N. ann. math. Sér. 3, XVII, 75.* [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 516.]
377. Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération. L'émeray. *Compt. Rend.* CXXXVI, 510.
378. Sur certaines équations fonctionnelles linéaires. L'émeray. *Compt. Rend.* CXXXVI, 949.

K.**Kegelschnitte.**

379. Sur la discussion de l'équation des coniques. L. Ripert. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 329.
380. Sur une propriété focale des coniques. G. Gallucci. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 74. — P. H. Schoute *ibid.* 548.
381. Conique inscrite à un triangle donné et circonscrite à un autre, les six sommets se trouvant sur une conique. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 478.
382. Coniques osculatrices à une circonférence. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 481.
383. Sur un quadrangle mobile. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 101.
384. Sur les coniques qui sont les projections d'une cubique gauche. Ch. Bioche. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 541.
385. Enveloppe des coniques semblables qui ont même corde normale. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 576. — Cl. Servais *ibid.* 579.
386. Sommet d'un angle droit dont les côtés touchent deux coniques confocales situées dans le même plan. Donon. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 182.
387. Lieu du centre d'une sphère variable. Grosstête. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 130.
- Vergl. Ellipse. Hyperbel.

M.**Magnetismus.**

388. Sur la géométrie des champs magnétiques et le mouvement à deux degrés de liberté dans le plan ou sur la sphère. R. de Sausure. Compt. Rend. CXXVI, 325.

Maxima und Minima.

389. Zur Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von n Veränderlichen. V. v. Dantscher. Mathem. Annal. LI, 227.
- Vergl. Oberflächen 422. Variationsrechnung.

Mechanik.

390. Über die Prinzipien der Mechanik. L. Königsberger. Crelle CXIX, 25. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 581.]
391. Über die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrange'scher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials. L. Königsberger. Mathem. Annal. LI, 584.
392. Klassifikation der Kreiselprobleme nach der Art der zugehörigen Parametergruppe. H. Liebmann. Mathem. Annal. L, 51.
393. Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. A. Hirsch. Mathem. Annal. L, 429.
394. Sur une transformation de l'équation d'Hamilton. W. Ebert et J. Perchot. Compt. Rend. CXXVI, 1017.
395. The theory of perturbations and Lie's theory of contact transformations. E. O. Lovett. Quart. Journ. math. XXX, 47.
396. A theorem in vortex motion. G. W. Walker. Quart. Journ. math. XXIX, 382.
397. Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern. E. Rehfeld. Grun. Archiv. 2. R. XVI, 36.
398. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe. E. Jahnke. Compt. Rend. CXXVI, 1126.
399. Die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft. U. Bigler. Grun. Archiv. 2. R. XVI, 358.
400. Sur un système de forces en équilibre dans un plan. C. A. Laisant. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 188.
401. Sur certaines intégrales premières des équations de la dynamique à deux variables; application à un cas particulier du problème des trois corps. J. Perchot et W. Ebert. Compt. Rend. CXXVI, 725.
402. Sur une intégrale d'un problème sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Lagoutinsky. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 149.

403. Sur le mouvement d'un certain système. N. ann. math. Sér. XVII, 169.
404. Sur un disque circulaire fixé dans un plan vertical. E. Fouyé. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 237.
405. Sur le système d'une plaque carrée et d'un disque de même poids pouvant glisser le long d'une droite. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 467.
406. Sur les raccordements par arcs de cercle. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 314. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 590.]
407. Sur la stabilité de l'équilibre. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXXVI, 1777.
408. Rapport sur un mémoire de M. Lecornu intitulé: sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme. M. Lévy. Compt. Rend. CXXXVI, 1844.
409. Mouvement d'une barre qui tourne librement autour d'un de ses points fixes. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 175.
410. Sur le mouvement d'une barre qui s'appuie sur deux droites dépolies. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 307.
411. Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie. M. Lévy. Compt. Rend. CXXXVI, 1235.
412. Les lignes de forces et les surfaces équipotentielles dans la nature. G. M. Stanoiévitch. Compt. Rend. CXXXVI, 640.
413. Sur la flexion des pièces épaisses. Ribière. Compt. Rend. CXXXVI, 402.
414. Sur la résistance des massifs épais. Ribière. Compt. Rend. CXXXI, 1190.
415. Loi des déformations des métaux industriels. M. Brillouin. Compt. Rend. CXXXVI, 328.
416. Sur la déformation des pièces comprimées et la stabilité des grandes charpentes. A. Bérard. Compt. Rend. CXXXVI, 1008.
417. The stability of the motion of a bicycle. F. J. W. Whipple. Quart. Journ. math. XXX, 312.
418. La chronophotographie appliquée à l'étude des actes musculaires dans la locomotion. Marcy. Compt. Rend. CXXXVI, 1467.
- Vergl. Astronomie. Ausdehnungslehre. Elastizität. Elektrizität. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Schwerpunkt. Thetafunctionen 473. Wärmelehre.

N.

Nomographie.

419. Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXXXVI, 397, 560.

O.

Oberflächen.

420. Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique. E. Picard. Compt. Rend. CXXXVI, 1333.
421. Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXXVI, 512.
422. Sur les surfaces minima. C. Guichard. Compt. Rend. CXXXVI, 1487.
423. Sur les surfaces à courbure totale constante. C. Guichard. Compt. Rend. CXXXVI, 1556.
424. Détermination d'une surface par ses deux formes quadratiques fondamentales. L. Raffy. Compt. Rend. CXXXVI, 1852.
425. Trouver la surface focale d'une congruence. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 219.
426. Évolution géométrique de l'ordre de la surface réglée définie par trois directrices d'ordres m, n, p . E. Bally. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 508.
427. On the construction of models of cubic surfaces. W. H. Blythe. Quart. Journ. math. XXIX, 206.
428. Sur l'une des formes canoniques de l'équation des surfaces cubiques. Du-mont. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 503.
429. Sur une certaine surface du troisième ordre. Ch. Bioche. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 111.
430. Sur la surface de Steiner. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 437.
431. Réduction à la forme canonique des formules qui donnent, en fonction rationnelle de deux paramètres, les coordonnées d'un point de la surface de Steiner. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 499.

432. Sur la surface de l'onde. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 266.
 433. Sur les géodésiques du cône. H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 207.
 434. Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. A. Pellet. Compt. Rend. CXXVI, 392.
 435. Projection orthogonale sur une surface de révolution. Gem. Pirondini. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 246.
 436. Surfaces engendrée par des hélices. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 516.
 437. Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales, où les surfaces d'une même famille admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. M. Fouché. Compt. Rend. CXXVI, 210.
 Vergl. Abbildung. Analytische Geometrie des Raumes 214. Bestimmte Integrale 217. Mechanik 412. Thetafunktionen 476.

Oberflächen zweiter Ordnung.

438. Sur la discussion de l'équation des quadriques. L. Ripert. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 413.
 439. Die algebraischen Grundlagen der Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. O. Staude. Mathem. Annal. L, 398.
 440. Zusammenstellung der Formeln des Herrn Gundelfinger zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projektiven Koordinaten. Ph. Brückel. Crelle CXIX, 210, 313.
 441. Le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde de révolution aplati par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution est une podaire d'ellipse. E. Bally. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 48.
 442. Le lieu des foyers des sections faites dans un cylindre parabolique par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal est une podaire de parabole. E. Bally. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 49.
 443. Sur l'hyperboloïde osculateur à une surface réglée le long d'une génératrice. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 106.
 444. Sur une sphère et un paraboloidé mis en relation l'une avec l'autre. Philb. du Plessis. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 522.
 Vergl. Ellipsoid.

Optik.

445. Les invariants intégraux et l'optique. Hadamard. Compt. Rend. CXXVI, 811.
 446. The scattering of light by small particles. G. W. Walker. Quart Journ. math. XXX, 204.

P.

Philosophie der Mathematik.

447. Apropos de la définition du nombre. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 277.

R.

Reihen.

448. Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. P. Staeckel. Compt. Rend. CXXVI, 203.
 449. Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor. E. Lindelöf. Compt. Rend. CXXVI, 632.
 450. Sur deux séries divergentes en même temps. A. Buhl. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 338. — J. Franel *ibid.* 339.
 Vergl. Astronomie 224, 225. Differentialgleichungen 265. Differenzenrechnung. Funktionen 300, 301, 302, 303, 304, 307, 312.

S.

Schwerpunkt.

451. Sur le centre de gravité d'un octaèdre dont les diagonales concourent en un point. E. Brand. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 50. — G. Fontené *ibid.* 93.
 Vergl. Ausdehnungslehre.

