ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA

F. Brioschi e L. Cremona

(PRESSO IL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO)

in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.

SERIE II. – TOMO II.

(dall' agosto 1868 al giugno 1869.)

MILANO

TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO II.º (SERIE II.ª)

PAG.

Indice.

Sugli assi delle coniche situate in una superficie del secondo ordine.

(*del prof.* T. Reye, *a Zurigo*).

Ogni retta nello spazio perpendicolare alla propria polare rispetto ad una data superficie di secondo ordine, si chiamerà asse di questa superficie. Ciascuno di questi assi è nello stesso tempo l'asse di una conica (reale o imaginaria) situâta sulla superficie, e l'asse di un cono di secondo ordine circoscritto alla superficie, e viceversa. Agli assi di una superficie di secondo ordine appartengono pure tutte le sue normali.

I diametri delle superficie di secondo ordine, perpendicolari ai propri piani conjugati, si dicono assi principali della superficie; per piano di simmetria s'intenda un piano diametrale perpendicolare alle proprie rette conjugate. Non considereremo, nel seguito delle nostre ricerche, le superficie di rotazione di secondo grado.

§ 1. Distribuzione degli assi di una superficie di secondo ordine.

Ogni retta situata in un piano di simmetria o perpendicolare a questo piano, ogni diametro, ogni retta parallela ad un asse principale, è un asse della superficie di secondo ordine.

Tutti gli assi situati in un piano arbitrario π inviluppano una parabola, che è toccata anche dai piani di simmetria. Ma se π è un piano diametrale, quegli assi formano un fascio di diametri e un fascio di raggi paralleli, e se π è perpendicolare ad un piano di simmetria γ, tutti gli assi situati in π, che non sono perpendicolari a γ, formano un fascio di raggi il cui centro giace nel piano γ.

Tutti gli assi passanti per un punto qualunque P, costituiscono un cono di secondo ordine; questo cono contiene un diametro e le normali che da P si possono condurre ai piani di simmetria. Se però P giace in un piano di simmetria γ, il cono si scompone in due fasci di raggi, l'uno dei quali è situato in γ, e l'altro è situato in un piano perpendicolare a γ. Anche tutti gli assi aventi una data direzione giacciono in un piano diametrale della superficie di secondo ordine.

Combinando questi teoremi si ottengono i seguenti:

Tutte le parabole, inviluppate da tutti gli assi situati in piani paralleli, giacciono in un cono o in un cilindro, formato da diametri. Tutti gli assi che segano un dato diametro d, formano dei coni paralleli di secondo ordine, i cui vertici giacciono in d. Se n è una retta perpendicolare ad un piano di simmetria γ, tutti gli assi segati da n formano dei coni di secondo ordine, i cui vertici giacciono in n e che hanno comune con γ una sola e medesima iperbola equilatera. Tutti gli assi che segano il piano di simmetria γ in una retta u situata in γ, sono tangenti ad un cilindro parabolico perpendicolare a γ; ma se u è perpendicolare ad un secondo piano di simmetria γ_1, essi segano questo piano lungo una retta u_1 perpendicolare a γ.

Due punti qualunque di un asse si possono riunire con una curva gobba del terzo ordine tale, che ogni sua secante o tangente sia un asse della superficie di secondo ordine. Tutte queste curve gobbe hanno tre assintoti perpendicolari fra loro e perpendicolari ai piani di simmetria; passano inoltre pel centro (se vi è) della superficie di secondo ordine.

Deduco da questi teoremi il seguente importante corollario:

Se di una superficie di secondo ordine sono dati due o tre piani di simmetria ed un asse, che non sia perpendicolare ad un piano di simmetria, nè sia situato in un piano con un asse principale, tutti gli assi della superficie sono completamente determinati, e si possono facilmente costruire. Vi sono perciò infinite superficie di secondo ordine aventi gli stessi assi di una data. Di queste superficie ne passano infinite per ciascun punto S dello spazio, e i loro piani tangenti in S inviluppano un cono di secondo ordine. I centri delle coniche, sezioni di tutte queste superficie coassiali con un piano qualunque, sono situati sopra una retta, cioè sulla direttrice della parabola inviluppata dagli assi delle coniche. In ogni punto di questa retta il piano è toccato da una delle superficie coassiali.

§ 2. Superficie omotetiche del secondo ordine.

Esamineremo più da vicino certi semplici sistemi di queste superficie coassiali, e dapprima quelle superficie che sono segate da un qualsivoglia piano ε in coniche concentriche. Il teorema che ci conduce alle loro proprietà principali è il seguente:

« Se di una superficie di secondo ordine sono noti i piani di simmetria « e il centro di una sezione piana ε qualunque, il cui piano però non sia « un piano diametrale, nè sia perpendicolare ad un piano di simmetria, al- « lora sono completamente determinati il centro e gli assi di ciascuna co- « nica della superficie, come pure il sistema di assi di quest'ultima ».

Ne ricaviamo:

Tutte le superficie di secondo ordine che hanno in comune i loro piani di simmetria e che sono segate da un piano arbitrario secondo coniche concentriche, sono coassiali e sono segate da qualsivoglia altro piano lungo coniche concentriche, gli assi delle quali si sovrappongono. I piani tangenti nei punti in cui le superficie sono incontrate da un qualsivoglia diametro sono paralleli. Se nelle superficie si conducono le corde parallele ad una qualsivoglia direzione data, i loro punti di mezzo sono situati sopra un solo e medesimo piano diametrale. In una parola: le superficie sono simili e similmente poste ossia omotetiche. Per ogni punto dello spazio ne passa una, ed ogni piano è toccato nel suo centro da una delle superficie; nello stesso tempo ogni asse del sistema è normale ad una delle superficie omotetiche.

Le normali, che da un punto qualsivoglia P possono condursi a un tale sistema di superficie omotetiche di secondo ordine, sono quindi situate in un cono di secondo ordine; i piedi di queste normali stanno sopra una curva gobba di terzo ordine, avente tre assintoti perpendicolari tra loro e ai piani di simmetria, e passante per P e pel centro (se esiste) del sistema di superficie. Quindi per nessun punto possono condursi più di sei e meno di due normali ad una superficie di secondo ordine.

Se le superficie del sistema sono paraboloidi, una di queste normali è un diametro; in un paraboloide dunque, oltre di questa, si possono condurre per un punto dato al più cinque normali, e al meno una.

Le normali che possono condursi in un piano arbitrario π al sistema di superficie omotetiche inviluppano una parabola; solo quando π è un piano diametrale o è perpendicolare ad un piano di simmetria, esse formano un fascio di raggi concorrenti ed un fascio di raggi paralleli. I piedi di queste normali sono allineati in una retta, poichè sono contenuti nel piano diametrale conjugato a tutte le rette perpendicolari a π. In nessun piano (eccettuati i piani di simmetria) giacciono adunque più di due normali di una superficie di secondo ordine, nel caso però che questa non sia un cono.

Anche gli altri teoremi del primo § si possono facilmente applicare alle normali delle superficie omotetiche di secondo ordine. A mo' d'esempio citerò il seguente teorema:

Tutte le normali che possono condursi ad un sistema di superficie omotetiche di secondo ordine parallelamente ad un piano arbitrario, toccano un cono o un cilindro di secondo ordine formato da diametri. I piedi di queste normali giacciono in un piano diametrale.

§ 3. **Piedi degli assi d'una superficie di secondo ordine.**

Si perviene ad un altro rimarchevole sistema di superficie coassiali di secondo ordine, ricercando certi punti distinti sugli assi di una superficie di secondo ordine. Intendo quel punto in cui ciascun asse è incontrato dal piano che gli è perpendicolare e conjugato: punto che chiameremo *piede dell'asse*. Se l'asse è una normale della superficie, questo punto distinto coincide col piede della normale. In generale si ottiene il piede di un qualsivoglia asse a, projettando perpendicolarmente la sua polare sopra un piano qualunque condotto per a, e cercando il punto d'incontro della projezione coll'asse a.

Ogni punto dello spazio è il piede di tre assi rispettivamente perpendicolari fra loro, che sono gli assi principali di un cono circoscritto alla data superficie di secondo ordine.

« I piedi di tutti gli assi perpendicolari ad un piano di simmetria giac-
« ciono in questo piano. Ogni punto d'un asse principale può considerarsi
« come piede dell'asse stesso. Il piede di un qualsivoglia diametro si trova
« all'infinito ».

I piedi di tutti gli assi, che si possono condurre secondo una data direzione arbitraria e che quindi (§ 1) giacciono in un piano diametrale, sono situati in generale in una medesima iperbole equilatera, il centro della quale coincide col centro della superficie di secondo ordine, e che ha un assintoto parallelo alla direzione degli assi; sono situati in una retta solo quando la superficie data è un paraboloide.

I piedi di tutti gli assi segati da un piano di simmetria γ in un dato punto P e che per ciò formano un fascio ordinario di raggi (§ 1.), sono situati sopra una circonferenza passante per P, il cui centro sta in γ e il cui piano è a γ perpendicolare.

Per ogni retta u che in un piano di simmetria γ può condursi perpendicolare ad un altro piano di simmetria γ_1, può costruirsi una retta u_1 situata in γ_1 e perpendicolare a γ, in modo che ogni raggio sia un asse, segato tanto da u quanto da u_1 (§ 1). La superficie sulla quale sono situati i piedi di tutti questi assi ha comune con ciascun piano passante per u (o per u_1) questa retta e un cerchio; i piani γ e γ_1 sono piani di simmetria per questa superficie dei piedi, la quale è quindi pienamente determinata quando oltre le rette u ed u_1 si conosca anche un suo punto.

I piedi di tutti gli assi posti in un piano arbitrario sono situati in una curva di terzo ordine, la quale sega sè stessa ortogonalmente in un punto doppio. I piedi di tutti gli assi passanti per un qualsivoglia punto P giacciono in una curva gobba del quinto ordine, la quale ha in P un punto triplo ed in questo punto tre tangenti ortogonali.

Se un asse è incontrato sotto angolo obliquo da un piano di simmetria γ nel proprio piede F, questo punto è il piede di tutti gli assi in esso segati da γ e giacenti quindi (§ 1) in un piano perpendicolare a γ. Si riconosce facilmente che il cono di vertice F circoscritto alla data superficie di secondo ordine è un cono di rotazione, e perciò F è un punto focale della data superficie. Risulta anche facilmente che tutti i punti focali situati in un piano di simmetria formano una conica, una così detta linea focale della supeficie di secondo ordine.

Coll'aiuto dei teoremi di questo paragrafo si può dimostrare:

Se è dato un sistema di assi, ed il piede di un qualsivoglia asse che non sia perpendicolare ad un piano di simmetria, nè sia situato in uno stesso piano con alcuno degli assi principali, il piede di ciascun asse è allora pienamente determinato.

§ 4. Superficie concofocali di secondo ordine.

Fra tutte le superficie di secondo ordine alle quali conviene un dato sistema di assi, ve ne sono infinite per le quali gli assi hanno i medesimi piedi. Queste infinite superficie si dicono superficie concofocali, perchè hanno le stesse linee focali. Ogni asse è normale nel proprio piede ad una di queste superficie concofocali, la quale è con ciò e per mezzo dei piani di simmetria pienamente determinata.

Per ciascun punto dello spazio (§ 3) passano tre delle superficie concofocali di secondo ordine del sistema così ottenuto, ed ivi si tagliano ortogonalmente.

Le polari di un qualsivoglia asse a rispetto ad un sistema di superficie concofocali giacciono in un piano perpendicolare ad a, ed essendo assi anche quelle polari, esse inviluppano una parabola in quel piano. I poli di un qualsivoglia piano π si trovano sopra un asse perpendicolare a π, nel cui piede il piano è toccato da una delle superficie omofocali (§ 3).

Se per una retta arbitraria l si conducono i piani tangenti alle superficie concofocali di secondo ordine, in generale, dunque, due per ciascuna superficie, tutti gli angoli diedri formati da una qualunque di queste coppie di piani hanno gli stessi piani bisettori. I punti di contatto di tutti quei piani giacciono in una curva gobba di terzo ordine di cui l è una segante, e solo quando l è un asse, quei punti giacciono in una curva piana di terzo ordine avente un punto doppio in l. La retta l è toccata da due delle superficie concofocali, ed i corrispondenti piani tangenti coincidono coi piani bisettori prima nominati.

Gli assi principali di tutt'i coni possibili, circoscritti alle superficie concofocali ed aventi per vertice comune un qualsivoglia punto P, sono identici con quei tre assi che hanno il loro piede in P. Lungo ciascun raggio l passante per P si tagliano ortogonalmente due di questi coni, che perciò sono concofocali.

Invece di ripetere qui altri teoremi conosciuti, che, come i precedenti, risultano quasi immediatamente dal § 3, noterò ancora i seguenti ricavati dai §§ 1 e 3:

Se di un sistema di superficie concofocali di secondo ordine sono dati i piani di simmetria ed una normale, la quale non sia perpendicolare ad un piano di simmetria nè si trovi in uno stesso piano con un asse principale, sono allora determinate tutte le altre normali delle superficie. Le normali situate in un qualsivoglia piano π inviluppano in generale una parabola; i loro piedi sono allogati in una curva di terzo ordine, che taglia sè stessa ortogonalmente. Queste normali sono nello stesso tempo gli assi delle coniche che il piano π determina sulle superficie concofocali, e i cui centri sono situati nella direttrice della parabola. Le normali giacenti in un piano diametrale sono parallele; i loro piedi sono situati in una stessa iperbole equilatera o in una retta, secondochè il sistema di superficie ha o non ha centro. Se un piano è perpendicolare ad un piano di simmetria γ, tutte le normali situate in esso formano un fascio di raggi il cui centro giace in γ; ed i piedi di queste normali sono allogati in una circonferenza il cui centro giace pure in γ. Le normali passanti per un punto arbitrario P generano un cono di secondo ordine, e i loro piedi formano una curva gobba di quint'ordine, che si taglia due volte ortogonalmente nel punto P. Per ogni retta u che nel piano di simmetria γ si guidi perpendicolare ad un secondo piano γ_1, si può costruire una retta u_1 situata in γ_1 e perpendicolare a γ, in modo che ogni raggio segato tanto da u quanto da u_1 sia normale ad una delle superficie concofocali; ed i piedi di tutte queste normali giacciono in una superficie di terzo ordine della quale γ e γ_1 sono due piani di simmetria, e che è segata da ogni piano passante per u (o per u_1) secondo questa retta e secondo un cerchio. Per ogni altra retta n, perpendicolare ad un piano di simmetria, può costruirsi in quest'ultimo un'iperbole equilatera h, in modo che ogni retta segata tanto da n quanto da h sia normale ad una delle superficie omofocali; i piedi di queste normali sono situati in una superficie del quint'ordine, per la quale n è una retta tripla, e che è segata dal piano di simmetria secondo l'iperbole e secondo una curva di 3.° ordine, mentre da ciascun piano passante per n è segata secondo la retta n e secondo un cerchio. Tutte le normali delle superficie concofocali che sono parallele ad un piano arbitrario toccano un cono o un cilindro di secondo ordine, formato da diametri. Tutte le normali che sono segate da un piano di simmetria γ nei punti di una retta arbitraria toccano un cilindro parabolico perpendicolare a γ. Ecc. ecc.

I teoremi dei §§ 2 e 4 sono in gran parte già conosciuti; tuttavia il metodo quì adottato permette di rilevarne più chiaramente l'intimo legame, e ne rende le dimostrazioni semplicissime.

§ 5.

Gli stessi teoremi si possono sviluppare facilmente anche coi mezzi della geometria analitica, e con ciò acquistano in parte una forma molto semplice. Mi limiterò in ciò che segue ad esprimere anche analiticamente i risultati principali dei §§ precedenti, e a ricavare alcune conseguenze immediate dalle formole così trovate. A tale oggetto considero i piani di simmetria come piani coordinati; nel caso del paraboloide faccio coincidere l'asse principale coll'asse delle x di questo sistema di coordinate ortogonali, e prendo su di esso ad arbitrio l'origine delle coordinate.

Projettando ortogonalmente sui piani delle xy e delle xz un asse qualunque non parallelo ad un piano di simmetria, l'asse delle x è incontrato dalle due projezioni in due punti, le cui ascisse indicheremo con a ed a_1. Ma tutti gli assi di una superficie di secondo ordine che sono segati da un piano di simmetria in un solo e medesimo punto, hanno in questo piano la stessa projezione, e tutti gli assi di data direzione sono situati in un piano diametrale. Si ricava da ciò che passando da un asse ad un altro resta inalterato o il rapporto $\frac{a}{a_1}$ o la differenza $a-a_1$, secondo che la superficie di secondo ordine ha o non ha centro. Indicando dunque con κ e k due costanti determinate, e con α, β, γ delle costanti affatto arbitrarie, possiamo dire che:

Le equazioni di ciascun asse arbitrario di una superficie di 2.° ordine possono scriversi:

$$(1) \begin{cases} x=\beta y+a \\ x=\gamma z+\kappa a \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad (1_a) \begin{cases} x=\beta y+a \\ x=\gamma z+a+k \end{cases}$$

secondochè la superficie ha centro o non ha centro.

Queste equazioni, dando successivamente alle costanti a, β e γ tutt'i valori positivi e negativi, ci forniscono tutti gli assi della superficie, e sono da considerarsi come le equazioni dell'intero sistema di assi. Per gli assi che passano per un dato punto (x_1, y_1, z_1) otteniamo, mediante l'eliminazione di a, β e γ, l'equazione di un cono di 2.° ordine, cioè:

$$(2) \quad (y-y_1)(x_1 z - z_1 x) = \kappa (z-z_1)(x_1 y - y_1 x),$$

$$\text{ovvero} \quad (2_a) \quad (x-x_1)(y_1 z - z_1 y) = k (y-y_1)(z-z_1).$$

L'equazione di un ellissoide o di un iperboloide si può porre sotto la forma:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=D, \tag{3}$$

e il rapporto numerico k può facilmente esprimersi per mezzo delle costanti A, B e C di questa equazione. Infatti la normale della superficie in un punto (x_1, y_1, z_1) è rappresentata dalle equazioni:

$$A\frac{x-x_1}{x_1}=B\frac{y-y_1}{y_1}=C\frac{z-z_1}{z_1};$$

dal paragone delle quali colle (1) ricaviamo, poichè la normale fa parte degli assi della superficie, i seguenti valori per a e ka, cioè:

$$a=\frac{x_1}{A}(A-B) \quad \text{e} \quad ka=\frac{x_1}{A}(A-C),$$

onde anche:

$$k=\frac{A-C}{A-B} \text{ ed } A=\frac{kB-C}{k-1}. \tag{4}$$

Le normali che possono essere condotte dal punto $(x_1\ y_1\ z_1)$ all'ellissoide o iperboloide (3) sono dunque situate per la (2) nel cono di secondo ordine:

$$(A-B)(y-y_1)(x_1z-z_1x)=(A-C)(z-z_1)(x_1y-y_1x),$$

la cui equazione può anche scriversi così:

$$A(x-x_1)(y_1z-z_1y)+B(y-y_1)(z_1x-x_1z)+C(z-z_1)(x_1y-y_1x)=0.$$

Riunendo le equazioni (3) e (4) si deduce il teorema seguente:

Se k è una data costante determinata, e B, C e D sono costanti affatto arbitrarie, l'equazione:

$$\frac{(k-1)x^2}{kB-C}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=D$$

rappresenta un numero doppiamente infinito di ellissoidi, iperboloidi e coni, aventi tutti il medesimo sistema di assi.

Lasciando invariati B e C, e dando a D valori diversi, si ottengono delle superficie omotetiche; e si ottengono delle superficie concofocali dando valori diversi non a D, ma a B e C, in modo però che la differenza $B-C$

resti invariata. Così si è dimostrato anche analiticamente che le superficie omotetiche e le superficie concofocali di 2.° ordine hanno lo stesso sistema di assi.

L'equazione di un paraboloide può porsi sotto la forma:

$$2x+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=D; \tag{3$_a$}$$

e le sue normali nel punto $(x_1\ y_1\ z_1)$ essendo espresse da:

$$x-x_1=B\frac{y-y_1}{y_1}=C\frac{z-z_1}{z_1},$$

paragonando colla (1_a) si trova per la costante k il valore:

$$k=B-C. \tag{4$_a$}$$

Dunque, essendo k una data costante determinata, e B e D essendo costanti affatto arbitrarie, l'equazione:

$$2x+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{B-k}=D$$

rappresenta una serie doppiamente infinita di paraboloidi, aventi tutti il medesimo sistema di assi. Le projezioni di un qualsivoglia asse sui due piani di simmetria determinano sull'asse principale un segmento di lunghezza $=k$.

§ 6.

L'asse (1) o (1_a) è perpendicolare al piano:

$$x+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=p$$

per qualsivoglia valore della costante p. Determiniamo p in modo che questo piano sia nello stesso tempo conjugato all'asse, rispetto alla superficie (3) o (3_a). Indicando con $(x_1\ y_1\ z_1)$ il polo del piano (5), la sua equazione può anche scriversi:

$$\frac{x_1x}{A}+\frac{y_1y}{B}+\frac{z_1z}{C}=D,\quad \text{oppure}\ x+x+\frac{y_1y}{B}+\frac{z_1z}{C}=D.$$

Il polo di (5) rispetto a (3) è quindi determinato dall'equazione:

$$\frac{x_1}{A}=\frac{\beta y_1}{B}=\frac{\gamma z_1}{C}=\frac{D}{p},$$

e affinchè questo stia sull'asse (1), devesi avere:

$$p=\frac{(A-B)D}{a}.$$

Pel polo di (5) rispetto a (3_a) si ottengono invece le equazioni:

$$x_1=D-p, \qquad y_1=\frac{B}{\beta}, \qquad z_1=\frac{C}{\gamma};$$

ed esso giace sull'asse (1_a), quando è:

$$p=D-B-a.$$

All'asse (1) o (1_a) dunque è conjugato rispetto alla superficie (3) o (3_a) il seguente piano ad esso perpendicolare, cioè:

$$x+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\frac{A-B}{a}D \tag{6}$$

oppure

$$x+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=D-B-a, \tag{6_a}$$

rispettivamente.

Il punto in cui l'asse è segato da questo piano l'abbiamo chiamato il suo piede. Per le superficie coassiali di secondo ordine, le cui costanti A, B, C, D sodisfacciano risp. le equazioni (4) e (4_a), questo piede evidentemente non cambia la sua posizione, quando passando da una superficie all'altra, nel caso dell'ellissoide e dell'iperboloide restano costanti le differenze $AD-BD$ ed $AD-CD$, e nel caso del paraboloide invece restano costanti le differenze $D-B$ e $D-C$. Dunque:

Le equazioni:

$$\frac{x^2}{\sigma+A_1}+\frac{y^2}{\sigma+B_1}+\frac{z^3}{\sigma+C_1}= \qquad D_1$$

$$2x+\frac{y^2}{\sigma+B_1}+\frac{z^2}{\sigma+C_1}=\sigma+D_1,$$

(ove σ è una costante arbitraria ed A_1, B_1, C_1, D_1 sono costanti determinate) rappresentano rispettivamente infiniti ellissoidi ed iperboloidi o paraboloidi, aventi lo stesso sistema di assi, e nei quali ciascun asse ha il medesimo piede.

Siamo così riusciti in modo semplicissimo alle note equazioni delle superficie concofocali di second'ordine.

La projezione di un asse sul piano delle xy ed il piano conjugato e perpendicolare all'asse, tagliano l'asse delle x in due punti, le cui ascisse abbiamo indicato risp. con a e p. E le equazioni trovate per p ci danno il teorema:

Nella serie di ellissoidi o iperboloidi concofocali il prodotto ap $(=A_1D_1-B_1D_1)$ ha lo stesso valore per tutti gli assi e per tutte le normali; e nella serie di paraboloidi concofocali è la somma $a+p$ $(=D_1-B_1)$ che ha lo stesso valore per tutti gli assi e per tutte le normali;

teorema che merita attenzione, quanto il teorema analogo già noto sulle ellissi, iperboli e parabole concofocali.

L'asse (1) o (1_a) è rispettivamente segato nel polo del piano (6) o (6_a), dal diametro della superficie (3) o (3_a), conjugato ai piani (5); ma questo polo è determinato dalle equazioni:

$$\frac{x_1}{A}=\frac{\beta y_1}{B}=\frac{\gamma z_1}{C}=\frac{a}{A-B}$$

oppure

$$\frac{x_1}{B+a}=\frac{\beta y_1}{B}=\frac{\gamma z_1}{C}=1\ ;$$

le quali, non contenendo più la costante D, valgono anche per un fascio di superficie di secondo grado simili, concentriche e similmente poste. Nel punto $(x_1\ y_1\ z_1)$ l'asse è normale ad una di queste superficie omotetiche. Incidentalmente si ricava:

L'ascissa x_1 del piede di una normale, e il segmento a, che una projezione della normale determina sull'asse delle x, hanno un rapporto costante $\left(=\frac{A}{A-B}\right)$ nel caso dell'ellissoide e dell'iperboloide, ed una differenza costante $(=B)$ nel caso del paraboloide. Anche a questo teorema corrispondono teoremi conosciuti dalla geometria delle coniche.

Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde.

(*par M.*r Michael Roberts, *à Dublin*).

Dans un Mémoire inséré dans le Journal de Mathématiques, dont M.r Liouville m'avait fait l'honneur de communiquer les résultats à l'Académie des sciences, j'ai montré la grande analogie qui subsiste entre les lignes de courbure d'un ellipsoïde et les ellipses planes. Dans l'article actuel je me propose de faire voir que cette analogie peut être poussée plus loin, et que les propriétés connues des arcs d'une ellipse, qui ont leur différence assignable en ligne droite, ont aussi leurs analogues, en considérant les arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde.

D'abord je rappellerai à l'attention du lecteur les résultats d'un beau Mémoire de Jacobi, inséré dans le Journal de Crelle, et intitulé « *Demonstratio nova theorematis Abeliani* ». Si:

$$fu = u\,(a^2 - u)\,(\mu^2 - u)\,(b^2 - u)\,(c^2 - u)\,,$$

on satisfait aux équations différentielles suivantes:

$$\frac{du}{\sqrt{fu}} + \frac{dv}{\sqrt{fv}} + \frac{dw}{\sqrt{fw}} = 0\,, \qquad \frac{udu}{\sqrt{fu}} + \frac{vdv}{\sqrt{fv}} + \frac{wdw}{\sqrt{fw}} = 0\,, \tag{1}$$

en posant:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{fu}}{(u-v)\,(u-w)}\,, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{fv}}{(v-u)\,(v-w)}\,, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{fw}}{(w-u)\,(w-v)}\,,$$

d'où résulte:

$$\frac{u^2du}{\sqrt{fu}} + \frac{v^2dv}{\sqrt{fv}} + \frac{w^2dw}{\sqrt{fw}} = dt.$$

Maintenant en désignant par m une des racines quelconques de l'équation:

$$f(u)=0,$$

soit:

$$p=\sqrt{(m-u)(m-v)(m-w)},$$

et le système (1) a pour une intégrale l'équation:

$$\frac{dp}{dt}=C, \tag{2}$$

C étant une constante arbitraire: ce qui constitue le théorème de Jacobi. L'équation (2) fournit ainsi cinq intégrales du système (1) dont deux seulement sont indépendantes. On détermine les constantes en supposant que pour $w=0$, on ait $u=u_1$, $v=v_1$; u_1, v_1 étant des quantités données.

On peut présenter les équations intégrales sous une forme différente de celle de Jacobi. En considérant deux racines l'équation $f(u)=0$, on a deux valeurs correspondantes de p, que nous désignerons par p, p': on obtient ainsi en intégrant l'équation (2), deux équations de la forme:

$$p=Ct+D, \quad p'=C't+D',$$

C, D, C', D' étant déterminées d'après les conditions données; et l'équation:

$$(p-D)\,C'=(p'-D')\,C,$$

sera aussi une intégrale du système (1).

Considérons maintenant le système des trois surfaces homofocales:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1$$

et rappelons que l'élément de l'arc (s) de la courbe d'intersection des deux premières s'exprime par l'équation:

$$ds=\sqrt{\frac{(a^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu,$$

ce qui se transforme, en posant $\nu^2 = u$, en la suivante:

$$ds = \tfrac{1}{2}\left\{a^2\mu^2 - (a^2+\mu^2)u + u^2\right\}\frac{du}{\sqrt{u(a^2-u)(\mu^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}. \qquad (3)$$

Introduisons maintenant dans le second membre de cette dernière une variable θ définie par l'équation:

$$u = l^2 \sin^2\theta,$$

et en mettant:

$$\varkappa = \frac{b}{a},\ \varkappa' = \frac{b}{\mu},\ \varkappa'' = \frac{b}{c},\ \Delta(\theta) = \sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\theta)(1-\varkappa'^2\sin^2\theta)(1-\varkappa''^2\sin^2\theta)},$$

$$L(\theta) = \int\frac{d\theta}{\Delta(\theta)},\qquad M(\theta) = \int\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\Delta(\theta)},\qquad N(\theta) = \int\frac{\sin^4\theta\, d\theta}{\Delta(\theta)};$$

on tire pour l'arc de la ligne de courbure dont il s'agit, compté de l'axe petit, l'expression suivante:

$$s = \frac{a\mu}{c}L(\theta) - \frac{b^2(a^2+\mu^2)}{a\mu c}M(\theta) + \frac{b^4}{a\mu c}N(\theta). \qquad (4)$$

Il s'ensuit de cette dernière expression que la résolution du problème de la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde revient à trouver les formes algébriques des équations:

$$\left.\begin{aligned} L(\phi) + L(\psi) + L(\chi) - L(\sigma) - L(\tau) = 0,\\ M(\phi) + M(\psi) + M(\chi) - M(\sigma) - M(\tau) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ces équations se déduisent en intégrant le système (1), en y posant:

$$u = b^2\sin^2\phi,\quad v = b^2\sin^2\psi,\quad w = b^2\sin^2\chi,$$

et l'on suppose que quand $\chi = 0$, alors $\phi = \sigma$, $\psi = \tau$. En effet, en désignant par s_φ, s_ψ, s_χ, s_σ, s_τ les arcs d'une ligne de courbure qui dépendent des amplitudes ϕ, ψ, χ, σ, τ qui satisfont aux équations (5), la quantité $s_\varphi + s_\psi + s_\chi - s_\sigma - s_\tau$ est algébrique; ce que l'on peut démontrer de la manière suivante. Si nous différentions ces équations, on peut mettre:

$$\left.\begin{aligned} b\varkappa\varkappa'\varkappa''\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta(\varphi)}{(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)(\sin^2\varphi - \sin^2\chi)},\quad b\varkappa\varkappa'\varkappa''\frac{d\psi}{dt} = \frac{\Delta(\psi)}{(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)(\sin^2\psi - \sin^2\chi)},\\ b\varkappa\varkappa'\varkappa''\frac{d\chi}{dt} = \frac{\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi - \sin^2\varphi)(\sin^2\chi - \sin^2\psi)}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ce qui donne:

$$bxx'x''\left\{\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{\sin^4\psi\,d\psi}{\Delta(\psi)}+\frac{\sin^4\chi\,d\chi}{\Delta(\chi)}\right\}=dt,$$

d'où nous tirons, en nous rapportant à l'équation (4),

$$s_\varphi+s_\psi+s_\chi-s_\sigma-s_\tau=t.$$

Je vais maintenant donner plusieurs formes algébriques des équations (5) et aussi de la quantité t.

En considérant la racine zéro de $f(u)$, la methode de Jacobi donne pour une intégrale du système (1) la suivante:

$$\frac{\sqrt{vw\,(a^2-u)\,(\mu^2-u)\,(b^2-u)\,(c^2-u)}}{(u-v)\,(u-w)}+\frac{\sqrt{uw\,(a^2-v)\,(\mu^2-v)\,(b^2-v)\,(c^2-v)}}{(v-u)\,(v-w)}+$$
$$+\frac{\sqrt{uv\,(a^2-w)\,(\mu^2-w)\,(b^2-w)(c^2-w)}}{(w-u)(w-v)}=C,$$

ce qui donne, en introduisant les quantités ϕ, ψ, χ et en nous rappelant les conditions qui déterminent les constantes:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin\psi\sin\chi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{(\sin^2\varphi-\sin^2\psi)\,(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)}+\frac{\sin\varphi\sin\chi\cos\psi\,\Delta(\psi)}{(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)\,(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}+\\&+\frac{\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\,\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)\,(\sin^2\chi-\sin^2\psi)}=\frac{1}{\sin\sigma\sin\tau}.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

D'une manière semblable la racine b^2 de $f(u)$ donne:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin\varphi\cos\psi\cos\chi\,\Delta(\varphi)}{(\sin^2\psi-\sin^2\psi)\,(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)}+\frac{\sin\psi\cos\varphi\cos\chi\,\Delta(\psi)}{(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)\,(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}+\\&+\frac{\sin\chi\cos\varphi\cos\psi\,\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)\,(\sin^2\chi-\sin^2\psi)}=\frac{\sin\tau\cos\tau\,\Delta(\sigma)-\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)}{\sin\sigma\sin\tau(\sin^2\sigma-\sin^2\tau)}.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Le second membre de cette dernière équation peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{(1-x^2)(1-x'^2)(1-x''^2)\sin^2\sigma\sin^2\tau-\cos^2\sigma\cos^2\tau(1-x^2x'^2x''^2\,\mathrm{sen}^2\sigma\,\mathrm{sen}^2\tau)}{\sin\sigma\sin\tau[\sin\tau\cos\tau\,\Delta(\sigma)+\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)]}.$$

Posons maintenant:

$$p=b^3\sin\phi\sin\psi\sin\chi.$$

En ayant égard aux équations (6), (7), nous trouvons:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{b^2}{\varkappa\varkappa'\varkappa''\sin\sigma\sin\tau},$$

d'où l'on tire, en rappelant que t s'annulle pour $\chi=0$:

$$t=b\varkappa\varkappa'\varkappa''\sin\phi\sin\psi\sin\chi\sin\sigma\sin\tau. \tag{9}$$

Posons encore:

$$p'=b^3\cos\phi\cos\psi\cos\chi,$$

et nous tirons, en différentiant par rapport à t et en vertu de l'équation (3):

$$\frac{dp'}{dt}=\frac{b^2}{\varkappa\varkappa'\varkappa''}\left\{\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)-\sin\tau\cos\tau\,\Delta\sigma}{\sin\sigma\sin\tau\,(\sin^2\sigma-\sin^2\tau)}\right\},$$

d'où nous trouvons en intégrant:

$$b\{\cos\phi\cos\psi\cos\chi-\cos\sigma\cos\tau\}=\frac{(\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)-\sin\tau\cos\tau\,\Delta\sigma)\,t}{\varkappa\varkappa'\varkappa''\sin\sigma\sin\tau\,(\sin^2\sigma-\sin^2\tau)},$$

et enfin, à cause de l'équation (9):

$$\cos\sigma\cos\tau=\cos\phi\cos\psi\cos\chi-\sin\phi\sin\psi\sin\chi\,\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)-\sin\tau\cos\tau\,\Delta(\sigma)}{\sin^2\sigma-\sin^2\tau}, \tag{10}$$

équation qui présente une analogie frappante avec l'équation fondamentale pour l'addition (ou soustraction) des fonctions elliptiques.

En combinant l'équation (10) avec les équations (7), (8) on trouve:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin2\psi\sin2\chi\,\Delta\varphi}{(\sin^2\varphi-\sin^2\psi)(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)}+\frac{\sin2\varphi\sin2\chi\,\Delta(\psi)}{(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}+\\&\qquad\frac{\sin2\varphi\sin2\psi\,\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)(\sin^2\chi-\sin^2\psi)}=4\cot\sigma\cot\tau.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Si $\chi=\frac{\pi}{2}$, cette dernière donne:

$$\tan\phi\tan\psi\tan\sigma\tan\tau=\frac{1}{\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)(1-\varkappa''^2)}},$$

qui a aussi son analogue dans la théorie des fonctions elliptiques.

Si l'on pose $\chi = \frac{\pi}{2}$ dans les équations (7), (8), on trouve:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\psi\,\Delta(\varphi)}{\cos\varphi\cos\psi\,(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)} = \frac{1}{\sin\sigma\sin\tau},$$

$$\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)(1-\varkappa''^2)}}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{\sin\tau\cos\tau\,\Delta(\sigma) - \sin\sigma\cos\sigma\,\Delta(\tau)}{\sin\sigma\sin\tau\,(\sin^2\sigma - \sin^2\tau)},$$

et en mettant:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\psi\,\Delta(\varphi)}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi} = \nabla(\phi, \psi),$$

nous trouvons, quand $\chi = \frac{\pi}{2}$, la relation suivante:

$$\nabla(\phi,\psi)\,\nabla(\sigma,\tau) + \sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)(1-\varkappa''^2)} = 0.$$

Si l'on fait $m = a^2$ dans l'expression pour p, l'équation (2) donne, en employant les quantités ϕ, ψ, χ:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\psi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa''^2\sin^2\varphi)}}{(\sin^2\varphi-\sin^2\psi)(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)}$$

$$+\frac{\sin\psi\cos\psi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)(1-\varkappa'^2\sin^2\psi)(1-\varkappa''^2\sin^2\psi)}}{(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}$$

$$+\frac{\sin\chi\cos\chi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin^2\psi)(1-\varkappa'^2\sin^2\chi)(1-\varkappa''^2\sin^2\chi)}}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)(\sin^2\chi-\sin^2\psi)} =$$

$$= \frac{\cot\sigma\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\tau)(1-\varkappa'^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa''^2\sin^2\sigma)} - \cot\tau\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa'^2\sin^2\tau)(1-\varkappa''^2\sin^2\tau)}}{\sin^2\sigma-\sin^2\tau},$$

Posons $p'' = \sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin\psi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)}$; en différentiant par rapport à t et en vertu de l'équation que nous venons de trouver, nous aurons:

$$\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa^2\sin^2\tau)}}{\sin\sigma\sin\tau} = \frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin^2\psi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)}}{\sin\sigma\sin\tau} +$$

$$+\varkappa^2\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\left\{\frac{\cot\sigma\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\tau)(1-\varkappa'^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa''^2\sin^2\sigma)} - \cot\tau\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa'^2\sin^2\tau)(1-\varkappa''^2\sin^2\tau)}}{\sin^2\sigma-\sin^2\tau}\right\},$$

d'où il s'ensuit:

$$\frac{\sin\psi\sin\chi\cos\varphi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\psi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)(1-\varkappa'^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa''^2\sin^2\varphi)}}{(\sin^2\varphi-\sin^2\psi)(\sin^2\varphi-\sin^2\chi)}$$

$$+\frac{\sin\varphi\sin\chi\cos\psi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin^2\chi)(1-\varkappa'^2\sin^2\psi)(1-\varkappa''^2\sin^2\psi)}}{(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}$$

$$+\frac{\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa^2\sin^2\psi)(1-\varkappa'^2\sin^2\chi)(1-\varkappa''^2\sin^2\chi)}}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)(\sin^2\chi-\sin^2\psi)}=$$

$$=\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\sigma)(1-\varkappa^2\sin^2\tau)}}{\sin\sigma\sin\tau}.$$

Je vais terminer en observant que, si nous changeons les signes des quantités ϕ, ψ, σ, τ, et si après le changement nous écrivons ϕ pour σ, ψ pour τ et vicé-versa, les équations (5) se reproduisent: d'où, en traitant d'une manière semblable les équations (7) (8) (10) (11), nous tirons les formes nouvelles suivantes des intégrales:

$$\cos\phi\cos\tau=\cos\sigma\cos\psi\cos\chi-\sin\sigma\sin\psi\sin\chi\frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta(\tau)+\sin\tau\cos\tau\Delta(\varphi)}{\sin^2\varphi-\sin^2\tau};$$

$$\cos\psi\cos\sigma=\cos\tau\cos\phi\cos\chi-\sin\tau\sin\phi\sin\chi\frac{\sin\psi\cos\psi\Delta(\sigma)+\sin\sigma\cos\sigma\Delta(\psi)}{\sin^2\psi-\sin^2\sigma};$$

$$\cos\phi\cos\psi=\cos\sigma\cos\tau\cos\chi-\sin\sigma\sin\tau\sin\chi\frac{\sin\psi\cos\psi\Delta(\varphi)-\sin\varphi\cos\varphi\Delta(\psi)}{\sin^2\varphi-\sin^2\psi};$$

$$\frac{\sin\sigma\sin\psi\cos\chi\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\sigma)(\sin^2\chi-\sin^2\psi)}+\frac{\sin\sigma\sin\chi\cos\psi\Delta(\psi)}{(\sin^2\psi-\sin^2\sigma)(\sin^2\psi-\sin^2\chi)}-\frac{\sin\psi\sin\chi\cos\sigma\Delta(\sigma)}{(\sin^2\sigma-\sin^2\psi)(\sin^2\sigma-\sin^2\chi)}$$

$$=\frac{1}{\sin\varphi\sin\tau};$$

$$\frac{\sin\sigma\sin\tau\cos\chi\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\sigma)(\sin^2\chi-\sin^2\tau)}-\frac{\sin\tau\sin\chi\cos\sigma\Delta(\sigma)}{(\sin^2\sigma-\sin^2\chi)(\sin^2\sigma-\sin^2\tau)}-\frac{\sin\sigma\sin\chi\cos\tau\Delta(\tau)}{(\sin^2\tau-\sin^2\sigma)(\sin^2\tau-\sin^2\chi)}$$

$$=\frac{1}{\sin\varphi\sin\psi};$$

$$\frac{\sin2\sigma\sin2\tau\Delta(\chi)}{(\sin^2\chi-\sin^2\sigma)(\sin^2\chi-\sin^2\tau)}-\frac{\sin2\sigma\sin2\chi\Delta(\tau)}{(\sin^2\tau-\sin^2\sigma)(\sin^2\tau-\sin^2\chi)}-\frac{\sin2\tau\sin2\chi\Delta(\sigma)}{(\sin^2\sigma-\sin^2\tau)(\sin^2\sigma-\sin^2\chi)}$$

$$=4\cot\phi\cot\psi.$$

Nous trouvons aussi:

$$\chi = \arc\tan\{\tan\sigma\tan\tau\nabla(\phi, \psi)\} - \arc\tan\{\tan\phi\tan\psi\nabla(\sigma, \tau)\}.$$

Je remarquerai enfin que, si x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} sont les abscisses des extrémités variables des arcs s_φ, s_ψ, s_χ, s_σ, s_τ, dirigées suivant l'axe des x, l'équation (9) nous donne la relation suivante:

$$s_\varphi + s_\psi + s_\chi - s_\sigma - s_\tau = \frac{b^4c^4}{a^6\mu^6}\, x'\, x''\, x'''\, x^{\text{IV}}\, x^{\text{V}}.$$

Collége de la Trinité à Dublin, le 21 août 1867.

POSTSCRIPTUM.

On peut remplaçer les équations trascendantes:

$$L(\phi) + L(\psi) + L(\chi) - L(\sigma) - L(\tau) = 0,$$
$$M(\phi) + M(\psi) + M(\chi) - M(\sigma) - M(\tau) = 0,$$

par le sistème algébrique:

$$\cos\sigma\cos\tau = \cos\phi\cos\psi\cos\chi - \sin\phi\sin\psi\sin\chi\nabla(\sigma, \tau),$$
$$\cos\phi\cos\psi = \cos\sigma\cos\tau\cos\chi + \sin\sigma\sin\tau\sin\chi\nabla(\phi, \psi).$$

En éliminant χ entre ces dernières, on trouve:

$$\sin^2\sigma\sin^2\tau\,[\nabla(\phi, \psi)]^2 - \sin^2\phi\sin^2\psi\,[\nabla(\sigma, \tau)]^2 = \cos^2\phi\cos^2\psi - \cos^2\sigma\cos^2\tau,$$

et cette équation n'étant pas identique, les équations dont il s'agit sont distinctes.

Sopra alcune proprietà degl' integrali euleriani di prima e seconda specie.

(*del D.r* L. MATTHIESSEN, *a Husum*).

L'integrale definito:

$$\int_0^\infty \frac{x^{ra-1}\,dx}{(x^r+x_0{}^r)^{a+b}}=\frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{r.\Gamma(a+b)x_0{}^{rb}}=\frac{B(a,b)}{r.x_0{}^{rb}}, \tag{1}$$

può considerarsi come un caso particolare dell'integrale polinomio generale:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,dx}{x^{rn}+ax^{r(n-1)}+bx^{r(n-2)}+\cdots+px^r+s}=\int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,dx}{[x^{rn}]}. \tag{2}$$

La determinazione diretta di quest' ultimo è singolarmente laboriosa, ma può ridursi alla soluzione di $(r-1)n$ equazioni lineari, guadagnando con ciò moltissimo in semplicità ed eleganza. Sia:

$$x^{rn}-ax^{r(n-1)}+bx^{r(n-2)}-cx^{r(n-3)}+\cdots\mp px^r\pm s=0,$$

l'equazione delle potenze r^{esime} delle radici $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ dell'equazione:

$$x^n-\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}-\gamma x^{n-3}+\cdots\mp\pi x\pm\sigma=0.$$

Se queste n radici sono tutte reali e positive, il divisore $[x^{rn}]$ è diverso da zero per tutt'i valori di x tra 0 e ∞, e l'integrale ha un valore assegnabile. Inoltre l'integrale è una funzione algebrica determinabile dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, finchè r non sia fattore di $2k$. Ma quando r è fattore di $2k$, l'integrale è una funzione logaritmica. É osservabile che, per la natura della legge con cui sono formate le $(r-1)n$ equazioni lineari, sono esclusi tutti gl'integrali trascendenti. Ponendo per brevità;

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[x^{rn}]} = T_0, \quad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{[x^{rn}]} = T_1, \quad \ldots, \int_0^\infty \frac{x^u\,dx}{x^{rn}} = T_u;$$

si ha da formare il seguente sistema di equazioni:

$$\left.\begin{array}{r}
\alpha T_{rn-2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{r} - \beta T_{rn-3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{r} + \gamma T_{rn-4}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{r} - \cdots \pm \mu T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = \frac{\pi}{r}, \\
T_{rn-2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{r} - \alpha T_{rn-3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{r} + \beta T_{rn-4}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{r} - \cdots \pm \lambda T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = 0, \\
- \quad T_{rn-3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{r} + \alpha T_{rn-4}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{r} - \cdots \pm \varkappa T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = 0, \\
+ \quad T_{rn-4}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{r} - \cdots \pm \iota T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
\pm \alpha T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = 0, \\
\pm \quad T_{rn-r-2}\operatorname{sen}\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \cdots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{array}\right\} (3)$$

L'integrale T_{rn-r-1} è evidentemente logaritmico, e manca a causa del coefficiente $\operatorname{sen}\frac{r\pi}{r} = 0$.

Se ora si pone $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$, l'integrale T prende la forma delle funzioni *Beta*. Dividendo il sistema (3) per $\frac{\pi}{r}$, portando nella prima equazione l'1 al primo membro, e osservando che:

$$\operatorname{sen}\frac{m\pi}{r} = \pi : B\left(\frac{m}{r}, 1 - \frac{m}{r}\right),$$

si ottengono le seguenti relazioni per le funzioni *Beta*:

$$\left.\begin{array}{r}
\binom{n}{0}\frac{B(0,n)}{B(0,1)}-\binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{1}{r},n-\frac{1}{r}\right)}{B\left(\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}\right)}+\binom{n}{2}\frac{B\left(\frac{2}{r},n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},1-\frac{2}{r}\right)}-\binom{n}{3}\frac{B\left(\frac{3}{r},n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},1-\frac{3}{r}\right)}+\cdots=0,\\
\binom{n}{0}\frac{B\left(\frac{1}{r},n-\frac{1}{r}\right)}{B\left(\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}\right)}-\binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{2}{r},n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},1-\frac{2}{r}\right)}+\binom{n}{2}\frac{B\left(\frac{3}{r},n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},1-\frac{3}{r}\right)}-\cdots=0,\\
\binom{n}{0}\frac{B\left(\frac{2}{r},n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},1-\frac{2}{r}\right)}-\binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{3}{r},n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},1-\frac{3}{r}\right)}-\cdots=0,\\
\text{ecc.}\qquad\qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\}\quad(4)$$

I coefficienti binomiali ammettono una specie di trasposizione in queste relazioni. Si possono attribuire ad r diversi valori interi o frazionari, positivi o negativi, per esempio $r=2$. In quest'ipotesi viene:

$$\left.\begin{array}{r}
\binom{n}{1}B(\tfrac{1}{2},n-\tfrac{1}{2})-\binom{n}{3}B(\tfrac{3}{2},n-\tfrac{3}{2})+\binom{n}{5}B(\tfrac{5}{2},n-\tfrac{5}{2})-\cdots=T_1,\\
\binom{n}{0}B(\tfrac{1}{2},n-\tfrac{1}{2})-\binom{n}{2}B(\tfrac{3}{2},n-\tfrac{3}{2})+\binom{n}{4}B(\tfrac{5}{2},n-\tfrac{5}{2})-\cdots=0,\\
-\binom{n}{1}B(\tfrac{3}{2},n-\tfrac{3}{2})+\binom{n}{3}B(\tfrac{5}{2},n-\tfrac{5}{2})-\cdots=0,\\
-\binom{n}{0}B(\tfrac{3}{2},n-\tfrac{3}{2})+\binom{n}{2}B(\tfrac{5}{2},n-\tfrac{5}{2})-\cdots=0,\ \text{ecc.}
\end{array}\right\}\quad(5)$$

Donde si vede che è sempre possibile di esprimere la funzione *Beta* $B\left(\frac{m}{2},n-\frac{m}{2}\right)$ per mezzo dei coefficienti binomiali della potenza $n.^{esima}$

Mettendo inoltre $r=-\frac{v}{w}$ e introducendo le funzioni *Gamma* invece delle *Beta*, risulta dal sistema (4):

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2w}{v}\right)}-\cdots\binom{n}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{nw}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{nw}{v}\right)}=0,\quad(6)$$

relazioni nella quale si possono trasporre i coefficienti binomiali, ovvero continuare le funzioni Γ in avanti o indietro ad arbitrio, nel modo seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n-\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n-\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}-\binom{n}{3}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}+\cdots=0,\\&\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n-\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{3}\frac{\Gamma\left(n+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2w}{v}\right)}+\cdots=0,\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

in generale:

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n+m\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+m\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n+[m+1]\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+[m+1]\frac{w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+[m+2]\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+[m+2]\frac{w}{v}\right)}-\cdots=0.$$

Quindi anche, per la trasposizione dei coefficienti:

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n+tw+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+tw+\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n+tw+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+tw+\frac{2w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+tw+\frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+tw+\frac{3w}{v}\right)}-\cdots=0.$$

Ora sostituendo $n+tw=q$, risulta:

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(q+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(q-n+1+\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(q+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(q-n+1+\frac{2w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(q+\frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(q-n+1+\frac{3w}{v}\right)}-\cdots=0,\quad(8)$$

o se si mette anche $tw=m$:

$$\binom{q-m}{0}\frac{\Gamma\left(q+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(m+1+\frac{w}{v}\right)}-\binom{q-m}{1}\frac{\Gamma\left(q+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(m+1+\frac{2w}{v}\right)}+\binom{q-m}{2}\frac{\Gamma\left(q+\frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(m+1+\frac{3w}{v}\right)}-\cdots=0.\quad(9)$$

Se in questa relazione si pone $m = -1$ si ottiene:

$$\binom{q+1}{0}\frac{\Gamma\left(q+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{w}{v}\right)}-\binom{q+1}{1}\frac{\Gamma\left(q+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{2w}{v}\right)}+\binom{q+1}{2}\frac{\Gamma\left(q+\frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{3w}{v}\right)}-\cdots=0. \tag{10}$$

Dividendo questa equazione per $\Gamma(q)$, viene:

$$\binom{q+1}{0}\frac{1}{B\left(\frac{w}{v},q\right)}-\binom{q+1}{1}\frac{1}{B\left(\frac{2w}{v},q\right)}+\binom{q+1}{2}\frac{1}{B\left(\frac{3w}{v},q\right)}-\cdots=0. \tag{11}$$

Altre ricerche conducono alle relazioni:

$$\binom{q}{0}\frac{1}{B\left(\frac{w}{v},q\right)}-\binom{q}{1}\frac{1}{B\left(\frac{2w}{v},q\right)}+\binom{q}{2}\frac{1}{B\left(\frac{2w}{v},q\right)}-\cdots=\pm q!\left(\frac{w}{v}\right)^q=\pm\Gamma(q+1)\left(\frac{w}{v}\right)^q \tag{12}$$

$$\binom{q-1}{0}\frac{1}{B\left(\frac{w}{v},q\right)}-\binom{q-1}{1}\frac{1}{B\left(\frac{2w}{v},q\right)}+\binom{q-1}{2}\frac{1}{B\left(\frac{3w}{v},q\right)}-\cdots=\pm\left\{1+(q-1)\frac{w+v}{2w}\right\}\left(\frac{w}{v}\right)^q\Gamma(q+1) \tag{13}$$

delle quali la (12) ammette una trasposizione dei coefficienti binomiali.

Una terza relazione di questa specie è la seguente:

$$\binom{p}{0}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{w}{v}\right)}-\binom{p}{1}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m+1+\frac{w}{v}\right)}+\binom{p}{2}\frac{\Gamma\left(n+2+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m+2+\frac{w}{v}\right)}-\cdots=0, \tag{14}$$

colla condizione $p>m$. Essa pure ammette una trasposizione.

Le relazioni sopra scritte dalla (4) fino alla (14) sono utilissime, specialmente per la teoria dei coefficienti binomiali e dei numeri figurati. Ponendo nella (8) $\frac{w}{v}=n$, dopo aver messo $(n+q-1)!$ in luogo di $\Gamma(n+q)$ e dopo aver divisa l'equazione per $(n-1)!$, risulta la relazione seguente:

$$\binom{n}{0}\binom{n+q-1}{q}-\binom{n}{1}\binom{n+q}{q+1}+\binom{n}{2}\binom{n+q+1}{q+2}-\cdots\pm\binom{n}{n}\binom{2n+q+1}{q+n}=0, \tag{15}$$

con trasposizione arbitraria dei coefficienti. Se inoltre q varia, si ottiene il seguente sistema:

$$\left.\begin{array}{llllrl}
 & & & \pm\binom{n}{n}\binom{n-1}{0} & = & \pm 1 \\
 & & & \cdots\cdots\cdots & = & 0 \\
 & & n>3 & -\binom{n}{3}\binom{n-1}{0} \quad + \cdots & = & 0 \\
 & n>2 & +\binom{n}{2}\binom{n-1}{0} & -\binom{n}{3}\binom{n}{1} \quad + \cdots & = & 0 \\
n>1 & -\binom{n}{1}\binom{n-1}{0} & +\binom{n}{2}\binom{n}{1} & -\binom{n}{3}\binom{n+1}{2} + \cdots & = & 0 \\
\binom{n}{0}\binom{n-1}{0} & -\binom{n}{1}\binom{n}{1} & +\binom{n}{2}\binom{n+1}{2} & -\binom{n}{3}\binom{n+2}{3} + \cdots & = & 0 \\
\binom{n}{0}\binom{n}{1} & -\binom{n}{1}\binom{n+1}{2} & +\binom{n}{2}\binom{n+2}{3} & -\binom{n}{3}\binom{n+3}{4} + \cdots & = & 0
\end{array}\right\} \quad (16)$$

in generale:

$$\binom{n}{0}\binom{n+r-1}{r}-\binom{n}{1}\binom{n+r}{r+1}+\binom{n}{2}\binom{n+r+1}{r+2}-\binom{n}{3}\binom{n+r+2}{r+3}+\cdots=0.$$

Sommando tutte queste equazioni si ricava:

$$\binom{n}{0}\binom{n+r}{n}-\binom{n}{1}\binom{n+r+1}{n}+\binom{n}{2}\binom{n+r+2}{n}-\binom{n}{3}\binom{n+r+3}{n}+\cdots=\pm 1. \quad (17)$$

Si ottengono altre relazioni sostituendo nella (8) a $\frac{w}{v}$ un numero intero e positivo diverso da n.

Se nella (12) si pone $\frac{w}{v}=1$ e si divide l'equazione per $q!$, risulta:

$$\binom{q}{0}\binom{q}{0}-\binom{q}{1}\binom{q+1}{1}+\binom{q}{2}\binom{q+2}{2}-\binom{q}{3}\binom{q+3}{3}+\cdots=\pm\binom{q}{0}. \quad (18)$$

In generale;

$$\binom{q-t}{0}\binom{q}{0}-\binom{q-t}{1}\binom{q+1}{1}+\binom{q-t}{2}\binom{q+2}{2}-\binom{q-t}{3}\binom{q+3}{3}+\cdots=\pm\binom{q}{t}. \quad (19)$$

Se nella (17) si tiene costante la base dei numeri figurati, mentre gli indici variano, si ottiene:

$$\binom{n}{0}\binom{n+r}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+r+1}{m}+\binom{n}{2}\binom{n+r+2}{m}-\binom{n}{3}\binom{n+r+3}{m}+\cdots=\pm\binom{n+r}{m-n} \quad (20)$$

Ponendo ora nella (13) $\frac{w}{v}=1$ e dividendo per $q!$ si ricava come caso particolare della (19):

$$\binom{q-1}{0}\binom{q}{0}-\binom{q-1}{1}\binom{q+1}{1}+\binom{q-1}{2}\binom{q+2}{2}-\binom{q-1}{3}\binom{q+3}{3}+\cdots=\pm(q_1),$$

e in generale:

$$\binom{q-t}{0}\binom{q}{q}-\binom{q-t}{1}\binom{q+1}{q}+\binom{q-t}{2}\binom{q+2}{q}-\binom{q-t}{3}\binom{q+3}{q}+\cdots=\pm(q_t).$$

All'incontro è chiaro che:

$$\binom{q+t}{0}\binom{q}{q}-\binom{q+t}{1}\binom{q+1}{q}+\binom{q+t}{2}\binom{q+2}{q}-\binom{q+t}{3}\binom{q+3}{q}+\cdots=0.$$

Colla trasposizione dei coefficienti si ricava nuovamente dalla (19):

$$\binom{q-t}{0}\binom{q+u}{q}-\binom{q-t}{1}\binom{q+u+1}{q}+\binom{q-t}{2}\binom{q+u+2}{q}-\cdots=\pm\binom{q+u}{t}$$

relazione che è essenzialmente identica colla (20).

Sostituendo in fine nella (14) $\frac{w}{v}$ eguale a un numero intero qualunque x, viene, dopo aver divisa l'equazione per $m!$,

$$\binom{p}{0}\binom{n+x-1}{m}-\binom{p}{1}\binom{n+x}{m}+\binom{p}{2}\binom{n+x+1}{m}-\cdots=0,$$

colla condizione di $p>m$. D'altronde questa relazione non è che un caso particolare della (20).

Sui prodotti infiniti.

(*di* Ulisse Dini, *a Pisa*).

I prodotti di un numero infinito di fattori sono stati studiati da vari distinti Geometri, e su essi si sono trovati varii teoremi per poter giudicare della loro convergenza o divergenza. Però tutti questi teoremi generali sono relativi alla convergenza semplice dei prodotti infiniti, e, che io sappia, fin ora non è stata data una condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto infinito abbia sempre uno stesso valore finito e determinato indipendentemente dall'ordine dei suoi fattori. In mancanza di una tale condizione, io mi sono posto alla ricerca di essa, e ora vengo ad esporre i risultati di questa ricerca, premettendo prima alcuni teoremi sulle serie.

§ 1.

Sia:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

una serie reale, i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi, e tendono a zero col crescere indefinitamente di n; vediamo che cosa accadrà quando in essa si cangia l'ordine dei termini in tutti i modi possibili.

Indichiamo perciò con S_n la somma dei primi n termini della serie (1), e supponiamo che:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+\cdots \tag{2}$$

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\cdots \tag{3}$$

sieno le due serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi che compongono la serie (1). In S_n entrerà un certo numero m dei primi termini della serie (2), e un certo numero m' dei primi termini della serie (3); quindi se si indicano con σ_m, $\sigma'_{m'}$ le somme rispettive di queste m e m' primi termini delle serie (2) e (3), si avrà:

$$S_n = \sigma_m - \sigma'_{m'}, \quad \text{e} \quad \lim S_n = (\sigma_m - \sigma'_{m'}).$$

Di qui si vede subito che quando le serie (2) e (3) siano entrambe convergenti la serie (1) sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini (Teor. di Dirichlet), e quando una sola delle serie (2) e (3) sia divergente, la serie (1) sarà divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini; quindi resta a considerarsi solo il caso in cui le serie (2) e (3) siano entrambe divergenti.

In questo caso ci proponiamo di mostrare che si potrà cangiare l'ordine dei termini nella serie (1) in modo che essa venga ad avere per somma una quantità qualunque data finita o infinita, o anche divenga indeterminata.

Indichiamo perciò con h una quantità finita e positiva qualunque, e mostriamo subito come possano ordinarsi i termini della serie (1) in modo da ottenere, che la sua somma venga ad essere precisamente h. Per questo supponiamo che i termini della serie (2) a partire dal primo siano tutti minori di h; se questo non fosse, potremmo aggruppare con una legge qualunque un certo numero dei primi termini delle serie (2) e (3) sino a trovare che i termini seguenti della (2) soddisfacessero a questa condizione e che la somma algebrica dei termini così aggruppati, prendendo quelli della (2) col segno $+$ e quelli della (3) col segno $-$, fosse una quantità negativa $-k$; allora si considererebbero le serie (2) e (3) a partire da questi termini, e si cercherebbe di formare con queste due serie un' altra serie in cui le α_s fossero prese col segno $+$ e le β_s col segno $-$, e la cui somma fosse $h+k$.

Ciò posto, osserviamo che, siccome le serie (2) e (3) sono divergenti, potremo prendere un numero finito p_1 di termini $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p_1}$ della (1) tali che la loro somma differisca da $h+\beta_1$ di meno del termine seguente α_{p_1+1}; poi si potranno prendere altri p_2 termini $\alpha_{p_1+1}, \alpha_{p_1+2}, \ldots \alpha_{p_1+p_2}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1}+\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2}$ differisca da $h+\beta_1+\beta_2$ a meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+1}$; ... in generale poi dopo il termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots p_{n-1}}$ si potranno prendere altri p_n termini $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}$, $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+2}, \ldots \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+$ $+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ non differisca da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ che a meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$. Di questi numeri $p_1, p_2, \cdots p_n \ldots$ alcuni potranno essere anche zero perchè può essere, per esempio, che β_s sia tanto piccolo che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}}$, che differisce da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s-1}$ a meno del termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}+1}$, differisca anche da $h+\beta_1+\cdots+\beta_{s-1}+\beta_s$ a meno dello stesso termine; però la somma $p_1+p_2+\cdots+p_n$ dovrà crescere indefinitamente con n, poichè la quantità $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ cresce pure indefinitamente con n.

Conseguentemente con questi gruppi successivi si potrà formare la serie:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+2}-\beta_2+\cdots\\ -\beta_{n-1}+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\beta_n+\cdots\end{array}\right\}\quad(3)$$

che non sarà che la (1) scritta in un ordine particolare, e in questa serie (siccome alcune delle p possono essere nulle) anche i termini negativi potranno trovarvisi successivamente a gruppi. Però sì i gruppi dei termini positivi che quelli dei termini negativi tenderanno a zero col crescere indefinitamente di n, poichè l'aggiunta di un gruppo positivo, per esempio l'n^0, fa sì che la somma si aumenti soltanto di β_n a meno del primo termine positivo seguente $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$; e l'aggiunta del seguente gruppo negativo fa sì che la somma ottenuta si diminuisca della quantità di cui si era precedentemente aumentata a meno dello stesso primo termine positivo seguente.

Ciò posto se facciamo:

$$S'_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\beta_n,$$

si avrà:

$$h-\varepsilon<S'_n<h+\varepsilon,$$

essendo ε una quantità che tende a zero; e quindi sarà:

$$\lim S'_n=h;$$

e di qui si concluderà che la serie (3) è convergente e ha per somma h, giacchè se arrestandoci a un gruppo di termini negativi si è avuto per limite della somma h, altrettanto accade arrestandosi a qualunque altro punto sì in un gruppo positivo che in un gruppo negativo, perchè, per quanto si è visto, questi gruppi e quindi anche le loro parti tendono a zero.

Così si vede intanto che i termini della serie (1) si possono ordinare in modo che la somma di essa si riduca alla quantità data h; ed anche si capisce che ciò potrà farsi in infiniti altri modi seguendo altre leggi per formare i successivi gruppi di termini delle serie (2) e (3), come, per esempio, seguendo ancora il motodo precedente, e prendendo invece di h una funzione positiva e crescente di n, che col crescere di n si avvicini indefinitamente alla quantità data h. In un modo analogo si proverebbe che si possono dare ai termini della serie (1) tali ordinamenti, che la sua somma divenga una quantità negativa data. Inoltre, prendendo per h una funzione positiva o negativa di n che cresca indefinitamente con n in valore assoluto, o che non abbia un limite determinato, con ragionamenti analoghi si vedrebbe che la serie (1) si può ridurre ad infinite altre serie che siano divergenti o indeterminate. Quindi riassumendo si può ora enunciare il seguente teorema:

Essendo data la serie reale:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi e tendono a zero col crescere indefinitamente di n, ed essendo:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots \end{array}\right\} \tag{5}$$

le serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi:

1.° Se queste due serie (5) sono ambedue convergenti, la serie data (4) è convergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini.

2.° Se una sola delle serie (5) è divergente, la serie (4) è divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini.

3.° Se le serie (5) sono ambedue divergenti, cangiando l'ordine dei termini nella (1) in tutti i modi possibili, questa serie verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e ciascuno un numero infinito di volte; e per dati cangiamenti dello stesso ordine diverrà anche indeterminata.

§ 2.

1.° Osservando che questo stesso teorema ci mostra, che una serie (4) non può essere semplicemente convergente o indeterminata, che nell'ultimo caso, se ne concluderà in particolare che: Data una serie semplicemente convergente o indeterminata i cui termini tendono a zero, se si cangia in essa l'ordine dei termini in tutti i modi possibili, la sua somma verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e per dati ordinamenti degli stessi termini sarà indeterminata.

2.° Osserviamo ancora che se si indicano con $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \dots$ delle quantità positive che non tendono nè a zero nè all'infinito, la serie dei termini positivi e quella dei valori assoluti dei termini negativi della serie:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n + \cdots$$

sono convergenti e divergenti insieme alle serie corrispondenti cui dà luogo la serie (4); e quindi si può dire che: se le quantità $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \dots$ sono positive e non tendono nè a zero nè all'infinito, per la serie:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n + \cdots$$

avverrà precisamente quel che avviene per la serie:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

3.° È pure da notarsi che dalla dimostrazione del teorema generale precedente, risulta anche che: se sono date due serie di quantità positive:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \dots$$

che tendono a zero col crescere indefinitamente di n, e sono tali che le serie formate con esse siano divergenti; se si prendono le α col segno $+$ e le β col segno $-$, con queste quantità si potranno sempre formare infinite serie semplicemente convergenti che abbiano per somma una quantità qualunque data. Osserviamo inoltre, che da ciò che precede si vede anche come questo possa farsi; e osserviamo pure che le due serie di quantità α e β possono anche ridursi a una sola serie di quantità, quando sia in generale $\alpha_r = \beta_r$.

Lo studio delle serie complesse si fa dipendere da quello di due serie reali; quindi applicando a queste ultime i teoremi precedenti si troverebbero quelli corrispondenti per le serie complesse.

§ 3.

Questi teoremi ci conducono subito a risolvere la questione che ci siamo proposti in principio.

Sia infatti:

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \cdots$$

un prodotto infinito reale o complesso, e cerchiamo dapprima la condizione necessaria e sufficiente affinchè esso abbia un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei suoi fattori.

Poniamo perciò:

$$1 + u_n = e^{l(1 + u_n)} = e^{\alpha_n + \beta_n i},$$

indicando con l la caratteristica dei logaritmi Neperiani, e supponendo che, fra gli infiniti logaritmi di $1 + u_n$, $l(1 + u_n)$ o $\alpha_n + \beta_n i$ sia quello in cui il coefficiente di i ha il più piccolo valore assoluto.

Si avrà:

$$P = e^{\Sigma l(i + u_n)} = e^{\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)}, \tag{6}$$

e ogni cangiamento dell'ordine dei fattori in P porterà un corrispondente cangiamento nell'ordine dei termini della serie $\Sigma l(1 + u_n) = \Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$.

Ciò posto, supponiamo dapprima che P abbia un valore finito, determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori. Per questa condizione la serie $\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$ dovrà essere tale che l'esponenziale $e^{\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)}$ abbia sempre uno stesso valore finito e determinato e differente da zero, e quindi la serie $\Sigma(\alpha_n + \beta_n i)$ o dovrà essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, o dovrà esser tale che per qualunque cangiamento dello stesso ordine la sua somma non possa variare che di multipli del periodo dell'esponenziale, vale a dire di $2k\pi i$.

Di qui segue subito che la serie $\Sigma\alpha_n$ dovrà essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. In quanto poi alla serie $\Sigma\beta_n$, osserviamo prima di tutto che dalla ipotesi fatta che P abbia un valore finito e determinato, e che le β_n non tendano verso multipli di 2π, ne viene che queste quantità devono tendere verso zero, poichè altrimenti la serie $\Sigma\beta_n$ o sarebbe divergente e la sua somma evidentemente non tenderebbe all'infinito aumentando successivamente di multipli di 2π, o sarebbe indeterminata e la indeterminazione non porterebbe su multipli di 2π; e quindi in ambedue i casi l'argomento di P sarebbe indeterminato (*). Ora se le β_n tendono verso zero, la serie $\Sigma\beta_n$ non potrà essere divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini poichè altrimenti l'argomento di P sarebbe sempre indeterminato; e non potrà neppure essere semplicemente convergente o indeterminata poichè altrimenti (§ 2. 1.°) cangiando l'ordine dei termini in tutti i modi possibili la sua somma prenderebbe tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ e quindi le variazioni non sarebbero soltanto di multipli di 2π. Dunque se il prodotto infinito P ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, tanto la serie $\Sigma\alpha_n$ che la serie $\Sigma\beta_n$ saranno convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi tale sarà pure la serie $\Sigma l(1+u_n)$.

Di qui risulta che la serie:

$$\Sigma \bmod l(1+u_n) = \Sigma \bmod u_n \bmod \left[\frac{l(1+u_n)}{u_n}\right],$$

è convergente; e quindi, poichè si ha:

$$\lim \frac{l(1+u_n)}{u_n} = 1,$$

anche la serie $\Sigma \bmod u_n$ sarà convergente, e si può perciò concludere che, se il prodotto infinito P ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, la serie Σu_n è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

Questa condizione poi è anche sufficiente, giacchè se essa è soddisfatta, la serie $\Sigma \bmod u_n$ è convergente, e quindi tale è pure l'altra:

$$\Sigma \bmod u_n \bmod \left[\frac{l(1+u_n)}{u_n}\right] = \Sigma \bmod l(1+u_n).$$

(*) Ciò del resto risulta subito anche dall'osservare che evidentemente si deve avere $\lim u_n = 0$.

Conseguentemente la serie $\Sigma\, l(1+u_n)$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi, per la formola (6), il prodotto P ha un valore finito determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori (*).

Dietro ciò si può dunque enunciare il teorema che: La condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto infinito reale o complesso:

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

abbia un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori, è che la serie:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

§ 4.

Passiamo ora a considerare il caso in cui il nostro prodotto infinito:

$$P=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

non ha un valore finito e determinato e differente da zero indipendentemente dall'ordine dei fattori. In questo caso, se:

$$u_n=a_n+b_n i,$$

pel teorema precedente, una almeno delle due serie Σa_n, Σb_n non sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini; e quì si presentano perciò più casi da considerare.

Per considerare questi casi, osserviamo prima che si ha:

$$l(1+u_n)=\tfrac{1}{2}\, l\,[(1+a_n)^2+b_n^2]+\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{1+a_n};$$

(*) Il Sig. Weierstrass, nel vol. 51 del giornale di *Crelle,* aveva soltanto dimostrato che se la serie Σu_n è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, il prodotto infinito reale o complesso

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

ha un valore finito, determinato e differente da zero.

e quindi, supponendo che le a_n e b_n tendano a zero, col crescere indefinitamente di n, e indicando con λ_n e μ_n due quantità positive, che non tendono nè a zero nè all'infinito, almeno a partire da un certo punto, si avrà:

$$l(1+u_n)=\lambda_n(a_n^2+2a_n+b_n^2)+\mu_n b_n;$$

e per questa sarà:

$$P=e^{\Sigma\lambda_n(a_n^2+2a_n+b_n^2)+i\Sigma\mu_n b_n}=e^{\Sigma(\nu_n a_n+\lambda_n b_n^2)+i\Sigma\mu_n b_n}, \qquad (7)$$

essendo ν_n la quantità $\lambda_n(a_n+2)$ la quale almeno a partire da un certo punto è positiva e non tende nè a zero nè all'infinito.

Con questa formola ci è ora facile di studiare i differenti casi che possono presentarsi per le serie Σa_n, Σb_n.

1.° caso. Supponiamo che Σb_n sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e Σa_n non lo sia.

In questo caso la serie $\Sigma\mu_n b_n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e quindi l'argomento del prodotto ha sempre lo stesso valore finito e determinato qualunque sia l'ordine dei fattori. In quanto al modulo poi, osserviamo che siccome esso può scriversi $e^{\Sigma\nu_n a_n+\Sigma\lambda_n b_n^2}$, e dallo essere convergente indipendentemente dall'ordine dei termini la serie Σb_n ne viene che tale è pure la Σb_n^2 e quindi anche l'altra $\Sigma\lambda_n b_n^2$, così per vedere che cosa accada del modulo bisognerà studiare la serie $\Sigma\nu_n a_n$. Ora per considerare la serie $\Sigma\nu_n a_n$ basta considerare la serie Σa_n (§ 2. 2.°), giacchè le quantità ν_n sono positive finite e differenti da zero; quindi applicando il teorema del § 1 si può evidentemente concludere che: Se nel prodotto infinito:

$$(1+a_1+ib_1)(1+a_2+ib_2)\cdots(1+a_n+ib_n)\cdots$$

la serie Σb_n è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e la serie Σa_n non lo è; cangiando l'ordine dei fattori: 1.° esso sarà sempre zero se la serie formata colle a_n negative è divergente e quella formata colle a_n positive non lo è; 2.° avrà sempre un modulo infinito se accade l'opposto; 3.° il suo modulo passerà per tutti i valori da 0 a ∞ e anche per certi ordinamenti dei suoi fattori diverrà indeterminato se la serie delle a_n positive e quella delle a_n negative sono entrambe divergenti. L'argomento poi in ognuno di questi casi avrà sempre lo stesso valore finito e determinato qualunque sia l'ordine dei fattori.

In particolare si ha di quì che: Se nel prodotto reale

$$(1+a_1)(1+a_1)\cdots(1+a_n),$$

la serie Σa_n non è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini; cangiando l'ordine dei fattori: 1.° il prodotto sarà sempre zero se la serie delle a_n negative è divergente e quelle delle a_n positive non lo è; 2.° il suo valore assoluto sarà sempre infinito se accade l'opposto; 3.° passerà per tutti i valori da zero all'infinito e anche diverrà indeterminato se nessuna di queste due serie è convergente.

Esempii. Il prodotto infinito:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

è zero in qualunque ordine si prendano i suoi fattori, e l'altro:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

è infinito per qualunque ordine dei suoi fattori.

Il prodotto infinito

$$\left(1+\frac{1}{2l2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4l4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots$$

cangiando l'ordine dei fattori in tutti i modi possibili, passa per tutti i valori da 0 a ∞ e anche diviene indeterminato.

2.° caso. Supponiamo ora che Σa_n sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e Σb_n non lo sia.

In questo caso osservando che la serie $\Sigma\nu_n a_n$ è pure convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e la serie $\Sigma\mu_n b_n$ non lo è, e scrivendo la (7) sotto la forma:

$$P=e^{\Sigma\nu_n a_n+\Sigma\lambda_n b_n^2+i\Sigma\mu_n b_n},$$

pei teoremi del n.° 1 si vede subito che: cangiando in P l'ordine dei fattori in tutti i modi possibili, il suo modulo avrà sempre uno stesso valore finito e differente da zero, o sempre infinito secondo che la serie Σb_n^2 è convergente o divergente; l'argomento poi o sarà sempre infinito o passerà per tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ e per dati ordinamenti degli stessi fattori diverrà anche indeterminato.

3.° caso: Supponiamo in ultimo che nessuna delle due serie Σa_n, Σb_n sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

In questo caso dalla formola (7) pei teoremi del n.° 1 si vede subito che cangiando l'ordine dei fattori in P, l'argomento del prodotto o passerà per tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$ e per dati ordinamenti degli stessi fattori diverrà anche indeterminato, o sarà sempre infinito. Pel modulo poi accadrà altrettanto o sarà sempre zero, a meno che la serie $\Sigma(a_n^2+2a_n+b_n^2)$ non sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini nel qual caso il modulo ha sempre uno stesso valore finito e differente da zero.

Notiamo che quì abbiamo supposto che le a_n e b_n tendessero a zero col crescere indefinitamente di n. I prodotti infiniti nei quali ciò non accade sono sempre nulli o infiniti o indeterminati, e di essi non è punto utile occuparsi.

Pisa, 16 Marzo 1868.

Théorie des coordonnées curvilignes quelconques (*).

(*par M. l'Abbé* Aoust, *prof. à Marseille*).

Nous nous proposons d'appliquer les formules que nous avons établies dans notre première partie à la théorie des courbes tracées sur une surface quelconque, en insistant sur les simplifications que la *Courbure inclinée* des lignes coordonnées introduit dans cette théorie, et en nous attachant à mettre en relief le sens géométrique des formules les plus générales. Nous conservons les définitions, notations et hypothèses déjà admises dans la première partie.

§ 1. Propriétés générales d'une courbe tracée sur une surface.

1.° *Différentielle de l'arc, tangente.* Soit une courbe tracée sur une surface ρ_2, ds l'élément de l'arc; si par les extrémités de cet élément on fait passer les lignes coordonnées ρ, ρ_1; $\rho+d\rho$, $\rho_1+d\rho_1$, elles forment un quadrilatère curviligne infinitésimal dont les côtés contigüs à la diagonale ds, sont $d\sigma$, $d\sigma_1$; si l'on appelle α, β les angles qu'elle forme avec ces deux côtés, l'on a les formules:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{\sin\varphi}=\frac{d\sigma}{\sin\beta}=\frac{d\sigma_1}{\sin\alpha},\\ &ds\cos\alpha=d\sigma+d\sigma_1\cos\phi,\\ &ds\cos\beta=d\sigma_1+d\sigma\cos\phi;\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(*) Ce travail fait suite à un premier mémoire inséré au t. 6 des *Annali di Matematica*, 1.ᵉ série.

lesquelles font connaître la direction de la tangente ds par rapport aux tangentes des lignes coordonnées, ainsi que la grandeur de l'élément ds.

2.° *Courbure de la courbe* ds, *ses composantes obliques.* Les cosinus des angles que la tangente à la courbe ds fait avec les trois axes rectangulaires x, y, z sont donnés par les rapports de dx, dy, dz à ds, les différentielles étant prises à la fois par rapport à ρ et à ρ_1 de sorte que l'on a:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} + \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{ds};$$

or, si l'on prend la différentielle complète des deux membres par rapport à ρ et à ρ_1, et qu'on divise le résultat par ds, l'on obtient:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\frac{d\sigma_1^2}{ds^2} + \left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\right\}\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds}$$
$$+ \frac{dx}{d\sigma}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right) + \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right).$$

Or, (I.re Part. n.° 13), si l'on représente par $\frac{1}{r^{(0)}}, \frac{1}{r^{(1)}}, \frac{1}{r^{(2)}}$ les composantes de la courbure $\frac{1}{R}$ de la courbe $d\sigma$ suivant les trois lignes coordonnées et par les mêmes lettres affectées de l'indice 1 les composantes de la courbure $\frac{1}{R_1}$ de la courbe $d\sigma_1$ on a les relations:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = \frac{X}{r^{(0)}} + \frac{X_1}{r^{(1)}} + \frac{X_2}{r^{(2)}}, \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right) = \frac{X}{r_1^{(0)}} + \frac{X_1}{r_1^{(1)}} + \frac{X_2}{r_1^{(2)}},$$

dans les quelles X, X_1, X_2 sont les cosinus des angles que les trois courbes coordonnées font avec l'axe des x.

Nous avons appelé *Angle de contingence inclinée* de la courbe $d\sigma$ suivant l'élément $d\sigma_1$ l'angle I_{10} des tangentes aux deux courbes d'une même série (ρ) menées par les deux extrémités de l'arc $d\sigma$; *Courbure inclinée* de la même courbe suivant la même direction, le rapport de l'angle I_{10} à l'arc $d\sigma$, la direction de cette courbure étant celle de l'arc de cercle de rayon $d\sigma_1$, décrit du sommet de l'angle I_{10} entre ses deux côtés. D'après cela en représentant par $\frac{1}{L_{10}}$ cette courbure, par $\frac{1}{l_{10}^{(0)}}, \frac{1}{l_{10}^{(1)}}, \frac{1}{l_{10}^{(2)}}$ ses composantes obliques suivant les trois lignes coordonnées, et par $\frac{1}{l_{01}^{(0)}}$, $\frac{1}{l_{01}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{01}^{(2)}}$ les composantes de la courbure $\frac{1}{L_{01}}$ de l'arc $d\sigma_1$ suivant $d\sigma$, l'on a les deux relations:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\right)=\frac{X}{l_{10}^{(0)}}+\frac{X_1}{l_{10}^{(1)}}+\frac{X_2}{l_{10}^{(2)}}, \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)=\frac{X}{l_{01}^{(0)}}+\frac{X_1}{l_{01}^{(1)}}+\frac{X_2}{l_{01}^{(2)}};$$

cela posé, si nous représentons par $\frac{1}{P}$ la courbure de la courbe ds, et par $\frac{1}{p^{(0)}}$, $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ les trois composantes obliques suivant les trois lignes coordonnées, l'on aura comme précédemment:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{X}{p^{(0)}}+\frac{X_1}{p^{(1)}}+\frac{X_2}{p^{(2)}};$$

or, si l'on porte ces différentes valeurs dans l'équation qui donne l'expression de $\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)$, les deux membres devant être identiques l'on a:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p^{(0)}}&=\frac{d\sigma^2}{ds^2}\frac{1}{r^{(0)}}+\frac{d\sigma_1^{\,2}}{ds^2}\frac{1}{r_1^{(0)}}+\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds}\left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}}+\frac{1}{l_{01}^{(0)}}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d\sigma}{ds},\\
\frac{1}{p^{(1)}}&=\frac{d\sigma^2}{ds^2}\frac{1}{r^{(1)}}+\frac{d\sigma_1^{\,2}}{ds^2}\frac{1}{r_1^{(1)}}+\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds}\left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}}+\frac{1}{l_{10}^{(1)}}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{d\sigma_1}{ds},\\
\frac{1}{p^{(2)}}&=\frac{d\sigma^2}{ds^2}\frac{1}{r^{(2)}}+\frac{d\sigma_1^{\,2}}{ds^2}\frac{1}{r_1^{(2)}}+\frac{d\sigma}{ds}\frac{d\sigma_1}{ds}\left(\frac{1}{l_{10}^{(2)}}+\frac{1}{l_{01}^{(2)}}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Telles sont les équations qui donnent les composantes de la courbure $\frac{1}{P}$ de la courbe ds suivant les trois lignes coordonnées. Les composantes des courbures inclinées des lignes coordonnées y jouent un rôle non moins important que les composantes des courbures propres de ces mêmes arcs. Ces équations suffisent pour faire connaître la courbure de la courbe ds, et la direction de cette courbure.

3.° *De la courbure géodésique de la courbe* ds. Cette courbure est la projéction de la courbure propre de la courbe ds sur le plan tangent à la surface

ρ_2. Soit $\frac{1}{P}$ cette courbure; R'', L''_{10}; R''_1, L''_{01}, sont les rayons de la courbure géodésique propre et inclinée des arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$; cela posé, si l'on multiplie la seconde des équations (3) par $cos\ \phi_2$, la troisième, par $cos\ \phi_1$ et qu'on ajoute à la première en remarquant que les angles $\widehat{R'' d\sigma}$, $\widehat{L''_{01} d\sigma}$ sont droits, l'on a:

$$\frac{\cos \widehat{P d\sigma}}{P} = \frac{\cos \widehat{R''_1 d\sigma}}{R''_1} \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{\cos \widehat{L''_{10} d\sigma}}{L''_{10}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right) + \cos\phi_2 \frac{d}{ds}\left(\frac{d\sigma_1}{ds}\right);$$

or, les rayons R'', L''_{10} sont perpendiculaires sur l'arc $d\sigma_1$, $cos\,\widehat{P d\sigma}$ est égal a $sin\,\alpha$, et enfin les deux derniers termes de l'équation précedente se ramennent, en vertu des relations (1), au terme unique $sin\,\alpha\,\frac{d\beta}{ds}$, $d\beta$ étant un différentielle compléte par rapport à ρ et ρ_1: donc, si l'on convient de sousentendre les accents superieurs, l'équation précédente s'écrit sous l'une des deux formes suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\sin\alpha}{R_1} + \frac{\sin\beta}{L_{10}} + \sin\phi\,\frac{d\beta}{ds}, \\ -\frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\sin\beta}{R} + \frac{\sin\alpha}{L_{01}} + \sin\phi\,\frac{d\alpha}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Cette dernière forme s'obtient directement en prenant la composante de $\frac{1}{P}$ suivant l'élément $d\sigma_1$.

Ces formules d'une grande simplicité font connaître la courbure de la courbe proposée en fonction des corbures géodésiques propres et inclinées des lignes coordonnées et de la variation totale de l'angle que l'élément de cette courbe fait avec les deux lignes coordonnées.

4. *De l'angle de contingence géodésique de la courbe.* Si dans les équations précédentes on remplace les sinus par les arcs qui leur sont proportionnels, ont obtient:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds}{P} &= \frac{d\sigma_1}{R_1} + \frac{d\sigma}{L_{10}} + d\beta, \\ -\frac{ds}{P} &= \frac{d\sigma}{R''} + \frac{d\sigma_1}{L_{01}} + d\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (4)'$$

dans lesquelles $d\alpha$ et $d\beta$ sont des différentielles totales.

Si l'on élimine les courbures inclinées des équations précédentes au moyen des formules données par le type (14) I.re Part.

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{L_{10}} = -\frac{d\varphi_2}{d\sigma},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_{01}} = -\frac{d\varphi_2}{d\sigma_1},$$

on obtient la forme suivante:

$$\frac{ds}{P} = \frac{d\sigma_1}{R_1} - \frac{d\sigma}{R} + d_\varrho \alpha - d_{\varrho_1}\beta. \qquad (4)''$$

Ces diverses équations font connaître l'angle de contingence de la courbe proposée en fonction des angles de contingence propre ou inclinée des courbes coordonnées, et des variations partielles des angles que cette courbe fait avec les deux lignes coordonnées.

Appelons $\frac{1}{P_\alpha}$, $\frac{1}{P_\beta}$ les courbures inclinées géodésiques de la courbe ds suivant les directions $d\sigma$, $d\sigma_1$, l'on aura comme précédemment:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P_\alpha} = -\frac{d\alpha}{ds},$$

$$-\frac{1}{P} + \frac{1}{P_\beta} = -\frac{d\beta}{ds};$$

conséquemment les formules (4)' deviennent:

$$\left\{ \frac{ds}{P_\beta} = \frac{d\sigma_1}{R_1} + \frac{d\sigma}{L_{10}}, \qquad \frac{ds}{P_\alpha} = \frac{d\sigma}{R} + \frac{d\sigma_1}{L_{01}}. \right\} \qquad (4)'''$$

De là résulte que si à partir du point pris sur la courbe ds, les rayons P_β, R, L_{10} sont portés suivant les tangentes aux courbes ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ les extrémités seront en ligne droite. Il en est de même des extrèmités des rayons P_α, L_{01}, R portés à partir du même point suivant les mêmes arcs.

Ceci démontre que lorsque deux des trois rayons du premier groupe, ou deux des trois rayons du second groupe seront connus, le troisième rayon du groupe sera aussi connu et constructible géomètriquement.

5.° *Courbure géodésique de la courbe en fonction des variations des arcs des lignes coordonnées.* Si de l'équation (4)'' on élimine les courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$ au moyen des deux formules contenues dans le type (18)″ I.^{re} Part.

$$\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi_2}{R} = d_\varrho(\cos\varphi_2\, d\sigma_1) - d_{\varrho_1}.d\sigma\,;\; \frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi_2}{R_1} = d_{\varrho_1}(\cos\varphi_2\, d\sigma) - d_\varrho.\, d\sigma_1\,,$$

l'on obtient, après quelques réductions, l'équation suivante:

$$\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi_2}{P} + d_\varrho(\cos\beta.d\sigma_1) - d_{\varrho_1}(\cos\alpha.d\sigma)\,,$$

qui est très significative. Car, si l'on appelle $d\omega$ l'aire du quadrilatère formé par les arcs coordonnées menés aux deux extrémités de l'arc ds, et $d\nu_1$, $d\nu$, les projections des arcs $d\sigma_1$, $d\sigma$ sur la direction ds, elle dévient:

$$\frac{1}{P} = \frac{d_\varrho\,(d\nu) - d_\varrho(d\nu_1)}{d\omega}\,.$$

Ces différentes équations nous seront utiles dans l'étude des courbes tracées sur une surface. Elles peuvent toutes s'obtenir géométriquement.

6.° *De la composant normale de la courbure.* Si l'on multiplie par le cosinus de l'angle que l'arc $d\sigma_2$ fait avec la normale à la surface ρ_2, les deux membres de l'équation contenue dans le type (32), I.^{re} Part.; comme cette équation exprime que les composantes obliques suivant $d\sigma_2$ des deux courbures inclinées des lignes coordonnées $d\sigma$, $d\sigma_1$, suivant leurs directions réciproques, sont égales, il en sera de même des composantes normales de ces deux courbures, on déduit delà:

Théoreme: Quel que soit le sistème de coordonnées tracées sur une surface, les composantes normales à la surface des courbures inclinées de ces deux courbes suivant leurs directions réciproques sont égales.