Stereometrie.

452. Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden. Ed. Salfner. Grun. Archiv 2. R. XVI, 347.
 453. Quelques remarques sur le théorème d'Euler concernant les polyèdres. E. Weill. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 120.
 454. Über das gleichseitige und das Höhenschnittstetraeder. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XVII, 257, 333.

Substitutionen.

455. Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppierungsaufgaben. P. Hoyer. Mathem. Annal. L, 499.
 456. Neue Grundlagen der Gruppen und Substitutionentheorie. P. Hoyer. Mathem. Annal. LI, 445.
 457. Über discrete Scharen von kontinuierlichen Transformationen. W. Ahrens. Mathem. Annal. L, 518.
 458. Théorème fondamental sur les transformations birationnelles à coefficient entier. S. Kantor. Compt. Rend. CXXVI, 946.
 459. An universal invariant for finite groups of linear substitutions with application in the theory of the canonical form of a linear substitution of finite period. E. H. Moore. Mathem. Annal. L, 213.
 460. Concerning Abelian regular transitive triple-systems. E. H. Moore. Mathem. Annal. L, 225.
 461. Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen. L. Heffter. Mathem. Annal. L, 261.
 462. A triply infinite system of simple groups. L. E. Dickson. Quart. Journ. math. XXIX, 169.
 463. The first hypoabelian group generalized. L. E. Dickson. Quart. Journ. math. XXX, 1.
 464. Simplicity of the Abelian group on two pairs of indices in the Galois field of order 2^n , $n > 1$. L. E. Dickson. Quart. Journ. math. XXX, 383.
 465. On the transitive substitution groups of degrees thirteen and fourteen. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXIX, 224.
 466. On the operation groups whose order is less than 64 and those whose order is $2p^3$, p being any prime number. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXX, 243. [Vergl. Bd. XLII Nr. 705.]
 467. Sur les groupes d'ordre fini. Ed. Maillet. Quart. Journ. math. XXIX, 250.
 468. Über den arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. H. Maschke. Mathem. Annal. L, 492.
 469. Bestimmung aller ternären und quaternären Kollineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoeidrisch isomorph sind. H. Maschke. Mathem. Annal. LI, 253.
 470. On the transitive substitution groups of 24 letters that admit of two different imprimitive systems of degrees 3 and 4. A. C. L. Wilkinson. Quart. Journ. math. XXX, 157.

T.**Thetafunktionen.**

471. Sur la décomposition des fonctions θ en facteurs. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVI, 394.
 472. Über ein allgemeines aus Thetafunktionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. E. Jahnke. Crelle CXIX, 234. [Vergl. Bd. XLII Nr. 710.]
 473. Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions θ de deux arguments et leur application à la dynamique. E. Jahnke. Compt. Rend. CXXVI, 1013.
 474. Expressions des dérivées des fonctions θ de deux arguments au moyen des carrés des fonctions θ . E. Jahnke. Compt. Rend. CXXVI, 1083. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 632.]

475. Sur les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. M. Krause. *Compt. Rend. CXXVI*, 1086, 1489, 1619.
476. Über Thetafunktionen mit zwei Variablen und die zugehörige Kummer'sche Fläche. L. Schleiermacher. *Mathem. Annal. L*, 183.

Trigonometrie.

477. Sur la règle des analogies de M. E. Lemoine. Ch. Michel. *N. ann. math. Sér. 3, XVII*, 24. — G. Fontené *ibid.* 92.
478. Über eine Erweiterung der Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck. Dziobek. *Grün. Archiv 2. R. XVI*, 320.
479. Geometrical proof of spherical formulae and application to astronomy. E. C. Hudson. *Quart. Journ. math. XXIX*, 202.
480. Über goniometrische Relationen, die bei der Kreisteilung auftreten. B. Sporer. *Grün. Archiv 2. R. XVI*, 68.

V.

Variationsrechnung.

481. Zur Variationsrechnung. Ad. Kneser. *Mathem. Annal. L*, 27.
482. Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation. Ad. Kneser. *Mathem. Annal. LI*, 321.

W.

Wärmelehre.

483. Über die sogenannte H -Kurve. L. Boltzmann. *Mathem. Annal. L*, 325.
484. Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. W. Stekloff. *Compt. Rend. CXXVI*, 1022.
485. Sur le potentiel thermodynamique. A. Ponsot. *Compt. Rend. CXXVI*, 226.
486. Sur les propriétés thermiques des fluides saturés. E. Mathias. *Compt. Rend. CXXVI*, 1095.
487. Sur le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. W. Stekloff. *Compt. Rend. CXXVI*, 215.

Z.

Zahlentheorie.

488. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. III. Abhandlung. H. Weber. *Mathem. Annal. L*, 1. [Vergl. Bd. XLIII, Nr. 643.]
489. Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. D. Hilbert. *Mathem. Annal. LI*, 1.
490. Über Abelsche Gruppen. L. Heffter. *Crelle CXIX*, 261.
491. Sur les groupes hamiltonien. G. A. Miller. *Compt. Rend. CXXVI*, 1406.
492. Canonical forms for the unique representation of Kronecker's modular systems. H. Hancock. *Crelle CXIX*, 148.
493. Über die Zurückführung der Divisorsysteme auf ihre reduzierte Form. K. Hensel. *Crelle CXIX*, 114. [Vergl. Bd. XLIII Nr. 645.]
494. Über die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. K. Hensel. *Crelle CXIX*, 175.
495. Sur les lois de réciprocité. X. Stouff. *Compt. Rend. CXXVI*, 812. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 732.]
496. On the residue of a binomial-theorem-coefficient with respect to a prime modulus. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math. XXX*, 150.
497. On the residue with respect to p^n+1 of a binomial-theorem-coefficient divisible by p^n . J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math. XXX*, 349.
498. A congruence theorem relating to sums of binomial-theorem-coefficients. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math. XXX*, 361.
499. Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques. J. Frenel. *Mathem. Annal. LI*, 369.
500. Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes. De Jonquières. *Compt. Rend. CXXVI*, 863, 990, 991, 1077.

501. Formules générales donnant des valeurs de D pour lesquelles l'équation $t^2 - Da^2 = -1$ est résoluble en nombres entiers. De Jonquières. Compt. Rend. CXXVI, 1837.
502. Über eine Anwendung der Riemann'schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze H. v. Mangoldt. Crelle CXIX, 65.
503. Sur la théorie des nombres premiers. H. Laurent. Compt. Rend. CXXVI, 809.
504. Über Primzahlen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 335.
505. Über Primzahlenmengen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 447.
506. Über die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer bestimmten Grenze. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 447.
507. Formeln für Primzahlen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 448.
508. Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen. Th. Lange. Grun. Archiv 2. R. XVI, 220.
509. Facultätencongruenzen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XVI, 223.
510. Sur quelques théorèmes d'arithmétique. C. Moreau. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 293.
511. Inégalités auxquelles sont assujettés 3 nombres positifs dont la somme est 1. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 193.
512. Deux nombres consécutifs autres que 8 et 9 peuvent-ils être des puissances exactes? C. A. Laisant. N. ann. math. Sér. 3, XVII, 180.
Vergl. Formen.
-

Verzeichnis

von

Abhandlungen aus der angewandten Mathematik

die im Jahre 1898 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Zusammengestellt von **R. Mehmke.**

Beilage zur Zeitschrift für Mathematik u. Physik 44. Band, 2. u. 3. Heft.

Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschriften:

- A. B.** = (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, Jahrgang 63.
A. G. B. = (Glasers) Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Bd. 42 und Bd. 43.
Am. M. = American Machinist, vol. 21.
A. M. = Annales des Mines, 9^e série, t. 13 et t. 14 livraisons 1—11.
A. P. Ch. = Annales des Ponts et Chaussées, 7^e série, 8^e année, 1^{er} — 3^e trimestre.
B. = The Builder, vol. 74 and vol. 75.
C. B. = Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 18.
C. Z. = Central-Zeitung für Optik und Mechanik, Jahrgang 19.
D. B. = Deutsche Bauzeitung, Jahrgang 32.
D. M. = Deutsche Mechaniker-Zeitung (Beibl. z. Ztschr. f. Instrumentenk.), 1898.
E. = The Engineer, vol. 85 and vol. 86.
Eg. = Engineering, vol. 65 and vol. 66.
E. Z. = Elektrotechnische Zeitschrift, Jahrgang 19.
G. I. = Gesundheits-Ingenieur, Jahrgang 21.
J. G. W. = (Schillings) Journal f. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung, Jahrg. 41.
M. A. G. = Mitteilgn. üb. Gegenstände d. Artillerie- u. Genie-Wesens, Jahrg. 1898.
N. A. C. = Nouvelles Annales de la Construction, 5^e série, t. 5.
O. F. E. = Organ f. d. Fortschritte d. Eisenbahnwesens, Jahrg. 53. (N. F. Bd. 35.)
P. J. = (Dinglers) Polytechnisches Journal, Bde. 307, 308, 309 und 310.
Schw. B. = Schweizerische Bauzeitung, Bd. 31.
T. B. = Technische Blätter, Jahrgang 30, Heft 1.
Z. A. I. = Ztschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen, Bd. 44, Heftausg. u. Wochenausg.
Z. B. = (Erbkams) Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 48.
Z. G. = Zeitschrift für Gewässerkunde, Bd. 1.
Z. I. = Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang 18.
Z. Ö. I. A. V. = Zeitschrift d. Österreich. Ingenieur- u. Architekten-Vereins, Jahrg. 50.
Z. V. = Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 27.
Z. V. D. I. = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 42.
V. V. G. = Verhandlungen des Vereins für Gewerbleiß, Jahrgang 77.
-
-

Abbildungen.

- Jordan, Die konforme Doppelprojektion der preussischen Landesaufnahme. Z. V., S. 33—43, 417—432.
Leibold und Jordan, Koordinaten im Katastersystem Bochum. Z. V., S. 6—14; Berichtigung S. 86.
Heinr. Leibold, Jordan, Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten für die Eckpunkte der Messtischblätter aus den gegebenen geographischen Koordinaten im Katastersystem Bochum. Z. V., S. 217—228.
August Wilhelm Velten, Neue Methode, eine in azimuthaler Projektion entworfene geographische Karte in eine andere mit beliebig gegebener Kartenmitte zu übertragen. Z. V., S. 103—113.
S. auch Geodäsie.

Aërodynamik.

- A. Fliegner, Versuche über das Ausströmen von Luft durch konisch divergente Röhre. Schw. B., S. 68—70, 78—80, 84—89.
W. Gosebruch, Untersuchungen über die Durchlässigkeit von Wänden etc. für Luft. V. V. G., S. 365—414.
F. R. v. Loessl, Der aërodynamische Schwebeszustand einer dünnen Platte und deren Sinkgeschwindigkeit. Z. Ö. I. A. V., S. 454—456, 471—475, 481—485.

Ballistik.

- Alois Indra, Zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeiten aus den vor der Mündung gemessenen Geschossgeschwindigkeiten. M. A. G., S. 1—30.
Albert Edler v. Obermayer, Die explosionsartige Wirkung der mit grossen Anfangsgeschwindigkeiten geschossenen Gewehrprojektilen. M. A. G., S. 361 bis 397.
Joseph Stauber, Berechnung des ballistischen Koeffizienten steiler Flugbahnen. M. A. G., S. 99—109.
Freiherr v. Zedlitz und Neukirch, Beziehungen zwischen den modifizierenden Faktoren der ballistischen Gleichungen und ihre praktische Verwertung. M. A. G., S. 881—894.

Blockwerke.

- Martin Boda, Die Schaltungstheorie der Blockwerke. O. F. E., S. 1—7, 29—34, 49—83, 71—75, 91—95, 111—115, 133—138, 249.
Oskar Walzel, Schaltung Siemens'scher Blockwerke. Z. Ö. I. A. V., S. 34—35.

Dynamik.

- R. H. Angier, Die Massenausgleichung bei Lokomotiven und deren Folgen. O. F. E., S. 10—13, 34—37, 79—81, 95—97, 115—118.
Bauer, Ausgleich der Massenbeschleunigung bei Schiffsmaschinen. Z. V. D. I., S. 835.
A. Böttcher, Die Beanspruchung der federnden Achse der de Laval'schen Dampfturbine infolge von Schwankungen bei Aufstellung in Schiffen. Z. V. D. I., S. 1143—1146.
C. Fränzel, Das Taylorsche Verfahren zur Ausbalanzierung von Schiffsmaschinen. Z. V. D. I., S. 907—913.
Leitzmann, Die Verteilung der Bremswirkung auf die einzelnen Achsen der Eisenbahnfahrzeuge. A. G. B., Bd. 42, S. 90.
„Revolver“ and „J. D. S.“, A problem in Dynamics, E., vol. 85, p. 340, 536—537.
Schwingungszahlen, die, der einfachen Wagebalken. P. J., Bd. 307, S. 225—227, 249—251.
Sellentin, Die Anwendung des Prinzipes der Erhaltung der Energie auf den unelastischen Stoss. Z. V. D. I., S. 337—338. (Bemerkungen dazu von F. Pietzker, S. 338).
R. Skutsch, Ermittlung der Kräfte in Riemen- und Seiltrieben. V. V. G., S. 89 bis 104.
Paul Wostrowsky, Versuch einer rationellen Lafettentheorie. M. A. G., S. 439 bis 490.
S. auch graphisches Rechnen, Mess-Instrumente, Momente

Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

- C. Bach, Ermittlung der Zug- und Druckelastizität an dem gleichen Versuchskörper. Z. V. D. I., S. 35—40, 78—79.
— Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen, Z. V. D. I., S. 516.
Rudolph Bredt, Das Elastizitätsgesetz und seine Anwendung für praktische Rechnung. Z. V. D. I., S. 694—699.
Fr. Engesser, Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz). Z. V. D. I., S. 903—907, 927—931.
L. Geusen, Studie über das Bache'sche Gesetz $\epsilon = \alpha \sigma^m$. Z. V. D. I., S. 463—466. (Bemerkung dazu von A. Föppl, S. 599. Erwiderung von L. Geusen, S. 599 bis 600, desgl. Bemerkung von Emil Wagner, S. 818—819, Erwiderung von L. Geusen, S. 819—820.)

- W. Schüle, Über das Gesetz der elastischen Längenänderungen prismatischer Körper durch Zug und Druck. Z. V. D. I., S. 855—860.
- Dr. Kirsch, Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Z. V. D. I., S. 797—807.
- G. Holzmüller, Über Spannungszustände, die mit dem Newtonschen und zugleich mit dem logarithmischen Potential zusammenhängen. Z. V. D. I., S. 869—876.
- A. Meyerhof, Über einige Flusseisen-Kernfiguren. Z. V. D. I., S. 212—214.
- C. Bach, Mitteilungen zur Frage der „scheinbaren“ und der „wahren“ Zugfestigkeit, insbesondere des Zements. Z. V. D. I., S. 238—241, 336. (Bemerkungen dazu von A. Föppl, S. 336, und von E. Hartig, S. 337.)
- A. Föppl, Die Zugfestigkeit steinartiger Massen. C. B., S. 268—270, 274—275. (Bemerkungen dazu von C. Bach, S. 307—308.)
- O. Gruner, Die Zerdrückungshöhe, Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 252—255. (Bemerkung dazu von „Kiel“, S. 294.)
- Friedrich Kick, Über den Kongress des internationalen Verbandes für Materialprüfung in Stockholm 1897. Z. Ö. I. A. V., S. 96—100.
- Calculs des poutres droites et planchers en béton de ciment armé. N. A. C., p. 12 bis 26, 25—32, 43—48, 58—64, 80—88, 111—120, 139—144, 163—168, 187 bis 192, 212—216, 229—232, 243—246.
- W. Carling, Zur Berechnung der Stein- und Betonbalken. Z. Ö. I. A. V., S. 249 bis 253. (Bemerkung dazu von Fr. v. Emperger S. 357, Erwiderung von W. Carling S. 357—358.)
- Zur Berechnung der Biegungs-Spannungen in Stein und Betonplatten. D. B., S. 28. (Bemerkung dazu von Hofmann, S. 147—148.)
- Zur Berechnung der Betonbalken. Z. Ö. I. A. V., S. 223—224.
- R. Latowsky, Zur Berechnung von Betonbalken. Z. Ö. I. A. V., S. 56.
- A. Ostenfeld, Zur Berechnung von Monierkonstruktionen. Z. Ö. I. A. V., S. 22—25.
- M. R. v. Thullie, Über die Berechnung der Spannungen in den Moniergewölben. Z. Ö. I. A. V., S. 549—552.
- Barbet, Note sur le calcul des barrages de réservoirs en maçonnerie. A. P. Ch., 2, p. 265—299.
- Bourdelles, Ponts en maçonnerie articulés aux naissances et à la clef; avec une Note annexe par M. J. Rézal, A. P. Ch., 3, p. 31—92.
- Ad. Jöhrens, Über Gewichtannahmen von Mauerwerkskörpern, welche einem Kippmomente ausgesetzt sind. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 425—429.
- A. Matthes, Bestimmung der spez. Kantenpressungen in gebrochenen Fundamentflächen. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 473—477.
- Fritz Roskoth, Die Ermittlung von Druckspannungen in Mauerwerkskörpern bei Ausschluss von Zugspannungen. C. B., S. 586—587.
- H. O. Hüppner, Druckverteilung in Schornsteinquerschnitten. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 297—303.
- G. Lang, Druckverteilung in Schornsteinquerschnitten bei mangelhafter Zugfestigkeit des Mörtels. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 505—507. (Bemerkung dazu von Hüppner S. 669—670, Erwiderung von G. Lang S. 670—671.)
- C. B., Winkeländerungen eines elastisch gespannten Fachwerkdreiecks. C. B., S. 185 bis 186. (Bemerkung dazu von A. J. Jorini, S. 296.)
- G. Dieckmann, Über den Einfluss der Kontinuität der Balken und Träger im Hochbau. D. B., S. 611—614, 617.
- Adolf Francke, Berechnung der Durchbiegung und der Nebenspannungen der Fachwerkträger. Z. B., S. 111—132.
- L. Geusen, Die Berechnung der Ständer eiserner Wandfachwerke. Z. V. D. I., S. 69—76, 88—96.
- Otto Hauger, Über zulässige Beanspruchungen von Eisenkonstruktionen. D. B., S. 184—186, 189—190.
- Rob. Land, Die Spannungs- und Profilbestimmung von Walzeisenträgern bei beliebiger Momentenebene. Z. V. D. I., S. 444—445, 600.
- Métour, Note sur les Garde-corps des ponts suspendus rigides. A. P. Ch., 1, p. 41—59.
- Otto C. Reymann, Die Querschnittsverzerrungen eiserner Brücken und ihr Einfluss auf die Vertikalen und Längsverbände derselben. A. G. B., Bd. 43, S. 133—138, 239—242.
- Joseph Anton Spitzer, Träger aus Materialien von veränderlichem Formänderungs-Koeffizienten. Z. Ö. I. A. V., S. 270—273, 286—289.