Cela posé, multiplions les deux membres de la troisième équation du groupe (3) par le cosinus de l'angle que la normale à la surface ρ_2, fait avec l'arc $d\sigma_2$, cette équation étant homogène du premier degré par rapport aux diverses courbures, la relation qu'elle exprime entre les composantes obliques suivant $d\sigma_2$ des courbures, existera pour les composantes normales à la surface; d'après cela, si l'on représente par $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$ les composantes normales des courbures propres des lignes ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ et, par $\frac{1}{l}$, la composante normale de la courbure inclinée de l'un des deux arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$ suivant l'autre, on obtiendra:

$$\frac{ds^2}{\pi} = \frac{d\sigma^2}{r} + \frac{d\sigma_1^{\,2}}{r_1} + 2\,\frac{d\sigma\, d\sigma_1}{l}, \tag{5}$$

laquelle fait connaître la composante normale de la courbure de la courbe ds en fonction des composantes normales des courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées.

Si l'on divise la composante normale $\frac{1}{\pi}$ de la courbure de la courbe ds par la courbure géodésique $\frac{1}{p}$ de cette courbure, le quotient exprimera la tangente de l'inclinaison du rayon de courbure sur le plan tangent, de sorte que tout ce qui intéresse l'état de la courbe se trouve déterminé.

7.° *De la courbure d'une section droite normale à la surface.* Si l'on mène suivant l'élément ds un plan normal à la surface; d'après le n.° 6 I.re Part., la courbure de cette section est la projection de la courbure de la courbe ds suivant la normale à la surface, donc l'équation précédente fait connaître la courbure de cette section normale. Si l'on y remplace les arcs par les sinus proportionnels, on aura:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\pi} = \frac{\sin^2\beta}{r} + \frac{\sin^2\alpha}{r_1} + 2\,\frac{\sin\alpha \sin\beta}{l}. \tag{5$'$}$$

Cette équation donne la courbure d'une section normale en fonction des courbures de deux autres sections normales, et des courbures inclinées de ces deux sections.

Si par le point considéré sur la surface on méne différentes sections normales, et qu'à partir de ce point, on prenne sur la tangente à chaque section, une longueur proportionnelle à la racine carrée du rayon de courbure correspondant, l'équation (5)′ montre que cette longueur décrira autour de ce point comme centre une conique située dans le plan tangent; les rayons vecteurs de cette conique auxiliaire ferons connaître les rayons de courbure des sections normales faites suivant ces rayons. Il résulte delà:

1.° l'existence de deux rayons principaux de courbure, l'un maximum et l'autre minimum, et l'orthogonalité des directions des sections relatives à ces deux rayons;

2.° toutes les relations qui existent entre les carrés des demi-diamètres de la conique formant entre eux certains angles, existeront entre les rayons de courbure des sections normales correspondantes aux mêmes diamètres.

3.° La discussion des rayons de courbure des sections normales passant par un point de la surface, est ramenée à la discussion des carrès des demi-diamètres correspondants de la conique.

4.° Si deux courbes coordonnées sont tangentes aux deux diamètres conjugués de la conique, le double produit $2\sin\alpha.\sin\beta$ ne se trouvant pas dans l'équation de la conique, les composantes normales des courbures inclinées des deux courbes coordonnées seront nulles.

5.° Si le sistème des lignes coordonnées est orthogonal et tangent aux axes de la conique, les deux secondes courbures géodésiques de ces deux lignes sont nulles. En effet l'angle de contingence inclinée de l'une des deux lignes coordonnées $d\sigma$ par rapport à l'autre, mesure l'angle de deux plans normaux à la surface menés à la surface par les extremités de l'arc $d\sigma$ suivant cet élément, donc le rapport de cet angle à $d\sigma$ n'est autre chose que la seconde courbure géodésique de l'arc $d\sigma$; d'ailleurs la direction du rayon de cette deuxième courbure, est celle de la normale à la surface ρ_2; donc, etc.

8.° *Relations entre les composantes normales des courbures inclinées de deux systèmes differents.* Chaque système de lignes coordonnées tracées sur la surface, détermine deux courbures inclinées ayant l'une et l'autre même composante normale à la surface. Cette composante, pour une même surface, varie d'un système à l'autre; nous nous proposons de trouver les relations qui existent entre les composantes normales des courbures inclinées de deux systèmes différents.

Soient ds, ds_1, les arcs coordonnés du nouveau système, le premier faisant les angles α, β, le second, les angles α_1, β_1 avec les arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$ du premier système; soit π_1 le rayon de courbure de la section normale à la surface suivant ds_1, on aura (5),

$$\frac{\sin^2\varphi}{\pi_1}=\frac{\sin^2\beta_1}{r}+\frac{\sin^2\alpha_1}{r_1}+2\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1}{l};$$

or, si l'on rapporte $d\sigma$ au système ds, ds_1 et qu'on représente par λ la composante normale de la courbure inclinée du nouveau système, θ étant l'angle des éléments ds, ds_1, l'on aura:

$$\frac{\sin^2\theta}{r}=\frac{\sin^2\alpha_1}{\pi}+\frac{\sin^2\alpha}{\pi_1}-2\frac{\sin\alpha\sin\alpha_1}{\lambda}.$$

Si l'on élimine π, π_1 de cette dernière équation au moyen de la précédente et de l'équation (5)' l'on trouve ϕ.

$$\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}=\frac{\sin\alpha\sin\alpha_1}{r_1}+\frac{\sin\beta\sin\beta_1}{r}+\frac{\sin\alpha\sin\beta_1+\sin\alpha_1\sin\beta}{l}, \tag{6}$$

laquelle fait connaitre la composante normale de la courbure inclinée du système de coordonnées ds, ds_1 en fonction des composantes normales des courbures propres et de la courbure inclinée du système $d\sigma$, $d\sigma_1$.

9.° *Expressions de la seconde courbure géodésique d'une courbe* ds. Si dans l'équation précédente l'on suppose les deux courbes ds, ds_1 rectangulaires entre elles, on a les conditions:

$$\alpha_1-\alpha=\beta_1-\beta=\frac{\pi}{2}\quad,\qquad \alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=\phi;$$

de plus, d'après ce qui a été établi dans le n.° 7 la composante normale $\frac{1}{\lambda}$ de la courbure inclinée devient la seconde courbure géodésique de la courbe ds. Si l'on représente cette courbure par $\frac{1}{V}$ l'on aura:

$$\frac{\sin^2\varphi}{V}=\frac{\sin 2\beta}{2r}-\frac{\sin 2\alpha}{2r_1}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{l}. \tag{6$'$}$$

Si dans cette formule on élimine les cosinus de α et de β au moyen des dernières équations (1) dans les quelles on aura remplacé les arcs par les sinus proportionnels, l'on trouve:

$$\frac{\sin^3\varphi}{V}=\sin^2\beta\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)+\sin\alpha\sin\beta\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\sin^2\alpha\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right). \tag{6$''$}$$

Si le premier système $d\sigma$, $d\sigma_1$ est aussi rectangulaire, $\frac{1}{l}$ devient la deuxième courbure géodésique $\frac{1}{v}$ de l'une des deux courbes du système, et comme les deux angles α, β sont complémentaire, l'on obtient:

$$\frac{1}{V}=\frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{\cos 2\alpha}{v}. \tag{6)'''$$

10.° *Expressions de la composante normale de la courbure inclinée.* La composante normale de la courbure inclinée d'un système de lignes coordonnées est un élément important dans la théorie des surfaces; nous allons donner l'expression de cette courbure en fonction de la courbure de la section normale suivant l'une des deux lignes coordonnées et de la deuxième courbure géodésique de cette ligne

Si dans la formule (6) on élimine α_1 et β_1 et qu'on ordonne le résultat suivant $\cos\theta$, $\sin\theta$, l'on trouve en ayant égard aux formules (5) et (6)$'$ la formule simple:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\cos\theta}{\pi}+\frac{\sin\theta}{V}, \tag{7}$$

on trouvera de même pour l'arc ds_1 en représentant par $\frac{1}{V_1}$ la deuxième courbure géodésique de cet arc, la formule analogue:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\cos\theta}{\pi_1}-\frac{\sin\theta}{V_1}. \tag{7)'$$

Ces expressions montrent la différence essentielle qui existe entre la composante normale de la courbure inclinée d'une des deux lignes coordonnées d'un système et la deuxième courbure géodésique de cette ligne. Ces deux courbures sont toujours distinctes l'une de l'autre, à moins que le système des lignes coordonnées ne soit rectangulaire. C'est dans ce cas seulement qu'elle sont égales entre elles.

La propriété principale de l'équation (7) est de montrer que la courbure $\frac{1}{\lambda}$, qui dans chaque système de coordonnées à une traduction simple permettant d'en calculer facilement l'expression analytique, a aussi une signification indépendante de tout système laquelle est exprimée par les seconds membres des équations (7).

Si l'on suppose que l'une des deux courbes ds du système ds, ds_1 soit fixe et que l'autre soit variable, formant avec la première tous les angles possibles, π et V étant alors invariables dans la formule (7), le rayon λ de la courbure inclinée projetée sur la normale à la surface, variera comme le rayon vecteur d'une ligne droite déterminée; sa valeur minimum sera donnée par:

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{V^2};$$

elle sera donc égale au quotient de l'angle de deux normales à la surface menées aux extrêmités de l'élément ds, par la longueur de cet élément. Cela résulte de ce que l'équation (7) est alors l'équation polaire d'une droite dont θ est l'angle polaire et λ le rayon vecteur.

On peut aussi obtenir la valeur de $\frac{1}{\lambda}$ indépendante de l'angle θ, en éliminant cet angle entre les deux équations (7) et (7)'. Cette expression montre alors immédiatement que la courbure $\frac{1}{\lambda}$ peut être nulle, sans qu'aucune des deux 2^{mes} courbures géodésiques le soit; il suffit qu'elles soient proportionnelles aux courbures des sections normales correspondantes.

11.° *Des rayons principaux de courbure dans un système quelconque de coordonnées.* Si l'on représente par $\tilde{\omega}$ un des deux rayons principaux de courbure, on déduit de l'équation (5) l'équation suivante:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\tilde{\omega}^2}-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}-\frac{2\cos\varphi}{l}\right)\frac{1}{\tilde{\omega}}+\left(\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{l^2}\right)=0, \tag{8}$$

qui se rapportant à un système quelconque de coordonnées jouit de ce double avantage: 1.° de donner les propriétés géométriques des rayons principaux dans un système quelconque; 2.° de fournir l'expression de ces rayons en fonction de ρ et ρ_1 propre à chaque système.

D'après Gauss, le produit des courbures de deux sections principales menées en un point d'une surface, sert de mesure à la courbure de la surface. Si l'on représente par $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ les deux rayons principaux de courbure, on déduit de l'équation précédente les deux équations:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2}=\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{l^2}, \quad \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_1}+\frac{1}{\tilde{\omega}_2}\right)\sin^2\varphi=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}-\frac{2\cos\varphi}{l}\right);$$

les conséquences de ces deux équations sont nombreuses et ont été développées dans notre mémoire *Sur la courbure des surfaces* (Comptes rendus tom. LVII).

§ 2. Applications des formules précédentes.

12.° *Avantages résultant de la courbure inclinée.* Quand on cherche dans le système curviligne ρ, ρ_1 les équations des lignes jouissant de propriétés relatives aux diverses courbures dont il a été question dans ce qui précéde, l'analyse donne des moyens surs de calculer ces équations qui sont du premier ou du second degré en $d\rho$, $d\rho_1$; mais les coefficients de ces équations fonctions de ρ, ρ_1 ne portent aucune trace des opérations qu'il a fallu faire pour les obtenir. L'introduction de la courbure inclinée produit un double avantage. Le premier et, à notre avis, le plus grand est que cette courbure donne le sens géométrique des différents coefficients de ces équations différentielles, lesquelles, ne se rapportant pas plus à un système de coordonnées qu'à un autre, sont par cela même écrites dans un système quelconque. Le second avantage est que, cette courbure se prêtant à une traduction analytique ordinairement facile, le passage de l'équation générale à celle qui se rapporte au système particulier que l'on considère, se fait sans effort et naturellement.

13.° *Des courbes dont la courbure normale à la surface est une fonction donnée.* L'équation différentielle générale de ces courbes est donnée par la formule (5), dans laquelle $\frac{1}{\pi}$ représente la fonction donnée, et dans laquelle aussi l'élément ds a été exprimé en fonction de $d\sigma$, $d\sigma_1$. Cette équation est:

$$d\sigma_1^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\pi}\right)+2\,d\sigma\,.\,d\sigma_1\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{\pi}\right)+d\sigma^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\pi}\right)=0. \qquad (11)$$

Appliquons cette formule à quelques surfaces.

Surfaces réglées. Soit une surface réglée que nous supposons obtenue par le mouvement continu d'une droite dont un point parcourt une courbe donnée. Les angles que cette droite forme avec trois axes rectangulaires fixes, et les coordonnées du point qui parcourt la directrice, sont des fonctions d'un même paramètre ρ; nous admettons la notation suivante :

$d\varepsilon$ est l'angle de deux génératrices rectilignes infiniment voisines,

dp est leur plus courte distance,

$d\omega$ est l'angle de deux plus courtes distances infiniment voisines,

dq est leur plus courte distance,

γ est l'angle d'une normale à la surface avec celle menée par le point central sur la même génératrice rectiligne,

$d\vartheta$ est l'angle de deux normales à la surface menées par deux points centraux infiniment voisins.

Cela posé, si par le centre d'une sphère l'on mène des rayons parallèles aux lignes dont il vient d'être question, on reconnaitra que les angles $d\varepsilon$, $d\omega$, $d\vartheta$ sont liés entre eux par les mêmes relations qui existent entre les angles de première, seconde et troisième courbure d'une ligne.

Prenons pour lignes coordonnées les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales; les positions des premières dépendent du paramètre ρ. Soit t la distance de la ligne orthogonale au point central, $d\rho_1$ la distance de deux lignes orthogonales infiniment voisines, $d\sigma$ l'élément de l'arc orthogonal; si l'on projette le périmètre du quadrilatére dont les côtés opposés sont $d\sigma$ et dp, sur trois axes qui auraient les directions de dp, de t, et d'une normale à ces deux lignes, on obtient les trois équations:

$$\left\{ dp = d\sigma \cos\gamma , \qquad t d\varepsilon = d\sigma \sin\gamma , \qquad d_\varrho t = -dq \right\} \tag{9}$$

desquelles on déduit:

$$\left\{ t = \rho_1 - q , \qquad \operatorname{tang}\gamma = \frac{d\varepsilon}{dp}\, t . \right\} \tag{10}$$

Nous représentons par ζ le rapport de $d\varepsilon$ à dp; or, si dans la figure sphérique dont nous venons de parler, on mène des rayons parallèles aux normales à la surface menées par les extrémités de l'arc $d\sigma$, l'on aura:

$$\frac{d\sigma_1}{l} = d_{\varrho_1}\gamma , \quad \frac{d\sigma}{l} = -d\varepsilon\cos\gamma , \quad \frac{d\sigma_1}{r_1} = 0 , \quad \frac{d\sigma}{r} = d_\varrho\gamma - d\omega .$$

D'après cela l'équation (5) devient:

$$\frac{ds^2}{\pi} = d\sigma\left(d_\varrho\gamma + 2 d_{\varrho_1}\gamma - d\omega\right) ; \tag{11}$$

or, la différentiation de la seconde des équations (10) par rapport à ρ et à ρ_1 donne :

$$\frac{d_\rho \gamma}{d\rho} = \cos^2\gamma \left\{ (\rho_1 - q) \frac{d\zeta}{d\rho} - \frac{dq}{d\rho} \zeta \right\}, \qquad \frac{d_{\rho_1}\gamma}{d\rho_1} = \zeta \cos^2\gamma.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe, elle prend la forme:

$$\frac{ds^2}{\pi} = dp \cos\gamma \left\{ -\frac{d\omega}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{\rho_1} d(\rho_1^2\zeta) - \frac{d}{d\rho}(q\zeta)\, d\rho \right\}, \tag{11''}$$

dont chaque terme se rapporte à l'un des éléments de la surface.

14.° *Conoïde droit.* Dans le cas du conoïde droit, q, $d\omega$ sont nuls, conséquemment t est égal à ρ_1; et si l'on appelle θ l'angle que t fait avec un plan fixe, passant par la directrice rectiligne de la surface que l'on prend par axe des z dans le système cartésien, et en faisant coïncider ce plan avec le plan des zx, l'on a $d\varepsilon$ égale à $d\theta$. L'équation différentielle de la courbe devient :

$$\frac{ds^2}{\pi}\, dp \sin\gamma\, d(\log \rho_1^2\zeta). \tag{12}$$

Si l'on cherche la ligne telle que la projection de l'angle de contingence sur le plan normal à la surface, soit proportionnel à la projection de la plus courte distance dp de deux génératrices infiniment voisines sur la normale à la surface, on a la condition, K étant une constante :

$$\frac{ds}{\pi} = K\, dp \sin\gamma,$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$K\, ds = d.\log(\rho_1^2\zeta),$$

dont l'intégrale est:

$$t^2\zeta = e^{K(s-s_0)},$$

s_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Si l'on cherche la courbe telle que le rapport des mêmes projections soit égal au sinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec la génératrice, on aura l'équation :

$$K\, dt = d.\log(t^2\zeta),$$

dont l'intégrale est:

$$t^2\zeta = e^{K(t-t_0)},$$

t_0 étant la constante introduite par l'intégration. Dans ces formules ζ est une fonction de l'angle θ.

15.° *Héliçoïde à plan directeur.* Cherchons la courbe tracée sur cette surface, telle que la courbure de la section normale suivant l'élément de cette courbe reste constante en un point quelconque de cette ligne; il faut introduire dans l'équation différentielle la condition que ζ est constante, et alors on obtient l'équation différentielle suivante entre θ et γ:

$$\zeta d\theta - \pi \cos\gamma\, d\gamma = d\gamma \sqrt{\pi^2\cos^2\gamma - \frac{1}{\zeta^2\cos^2\gamma}}$$

dans laquelle les variables sont séparées.

16.° *Surfaces développables.* On passe des surfaces réglées quelconques aux surfaces développables, en supposant nulle la plus courte distance dp de deux génératrices infiniment voisines; γ devient constant et égal à un angle droit; et dq devient l'élément de l'arête de rebroussement, élément que nous représentons par $d\Sigma$.

Si l'on prend pour lignes coordonnées les génératrices rectilignes, et les courbes qui les coupent orthogonalement, en remarquant que l'on a:

$$d\sigma = t\,d\varepsilon, \quad d\sigma_1 = d\rho_1, \quad \frac{d\sigma}{l} = -d\varepsilon, \quad \frac{d\sigma}{r} = d\omega,$$

et que les angles $\frac{d\sigma_1}{l}$, $\frac{d\sigma_1}{r_1}$ sont nuls, on obtient pour l'équation differentielle de la courbe entre les variables t et ρ:

$$\frac{dt^2}{d\varepsilon^2} + 2\frac{d\Sigma}{d\varepsilon}\frac{dt}{d\varepsilon} + \frac{d\Sigma^2}{d\varepsilon^2} - t\pi\frac{d\omega}{d\varepsilon} + t^2 = 0, \tag{13}$$

qui est du premier ordre et du second degré.

17.° *Surfaces coniques.* Si l'on suppose nul l'élément $d\Sigma$, on obtient l'équation différentielle relative aux surfaces coniques:

$$\frac{dt^2}{d\varepsilon^2} - \left(\pi\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)t + t^2 = 0. \tag{14}$$

Or, si l'on veut que la courbe soit telle que le rayon π de la section normale soit proportionnel à t, $\pi = Kt$, K étant une constante, ou plus généralement une fonction de ρ, la courbe cherchée aura pour équation :

$$t = c\, e^{\pm \int d\varepsilon \left(1 + K \frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dans laquelle c est la constante introduite par l'intégration.

18.° *Des lignes asymptotiques.* Ce problème dépend du précédent, puisqu'il suffit de supposer nulle la courbure $\frac{1}{\pi}$; il se ramène à une équation différentielle du premier degré toutes les fois que, la surface renfermant une famille connue de lignes asymptotiques, on fait entrer cette famille dans le système de coordonnées dont on fait usage.

Soit donc l'une des courbes coordonnées $\rho =$ const. représentant une ligne asymptotique, l'autre courbe coordonnée étant quelconque; il faudra poser nulle la courbure $\frac{1}{r_1}$, et par suite l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera :

$$d\sigma\left(\frac{d\sigma}{r} + \frac{2\, d\sigma_1}{l}\right) = 0.$$

Cette équation se compose de deux facteurs; le premier facteur égalé à zéro donne le système déjà connu de lignes asymptotiques; l'équation de l'autre système sera donc :

$$\frac{d\sigma}{r} + \frac{2\, d\sigma_1}{l} = 0,$$

qui est du premier degré.

De la surface lieu des binormales à une courbe. Pour cette surface q est nul, et l'équation précédente devient :

$$d(\rho_1^2 \zeta) = \rho_1 \frac{d\omega}{\cos^2\gamma};$$

or, si l'on élimine γ au moyen de la 2^{me} des équations (10), on trouve :

$$2\zeta \frac{dt}{d\rho} + \frac{d\zeta}{d\rho} t - \frac{d\omega}{d\rho}(1 + t^2\zeta^2) = 0;$$

c'est l'équation d'Euler; elle s'intégrera donc d'une manière générale, pourvu que l'on connaisse une solution particulière.

Conoïde droit. Soit l'équation du conoïde en coordonnées cartésiennes:

$$z = f(\theta), \quad \theta = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

L'équation de la ligne asymptotique, en remarquant que ζ est l'inverse de $f'(\theta)$, est:

$$d\,(t^2\zeta) = 0,$$

de laquelle on déduit l'équation de la courbe asymptotique en termes finies, d'une composition remarquable:

$$t^2 = c^2 f'(\theta),$$

c^2 étant la constante de l'intégration.

Dans le cas de l'héliçoïde gauche à plan directeur, $f'(\theta)$ est constante; donc la trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes est la seconde ligne asymptotique de la surface.

§ 3. **Des lignes dont la deuxième courbure géodésique est donnée.**

19.° *Équation différentielle de la courbe.* Si dans l'équation $(6)'$ on suppose que $\frac{1}{V}$ représente la fonction donnée, et qu'on y remplace ds par sa valeur en fonction des arcs coordonnés, on obtient l'équation générale de la courbe:

$$d\sigma_1^2\left(\frac{\sin\varphi}{V}+\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)+d\sigma\,d\sigma_1\left(\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{V}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r}\right)+d\sigma^2\left(\frac{\sin\varphi}{V}-\frac{1}{l}+\frac{\cos\varphi}{r}\right)=0. \qquad (15)$$

Si le système de lignes coordonnées est celui des lignes de courbure de la surface, l'équation précédente se reduit à:

$$d\sigma_1^2 + d\sigma_1\,d\sigma\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)V + d\sigma^2 = 0. \qquad (15)'$$

Surfaces de révolution. Nous prenons pour lignes coordonnées les courbes méridiennes et les cercles parallèles. Si l'on appelle t le rayon d'un parallèle, et θ l'angle que ce rayon fait avec le plan fixe des zx, l'axe de révolution coïncidant avec l'axe des z, l'équation de la surface étant $z=f(t)$, l'on aura:

$$d\sigma = t\,d\theta, \quad d\sigma_1 = dt(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{f'}{t(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

et la courbure $\frac{1}{l}$ sera nulle. Or, si pour abréger l'on pose:

$$V\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) = \frac{V}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{f'}{t}-\frac{f''}{1+f'^2}\right) = 2F,$$

l'équation différentielle de la courbe sera:

$$d\theta = \frac{dt}{t}\left(1+f'^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\{F \pm \sqrt{F^2-1}\right\},$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Supposons que la surface de révolution est un tore ayant pour équation:

$$z^2+(t-\alpha)^2 = a^2,$$

dans laquelle a et α sont des constantes. F devient égal à $\frac{V\alpha}{at}$; donc l'équation différentielle sera:

$$d\theta = \frac{V\alpha\,dt}{t^2\sqrt{a^2-(t-\alpha)^2}}.$$

Si l'on cherche la courbe telle que la courbure $\frac{1}{V}$ satisfasse à la condition $Vt = Kz$, K étant une constante, on trouve que l'équation de cette courbe en termes finis est celle de la spirale parabolique:

$$t^2 = \frac{2}{K}(\theta_0-\theta),$$

dans laquelle θ_0 est la constante introduite par l'intégration.

Si V est proportionnel à la distance t du point à l'axe de révolution, la courbe est la trajectoire des méridiennes sous angle constant.

Si V est proportionnel au rectangle tz, on obtient la spirale logarithmique.

Si enfin V est proportionnel au carré de t, la courbe a pour projection sur le plan des xy la spirale sinussoïde:

$$t-\alpha = a\sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{Ka\alpha}\right).$$

20.° *Des lignes de courbure.* Une ligne de courbure est telle que, si en deux points infiniment voisins pris sur cette ligne on mène des normales à la surface, ces deux normales se rencontrent; d'après cela l'on voit que les lignes sont caractérisées par la condition que leur seconde courbure géodésique est nulle: donc l'équation différentielle générale de ces lignes s'obtiendra en faisant $\frac{1}{V}$ nul dans l'équation (5). On obtient ainsi :

$$\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r_1}\right)d\sigma_1^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_1\,d\sigma-\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)d\sigma^2=0. \tag{16}$$

Cette équation est d'une grande simplicité; elle donne toute la théorie des lignes de courbure, tracées sur une surface quelconque et rapportées à un système quelconque de coordonnées.

Cette équation différentielle est du second degré, mais si l'une des lignes coordonnées $d\sigma$ est une. ligne de courbure, l'autre étant quelconque, l'équation passe au premier degré. En effet, si $d\sigma$ est une ligne de courbure, la 2^me^ courbure géodésique $\frac{1}{V}$ est nulle; donc d'après l'équation (7) l'on a la condition :

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{\cos\varphi}{r}=0,$$

au moyen de laquelle, éliminant $\frac{1}{\lambda}$ de l'équation différentielle, l'on obtient

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(d\sigma_1\cos\varphi-d\sigma\right)d\sigma_1=0.$$

Le facteur $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}$ ne peut pas généralement être nul pour un point quelconque de la courbe, donc on ne peut satisfaire à cette équation qu'en égalant à zero l'un ou l'autre des deux derniers facteurs. Si l'on pose $d\sigma_1$ nul, on obtient $\rho_1=const$; c'est la courbe dont $d\sigma$ est l'arc, c'est à dire l'une des courbes coordonnées. Si l'on pose :

$$d\sigma_1\cos\varphi-d\sigma=0\,, \tag{16)'$$

on a l'équation différentielle de l'autre ligne de courbure, et l'on reconnait d'après les formules (1) que c'est l'équation de la trajectoire orthogonale de la série des courbes $\rho_1 = const.$ Ce qui est directement vérifié dans les surfaces développables, et donne les lignes de courbure du second système.

21.° *Les lignes coordonnées sont deux systèmes de lignes asymptotiques.* L'équation différentielle se simplifie encore d'avantage dans ce cas. En effet, on a les deux conditions $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$ nuls: par suite l'équation différentielle est:

$$d\sigma^2 - d\sigma_1^2 = 0\,, \tag{16''}$$

c'est à dire le double système des lignes bissectrices des lignes coordonnées.

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

Paraboloïde hyperbolique. Choisissons celui donné par l'équation:

$$z = mxy,$$

m étant une constante. Quand on prend pour lignes coordonnées les deux systèmes de génératrices rectilignes dont les équations sont:

$$x = \rho, \qquad y = \rho_1,$$

on trouve

$$d\sigma = d\rho\,\sqrt{1 + m^2\rho_1^2}, \qquad d\sigma_1 = d\rho_1\,\sqrt{1 + m^2\rho^2}\,.$$

De là resulte que l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1 + m^2\rho^2}} = \frac{\pm d\rho_1}{\sqrt{1 + m^2\rho_1^2}}\,.$$

Elle a pour intégrale, K étant la constante d'intégration:

$$m\rho + \sqrt{1 + m^2\rho^2} = K\left(m\rho_1 \pm \sqrt{1 + m^2\rho_1^2}\right),$$

ou bien en passant aux coordonnées cartésiennes, et en chassant les radicaux:

$$x^2 + y^2 \pm \frac{K^2+1}{K}\,xy - \frac{(K^2-1)}{4K^2m^2} = 0.$$

Dans ces équations le signe supérieur se rapporte à la bissectrice intérieure, et le signe inférieur à la bissectrice extérieure de l'angle des lignes coordonnées, et l'on reconnait deux coniques concentriques, satisfaisant à cette condition que la diagonale du rectangle construit sur les axes reste constante pour chaque couple de coniques, et pour tous les couples.

Hyperboloïde à une nappe. Soit l'équation de l'hyperboloïde:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

les équations des deux génératrices rectilignes sont:

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\rho\left(1+\frac{x}{a}\right),\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\rho_1\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

ρ et ρ_1 étant les deux paramètres variables; on en déduit les valeurs de x, y, z:

$$x=a\,\frac{1-\rho\rho_1}{1+\rho\rho_1},\qquad y=b\,\frac{\rho+\rho_1}{1+\rho\rho_1},\qquad z=c\,\frac{\rho-\rho_1}{1+\rho\rho_1}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure dans le sistème ρ, ρ_1 devient donc, après avoir représenté par K^2 l'expression $\frac{2a^2-b^2+c^2}{b^2+c^2}$,

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1+2K^2\rho^2+\rho^4}}=\frac{d\rho_1}{\sqrt{1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4}}.$$

C'est l'équation de Lagrange; elle s'intègre par les procédés connus et donne, en appelant A la constante de l'intégration:

$$\sqrt{1+2K^2\rho^2+\rho^4}+\sqrt{1+2K^2\rho_1^2+\rho_1^4}=(\rho_1-\rho)\sqrt{A+(\rho_1+\rho)^2}.$$

Si l'on passe aux coordonnées cartésiennes, et qu'on cherche les projections des intersections de cette surface avec la proposée sur les trois plans coordonnés, on retrouve le système connu.

Heliçoïde ($z=m\theta$). On prend pour courbes coordonnées n.° (18) les deux systèmes de lignes asymptotiques; on a l'équation différentielle de la courbe:

$$d\theta=\frac{dt}{\sqrt{m^2+t^2}},$$

dont l'intégrale est:

$$t=\tfrac{1}{2}\left(e^{(\theta-\theta_0)}-m^2e^{-(\theta-\theta_0)}\right),$$

dans laquelle θ_0 est l'intégrale introduite par l'intégration.

22.° *L'une des lignes coordonnées est asymptotique.* Soit $d\sigma_1$ l'arc de cette courbe asymptotique et $d\sigma$ l'arc de la trajectoire orthogonale; il faut poser dans la formule générale $\frac{1}{r_1}$ nul et l'on obtient alors:

$$\frac{d\sigma_1^2}{l} + \frac{d\sigma d\sigma_1}{r} - \frac{d\sigma^2}{l} = 0. \tag{16}''$$

Surfaces réglées. En ayant égard aux relations établies au n.° 13, l'équation précédente devient:

$$(dt+dq)(d\gamma - d\omega) + d\varepsilon\, dp = 0.$$

Si au moyen de la relation (10) on élimine γ de cette équation, elle ne renfermera plus que les variables t et ρ, et l'on aura:

$$\zeta dt^2 + \{(dq - d\omega) + t\, d\zeta - t^2\zeta^2 d\omega\} dt + \{t\, dq d\zeta + (d\varepsilon\, dp - dq\, d\omega)(1 + \zeta^2 t^2)\} = 0,$$

qui dans le cas général n'est pas intégrable.

Conoïde droit. Pour obtenir l'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface, il suffit de poser $d\omega$ et dq nuls dans l'équation précédente qui devient:

$$\zeta dt^2 + t d\zeta\, dt + d\varepsilon\, dp\,(1 + \zeta^2 t^2) = 0.$$

§ 4. **Des courbes dont la courbure géodésique est donnée.**

23.° *Equation différentielle de ces courbes.* Si dans l'équation (4) la courbure $\frac{1}{P}$ représente la fonction donnée, et qu'on exprime ds en fonction des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, on obtiendra l'équation générale des courbes qui ont pour courbure géodésique la fonction donnée. Cette équation est:

$$d\sigma^2\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{R^2}\right) + 2d\sigma d\sigma_1\left(\frac{\cos\theta}{P^2} - \frac{1}{RL_{01}}\right) + d\sigma_1^2\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{L_{01}^2}\right) - 2d\alpha\left(\frac{d\sigma}{R} + \frac{d\sigma_1}{L_{01}} - d\alpha\right) = 0. \tag{17}$$

Cette équation différentielle est du second ordre. On peut en obtenir l'intégrale première dans quelques cas particuliers dépendants soit de la nature de la surface, soit du choix des lignes coordonnées.

Surfaces de révolution. Nous conservons le système de coordonnées dont nous avons déjà fait usage dans cette classe de surfaces. La courbure inclinée géodésique $\frac{1}{L_{01}}$ se compose de deux termes; l'un est la courbure géodésique des lignes mèridiennes, et l'autre la variation de l'angle des lignes coordonnées. Ces deux termes sont nuls; le premier parceque la ligne méridienne est une ligne géodésique, le second par suite de l'invariabilité de l'angle des lignes coordonnées.

D'après cela, l'équation (4) se réduit à:

$$\frac{ds}{P} + \frac{d\sigma}{R} + da = 0;$$

or, l'on à $\frac{d\sigma_1}{R} = -\frac{dt}{t}$, puisque la courbure géodésique $\frac{1}{R}$ est la projection de la courbure $\frac{1}{t}$ du parallèle sur le plan tangent. Conséquemment:

$$\frac{d\sigma_1}{P} = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t\cos\alpha).$$

Appliquons cette formule à quelques valeurs de $\frac{1}{P}$.

1° $\frac{1}{P}$ nul (ligne géodésique); l'équation différentielle devient:

$$\frac{d}{dt}(t\cos\alpha) = 0.$$

Si a représente une constante, l'intégration donne

$$t\cos\alpha = a.$$

En remplaçant dans celle-ci $\cos\alpha$ par sa valeur en fonction de θ et de t, on obtient l'équation des lignes géodésiques:

$$d\theta = \frac{dt}{t}\sqrt{\frac{1+f'^2}{t^2-a^2}},$$

qui est du premier ordre et dans laquelle les variables sont séparées.

2° P est une fonction de $t\cos\alpha$; soit $F'(t\cos\alpha)$ cette fonction; l'équation différentielle devient:

$$t\,dt\,\sqrt{1+f'^2} = F'(t\cos\alpha)\,d(t\cos\alpha);$$

par suite:

$$\int t\,dt\,\sqrt{1+f'^2} = F(t\cos\alpha).$$

Si cette équation peut être résolue par rapport à $t\cos\alpha$, l'on aura:

$$t\cos\alpha = \psi(t),$$

$\psi(t)$ représentant la valeur de $t\cos\alpha$. On déduira comme précédemment:

$$d\theta = \frac{\psi(t)\,dt}{t}\sqrt{\frac{1+f'^2}{t^2-\psi(t)^2}}.$$

qui ne dépend aussi que des quadratures.

On reconnaitra sans difficulté que l'on obtient aussi une intégrale première lorsque P est constant, ou bien fonction de t, ou bien enfin le produit d'une fonction de t par une puissance entière de $\cos\alpha$.

24.° *Surfaces réglées.* Si l'on remarque que pour ces sortes de surfaces, dans le système de coordonnées que nous avons employé, l'on aura:

$$\frac{d\sigma_1}{R_1} = 0, \quad \frac{d\sigma}{L_{10}} = -\,d\varepsilon\sin\gamma\,,$$

l'équation (4) deviendra:

$$d\beta = -\left(\frac{dp}{P\sin\beta\cos\gamma} + d\varepsilon\sin\gamma\right); \qquad (18)$$

d'une autre part l'on a:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{d\rho_1}{dp}\cos\gamma; \qquad (21)$$

en multipliant l'une par l'autre on obtient:

$$\operatorname{cotg}\beta\, d\beta = -\left(\frac{1}{P\sin\beta} + \zeta\cos\gamma\sin\gamma\right)d\sigma_1; \qquad (18)'$$

or, si l'on différentie les équations (10), l'on obtient:

$$\zeta d\rho_1 = \frac{d\gamma}{\cos^2\gamma} + \frac{d}{d\rho}(q\zeta)\,d\rho - \rho_1\frac{d\zeta}{d\rho}\,d\rho; \qquad (19)$$

la valeur de $d\rho_1$ étant substituée dans l'équation différentielle donne par un groupement convenable de certains termes:

$$d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) + \frac{d\gamma}{\zeta P\cos^3\gamma} - \left(\frac{1}{\zeta P\cos\gamma} + \sin\gamma\sin\beta\right)\left(\frac{\operatorname{tang}\gamma}{\zeta}\frac{d\zeta}{d\rho} - \frac{\zeta dq}{d\rho}\right)d\rho = 0. \qquad (18)''$$

Si en laissant ζ indéterminée, on admet que $\frac{1}{P}$ satisfasse à la relation

$$\frac{1}{P} = -\zeta\cos\gamma\sin\gamma\sin\beta = -\frac{\sin^2\gamma\sin\beta}{t},$$

l'équation différentielle précédente se réduit à:

$$d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma - \sin\gamma\, d\gamma\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est:

$$\sin\beta = \text{const.}$$

C'est l'équation de la trajectoire sous angle constant des génératrices rectilignes.

25.° *Conoï le droit.* Il faut faire dans l'équation, (18)″ q nul; elle devient alors:

$$d\left(\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}\right) + \frac{d\gamma}{\zeta P\cos^3\gamma} - \frac{d\zeta}{\zeta}\left(\frac{\sin\gamma}{\zeta P\cos^2\gamma} + \frac{\sin^2\gamma\sin\beta}{\cos\gamma}\right) = 0. \tag{20}$$

Si $\frac{1}{P}$ est donné par la relation:

$$\frac{1}{P} = -\frac{\lambda^2 + \sin^2\gamma\sin\beta}{t},$$

dans laquelle λ^2 est une fonction quelconque de β, l'équation différentielle devient:

$$\frac{\cos\beta d\beta}{\lambda^2} = \frac{d\gamma}{\cos\gamma\sin\gamma} - \frac{d\zeta}{\zeta} = d\log t, \tag{22}$$

dont l'intégrale est, c étant une constante arbitraire:

$$t = c\, e^{\int\frac{\cos\beta d\beta}{\lambda^2}}, \tag{23}$$

qui représente l'équation de la courbe.

En obtient une équation differentielle du premier ordre de la manière suivante.

Remarquons que l'équation (22) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2} = \frac{dt}{t},$$

et que dans le cas du conoïde droit, l'équation (21) devient:

$$\cot\!g\beta = \frac{dt}{d\theta}\zeta\cos\gamma;$$

en divisant l'une par l'autre, on obtient la relation simple :

$$\frac{\sin\beta\, d\beta}{\lambda^2} = \frac{d\theta}{\sin\gamma}. \tag{24}$$

Or, l'équation (23) transforme l'équation (10) qui devient :

$$\operatorname{tang}\gamma = c\zeta e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}};$$

on a donc finalement :

$$d\theta = \frac{\sin\beta\, d\beta}{\lambda^2} \cdot \frac{c\zeta e^{\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}}{\left(1 + c^2\zeta^2 e^{2\int \frac{\cos\beta\, d\beta}{\lambda^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

qui est du premier ordre. Lorsqu'elle sera intégrée, en éliminant β entre cette intégrale et l'équation (23), on aura l'équation de la courbe entre les deux coordonnées t et θ, projection du rayon vecteur et angle polaire.

Comme application, on peut examiner le cas ou λ^2 est de la forme $a\cos^m\beta\sin^n\beta$ dans laquelle a est une constante, m et n sont des nombres entiers.

Si λ^2 égale $\sin\beta$, l'équation différentielle sera :

$$d\theta = \frac{\zeta t\, dt}{\sqrt{1+\zeta^2 t^2}\sqrt{c^2 - t^2}};$$

si λ^2 egale $-\sin\beta$, elle sera :

$$d\theta = \frac{c\zeta\, dt}{\sqrt{1+\zeta^2 t^2}\sqrt{t^2 - c^2}}.$$

Si l'on considère l'hélicoïde à plan directeur, on reconnait que l'on arrive à des équations différentielles du 1er ordre, dans lesquelles les variables sont séparées dans les cas où la courbe est assujettie à *avoir son rayon de courbure* géodésique constant, ou bien de la forme $\sin^m\beta$, m étant un nombre entier et f une fonction telle que la différentielle :

$$\frac{d\gamma}{f\left(\frac{\tan\gamma}{\zeta}\right)\cos^{m+\zeta}\gamma},$$

soit intégrable. Cette condition à toujours lieu lorsque f est une constante.

Marseille, décembre 1867.

(La suite prochainement.)

De triangulo, cuius latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum coniugatos.

(*Auctore* H. SIEBECK, *Lignitiæ in Silesia*).

1. Statuantur quatuor sectiones conicae K_1, K_2, K_3, K_4 non omnes ad idem rete pertinentes et formentur ex ternis earum retia. Unoquoque ex quatuor retibus hoc modo ortis determinatur curva tertii ordinis, dico eam quae est locus punctorum, quorum polares respectu sectionum conicarum ad idem rete pertinentium in eodem puncto concurrunt. Sunt autem quatuor his curvis nonnulla puncta communia, eorumque punctorum numerus est par, quippe qui sit numerus punctorum, quorum bina sint poli coniugati respectu sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4. Nunc quaeritur de constructione, qua ea punctorum paria nancisci possimus.

Sit C_3^{IV} curva tertii ordinis sectionibus conicis K_1, K_2, K_3 et pariter C_3^{III} curva sectionibus conicis K_1, K_2, K_4 determinata. Inter novem puncta, in quibus hae curvae concurrunt, inveniuntur tria A, B, C, quae sunt vertices trianguli polaris sectionibus conicis K_1 et K_2 communis, quos facile intelligitur non sitos esse simul in curvis C_3^{II} et C_3^{I}. Cetera vero sex puncta curvis C_3^{IV} et C_3^{III} communia tria paria punctorum x et y, x' et y', x'' et y'' constituunt, quae sunt poli coniugati respectu uniuscuiusque quatuor sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4, ideoque quatuor curvis C_3^{IV}, C_3^{III}, C_3^{II}, C_3^{I} communia. Quum autem per duo paria polorum coniugatorum respectu alicuius sectionis conicae semper tertium par eiusmodi determinetur, ut haec tria paria constituant vertices quadrilateri, eam relationem etiam inter tria paria punctorum x et y, x' et y', x'' et y'' intercedere necesse est.

Statuamus nunc curvam C_3^{IV} recta aliqua G secari in tribus punctis p, q, r, quorum coniugata sint respectu eius curvae puncta p', q', r'. Constat autem etiam puncta p, q', r' in linea recta sita esse, et pariter puncta q, p', r', et r, p', q'. Formant sane quatuor eae rectae quadrilaterum, cuius vertices sunt illa sex puncta. Quod si eodem modo alius quadrilater construitur, constat, semper unam sectionem conicam inveniri posse, quae sit utrique quadrilatero inscripta.

Nunc sit V quadrilater quaesitus, i. e. quadrilater, cuius vertices punctorum paribus x et y, x' et y', x'' et y'' constituuntur; sit praeterea v^{IV} quadrilater, cuius vertices sunt A, B, C et horum coniugata A', B', C' respectu curvae C_3^{IV}; denique sit v^{III} quadrilater cuius vertices sunt puncta A, B, C et horum coniugata A'', B'', C'' respectu curvae C_3^{III}; tunc necesse est sectionem conicam quadrilateris V et v^{IV} inscriptam congruere cum sectione conica quadrilateris V et v^{III} inscripta. Sunt enim his duabus sectionibus conicis septem tangentes communes, quippe quatuor rectae quadrilaterum V constituentes et tres rectae AB, BC, CA. Quadrilateris V, v^{IV}, v^{III} igitur eadem sectio K inscribi potest, eaque per quinque tangentes AB, BC, CA, $A'B'C'$, $A''B''C''$, quae facile construi possunt, plane determinata est.

Aliam sectionem K' quadrilatero V inscriptam eadem ratione nanciscimur combinando quatuor sectiones conicas datas qualibet alia ratione. Construatur ex. gr. triangulus polaris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sectionibus conicis K_1 et K_3 communis, cuius verticibus respectu curvae C_3^{IV} puncta $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ et respectu curvae C_3^{II} puncta $\mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''$ sint coniugata. Tunc ea sectio conica K' per quinque rectas eam tangentes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ determinata est.

2. Ex antecedentibus statim sequitur solutio problematis ab initio quaestionis nostrae propositi, in qua omnino curvis tertii ordinis non utemur.

> *Problema.* Invenire tria punctorum paria, quae sint respectu quatuor sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4 non ad idem rete pertinentium poli coniugati.

Solutio. Quaerantur vertices A, B, C trianguli respectu utriusque sectionum conicarum K_1 et K_2 polaris et ducantur polares horum trium punctorum et respectu curvae K_3 et respectu curvae K_4. Secant autem polares punctorum A, B, C respectu sectionis conicae K_3 latera resp. opposita trianguli ABC in tribus punctis A', B', C', quae in linea recta G' sita sunt; nec non polares eorundem punctorum respectu sectionis conicae K_4 latera opposita trianguli ABC in tribus punctis A'', B'', C'', quae et ipsa in linea recta G'' sita sunt. Construatur nunc sectio conica K determinata quinque tangentibus AB, BC, CA, G', G''.

Quaerantur deinde vertices $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ trianguli polaris duabus aliis ex datis quatuor sectionibus conicis communis ex. gr. K_1 et K_3, e quibus eadem ratione, ut supra, sectio conica K' derivatur.

Quod si quadrilaterum construimus, qui non solum sectioni conicae K, sed etiam sectioni conicae K' circumscriptus est, tria paria verticum oppositorum eius quadrilateri x et y, x' et y', x'' et y'' erunt paria punctorum quaesita.

Adnotatio. Quodvis ex tribus punctorum paribus modo repertis e polis coniugatis constat, non modo respectu quatuor sectionum datarum, sed omnino respectu uniuscuiusque sectionis conicae, quae ad aliquod ex quatuor retibus supra commemoratis pertinet. Exinde sequitur, datis quatuor sectionibus conicis in constructione modo explanata variis modis quatuor alias substitui posse, talisque substitutio opportunam se praestabit, si inter puncta A, B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nonnulla sunt imaginaria.

3. Ex antecedenti solutione statim derivamus solutionem huiusce problematis:

> *Problema.* Dati sint duo fasces secundi ordinis B_{12} et B_{34}. Quaeruntur tres rectae aa', $a'a''$, $a''a$, in quibus sectiones conicae ad fascem B_{12} pertinentes respective eadem segmenta abscindant atque sectiones conicae ad fascem B_{34} pertinentes.

Solutio. Sint K_1 et K_2 duae quaelibet sectiones conicae ad fascem B_{12}, K_3 et K_4 duae sectiones conicae ad fascem B_{34} pertinentes. Nunc (§ 2) quaerantur tria punctorum paria x et y, x' et y', x'' et y'', quae polis coniugatis respectu sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4 constituantur. Rectae xy, $x'y'$ $x''y''$ triangulum $aa'a''$ formantes erunt lineae quaesitae.

Triangulum $aa'a''$, cuius latera polos coniugatos respectu sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4 continent, nominabimus triangulum *chordalem* earum quatuor sectionum conicarum sive etiam fascium B_{12} et B_{34}.

4. Quum supra viderimus, punctorum paria x et y, x' et y', x'' et y'' cadere in vertices oppositos quadrilateri V, patet rectas aa', $a'a''$, $a''a$ diagonales esse eius quadrilateri. Puncta a', x, a'', y igitur, secundum notam quadrilateri legem, harmonica erunt pariterque et puncta a, x', a'', y', et puncta a, x'', a', y''. Unde sequitur sectionem conicam $\mathfrak{K}_{12}$, quam per basem B_{12} et punctum a' ponere liceat, etiam per punctum a'', nec non per punctum a transire; pariterque per basem B_{34} sectio conica aliqua $\mathfrak{K}_{34}$ poni potest triangulo $aa'a''$ circumscripta. Quum autem (§ 2, adnotatio), si K_1 et K_2 sunt duae

sectiones conicae ad fascem B_{12}, K_3 et K_4 sectiones conicae ad fascem B_{34} pertinentes, liceat has quatuor curvas qualibet ratione inter se commutare, habemus hoc *theorema*:

> Si $\alpha\alpha'\alpha''$ est triangulus chordalis sectionum conicarum K_1, K_2, K_3, K_4, per quatuor puncta intersectionis duarum quarumlibet harum curvarum sectio conica poni potest triangulo illi circumscripta.

Sit nunc venia nobis explanandi nonnulla ex variis problematibus, in quibus solvendis hoc theorema se utile praestat.

I.

5. Si situs cuiuslibet puncti lineae rectae G determinatur intervallo x, quo abstet a puncto aliquo fixo ejus rectae, vel etiam ratione distantiarum illius puncti a duobus punctis fixis, per aequationem:

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0,$$

in qua sint f, φ, ψ functiones integrae rationales quarti ordinis variabilis x, λ et μ autem parametri, pro variis valoribus, qui parametris tribui possunt, varia systemata quaternorum punctorum repraesentantur. Licet autem duas radices eius aequationis sumere ex arbitrio, unde provieniunt duae aequationes determinandis parametris inservientes; parametris vero determinatis, etiam caeterae duae radices aequationis $f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0$ determinatae sunt.

Duabus igitur radicibus eius aequationis ex arbitrio sumtis, caeterae duae determinatae sunt; numerus vero systematum quaternorum punctorum, quae illa aequatione repraesentantur, est dupliciter infinitus. Per tria autem systemata, dummodo involutionem non forment, caetera systemata determinata sunt, id quod iam ex numero datarum functionum f, φ, ψ sequitur, quarum quaelibet unum systema porrigit.

Licet autem ea, quae modo explanavimus, transferre ad series punctorum curvatas i. e. in sectione conica sitas. Si enim construimus sectionem aliquam conicam, quae per rectam fixam G tangitur, cuivis puncto x eius rectae punctum ξ sectionis conicae ita correspondet, ut ξ sit punctum contactus rectae e puncto x ductae et sectionem conicam tangentis. Nanciscimur ita in sectione conica quoque seriem systematum quaternorum punctorum tali relatione inter se junctorum, ut duobus punctis systematis alicuius datis duo caetera puncta pariter sint determinata; nec non per tria talium systematum involutionem non formantium series omnium systematum, quae eadem aequatione repraesentantur, determinata est.

Eiusmodi series systematum quaternorum punctorum facile construuntur sumendo ex arbitrio tria puncta α, α', α'' non sita in sectione conica K. Quod si triangulo $\alpha\alpha'\alpha''$ complures sectiones conicas circumscribimus, non in eodem quarto puncto concurrentes, quae sectionem conicam K in quaternis punctis P_1, P_2, P_3, P_4; P_1', P_2', P_3', P_4'; P_1'', P_2'', P_3'', P_4''; etc. secant, per duo quaelibet P_1 et P_2 e punctis alicuius ex his systematibus caetera duo P_3 et P_4 pariter determinata sunt. Per tria puncta α, α', α'' igitur series systematum quaternorum punctorum, quae sunt radices simultaneae aequationis quarti ordinis, plane determinatur; et viceversa per tria ex illis systematibus, non modo caetera systemata, *sed etiam puncta* α, α', α'' determinantur.

Adducimur ita ad hoc problema:

Problema. Data sint in sectione conica tria quaelibet systemata quaternorum punctorum

$$P_1, P_2, P_3, P_4;\quad P_1', P_2', P_3', P_4';\quad P_1'', P_2'', P_3'', P_4'',$$

involutionem non formantia. Quaeruntur caetera systemata quaternorum punctorum eiusdem sectionis conicae, quae ad eandem seriem pertinent.

Solutio. Ex illis, quae modo praemisimus, sequitur, problema in hoc reduci posse: tria puncta α, α', α'' ita determinare, ut per quodvis trium systematum datorum

$$P_1, P_2, P_3, P_4;\quad P_1', P_2', P_3', P_4';\quad P_1'', P_2'', P_3'', P_4'',$$

in sectione conica K sitorum, sectio conica poni possit triangulo $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ circumscripta. Ponatur ad eum finem per quodcumque horum trium systematum sectio conica quaelibet U, U', U'', et construatur triangulus chordalis sectionum conicarum K, U, U', U'' (§ 3). Vertices eius trianguli α, α', α'' sunt puncta quaesita, quippe qui cum quatuor punctis intersectionis duarum quarumlibet ex. gr. cum punctis P_1, P_2, P_2, P_4 in eadem sectione conica sint sita (§ 4). Quaecunque igitur sectio conica triangulo $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ circumscripta sectionem conicam K secabit in quatuor punctis problemati satisfacientibus.

6. Si statuimus duas aequationes $f+\lambda\varphi+\mu\psi=0$ et $f_1+\lambda_1\varphi_1+\mu_1\psi_1=0$, in quibus functiones $f, \varphi, \psi, f_1, \varphi_1, \psi_1$ cunctae quarti ordinis variabilis x et $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ parametri sunt, his parametris tales valores tribuere licet, ut ambae aequationes eisdem radicibus gaudeant. Id calculo nanciscimur ponendo rationes coefficientium earundem dignitatum variabilis x aequales, unde redundant quatuor aequationes determinandis quatuor parametris inservientes. Geometriae vero syntheticae ingenio adaptata enunciatio eius problematis haec est:

Problema. Data sint in eadem sectione conica K sex systemata quaternorum punctorum

$$P_1, P_2, P_3, P_4; \quad P_1', P_2', P_3', P_4'; \quad P_1'', P_2'', P_3'', P_4'';$$
$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; \quad Q_1', Q_2', Q_3', Q_4'; \quad Q_1'', Q_2'', Q_3'', Q_4''.$$

Per tria systemata P determinata est series R systematum; pariter per tria systemata Q series S. Quaeritur systema quatuor punctorum ambabus seriebus commune.

Solutio. Quaerantur tria puncta $\alpha, \alpha', \alpha''$ talia, ut quaevis sectio conica triangulo $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ circumscripta sectionem conicam K in quatuor punctis eiusmodi secet, quae forment systema ad seriem R pertinens (§ 5). Pariter quaerantur tria puncta $\beta\,\beta'\,\beta''$ eadem relatione iuncta cum serie S. Problema nunc statim reducitur in hocce: Triangulo $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ sectionem conicam U et triangulo $\beta\,\beta'\,\beta''$ sectionem conicam V ita circumscribere, ut quatuor puncta intersectionis sectionum conicarum U et V cuncta in sectione conica K sita sint.

Sint M et m puncta intersectionis rectae $\alpha'\,\alpha''$ et sectionis conicae K. Quodsi sectiones conicae K, U, V in eisdem quatuor punctis concurrere debent, oportet ut de quavis recta tria segmenta abscindant involutionem formantia. Exinde sequitur sectionem conicam V in recta $\alpha'\,\alpha''$ segmentum tale intercipere, ut pertineat ad involutionem duobus segmentis $\alpha'\,\alpha''$ et Mm constitutam. Si igitur per quinque puncta $\beta, \beta', \beta'', \alpha', \alpha''$ sectionem conicam ponimus, nec non per quinque puncta $\beta, \beta', \beta'', M, m$ aliam sectionem conicam, quartum punctum p intersectionis earum necessario in sectione conica quaesita V situm erit.

Quam constructionem repetentes exeundo ab alio latere trianguli $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ quintum punctum q sectionis conicae V nanciscimur. Tunc quinque punctis $\beta, \beta', \beta'', p, q$ sectio conica V plane determinata est. Eadem ratione exeundo a triangulo $\beta\,\beta'\,\beta''$ constructionem sectionis conicae U efficimus.

7. Fieri potest, ut series R et S non modo unum systema quatuor punctorum, sed duo habeant communia. In eo casu his duabus seriebus infinitum numerum systematum esse communem facile intelligitur involutionem quarti ordinis formantium. Idque semper accidit, si in aequationibus $f+\lambda\varphi+\mu\psi=0$ et $f_1+\lambda_1\varphi_1+\mu_1\psi_1=0$ valores parametrorum, quos nanciscimur ponendo coefficientes earundem dignitatum variabilis x in ambabus aequationibus aequales, indeterminati fiunt, i. e. sub forma $\frac{0}{0}$ proveniunt. In eo casu puncta p et q, quibus sectio conica V in antecedentis problematis solutione determinatur, coincident, ita ut quaelibet sectio conica per quatuor puncta β, β', β'', p posita problemati satisfaciat.

Obtinemus igitur in hoc casu loco duarum sectionum conicarum U et V duos fasces sectionum conicarum, quorum alter alteri anharmonice correspondet. Qui fasces quum curvam quarti ordinis gignant, cuius altera pars sit sectio conica K, altera pars et ipsa est sectio conica ambas bases fascium secundi ordinis continens. In hoc casu igitur per sex puncta $\alpha, \alpha', \alpha''$, β, β', β'' sectionem conicam ponere licet.

8. Constructio a nobis in § 6, allata etiam tum adhiberi potest, quum sex systemata data quaternorum repraesentatorum per literas

$$p_1, p_2, p_3, p_4; \quad p_1', p_2', p_3', p_4'; \quad p_1'', p_2'', p_3'', p_4'';$$
$$q_1, q_2, q_3, q_4; \quad q_1', q_2', q_3', q_4'; \quad q_1'', q_2'', q_3'', q_4''$$

non in sectione conica, sed in recta G sint sita. Construatur in eo casu quaelibet sectio conica rectam G tangens, et ducantur e datis quatuor et viginti punctis rectae illam tangentes, quarum puncta contactus

$$P_1, P_2, P_3, P_4; \quad P_1', P_2', P_3', P_4'; \quad P_1'', P_2'', P_3'', P_4'';$$
$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; \quad Q_1', Q_2', Q_3', Q_4'; \quad Q_1'', Q_2'', Q_3'', Q_4''$$

duas series R et S systematum in sectione conica determinant. Quod si quaerimus systema $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ seriebus R et S commune (§ 6) et ducimus rectas sectionem conicam in his quatuor punctis tangentes, puncta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, in quibus eae tangentes rectam G perrumpunt, erunt puncta quaesita.

9. Solutiones modo expositae utiles se praestant, si agitur de inquirendis punctis intersectionis sectionum conicarum rectarumve et curvarum altiorum ordinum. Conatum igitur faciamus nonnulla eius generis problemata solvendi.

Problema. Data sit sectio conica K et praeterea octo puncta $a, b, c, d, e, \alpha, \alpha', \alpha''$ non in K sita, in hac ipsa autem duo puncta o et p. Per septem puncta a, b, c, d, e, o, p ponere curvam tertii ordinis U et per tria puncta $\alpha, \alpha', \alpha''$ ponere sectionem conicam V ita, ut curvae U et V concurrant in quatuor punctis in sectione conica K sitis.

Solutio. Per septem puncta a, b, c, d, e, o, p et duo puncta P_1 et P_2 ex arbitrio in sectione conica K sumta ponatur curva tertii ordinis U_1. Quam si statuimus sectione conica K praeterea in punctis P_3 et P_4 secari, recta $\mathfrak{B}$ puncta P_3 et P_4 iungens facile construi potest. Duabus rectis $P_1 P_2$ et $\mathfrak{B}$ autem sectio conica V_1 constituitur. Quodsi constructionem modo expositam bis repetentes per septem puncta a, b, c, d, e, o, p et per bina puncta ex arbitrio in K sumta duas curvas tertii ordinis U_1' et U_1'' ponimus sectionem conicam K in quaternis punctis P_1', P_2', P_3', P_4' et $P_1'', P_2'', P_3'', P_4''$ secantes, nanciscimur praeter V_1 duas sectiones conicas V_1' et V_1'', quae et ipsae ex binis rectis constant. Nunc construatur triangulus $\beta\beta'\beta''$ chordalis (§ 3) quatuor sectionum conicarum K, V_1, V_1', V_1''. Quodsi triangulis $\alpha\alpha'\alpha''$ et $\beta\beta'\beta''$ duas sectiones conicas tales circumscribimus (§ 6), ut puncta intersectionis $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ in K sint sita, per undecim puncta $a, b, c, d, e, o, p, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ curva tertii ordinis U poni poterit, pariterque per septem puncta $\alpha, \alpha', \alpha'', \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ sectio conica V.

Demonstratio huius solutionis inde petenda est, quod tria systemata quaternorum punctorum P_1, P_2, P_3, P_4; P_1', P_2', P_3', P_4'; $P_1'', P_2'', P_3'', P_4''$ seriem systematum constituunt, quae per aequationem formae $f+\lambda\varphi+\mu\psi=0$ repraesentari possunt.

10. *Problema.* Data sint decem puncta $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'$ non in sectione conica K sita et praeterea in hac ipsa quatuor puncta o, p, o', p'. Quaeruntur duae curvae tertii ordinis, quarum altera per septem puncta a, b, c, d, e, o, p, altera per septem puncta $a', b', c', d', e', o', p'$ ita posita sit, ut ambae curvae concurrant in quatuor punctis sitis in sectione conica K.

Solutio. Exeuntes a punctis a, b, c, d, e, o, p construamus eadem ratione, ut in antecedenti solutione, sectiones conicas V_1, V_1', V_1'', e binis rectis compositas, nec non triangulum chordalem $\alpha\alpha'\alpha''$ quatuor sectionum conicarum K, V_1 V_1', V_1''. Pariter exeuntes a punctis $a', b', c', d', e', o', p'$ construamus sectiones conicas v_1, v_1', v_1'' et triangulum chordalem $\beta\beta'\beta''$ quatuor sectionum conicarum K, v_1, v_1', v_1''. Construantur denique duae sectiones conicae U et V, quarum altera triangulo $\alpha\alpha'\alpha''$, altera triangulo $\beta\beta'\beta''$ ita sit circumscripta, ut ambarum puncta intersectionis A, B, Γ, Δ in sectione conica K sint sita. Tum et per undecim puncta a; b, c, d, e, o, p, A, B, Γ, Δ et per puncta $a', b', c', d', e', o', p'$, A, B, Γ, Δ curva tertii ordinis C_3 et C'_3 poni poterit.

11. *Problema.* Data sint quatuor et viginti puncta $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, a', b', c', d', e', f', g', h', i', k', l', m'$; praeterea recta G per nullum horum punctorum transiens. Quaeruntur:

1) duae curvae quarti ordinis u et v, quarum altera per duodecim puncta $a, b, c \ldots m$, altera per puncta $a', b', c' \ldots m'$ ita posita sit, ut e sedecim punctis intersectionis quatuor in recta G sita sint;

2) curva tertii ordinis, quae per caetera duodecim puncta intersectionis curvarum u et v poni potest.

Solutio. Sint p_1 et p_2, p_1' et p_2', p_1'' et p_2'', q_1 et q_2, q_1' et q_2', q_1'' et q_2'' sex paria punctorum ex arbitrio in G sumta et ponantur per duodecim puncta $a, b, c, \ldots, m$ tres curvae quarti ordinis U, U', U'', quarum prima per puncta p_1 et p_2, secunda per p_1' et p_2', tertia per p_1'' et p_2'' transeat (*). Secant autem eae curvae rectam G praeterea in binis punctis p_3 et p_4, p_3' et p_4', p_3'' et p_4'', quae regulae et circuli ope inveniri possunt.

Pariter per duodecim puncta $a', b', c', \ldots, m'$ tres curvae quarti ordinis V, V', V'' ponantur, rectam G in quaternis punctis q_1, q_2, q_3, q_4; q_1', q_2', q_3', q_4'; $q_1'', q_2'', q_3'', q_4''$ secantes. Systemata quaternorum punctorum:

$$p_1, p_2, p_3, p_4;\quad p_1', p_2', p_3', p_4';\quad p_1'', p_2'', p_3'', p_4'';$$
$$q_1, q_2, q_3, q_4;\quad q_1', q_2', q_3', q_4';\quad q_1'', q_2'', q_3'', q_4''$$

duas series R et S constituunt, quae unum systema A, B, Γ, Δ commune habent, quod ope § 8 inveniri potest. Tum per sedecim puncta $a, b, c \ldots, m$, A, B, Γ, Δ, pariterque per sedecim puncta $a', b', c' \ldots, m'$, A, B, Γ, Δ duae curvae quarti ordinis u et v poni poterunt.

Ad construendam curvam tertii ordinis, quae per caetera duodecim puncta intersectionis curvarum u et v transit, iungamus aliquod a ex datis punctis alterius curvae u cum aliquo a' ex datis punctis alterius v. Inda-

(*) Cfr. Jonquières, *Essai sur la génération des courbes*, §§ 39, 40, 45.

gentur deinde terna puncta a_1, a_2, a_3 et a_1', a_2', a_3', in quibus curvae u et v resp. secantur per rectam aa', id quod per notam constructionem effici potest. Quodsi est π punctum intersectionis rectarum aa' et G, quaerantur tria puncta π_1, π_2, π_3, ita in recta aa' sita, ut tria systemata quaternorum punctorum a, a_1, a_2, a_3; a', a_1', a_2', a_3'; π, π_1, π_2, π_3 involutionem forment. Tunc erunt π_1, π_2, π_3 tria puncta curvae quaesitae tertii ordinis. Plura puncta eiusdem curvae obtinemus iungendo bina alia ex datis punctis, ex. gr. b et b', etc.

12. *Problema.* Data sint sedecim puncta $a, b, c, d, e, f, g, h, a', b', c', d', e', f', g', h'$ non in sectione conica K sita, in hac ipsa autem quatuor puncta l, m, n, o. Quaeruntur:

1) duae curvae quarti ordinis u et v, quarum altera per duodecim puncta $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, o$, altera per duodecim puncta $a', b', c', d', e', f', g', h', l, m, n, o$ transeat, tales, ut in quatuor punctis sectionis conicae K concurrant;

2) sectio conica, in qua caetera octo puncta intersectionis curvarum C_4 et C'_4 sita sunt.

Solutio. Per duodecim puncta $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, o$ et per duo puncta p et p_1 ex arbitrio in K sumta ponatur curva quarti ordinis U, sectionem conicam K praeterea in duobus punctis p_2 et p_3 secans. Recta p_2 et p_3 tunc facile construi potest; neque ad id opus est, ut curva U construatur. Sectio conica autem, quae e duabus rectis pp_1 et $p_2 p_3$ constat, per literam K_1 designetur.

Eadem ratione e duabus aliis curvis U' et U'' quarti ordinis per puncta $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, o$ transeuntibus duae aliae sectiones conicae K_1' et K_1'' e binis rectis compositae derivantur. Construatur denique triangulus $\alpha\alpha'\alpha''$ chordalis sectionum conicarum K, K_1, K_1', K_1''.

Plane eadem ratione ex duodecim punctis $a', b', c', d', e', f', g', h', l, m, n, o$ sectiones conicae k_1, k_1', k_1'' atque ex his coniunctis cum K triangulus chordalis $\beta\beta'\beta''$ derivantur. Quodsi triangulis $\alpha\alpha'\alpha''$ et $\beta\beta'\beta''$ duas sectiones conicas tales circumscribimus, ut in quatuor punctis $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ sectiones conicae K concurrant (§ 6), et per sedecim puncta $a, b \ldots h, l, m, n, o, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$, et per sedecim puncta $a', b' \ldots h', l, m, n, o, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ curva quarti ordinis u et v poni poterit.

Ad construendam denique sectionem conicam per caetera octo puncta intersectionis curvarum u et v transeuntem, per a et a' recta G ponatur, alteram curvam u in punctis a_1, a_2, a_3, alteram v in punctis a_1', a_2', a_3' secans. Quodsi π, π_1, sunt puncta, in quibus recta G sectionem conicam K perrumpit, indagentur duo puncta π_2 et π_3 ita in K sita, ut tria systemata quaternorum punctorum a, a_1, a_2, a_3; a', a_1', a_2', a_3'; π, π_1, π_2, π_3 involutionem forment. Puncta π_2 et π_3 tum sita erunt in sectione conica quaesita. Plura puncta eiusdem sectionis conicae inveniuntur iungendo bina alia ex datis punctis, ex. gr. b et b', etc.

13. *Problema.* Data sit sectio conica K; praeterea autem novem puncta $a, b, c, d, e, f, p, q, r$, inter quae tria p, q, r in K sint sita. Quaeruntur tria puncta intersectionis curvae K et curvae tertii ordinis per novem puncta data determinatae.

Solutio. Per septem puncta a, b, c, d, e, p, q et duo puncta P_1 et P_2 ex arbitrio in K sumta ponatur curva tertii ordinis U. Quam si statuimus sectione conica K praeterea in punctis P_3 et P_4 secari, recta $\mathfrak{C}$ ea puncta iungens facile construi potest. Duabus rectis autem $P_1 P_2$ et $\mathfrak{C}$ sectio conica K_1 constituitur. Quodsi praeterea eadem ratione per septem puncta a, b, c, d, e, p, q et per bina puncta ex arbitrio in K sumta duas curvas tertii ordinis U' et U'' ponimus, sectionem conicam K in quaternis punctis P_1', P_2', P_3', P_4' et P_1'', P_2'', P_3'', P_4'' resp. secantes, nanciscimur praeter K_1 duas sectiones conicas K_1' et K_1'' e binis rectis compositas. Construatur autem triangulus chordalis $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ sectionum conicarum K, K_1, K_1', K_1''. Prorsus eadem ratione per septem puncta a, b, c, d, f, p, q tres curvas tertii ordinis V, V', V'' ponamus, e quibus sectiones conicae k_1, k_1', k_1'' e binis rectis compositae derivantur, quae cum sectione conica K coniunctae originem dant triangulo chordali $\beta\,\beta'\,\beta''$.

Quum autem series curvarum tertii ordinis per puncta a, b, c, d, e, p, q positarum cum serie curvarum per puncta a, b, e, d, e, f, p, q positarum non unam modo curvam, sed infinitam curvarum copiam habeat communem, quippe earum, quae per octo puncta a, b, c, d, e, f, p, q transeant, triangulis $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ et $\beta\,\beta'\,\beta''$ (§ 7) infinitus numerus sectionum conicarum eiusmodi circumscribi potest, ut in quatuor punctis sectionis conicae K concurrant. E quibus si eas eligimus, quae per punctum r transeunt, et quaerimus caetera tria puncta B, Γ, Δ intersectionis, problema solutum est.

II.

14. Methodi, quibus geometrae uti solent, quando agitur de construendis curvis vel tertii, vel quarti ordinis resp. per novem, vel quatuordecim puncta data ponendis, in eo videntur imperfectae esse, quod saepe earum usus fieri non possit, quando e punctis datis plura sint imaginaria. Si enim, ex. gr., problema hocce solvendum est: « dato puncto aliquo P et datis praeterea sectionibus conicis K_1, K_2, K_3, K_4, quarum binis K_1 et K_2, K_3 et K_4 quatuor puncta *imaginaria* sint communia, construere curvam tertii ordinis et per punctum P transeuntem », methodi vulgares se non praestant sufficientes. Quin etiam tunc ne hocce quidem problema: « datis octo punctis imaginariis invenire nonum punctum (reale), in quo omnes curvae tertii ordinis coeant per data octo puncta positae » per methodum vulgarem solvi possit. Maior etiam difficultas nobis occurrit, si agitur de construendis curvis quarti ordinis per data puncta imaginaria transeuntibus.

Periculum facientes solvendi eiusmodi problemata mox observare possumus, quam vario usu sit triangulus $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, quem diximus *chordalem* quatuor sectionum conicarum. Quare etiam de ea materia nonnullas lucubrationes proferendi nobis sit venia.

Sint B_{12} et B_{34} duo fasces secundi ordinis, $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ triangulus eorum chordalis. Quodsi per seriem sectionum conicarum U, U', U'', ... ad fascem B_{12} pertinentium seriem segmentorum Mm, $M'm'$, $M''m''$ ... in recta $\alpha'\,\alpha''$ formari statuimus, series sectionum conicarum V, V', V'' ... ad alterum fascem pertinens reperiri potest, quae eadem segmenta in recta $\alpha'\,\alpha''$ abscindant. Quare quum altera series alteri anharmonice correspondeat, patet per eas curvam quarti ordinis nasci, quae in rectam $\alpha'\,\alpha''$ et curvam tertii ordinis C_3 dissolvitur. Ad seriem U, U', U''... vero etiam ea sectio conica $\mathfrak{K}_{12}$ pertinet, quae triangulo $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ circumscripta est (§ 4); nec non ad seriem V, V', V''... ea sectio conica $\mathfrak{K}_{34}$, quae eidem triangulo circumscripta est. Quodsi P est quartum punctum intersectionis curvarum $\mathfrak{K}_{12}$ et $\mathfrak{K}_{34}$ (semper reale), patet curvam C_3 per puncta P et α transire.

Eadem ratione e recta $\alpha\,\alpha'$ curva tertii ordinis C_3'' derivatur, puncta P et α'', neq non e recta $\alpha\,\alpha''$ curva C_3' puncta P et α' continens. Formant igitur octo puncta, e quibus bases fascium B_{12} et B_{34} consistunt, cum puncto P basem fascis tertii ordinis. Unde solutio huiusce problematis redundat:

Problema. Data sint octo puncta sive realia, sive *imaginaria.* Quaeritur nonum punctum (reale), in quo omnes curvae tertii ordinis per octo illa puncta positae conveniunt.

Solutio. Quotcumque ex octo punctis datis sint imaginaria et quacunque ratione data sint, semper effici poterit, ut data octo puncta in duo systemata quaternorum punctorum segregentur, quorum utrumque tanquam basis (vel realis, vel imaginaria, vel ex parte imaginaria) fascis secundi ordinis considerari possit. Significentur autem hae duae bases per literas B_{12} et B_{34}.

Construatur nunc triangulus chordalis $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ fascium B_{12} et B_{34}, cuius saltem unus vertex α realis erit. Ponantur deinde per bases fascium B_{12} et B_{34} duae sectiones conicae $\mathfrak{K}_{12}$ et $\mathfrak{K}_{34}$ in α concurrentes, quae necessario etiam per α' et α'' transibunt (§ 4). Quartum punctum P intersectionis curvarum $\mathfrak{K}_{12}$ et $\mathfrak{K}_{24}$, quod semper reale est, punctum quaesitum erit.

15. Ex antecedentibus facile intelligitur, inter omnes curvas tertii ordinis, quae per bases fascium B_{12} et B_{34} poni possint, tres curvas C_3, C_3', C_3'' reperiri, quarum respectu bases illae eisdem punctis oppositis (*) gaudeant, quippe quum α sit punctum illis basibus oppositum respectu curvae C_3, α' respectu curvae C_3', α'' respectu curvae C_3''.

Respectu uniuscuiusque caeterarum curvarum $\mathfrak{W}$ basibus B_{12} et B_{34} diversa puncta sunt opposita, inter quae relatio reciproca intercedit, quae, quamvis iam nota sit (**), a nobis consideretur. Sint o et o' puncta basibus B_{12} et B_{34} respectu curvae $\mathfrak{W}$ opposita. Statim autem intelligitur punctum o in sectione conica $\mathfrak{K}_{34}$, o' in $\mathfrak{K}_{12}$ situm esse. Quodsi per utramque basium B_{12} et B_{34} ponimus seriem sectionum conicarum U, U', U''... et V, V' V''... in recta $\alpha'\,\alpha''$ eandem seriem segmentorum Mm, $M'm'$, $M''m''$... abscindentium, atque si praeterea statuimus, sectiones conicas U et V in punctis λ et μ non in recta $\alpha'\,\alpha''$ sitis coire, pariter U' et V' in λ' et μ', U'' et V'' in λ'' et μ'', patet rectas $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\mu''$... in puncto α utrique basium B_{12} et B_{34} respectu curvae C_3 opposito concurrere. Si autem agitur de constructione curvae $\mathfrak{W}$ oportet, ut e puncto o radios p, p', p''... resp. sectionibus conicis U, U', U'',... anharmonice correspondentes ducamus, vel etiam ex puncto o' radios q, q', q''... anharmonice correspondentes sectionibus conicis V, V', V''... Tres fasces autem anharmonici $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\mu''$...; p, p', p''...; q, q', q''... sibi invicem ita correspondebunt, ut bini radii correspondentes primi et secundi

(*) Cfr. Cremona, *Introduzione*, § 65, 1.°
(**) Cfr. Cremona, *Introduzione*, § 67.

fascis in $\mathfrak{K}_{34}$, primi et tertii fascis vero in $\mathfrak{K}_{12}$ coeant. Radio igitur primi fascis per punctum P transeunti correspondebunt radii caeterorum duorum fascium et ipsi per P transeuntes. Igitur puncta o et o' cum puncto P semper in linea recta sita sunt.

Unde facile deducimus problematis huiusce solutionem:

> *Problema.* Datis duobus fascibus secundi ordinis B_{12} et B_{34}, quorum bases vel reales, vel *imaginarias* sumere licet, dato praeterea puncto reali P, invenire puncta o et o' opposita basibus illorum fascium respectu curvae tertii ordinis, quae per novem puncta B_{12}, B_{34}, P poni potest.

Solutio. Construatur triangulus chordalis $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ fascium B_{12} et B_{34}, et circumscribantur ei triangulo duae sectiones conicae $\mathfrak{K}_{12}$ et $\mathfrak{K}_{34}$, quarum altera ad fascem B_{12}, altera ad fascem B_{34} pertineat, et quae in puncto Q concurrant. Quodsi U est sectio conica ad fascem B_{12} pertinens, quae per punctum P transit, atque si M, m sunt puncta, in quibus ea sectio conica rectam $\alpha'\,\alpha''$ secat, per puncta M, m sectio conica V poni potest ad fascem B_{34} pertinens. Sectiones conicae U et V autem duo puncta λ et μ non in recta $\alpha'\,\alpha''$ sita habebunt communia. Recta $\lambda\,\mu$ vero per punctum α transit (§ 15) et praeterea sectionem conicam $\mathfrak{K}_{34}$ in puncto aliquo n secat. Quodsi rectam $Q\,n$ ducimus, quae sectionem conicam $\mathfrak{K}_{34}$ in o secat, o est punctum basi B_{12} respectu curvae tertii ordinis, de qua agitur, oppositum. Punctum o' basi B_{34} oppositum nanciscimur rectam $Q\,o$ continuantes usque ad punctum, in quo sectionem conicam $\mathfrak{K}_{12}$ perrumpit.

16. Nulli difficultati nunc obnoxia est solutio huiusce problematis:

> *Problema.* Dati sint duo fasces B_{12} et B_{34} secundi ordinis, et punctum reale P. Per novem B_{12}, B_{34}, P ponere curvam tertii ordinis $\mathfrak{W}$, licet sint bases B_{12} et B_{34} reales, *imaginariae.*

Solutio. Quaeratur (§ 14) punctum o basi B_{12} respectu curvae quaesitae oppositum. Construatur deinde quaelibet sectio conica U' ad fascem B_{12} pertinens et rectam $\alpha'\,\alpha''$ in duobus punctis M', m' secans; per puncta M', m' autem sectio conica V' ponatur ad fascem B_{34} pertinens. Quodsi sunt $\lambda'\,\mu'$ puncta intersectionis curvarum U' et V' non in recta $\alpha'\,\alpha''$ sita, recta $\lambda'\,\mu'$ sectionem conicam $\mathfrak{K}_{34}$ non solum in α, sed praeterea in alio puncto n' secabit. Tunc puncta $\alpha\,\beta$, in quibus recta $n'\,o$ sectionem conicam U' secat, in curva $\mathfrak{W}$ sita erunt. Alia puncta eiusdem curvae eadem ratione nanciscimur.

17. Illustris geometra Chasles dedit solutionem huius problematis: Datis quatuor punctis duabus curvis tertii ordinis communibus et datis praeterea quinis punctis non communibus, construere sectionem conicam per caetera quinque puncta intersectionis illarum curvarum transeuntem (Comptes Rendus 1855). Huius solutionis autem usus fieri non potest ex. gr. si et data quatuor puncta illis curvis communia et quaterna punctorum curvis non communium sunt imaginaria. Conatum igitur faciamus indagandi solutionem eius problematis, quae in omnibus casibus sit applicabilis. Induamus ad eum finem problemati hanc formam:

Problema. Dati sint tres fasces secundi ordinis B_{12}, B_{34}, B_{56}, quorum bases vel reales, vel *imaginarias* sumere licet, et praeterea duo puncta realia Q et Q'. Per bases B_{12}, B_{34} et per punctum Q ponatur curva tertii ordinis U; pariter per bases B_{12}, B_{56} et per punctum Q' curva U'. Quaeritur sectio conica, quae per quinque puncta intersectionis curvarum U et U' non data transeat.

Solutio. Sit $\alpha\alpha'\alpha''$ triangulus chordalis fascium B_{12} et B_{34}, pariterque $\beta\beta'\beta''$ triangulus chordalis fascium B_{12} et B_{56}. Construantur sectiones conicae $\mathfrak{K}_{34}$ et $\mathfrak{K}_{12}$ triangulo $\alpha\alpha'\alpha''$ circumscriptae simulque resp. ad fasces B_{12} et B_{34} pertinentes; nec non sectio conica $\mathfrak{K}_{56}$ triangulo $\beta\beta'\beta''$ circumscripta et simul ad fascem B_{56} pertinens. In sectionibus conicis $\mathfrak{K}_{34}$ et $\mathfrak{K}_{56}$ sita sunt puncta o et o' opposita basi B_{12} respectu curvarum U et U', quae facile possunt inveniri (§ 15).

Ponantur deinde per basem B_{12} tres sectiones conicae K_{12}, K_{12}', K_{12}'', quae in aliquo latere (reali) trianguli $\alpha\alpha'\alpha''$ ex. gr. $\alpha'\alpha''$ resp. segmenta Mm, $M'm'$, $M''m''$ intercipiant et pariter in recta $\beta'\beta''$ segmenta Nn, $N'n'$ $N''n''$. Per basem B_{34} autem ponantur sectiones conicae K_{34}, K_{34}', K_{34}'' quae et ipsae in recta $\alpha'\alpha''$ segmenta Mm, $M'm'$, $M''m''$, et per basem B_{56} sectiones conicae K_{56}, K_{56}', K_{56}'', quae in recta $\beta'\beta''$ segmenta Nn, $N'n'$, $N''n''$ intercipiant. Chordae $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\mu''$ communes resp. sectionibus conicis P_{12} et P_{34}, P_{12}' et P_{34}', P_{12}'' et P_{34}'' per punctum α transeunt (§ 15); pariter chordae lm, $l'm'$, $l''m''$ communes resp. sectionibus conicis K_{12} et K_{56}, K_{12}' et K_{56}', K_{12}'' et K_{56}'' per punctum β transeunt.

Secabunt autem radii $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\mu''$ sectionem conicam $\mathfrak{K}_{34}$ praeter α resp. in tribus punctis p, p', p''; pariter secabunt radii lm, $l'm'$, $l''m''$ sectionem conicam $\mathfrak{K}_{56}$ in punctis q, q', q''. Quodsi P, P', P'' sunt puncta intersectionis trium parium radiorum op et $o'q$, op' et $o'q'$, op'' et $o'q''$, quinque punctis P, P', P'', o, o' sectio conica determinatur, quae est quaesita.

18. *Problema.* Dati sint tres fasces secundi ordinis B_{12}, B_{34}, B_{56} et praeterea duo puncta (realia) e et e'. Quaeritur curva quarti ordinis per bases illorum fascium et puncta e et e' i. e. per quatuordecim puncta determinata, sive bases fascium B_{12}, B_{34}, B_{56} sint reales, sive *imaginariae.*

Solutio. Ponatur per novem puncta B_{12}, B_{34}, e curva tertii ordinis U (§ 16), pariterque per novem puncta B_{12}, B_{56}, e' curva tertii ordinis V. Caetera quinque puncta intersectionis earum curvarum sectionem conicam K determinant, quae § 17 ope construi potest. In ea sectione conica etiam puncta o et o' opposita basi B_{12} respectu curvarum U et V sita erunt, quae facile inveniuntur. Sit autem p_1 punctum quodlibet sectionis conicae K et ponantur per septem puncta B_{34}, e, o, p, et per septem puncta B_{56}, e', o', p_1 duae curvae tertii ordinis U' et V' tales, ut in quatuor punctis α_1, β_1, γ_1, δ_1 in sectione conica K sitis concurrant (§ 10).

Pariter in sectione conica K punctum aliquod p_{11} sumatur et ponantur per septem puncta B_{34}, e, o, p_{11} et per septem puncta B_{56}, e', o', p_{11} duae curvae tertii ordinis U'' et V'', quae et ipsae in quatuor punctis in sectione conica K sitis α_2, β_2, γ_2, δ_2 conveniant.

Iterando hanc constructionem i. e. sumendo denuo ex arbitrio puncta in sectione conica K sita $p_{\rm III}$, $p_{\rm IV}$ $p_{\rm V}$ . . . , nanciscimur duas series curvarum tertii ordinis:

$$U,\ U',\ U'',\ U''' \ldots$$
$$V,\ V',\ V'',\ V''' \ldots$$

in quibus cuilibet curvae alterius seriei modo una curva alterius seriei correspondet. Igitur ambae series duos fasces curvarum constituunt sibi invicem anharmonice correspondentium. Bases eorum fascium formantur punctis B_{34}, e, o, x, y, z et B_{56}, e', o', x', y', z', inter quae terna puncta non data x, y, z et x', y', z' tanquam puncta intersectionis et curvarum U, U', et curvarum V, V' ope constructionis geometris notae inveniuntur. Gignunt autem illi duo fasces anharmonici curvam sexti ordinis, compositam e sectione conica K et quaesita curva C_4. Quum autem quatuor puncta intersectionis binarum curvarum $U^{(i)}$ et $V^{(i)}$ per notam constructionem inveniri possint, problema solutum est.

Sur la rectification de quelques courbes.

(*par le D.r* J. Booth, *F. R. S., London*).

I. *Rectification de la courbe inverse de l'ellipse centrale.*

Ce problème mérite d'être discuté à cause de l'élégance remarquable de sa solution, qui dépend de l'évaluation d'une intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire*.

On dit que deux courbes sont *inverses* l'une de l'autre lorsque le produit de leurs rayons vecteurs superposés est constant, c'est-à-dire que:

$$Rr = c^2.$$

Soit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'équation de l'ellipse, le centre étant au pôle, et soit $Rr = kab$; on aura, pour la courbe inverse, l'équation:

$$k^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (x^2 + y^2)^2.$$

On peut simplifier la discussion, sans restreindre la généralité, en prenant $k = 1$. L'équation de la courbe inverse à l'ellipse, le centre étant au pôle, est alors:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = (x^2 + y^2)^2. \tag{1}$$

Si l'on pose:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \tag{2}$$

cette équation devient:

$$a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi = r^2, \tag{3}$$

d'où l'on tire, après quelques réductions simples,

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}. \tag{4}$$

La substitution:

$$a^2 \tan\phi = b^2 \tan\lambda, \tag{5}$$

change cette formule en la suivante:

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}, \tag{6}$$

et puisque on en tire aussi:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\lambda}, \text{ de même que } \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\lambda} = \frac{a^4}{a^4\cos^2\lambda + b^4\sin^2\lambda}, \tag{7}$$

substituant et simplifiant on obtient:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{a^3 b^3}{(a^4\cos^2\lambda + b^4\sin^2\lambda)\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}},$$

ou:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{b^3}{a^2}\,\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\sin^2\lambda}}. \tag{8}$$

Faisant:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = c^2 \quad \text{et } \frac{a^4 - b^4}{a^4} = m, \tag{9}$$

on a:

$$m = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,c^2, \quad m > c^2,$$

et par suite, intégrant:

$$s = \frac{b^3}{a^2}\int \frac{d\lambda}{[1 - m\sin^2\lambda]\sqrt{1 - c^2\sin^2\lambda}}, \tag{10}$$

intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire, car $m > c^2$.

Imaginons le cylindre droit dont la base est l'ellipse aux demi-axes a et b, et la sphère décrite du centre avec un rayon $= \sqrt{a^2 + b^2}$. Cette sphère coupe le cylindre suivant une ellipse sphérique.

Soient α et β les demi-angles principaux de cette ellypse sphérique, alors:

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \; \sin^2\beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \; \tan^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}, \; \tan^2\beta = \frac{b^2}{a^2}. \tag{11}$$

D'ici on tire:

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4} = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{\tan^2\alpha}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha},$$

et:

$$\frac{b^3}{a^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta.$$

Effectuant ces substitutions dans l'équation (8) il vient:

$$\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\lambda}}. \quad (12)$$

Or dans les *Philosophical Transactions* pour 1852, *Part* II, p. 319, j'ai montré que l'expression d'un arc de l'ellipse sphérique qui résulte de l'intersection d'un cône aux demi-angles α et β avec une sphère concentrique est donnée par la formule:

$$\sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\varphi}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\varphi\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\varphi}}. \quad (13)$$

Soit e l'exentricité de la base plane du cône, savoir $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, 2ε l'angle des deux *lignes focales*, et 2η l'angle des deux *axes cycliques*, c'est-à-dire des deux droites normales aux sections circulaires du cône; d'après le même Mémoire on aura:

$$e^2 = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{\tan^2\alpha}, \qquad \sin^2\eta = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}, \quad (14)$$

et:

$$\tan^2\varepsilon = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha},$$

et la précédente expression de l'arc de l'ellipse sphérique deviendra:

$$\sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\varphi}{[1-e^2\sin^2\varphi]\sqrt{1-\sin^2\eta.\sin^2\varphi}}. \quad (15)$$

Désignant par m et n deux paramètres conjugués, on a:

$$(1-m)(1+n) = 1-c^2, \quad (16)$$

ainsi qu'on peut le voir dans tout ouvrage élémentaire sur les intégrales elliptiques; donc si l'on fait $m=e^2$ et $c^2=\sin^2\eta$, on a $n=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}$ ou:

$$n = \tan^2\varepsilon.$$

Les trois quantités: e excentricité de la base du cône, 2ε angle des lignes focales et 2η angle des lignes cycliques, sont liées par l'équation simple:

$$1-e^2=\cos^2\eta.\cos^2\varepsilon. \tag{17}$$

Le coefficient de l'intégrale (12), c'est-à-dire $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta$, est ce qu'on nomme quelquefois le *criterium de circularité,* car:

$$\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\sin^2\beta=(1-m)\left(1-\frac{c^2}{m}\right);$$

par suite on peut écrire:

$$\sigma=\sqrt{(1-m)\left(1-\frac{c^2}{m}\right)}\int\frac{d\varphi}{[1-m\sin^2\varphi]\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\cdot \tag{15*}$$

Notre conique sphérique a ses arcs principaux supplémentaires, car puisque $\tan\alpha=\frac{a}{b}$, $\tan\beta=\frac{b}{a}$, on a $\tan\alpha.\tan\beta=1$ d'où $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\cdot$ Elle est égale à sa réciproque tournée d'un angle droit. Les axes focaux de l'une sont les axes cycliques de l'autre: par conséquent la rectification de l'une dépend de la quadrature de l'autre, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire cité ci-dessus.