4 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u. s. w.

- F. Stark, Über die Konstruktion der elastischen Linie bei Trägern mit ungleichem Querschnitte. T. B., S. 7—13.
- Johann Bařta, Studie über die Elastizität und Festigkeit der doppelt gekrümmten Träger. Statik der freitragenden Treppen. A. B., S. 27—37.
- Wilcke, Berechnung der Stärke der Treppenwangen. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 585—589.
- H., Zur Berechnung des Querschwellen-Oberbanes. D. B., S. 334—335.
- Kirsch, Theorie der Federn. Z. V. D. I., S. 429—436.
- Willibald Trinks, Berechnung der Federn für die Ventile von Dampfmaschinen und Kompressoren, Z. V. D. I., S. 1162—1168, 1259—1260.
- Berling, Berechnung mehrmals gekröpfter Kurbelwellen für Schiffsmaschinen. Z. V. D. I., S. 495—503.
- H. Bethmann, Kraft- und Spannungsverhältnisse in Schubkeilkuppelungen. Z. V. D. I., S. 534—536. (Bemerkung dazu von Chr. Eberle, S. 795, Erwiderung von H. Bethmann ebenda.)
- J. Goebel, Über Schwungradexplosionen. Z. V. D. I., S. 352—358.
- A. Burchard, Die Knickfestigkeit der Träger. C. B., S. 322—323.
- Fritz v. Emperger, Die Bruchlasten und die zulässigen Belastungen gusseiserner Säulen. Z. V. D. I., S. 1114—1118.
- Charles J. Kriemler, Der Knickungs-Widerstand der Wandstäbe eines Gitterträgers bei ungleichmässiger Beanspruchung. Schw. B., S. 62—64.
- R. F. Mayer, Tetmajer, Die Knickfestigkeit in Theorie, Versuch und Praxis. Z. Ö. I. A. V., S. 165—169.
- A. Ostefeld, Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit. Z. V. D. I., S. 1462—1470.
- L. Vianello, Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. Z. V. D. I., S. 1436—1443.
- Robert Land, Einige Beziehungen der zusammengesetzten Festigkeit nebst Anwendung auf die Spannungs-Ermittelung eines rechteckigen Querschnitts. D. B., S. 248—250, 259—262. S. auch Momente, Statik.

Elektrizität und Magnetismus, Elektrotechnik.

- H. du Bois, Die moderne Theorie des Magnetismus. E. Z., S. 788—790.
- H. Görges, Über die graphische Darstellung des Wechselepotentials und ihre Anwendung. E. Z., S. 164—168.
- J. F. Weyde, Die Mechanik der Reibungselektrizität. E. Z., S. 269—270.
- Die Mechanik des galvanischen Elementes. E. Z., S. 363—364, 382—383.
- Br., Über eine graphische Methode, um den Stromverlauf in unterseeischen Kabeln darzustellen (von F. Rossel). E. Z., S. 142—144.
- F. Breisig, Über die Berechnung der elektrostatischen Kapazität oberirdischer Leitungen. E. Z., S. 772—776.
- A. Bull, Eine einfache Methode zur Bestimmung des wirtschaftlichen Querschnittes und Arbeitsverlustes für elektrische Leitungen. E. Z., S. 361—363.
- Gispert Kapp, Görges, Rössler, Ein Beitrag zur Vorausberechnung der Streuung in Transformatoren. E. Z., S. 244—246.
- Gisbert Kapp, Theorie der Umformer. E. Z., S. 621—622, 643—644, 655—657.
- Fr. Natalis, Über die günstigste Anordnung der Rückleitungen elektrischer Bahnen. E. Z., S. 168—174.
- F. Niethammer, Über Induktionsmotoren mit veränderlicher Umlaufzahl. E. Z., S. 748—750.
- G. Roessler, Parallel- und Reihenschaltung bei Wechselströmen von beliebiger Kurvenform. E. Z., S. 595—599.
- Stromverteilung und Energieaufnahme von Kurzschlussankern. E. Z., S. 750 bis 756, 766—769.
- Alexander Rotherth, Praktische Vorausberechnung der Drehstrommotordiagramme. E. Z., S. 730—732.
- Charles Proteus Steinmetz, Die natürliche Periode einer Fernleitung und die Frequenz der Blitzentladungen derselben. E. Z., S. 702—704.
- S. auch Blockwerke, graphisches Rechnen.

Erddruck.

- Cramer, Die Gleitflächen des Erddruckprismas und der Erddruck. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 405—414.

- E. Cramer, Erddrucktafel. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 609—612.
 Th. Hoech, Zimmermann, Über Erddruck und Stützmauern. C. B., S. 288, 300,
 579—580.
 G. C. Manconchy, Earth-pressures on retaining walls. Eg. vol. 66, p. 256—257,
 484—485, 641—643.

Fehlertheorie.

- Ad. Blümcke, Zur Jordanschen Theorie des Maximalfehlers. Z. V., S. 313—321.
 Anton Tichy, Die Bedingungen der Schätzungsgenauigkeit an Maßstäben.
 Z. Ö. I. A. V., S. 129—134, 138, 146—151.

Geodäsie.

- J. Bischoff und Jordan, Umwandlung sphärischer Koordinaten. Z. V., S. 169
 bis 172.
 Jordan und Eggert, Berechnung der geographischen Koordinaten aus den recht-
 winkligen Koordinaten. Z. V., S. 613—623.
 J. (ordan), Ch. Lallemand, Refraction im Nivellement. Z. V., S. 97—103, 201—202.
 S. auch Abbildungen, Nautik.

Geometrie.

- Ed. Lang, Anordnung einer regelmässigen Weichenabzweigung im Anschluss an
 einen Bogen mit Halbmesser von 300 Meter. C. B., S. 58—59.
 — Bestimmung der Stellung der Merkzeichen. O. F. E., S. 75—78.
 P. A. Schroot, Note sur le tracé des joints, dans les voûtes elliptiques exécutées
 en briques. N. A. C., p. 242—243.
 Th., St., Bestimmung der Tangentlänge zu einem Bogen ohne Winkelmessung.
 Z. V., S. 365—367, 623.
 S. auch Zeichenwerkzeuge.

Geschichte.