II. *De la rectification de la courbe représentée par l'équation:*

$$a^2x^2-b^2y^2=(x^2+y^2)^2 \tag{18}$$

Posant $x=r\sin\phi$, $y=r\cos\phi$, il vient:

$$a^2\sin^2\phi-b^2\cos^2\phi=r^2, \tag{19}$$

d'où:

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2}=\frac{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi-b^2\cos^2\varphi}. \tag{20}$$

Prenant:

$$a^2\tan^2\phi=b^2\sec^2\lambda, \tag{21}$$

et faisant les substitutions nécessaires, on trouvera:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2\cos^2\lambda}}{b^2+a^2\cos^2\lambda}, \tag{22}$$

ou:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab[a^2+b^2-b^2\sin^2\lambda]}{[a^2+b^2-a^2\sin^2\lambda]\sqrt{a^2+b^2-b^2\sin^2\lambda}}, \tag{23}$$

ou encore:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\left[1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]}{\left[1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}, \tag{24}$$

ou enfin:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\left[\frac{a^2}{b^2}-1+1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]}{\left[1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}. \tag{25}$$

En faisant:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=m, \qquad \frac{b^2}{a^2+b^2}=c^2, \tag{26}$$

la dernière équation devient:

$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{b(a^2-b^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{[1-m\sin^2\lambda]\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}+\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}},$$

ou, intégrant:

$$s=\frac{b}{a}\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\lambda}{[1-m\sin^2\lambda]\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}+\frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}}. \tag{27}$$

Si la courbe est la lemniscate, on a $a=b$, et cette expression devient:

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\lambda}}. \tag{28}$$

III. *De la rectification de la courbe d'intersection d'un cylindre hyperbolique avec une sphère concentrique.*

L'axe du cylindre hyperbolique soit dirigé suivant l'axe des y, et soient:

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1, \qquad x^2+y^2+z^2=r^2, \tag{29}$$

les équations du cylindre et de la sphère concentrique. Donc:

$$a^2x^2=b^2z^2-a^2b^2, \quad a^2y^2=a^2(b^2+r^2)-(a^2+b^2)z^2. \tag{30}$$

Posant:

$$z^2 = a^2\cos^2\phi + a^2\frac{b^2+r^2}{a^2+b^2}\sin^2\phi, \tag{31}$$

il vient:

$$x^2 = \frac{b^2(r^2-a^2)}{a^2+b^2}\sin^2\phi, \quad y^2 = (r^2-a^2)\cos^2\phi, \tag{32}$$

d'où:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^2}{d\varphi^2} = \frac{b^2(r^2-a^2)}{a^2+b^2}\cos^2\phi, \quad \frac{dy^2}{d\varphi^2} = (r^2-a^2)\sin^2\phi \\ \text{et} \\ &\frac{dz^2}{d\varphi^2} = \frac{a^2(r^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2+b^2)[(a^2+b^2)\cos^2\varphi+(b^2+r^2)\sin^2\varphi]}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

On en conclut:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\frac{b^2+r^2\sin^2\varphi}{(a^2+b^2)+(r^2-a^2)\sin^2\varphi}}. \tag{34}$$

La substitution:

$$\tan^2\phi = \frac{b^2}{b^2+r^2}\tan^2\lambda \tag{35}$$

et l'intégration subséquente donnent:

$$s = \frac{b^2\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+r^2}}\int\frac{d\lambda}{\left[1-\frac{r^2}{b^2+r^2}\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda}}. \tag{36}$$

Maintenant si l'on fait:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r^2}{b^2+r^2} = \frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}, \\ \text{et} \\ &\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{36*}$$

α et β étant les demi-angles de la ligne d'intersection du cylindre hyperbolique avec la sphère, on aura:

$$\frac{s}{r} - \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta\int\frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\lambda}}, \tag{37}$$

ce qui est l'expression de l'arc de conique sphérique dont 2α et 2β sont les arcs principaux. Voyez les *Phil. Trans.*, même Mémoire, p. 319.

De (36) on tire:

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{r^2}, \qquad \cos^2\beta = \frac{a^2(b^2+r^2)}{r^2(a^2+b^2)}. \tag{38}$$

Or dans le même Mémoire, pp. 316, 317, j'ai démontré que si 2ε est l'angle des lignes *focales* du cône, 2η l'angle des sections *circulaires*, et e l'excentricité de la section plane normale à l'axe du cône, on a:

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad \cos\eta = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \text{et} \quad e^2 = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{\tan^2\alpha}. \tag{39}$$

Faisant ces substitutions dans (37) on obtient ce résultat:

$$\frac{s}{r} = \sigma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\sin\beta \int \frac{d\lambda}{[1 - e^2\sin^2\lambda]\sqrt{1 - \sin^2\eta\cdot\sin^2\lambda}}, \tag{40}$$

dont la forme est la plus simple à laquelle l'intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire puisse être ramenée: σ est l'arc de la courbe semblable au rayon 1.

Comme on a:

$$\sin^2\eta = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

valeur indépendante de r, nous pouvons dire que si des sphères concentriques en nombre quelconque coupent un même cylindre hyperbolique, les cônes qui passent par les différentes courbes d'intersection ont toutes leurs sections circulaires parallèles entr'elles.

Soit ν l'angle que les plans asymptotiques du cylindre hyperbolique font avec le plan des xy. On aura:

$$\tan\nu = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \sin^2\nu = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

d'où $\nu = \eta$ C'est-à-dire que: les sections circulaires du cône sont parallèles aux plans asymptotiques du cylindre hyperbolique.

IV. Au lieu de regarder le rayon de la sphère (29) comme une quantité arbitraire, prenons:

$$r^2 = a^2 + a\sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{et} \quad j = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}+a}. \tag{41}$$

Effectuant les réductions et les substitutions nécessaires dans (36), on obtient:

$$\frac{s}{r} = \sigma = \frac{2j}{1+j}\int \frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}}. \tag{42}$$

Or comme dans ce cas particulier le paramètre est égal à la racine carrée du module, savoir $m = c$, on sait que l'intégrale elliptique peut être ramenée à celle de la première espèce, et la courbe rentre dans cette espèce particulière de coniques sphériques que j'ai nommée *parabole sphérique*, dans le Mémoire cité plusieurs fois. À la page 332 j'ai montré que:

$$\sigma = \frac{2j}{i+j}\int \frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}}. \tag{43}$$

et:

$$\sigma = j\int \frac{d\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}} + \tan^{-1}\left[\frac{j\tan\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}}\right], \tag{44}$$

étant:

$$i^2+j^2=1, \quad \text{et} \quad \tan(\lambda-\mu)=j\tan\mu. \tag{45}$$

Egalant les valeurs de σ on trouve:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2j}{1+j}\int \frac{d\lambda}{\left[1-\left(\frac{1-j}{1j}\right)\sin^2\lambda\right]\sqrt{1-\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^2\sin^2\lambda}}, \\ &= j\int \frac{d\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}} + \tan^{-1}\left[\frac{j\tan\mu}{\sqrt{1-i^2\sin^2\mu}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Cette rélation a déjà été établie par LAGRANGE à l'aide de considérations d'une nature purement analytique.

Sopra una equazione a differenziali parziali del primo ordine.

(*del prof.* Luigi Schlaefli, *a Berna*).

§ 1. Non avendo trovato nei trattati di calcolo integrale, che mi sono venuti alle mani, esempi di applicazione del metodo di Pfaff, i quali non possano venir facilmente sciolti senza quel metodo, soltanto col ridurli alla loro forma più semplice, tentai comporne uno che presentasse maggiori difficoltà; ed è il seguente.

Indicando con w una funzione delle variabili indipendenti x, y, z, e ponendo per brevità:

$$dw=p\,dx+q\,dy+r\,dz, \qquad \left\|\begin{matrix} x. & y. & z \\ p. & q. & r \end{matrix}\right\| = \phi,\ \chi,\ \psi,$$

mi propongo di integrare la equazione differenziale:

$$a\phi^2+b\chi^2+c\psi^2=1. \tag{1}$$

Il primo membro di essa può esser rappresentato dal determinante:

$$\left|\begin{matrix} a\phi. & b\chi. & c\psi \\ x. & y. & z \\ p. & q. & r \end{matrix}\right|,$$

i primi *minori* del quale si denotino con:

$$\left\{\begin{matrix} \phi, & \chi, & \psi, \\ X, & Y, & Z, \\ P, & Q, & R, \end{matrix}\right\}.$$

Il differenziale completo della (1) essendo:

$$\left.\begin{vmatrix} a\phi. & b\chi. & c\psi \\ dx. & dy. & dz \\ p. & q. & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\phi. & b\chi. & c\psi \\ x. & y. & z \\ dp. & dq. & dr \end{vmatrix} \begin{matrix} = Xdx + Ydy + Zdz \\ + Pdp + Qdq + Rdr \\ \end{matrix}\right\} = 0, \tag{2}$$

il metodo di Pfaff fornisce il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\left.\begin{matrix} dx = \quad Pdw, & dy = \quad Qdw, & dz = \quad Rdw, \\ dp = -Xdw, & dq = -Ydw, & dr = -Zdw, \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

il quale, soddisfacendo alla (2), conta solo per cinque equazioni. Ne seguono le $\Sigma x dx = 0$, $\Sigma p dp = 0$, $\Sigma x dp = -dw = -\Sigma p dx$, le quali portano seco la costanza di Σx^2, Σp^2, Σxp; epperò, a causa della eguaglianza $\Sigma x^2 . \Sigma p^2 - (\Sigma xp)^2 = \Sigma \phi^2$, anche $\Sigma \phi^2$ è costante. Perciò poniamo:

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = m^2, & \phi^2 + \chi^2 + \psi^2 = N^2, \\ p^2 + q^2 + r^2 = \left(\dfrac{N}{m \operatorname{sen} \varepsilon}\right)^2, & xp + yq + zr = N \cot \varepsilon. \end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Inoltre si ha:

$$d\phi = (zY + rQ - yZ - qR)\, dw = (b - c)\, \chi\psi\, dw,$$

perchè $b\chi . \psi + y . Z + q . R = 0$, ecc., in forza delle proprietà del determinante che rappresenta il primo membro della (1); quindi sussistono le tre equazioni:

$$d\phi = (b - c)\, \chi\psi\, dw, \quad d\chi = (c - a)\, \phi\psi\, dw, \quad d\psi = (a - b)\, \phi\chi\, dw. \tag{5}$$

Essendo le ϕ, χ, ψ già legate dalle equazioni $\Sigma a\phi^2 = 1$, $\Sigma \phi^2 = N^2$, possiamo considerar le ϕ, ψ come funzioni date della χ, cosicchè abbiamo per quarto integrale:

$$w = C + \int_0 \frac{1}{c - a} \frac{d\chi}{\phi\psi} . \tag{6}$$

Poi si ha:

$$q dy - y dq = (qQ + yY)\, dw = (1 - b\chi^2)\, dw.$$

Ma

$$\begin{vmatrix} y \, . \, m^2 \, . \\ q \, . \, N\cot\varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y \, . \, x^2 + y^2 + z^2 \\ q \, . \, xp + yq + zr \end{vmatrix} = z\phi - x\psi;$$

dunque:

$$\left.\begin{aligned} m^2 p &= N\cot\varepsilon \, . \, x - (y\psi - z\chi), \\ m^2 q &= N\cot\varepsilon \, . \, y - (z\phi - x\psi), \\ m^2 r &= N\cot\varepsilon \, . \, z - (x\chi - y\phi); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

epperò:

$$m^2 (1 - b\chi^2) dw = yd(z\phi - x\psi) - (z\phi - x\psi)\, dy.$$

Avvertendo che:

$$\begin{aligned}(z\phi - x\psi)^2 + (Ny)^2 &= (x^2 + z^2)(\phi^2 + \psi^2) - (x\phi + z\psi)^2 + N^2 y^2 \\ &= (m^2 - y^2)(N^2 - \chi^2) - \quad (-y\chi)^2 + N^2 y^2,\end{aligned}$$

cioè che:

$$(z\phi - x\psi)^2 + (Ny)^2 = m^2 (N^2 - \chi^2),$$

possiamo porre:

$$N^2 - \chi^2 = \rho^2, \quad z\phi - x\psi = m\rho \operatorname{sen}\theta, \quad Ny = m\rho\cos\theta,$$

quindi abbiamo:

$$d\theta = N\frac{1 - b\chi^2}{N^2 - \chi^2} dw = \frac{N}{c - a}\,\frac{1 - b\chi^2}{N^2 - \chi^2}\,\frac{d\chi}{\varphi\psi};$$

ed un quinto integrale sarà (indicando con n la costante d'integrazione):

$$\theta = n + \int_0 \frac{N}{c - a}\,\frac{1 - b\chi^2}{N^2 - \chi^2}\,\frac{d\chi}{\varphi\psi}. \tag{8}$$

Si noti che il valore di y è dato dalla $y = \frac{m}{N}\rho\cos\theta$, e quelli di x, z si desumono dalle:

$$\phi x + \psi x = -\frac{m}{N}\chi\rho\cos\theta, \quad -\psi z + \phi z = m\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Riguardando m, N, ε, C, n, χ come sei elementi fra loro indipendenti, osserviamo che la rappresentazione di $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{m}$, $\frac{z}{m}$ non comprende che i tre N, n, χ, e quella di w soltanto N, C, χ.

Supponiamo ora che questi sei elementi sieno variabili (abbandonando da qui innanzi il metodo di Pfaff, perchè tornerebbe troppo penoso). Sotto questo aspetto divenga:

$$pdx+qdy+rdz-dw=-dC+Mdm+\Theta dn+\Omega dN;$$

e cerchiamo i valori di M, Θ, Ω.

Poichè $\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{x}{m}\right)=0$, si ha $\frac{\partial x}{\partial m}=\frac{x}{m}$, ecc., $M=\frac{\Sigma xp}{m}$, cioè:

$$M=\frac{N}{m}\cot\varepsilon.$$

Dalla $\Sigma x^2=m^2$ segue $\Sigma x\frac{\partial x}{\partial n}=$; quindi si può scrivere:

$$y\Theta=\begin{vmatrix} y. & x\frac{\partial x}{\partial n}+y\frac{\partial y}{\partial n}+z\frac{\partial z}{\partial n} \\ q. & p\frac{\partial x}{\partial n}+q\frac{\partial y}{\partial n}+r\frac{\partial z}{\partial n}\end{vmatrix}=$$

$$=\phi\frac{\partial z}{\partial n}-\psi\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}(\phi z-\psi x)=\frac{\partial}{\partial n}(m\rho\operatorname{sen}\theta)=m\rho\cos\theta=Ny,$$

giacchè ϕ, ψ sono pure funzioni di N, χ, e $\frac{\partial\theta}{\partial n}=1$. Dunque:

$$\Theta=N.$$

Nello stesso modo si ha:

$$y\left(\Omega+\frac{\partial w}{\partial N}\right)=\phi\frac{\partial z}{\partial N}=\psi\frac{\partial x}{\partial N}=\frac{\partial}{\partial N}(\phi z-\psi x)+x\frac{\partial\psi}{\partial N}-z\frac{\partial\varphi}{\partial N}.$$

Ma dalle:

$$\rho^2=N^2-\chi^2,\ (c-a)\phi^2=c\rho^2+b\chi^2-1,\ (c-a)\psi^2=1-b\chi^2-a\rho^2,$$

si deduce:

$$\frac{\partial\rho}{\partial N}=\frac{N}{\rho},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial N}=\frac{cN}{(c-a)\varphi},\quad \frac{\partial\psi}{\partial N}=-\frac{aN}{(c-a)\psi};$$

epperò:

$$\frac{\partial}{\partial N}(\phi z-\psi x)=\frac{\partial}{\partial N}(m\rho\operatorname{sen}\theta)=\frac{mN\operatorname{sen}\theta}{\rho}+m\rho\cos\theta\,.\frac{\partial\theta}{\partial N}$$

$$=\frac{N}{\rho^2}(\phi z-\psi x)+Ny\frac{\partial\theta}{\partial N}.$$

Sostituendo si otterrà quindi:

$$y\left(\Omega+\frac{\partial w}{\partial N}\right)=Ny\frac{\partial\theta}{\partial N}+\frac{N}{\rho^2}(\phi z-\psi x)-\frac{N}{(c-a)\varphi\psi}(a\phi x+c\psi z)$$

$$=Ny\frac{\partial\theta}{\partial N}+\frac{N}{(c-a)\rho^2\varphi\psi}\Big([-a\rho^2-(c-a)\psi^2]\phi x+[-c\rho^2+(c-a)\phi^2]\psi z\Big),$$

$$=Ny\frac{\partial\theta}{\partial N}-\frac{N(1-b\chi^2)(\varphi x+\psi z)}{(c-a)\rho^2\varphi\psi}=Ny\frac{\partial\theta}{\partial N}+y\chi\frac{N(1-b\chi^2)}{(c-a)\rho^2\varphi\psi},$$

$$=y\left(N\frac{\partial\theta}{\partial N}+\chi\frac{\partial\theta}{\partial\chi}\right)\text{ in virtù della (8).}$$

Dunque:

$$\Omega=N\frac{\partial\theta}{\partial N}+\chi\frac{\partial\theta}{\partial\chi}-\frac{\partial w}{\partial N}.$$

Quando $\chi=0$, la derivata $\frac{\partial\theta}{\partial\chi}$ rimane finita, e si ha $\theta=n$, $w=C$; dunque $\Omega=0$. Dipende Ω dalla χ? Si ha:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}=\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2}+\frac{\partial}{\partial N}\left(N\frac{\partial\theta}{\partial\chi}-\frac{\partial w}{\partial\chi}\right);$$

quindi:

$$\frac{c-a}{\chi}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}=N\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{1-b\chi^2}{N^2-\chi^2}\frac{1}{\varphi\psi}\right)+\chi\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1-bN^2}{N^2-\chi^2}\frac{1}{\varphi\psi}\right).$$

Ora, ove si ponga per brevità:

$$N^2-\chi^2=u,\qquad \frac{1-b\chi^2}{N^2-\chi^2}=v,\qquad \frac{\sqrt{(c-v)(v-a)}}{c-a}=V,$$

avvertendo che $(c-a)\phi^2=u(c-v)$, $(c-a)\psi^2=u(v-a)$, si avrà:

$$\psi\phi=uV,\quad \frac{1-bN^2}{N^2-\chi^2}=v-b,\quad du=-2\chi d\chi+2NdN,\quad dv=\frac{v-b}{u}\cdot 2\chi d\chi-\frac{v}{u}\cdot 2NdN,$$

cioè:

$$\frac{1}{2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}=-\frac{\partial}{\partial u}+\frac{v-b}{u}\frac{\partial}{\partial v},\qquad \frac{1}{2N}\frac{\partial}{\partial N}=\frac{\partial}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Dunque:

$$\frac{c-a}{2N\chi^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}=\left(-\frac{\partial}{\partial u}+\frac{v-b}{u}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{u}{uV}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{v-b}{uV}\right)$$

$$=-\frac{b}{V}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{u^2}\left[(v-b)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{V}\right)-v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v-b}{V}\right)\right]=0;$$

epperò Ω è indipendente dalla χ. In conseguenza si ha:

$$\Omega = 0.$$

Siamo così giunti al risultato che, supposti esser variabili tutti i sei elementi $m, n, C, \varepsilon, N, \chi$, la condizione $dw = p dx + q dy + r dz$ si trasforma in:

$$dC = N\left(\cot\varepsilon . \frac{dm}{m} + dn\right) \cdot \tag{9}$$

Scegliendo dunque ad arbitrio una funzione C delle due indipendenti m, n, avremo:

$$N = \frac{\partial C}{\partial n}, \qquad \cot\varepsilon = \frac{m}{N}\frac{\partial C}{\partial m},$$

e le x, y, z, w compariranno come note funzioni di m, n, χ. Se potessimo eliminare queste tre indipendenti dalle quattro espressioni per x, y, z, w, avremmo anche ottenuta una funzione w di x, y, z, la quale soddisfà al problema.

§ 2. Supponendo $0 < a < \frac{1}{N^2} < b < c$, le relazioni:

$$(c-a)\varphi^2 = cN^2 - 1 - (c-b)\chi^2, \qquad (c-a)\psi^2 = 1 - aN^2 - (b-a)\chi^2$$

c'inducono a porre:

$$k = \sqrt{\frac{c-b}{b-a} \cdot \frac{1-aN^2}{cN^2-1}}, \qquad l = \sqrt{\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{bN^2-1}{cN^2-1}},$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{cN^2-1}}{\sqrt{c-a}}\,\mathrm{j}t, \qquad \chi = \frac{\sqrt{1-aN^2}}{\sqrt{b-a}}\,\mathrm{f}t, \qquad \psi = \frac{\sqrt{1-aN^2}}{\sqrt{c-a}}\,\mathrm{h}t,$$

colle notazioni adottate nella mia Memoria «*Sul moto di un pendolo*, ecc.» (*), (t è l'argomento). Con questi valori si trova:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{bN}{\sqrt{(b-a)(cN^2-1)}} - \frac{bN^2-1}{N\sqrt{b-a)(cN^2-1)}} \cdot \frac{1}{1 - k^2\,\dfrac{cN^2-1}{(c-b)N^2}\,\mathrm{f}^2 t};$$

e da ciò siamo indotti a porre:

$$\mathrm{f}\alpha = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{cN^2-1}{c-b}}, \quad \mathrm{h}\alpha = -\frac{i}{N}\sqrt{\frac{bN^2-1}{c-b}}, \quad \mathrm{j}\alpha = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{bN^2-1}{b-a}},$$

(*) Annali di Matematica, tomo 1, pag. 105.

cosicchè l'argomento costante α ha la forma $K+i\beta$, dove $0<\beta<L$. Ora ponendo per brevità:

$$T=n+\left(\frac{bN}{\sqrt{(b-a)(cN^2-1)}}-i\frac{\partial\log\gamma\alpha}{\partial\alpha}\right)t,$$

troveremo:

$$\varphi=\frac{N}{l}\mathrm{j}\alpha\mathrm{j}t,\quad \chi=Nk\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}t,\quad \psi=\frac{Nk}{l}i\mathrm{h}\alpha\mathrm{h}t,\quad w=C+\frac{t}{\sqrt{(b-a)(cN^2-1)}},$$

$$i\theta=iT+\tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{G}(\alpha-t)}{\mathrm{G}(\alpha+t)},\quad \rho=N\frac{\sqrt{\mathrm{G}(\alpha+t)\,\mathrm{G}(\alpha-t)}}{\mathrm{G}\alpha\,\mathrm{G}t},$$

$$\frac{\rho}{N}e^{i\theta}=e^{iT}\frac{\mathrm{G}(\alpha-t)}{\mathrm{G}\alpha\,\mathrm{G}t},\quad \frac{\rho}{N}e^{-i\theta}=e^{-iT}\frac{\mathrm{G}(\alpha+t)}{\mathrm{G}\alpha\,\mathrm{G}t}.$$

Inoltre giovandoci delle abbreviazioni:

$$Nx+i(y\psi-z\chi)=mN\lambda,\quad Ny+i(z\varphi-x\psi)=mN\mu,\quad Nz+i(x\chi-y\varphi)=mN\nu,$$

ed indicando con λ', μ', ν' i valori conjugati a λ, μ, ν, abbiamo dapprima $N\mu=\rho\cos\theta+i\rho\operatorname{sen}\theta$, epperò $\mu=e^{iT}\frac{\mathrm{G}(\alpha-t)}{\mathrm{G}\alpha\,\mathrm{G}t}$. Cerchiamo ora i valori di $\lambda\mu'$, $\nu\mu'$, per ottenere quelli di λ, μ. Poichè $\Sigma x\varphi=0$, abbiamo:

$$m^2N^2\lambda\mu'=\begin{vmatrix} i\psi x+Ny-i\varphi z\,. & \varphi x+\chi y+\psi z \\ \chi x+\varphi y-iNz\,. & Nx+i\psi y-i\chi z\end{vmatrix}$$

$$=(N^2-\varphi^2-\chi^2-\psi^2)xy+(iN\psi-\varphi\chi)(x^2+y^2+z^2),$$

cioè:

$$N^2\lambda\mu'=-(\varphi\chi-iN\psi),$$

quindi:

$$N^2\mu\nu'=-(\chi\psi-iN\varphi),\ \text{epperò}\ N^2\nu\mu'=-(\chi\psi+iN\varphi).$$

Sostituendo i valori superiori delle φ, χ, ψ, otteniamo:

$$\lambda\mu'=-\frac{k}{l}(\mathrm{h}\alpha\mathrm{h}t+\mathrm{f}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{f}t\mathrm{j}t)\qquad=-\frac{k}{l}(1-k^2\mathrm{f}^2\alpha\mathrm{f}^2t)\mathrm{h}(\alpha-t),$$

$$\nu\mu'=-\frac{i}{l}(\mathrm{j}\alpha\mathrm{j}t+k^2\mathrm{f}\alpha\,\mathrm{h}\alpha\,\mathrm{f}t\,\mathrm{h}t)=-\frac{i}{l}(1-k^2\mathrm{f}^2\alpha\mathrm{f}^2t)\mathrm{j}(\alpha-t),$$

e di qui moltiplicando per $\frac{1}{\mu'} e^{iT} \frac{C\alpha\, Gt}{G(\alpha+t)}$, si deduce:

$$\lambda = -\frac{k}{l} e^{iT} \frac{g(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt}, \quad \mu = e^{iT} \frac{G(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt}, \quad \nu = -\frac{i}{l} e^{iT} \frac{\mathfrak{G}(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt},$$

$$\lambda' = -\frac{k}{l} e^{-iT} \frac{g(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt}, \quad \mu' = e^{-iT} \frac{G(\alpha+t)}{G\alpha\, Gt}, \quad \nu' = -\frac{i}{l} e^{-iT} \frac{\mathfrak{G}(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt};$$

e finalmente:

$$x = \tfrac{1}{2} m \,.\, \frac{-k}{l G\alpha\, Gt} \left[e^{iT} g(\alpha-t) - e^{-iT} g(\alpha+t)\right],$$

$$y = \tfrac{1}{2} m \,.\, \frac{1}{G\alpha\, Gt} \left[e^{iT} G(\alpha-t) + e^{-iT} G(\alpha+t)\right],$$

$$z = \tfrac{1}{2} m \,.\, \frac{-i}{l G\alpha\, Gt} \left[e^{iT} \mathfrak{G}(\alpha-t) - e^{-iT} \mathfrak{G}(\alpha+t)\right].$$

Perchè compaja anche la funzione γ, si può aggiungere la:

$$a\phi\lambda + b\chi\mu + c\psi\nu = -i\sqrt{(c-b)(1-aN^2)}\, e^{iT} \frac{\gamma(\alpha-t)}{G\alpha\, Gt}.$$

Il sistema delle espressioni per ϕ, χ, ψ, x, y, z in funzione di w è lo stesso che occorre nella teoria della rotazione di un corpo solido intorno al suo centro di gravità, se w significa il tempo. Le $a\phi$, $b\chi$, $c\psi$ sono allora le projezioni della velocità istantanea di rotazione sugli assi principali d'inerzia. Se la forza viva vien divisa per ciascun dei tre momenti d'inerzia, ne risultano le a, b, c come quozienti. Le ϕ, χ, ψ sono projezioni di una normale al piano invariabile sugli assi d'inerzia; la N è la somma delle aree relativa a questo piano, divisa per la forza viva, ecc.

Berna, marzo 1867.

Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

(*Extrait d'une lettre de M.r* Hermite *à M.r* Brioschi).

... Au lieu d'effectuer suivant les puissances ascendantes de la variable x le développement des quantités:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

je poserai dans ce qui va suivre:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sum \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sum \beta_n x^{2n+1}.$$

De cette manière on obtient pour les coefficients α_n et β_n des polynômes rationnels et entiers par rapport au module, dont voici quelques propriétés.

En premier lieu, réduisons à un terme algébrique, et aux fonctions de première et seconde espèce, l'intégrale $\int_0^x \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, en posant cette égalité, où l'exposant n est entier, P un polynôme entier en x, A et B des constantes, savoir:

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = P\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} - A\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + B\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

on aura:

$$A=\beta_n\,, \qquad B=\alpha_n\,.$$

Une seconde propriété consiste en ce que les polynômes α_n et β_n sont les dénominateurs et numérateurs des réduites de la fraction continue:

$$\cfrac{k^2}{2(1+k^2)-\cfrac{9k^2}{4(1+k^2)-\cfrac{25k^2}{6(1+k^2)-\cfrac{49k^2}{8(1+k^2)-\text{etc.}\ldots}}}}$$

représentant le quotient:

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}.$$

Introduisons au lieu du module, la quantité $k+\dfrac{1}{k}=2\varepsilon$, et posons:

$$\alpha_n=\frac{k^n.A_n}{3.5\ldots 2n+1}\,, \qquad \beta_n=\frac{k^{n+1}.B_n}{3.5\ldots 2n+1}\,,$$

on aura ces relations:

$$2(n+1)\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon}-\frac{dB_n}{d\varepsilon}-2n(n+1)A_n=(2n+1)^2\frac{dA_{n-1}}{d\varepsilon}\,,$$

$$2n\varepsilon\frac{dB_n}{d\varepsilon}+\frac{dA_n}{d\varepsilon}-2n(n+1)B_n=(2n+1)^2\frac{dB_{n-1}}{d\varepsilon}\,;$$

et enfin les deux équations simultanées linéaires que voici:

$$\frac{dA_n}{d\varepsilon}=(1-\varepsilon^2)\frac{d^2B_n}{d\varepsilon^2}-\varepsilon\frac{dB_n}{d\varepsilon}+(n+1)^2B_n\,,$$

$$-\frac{dB_n}{d\varepsilon}=(1-\varepsilon^2)\frac{d^2A_n}{d\varepsilon^2}-3\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon}+n(n+2)A_n\,.$$

Note sur quelques torses sextiques.

(*par M.r* A. Cayley, *prof. à Cambridge*).

Je désire d'appeler attention aux surfaces développables, ou torses, données par l'équation

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3)^2=0.$$

Dans cette équation (a, b, c, d, e) sont des fonctions linéaires quelconques des quatre coordonnées (x, y, z, t); ces quantités sont donc liées par une équation linéaire

$$Aa+4Bb+6Cc+4Dd+Ee=0,$$

et je remarque que la classification des torses comprises sous l'équation mentionnée dépend des propriétés invariantives de la fonction $(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4$.

En effet la torse a une courbe cuspidale, ou arête de retroussement, donnée par les équations

$$ae-4bd+3c^2=0, \qquad ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3=0,$$

et une courbe nodale donnée par les équations

$$\frac{ac-b^2}{a}=\frac{ad-bc}{2b}=\frac{ae+2bd-3c^2}{6c}=\frac{be-cd}{2d}=\frac{ce-d^2}{e}:$$

ces deux courbes se rencontrent dans les points donnés par les équations

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e},$$

lesquels sont des points stationnaires de la courbe cuspidale. Pour trouver ces points, en écrivant $a:b:c:d:e=\tau^4:\tau^3:\tau^2:\tau:1$, on obtient pour le paramètre τ l'équation

$$(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4=0$$

et l'on voit ainsi qu'il y a un rapport entre la théorie de la surface et cette équation; à toute particularité invariantive de l'équation, il y correspondera quelque particularité de la torse.

Les cas à considérer sont:

1.° Racines inégales, sans aucune relation invariantive. C'est le cas général; je l'ai consideré dans le Mémoire. « *On a certain sextic developable* » Quart. Math. Journal t. IX (1867) pp. 129-142.

2.° Deux racines égales. Ce cas n'a pas été considéré; je remarque que la courbe cuspidale est du cinquième ordre. En effet on peut supposer que les racines égales soient $=0$, ce qui revient à prendre $D=0$, $E=0$. On a donc $Aa+4Bb+6Cc=0$, c'est à dire les équations $a=0$, $b=0$ impliquent l'équation $c=0$; et on voit delà que les surfaces $ae-4bd+3c^2=0$, $ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3=0$ se coupent selon la droite $a=0$, $b=0$; il reste ainsi une courbe du cinquième ordre pour la courbe cuspidale.

3.° Trois racines égales. On peut supposer que ces racines sont $=0$, ce qui donne $C=0$, $D=0$, $E=0$; et l'on a ainsi $Aa+4Bb=0$, c'est à dire les plans $a=0$, $b=0$ sont ici un seul plan. L'équation de la torse contient le facteur a, et en l'écartant elle se reduit au cinquième ordre; on obtient ainsi la torse générale du cinquième ordre.

4.° Deux paires de racines égales. On peut supposer que ces racines sont $=\infty, 0$; cela donne $A=0$, $B=0$, $D=0$, $E=0$, et l'on a ainsi identiquement $c=0$. L'équation de la torse est $(ae-4bd)^3-27(-ad^2-b^2e)^2=0$. J'ai considéré ce cas dans le Mémoire « *On a special sextic developable* » Quart. Math. Journal t. VII (1865) pp. 105-114: la courbe cuspidale est du quatrième ordre, une courbe excubo-quartique d'un forme particulière.

5.° Quatre racines égales; en prenant ces racines $=0$, on a $B=C=D=E=0$, donc identiquement $a=0$; l'équation de la torse contient le facteur b^2, et en l'écartant elle se reduit au quatrième ordre: on a dans ce cas la torse générale du quatrième ordre. Il y a encore deux cas à considérer.

6.° L'invariant I de la fonction $(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4$ est $=0$;

7.° L'invariant J de cette fonction est $=0$;

Mais je n'ai pas encore examiné ce que cela veut dire (*). Il n'y a pas le cas à considérer où l'on a à la fois $I=0$, $J=0$; car cela revient au cas 3.° de trois racines égales.

Cambridge, 19 mai 1868.

(*) La courbe cuspidale étant du genre 0 (unicursale), on peut considérer la série des points de la courbe comme correspondant anharmoniquement aux points d'une droite. Si le système des quatre points stationnaires est harmonique on a $J=0$; si ce système est équi-anharmonique, on a $I=0$. L. C.

Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio.

MEMORIA SECONDA (*).

(*del prof.* DELFINO CODAZZI, *a Pavia*).

Divido questa seconda Memoria in due parti, l'una relativa alle coordinate curvilinee dello spazio, e l'altra alle coordinate curvilinee d'una superficie.

PARTE PRIMA.

L'oggetto di questa parte prima è quello di stabilire diverse relazioni lineari tra i coseni degli angoli formati con gli assi delle seguenti dodici rette: le tre normali delle superficie (λ), (μ), (ν); le tre tangenti, le tre normali principali e le tre perpendicolari ai piani dei circoli osculatori delle linee (λ, μ), (μ, ν), (ν, λ).

1.

Siano X_λ, Y_λ, Z_λ i coseni degli angoli che fa con gli assi delle x, delle y, delle z la normale alla superficie (λ) nel punto di coordinate curvilinee μ, ν, cioè nel punto d'incontro delle intersezioni (λ, μ), (ν, λ); e siano X_μ, Y_μ, Z_μ e X_ν, Y_ν, Z_ν le analoghe quantità per le superficie (μ) e (ν). Chiamando I una qualunque delle X, Y, Z e ponendo per brevità

$$f_X + f_Y + f_Z = \Sigma f_I,$$

(*) I numeri adoperati per indicare le formole di questa Memoria seconda sono in continuazione a quelli della Memoria prima (t. 1° di questi *Annali*, p. 310) parte prima.

ove f è funzione qualsivoglia, avremo

$$\left.\begin{array}{lll} \sum I_\lambda i_\mu = 0, & \sum I_\lambda i_\nu = 0, & \sum I_\lambda^2 = 1, \\ \sum I_\mu i_\nu = 0, & \sum I_\mu i_\lambda = 0, & \sum I_\mu^2 = 1, \\ \sum I_\nu i_\lambda = 0, & \sum I_\nu i_\mu = 0, & \sum I_\nu^2 = 1, \end{array}\right\} \tag{23}$$

Ciò posto, cominciamo dall'esprimere I_λ in funzione lineare delle i_λ, i_μ, i_ν; e facciamo a tal fine

$$I_\lambda = a i_\lambda + b i_\mu + c i_\nu, \tag{a}$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando questa equazione prima per I_λ, poi per i_λ, e prendendo ad ogni volta sul prodotto la somma $\sum$, si trovano, in causa delle (1), (23),

$$a\sum I_\lambda i_\lambda = 1, \qquad \sum I_\lambda i_\lambda = a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu;$$

da cui

$$a(a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu) = 1. \tag{b}$$

Moltiplicando (a) per i_μ, i_ν e prendendo ancora ad ogni volta sul prodotto la somma $\sum$, si trovano

$$a\cos\varepsilon_\nu + b + c\cos\varepsilon_\lambda = 0, \qquad a\cos\varepsilon_\mu + b\cos\varepsilon_\lambda + c = 0; \tag{c}$$

da cui

$$\left.\begin{array}{l} b = -a\,\dfrac{\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda} = -a\,\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}, \\ c = -a\,\dfrac{\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda} = -a\,\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \end{array}\right\} \tag{d}$$

Avanti di proseguire, notiamo che le a, b, c, le quali rendono soddisfatte la (b) e le due (c), rendono pure soddisfatta la terza (23). Infatti, quadrando (a) e prendendo sul risultato la somma $\sum$, si ottiene

$$\sum I_\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\varepsilon_\nu + 2bc\cos\varepsilon_\lambda + 2ca\cos\varepsilon_\mu,$$

ovvero

$$\sum I_\lambda^2 = a(a + b\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\mu) + b(b + a\cos\varepsilon_\nu + c\cos\varepsilon_\lambda) + c(c + b\cos\varepsilon_\lambda + a\cos\varepsilon_\mu),$$

o finalmente

$$\sum I_\lambda^2 = 1.$$

Ora, mediante i valori (d), la (b) moltiplicata per $\mathrm{sen}^2\varepsilon_\lambda$ si cambia in

$$a^2\{\mathrm{sen}^2\varepsilon_\lambda-(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)\cos\varepsilon_\nu-(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\mu\}=\mathrm{sen}^2\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$a^2(1-\cos^2\varepsilon_\lambda-\cos^2\varepsilon_\mu-\cos^2\varepsilon_\nu+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)=\mathrm{sen}^2\varepsilon_\lambda;$$

da cui, prendendo il radicale col segno positivo,

$$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda}.$$

Abbiamo intanto la prima delle seguenti

$$\sum I_\lambda i_\lambda=\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda},\qquad \Sigma I_\mu i_\mu=\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{sen}\varepsilon_\mu},\qquad \sum I_\nu i_\nu=\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{sen}\varepsilon_\nu};\tag{24}$$

le altre due si concludono operando sulla prima le due solite permutazioni. In seguito, la (a) mediante la sostituzione dei valori trovati per le funzioni a, b, c somministra la prima delle tre:

$$\left.\begin{aligned}I_\lambda\sqrt{\Delta}&=i_\lambda\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda-i_\mu\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu-i_\nu\mathrm{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu,\\ I_\mu\sqrt{\Delta}&=i_\mu\mathrm{sen}\varepsilon_\mu-i_\nu\mathrm{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda-i_\lambda\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\nu,\\ I_\nu\sqrt{\Delta}&=i_\nu\mathrm{sen}\varepsilon_\nu-i_\lambda\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu-i_\mu\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\lambda;\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

le quali esprimono ciascuna delle I_λ, I_μ, I_ν in funzione lineare delle i_λ, i_μ, i_ν.

Osserviamo, che moltiplicando la prima di queste equazioni per I_μ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, si trova, in causa delle (23),

$$\sqrt{\Delta}\sum I_\lambda I_\mu=-\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu\sum I_\mu i_\mu;$$

e quindi, in causa della seconda (24), risulterà la prima delle

$$\sum I_\lambda I_\mu=-\cos\eta_\nu,\quad \sum I_\mu I_\nu=-\cos\eta_\lambda,\quad \sum I_\nu I_\lambda=-\cos\eta_\mu,\tag{26}$$

le quali sono evidenti per sè stesse.

2.

Reciprocamente, esprimiamo ora la i_λ in funzione lineare delle I_λ, I_μ, I_ν. A questo scopo, moltiplichiamo le (25) ordinatamente per tre funzioni a, b, c da determinarsi e sommiamole; disponendo di queste funzioni in modo che riescano soddisfatte le

$$a\cos\eta_\nu-b+c\cos\eta_\lambda=0,\qquad a\cos\eta_\mu+b\cos\eta_\lambda-c=0,\tag{a}$$

troveremo

$$i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda (a - b\cos\eta_\nu - c\cos\eta_\mu) = \sqrt{\Delta}(aI_\lambda + bI_\mu + cI_\nu). \qquad (b)$$

Ma dalle (a) si deducono

$$b\operatorname{sen}^2\eta_\lambda = a(\cos\eta_\nu + \cos\eta_\lambda\cos\eta_\mu), \qquad c\operatorname{sen}^2\eta_\lambda = a(\cos\eta_\mu + \cos\eta_\nu\cos\eta_\lambda),$$

ovvero

$$b\operatorname{sen}\eta_\lambda = a\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu, \qquad c\operatorname{sen}\eta_\lambda = a\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\mu;$$

onde sarà

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda(a - b\cos\eta_\nu - c\cos\eta_\mu) = a(\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\cos\eta_\nu - \operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\mu)$$

$$= \frac{a}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left\{1 - \cos^2\varepsilon_\lambda - \cos\varepsilon_\nu(\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu) - \cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\right\}$$

$$= \frac{a\Delta}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}.$$

Quindi la (6) si cambierà nella prima delle seguenti

$$\left.\begin{aligned} i_\lambda \frac{\operatorname{sen}\eta_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\sqrt{\Delta} &= I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda + I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu + I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\mu, \\ i_\mu \frac{\operatorname{sen}\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sqrt{\Delta} &= I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu + I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\lambda + I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda\cos\varepsilon_\nu, \\ i_\nu \frac{\operatorname{sen}\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\sqrt{\Delta} &= I_\nu\operatorname{sen}\eta_\nu + I_\lambda\operatorname{sen}\eta_\lambda\cos\varepsilon_\mu + I_\mu\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\lambda; \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

le quali esprimono appunto ciascuna delle i_λ, i_μ, i_ν in funzione lineare delle I_λ, I_μ, I_ν.

3.

Si chiamino, per la linea (μ, ν), i'_λ i coseni degli angoli formati con gli assi dalla normale principale; i''_λ i coseni formati dalla perpendicolare al piano del circolo osculatore; l' la derivata, presa rispetto a λ, del complesso degli angoli di contingenza; l'' la derivata del complesso degli angoli di torsione. Si chiamino i'_μ, i''_μ, m', m'' le analoghe quantità per la linea (ν, λ); e i'_ν, i''_ν, n', n'' le analoghe per la (λ, μ). Sussisteranno le note formole

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}=l' i'_\lambda, & \dfrac{\partial i'_\lambda}{\partial\lambda}=-l' i_\lambda\ -l'' i''_\lambda, & \dfrac{\partial i''_\lambda}{\partial\lambda}=l'' i'_\lambda,\\ \dfrac{\partial i_\mu}{\partial\mu}=m' i'_\mu, & \dfrac{\partial i'_\mu}{\partial\mu}=-m' i_\mu-m'' i''_\mu, & \dfrac{\partial i''_\mu}{\partial\mu}=m'' i'_\mu,\\ \dfrac{\partial i_\nu}{\partial\nu}=n' i'_\nu, & \dfrac{\partial i'_\nu}{\partial\nu}=-n' i_\nu\ -n'' i''_\nu, & \dfrac{\partial i''_\nu}{\partial\nu}=n'' i'_\nu.\end{array}\right\}\quad(28)$$

Si chiamino ordinatamente ω_λ, ω'_λ gli angoli formati dalla normale principale alla linea (μ, ν) con le normali alle superficie (μ), (ν). Si chiamino ω_μ, ω'_μ gli angoli analoghi per la linea (ν, λ) e per le superficie (ν), (λ); ed ω_ν, ω'_ν gli analoghi per la linea (λ, μ) e per le superficie (λ), (μ). Porremo

$$\left.\begin{array}{llll}\sum i'_\lambda I_\mu=\cos\omega_\lambda, & \sum i''_\lambda I_\mu=\operatorname{sen}\omega_\lambda, & \sum i'_\lambda I_\nu=\cos\omega'_\lambda, & \sum i''_\lambda I_\nu=\operatorname{sen}\omega'_\lambda,\\ \sum i'_\mu I_\nu=\cos\omega_\mu, & \sum i''_\mu I_\nu=\operatorname{sen}\omega_\mu, & \sum i'_\mu I_\lambda=\cos\omega'_\mu, & \sum i''_\mu I_\lambda=\operatorname{sen}\omega'_\mu,\\ \sum i'_\nu I_\lambda=\cos\omega_\nu, & \sum i''_\nu I_\lambda=\operatorname{sen}\omega_\nu, & \sum i'_\nu I_\mu=\cos\omega'_\nu, & \sum i''_\nu I_\mu=\operatorname{sen}\omega'_\nu.\end{array}\right\}\ (29)$$

Ciò premesso, esprimiamo I_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν; e facciamo a tal fine

$$I_\lambda=a i_\mu+b i'_\mu+c i''_\mu,\quad I_\lambda=\alpha i_\nu+\beta i'_\nu+\gamma i''_\nu,$$

ove $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando la prima di queste equazioni successivamente per i_μ, i'_μ, i''_μ e prendendo ad ogni volta la somma $\sum$ sul prodotto, troveremo, in causa delle (23), (29),

$$a=0,\quad b=\cos\omega'_\mu,\quad c=\operatorname{sen}\omega'_\mu.$$

Così, moltiplicando la seconda delle stesse equazioni successivamente per i_ν, i'_ν, i''_ν e prendendo ancora ad ogni volta la somma $\sum$ sul prodotto, avremo

$$\alpha=0,\quad \beta=\cos\omega_\nu,\quad \gamma=\operatorname{sen}\omega_\nu.$$

Dunque sussisteranno le due prime tra le seguenti

$$\left.\begin{array}{ll}I_\lambda=i'_\mu\cos\omega'_\mu+i''_\mu\operatorname{sen}\omega'_\mu, & I_\lambda=i'_\nu\cos\omega_\nu+i''_\nu\operatorname{sen}\omega_\nu,\\ I_\mu=i'_\nu\cos\omega'_\nu+i''_\nu\operatorname{sen}\omega'_\nu, & I_\mu=i'_\lambda\cos\omega_\lambda+i''_\lambda\operatorname{sen}\omega_\lambda,\\ I_\nu=i'_\lambda\cos\omega'_\lambda+i''_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\lambda, & I_\nu=i'_\mu\cos\omega_\mu+i''_\mu\operatorname{sen}\omega_\mu.\end{array}\right\}\quad(30)$$

In seguito, queste equazioni risolute rispetto alle i'_λ, i''_λ, i'_μ, i''_μ, i'_ν, i''_ν dànno

$$\left.\begin{array}{ll} i'_\lambda \operatorname{sen}(\omega'_\lambda-\omega_\lambda)=I_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda-I_\nu \operatorname{sen}\omega_\lambda, & i''_\lambda \operatorname{sen}(\omega'_\lambda-\omega_\lambda)=-I_\mu \cos\omega'_\lambda+I_\nu\cos\omega_\lambda, \\ i'_\mu \operatorname{sen}(\omega'_\mu-\omega_\mu)=I_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu-I_\lambda \operatorname{sen}\omega_\mu, & i''_\mu \operatorname{sen}(\omega'_\mu-\omega_\mu)=-I_\nu \cos\omega'_\mu+I_\lambda\cos\omega_\mu, \\ i'_\nu \operatorname{sen}(\omega'_\nu-\omega_\nu)=I_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu-I_\mu \operatorname{sen}\omega_\nu, & i''_\nu \operatorname{sen}(\omega'_\nu-\omega_\nu)=-I_\lambda \cos\omega'_\nu+I_\mu\cos\omega_\nu. \end{array}\right\} \quad (31)$$

Notiamo a questo punto che, siccome la normale principale della linea (μ, ν) e le normali delle superficie (μ), (ν) si trovano in uno stesso piano, così l'angolo η_λ sarà la somma degli angoli ω_λ, ω'_λ ovvero dell'uno di essi e del supplemento dell'altro. Vediamo come risulti espresso il valore di η_λ in conseguenza de'segni coi quali sono stati presi i coseni rappresentati da'primi membri delle (29). A tal fine, moltiplichiamo membro per membro la quarta (30) per la quinta e facciamo l'operazione $\sum$ sul prodotto; troveremo, in causa della seconda (26),

$$-\cos\eta_\lambda = \cos(\omega'_\lambda - \omega_\lambda),$$

e quindi avremo la prima delle

$$\eta_\lambda = \omega_\lambda + \pi - \omega'_\lambda, \quad \eta_\mu = \omega_\mu + \pi - \omega'_\mu, \quad \eta_\nu = \omega_\nu + \pi - \omega'_\nu. \qquad (32)$$

4.

Passiamo ad esprimere i_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Poniamo in primo luogo

$$i_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, abbiamo

$$a = \cos\varepsilon_\nu.$$

Moltiplicando per i'_μ i''_μ e prendendo sui prodotti ad ogni volta la somma $\sum$ otteniamo, in causa delle (31), (24),

$$b = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu}\sum I_\lambda i_\lambda = -\frac{\operatorname{sen}\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\sqrt{\Delta} = -\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu,$$

$$c = \frac{\cos\omega_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu}\sum I_\lambda i_\lambda = \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu.$$

Perciò risulterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned} i_\lambda &= i_\mu \cos\varepsilon_\nu - i'_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu + i''_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu, \\ i_\mu &= i_\nu \cos\varepsilon_\lambda - i'_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu + i''_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu, \\ i_\nu &= i_\lambda \cos\varepsilon_\mu - i'_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda + i''_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Poniamo in secondo luogo

$$i_\lambda = \alpha i_\nu + \beta i'_\nu + \gamma i''_\nu,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e facendo l'operazione $\sum$, abbiamo

$$\alpha = \cos\varepsilon_\mu.$$

Moltiplicando per i'_ν, i''_ν e facendo ad ogni volta l'operazione $\sum$, troviamo

$$\beta = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu} \sum I_\lambda i_\lambda = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} \sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu,$$

$$\gamma = -\frac{\cos\omega'_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu} \sum I_\lambda i_\lambda = -\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu.$$

Quindi risulterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned} i_\lambda &= i_\nu \cos\varepsilon_\mu + i'_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu - i''_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu, \\ i_\mu &= i_\lambda \cos\varepsilon_\nu + i'_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda - i''_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega'_\lambda, \\ i_\nu &= i_\mu \cos\varepsilon_\lambda + i'_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu - i''_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega'_\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

5.

Esprimiamo ora i'_λ in funzione lineare dapprima delle i_μ, i'_μ, i''_μ, dipoi delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Facciamo in primo luogo

$$i'_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ ed operando la somma $\sum$, risulta, in causa delle (31),

$$a = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda} \sum I_\mu i_\mu = \frac{\operatorname{sen}\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu} \sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e prendendo la somma $\sum$, si trova

$$a\cos\varepsilon_\nu - b\,\mathrm{sen}\,\varepsilon_\nu\,\mathrm{sen}\,\omega_\mu + c\,\mathrm{sen}\,\varepsilon_\nu\cos\omega_\mu = 0,$$

ovvero

$$b\,\mathrm{sen}\,\omega_\mu - c\cos\omega_\mu = \cos\varepsilon_\nu\,\mathrm{sen}\,\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per I_ν e facendo ancora l'operazione $\sum$, s'ottiene, in causa delle (29)

$$b\cos\omega_\mu + c\,\mathrm{sen}\,\omega_\mu = \cos\omega'_\lambda.$$

Seguono

$$b = \cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda + \mathrm{sen}\,\omega_\mu\,\mathrm{sen}\,\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu,$$

$$c = \mathrm{sen}\,\omega_\mu\cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu\,\mathrm{sen}\,\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu.$$

Perciò sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i'_\lambda &= i_\mu\,\mathrm{sen}\varepsilon_\nu\,\mathrm{sen}\omega'_\lambda + i'_\mu(\cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda + \mathrm{sen}\omega_\mu\,\mathrm{sen}\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu) + i''_\mu(\mathrm{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu\,\mathrm{sen}\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu),\\
i'_\mu &= i_\nu\,\mathrm{sen}\varepsilon_\lambda\,\mathrm{sen}\omega'_\mu + i'_\nu(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu + \mathrm{sen}\omega_\nu\,\mathrm{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + i''_\nu(\mathrm{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu\,\mathrm{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda),\\
i'_\nu &= i_\lambda\,\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\,\mathrm{sen}\omega'_\nu + i'_\lambda(\cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu + \mathrm{sen}\omega_\lambda\,\mathrm{sen}\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu) + i''_\lambda(\mathrm{sen}\omega_\lambda\cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda\,\mathrm{sen}\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu).
\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

Facciamo in secondo luogo

$$i'_\lambda = \alpha i_\nu + \beta i'_\nu + \gamma i''_\nu,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e prendendo la somma $\sum$, si ottiene, in causa delle (31),

$$\alpha = -\frac{\mathrm{sen}\omega_\lambda}{\mathrm{sen}\eta_\lambda}\sum I_\nu i_\nu = -\frac{\mathrm{sen}\omega_\lambda}{\mathrm{sen}\eta_\lambda\,\mathrm{sen}\varepsilon_\nu}\sqrt{\Delta} = -\,\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\,\mathrm{sen}\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e facendo l'operazione $\sum$, si trova

$$\alpha\cos\varepsilon_\mu + \beta\,\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\,\mathrm{sen}\omega'_\nu - \gamma\,\mathrm{sen}\varepsilon_\mu\cos\omega'_\nu = 0,$$

ovvero

$$\beta\,\mathrm{sen}\,\omega'_\nu - \gamma\cos\omega'_\nu = \cos\varepsilon_\mu\,\mathrm{sen}\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per I_μ e prendendo ancora la somma $\sum$, risulta, in causa delle (29),

$$\beta\cos\omega'_\nu + \gamma\,\mathrm{sen}\,\omega'_\nu = \cos\omega_\lambda.$$

Seguono

$$\beta = \cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu + \mathrm{sen}\,\omega_\lambda\,\mathrm{sen}\,\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu,$$

$$\gamma = \cos\omega_\lambda\,\mathrm{sen}\,\omega'_\nu - \mathrm{sen}\,\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu.$$

Quindi sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i'_\lambda &= -i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda + i'_\nu(\cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu + \operatorname{sen}\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu) + i''_\nu(\cos\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu - \operatorname{sen}\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu),\\
i'_\mu &= -i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\omega_\mu + i'_\lambda(\cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda + \operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu) + i''_\lambda(\cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu),\\
i'_\nu &= -i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu + i'_\mu(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu + \operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + i''_\mu(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu - \operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda).
\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

6.

Finalmente, esprimiamo i''_λ in funzione lineare sì delle i_μ, i'_μ, i''_μ che delle i_ν, i'_ν, i''_ν.

Poniamo in primo luogo

$$i''_\lambda = a i_\mu + b i'_\mu + c i''_\mu,$$

ove a, b, c sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_μ e facendo l'operazione $\sum$, si trova, in causa delle (31),

$$a = -\frac{\cos\omega'_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}\sum I_\mu i_\mu = -\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e prendendo la somma $\sum$, risulta

$$a\cos\varepsilon_\nu - b\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\omega_\mu + c\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega_\mu = 0,$$

oppure

$$b\operatorname{sen}\omega_\mu - c\cos\omega_\mu = -\cos\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda.$$

Moltiplicando per I_ν e prendendo la somma $\sum$, s'ottiene, in causa delle (29),

$$b\cos\omega_\mu + c\operatorname{sen}\omega_\mu = \operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Seguono

$$b = \cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu,$$

$$c = \operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu.$$

Dunque sussisterà la prima delle

$$\left.\begin{aligned}
i''_\lambda &= -i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\omega'_\lambda + i'_\mu(\cos\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda - \operatorname{sen}\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu) + i''_\mu(\operatorname{sen}\omega_\mu\operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu\cos\omega'_\lambda\cos\varepsilon_\nu),\\
i''_\mu &= -i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu + i'_\nu(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu - \operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + i''_\nu(\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu + \cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda),\\
i''_\nu &= -i_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\omega'_\nu + i'_\lambda(\cos\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu - \operatorname{sen}\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu) + i''_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda\cos\omega'_\nu\cos\varepsilon_\mu).
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

Facciamo in secondo luogo

$$i''_\lambda = \alpha i_\nu + \beta i'_\nu + \gamma i''_\nu,$$

ove α, β, γ sono funzioni da determinarsi. Moltiplicando per i_ν e prendendo la somma $\sum$, risulta

$$\alpha = \frac{\cos\omega_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda} \sum I_\nu i_\nu = \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per i_λ e facendo l'operazione $\sum$, si trova

$$\alpha \cos\varepsilon_\mu + \beta \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega'_\nu = 0,$$

oppure

$$\beta \operatorname{sen}\omega'_\nu - \gamma \cos\omega'_\nu = -\cos\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda.$$

Moltiplicando per I_μ e prendendo la somma $\sum$ si trova

$$\beta \cos\omega'_\nu + \gamma \operatorname{sen}\omega'_\nu = \operatorname{sen}\omega_\lambda.$$

Seguono

$$\beta = \operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu,$$

$$\gamma = \operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu.$$

Quindi sussisterà la prima delle seguenti

$$\left.\begin{aligned}
i''_\lambda &= i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\omega_\lambda + i'_\nu(\operatorname{sen}\omega_\lambda \cos\omega'_\nu - \cos\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu) + i''_\nu(\operatorname{sen}\omega_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\nu + \cos\omega_\lambda \cos\omega'_\nu \cos\varepsilon_\mu),\\
i''_\mu &= i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\omega_\mu + i'_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\mu \cos\omega'_\lambda - \cos\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu) + i''_\lambda(\operatorname{sen}\omega_\mu \operatorname{sen}\omega'_\lambda + \cos\omega_\mu \cos\omega'_\lambda \cos\varepsilon_\nu),\\
i''_\nu &= i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu + i'_\mu(\operatorname{sen}\omega_\nu \cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda) + i''_\mu(\operatorname{sen}\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu + \cos\omega_\nu \cos\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda).
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Le relazioni lineari (25), (27), (30), (31), (33), (34), (35), (36), (37), (38) sono quelle che si volevano stabilire.

PARTE SECONDA.

In questa seconda parte considero uno solo de' tre sistemi di superficie, e propriamente il sistema (λ); e quindi adopero formole composte di sole quantità relative ad una superficie qualunque di quel sistema. Però ciascuna formola ottenuta potrà essere considerata come rappresentativa di tre diverse, le due ultime delle quali si deducono da quella scritta col mezzo delle due solite permutazioni. Ora, ponendo per brevità

$$m'\cos\omega'_\mu = \alpha_\mu, \quad m'\operatorname{sen}\omega'_\mu = \beta_\mu, \quad m'' - \frac{\partial\omega'_\mu}{\partial_\mu} = \gamma_\mu,$$

$$n'\cos\omega_\nu = a_\nu, \quad n'\operatorname{sen}\omega_\nu = b_\nu, \quad n'' - \frac{\partial\omega_\nu}{\partial_\nu} = c_\nu,$$

mi propongo di stabilire le equazioni che legano tra loro le nove quantità $m, n, \varepsilon_\lambda, \alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu, a_\nu, b_\nu, c_\nu$. Esse equazioni risultano in numero di sei, una delle quali finita, quattro alle derivate parziali del prim'ordine, prese rispetto alle μ, ν, ed una alle derivate parziali del second'ordine. Le stesse, mediante l'eliminazione delle β_μ, b_ν, si riducono facilmente a quattro, una delle quali finita, due alle derivate parziali del prim'ordine ed una alle derivate parziali del second'ordine.

1.

Cominciamo dallo stabilire l'equazione finita e due tra le equazioni alle derivate parziali del prim' ordine.

A tal fine prendiamo la derivata della seconda (33) rispetto a ν e quella della terza (34) rispetto a μ; avuto riguardo alle (28), troveremo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial i_\mu}{\partial\nu} &= i_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right) + i'_\nu\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\\ &\quad + i''_\nu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right),\\ \frac{\partial i_\nu}{\partial\mu} &= -i_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) + i'_\mu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu + m'\cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)\\ &\quad - i''_\mu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu + \gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right).\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Ne deduciamo, in causa delle (29), dapprima

$$\begin{aligned}\sum I_\lambda\frac{\partial i_\mu}{\partial\nu} &= \cos\omega_\nu\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\\ &\quad + \operatorname{sen}\omega_\nu\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right),\end{aligned}$$

ovvero

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda; \tag{40}$$

dipoi

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = \cos\omega'_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \operatorname{sen}\omega'_\mu + m' \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega'_\mu \right)$$
$$- \operatorname{sen}\omega'_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \cos\omega'_\mu + \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu \right),$$

ovvero

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = \alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda. \tag{41}$$

Ora, moltiplicando la seconda (12) per I_λ e prendendo sul prodotto la somma $\sum$, risulta

$$m \sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = n \sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}.$$

Avremo quindi, mediante la sostituzione de' valori trovati per le $\sum I_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$, $\sum I_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}$, la seguente equazione finita

$$m(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) = n(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda). \tag{42}$$

Deduciamo altresì dalle (39) le due

$$\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \right), \qquad \sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} = -\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right). \tag{43}$$

Eguagliando questi valori delle $\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$, $\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}$ a quelli somministrati dalle due prime (14), si concludono le due seguenti equazioni alle derivate parziali del prim' ordine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial . m \cos\varepsilon_\lambda}{\partial \nu} + m b_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda &= \frac{\partial n}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial . n \cos\varepsilon_\lambda}{\partial \mu} - n \beta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda &= \frac{\partial m}{\partial \nu}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

2.

Passiamo ora a stabilire le due altre equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

A tal fine, formeremo dapprima i valori delle $\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu}$, $\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu}$. La prima (30) somministra, avuto riguardo alle (28),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = -(i'_\mu \operatorname{sen}\omega'_\mu - i''_\mu \cos\omega'_\mu)\frac{\partial \omega'_\mu}{\partial \mu} - (m' i_\mu + m'' i''_\mu)\cos\omega'_\mu + m'' i'_\mu \operatorname{sen}\omega'_\mu,$$

ovvero, in causa della terza (34),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = \gamma_\mu \frac{i_\nu - i_\mu \cos\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - i_\mu \alpha_\mu,$$

la quale può scriversi

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = -i_\mu(\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + i_\nu \frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{45}$$

La seconda (30) alla sua volta somministra

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = -(i'_\nu \operatorname{sen}\omega_\nu - i''_\nu \cos\omega_\nu)\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \nu} - (n' i_\nu + n'' i''_\nu)\cos\omega_\nu + n'' i'_\nu \operatorname{sen}\omega_\nu,$$

ovvero, in causa della seconda (33),

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = c_\nu \frac{i_\nu \cos\varepsilon_\lambda - i_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - i_\nu a_\nu,$$

la quale può scriversi

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial \nu} = -i_\nu(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - i_\mu \frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{46}$$

Prendiamo ora la derivata della (45) rispetto a ν e quella della (46) rispetto a μ, ed eguagliamo i due valori di $\frac{\partial^2 I_\lambda}{\partial \mu \partial \nu}$; risulterà

$$\left.\begin{aligned} & -i_\mu \frac{\partial}{\partial \nu}(\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + i_\nu \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda)\frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} + n' i'_\nu \frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} = \\ & -i_\nu \frac{\partial}{\partial \mu}(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - i_\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda)\frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} - m' i'_\mu \frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Moltiplichiamo questa equazione dapprima per i_μ, dipoi per i_ν, e facciamo ad ogni volta l'operazione $\sum$ sul prodotto. Osservando che sono, in causa della seconda (33) e della terza (34),

$$\sum i_\mu i'_\nu = -\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu, \quad \sum i_\nu i'_\mu = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu,$$

e rammentando le (43), si troveranno le due

$$-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(a_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda\right) + \cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - \gamma_\mu b_\nu =$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\mu}(a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) - \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} + (a_\nu - c_\nu\cot\varepsilon_\lambda)\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda,$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\nu}(\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) + \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - (\alpha_\mu + \gamma_\mu\cot\varepsilon_\lambda)\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda =$$

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}(a_\nu - c_\nu\cot\varepsilon_\lambda) - \cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - c_\nu\beta_\mu;$$

le quali equazioni si riducono alle due seguenti

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) - \frac{\partial\alpha_\mu}{\partial\nu} = -\frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\lambda + (a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right),$$

$$\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - \frac{\partial\alpha_\mu}{\partial\nu}\cos\varepsilon_\lambda + (\alpha_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) = -c_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}.$$

Sottraendo dalla seconda di queste equazioni la prima moltiplicata per $\cos\varepsilon_\lambda$, s'ottiene

$$\alpha_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) + \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda =$$

$$-(a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial a_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda + \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\partial(a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda)}{\partial\mu} + \beta_\mu(a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) + \alpha_\mu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) + \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu} = 0. \quad (47)$$

Così, sottraendo dalla prima delle stesse equazioni la seconda moltiplicata per $\cos\varepsilon_\lambda$, si trova

$$-(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - b_\nu\right) - \frac{\partial\alpha_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda - \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\lambda =$$
$$a_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\partial(\alpha_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu \cos\varepsilon_\lambda)}{\partial\nu} - b_\nu(\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) + a_\nu\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu} + \beta_\mu\right) - \frac{\partial c_\nu}{\partial\mu} = 0. \quad (48)$$

Le (47), (48) sono le due altre equazioni alle derivate parziali del primo ordine che si volevano costituire.

Notiamo che se si moltiplicasse (a) per I_λ e si prendesse sul prodotto la somma $\sum$, si giungerebbe dopo le riduzioni ad una identità. Siccome ciascuno de' quattro coseni rimanenti i'_μ, i''_μ, i'_ν, i''_ν può venire espresso in funzione lineare delle i_μ, i_ν, I_λ mediante le due prime (30), la seconda (33) e la terza (34), così se si moltiplicasse (a) per uno qualunque tra essi e si prendesse la somma $\sum$ sul prodotto, non si troverebbe alcun' altra equazione diversa dalle due (47), (48).

3.

Finalmente veniamo a stabilire l' equazione alle derivate parziali del second' ordine.

Perciò, prendiamo la derivata della prima (39) rispetto a μ, la derivata della quarta (28) rispetto a ν, ed eguagliamo i due valori di $\dfrac{\partial^2 i_\mu}{\partial\mu\,\partial\nu}$; risulterà

$$\left.\begin{aligned}
&i_\nu \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\} + i'_\nu \frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\\
&\quad + i''_\nu \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu\right) + \frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\nu}\right)\\
&+\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu + n'\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right) + \frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right) =\\
&\qquad i'_\mu \frac{\partial m'}{\partial\nu} + m'\frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu}.
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Moltiplichiamo questa equazione per i_ν e facciamo sul prodotto l'operazione $\sum$; avremo, avuto riguardo alla terza (34),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu-\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\right)\right\}+\left(-\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\omega_\nu+n'\cos\varepsilon_\lambda+c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\right)\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}\\&+\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\omega_\nu+c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\right)\sum i_\nu\frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}=\frac{\partial m'}{\partial\nu}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\sum i_\nu\frac{\partial i'_\mu}{\partial\nu}.\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

Ma si trova, in causa della seconda (39) e della terza (36),

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\sum i'_\nu\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)$$

$$-(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu+\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)$$

$$+(\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu-\operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right);$$

ovvero

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)-(\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu+\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)m'\cos\varepsilon_\lambda$$

$$+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu-\cos^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega_\nu\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu};$$

o anche

$$\sum i_\nu\frac{\partial i'_\nu}{\partial\mu}=-\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)-\cos\omega_\nu(\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda).\qquad(c)$$

Si trova pure, in causa della medesima seconda (39) e della terza (38),

$$\sum i_\nu\frac{\partial i''_\nu}{\partial\mu}=-\sum i''_\nu\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu}=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\cos\omega_\nu\left(\beta_\mu+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\right)$$

$$-(\operatorname{sen}\omega_\nu\cos\omega'_\mu-\cos\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\omega'_\mu+m'\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\omega'_\mu\right)$$

$$+(\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\omega'_\mu+\cos\omega_\nu\cos\omega'_\mu\cos\varepsilon_\lambda)\left(\frac{\partial\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\omega'_\mu+\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\omega'_\mu\right);$$

o anche

$$\sum i_\nu \frac{\partial i''_\nu}{\partial \mu} = \operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right) - (\operatorname{sen}\omega_\nu \cos\omega'_\mu - \cos\omega_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda) m' \cos\varepsilon_\lambda$$

$$+ \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu + \cos^2\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu};$$

ovvero

$$\sum i_\nu \frac{\partial i''_\nu}{\partial \mu} = \cos\omega_\nu \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right) - \operatorname{sen}\omega_\nu (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda). \qquad (d)$$

Da ultimo si trova, in causa della terza (34) e dalla settima (28),

$$\sum i_\nu \frac{\partial i'_\mu}{\partial \nu} = \sum \frac{\partial . i_\nu i'_\mu}{\partial \nu} - \sum i'_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \nu} = \frac{\partial . \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu}{\partial \nu} - n' \sum i'_\mu i'_\nu;$$

oppure in causa della terza (36),

$$\sum i_\nu \frac{\partial i'_\mu}{\partial \nu} = \frac{\partial . \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega'_\mu}{\partial \nu} - (a_\nu \cos\omega'_\mu + b_\nu \operatorname{sen}\omega'_\mu \cos\varepsilon_\lambda). \qquad (e)$$

Ora l'equazione (b), mediante la sostituzione de' valori somministrati dalle (c), (d), (e), diventa

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu}\right)\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \nu}\operatorname{sen}\omega_\nu - n'\cos\varepsilon_\lambda - c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\omega_\nu\right)\left\{\operatorname{sen}\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right) + \cos\omega_\nu(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \nu}\cos\omega_\nu + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\omega_\nu\right)\left\{\cos\omega_\nu\left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right) - \operatorname{sen}\omega_\nu(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\right\} =$$

$$\frac{\partial . \beta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \nu} - \alpha_\mu a_\nu - \beta_\mu b_\nu \cos\varepsilon_\lambda;$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu}\right)\right\} + \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right)\cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} - b_\nu \cos\varepsilon_\lambda \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}\right)$$

$$-(\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) = \frac{\partial . \beta_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial \nu} - \alpha_\mu a_\nu - \beta_\mu b_\nu \cos\varepsilon_\lambda;$$

o anche

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} - (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)\right\} = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \frac{\partial \beta_\mu}{\partial \nu} - \alpha_\mu a_\nu ;$$

o finalmente

$$\frac{\partial b_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial \beta_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_\lambda}{\partial \mu \partial \nu} + (\alpha_\mu a_\nu + \gamma_\mu c_\nu)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - (\alpha_\mu c_\nu - a_\nu \gamma_\mu)\cos\varepsilon_\lambda = 0 , \qquad (49)$$

la quale è l'equazione alle derivate parziali del second' ordine che si trattava di costituire.

Notiamo che se si moltiplicasse (α) per i'_ν o per i''_ν, e si prendesse sul prodotto la somma $\sum$, si troverebbe in ambi i casi una combinazione delle (47), (48), (49). Perciò, se si moltiplicasse (α) per uno qualunque de' quattro coseni rimanenti i_μ, i'_μ, i''_μ, I_λ, i quali mediante le formole della parte prima possono esprimersi in funzioni lineari delle i_ν, i'_ν, i''_ν, e si prendesse la somma $\sum$ sul prodotto, non si giungerebbe a verun' altra equazione diversa da quelle già ottenute. Notiamo altresì che, se invece di eguagliare i due valori di $\frac{\partial^2 i_\mu}{\partial \mu \partial \nu}$, si fossero eguagliati i due valori di $\frac{\partial^2 i_\nu}{\partial \mu \partial \nu}$ formati col prendere la derivata della seconda (39) rispetto a ν e la derivata della settima (28) rispetto a μ, si sarebbe costituita un'equazione analoga alla (α), la quale moltiplicata per uno qualunque de' sette coseni i_μ, i'_μ, i''_μ, i_ν, i'_ν, i''_ν, I_λ e sottoposta all'operazione $\sum$ non avrebbe condotto a verun'altra equazione novella.

4.

Abbiamo dunque, tra le nove quantità m, n, ε_λ, α_μ, β_μ, γ_μ, a_ν, b_ν, c_ν, sei equazioni, cioè la (42), le due (44) e le (47), (48), (49). È chiaro poi che se mediante le due (44) si eliminassero le β_μ, b_ν, queste sei equazioni si ridurrebbero facilmente a sole quattro, una delle quali finita, due alle derivate parziali del prim'ordine ed una alle derivate parziali del second'ordine.

Nel caso in cui le (λ, μ), (ν, λ) costituiscono due sistemi di linee ortogonali, la (42) e le due (44) diventano

$$mc_\nu + n\gamma_\mu = 0, \quad mb_\nu = \frac{\partial n}{\partial \mu}, \quad n\beta_\mu = -\frac{\partial m}{\partial \nu}, \tag{50}$$

le quali sono equazioni conosciute. In seguito, le (47), (48), (49) si riducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial \nu} + \frac{\partial a_\nu}{\partial \mu} + \beta_\mu c_\nu - \alpha_\mu b_\nu = 0, \\ &\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial c_\nu}{\partial \mu} + \beta_\mu a_\nu + \gamma_\mu b_\nu = 0, \\ &\frac{\partial \beta_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial \mu} - \alpha_\mu a_\nu - \gamma_\mu c_\nu = 0; \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

le quali sono le equazioni di cui ho fatto uso per trattare la questione sulle superficie applicabili posta al concorso dall'Accademia delle scienze di Parigi nel 1860. Si vedano, pel lato storico della questione, i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* del primo semestre 1861; oppure il *Rapport sur les progrès les plus récents de l'analyse mathématique en France,* compilato dal sig. Bertrand e stampato a Parigi nel 1867, sotto gli auspicii del ministero dell'istruzione pubblica. Tornando alle (51), il signor Ossian Bonnet ebbe la cortesia di pubblicarle, dandone in pari tempo una dimostrazione geometrica molto semplice, al principio della sua *Note sur la théorie de la déformation des surfaces gauches,* inserita nei *Comptes rendus* del 16 novembre 1863. Una dimostrazione analitica diretta e piuttosto breve delle medesime equazioni s'ottiene seguendo la stessa via percorsa affine di stabilire le equazioni del caso generale, col riguardo solo di porre in ogni formola $\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2}\pi$.

Pavia, 4 maggio 1868.

Theoria nova phaenomenis electricis applicanda.

(*Auctore* Carolo Neumann, *Tubingæ*).

Quomodo leges in phaenomenis electricis dominantes ex una fere suppositione eruere liceat, leviter hic adumbrare mihi proposui.

§ 1. Fundamentum quo theoria superstructa est conspicuum redditur.

Quod ad verborum usus attinet, optima mihi videtur eorum auctorum consuetudo loquendi, qui volunt, vim vivam appellandam esse semi-summam massarum respective multiplicatarum per velocitatum quadrata; porro potentiale appellandam esse eam coordinatarum functionem, cujus coefficientes differentiales negativi aequentur componentibus potentiarum.

Quibus positis, praeclarum vis vivae principium hanc induit formam:

$$[\text{Vis viva}] + [\text{Potentiale}] = \text{Const.},$$

principium autem gravissimum Hamiltonianum hancce:

$$\delta \int \Big([\text{Vis viva}] - [\text{Potentiale}] \Big) dt = 0,$$

ubi integrale extensum est in temporis spatium quodlibet, variatioque δ tali modo instituenda, ut positiones et velocitates in illius spatii limitibus pro constantibus habeantur.

Potentiis datis, datum esse potentiale, ac vice versa, potentiali dato, datas esse potentias, satis notum est. Unde apparet in traditam mechanices theoriam nil novi introduci statuendo, potentiale principalem esse causam, ab isto procreari potentias, scilicet potentiale significare veram causam motricem, potentias autem tantummodo formam vel speciem exprimere ab illa causa sibi paratam. Nova vero introducitur suppositio, statuendo, causam illam motricem, quam potentiale vocamus, ab altera massa ad alteram non subito sed progrediente tempore transmitti, atque — ad instar lucis — per spatium propagari celeritate quadam permagna et constante. Quam celeritatem denotabimus litera c.

Ista suppositio, conjuncta cum hac altera, principium Hamiltonianum normam exprimere supremam ac sacrosanctam nullis exceptionibus obviam, fit suppositio in theoria nostra fundamentalis, ex qua (absque ulla ulteriore suppositione) leges illae notissimae a cel.[is] AMPÈRE, NEUMANN, WEBER, conditae sua sponte emanabunt.

Facile perspicitur, fundamentalem suppositionem nostram, ponendo $c=\infty$, prorsus in vulgarem suppositionem, quod potentiale subito per spatium transmittatur ab altera ad alteram massam. Unde apparet, nostram, ut generaliorem, involvere suppositionem vulgarem.

§ 2. Pervenitur ad legem Weberianam.

Motum duorum tantum punctorum m et m_1, quorum alterum ab altero sollicitatur, intuentibus nobis ac recordantibus, quod de potentialis propagatione suppositum sit, duo potentialis genera discernenda sunt, potentiale emissivum et Potentiale receptivum.

Potentiale emissivum appellabimus id, quod ab utroquo puncto emittitur tempore t, aliquanto postea ad alterum punctum perveniens. Designante r mutuam punctorum distantiam respectu temporis t, porro designante ω_0 potentiale emissivum respectu temporis ejusdem, leges notissimae a NEWTONO aliisque conditae docent, $\omega_0 = \frac{m m_1}{r}$, vel generalius fieri:

$$\omega_0 = m m_1 \phi, \tag{1}$$

ubi $\phi = \phi(r)$ denotet datam ipsius r functionem quamlibet.

Potentiale receptivum vocabimus id, quod utrumque punctum recipit tempore t, aliquanto antea ab altero puncto emissum. Unde elucet, potentiale receptivum respectu dati temporis cujuslibet formatum idem esse ac potentiale emissivum respectu temporis cujusdam prioris formatum.

Sit rursus r mutua punctorum distantia tempore t, et sit respectu ejusdem temporis ω potentiale receptivum; invenitur post calculos faciles:

$$\omega = w + \frac{d\pi}{dt}, \tag{2}$$

siquidem ponitur:

$$\left.\begin{aligned} w &= mm_1\left[\phi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \\ \pi &= mm_1\left[\chi + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Quibus in formulis ϕ denotat eandem atque in potentiali emissivo functionem, denotantque ψ, χ, Φ alias quasdam solius r functiones, quae e data functione ϕ facile erui queunt per operationes plane elementares; est ex. gr.:

$$\psi = \frac{1}{c}\int\sqrt{-r\frac{d\varphi}{dr}}\cdot dr. \tag{4}$$

Expressio ϕ a propagationis celeritate vacua est, id quod patet ex ipsa functionis ϕ definitione. Expressiones autem ψ, χ factore $\frac{1}{c}$, et expressio Φ factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatae sunt.

Adnotandum est, in casu speciali $\phi = \frac{1}{r}$ fieri $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$.

Potentiale receptivum ω est summa duorum terminorum w et $\frac{d\pi}{dt}$, quorum suo uterque ornetur nomine. Videlicet respectu investigationum sequentium terminus w appelletur potentiale effectivum, terminus $\frac{d\pi}{dt}$ potentiale ineffectivum.

Ex principio Hamiltoniano, quippe in quod summum imperium collatum sit, sequitur, punctorum m et m_1 motum fieri talem, qui praescribatur formula:

$$\delta\int(\tau - \omega)\,dt = 0,$$

denotante ω potentiale receptivum modo commemoratum, et denotante τ vim amborum punctorum vivam. Quae formula, substituendo pro ω ipsius valorem $w + \frac{d\pi}{dt}$, hanc induit speciem:

$$\delta\int\left(\tau - w - \frac{d\pi}{dt}\right)dt = 0,$$

vel (quod idem est) hancce:

$$\delta \int (\tau - w)\, dt = 0.$$

Inde, variatione δ peracta, proveniunt sex aequationes differentiales punctorum motum complete determinantes. Istae aequationes docent, quomodo causa illa motrix, quam potentiale vocamus, vim suam edat, docentque, quaenam ab illa causa procreentur potentiae; obtinentur haece propositiones;

I. Agatur de motu duorum punctorum m et m_1, sit r mutua punctorum distantia, porro sit $\frac{mm_1}{r}$ vel generalius $mm_1\phi(r)$ potentiale punctorum emissivum; sollicitabuntur puncta potentia quadam R, quae semper ejusdem ac linea r directionis est.

II. Concipiatur R tanquam potentia repulsiva, porro sit w potentiale punctorum effectivum (ex dato potentiali emissivo sponte sua evadens et supra (3) commemoratum); valor ipsius R semper aequabitur coefficienti variatorio negativo ipsius w respectu r formato.

Unde computatione peracta provenit:

$$R = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2} \right]. \tag{4}$$

Quae formula in casu speciali $\phi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ hanc induit speciem:

$$R = mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{c^2\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} \right], \tag{4.a}$$

vel (quod idem est) hancce:

$$R = \frac{mm_1}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2} \right]. \tag{4.b}$$

Statim elucet, formulam (4.a) seu (4.b) ipsam legis Weberianae expressionem esse. In transitu adnotare placet, formulam generaliorem (4) plane congruere cum ea lege, a qua ante decem annos equidem profectus sum in dissertatione inaugurali inscripta; « *Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur* ».

Systema completum quaestionum illo tempore a me susceptarum in publicum edidi aliquanto postea in libello inscripto: « *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes* » (Halle, 1863).

Rebus modo addigitatis generaliores adjungere licet investigationes, quae perducunt ad hunc exitum:

I. Sit W potentiale effectivum systematis punctorum cujuslibet, sint x, y, z coordinatae puncti, cujus massa m; componentes potentiae punctum m sollicitantis semper aequabuntur coefficientibus variatoriis negativis potentialis W respectu x, y, z formatis.

II. Sit P ea illius potentiae componens, qua punctum impellitur in data directione p qualibet; valor ipsius P semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu p formato.

Tandem enuntiare debemus, quaenam sint quantitates, quas in antecedentibus vocavimus coefficientes variatorios.

Sint $u, v, \ldots w$ indeterminatae functiones unius variabilis (ex. gr. temporis) vel indeterminatae functiones complurium variabilium $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; porro sit F data expressio composita ex $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $u, v, \ldots w$ et ex coefficientibus differentialibus functionum $u, v, \ldots w$ respectu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ formatis, atque agatur de Variatione

$$\delta \int^{(n)} F \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{A.}$$

i. e. de variatione

$$\int^{(n)} \delta F . d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{B.}$$

respectu ipsorum $u, v, \ldots w$ instituenda. Notissimum est, integrale (B) semper transformari posse in duorum integralium summam, quorum alterum n^{tuplex} variationibus $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ implicatum, vacuum sit istarum variationum coefficientibus differentialibus, alterum autem $(n-1)^{tuplex}$ illis coefficientibus differentialibus affectum. Integrali priori designato per

$$\int^{(n)} (U \delta u + V \delta v + \cdots W \delta w) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n, \tag{C.}$$

quantitates $U, V, \ldots W$ illae sunt, quae a nobis vocantur coefficientes variatorii ipsius F respectu ipsorum $u, v, \ldots w$ formati.

§ 3. De legibus in Repulsione atque Inductione electrica dominantibus.

Antecedentibus probavimus, suppositionem nostram fundamentalem sua sponte suppeditare legem universalem a cel.° Weber enuntiatam. Nil igitur dubium, quin ex eadem suppositione redundare debeant et ipsae illae speciales leges notissimae, quae de repulsione atque inductione electrica conditae sunt a cel.[is] Ampère, Neumann, Weber.

Attamen istam materiam accuratius examinabimus ac monstrabimus in derivandis illis legibus nil fere interesse,utrum ab hypothesi dualistica an unitaria proficiscamur. Monstrabimus enim quae ex utraque hypothesi consequantur, ubique inter se congruere, solis iis casibus exceptis, in quibus agatur de inductione fluminum electricorum non clusorum. More scilicet consueto flumen quodlibet electricum vocamus clusum aut non clusum, prout corpora ponderabilia flumen continentia rigide inter se cohaerent aut commoventur aliud respectu alius.

Sit ds elementum fluminis electrici, porro sint $+eds$ et $-eds$ quantitates fluidorum positive et negative electricorum in elemento ds contentorum, denique sint $s'=\frac{ds}{dt}$ et S' velocitates, quibus illae quantitates respectu ejusdem directionis s animantur.

Si ponitur $S'=-s'$, fluida illa aequa celeritate feruntur in directiones oppositas, id quod plane congruit cum hypothesi vulgari dualistica.

Sin ponitur $S'=0$, fluidum negativum concipitur quiescens, quasi vinculis adstrictum ad materiam ponderabilem, vel idem atque ista materia. Posito igitur $S'=0$, motu animatum est fluidum unum. Quae conjectura ea est, quam supra (brevitatis causa) hypothesin Unitariam appellavimus,

Utramque examinantes hypothesin ac respectu functionis ϕ cujuslibet, pervenimus ad hasce propositiones:

I. Teneant ds, eds, $s'=\frac{ds}{dt}$ significationes commemoratas, habeantque $d\sigma$, $\eta d\sigma$, $\sigma'=\frac{d\sigma}{dt}$ analogas significationes respectu alterius elementi cujuslibet, porro sit r mutua amborum elementorum distantia, denique sit W potentiale amborum elementorum effectivum; semper fit:

$$W=\frac{g^2 ds\, d\sigma . es'\eta\sigma'}{2}\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \tag{5}$$

ubi est $g = 4$ aut $= 2$, prout ab hypothesi dualistica aut unitaria proficiscimur. Qui ipsius W valor universalis est, pertinens ad flumina electrica contenta in corporibus ponderabilibus seu quiescentibus seu ad arbitrium commotis.

In casu speciali $\varphi = \frac{1}{r}$ fieri $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$, supra traditum est. Illo igitur casu fit:

$$W = \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{2r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}. \tag{5.a}$$

II. Mutua amborum elementorum potentia repulsiva R semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu r formato. Unde suppeditatur formula:

$$R = g^2 ds\,d\sigma . es'\eta\sigma' \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial \sigma}, \tag{6}$$

quae, positis $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$, hanc induit speciem:

$$R = \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{2 ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial \sigma}, \tag{6.a}$$

vel (quod idem est) hancce:

$$R = \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\right). \tag{6.b}$$

Formulam (6.a) seu (6.b) ipsam legis Ampèrianae expressionem esse, primo intuitu elucet.

III. Sint ds, $d\sigma$ elementa fluminum electricorum *clusorum*; potentia electromotorica E ab $d\sigma$ in ds in directione s exercita semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu s formato. Unde eruitur formula:

$$E = \frac{d\overline{W}}{dt}, \tag{7}$$

siquidem $\overline{W}$ ipsius W valorem pro $s' = 1$ denotat. Quæ potentiae E expressio universalis est, aeque pertinens ad inductionem, quae oritur ex mutatis fluminum intensitatibus atque ad inductionem alteram, quae oritur ex mutatis positionibus.

Manifestum est, formulam (7) plane congruere cum lege Neumanniana.

§ 4. De Vis vivae principio.

Statuimus, principium Hamiltonianum habendum esse tanquam principium supremum ac sacrosanctum, permanens atque immutabile. Vel ex ipsa ista suppositione eruere licet, principium vis vivae et ipsum semper valere, at formam consuetam non semper tenere.

Si proponantur duo tantum puncta m et m_1, mutuum punctorum potentiale effectivum w exprimitur per

$$w = mm_1 \left[\phi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Quae formula, jam supra (3) commemorata, sic exhibeatur:

$$w = u + v, \tag{9}$$

ubi

$$\left.\begin{aligned} u &= mm_1 \phi, \\ v &= mm_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Terminorum u et v priorem constante c vacuum, posteriorem factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatum esse, facile eruitur ex iis, quae de functionibus ϕ, ψ supra tradita sunt.

Sponte elucet, quiescentibus punctis terminum v evanescere potentialeque w abire in terminum u. Itaque appellabimus u potentiale staticum et v potentiale motoricum. Occasione data, adnotandum est, potentiale staticum semper ejusdem ac potentiale emissivum valoris fieri, id quod vel a priori eruere licet ex ipsis istorum potentialium definitionibus.

Iam agatur de motu systematis punctorum cujuslibet, et sit W potentiale systematis effectivum. Istius W valor eodem modo, quo antea ipsius w valor, in duos terminos discerpatur:

$$W = U + V. \tag{11}$$

Quo peracto, alter terminus U, constante c vacuus, repraesentat potentiale systematis staticum; alter V, factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatus, potentiale systematis motoricum. Quod, investigatione instituta, de istis potentialibus et de systematis vi viva invenimus, sic pronuntiare licet:

Agatur de motu systematis punctorum cujuslibet; vis viva potentiali statico aucta et potentiali motorico diminuta valorem tenebit constantem.

Erit igitur:

$$T + U - V = \text{Const.}, \tag{12}$$

denotante T vim systematis vivam. Adnotandum videtur: expressionem T a solis velocitatibus, expressionem U a solis positionibus punctorum pendere; expressionem autem V functionem esse et velocitatum et positionum.

Secundum vulgarem suppositionem est $c = \infty$. Ponendo autem $c = \infty$ terminus V, quippe qui factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatus sit, evanescit, formulaque (12) abit in formulam illam notissimam $T + U = \text{Const.}$, cujus in § 1 mentionem fecimus.

Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie, e i loro punti d'intersezione con superficie di secondo grado.

(*del D.r* T. Reye, *prof. a Zurigo*).

1. Una curva gobba di 4.° ordine e 1.ª specie può, com'è noto, esser congiunta ad un punto qualunque dello spazio per mezzo di una superficie di 2.° grado; per una curva gobba di 4.° ordine e 2.ª specie invece passa una sola di tali superficie. Noi qui ci limiteremo alle curve gobbe di 1.ª specie. Per brevità indicheremo in questo lavoro con k^n una curva di n^{mo} ordine, con F^n una superficie e in particolare con K^n un cono di ordine n. In generale per otto punti dello spazio può condursi soltanto una k^4; ma se per essi passano due di tali curve gobbe, i medesimi possono essere congiunti a ciascun nuovo punto dello spazio da una k^4, ed allora si dirà ch'essi formano un gruppo di punti associati. Sette punti di un tal gruppo determinano completamente l'ottavo.

2. La k^4 può essere congiunta ad una qualunque s delle sue secanti da una superficie gobba F^2. Poichè, se uniamo k^4 con un punto arbitrario di s per mezzo di una F^2 (1), questa F^2 passerà per tre e quindi per tutti i punti di s. Ogni altra secante t, che sia incontrata da s fuori della curva k^4, giace su F^2, ed i punti di k^4 sono projettati da due qualunque di queste secanti t per mezzo di fasci projettivi di piani, che generano un sistema di secanti della k^4, situate su F^2. Ogni retta di F^2 è una secante di k^4; la quale chiamasi o secante propria o secante impropria o tangente, secondo che essa taglia la k^4 o in due punti o in nessun punto o la tocca in un punto.