- Th. Beck, Domenico Fontana (1543—1607) und der Transport des Vatikanischen
 Obelisken. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 359—376.
 Dittmar, Die Erfindungen Otto von Guericke. Z. V. D. I., S. 215—217.
 R. J., Das Wort Sinus. Z. V., S. 137—142.
 J. (ordan), Leibniz' Rechenmaschine von 1685. Z. V., S. 163—167.
 Siegmund Wellisch, Die Wiener Stadtpläne zur Zeit der ersten Türken-
 belagerung. Z. Ö. I. A. V., S. 537—541, 552—555, 562—565.

Graphisches Rechnen, graphische und plastische Darstellungen.

- Br., Über eine einfache Methode (von E. J. Houston und A. E. Kennelly),
 näherungsweise die harmonischen Komponenten einer gegebenen Wellenlinie
 zu bestimmen. E. Z., S. 714—715. (Berichtigung dazu von Georg Stern,
 S. 795—796.)
 F. J. Vaes, Graphical solution of n equations of the first degree with n variables.
 Eg. vol. 66, p. 867.
 Alfred E. Wiener, A new graphical method of finding the areas of irregular
 diagrams. Am. M., p. 361—365. (Bemerkungen dazu von J. P. Church,
 p. 417, John H. Barr, p. 428, J. J. Guest, p. 494—497, Leicester Allen,
 p. 554—555.)
 Relief Models, The use of. Am. M., p. 632—634.
 Tri-axial Diagram for graphical illustration, The use of. Am. M., p. 823.
 Emerich Fischer, Die graphische Ermittlung der Grösse von Stauweihern.
 C. B. S. 390—392.
 K. Gelinek, Ein Beitrag zur Beurteilung der Zweischiebersteuerungen. Z. Ö. I. A. V.,
 S. 334—337.
 N. J. Hopkins, Diagramm for finding centrifugal force and rim tension. Am. M.,
 p. 130—131.
 J. E. Johnson, jr., Diagrams for compressed air. Horsepower and temperature.
 Am. M., p. 460—462.
 M., Zeichnerische Darstellung der Belastung von Bahnhofsgleisen. C. B., S. 308.

Wilhelm Mattersdorff, Graphische Ermittlung der Bruttoabgaben elektrischer Bahnen. E. Z., S. 823—825.

P. Mehr, Betriebs-Schaupläne für Bahnhöfe. O. F. E., S. 82, Taf. XVII.

Ponsonby Moore Crosthwaite, Two graphic methods applied to hydraulic calculations. Eg. vol. 66, p. 65—66.

M. Rother, Über die Bestimmung des Fassungsraumes von Behältern für städtische Wasserversorgungsanlagen. J. G. W., S. 5—7, 44—49.

S. auch Elektrizität, Massenberechnung, Tafeln (graphische).

Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrologie.

H. Bazin, Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir (6^e article). A. P. Ch., 2, p. 151—264.

Victor Fournié, Note sur deux formules relatives à l'écoulement permanent et uniforme des liquides. A. P. Ch., 3, p. 1—10.

H. Gravelius, Die Geschwindigkeitsformel. Z. G., S. 196—208.

M., Berechnung der Abflussmengen in Flüssen und Kanälen. Z. Ö. I. A. V., S. 533 bis 534.

Rudolf Mewes, Berechnung von Wasserheizungs- und Wasserleitungs-Anlagen auf elementarem Wege. G. I., S. 17—22, 33—39.

— Über die Berechnung der Leitungen für Wasser und Gas in der Praxis. J. G. W., S. 212—213, 225—229.

Hofmann, Aufstau bei Flussbrücken. D. B., S. 268.

Tolkmitt, Die neue Geschwindigkeitsformel von Bazin. C. B., S. 317—318.

Rudolf Escher, Über Niederdruckturbinen mit gesteigerter Umdrehungszahl. Schw. B., S. 12—14.

H. Engels, Modellversuche über den Einfluss der Form und Grösse des Kanalquerschnittes auf den Schiffswiderstand. Z. B., S. 655—672.

James Hamilton, Horse-Power absorbed by skin friction and wave-making in ships of different forms and proportions deduced from progressive trials. Eg. vol. 65, p. 420, 610—611.

H. S. Hele-Shaw, Investigation of the Nature of Surface Resistance of Water and of Stream-Line Motion under certain Experimental Conditions. Eg. vol. 65, p. 420, 444, 477—480, 511—513.

Heubach, Das Gesetz des Schiffswiderstandes. D. B., S. 192.

M. Möller, Zugwiderstand der Kanalschiffe. Z. G., S. 225—245.

B. Schieldrop, On resistance to the motion of solids in a fluid. Eg. vol. 65, p. 425, 577—579.

Schiffswesen, Neues im. P. J., Bd. 307, S. 199—201.

Schromm, Die Bestimmung des Schiffswiderstandes auf Grund der Versuche mit Modellen. Z. Ö. I. A. V., S. 358—361. Derselbe, Ergebnisse der Modellversuche über den Einfluss der Grösse des Kanalprofils auf den Schiffswiderstand. Ebenda, S. 485—486.

H. Bindemann, Über die Abweichung zwischen der mittleren Abflussmenge und der Abflussmenge bei Mittelwasser. C. B., S. 638—639.

H. Gravelius, Die Häufigkeitskurve. Z. G., S. 145—150.

— Über eine Statistik der Wassermengen in den Hauptflussgebieten Frankreichs. Z. G., S. 208—213.

E. Heubach, Zur Wasserstands-Vorhersage. D. B., S. 48—50, 56—58.

W. Kleiber, Studien zur Wasserstandsprognose. Z. G., S. 10—25, 129—144.

M. Weber, Untersuchungen über den Zusammenhang der Grundrissform und der Profilgestaltung des Elbstromes. Z. G., S. 150—164, 321—337.

Bourdelles, Etude du régime de la marée dans le canal de Suez. A. P. Ch., 3, p. 11—30.

S. auch graphisches Rechnen, Tafeln (graphische).

Kettenbrüche.

Ad. Glörfeld, Die Anwendung der Kettenbrüche zur einfachen Berechnung der Wechsel-Räder für Drehbänke. C. Z., S. 31—32.

Kinematik.

Albert E. Guy, Straight line motion. Am. M., p. 285.

Cone Pulley diagram, A new. Am. M., p. 522—523.

- Emil Herrmann, Die Fingrißdauer der Zahnräder bei äusserer Verzahnung. P. J., Bd. 310, S. 28—32, 51—55.
 Triebwerke mit Verwendung von Schrauben- und Schneckenrädern, über. P. J., Bd. 307, S. 147—152, 172—173.
 Heinrich Weiss, Zur Berechnung der Stufenscheiben für Werkzeugmaschinen. Z. Ö. I. A. V., S. 749—762.

S. auch Kettenbrüche.

Kombinatorik.

S. Blockwerke.

Massenberechnung.

- Puller, Zur Bearbeitung von Eisenbahntwürfen. C. B., S. 333—335.

Mess-Instrumente und -Methoden.

- G. Benoit, Über Messung mechanischer Arbeit. A. G. B., Bd. 42, S. 110—112.
 Hammer, Ein neuer harmonischer Analysator (von A. Michelson und S. W. Stratton). Z. I., S. 93—95.
 ——— Entfernungsmesser aus Schallgeschwindigkeit. Z. V., S. 142—144.
 J., Entfernungsmesser. Z. V., S. 232—236.
 Lang, Neuerung am Kompensations-Planimeter. Z. V., S. 147—148.
 J. Lehrke, Feststehende Nonienteilungen. Z. Ö. I. A. V., S. 595—597. (Bemerkungen dazu von G. Starke, S. 625—626.)
 H. Neuendorff, Über ein neues Koordinatenplanimeter aus der Werkstatt des Mechanikers Ch. Hamann in Friedenau-Berlin. Z. V., S. 553—564.
 Pitchometer, the Chapman-Hunter. Eg. vol. 66, p. 793.
 Rateau, Expériences et théories sur le tube de Pitot et sur le moulinet de Woltmann (Hydromètres et Anémomètres). A. M., t. 13, p. 331—335.
 L. Schleiermacher, Das Stangenplanimeter von Prytz. Z. V., S. 408—411.
 Paul Schreiber, Die Instrumente zur Bestimmung der Windstärke. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 343—358.

Momente.

- Adolf Francke, Das grösste Biegemoment unter der rollenden Last bei un-mittelbarer Belastung des Trägers. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 761—763. (Bemerkung dazu von C. Runge und Weyrauch S. 813, Erwiderung von Adolf Francke S. 813—814.)
 Robert Land, Die Bestimmung der Haupt-Trägheitsmomente einer Fläche. C. B., S. 22. (Bemerkung dazu von R. F. Mayer, S. 84.)