3. Se di otto punti associati P se ne uniscono sei qualunque con una k^3 e i due rimanenti con una retta g, la g è una secante

di k^3 (*). Gli otto punti P possono essere uniti ad un terzo punto di g per mezzo di infinite F^2 (1); due qualsivogliano di tali F^2 hanno di comune tre e quindi tutti i punti di g, e per ciò anche una k^3, di cui g è una secante propria od impropria (**). Questa k^3 passa pei sei punti associati situati fuori di g, e forma con g una delle k^4 che possono condursi per gli otto punti P. Coll'ajuto del teorema or ora dimostrato, dati sette dei punti associati P, si può costruire l'ottavo linearmente.

4. Una k^4 in generale è segata da una F^2 in otto punti associati (1). Se quattro di questi sono contenuti in un piano, anche gli altri quattro sono in un piano, poichè allora una delle F^2 passanti per gli otto punti si decompone in due piani. Se di otto punti associati P, sette sono situati in una k^3, anche l'ottavo giacerà sopra k^3, e potrà essere scelto ad arbitrio in questa curva. Infatti ogni F^2 contenente gli otto punti P passa per k^3, avendo con k^3 più di sei punti comuni; ogni k^4 condotta per gli otto punti P si scomporrà adunque in k^3 e in una secante di k^3.

5. Mediante sei punti P, quattro qualunque dei quali non siano situati in un piano, sono coniugati tra loro due a due tutti gli altri punti dello spazio, in modo che due punti coniugati formino coi sei dati un gruppo di punti associati (1). Ciascuna retta g congiungente due punti coniugati è una secante della k^3 che contiene i sei punti dati P (3). Siccome k^3 e g formano assieme una k^4, e sono quindi tagliati da una F^2 qualunque in otto punti associati; e siccome la retta g sega un fascio di superficie di 2.° grado passante pei sei punti P in punti accoppiati in involuzione, ne segue ancora: Ogni secante g di k^3 contiene un'involuzione tale che due punti coniugati di essa formano un gruppo di punti associati coi sei punti dati. I punti doppi di questa involuzione g sono associati a sè stessi e sono separati armonicamente dai due punti coniugati giacenti su k^3. — A ciascun punto di k^3 sono coniugati tutti gli altri punti di questa curva (4), mentre a ciascuno dei sei punti P sono coniugati tutti i punti del cono K^2 che projetta k^3 da P.

6. Se due qualsivogliano di otto punti associati si riuniscono in un solo punto A associato a sè stesso (5), gli altri sei punti sono projettati da A per mezzo delle rette di un cono di 2.° grado;

(*) Questo teorema fu per la prima volta enunciato dal sig. Hesse nel Giornale di Crelle, t. 26.
(**) Cfr. la mia *Geometrie der Lage,* parte 2.ª, pag. 74.

e viceversa. Infatti congiungendo A con cinque dei punti rimanenti mediante una k^3 e col sesto mediante una retta g, la g è una secante di k^3 (3), e deve perciò giacere sul cono K^2 che projetta k^3 da A. — I vertici di tutt'i coni K^2 passanti per sei punti dati P giacciono, com'è noto, sopra una F^4; questa superficie di 4.° ordine passa per le quindici rette congiungenti i sei punti P e per le dieci rette intersezioni di due dei piani condotti per questi punti. Essa contiene anche la k^3 che unisce fra loro i sei punti P; la superficie F^4 è tagliata in generale dalle secanti della k^3 in quattro punti armonici, ed è quindi osculata dalle tangenti della k^3.

7. Sei punti dello spazio determinano, presi tre a tre, venti piani o dieci coppie di piani, che possiamo riguardare come le dieci coppie di facce opposte di un esagono gobbo. « Le dieci coppie di facce opposte di un esagono, « inscritto in una k^3, tagliano ogni secante g di k^3 in dieci coppie di punti « di un'involuzione, nella quale anche i due punti situati su k^3 sono coniugati « fra loro (4 e 5). I sei vertici sono projettati da questi ultimi punti e dai due « punti doppi di g mediante sei raggi di un cono K^2 (6) ». — La prima parte di questo teorema corrisponde ad un noto teorema sul quadrilatero inscritto in una conica k^2.

8. Se per sei punti P di una k^4 si conducono delle F^2 ad arbitrio queste tagliano la k^4 ancora in altri due punti Q, e le congiungenti di queste coppie di punti formano un iperboloide. Queste congiungenti sono secanti comuni di k^4 e della k^3 che può condursi pei sei punti P (3). Ma due qualunque di tali secanti possono essere congiunte con k^3 mediante una F^2, la quale passa anche per k^4, perchè ha con k^4 più di otto punti comuni. Da questa considerazione e da (2) si ricava il teorema enunciato, nonchè il seguente: Se una k^3 ed una k^4 si tagliano fra loro in sei punti, esse sono situate sopra una F^2 ed hanno per secanti comuni le generatrici di un sistema di questa superficie.

9. « Le dieci coppie di facce opposte d'un esagono completo inscritto in « una k^4 tagliano ancora la k^4 in dieci coppie di punti, le dieci congiungenti « dei quali appartengono ad un iperboloide (8) ». Se ai sei vertici dell'esagono « si aggiungono ancora altri tre punti di k^4, si ricava facilmente: Nove punti « qualsivogliano di una k^4 determinano, presi tre a tre, 84 piani o 280 terne « di piani, in modo che ogni terna contenga tutt'i nove punti. Queste terne « di piani incontrano la k^4 ancora in 280 terne di punti, ed i 280 piani con-

« giungenti questi ultimi s'intersecano in un solo e medesimo punto S di k^4. » « Cioè ciascuno degli 84 piani appartiene a dieci terne, e i dieci piani congiungenti le terne di punti corrispondenti s'incontrano in una secante (passante per S) di k^4, ecc.

10. Le generatrici (di uno stesso sistema) di un iperboloide passante per k^4 uniscono a due a due i punti di questa curva gobba, in modo che sei punti qualsivogliano P di k^4, formanti con una di quelle coppie di punti un gruppo di punti associati, formeranno un gruppo analogo con ciascuna altra coppia (8). Tutte le k^4, che possono condursi per sei qualsivogliano punti P, sono situate sopra una F^2, che è l'iperboloide dato.

11. Siano A, A_1 e B, B_1 due coppie di punti di una k^4, dalle congiungenti dei quali la k^4 sia projettata mediante due fasci projettivi di piani (2), allora si ricava da (10): Sei qualsivogliano punti di k^4, tre dei quali situati in un piano con A e tre con A_1, formano con B e B_1 un gruppo di punti associati. Tenendo fissi i tre punti che sono situati in un piano con A_1, ne segue ancora: Se per cinque punti P di una k^4 si conducono delle superficie di 2.° grado ad arbitrio, ciascuna di esse taglia la k^4 ancora in tre altri punti Q, il cui piano passa per un punto fisso A di k^4. Tre qualsivogliano punti Q di k^4, situati in un piano con A, formano coi cinque punti P un gruppo di punti associati. Ciò si dimostra per mezzo di (8).

12. Sia R un sistema di generatrici di un iperboloide F^2, passante per k^4, cioè un sistema di secanti di k^4 (2), e sia s una generatrice dell'altro sistema. Allora si può costruire su ciascuna retta t di R quel punto P_1 che è separato armonicamente dai due punti d'incontro di t con k^4, per mezzo del punto P d'incontro di t con s. Ora io dico che: Tutti questi punti P_1 giacciono in una k^3, che evidentemente passa per le due intersezioni di s e k^4, come pure pei punti di contatto di tutte le tangenti di k^4 appartenenti ad R. Il sistema R è infatti incontrato da s in una punteggiata ad esso prospettiva, e se cerchiamo i piani polari dei punti di s rispetto ad una qualunque F^2, passante per k^4, essi formano un fascio di piani projettivo ad s e quindi anche ad R. Ma questo fascio genera con R l'accennata k^3. Al più potendo avere k^3 sei punti comuni con k^4, due dei quali situati su s, ne segue: Ogni sistema R di generatrici di una F^2

passante per k^4, contiene al più quattro tangenti di k^4; i quattro punti di contatto possono essere congiunti da una k^3 situata sopra F^2, ai due punti di k^4 situati sopra una qualunque generatrice dell'altro sistema e quindi con questi due punti contati due volte formano un gruppo di punti associati. L'ultima parte di questo teorema di Chasles emerge da (3), poichè tutte le generatrici del secondo sistema sono secanti della k^3.

13. Dati due punti A, A_1 sopra una k^4, possono in generale costruirsi altri quattro punti B, in modo che le tangenti in questi quattro punti e la retta $\overline{AA_1}$ giacciano con k^4 sopra una F^2 (2 e 12). Sei punti qualsivogliano della k^4, tre dei quali siano in un piano con A e gli altri tre in un piano con A_1, vengono projettati da ciascuno di quei quattro punti B mediante sei raggi di un cono K^2 (6 e 11). In tre punti qualunque Q di k^4, situati in un piano con uno dei quattro punti B, la k^4 è toccata da tre coni di 2.° grado, aventi gli altri tre punti B per vertici. Perchè i punti A ed A_1 possono coincidere insieme col punto B.

14. Se F^2 ed F_1^2 si tagliano secondo k^4, si costruiscono nel modo seguente le due secanti di k^4 che passano per un punto arbitrario P. Si determinino i piani polari π e π_1 di P rispetto ad F^2 ed F_1^2, come pure la loro intersezione p, e si congiunga P con p mediante un piano. I quattro punti d'intersezione di k^4 con questo ultimo piano sono due a due separati armonicamente da P e p, e due delle loro congiungenti sono le secanti richieste. Quando k^4 è incontrata da p, una delle secanti passa pel punto d'incontro ed è una tangente condotta da P a k^4. Ora se P descrive una retta arbitraria g, π e π_1 generano due fasci projettivi di piani, e quindi la loro intersezione p genera una F^2, la quale può avere al più otto punti comuni con k^4; adunque: Una retta qualsivoglia g è tagliata al più da otto tangenti di una k^4, e gli otto punti di contatto formano un gruppo di punti associati. Per conseguenza la superficie sviluppabile delle tangenti di una k^4 è dell'8.° ordine, com'è noto già da lungo tempo; l'ultima parte del teorema fu già pubblicata senza dimostrazione dal signor Chasles nei Comptes Rendus t. 54, 1862.

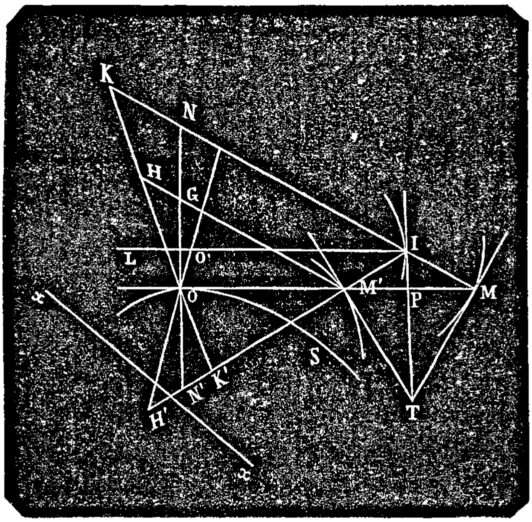
Zurigo, 30 giugno 1868.

Sur un système particulier de coordonnées.
Application aux caustiques planes.

(*par M.* E. HABICH, *à Paris*).

I. Notions préliminaires.

Si l'on porte sur la tangente OM d'une courbe plane (E), et à partir du point de contact O, une longueur $OM = r$, on déterminera, de cette manière, un point M situé dans la partie du plan couverte par les tangentes de la courbe (E).



La position du point de contact O sera définie lorsqu'on connaîtra la longueur de l'arc $SO = s$ qui mesure, sur la courbe (E), la distance du point O à l'origine fixe S.

Il s'ensuit de là que, connaissant la courbe (E), l'origine S, les longueurs et les signes du rayon vecteur r et de l'arc s, on pourra déterminer la position du point M.

Toutes ces conditions peuvent être renfermées dans deux équations :

$$s = \varphi(\theta), \tag{1}$$

$$r = \psi(\theta), \tag{2}$$

où θ exprime l'angle formé par la tangente OM avec l'axe fixe xx.

La première de ces équations (1), qui détermine la courbe (E) au moyen de la relation entre la longueur de l'arc s et l'angle de courbure θ, a été employée pour la première fois par EULER (*).

On reconnait sans difficulté que les expressions $s=a\theta$, $s=a\sin n\theta$, $s=a\tan\theta$,... sont les équations du cercle, de l'epicycloïde, de la chaînette,...

Pour passer des coordonnées s et θ aux coordonnées rectangulaires de DESCARTES, on a les relations:

$$x=\int\cos\theta\, ds,$$

$$y=\int\sin\theta\, ds,$$

en prenant la droite xx pour l'axe des abscisses.

L'équation (2), où r varie avec l'angle θ et par suite avec l'arc s, c'est-à-dire, avec le déplacement du point de contact O sur la courbe (E), est évidemment celle d'une ligne (A), qui rencontre les tangentes de la courbe (E) (**).

Pour déterminer la tangente, la normale etc. à la ligne (A), remarquons que les coordonnées s, r, θ, pour un accroissement infiniment petit $d\theta$ de l'angle θ, peuvent être considérées comme étant des coordonnées polaires, ayant pour pôle le point d'intersection de la tangente OM avec la tangente infiniment voisine, c'est-à-dire le point O où la première touche son enveloppe (E).

Comme le rayon vecteur $r=OM$ est la longueur de la tangente OM et le rayon vecteur infiniment voisin $r+dr-ds$ est la longueur de la tangente infiniment voisine à OM comprise entre son point d'intersection avec OM et la courbe (A), il s'ensuit que la sous-normale polaire ON, qui détermine le point N, où la normale NM à la ligne (A) rencontre la normale correspondante ON de l'enveloppe (E), sera:

$$ON=\frac{dr}{d\theta}-\frac{ds}{d\theta} \text{ (***)}. \tag{3}$$

(*) Voir les articles du D.r WHEWELL dans les *Cambridge Philosophical Transactions*, tome VIII et IX.

(**) Les tangentes et les développantes de la courbe (E) constituent un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

(***) En considérant le rayon vecteur OM comme une droite dont le point M parcourt la ligne (A) et qui reste constamment tangente à la courbe (E), on pourra déduire la formule (3), au moyen des propriétés connues du centre instantané de rotation, qui se trouve, dans le cas considéré, au point N.

Les Mondes, tome XIV, 1867, pages 71 et 403.

En appelant $d\sigma$ l'élément de l'arc de la ligne (A) et μ l'angle TMO formé par la tangente MT avec le rayon vecteur OM, on trouve:

$$d\rho = n.d\theta, \quad \text{où} \quad n = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

et

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}}. \tag{5}$$

L'angle de contingence $d\varepsilon$ correspondant à l'arc $d\sigma$, a pour expression:

$$d\varepsilon = d\mu + d\theta. \tag{6}$$

On le reconnait en considérant la somme des angles d'un quadrilatère, formé par les tangentes et par les rayons vecteurs correspondants à deux points infiniment voisins de la courbe (A).

En différentiant l'équation (5), on peut déduire la valeur de $d\mu$ en fonction des variables s, r, θ et des leurs dérivées successives, et par suite aussi, au moyen de la formule (6), l'expression de $d\varepsilon$ en fonction des mêmes variables.

En divisant ensuite $d\sigma$ par $d\varepsilon$, on obtiendra l'expression du rayon de courbure ρ de la ligne (A):

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{ds}{d\theta}\left(3\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}\right) + r\frac{d^2s}{d\theta^2}}. \tag{7}$$

Toutes les formules trouvées se rapporteront aux coordonnées polaires, si on suppose que l'enveloppe (E) est un point, c'est a dire que $\frac{ds}{d\theta} = 0$.

Comme application, cherchons l'équation de la courbe (A), qui coupe sous un angle constant les tangentes de l'enveloppe (E).

On a, dans ce cas:

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}} = \frac{1}{a} = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} - ar - \frac{ds}{d\theta} = 0,$$

et en intégrant:

$$r = e^{a\theta}\left[\int e^{-a\theta} ds + c\right],$$

pour l'équation de la ligne cherchée (A).

Les formules (3), (4) et (6) donnent:

$$ON = ar, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = n = r\sqrt{a^2+1} \quad \text{et } d\varepsilon = d\theta,$$

d'où:

$$\rho = MN = n,$$

c'est-à-dire que le centre de courbure de la ligne (A) coïncide avec le point N.

Si $\frac{ds}{d\theta} = 0$, $r = c'e^{a\theta}$ et la courbe (A) est une spirale logarithmique, ce qu'on pouvait prévoir.

Remarquons encore que la courbe (E) est l'enveloppe des droites OM, qui coupent sous un angle constant la ligne (A) et que le point de contact O est la projection du centre de courbure N de la ligne (A), sur la droite OM.

On reconnait aisément que lorsque:

$$\mu + \theta = a = \text{const.},$$

et par suite:

$$\operatorname{tang}\mu = \operatorname{tang}(a - \theta), \quad \text{etc.},$$

la ligne (A) est droite;

que, lorsque la ligne (A) est donnée par l'équation $r = a = \text{const.}$, $ON = -\frac{ds}{d\theta}$, et par suite la droite qui joint le point M avec le centre de courbure de l'enveloppe (E), est normale à la ligne (A); etc., etc.

On pourrait multiplier les applications particulières, soit en cherchant l'équation d'une ligne au moyen d'une propriété connue, soit inversement en cherchant les propriétés d'une courbe au moyen de l'équation connue etc. (*); sur quoi nous ne nous arrêterons pas ici, et nous compléterons seulement les

(*) Parmi les questions qu'on peut traiter au moyen des coordonnées s, r, θ, citons celle des roulettes, qui a pour objet de trouver une courbe (C) telle qu'en roulant sur une courbe donnée (D) elle décrive par quelque point de son plan une autre courbe donnée (A).

notions précédentes en donnant l'expression de la surface comprise entre deux rayons vecteurs, la ligne (A) et l'enveloppe (E):

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\theta. \tag{8}$$

En appliquant la formule (8) au cas particulier où l'enveloppe (E) est une courbe fermée, et la ligne (A) déterminée par $r = a =$ const., nous obtiendrons:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \pi a^2.$$

Ce cas particulier a été remarqué par Steiner.

II. Transformation des lignes.

On appelle transformée d'une ligne (A) une autre ligne (A') déduite de la première suivant une loi donnée.

Nous nous occuperons ici des transformations très générales, comprises dans la relation:

$$f(\mu, \mu') = 0, \tag{9}$$

c'est-à-dire, des transformations dans lesquelles on connait la loi qui lie les angles μ et μ' sous lesquels les lignes (A) et (A') rencontrent les tangentes de l'enveloppe (E).

En éliminant μ et μ' entre les relations (5) et (9), on obtiendra une équation différentielle, qui exprime la dépendance mutuelle des coordonnées des lignes (A), (A').

En intégrant cette dernière, dans le cas où l'on connait l'équation de l'une des lignes, par exemple de (A), on trouvera celle de sa transformée (A').

Comme application, nous étudierons avec détails le cas particulier important, où l'équation (9) est:

$$\mu + \mu' = \pi, \tag{10}$$

c'est-à-dire, où les lignes (A) et (A') rencontrent les tangentes de l'enveloppe (E) sous des angles supplémentaires.

De l'équation (10) on a:

$$\operatorname{tang}\mu = -\operatorname{tang}\mu'$$

ou

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}} = -\frac{r'}{\frac{dr'}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}}, \tag{11}$$

pour l'expression différentielle de la relation qui existe, dans la transformation considérée, entre les coordonnées des courbes (A) et (A').

Si la ligne (A) est connue, dans ce cas, en intégrant l'équation différentielle du premier ordre (11), par rapport à r' et en la simplifiant ensuite, on trouve

$$r' = \frac{1}{r} e^{\int \frac{ds}{r}} \left[\int r e^{-\int \frac{ds}{r}} + c \right] \tag{12}$$

pour l'équation de sa transformée (A').

On appelle réciproques les lignes qui rencontrent sous des angles supplémentaires les rayons vecteurs émanant d'un même point, qui est le pôle de la transformation.

En généralisant cette définition, nous appellerons les courbes (A) et (A') lignes réciproques par rapport à la courbe (E), et le point O pôle variable de transformation.

Remarque. Si $\mu + \mu' = \frac{\pi}{2}$, les lignes ($A$) et ($A'$) rencontrent les tangentes de la courbe (E) sous des angles complémentaires; cette transformation, aussi bien que la précédente, sont renfermées dans la formule $\mu + \mu' = \text{const.}$

Si la constante est nulle, les courbes (A) et (A') coupent les tangentes de l'enveloppe (E) sous des angles égaux; on pourrait les appeler lignes semblables par rapport à la courbe (E).

En nommant $d\varepsilon'$ l'angle de contingence de la ligne (A') correspondant à l'accroissement $d\theta$ de l'angle θ, on a:

$$d\varepsilon' = d\theta + d\mu' = d\theta - d\mu, \tag{13}$$

car la formule (10) donne $d\mu' = -d\mu$.

En ajoutant les équations (6) et (13), il vient:

$$d\varepsilon + d\varepsilon' = 2d\theta. \tag{14}$$

ou

$$\frac{d\sigma}{\rho}+\frac{d\sigma'}{\rho'}=2d\theta,$$

et encore, en vertu de la (4),

$$\frac{n}{\rho}+\frac{n'}{\rho'}=2\,(*). \tag{15}$$

On reconnait aisément, d'après la démonstration employée, que la formule (15) est applicable à toutes les transformations renfermées dans la relation $\mu+\mu'=$ const.

La formule (15), dans le cas des lignes réciproques, peut être interprétée géométriquement.

Pour cela, du point M' de la ligne (A') traçons la droite $M'H$ parallèle à MN; soient G et H les points où la droite $M'H$ rencontre la normale ON et la droite OK, qui joint le pôle O avec le centre de courbure K de la ligne (A); on aura:

$$M'G=M'N'=n',$$

ou.

$$\frac{M'G}{M'H}=\frac{MN}{MK}, \qquad \text{ou } \frac{n}{\rho}=\frac{n'}{M'H},$$

et par là, la formule (15) se changera en:

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{M'H}=\frac{2}{n'}, \tag{16}$$

d'où l'on voit qu'en prenant $M'H'=M'H$ sur la normale $M'N'$, le centre de courbure de la ligne (A') est le conjugué harmonique du point H' par rapport aux points M', N'.

En prolongeant OK jusqu'à son intersection en K' avec la normale $M'N'$, on trouve:

$$\widehat{N'OK'}=\widehat{HOG}=\widehat{N'OH'};$$

et comme l'angle $N'OM'$ est droit, il s'ensuit que le point K' est le conjugué harmonique du point H' par rapport aux points M' et N', c'est-à-dire qu'il est le centre de courbure de la ligne (A').

(*) La formule (15) dans le cas des coordonnées polaires a été donnée par M. Nicolaïdes, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome IV, 1865, page 144.

Les centres de courbure des lignes réciproques (A) et (A') se trouvent sur une même droite passant par le point O, pôle correspondant de transformation.

Dans le cas particulier, où la ligne (A) est droite, $\rho = \infty$, et par suite le centre de courbure de sa réciproque (A') se trouve sur la perpendiculaire abaissée du pôle O sur la droite (A).

De l'équation (15) on obtient pour l'expression du rayon de courbure ρ' de la réciproque (A'):

$$\rho' = \tfrac{1}{2} n'. \tag{15'}$$

III. **Caustiques par reflexion.**

Pour appliquer les notions précédentes aux lignes caustiques par reflexion, prolongeons les tangentes et les normales, aux points correspondants M et M' des courbes réciproques (A) et (A'), jusqu'à leur intersection en T et en I; on aura:

$$\widehat{IMM'} = \widehat{IM'M}, \qquad \widehat{MM'T} = \widehat{TMM'}.$$
$$MI = M'I, \qquad MT = M'T,$$

et la droite IT perpendiculaire à MM' la divisera en P en parties égales:

$$MP = M'P.$$

Nommons (D) la courbe lieu géométrique du point I, intersection des normales. Il est évident que cette courbe (D) est le lieu des points également distants des lignes (A) et (A') et par suite, comme on le sait, la droite IT est sa tangente (*).

La ligne (P), lieu géométrique du point (P), est une courbe décrite par le sommet de l'angle droit OPI, dont les côtés OP et PI restent constamment tangents aux courbes (D) et (E). Nous l'appellerons podaire de la courbe (D) par rapport à la courbe (E) ou inversement.

(*) On reconnait cela facilement au moyen de la méthode des tangentes de Roberval, ou par la géométrie infinitésimale. — Voir un article de Timmermans dans la *Correspondance Mathématique et Phisique* de Quetelet, tome I, page 336.

Dans le cas particulier où l'une des courbes, par exemple (E), devient un point, on retombe sur le cas ordinaire de la podaire d'une courbe (D) par rapport à un point (pôle) (E).

Pour passer de ces considérations à la question des caustiques par reflexion, supposons que la ligne (A) est l'anticaustique des rayons incidents (courbe qui coupe normalement les rayons incidents) et la ligne (D) la dirimante (courbe refléchissante); dans ce cas la réciproque (A') qui rencontre normalement les rayons refléchis sera leur anticaustique et sa développée (C') la caustique.

La développée (C) de l'anticaustique (A) est la caustique des rayons incidents.

Les anticaustiques des rayons incidents (A) et des rayons refléchis (A') sont deux courbes réciproques, par rapport à l'enveloppe (E) des perpendiculaires abaissées des différents points des lignes (A) ou (A') sur les tangentes de la dirimante (D), menées par les points d'incidence correspondants, c'est-à-dire par les points où les rayons issus normalement de (A) ou de (A') rencontrent la dirimante (D).

Le théorème démontré précédemment sur le centre de courbure des lignes réciproques, rapproché de ce que nous venons de dire, conduit à la règle suivante:

Si du point de départ M du rayon incident MI normal à la courbe (A) on abaisse une perpendiculaire MP sur la tangente au point d'incidence I de la dirimante (D), le point K' où le rayon refléchi IK' touche la caustique (C') se trouvera sur la droite menée par le centre de courbure K de l'anticaustique (A) et par le point O, où la perpendiculaire MP touche son enveloppe (E).

Cherchons maintenant les relations qui existent entre les lignes (A), (A'), (E), et les lignes (D) et (P).

En désignant OP par q, on a:

$$q = \tfrac{1}{2}(r + r'). \tag{17}$$

Comme la ligne (D) est l'enveloppe du coté PI de l'angle droit OPI, dont le sommet P parcourt la courbe (P) et dont l'autre coté OP reste constamment tangent à la courbe (E), il s'ensuit, en vertu d'une propriété connue du mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan, que le point de contact I est la projection du centre instantané de rotation sur la droite PI.

De la relation (3), on a pour déterminer le centre instantané de rotation O_1,

$$OO_1 = PI = \frac{dq}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta}.$$

La courbe lieu géométrique du point O_1 est semblablement la podaire de la développée de la ligne (D) par rapport à la développée de l'enveloppe (E), et par suite la distance du point de contact L du côté $O_1 L$ au point O_1 est:

$$O_1 L = \frac{d^2 q}{d\theta^2} - \frac{d^2 s}{d\theta^2}.$$

Comme L est le point de contact de la normale IL de la courbe (D) avec son enveloppe, c'est-à-dire avec la développée de la ligne (D), il s'ensuit que le rayon de courbure R_1 de cette dernière a pour expression:

$$R_1 = IL = q + \frac{d^2 q}{d\theta^2} - \frac{d^2 s}{d\theta^2}. \tag{18}$$

En remarquant maintenant que l'angle de contingence de la courbe (D) est $d\theta$, on obtiendra, en différentiant la relation (18) par rapport à θ, l'expression du rayon de courbure de la développée de la ligne (D); et ainsi de suite.

De l'équation (11), qui exprime la relation qui existe entre les coordonnées des courbes réciproques (A) et (A'), on tire:

$$r\frac{dr'}{d\theta} + r'\frac{dr}{d\theta} = (r + r')\frac{ds}{d\theta}.$$

En intégrant cette équation différentielle et en tenant compte de la relation (17), on trouve:

$$rr' = \int (r + r')\, ds + c = 2\int q\, ds + c = u^2; \tag{19}$$

$rr' = u^2$ est la puissance variable de transformation.

La puissance de transformation u^2 est constante quand $q\,ds = 0$, ce qui a lieu dans deux cas:

lorsque $q = 0$; dans ce cas la ligne (D) est la développée de la courbe (E); r et r' ont des valeurs constantes, égales et de signe contraire, et par suite les réciproques (A) et (A') sont deux lignes qu'on obtient en portant sur les tangentes de la courbe (E), à partir du point de contact O et dans les deux sens, une longueur constante;

et lorsque $ds=0$, c'est-à-dire quand l'enveloppe (E) est un point, ce qui a lieu dans le cas ordinaire de la transformation par rayons vecteurs réciproques (coordonnées polaires).

Au moyen des relations (17) et (19), on reconnait que les expressions des rayons vecteurs r et r' des réciproques (A) et (A') sont les racines d'une équation du second degré:

$$q \pm \sqrt{q^2-u^2}\,. \tag{20}$$

Remarquons ici que lorsque la dirimante (D) seule est connue, dans ce cas il y a une infinité de courbes réciproques (A) et (A') qui peuvent être ses anticaustiques, car elles dépendent de l'enveloppe indéterminée (E).

Si la dirimante (D) et l'enveloppe (E) sont connues, il y a aussi une infinité des réciproques (A) et (A') qui satisfont à la question et qui ne diffèrent entre elles que par la constante arbitraire c, qui entre dans l'expression (19) de la puissance de transformation u^2.

Les lignes réciproques (A) et (A') sont les enveloppes d'un cercle de rayon variable $MI=M'I=v$, dont le centre I se déplace sur la courbe (D).

Comme:

$$(IO+IM)(IO-IM)=rr'=u^2,$$

on a:

$$MI^2=v^2=IO^2-u^2,$$

c'est-à-dire que le rayon v est égal à la longueur de la tangente menée du point I au cercle tracé autour du pôle O avec u pour rayon. On pourrait appeler ce cercle, cercle variable d'inversion.

De l'équation (15), en appelant ds_1 l'élément de l'arc de la dirimante (D) correspondant à $d\theta$, on trouve:

$$\frac{d\sigma}{\rho}+\frac{d\sigma'}{\rho'}=2\,\frac{ds_1}{R_1}\,,$$

et comme:

$$\frac{d\sigma}{ds_1.\sin\mu}=\frac{\rho}{\rho-v}, \quad \text{et} \quad \frac{d\sigma'}{ds_1.\sin\mu}=\frac{\rho'}{\rho'+v}\,,$$

il s'ensuit que:

$$\frac{1}{\rho-v}+\frac{1}{\rho'+v}=\frac{2}{R_1.\sin\mu}\,,$$

ou:

$$\frac{1}{KI}+\frac{1}{K'I}=\frac{2}{R_1.\sin\mu}\,.$$

Si la ligne (A) est droite, $\rho = \infty$, et par suite:

$$2(\rho' + v) = R_1 \sin\mu = 2 . R'I.$$

Les formules précédentes sont dues à JEAN BERNOUILLI et à LAMBERT.

On pourrait, avec la même facilité, déduire les autres formules connues, relatives aux caustiques par reflexion.

De tout ce que nous venons de démontrer, on reconnait que la question des caustiques par reflexion, qui constitue une méthode de transformation, dépend de celles des rayons vecteurs réciproques et des podaires, toutes les deux convenablement généralisées.

Remarque. Dans toutes les transformations, où les points correspondants M et M' des lignes (A) et (A') restent sur le même rayon vecteur, et par suite qui sont renfermées dans la formule (9), on a:

$$\frac{MI}{M'I} = \frac{\cos\mu'}{\cos\mu} = n, \tag{21}$$

c'est-à-dire que la ligne (D), lieu géométrique de l'intersection des normales, est une courbe dont les points se trouvent, par rapport aux lignes (A) et (A'), à des distances proportionnelles aux cosinus des angles μ et μ'.

Si $n =$ const., les lignes (A) et (A') sont les anticaustiques des rayons incidents et des rayons refractés par la courbe (D). On reconnait aisément que, seulement dans ce cas, la droite IT qui joint les points d'intersection des tangentes T et des normales I est tangente à la courbe (D), etc. On pourrait sans difficulté déduire de ce qui précède les différentes propriétés des caustiques par refraction. Le cas des caustiques par reflexion correspond à $n = -1$.

Applications particulières.

1. Si l'anticaustique (A) est un point (foyer), dans ce cas l'enveloppe (E) coincide avec ce point, et l'anticaustique (A') est égale à la podaire (P), amplifiée au double, de la dirimante (D), par rapport au foyer (A).

2. Si l'enveloppe (E) est un point, on tire des équations (17) et (19):

$$r + r' = 2q, \tag{a}$$

et

$$rr' = a^2 = \text{const.} \tag{b}$$

Les relations (a) et (b) permettent de déterminer trois des lignes (A), (A'), (P) et (D), lorsqu'on connait l'équation polaire d'une seule par rapport au pôle (E) et la puissance de transformation a^2. Si le pôle et la puissance de transformation restent indéterminés, il y a une infinité de courbes (A) et (A') qui satisfont à la question. Pour avoir, dans ce dernier cas, l'équation générale des lignes réciproques, remarquons que:

$$q = f(\theta) \tag{c}$$

étant l'équation de la podaire de la dirimante (D), par rapport à un pôle quelconque O, l'équation de la podaire de la même courbe (D), par rapport à un autre pôle O', sera:

$$q' = q - m\cos(\theta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(r + r'), \tag{d}$$

où $m = OO'$ est la distance des deux pôles O et O', et α l'angle formé par la droite OO' avec la direction fixe de l'axe polaire.

En résolvant maintenant les équations (b) et (d) par rapport à r et r', on trouvera l'équation générale des lignes réciproques cherchées, qui satisfont aux conditions d'avoir pour enveloppe (E) un point, et pour dirimante la courbe donnée (D).

Eclaircissons cela par un exemple, en prenant pour dirimante (D) une parabole. La podaire par rapport au foyer est la tangente au sommet, dont l'équation est, en appelant n le demi-paramètre de la parabole,

$$q = \frac{n}{\cos\theta}.$$

L'équation de la podaire de la parabole donnée, par rapport à un point quelconque de son plan, sera (d):

$$q' = \frac{n}{\cos\theta} - m\cos(\theta - \alpha),$$

et par suite, on trouvera pour les valeurs des rayons vecteurs r et r' des courbes réciproques (A) et (A'):

$$\frac{n}{\cos\theta} - m\cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{\left[\frac{n}{\cos\theta} - m\cos(\theta - \alpha)\right]^2 - a^2}.$$

Les courbes (A), (A)$'$ et (P) sont du troisième degré et appartiennent, d'après Newton, aux classes des hyperboles défectives. Les lignes (A) et (A')

sont les seules courbes réciproques, par rapport à un point, qui peuvent être anticaustiques des rayons incidents et des rayons refléchis par la parabole.

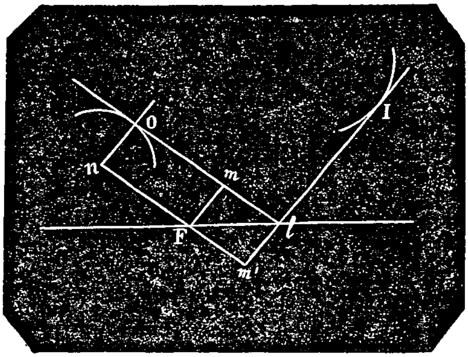
Lorsqu'on prend pour pôle le foyer de la parabole, $n=0$, et r et r' deviennent:

$$\frac{m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2\theta}}{\cos\theta}.$$

Les lignes (A) et (A') appartiennent, dans ce dernier cas, suivant que $a \lesseqgtr m$, à trois espèces 39, 41 et 45 de la classe des hyperboles défectives, ayant un diamètre (*).

Lorsque $m=a$, la courbe est une strophoïde, ligne décrite par le sommet de l'angle droit, dans la génération newtonienne de la cissoïde.

3. Soit la ligne (P) une droite; dans ce cas, en supposant que l'équation de la podaire de l'enveloppe (E), par rapport à un point F de la droite (P), prise pour axe polaire, est:



$$p = Fm = f(\theta), \tag{e}$$

on aura pour l'équation de la podaire de la dirimante (D), par rapport au même pôle F:

$$p' = Fm' = lm = -p \operatorname{tang}\theta = f\left(\theta' = \frac{\pi}{1}\right) \operatorname{cotang}\theta'. \tag{f}$$

$$\theta = mFl \quad \text{et} \quad \theta' = mFl.$$

Les formules (17) et (19), en remarquant que:

$$q = Ol = Om + ml = Fm' + Fn = p' + \frac{dp}{d\theta},$$

et que d'après (18):

$$\frac{ds}{d\theta} = q + \frac{d^2q}{d\theta^2},$$

donnent:

$$r + r' = 2q = 2\left(p' + \frac{dp}{d\theta}\right), \tag{g}$$

(*) Espèces 43, 45 et 49 d'après Stirling. Voir Isaaci Newtoni *Enumeratio linearum tertii ordinis*, edit. Parisiis 1797, pag. 20 et 154.

et:

$$rr' = 2\int q\,ds = 2\int\left(p' + \frac{dp}{d\theta}\right)\left(p + \frac{d^2p}{d\theta^2}\right)d\theta + c. \qquad (h)$$

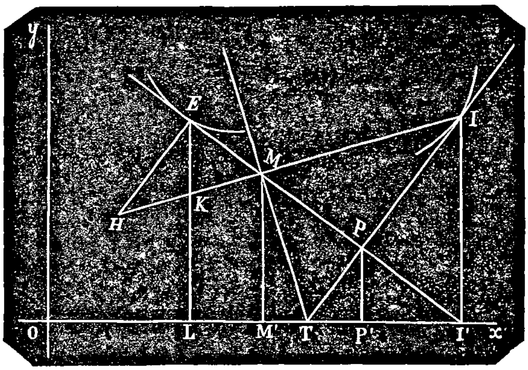
Des relations (g) et (h) on peut déduire les équations des anticaustiques (A) et (A') rapportées à l'enveloppe (E). On procéderait d'une manière analogue dans le cas où la ligne connue serait la dirimante (D).

On pourrait encore arriver aux résultats précédents par une autre voie en appliquant les propriétés connues du centre instantané de rotation et en employant les coordonnées rectilignes rectangulaires: on prendra la droite (P) pour un des axes des coordonnées.

4. Si la dirimante (D) est droite, l'enveloppe (E) se trouve rejetée à l'infini, et les anticaustiques (A) et (A') sont deux lignes symétriques par rapport à la droite (D).

5. Comme dernière application, considérons le cas connu des rayons incidents parallèles, c'est-à-dire le cas où l'anticaustique (A) est droite.

Nous entrerons dans quelques développements sur cette application, pour faire voir que notre procédé conduit aux mêmes résultats que la méthode ordinairement employée et qu'il la complète:



Soit:

$$y = f(x) \qquad (i)$$

l'équation de la dirimante (D), en prenant pour l'axe des abscisses Ox l'anticaustique (A), dont l'équation est $y = 0$.

Abaissons du pied I' de l'ordonnée II' (rayon incident) la perpendiculaire $I'P$ sur la tangente IP de la dirimante (D), au point d'incidence I; l'enveloppe de cette perpendiculaire $I'P$ sera la courbe (E), et le lieu géométrique du point P sera la podaire (P) de la dirimante (D) par rapport à l'enveloppe (E) ou inversement.

Traçons maintenant la droite HI, formant avec la tangente IT l'angle $\widehat{HIT} = \widehat{TII'}$; HI sera la direction du rayon refléchi, et les points M et K, où elle rencontre la perpendiculaire $I'P$ et l'ordonnée EL du point de contact E de la même perpendiculaire IP avec son enveloppe (E), appartiendront à l'anticaustique (A') et à la caustique (C') des rayons refléchis.

Remarquons encore que la droite MT est tangente à l'anticaustique (A) au point M, et que H étant le point d'intersection du rayon refléchi IM avec la normale EH de l'enveloppe (E), on a $(15')$:

$$MK = HK.$$

Cherchons à présent les coordonnées $x_1 = OL$ et $y_1 = EL$ du point de contact E de la perpendiculaire $I'P$ avec son enveloppe (E). L'équation de la perpendiculaire IP étant:

$$Y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x), \tag{k}$$

on trouve en la différentiant par rapport à x:

$$0 = f''(x)(X - x) + f'(x),$$

et par conséquent:

$$x_1 = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}, \quad y_1 = \frac{1}{f''(x)}. \tag{l}$$

En appelant x' et y' les coordonnées OL et OR du point K de la caustique (C'), on a:

$$x' = x \quad \text{et } y' = y - (x - x_1)\operatorname{cotang} KII';$$

et comme:

$$\operatorname{cotang} \widehat{KII'} = -\operatorname{cotang} 2(\widehat{ITI'}),$$

il arrive, toute réduction faite, que:

$$x' = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}, \quad y' = f(x) - \frac{1 - f'^2(x)}{2f''(x)}. \tag{m}$$

Avec la même facilité on pourrait trouver les coordonnées des points P et M appartenant à la podaire (P) et à l'anticaustique (A') des rayons refléchis.

En éliminant maintenant x entre les relations trouvées (l), (m),...on déterminera les équations de l'enveloppe (E), de la caustique (C'),...

Les expressions (m) des coordonnées de la caustique sont identiques à celles qu'on rencontre dans les ouvrages qui traitent de ces lignes.

Sulla forma quadratica de' fattori irriduttibili delle equazioni binomie.

(*del prof.* Nicola Trudi, *a Napoli*).

Oggetto della memoria.

1. Tra i divisori commensurabili del binomio $1-x^n=0$, dove n è intero e positivo, merita speciale attenzione quello che, eguagliato a zero, ha per radici le sole radici primitive dell'equazione $1-x^n=0$: divisore che rappresenteremo col simbolo X_n, e che suol distinguersi col nome di fattore irriduttibile, perchè non può essere ulteriormente decomposto in fattori commensurabili (*). Risulta da questa definizione che il grado della funzione X_n è uguale al numero degl'interi inferiori ad n e primi ad n; di modo che, escludendo i casi poco interessanti di $n=1$ e 2, questo grado sarà sempre un numero pari, e potrà in conseguenza dinotarsi con $2m$; ma posto che $p_1, p_2, \ldots p_\varepsilon$ siano i fattori primi disuguali di n, se si faccia per brevità:

$$q=\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varepsilon},$$

si avrà:

$$n=q\, p_1 p_2 \cdots p_\varepsilon,$$

e quindi il valore di m sarà definito dalla formola:

$$2m=q\,(p_1-1)\,(p_2-1)\ldots(p_\varepsilon-1).$$

(*) La irriduttibilità della funzione X_n fu dimostrata da Gauss per m primo (*Disquisitiones arithmeticae*, art. 341). Pel caso generale la stessa proprietà fu comprovata la prima volta dal sig. Kronecker nel 1854 (*Journal de mathématiques*, t. XIX, p. 177); e più tardi ne vennero date dimostrazioni più semplici da' signori Dedekind (*Crelle*, t. LIV, p. 27), Arndt (*Idem*, t. LVI, p. 178), Lebesgue (*Annali di matematica pura ed applicata*, 1ª serie, t. II, p. 232).

la quale, se n è numero primo, si riduce a

$$2m = n - 1.$$

2. Nella stessa ipotesi di n primo si ottiene immediatamente l'espressione di X_n, poichè si ha:

$$X_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1};$$

ma, in generale, per determinare questa funzione qualunque sia il numero n, è necessaria una ricerca, la quale si riassume nella regola seguente dovuta a CAUCHY (*).

« Si sviluppi l'espressione di $2m$ senza dar luogo a veruna riduzione di « termini, i quali saranno perciò in numero pari, metà positivi, metà negativi; « e tra i primi si riproduce il numero $n = q\, p_1 p_2 \ldots p_\varepsilon$. Ora, posto che $n, n_1, n_2, \ldots$ « siano i termini positivi, ed $r, r_1, r_2, \ldots$ i negativi, la funzione X_n sarà defi- « nita dalla forma frazionaria:

$$X_n = \frac{(1 - x^n)(1 - x^{n_1})(1 - x^{n_2})\ldots}{(1 - x^r)(1 - x^{r_1})(1 - x^{r_2})\ldots}$$

« la quale, semplificata, si riduce ad una funzione intera di grado $2m$, con « coefficienti interi, e di forma reciproca, quelli de' termini estremi essendo « uguali ad 1 ».

3. Premesse queste nozioni dobbiamo rammentare che, se n è numero primo, è sempre possibile di trovare una forma quadratica equivalente alla funzione X_n: forma definita dall'equazione (**):

$$4X_n = Y^2 \mp nZ^2,$$

(*) *Exercices de mathématiques*, t. 4°, p. 230. Può anche consultarsi la memoria *Sulle equazioni binomie* da noi pubblicata nel t. 3° degli *Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* di Napoli.