Nautik.

- C. Runge, Über die Ortsbestimmung auf See. Z. V., S. 258—262.

Optik.

- C. V. L. Charlier, Über die Berechnung von zweilinsigen Objektiven. Z. I., S. 253 bis 254.
 H. Harting, Formeln zur Berechnung der Mikroskopobjektive geringer Apertur. Z. I., S. 331—335.
 ——— Zur Theorie der zweiteiligen verkitteten Fernrohrobjektive. Z. I., S. 375—380.
 M. von Rohr, Über die Lichtverteilung in der Brennebene photographischer Objektiv mit besonderer Berücksichtigung der bei einfachen Landschaftslinsen und symmetrischen Konstruktionen auftretenden Unterschiede. Z. I., S. 171 bis 180, 197—205.
 Karl Strehl, Zur Theorie des Mikroskopes nach Abbe. C. Z., S. 171.
 ——— Theorie des Mikroskopes auf Grund der Formeln für die Theorie des Fernrohres. Z. I., S. 301—317.

Perspektive.

- F. Pützer, Perspektivische Darstellung der Kugel. D. B., S. 283—285.

Photogrammetrie.

- Jordan, Zur Photogrammetrie. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 345—349. (Bemerkung dazu von E. Hammer S. 814.)
E. Konegen, Photogrammetrie (Vortrag). Z. V., S. 122—130.
Julius Mandl, Über Verwertung von photographischen Aufnahmen aus dem Luftballon. M. A. G., S. 165—181. (Mit einem Anhang über neuere Geometrie, S. 181—194.)

Rechen-Maschinen und Apparate.

- Stephan Balthasar, Über Rechenmaschinen. M. A. G., S. 110—122.
Bevel gear computing machine, A. Am. M., p. 222—223.
Rechenschieber, Unterbrochener Indexstrich am. Z. V., S. 597—598.
S. auch Geschichte, Rechnen.

Rechnen, numerisches.

- Dittmar, Multiplikation durch Viertels-Quadrate. Z. V., S. 336—338.
Edler, Grundböck, Einfache Methode zur Bestimmung der Quadrate von Zahlen. Z. Ö. I. A. V., S. 432—433, 508.
J. (ordan), H. Sossna, Polygonzugberechnung mit der Rechenmaschine. Z. V., S. 130—134, 196—198, 343.
S. auch Zeichenwerkzeuge.

Refraktion.

S. Geodäsie.

Schwerpunkt.

- Puller, Schwerpunktbestimmung des Trapezes. C. B., S. 72. (Bemerkung dazu von F. C. J. van den Steen van Ommeren, S. 576.)

Statik.

- B., Die statische Sicherheit der Gitterwerke für Wasserbauten. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 3—11.
J. Goebel, Standfestigkeit eines Schornsteines. Z. V. D. I., S. 180—183.
Lieckfeldt, Die Standfestigkeit von Staumauern mit offenen Lagerfugen. C. B., S. 105—108, 109—111.
G. Stockhammer, Zur Frage der Eisenbahnwagen-Entgleisungen. Z. Ö. I. A. V., S. 569—572.
F. Bohny, Der Eingelenkbogen. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 147—156.
L. Geusen, Beziehungen zwischen den Ankerzugkräften und den Kantenpressungen einseitig eingespannter Träger. C. B., S. 237—240.
A. Jöhrens, Über die Berechnung durchgehender Träger auf mehreren Stützen. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 601—607.
John Labes, Einfluss fehlender Stäbe in Fachwerkbalken. C. B., S. 93—94.
Mehrtens, Statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung der Gitterträger. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 329—332.
M. Schurich, Über die Berechnung der Grenzspannungen der Gitterstäbe eines einfachen Fachwerkbalkens und den Entwurf eines Schwedlerträgers. Z. A. I., Wochen-Ausg., S. 180—189.
Bruno Schulz, Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 57—70, 158—174. (Bemerkungen dazu von Adolf Francke S. 173—175, 481—486, Erwiderungen von Bruno Schulz S. 235 bis 240, 486—488.)
— Auslegerträger mit Mittelstoss. C. B., S. 121—123. (Bemerkungen dazu von Th. Hoech, S. 626—627.)
Friedrich Steiner, Die graphische Ermittlung der Stabspannungen im Halbparabelträger. T. B., S. 1—7.
Joh. E. Brik, Die statischen Verhältnisse der freitragenden Stiegenarme bei den Versuchen des Stufen-Ausschusses. Z. Ö. I. A. V., S. 493—497.
Irminger, Versuche über Winddruck auf Kuppeln. C. B., S. 505—507.
Th. Landsberg, Winddruck auf Kuppeln. C. B., S. 297—299.

- R. Kohfahl, Zweiter Beitrag zur Theorie der Kuppel- (und Turm-) Dächer. Z. V. D. I., S. 713—719, 749—755. (Bemerkung dazu von A. Föppl, S. 820.) Derselbe, Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer, ebenda S. 1412 bis 1416.
- H. Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer und verwandter Konstruktionen. Z. V. D. I., S. 1205—1213, 1233—1241.
- Rascher, Die statische Untersuchung räumlicher und ebener Fachwerke. Z. A. I., Heft-Ausg., S. 399—404, 593—608.
S. auch Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Schwerpunkt.

Tafeln, graphische.

- M. d'Ocagne, Abaque de la nouvelle formule de M. Bazin relative aux canaux découverts. A. P. Ch., 1, p. 304—314.
S. auch graphisches Rechnen.

Tafeln, numerische.

- C. Mensch, Berichtigung (Fehler in Jordans Hilfstafel für Tachymetrie). Z. V., S. 32.
Opus Palatinum (Sinus- und Cosinus-Tafeln von Jordan), Druckfehler in Z. V., S. 630.
S. auch Rechnen.

Wärmelehre.

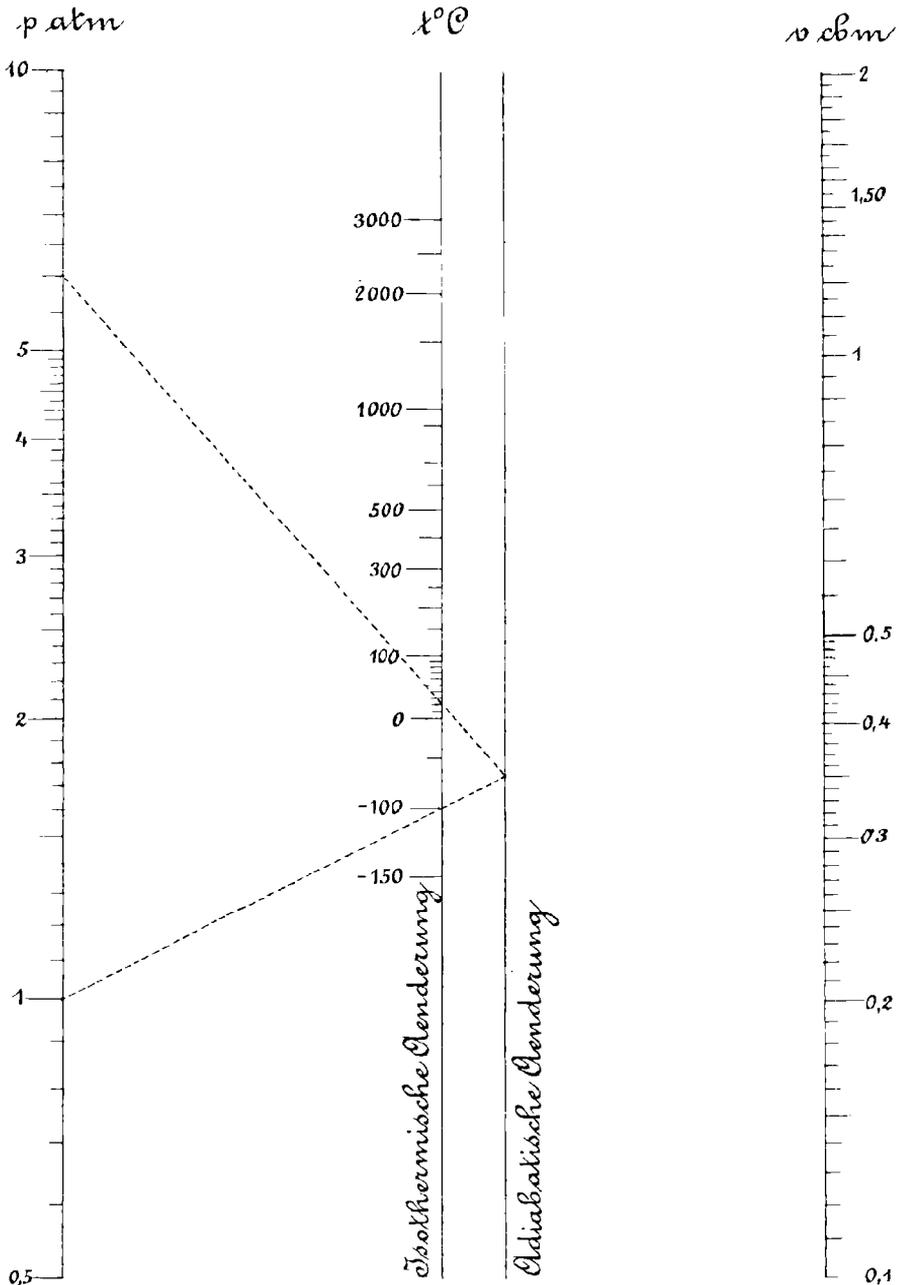
- U. Ancona, Das Wärmediagramm der Gase und deren Kreisprozesse. Z. V. D. I., S. 828—831.
- Donát Bánki, Zur Theorie der Wärmemotoren. Z. V. D. I., S. 893—902, 1151.
- J. B. Göbel, Die Berechnung der Druckverluste in Dampfleitungen. G. I., S. 205 bis 208, 221—225.
- Emil Herrmann, Der Wärmedurchgang durch die Kesselwand. P. J., Bd. 308, S. 229—232, 245—249.
- J. Illek, Die Berechnung und Dimensionierung der Dreifach-Expansionsmaschinen. Z. Ö. I. A. V., S. 732—738.
- Fritz Krauss, Diesels neuer Wärmemotor. Z. Ö. I. A. V., S. 141—146.
- Leitzmann, Die Drosselung des Dampfes bei Lokomotiven. A. G. B., Bd. 42, S. 229—233.
- R. Mollier, Über die Beurteilung der Dampfmaschine. Z. V. D. I., S. 685—689.
- J. Nadal, Théorie mathématique de la machine à vapeur. Action des Parois (Suite). A. M., t. 14, p. 351—459
- A. Stodola, Die Kreisprozesse der Gasmaschine, Z. V. D. I., S. 1045—1052, 1086 bis 1091.
- Georg Wellner, Kritische Bemerkungen über die Theorie und Bauart der neueren Gaskraftmaschinen und des Diesel-Motors. Z. Ö. I. A. V., S. 185 bis 191. (Bemerkung dazu von Fritz Krauss S. 224, Erwiderung von Georg Wellner S. 224.)
S. auch graphisches Rechnen.

Zeichenwerkzeuge.

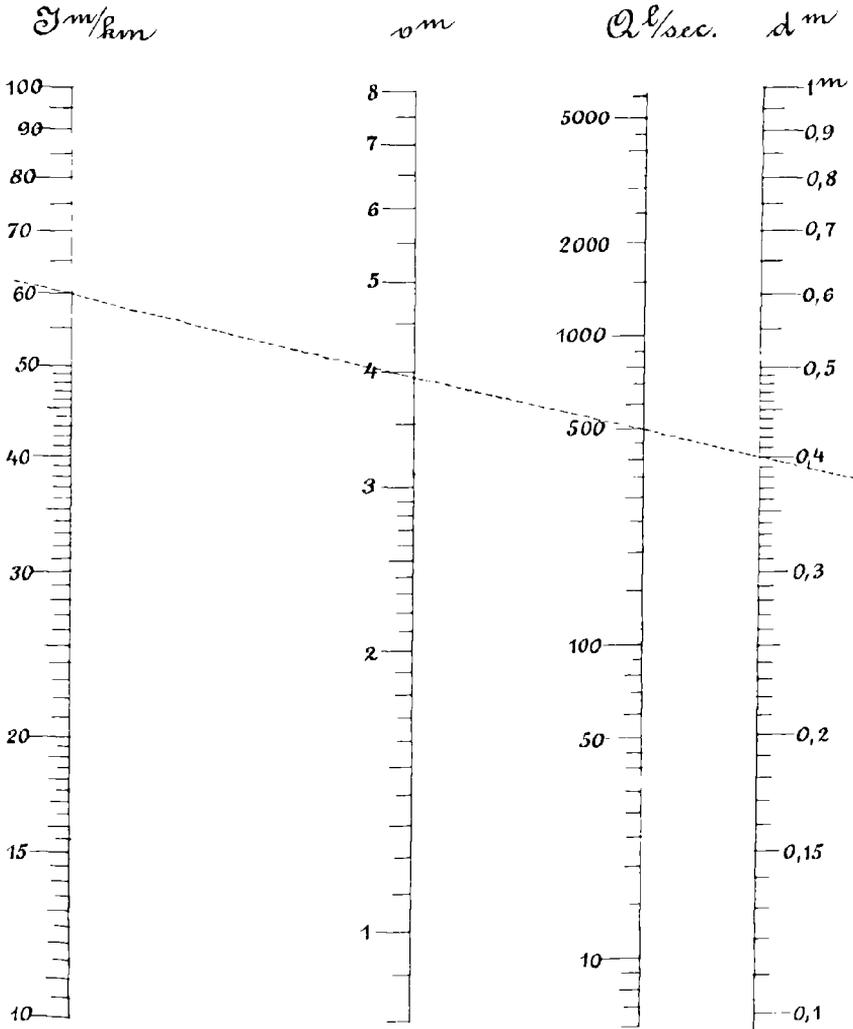
- A. H. Cleaves, A new pantagraph. Am. M., p. 573—575.
- Morris Fulton, The Mundo ellipsograph. Am. M., p. 595—597.
- Hammer, Kreisbogenzeichner von Eckert & Hamann. Z. I., S. 126.
- N. G. van Huffel, Die Anwendung des Spiegels beim Zeichnen geometrischer Figuren. D. M., S. 26—27.
- Jordan, Strahlenzieher. Z. I., S. 340—342.
- M. Lange, Ein neuer Schichtensucher. Z. V., S. 230—231.
- Pen Adjustment for shade lines, A. Am. M., p. 618—619.
- Roedder, Der Quadratnetzstecher. Z. V., S. 526—529.
- Zeichnen, Werkzeuge zum Messen und. P. J., Bd. 309. Winkelbrettchen zum Rechnen und Zeichnen, Winkellineale: S. 41—46; Reißschiene: S. 46; Teil- und Parallelinstrumente: S. 63—65.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Zustands-Tafel für 1 kg atmosphärische Luft.



Tafel zur Berechnung von Wasserleitungen.



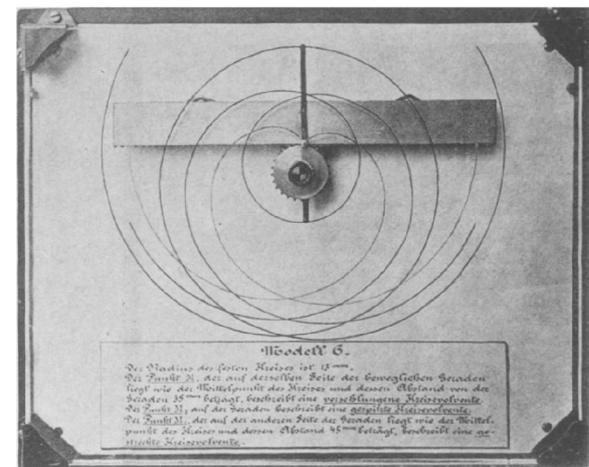
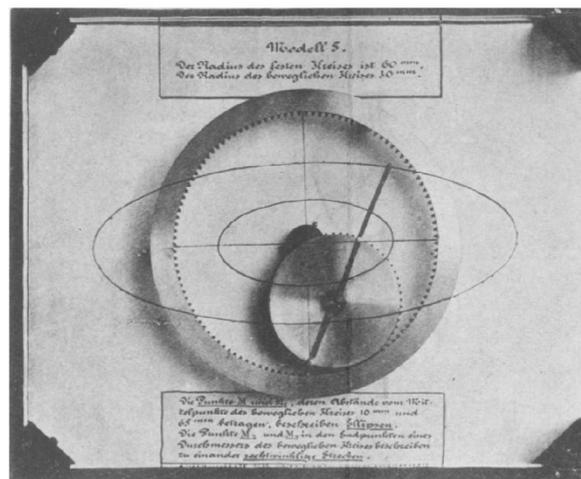
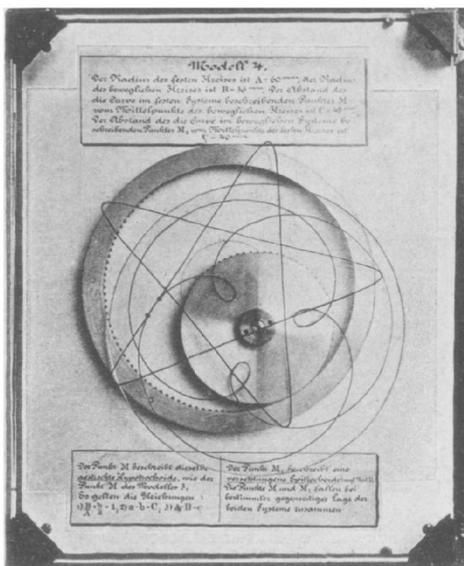
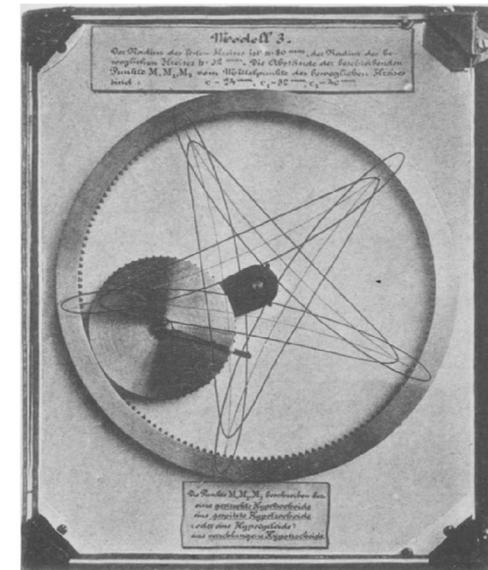
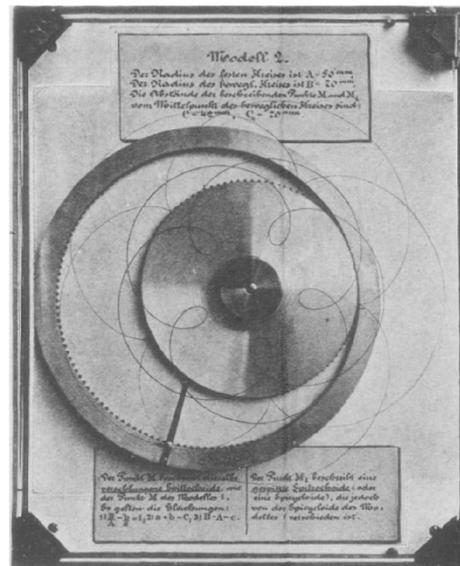
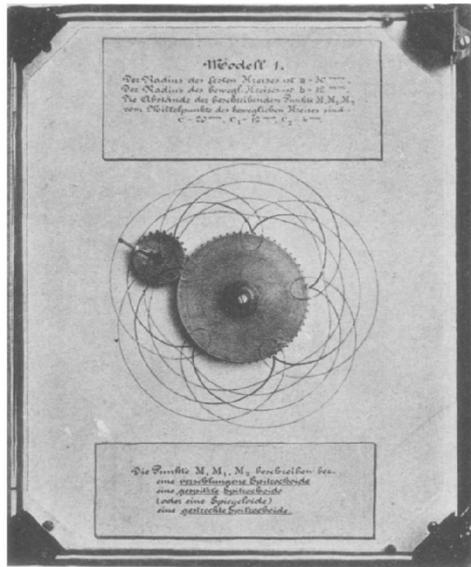


Fig. 1.

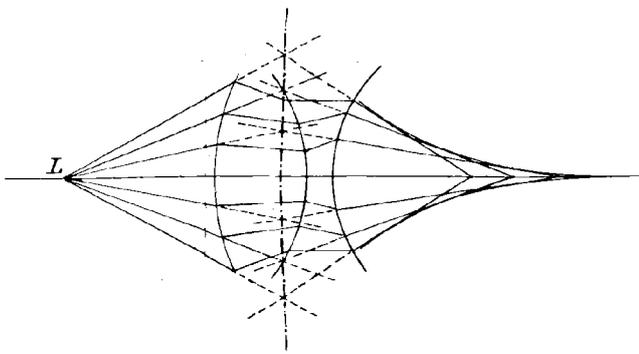


Fig. 2.

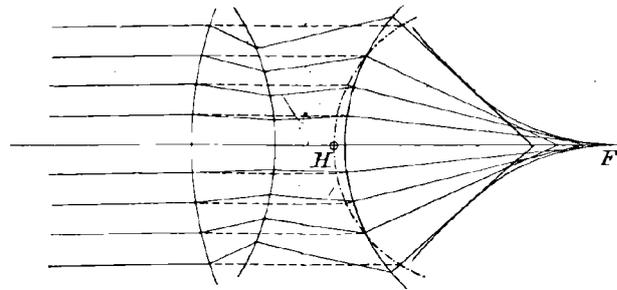


Fig. 3.

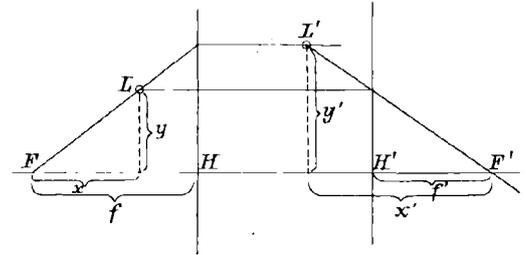


Fig. 4.

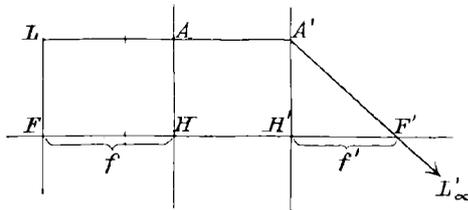


Fig. 5.

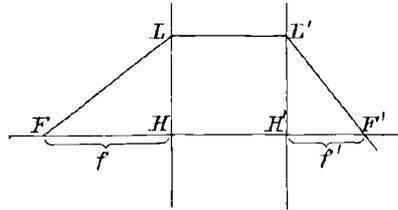


Fig. 6.

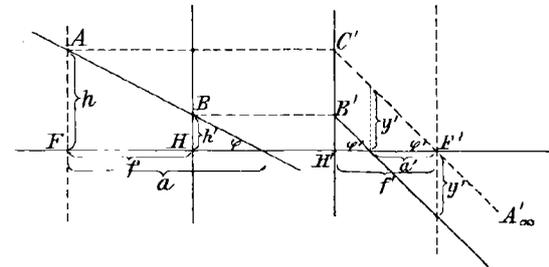


Fig. 7.

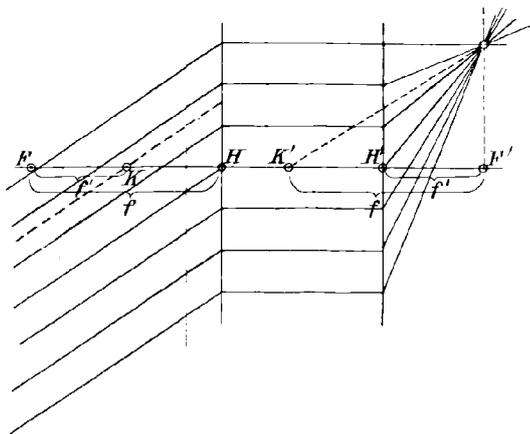


Fig. 8.

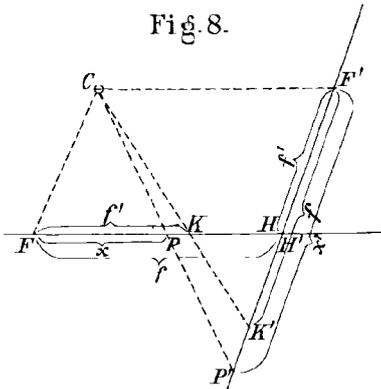


Fig. 9.

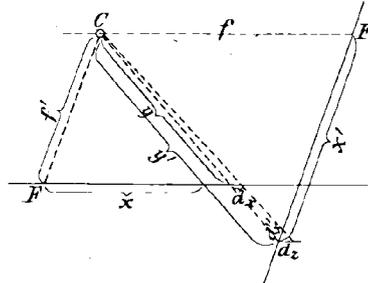


Fig. 10.