(**) Intorno a questa trasformazione pel caso di n primo possono consultarsi i seguenti articoli: GAUSS, *Disquisitiones*, etc., art. 357. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, art. 510, 3ª edizione. LIBRI, *Mémoire sur la théorie des nombres*. LEBESGUE, *Recherches sur les nombres* (*Journal de mathématiques*, t. 3°, p. 128). LIOUVILLE, *Sur un point de la théorie des équations binomes* (*Idem*, 1857, t. 22, p. 413). PLANA, *Sur une nouvelle solution de l'équation à deux termes* (Accademia delle Scienze di Torino, 1850). SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, art. 538, 3ª edizione. STAUDT, *Ueber die Functionen Y und Z, welche der Gleichung $4X_n = Y^2 \mp nZ^2$ Genüge leisten, wo n eine Primzahl*, etc. (*Crelle*, 1867, t. 67, p. 205).

dove Y e Z dinotano funzioni intere di x, con coefficienti interi, la prima di grado m, l'altra di grado $m-1$, e divisibile per x; e dove inoltre è a ritenersi il segno superiore se $n \equiv 1$, e l'inferiore se $n \equiv 3$ (mod. 4). Egli è poi noto che, salvo il caso di $n=3$, le funzioni Y e Z sono entrambe di forma reciproca; però, mentre nella seconda Z i coefficienti de' termini equidistanti dagli estremi sono sempre uguali e di segni simili, nella prima Y i detti coefficienti sono uguali e di segni simili, ovvero uguali e di segni contrarii, secondochè $n \equiv 1$, o $n \equiv 3$ (mod. 4).

4. Questo teorema, che ha un'alta importanza nelle ricerche aritmetiche, è dovuto a Gauss; ma in seguito fu reso più generale e perfezionato per opera del Dirichlet; il quale da una parte ha dimostrato che la funzione X_n è suscettibile di una trasformazione interamente analoga quando n è un numero impari, non divisibile per alcun quadrato (*); e d'altra parte ha ridotto a formole la costruzione de' coefficienti delle due funzioni Y e Z, cosa dal Gauss riputata impossibile (**) nello stesso caso più semplice di n primo. Ora l'oggetto della presente memoria si è quello, per lo appunto, di completare la ricerca che abbiamo descritta; e dimostreremo infatti che una trasformazione della stessa natura ha luogo quando n è un numero comunque composto (***); anzi vedremo che essa va sempre immediatamente ridotta al caso

(*) La quistione estesa ai numeri condizionati nel modo indicato trovasi per la prima volta sommariamente esaminata dal Dirichlet in una memoria del 1835, *Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des series finies ou infinies* (*Crelle*, t. XVII, p. 57).

(**) Il Gauss così si esprime nel citato art. 357. « Terminos duos summos functionis Y semper « fieri $2x^m + x^{m-1}$, summumque functionis Z, x^{m-1} facile perspicitur; coefficientes reliqui autem, « qui manifesto omnes erunt integri, variant pro diversa indole numeri n, nec formulae analyticae « generali subiici possunt ». È giusto tuttavolta di osservare che pel caso di n primo Legendre, anche prima del Dirichlet, avea dato due metodi per determinare le funzioni Y e Z (art. 510 e 511); metodi è vero indiretti; ma ove pongasi mente all'art. 508, si dovrà riconoscere ch'egli aveva già sotto la mano gli elementi per ridurre a formole la costruzione de'loro coefficienti.

(***) Una sola proposizione troviamo pubblicata che accenni a qualche cosa di più generale di quella del Dirichlet; ed è un teorema enunciato dal Cauchy in uno de'suoi moltiplici articoli sulle funzioni alternate delle radici primitive delle equazioni binomie (*Compts rendus*, 1840, t. X), le quali tornano in sostanza alle funzioni così famose conosciute sotto il nome di *somme di* Gauss. Ma questo teorema è ben lungi dall'essere esatto; e qui crediamo di riportare testualmente le parole dell'illustre Geometra « La considération des fonctions alternées conduit aussi de la manière la plus directe au beau théorème de Gauss sur la forme quadratique que peut acquerir le premier membre d'une équation binome debarrassée de la racine 1; théorème que peut être étendu, comme l'a remarqué M. Dirichlet au cas même où l'exposant n'est pas un nombre considerato dal Dirichlet, il quale diviene così il fondamento delle nostre ricerche. Intanto, siccome la trasformazione relativa a questo caso e le formole corrispondenti sono generalmente poco conosciute, abbiamo creduto di doverne premettere una sommaria esposizione, limitandoci tuttavia a que' punti che interessano più specialmente il nostro soggetto, rimandando per maggiori sviluppi all' opera interessante di quell' illustre Geometra, pubblicata dopo la sua morte dal sig. Dedekind, sotto il titolo di: *Lezioni sulla teoria de' numeri* (Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet — herausgegeben von R. Dedekind — Braunschweig 1863).

5. L' argomento di cui trattasi prende posto nella teoria de' numeri, ed è in quest' ordine di idee che esso fu studiato da' Geometri che finora se ne sono occupati; ma noi saremo condotti a riconoscere che se queste ricerche rimasero infruttuose, ciò dipese semplicemente da che la risoluzione era impossibile nel campo della teoria de' numeri. La quale operò fin dove l' era consentito, assolvendo il caso del Dirichlet; e quel che restava era un fatto interamente algebrico.

---

premier. Voulant montrer commant cette extension peut être operée, M. Dirichlet a choisi pour exemple le cas où l'exposant est le produit de deux facteurs premiers impairs. La forme qu'il a ainsi obtenue, et les formules analogues qui correspondraient au cas où l'exposant contiendrait plus de deux facteurs, se trouvent renfermées dans le théorème général, qui comprend celui de M. Gauss, et qu'on peut enoncer comme il suit. « *Supposons que dans l'équation binome* « $1-x^n=0$ *les facteurs premiers impairs de* n *soient inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant* « *4 ou 8. Lorsqu'on aura débarrassée l'équation de ses racines non primitives, le quadruple du premier* « *membre pourra être présenté sous la forme quadratique,* $Y^2 \mp nZ^2$, Y *et* Z *désignant des fonctions* « *entières de* x, *dans lesquelles les puissances de cette variable auront pour coefficients des nombres* « *entiers* ».

Oltre a quanto abbiamo qui riportato niente di più aggiunge il Cauchy intorno a questo soggetto; e, contro le sue abitudini, enuncia il teorema senza darne le pruove, e senza dir nulla circa l'indole della trasformazione e la maniera di operarla. Comunque sia, sarà dimostrato che il teorema non è vero quando l'esponente n ha per fattore sia 4, sia 8, sia altra potenza di 2; anzi riconosceremo che non è possibile di trovare la trasformata corrispondente a questi casi senza trovare prima quella relativa al caso in cui n ha per fattore la semplice prima potenza di 2; e questo caso è certamente sfuggito al Cauchy, come lo mostra lo stesso teorema da lui enunciato; e dovea sfuggirgli finchè restava nel campo della teoria de' numeri.

Trasformazione della funzione X_n nel caso di n impari senza divisori quadrati.

6. Per soddisfare alle condizioni prescritte basta supporre:

$$n = p_1 p_2 \ldots p_\varepsilon$$

e ritenere che i fattori $p_1, p_2, \ldots p_\varepsilon$ siano numeri primi, impari e disuguali, non escluso il caso di un sol fattore, cioè di n primo; e sarà poi:

$$2m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_\varepsilon - 1).$$

Bisogna qui richiamare la nozione del simbolo di Legendre nella teoria de' resti quadratici, col significato più largo datogli da Jacobi (*), e rammentare che i $2m$ numeri inferiori e primi ad n si distribuiscono in due gruppi, l'uno di m numeri a per ognun de' quali si ha $\left(\frac{a}{n}\right) = +1$, e l'altro di m numeri b per ciascun de' quali è invece $\left(\frac{b}{n}\right) = -1$. Sia ρ una radice primitiva dell'equazione $1 - x^n = 0$; così le $2m$ radici di $X_n = 0$ saranno le m potenze ρ^a e le m potenze ρ^b; quindi posto:

$$U = 2\Pi(x - \rho^a), \qquad V = 2\Pi(x - \rho^b), \tag{1}$$

moltiplicando queste equazioni tra loro si avrà:

$$UV = 4X_n; \tag{2}$$

ma importa di dimostrare che U e V, funzioni intere di grado m, sono e possono essere determinate.

A tale effetto dinoteremo con S_r la somma delle potenze di grado r delle radici primitive dell'equazione $1 - x^n = 0$ (**), e con σ_r e σ'_r le somme ana-

(*) La teoria di questo simbolo secondo il concetto di Jacobi forma il soggetto del § 46 dell'opera del Dirichlet, ed è riprodotta nella nostra memoria *sulle equazioni binomie*.

(**) Nella stessa memoria citata qui sopra abbiamo esposto la teoria delle somme delle potenze simili delle radici primitive delle equazioni binomie, le quali si calcolano di una maniera semplicissima. Pel caso presente basta di far notare che, se n è un prodotto di numeri primi disuguali, e quindi $n = p_1 p_2 \ldots p_\varepsilon$, il valore di S_r si ottiene con la regola seguente: « Si cerchi il « massimo comun divisore di r ed n, il quale non può essere che il prodotto di alcuni tra i fattori loghe per le radici delle equazioni $U=0$ e $V=0$; sarà così:

$$\sigma_r + \sigma'_r = S_r;$$

ma si ha d'altra parte per la teorica delle somme di Gauss (*)

$$\sigma_r - \sigma'_r = \left(\frac{r}{n}\right)\sqrt{\pm n},$$

dove il radicale prende il segno dato dal simbolo $\left(\frac{r}{n}\right)$, mentre al di sotto del radicale è a ritenersi, come sempre, il segno superiore se $n\equiv 1$, e l'inferiore se $n\equiv 3$ (mod. 4); dunque risulta:

$$\sigma_r = \tfrac{1}{2}\left[S_r + \left(\frac{r}{n}\right)\sqrt{\pm n}\right], \qquad \sigma'_r = \tfrac{1}{2}\left[S_r - \left(\frac{r}{n}\right)\sqrt{\pm n}\right] \tag{3}$$

e con ciò restano determinati i valori delle somme σ_r e σ'_r. Quindi posto:

$$\left.\begin{aligned} U &= 2x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m, \\ V &= 2x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \cdots + B_m, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

segue dalle formole di Newton che i coefficienti delle funzioni U e V possono inversamente determinarsi in termini di quelle somme; e perciò queste funzioni sono completamente determinate.

« primi di n; vale a dire di alcuni tra i numeri $p_1, p_2, \ldots p_\varepsilon$; posto che questi numeri siano « $p_\alpha, p_\beta, \ldots p_\lambda$, il valore di S_r sarà dato dalla formola:

$$S_r = (-1)^\varepsilon (1-p_\alpha)(1-p_\beta)\ldots(1-p_\lambda).$$

« Quando r è primo ad n si ha $S_r = (-1)^\varepsilon$; e quando $r\equiv 0$ (mod. n) si ha $S_r = 2m$ ».

Gioverà tener presente che S_r è una funzione periodica, il periodo essendo misurato da n; e che i valori distinti compresi in un periodo sono in numero di 2^ε. Se n è primo, e quindi $\varepsilon=1$, la funzione S_r non può prendere che due valori distinti, -1 ed $n-1$; si ha $S_r=-1$, semprechè r è primo ad n; ed $S_r = n-1$, semprechè $r\equiv 0$ (mod. n).

(*) Le somme delle quali è parola vennero considerate dal Gauss nella celebre memoria dal titolo: *Summatio quarundam serierum singularium* (*Comment. recentiores Societatis Gottingæ*, t. I). Più tardi il Libri cercò di rendere più semplici queste astruse ricerche nella *Mémoire sur la théorie des nombres*, non sembra però col miglior successo; ed era serbato al Dirichlet di ricondurre siffatta teoria al vero punto di vista, facendola dipendere da integrali definiti, come può vedersi nella memoria citata, e nelle sue lezioni sulla teoria de' numeri dal § 111 al 116. Si possono anche consultare: Lebesgue, *Sur le symbole* $\left(\frac{a}{b}\right)$, etc. (*Journal de mathématiques*; t. 12, p. 497); Chauchy, *Théorie des nombres*; Genocchi, *Sur les résidus quadratiques* (*Académie R. de Belgique, mémoires couronnée*, t. XXV).

7. Del resto è anche possibile di calcolare direttamente il coefficiente di una potenza qualunque x^r sia di U sia di V. Indicando con h_1, h_2, ... h_r delle indeterminate, si ha per una teoria ben nota:

$$A_r = 2\Sigma \frac{(-1)^{h_1+h_2+\cdots h_r}}{1^{h_1}2^{h_2}\ldots r^{h_r} \times h_1!\, h_2! \ldots h_r!} \sigma_1^{h_1} \sigma_2^{h_2} \cdots \sigma_r^{h_r}$$

dove il Σ va esteso a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \cdots + r h_r = r$$

e dov'è messo per compendio $h_\mu! = 1.2.3\ldots h_\mu$. Si può anche scrivere

$$A_r = 2\Sigma \prod_1^r{}_\alpha \frac{(-1)^{h_\alpha} \sigma_\alpha^{h_\alpha}}{\alpha^{h_\alpha} . h_\alpha!},$$

e quindi pel valòre di σ_α dato dalla prima delle (3) si avrà:

$$A_r = 2\Sigma \prod_1^r{}_\alpha \frac{(-1)^{h_\alpha}}{\alpha^{h_\alpha} . h_\alpha!} \left[\frac{S_\alpha + \left(\frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{\pm n}}{2}\right]^{h_\alpha}.$$

Si avrebbe similmente (*):

$$B_r = 2\Sigma \prod_1^r{}_\alpha \frac{(-1)^{h_\alpha}}{\alpha^{h_\alpha} . h_\alpha!} \left[\frac{S_\alpha - \left(\frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{\pm n}}{2}\right]^{h_\alpha};$$

ma è importante a rimarcare che queste espressioni di A_r e B_r, coefficienti di una stessa potenza di x nelle funzioni U e V, non differiscono che nel segno della radice $\sqrt{\pm n}$; da che deriva che l'una può dedursi dall'altra cangiando solo il segno a questa radice.

(*) Queste formole divengono più semplici quando n è primo; essendo $r < n$, per tutti i valori di α da 1 ad r si ha sempre $S_\alpha = -1$; e così risulta:

$$A_r = 2\Sigma \prod_1^r{}_\alpha \frac{1}{\alpha^{h_\alpha} . h_\alpha!} \left[\frac{1 - \left(\frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{\pm n}}{2}\right]^{h_\alpha}, \qquad B_r = 2\Sigma \prod_1^r{}_\alpha \frac{1}{\alpha^{h_\alpha} . h_\alpha!} \left[\frac{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{\pm n}}{2}\right]^{h_\alpha}.$$

La seconda di queste formole fu già data dal sig. LIOUVILLE per la stessa ipotesi di n primo (Memoria citata).

8. Segue da ciò che i valori di A_r e B_r sono numeri irrazionali, i quali si possono supporre ridotti alla forma

$$A_r = a_r - b_r \sqrt{\pm n}\,, \qquad B_r = a_r + b_r \sqrt{\pm n} \tag{5}$$

dove a_r e b_r sono numeri razionali; ma andremo anzi a dimostrare che essi sono numeri interi. In fatti $\frac{1}{2} A_r$ ed $\frac{1}{2} B_r$, a parte i segni, esprimono rispettivamente le somme de' prodotti r ad r, l'uno delle m potenze ρ^a l'altro delle m potenze ρ^b; prodotti il cui numero coincide col coefficiente binomiale $(m)_r$. Ora, immaginando i prodotti r ad r di tutte quelle $2m$ potenze, e poscia le loro somme $(m)_r$ ad $(m)_r$, tra queste somme, che indicheremo con $k_1\, k_2, \dots k_i$, si troveranno $\frac{1}{2} A_r$ ed $\frac{1}{2} B_r$; inoltre indicando con K_1 la somma di tutte le k, con K_2 quella de' loro prodotti 2 a 2, ecc., le quantità $K_1, K_2, \dots K_i$, essendo funzioni simmetriche delle radici dell' equazione $X_n = 0$, saranno numeri interi; e perciò $\frac{1}{2} A_r$ ed $\frac{1}{2} B_r$ saranno radici dell'equazione a coefficienti interi:

$$x^i - K_1 x^{i-1} + K_2 x^{i-2} - \dots \pm K_i = 0. \tag{6}$$

Quindi le equazioni aventi per radici sia le somme 2 a 2 delle radici della (6), sia le loro differenze, avranno ancora coefficienti interi, quello della più alta potenza essendo l' unità; ed intanto una radice della prima sarà $\frac{1}{2} A_r + \frac{1}{2} B_r$, cioè a_r; ed una radice della seconda, $(\frac{1}{2} A_r - \frac{1}{2} B_r)^2$, cioè $(b_r \sqrt{\pm n})^2$. E di quì risulta che i numeri razionali a_r e b_r sono interi.

9. È necessario di osservare che A_m e B_m, ultimi termini di U e V, sono indipendenti da $\sqrt{\pm n}$, eccetto però nel caso di $n = 3$. Si sa che, ad eccezione di questo caso, la somma de' numeri appartenenti a ciascuno de' due gruppi di numeri a e b poc' anzi descritti, è multipla di n; e perciò, salvo quel caso, si ha $\rho^{\varepsilon a} = \rho^{\varepsilon b} = 1$. Ma si ha per le (1) $\frac{1}{2} A_m = (-1)^m \rho^{\varepsilon a}$ ed $\frac{1}{2} B_m = (-1)^m \rho^{\varepsilon b}$; dunque $\frac{1}{2} A_m = \frac{1}{2} B_m = (-1)^m$; e quindi $a_m = (-1)^m$ e $b_m = 0$; sempre eccettuato il caso di $n = 3$.

10. I principii fin quì dichiarati conducono senza più alla trasformazione che avevamo in veduta. Trasformando i coefficienti delle funzioni U e V con le formole (5), e riunendo i termini affetti da $\sqrt{\pm n}$, quelle funzioni divengono:

$$U = 2x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m - (b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x)\sqrt{\pm n}$$
$$V = 2x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m + (b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x)\sqrt{\pm n}$$

ma chiamando Y il primo polinomio e Z il secondo, si ottiene

$$U = Y - Z\sqrt{\pm n}, \qquad V = Y + Z\sqrt{\pm n},$$

e queste formole definiscono la trasformazione; dappoichè tenendo presente la (2), ne risulta l'equazione:

$$4X_n = Y^2 \mp n Z^2,$$

dove vale il segno superiore se $n \equiv 1$, e l'inferiore se $n \equiv 3$ (mod. 4), la prima di grado m, l'altra di grado $m-1$, e divisibile per x.

11. Fu già notato (n.° 3) che nel caso di n primo, meno che per $n=3$, le funzioni Y e Z sono entrambe di forma reciproca; ed ora aggiungiamo che la stessa proprietà non cessa di sussistere quando n è un numero impari qualunque non divisibile per quadrati; ma rimandiamo per la dimostrazione all'opera del Dirichlet. Così, anche in questa ipotesi, tanto nella Y quanto nella Z i coefficienti de' termini equidistanti dagli estremi sono numericamente uguali; ma in riguardo ai segni bisogna distinguere i due seguenti casi:

I. Quando $n \equiv 1$ (mod. 4) que' segni sono sempre simili.

II. Quando $n \equiv 3$ (mod. 4), se n è primo, i detti segni son contrarii in Y e simili in Z; ma accade l'opposto se n è numero non primo; allora essi sono simili in Y e contrarii in Z (*).

12. Le funzioni Y e Z possono essere determinate indipendentemente da U e V; ma a tale effetto, per ragione di simmetria, gioverà riguardare come uguali i loro gradi, e scrivere:

$$Y = a_0 x^m + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m,$$
$$Z = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-1} x + b_m,$$

salvo a ritenere $a_0 = 2$ e $b_0 = b_m = 0$. Ora per le formole di Newton, applicate alle equazioni $U=0$ e $V=0$, si hanno le relazioni:

$$2\sigma_r + A_1\sigma_{r-1} + A_2\sigma_{r-2} + \cdots + A_{r-1}\sigma_1 + rA_r = 0,$$
$$2\sigma'_r + B_1\sigma'_{r-1} + B_2\sigma'_{r-2} + \cdots + B_{r-1}\sigma'_1 + rB_r = 0;$$

(*) Le condizioni quì dichiarate, tradotte in formole, equivalgono a dire che le funzioni Y e Z verificano le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= x^m Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ Z(x) &= x^m Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} \text{ se } n \equiv 1, \qquad \left.\begin{aligned} Y(x) &= (-x)^m \; Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ Z(x) &= (-x)^{m+1} Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} \text{ se } n \equiv 3 \text{ (mod. 4)}$$

come son date nell'opera del Dirichlet; ma ivi queste formole sono rese equivoche a causa di un errore incorso nell'ultima, e che non si scorge immediatamente, trovandosi scritto $(-x)^m$ in luogo di $(-x)^{m+1}$.

sostituendo agli elementi σ, σ', A, B i valori dati dalle (3) e (5), e quindi prendendo de' risultamenti una volta la somma ed una volta la differenza, si ottengono le formole seguenti:

$$2ra_r = -[a_0 S_r + a_1 S_{r-1} + \cdots + a_{r-1} S_1] \pm n\left[\left(\frac{r}{n}\right)b_0 + \left(\frac{r-1}{n}\right)b_1 + \cdots \left(\frac{1}{n}\right)b_{r-1}\right],$$

$$2rb_r = -[b_0 S_r + b_1 S_{r-1} + \cdots + b_{r-1} S_1] + \left[\left(\frac{r}{n}\right)a_0 + \left(\frac{r-1}{n}\right)a_1 + \cdots \left(\frac{1}{n}\right)a_{r-1}\right],$$

formole ricorrenti, le quali porgono l'uno dopo l'altro tutti i coefficienti delle funzioni Y e Z, essendo già conosciuti i primi $a_0 = 2$ e $b_0 = 0$; e, come al solito, dovendo nella prima ritenersi il segno superiore se $n \equiv 1$, e l'inferiore se $n \equiv 3$ (mod. 4). Egli è poi quasi superfluo di avvertire che, per la proprietà che hanno le dette funzioni di essere di forma reciproca, basta calcolare direttamente la sola prima metà de' coefficienti di ciascuna.

13. Sia per esempio $n = 7 \equiv 3$ (mod. 4); sarà $m = 3$, e:

$$4X_7 = Y^2 + 7Z^2;$$

e col mezzo delle formole precedenti si trova:

$$Y = 2x^3 + x^2 - x - 2$$
$$Z = x^2 + x.$$

Per $n = 21 = 3 \cdot 7 \equiv 1$ (mod. 4), si avrebbe $m = 6$;

$$4X_{21} = Y^2 - 21Z^2;$$

e quindi risulta:

$$Y = 2x^6 - x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 2$$
$$Z = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x.$$

14. Le conchiusioni che precedono non sono tutte applicabili quando $n = 3$; però non è che in tal caso non possano trovarsi due funzioni Y e Z capaci di verificar l'equazione:

$$4X_3 = Y^2 + 3Z^2;$$

che anzi in questa ipotesi il problema è in certo modo indeterminato, dappoichè dovendo essere

$$4(x^2 + x + 1) = Y^2 + 3Z^2,$$

questa relazione è soddisfatta da qualunque de' tre sistemi

$$\begin{aligned} Y &= 2x+1, & Z &= 1 \\ Y &= x+2, & Z &= x \\ Y &= x-1, & Z &= x+1; \end{aligned}$$

ma per niuna di queste coppie di funzioni hanno più luogo le proprietà che si verificano per qualunque altro valore di n.

Trasformazione della funzione X_n quando n è un numero comunque composto.

15. Questa trasformazione risulta immediatamente dalle due proprietà de' fattori irriduttibili che passiamo ad esporre.

Teorema 1.° Sia n un numero composto; n' il prodotto de' suoi fattori primi disuguali; e q il quoziente di n diviso per n'. L'espressione di X_n sarà ciò che diviene quella di $X_{n'}$, mutandovi la x in x^q.

Dimostrazione. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_\varepsilon$ i fattori primi disuguali di n, sarà:

$$n = qp_1p_2\ldots p_\varepsilon, \qquad n' = p_1p_2\ldots p_\varepsilon.$$

Inoltre siano N ed N' i gradi di X_n ed $X_{n'}$; dovendo questi gradi coincidere l'uno col numero degl'interi inferiori e primi ad n, l'altro con quello degl'interi inferiori e primi ad n', saranno definiti da:

$$N = q(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_\varepsilon-1), \qquad N' = (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_\varepsilon-1).$$

Posto ciò, se si sviluppa l'espressione di N', e si dinotino con $n', n'_1, n'_2, \ldots$ i termini positivi, e con $r, r_1, r_2, \ldots$ i negativi, l'espressione di X_n sarà data dalla forma frazionaria:

$$X_{n'} = \frac{(1-x^{n'})(1-x^{n'_1})(1-x^{n'_2})\ldots}{(1-x^{r})(1-x^{r_1})(1-x^{r_2})\ldots},$$

che riducesi ad una funzione intera e però della forma:

$$X_{n'}=1+k_1 x+k_2 x^2+\cdots+x^{N'}.$$

Nel modo istesso lo sviluppo di N darebbe l'espressione di X_n; ma siccome i termini di questo sviluppo risultano da quelli di N' moltiplicati per q, ne segue che la forma frazionaria equivalente ad X_n è ciò che diviene quella equivalente ad $X_{n'}$ moltiplicando per q gli esponenti x, ossia cangiando la x in x^q. Quindi anche l'espressione intera di X_n si avrà da quella di $X_{n'}$, mutandovi la x in x^q; e si ha perciò come voleva dimostrarsi:

$$X_n=1+k_1 x^q+k_2 x^{2q}+\cdots+x^{N'q},$$

ed essendo, com'è chiaro, $N'q=N$.

16. Supponiamo per esempio $n=2^{\alpha+1}.3^{\beta+1}.5^{\gamma+1}=q.2.3.5$, per cui $q=2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, $n'=2.3.5=30$. Per la regola del numero 2 si trova:

$$X_{n'}=X_{30}=1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8,$$

e quindi secondo il teorema attuale, purchè $q=2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, qualunque siano i valori di α,β,γ (interi e positivi) si avrà:

$$X_n=X_{q\cdot 30}=1+x^q-x^{3q}-x^{4q}-x^{5q}+x^{7q}+x^{8q}.$$

Così, per considerare qualche caso particolare:

se $n=2^2.3.5=60$, $q=2$, $X_{60}=1+x^2-x^6-x^8-x^{10}+x^{14}+x^{16}$

» $n=2^3.3^2.5=360$, $q=12$, $X_{360}=1+x^{12}-x^{36}-x^{48}-x^{60}+x^{84}+x^{96}$

» $n=2.3^2.5^2=450$, $q=15$, $X_{450}=1+x^{15}-x^{45}-x^{60}-x^{75}+x^{105}+x^{120}$

. . . .

17. *Teorema* 2.° Sia n un numero impari; l'espressione di X_{2n} sarà ciò che diviene quella di X_n, cangiandosi la x in $-x$.

Dimostrazione. Siano $p_1, p_2,\ldots,p_\varepsilon$ i fattori primi disuguali ed impari di n; messo:

$$n=qp_1p_2\ldots p_\varepsilon,$$

anche q sarà impari. Posto ciò, indicando con N ed N' i gradi di X_n ed X_{2n}, questi gradi, evidentemente uguali, saranno definiti dalle formole:

$$N=q(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_\varepsilon-1),\qquad N'=q(2-1)(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_\varepsilon-1).$$

Se si sviluppa l'espressione di N, e si supponga:

$$N = n + n_1 + n_2 + \cdots - r - r_1 - r_2 - \cdots$$

lo sviluppo di N' si potrà mettere nella forma:

$$N' = 2n + 2n_1 + 2n_2 + \cdots - 2r - 2r_1 - 2r_2 - \cdots$$
$$- n - n_1 - n_2 - \cdots + r + r_1 + r_2 + \cdots,$$

e quindi le espressioni di X_n ed X_{2n} risulteranno dalle forme frazionarie:

$$X_n = \frac{(1-x^n)(1-x^{n_1})(1-x^{n_2})\ldots}{(1-x^r)(1-x^{r_1})(1-x^{r_2})\ldots}$$

$$X_{2n} = \frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n_1})(1-x^{2n_2})\cdots(1-x^r)(1-x^{r_1})(1-x^{r_2})\cdots}{(1-x^n)(1-x^{n_1})(1-x^{n_2})\cdots(1-x^{2r})(1-x^{2r_1})(1-x^{2r_2})\cdots}.$$

Essendo in generale $1-x^{2\alpha} = (1-x^\alpha)(1+x^\alpha)$, la seconda si riduce ad:

$$X_{2n} = \frac{(1+x^n)(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\cdots}{(1+x^r)(1+x^{r_1})(1+x^{r_2})\cdots};$$

e questa, essendo dispari i numeri $n, n_1, \ldots, r, r_1, \ldots$, è ciò che diviene la prima mutandovi la x in $-x$; dunque anche quando:

$$X_n = 1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + x^N,$$

per avere l'espressione di X_{2n} basterà cangiare la x in $-x$; sicchè si ottiene:

$$X_{2n} = 1 - k_1 x + k_2 x^2 - \cdots + x^N.$$

Così, per esempio:

essendo $X_3 = 1+x+x^2$	sarà $X_6 = 1-x+x^2$
» $X_5 = 1+x+x^2+x^3+x^4$	» $X_{10} = 1-x+x^2-x^3+x^4$
» $X_{15} = 1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8$	» $X_{30} = 1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8$
. . . .	» . . . .

18. Segue da' due teoremi dimostrati che la ricerca del fattore irriduttibile di un binomio il di cui grado n è un numero pari comunque composto, si riduce a trovare quello del binomio il di cui grado è il prodotto de' soli fat-

tori primi disuguali ed impari di n. Essendo n pari, supporremo:

$$n = q.2p_1 p_2 \ldots p_\varepsilon = q.2n',$$

dove q potrà essere impari o pari. Ora per avere l'espressione di X_n si comincerà dal cercare quella di $X_{n'}$; mutando in questa la x in $-x$, si avrà l'espressione di $X_{2n'}$; e finalmente, cangiando in quest'ultima la x in x^q, si otterrà l'espressione di X_n. Sia per esempio $n = 360 = 2^3.3^2.5$, e quindi $n' = 3.5 = 15$, $q = 2^2.3 = 12$; sarà in primo luogo:

$$X_{15} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8;$$

indi mutando la x in $-x$:

$$X_{30} = 1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8;$$

ed in fine cangiando la x in x^{12},

$$X_{360} = 1 + x^{12} - x^{36} - x^{48} - x^{60} + x^{84} + x^{96}.$$

19. Da ciò che precede risulta quasi spontanea la trasformazione della funzione X_n pel caso in cui n è un numero composto. Indicando sempre $p_1, p_2, \ldots, p_\varepsilon$ i fattori primi impari e disuguali di n, faremo:

$$n' = p_1 p_2 \ldots p_\varepsilon,$$

e cercheremo le funzioni $Y(x)$ e $Z(x)$ le quali verificano l'equazione:

$$4X_{n'} = Y(x)^2 \mp n' Z(x)^2. \tag{1}$$

Posto ciò, distingueremo con q e q' due numeri risultanti dal prodotto di qualsivogliano de' fattori $p_1, p_2, \ldots, p_\varepsilon$, o loro potenze; ma q' potendo inoltre avere per fattore il 2 o una potenza di 2, cercheremo la trasformata di X_n per le tre seguenti forme del numero n, in cui si comprendono tutti i casi:

$$n = 2n', \qquad n = qn', \qquad n = q'.2n'.$$

Caso 1.° $n = 2n'$. Nella equazione identica (1) cangeremo la x in $-x$; ma con ciò la funzione $X_{n'}$ si muta in $X_{2n'}$; dunque si ottiene:

$$4X_{2n'} = 4X_n = Y(-x)^2 \mp n' Z(-x)^2. \tag{2}$$

Caso 2.° $n = qn'$. Mutando nella (1) la x in x^q, la funzione $X_{n'}$ si muterà in $X_{qn'} = X_n$, e si ha in conseguenza:

$$4X_{qn'} = 4X_n = Y\,(x^q)^2 \mp n'\,Z\,(x^q)^2. \qquad (3)$$

Caso 3.° $n = q'.2n'$. Se nella (2) si cangi la x in $x^{q'}$, la funzione $X_{2n'}$ si muterà in $X_{q'.2n'} = X_n$; e perciò risulta:

$$4X_{q'.2n'} = 4X_n = Y\,(-x^{q'})^2 \pm n'\,Z\,(-x^{q'})^2.$$

Si vede adunque, come già si disse in principio, che la trasformazione della funzione X_n pel caso in cui n è un numero comunque composto, dipende interamente da quella della funzione $X_{n'}$ definita nella formola (1), dove n' indica il prodotto de' soli fattori primi impari e disuguali di n. Si vede ancora che la introduzione del semplice fattore 2 nel numero n' non influisce che sul segno della variabile x nel secondo membro di quella formola, mentre la introduzione di fattori quadrati non influisce che sugli esponenti di questa variabile; fatti questi assolutamente algebrici, che non hanno dipendenza dalla teoria de' numeri.

È manifesto inoltre che l'equazione:

$$4X_n = Y^2 \mp n\,Z^2,$$

non può sussistere quando n è pari o divisibile per quadrati, perchè in questi casi nel secondo membro il numero n dev'essere rimpiazzato dal prodotto de' soli fattori primi impari e disuguali di n; e ciò solo basta a provare la insussistenza del teorema enunciato da Cauchy (vedi la terza nota al n.° 4); il quale del resto anche senza di ciò non ha valore, se prima non sia messa in chiaro la influenza che ha sulla trasformazione il semplice fattore 2, non essendo altrimenti possibile di estendersi al caso in cui il fattore pari di n sia o 4 o 8 o altra potenza di 2.

20. Per applicare la teoria a qualche esempio supporremo che si tratti di trasformare le funzioni $X_{2\cdot7}$, $X_{4\cdot7}$, $X_{8\cdot7}$. Ed essendo:

$$X_7 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

mutando la x in $-x$ avremo:

$$X_{2\cdot 7}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6;$$

e qui cangiando successivamente la x in x^2 ed x^4, otterremo rispettivamente le espressioni di $X_{4\cdot 7}$ ed $X_{8\cdot 7}$. Ma si è già trovato (n.° 13)

$$4X_7=(2x^3+x^2-x-2)^2+7(x^2+x)^2,$$

dunque risulta:

$$4X_{2\cdot 7}=(-2x^3+x^2+x-2)^2+7(x^2-x)^2,$$
$$4X_{4\cdot 7}=(-2x^6+x^4+x^2-2)^2+7(x^4-x^2)^2,$$
$$4X_{8\cdot 7}=(-2x^{12}+x^8+x^4-2)^2+7(x^8-x^4)^2.$$

Per un altro esempio cercheremo la trasformata della funzione $X_{2^3 3^2 7}$. Abbiamo in questo caso (n.° 13).

$$4X_{3\cdot 7}=(2x^6-x^5+5x^4-7x^3+5x^2-x+2)^2$$
$$-21(x^5-x^4+x^3-x^2+x)^2,$$

indi cangiando la x in $-x$:

$$4X_{2\cdot 3\cdot 7}=(2x^6+x^5+5x^4+7x^3+5x^2+x+2)^2$$
$$-21(x^5+x^4+x^3+x^2+x)^2;$$

e da ultimo mutando in questa formola la x in x^{12};

$$4X_{2^3\cdot 3^2\cdot 7}=(2x^{72}+x^{60}+5x^{48}+7x^{36}+5x^{24}+x^{12}+2)^2$$
$$-21(x^{60}+x^{48}+x^{36}+x^{24}+x^{12})^2.$$

21. Faremo quì osservare che la specie d'indeterminazione segnalata pel caso di $n=3$ si estende a tutt'i numeri della forma $n=2^\alpha.3^\beta$. In fatti essendo:

$$4X_3=(2x+1)^2+3=(x+2)^2+3x^2=(x-1)^2+3(x+1)^2,$$

si ha:

$$4X_{2\cdot 3}=(-2x+1)^2+3=(-x+2)^2+3x^2=(-x-1)^2+3(-x+1)^2$$

e quindi, supponendo $q=2^{\alpha-1}.\,3^{\beta-1}$, si avrà:

$$4X_{2^\alpha.3^\beta}=(-2x^q+1)^2+3=(-x^q+2)^2+3x^{2q}=(-x^q-1)^2+3(-x^q+1)^2.$$

Per esempio se $\alpha=3$, $\beta=2$, e quindi $q=2^2.\,3=12$, verrà:

$$4X_{72}=(-2x^{12}+1)^2+3=(-x^{12}+2)^2+3x^{24}=(-x^{12}-1)^2+3(-x^{12}+1)^2,$$

come immediatamente si verifica, perchè $X_{72}=1-x^{12}+x^{24}$.

Mémoire sur les groupes de mouvements.

(*par M.r* C. Jordan, *Ingénieur des mines à Paris*).

I. Exposé du problème à resoudre.

1. On sait que tout mouvement d'un corps solide dans l'espace est un mouvement hélicoïdal et sera connu lorsque on donnera: 1° la situation dans l'espace de l'axe A de rotation et de glissement; 2° l'angle r dont le solide tourne autour de cet axe; 3° son déplacement longitudinal t dans le sens de cet axe. Un mouvement ainsi défini peut être désigné par la notation suivante $A_{r,t}$.

Imprimons successivement à un même corps solide deux mouvements quelconques $A_{r,t}$ et $A'_{r',t'}$: le déplacement résultant, $A_{r,t}\,A'_{r',t'}$ sera encore un mouvement hélicoïdal, et l'on peut se proposer ce problème: Connaissant les mouvements composants $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$, déterminer le mouvement résultant $A''_{r'',t''}$.

On donne généralement dans les cours de mécanique la solution de cette question dans le cas des mouvements infiniment petits. Le cas où les mouvements considérés ont une amplitude finie se traite également sans difficulté.

2. Ici se présente un second problème, un peu plus complexe que le précédent, et non moins intéressant: Etant donné certains mouvements $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$, $A''_{r'',t''}$ etc. former les mouvements divers qui peuvent résulter de la combinaison de ceux-là exécutés successivement un nombre quelconque de fois et dans un ordre quelconque.

Le groupe formé par les mouvements cherchés jouit de cette propriété caractéristique, que si M' et M'' sont deux mouvements quelconques faisant partie de ce groupe, $M'M''$ en fera partie. Car soit par exemple $M'=A_{r,t}\,A'_{r',t'}$, et $M''=A''_{r'',t''}$: il est clair que $M'M''=A_{r,t}\,A'_{r',t'}\,A''_{r'',t''}$ résulte de la combinaison des mouvements $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$, $A''_{r'',t''}$: donc $M'M''$ fait partie du groupe cherché.

En faisant varier les mouvements $A_{r,t}$, $A_{r',t'}$,... qui servent de point de départ, on obtiendra une infinité de groupes de mouvements; mais nous démontrerons que ces groupes se ramènent tous à un nombre restreint de types différents, dont l'étude détaillée forme l'objet de ce travail.

Cette question pourrait être présentée sous une autre forme plus géométrique que la précédente. Imaginons en effet une molécule quelconque située en un point m de l'espace et arbitrairement orientée. Soient m', m''... les diverses positions que prendrait cette molécule si on lui imprimait les divers mouvements M', M''... qui font partie du groupe donné. Considérons un système de molécules toutes semblables à m et situées respectivement en m, m', m'',... Le système formé par l'ensemble de ces molécules sera superposé à lui-même par chacun des mouvements du groupe: en effet soit μ la position où le mouvement M'' amène m', par exemple: le mouvement $M' M''$ amène m en μ: donc μ fait partie de la suite des positions m, m', m''... Il y avait donc en μ une molécule à la place que vient occuper m'.

Le problème qu'il s'agit de résoudre peut donc s'énoncer de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes:

1° Former tous les groupes possibles de mouvements.

2° Former de toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux-mêmes dans diverses positions.

C'est sous ce second point de vue que M.r Bravais a étudié cette question: les cas particuliers qu'il a traités et dont il a fait une remarquable application à la cristallographie sont les plus importants. Je crois néanmoins qu'il y a encore aujourd'hui quelque intérêt à traiter le problème dans toute sa généralité.

II. Compositions des mouvements.

3. *Translation.* Elles se composent par la loi commune du parallélogramme.

Rotations concourantes: Soient R_1, R_2 la première et la seconde rotation: a et b les traces de leurs axes sur une sphère ayant son centre au point de concours O: α et β les angles de rotation autour de ces axes, comptés dans le sens direct (*celui des aiguilles d'une montre*) par un observateur placé à l'extérieur de la sphère: ac et bc des arcs de grands cercles faisant respectivement les angles $cab = -\frac{1}{2}\alpha$ et $cba = -\frac{1}{2}\beta$ avec le grand cercle ab. La rotation résultante aura pour axe Oc. Car la rotation R_1 amène le point c à la position c' symétrique de c par rapport à ab: la rotation R_2 autour de Ob le ramène de c' en c: donc $R_1 R_2$ laisse c immobile. En outre R_1 ne déplaçant pas a, $R_1 R_2$ l'amènera ainsi que R_2 à la position a' symétrique de a par rapport à bc. L'angle de la rotation résultante $R_1 R_2$, qui est évidemment égal à aca', sera donc égal à $360^\circ - 2acb$.

Rotations parallèles. Elles se composent absolument de même, en remplaçant la sphère par un plan perpendiculaire aux axes et les grands cercles par des droites.

Seulement, dans le cas particulier où $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ les deux lignes ac, bc deviennent parallèles: le mouvement résultant est donc une rotation autour d'un axe situé à l'infini, autrement dit une translation. Pour en avoir l'amplitude, on remarquera que $R_1 R_2$ amène a à la position a' symétrique de a par rapport à bc. La translation cherchée T sera donc perpendiculaire à bc et son amplitude sera $aa' = -2ab \sin \frac{1}{2}\beta$.

Rotation et translation perpendiculaire à l'axe de la rotation. La composition de ces mouvements se déduit du cas particulier qui précède: car soient respectivement R_1^{-1}, R_2^{-1} des rotations d'angle $-\alpha$ et $-\beta$ autour de a et de b: de l'égalité trouvée $R_1 R_2 = T$ on déduit $R_1 = R_1 R_2 R_2^{-1} = T R_2^{-1}$, $R_2 = R_1^{-1} R_1 R_2 = R_1^{-1}$. Dans la première de ces deux formules on peut prendre arbitrairement l'angle $-\beta = \alpha$, ainsi que la grandeur et la direction de la translation aa'. La trace a de l'axe autour duquel s'effectue la rotation résultante R_1 s'obtient en construisant le triangle rectangle abd dont on donne un côté, $ad = \frac{1}{2}aa'$ et un angle, $abd = \frac{1}{2}\alpha$. Quant à l'amplitude angulaire de cette rotation, elle est égale à α. Donc le mouvement résultant d'une translation quelconque et d'une rotation dont l'axe lui soit perpendiculaire est une rotation égale, autour d'un axe parallèle. La deuxième formule montre de même que le mouvement résultant d'une rotation, suivie d'une translation perpendiculaire à son axe est encore une rotation égale autour d'un axe parallèle.

On pourrait enfin dans chacune de ces deux formules se donner à volonté la situation des deux points a et b et la valeur de l'angle $\alpha = -\beta$ et en déduire la translation aa' en grandeur et en direction. D'où cette nouvelle proposition: T o u t e r o t a t i o n a u t o u r d ' u n a x e d o n n é p e u t ê t r e c o n s i d é r é e c o m m e r é s u l t a n t d ' u n e r o t a t i o n é g a l e a u t o u r d ' u n a x e quelconque parallèle au sien, précédée ou suivie d'une translation perpendiculaire à cet axe.

Rotation et translation parallèle à son axe. Ces mouvements se superposent mutuellement sans s'influencer.

Les propositions précédentes suffisent à résoudre le problème de la composition de deux mouvements quelconques. Soient en effet $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ ces deux mouvements: $A_{r,t}$ est par définition le produit de la rotation $A_{r,o}$ par la translation $A_{o,t}$: de même $A'_{r',t'} = A'_{r',o}\, A'_{o,t'}$. Cela posé, soient o un point quelconque de l'espace, B, B' des parallèles à A et A' menées par ce point: on aura $A_{r,o} = B_{r,o}.\, t_1$, t_1 étant une translation perpendiculaire à A et qu'on sait determiner: t_1 et $A_{o,t}$ peuvent se composer en une seule translation, qui peut être décomposée elle même en deux autres t_2 et t_3 l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à A': on aura alors $t_3\, A_{r',o} = A'_{r',o}\, t_3$ et $t_2 A'_{r',o} = A''_{r',o} = B'_{r',o}.\theta_1$, A'' étant un axe parallèle à A' et θ_1 une translation perpendiculaire à cet axe: on aura donc:

$$A_{r,t}\, A'_{r',t'o} = B_{r,o}\, t_2 t_3\, A_{r',o}\, A'_{o,t'} = B_{r'o}\, B_{r',o}\, 0 t_3\, A'_{o,t'}.$$

Mais les deux rotations concourantes $B_{r,o}$, $B'_{r',o}$ peuvent se composer en une seule $C_{\varrho,o}$: d'autre part les translations θ, t_3, $A'_{o,t'}$ peuvent se composer en une seule, qu'on décomposera elle-même en deux autres τ_1, τ respectivement perpendiculaire et parallèle à l'axe c: composant τ_1 avec $C_{\varrho,o}$ on aura une rotation $C'_{\varrho,o}$ autour d'un axe c' parallèle à c et l'on aura enfin:

$$A_{r,t}\, A'_{r',t'} = C_{\varrho,o}\, \tau_1\, \tau = C'_{\varrho,o}\,.\,\tau = C'_{\varrho,\tau}.$$

On voit par là que le mouvement résultant de deux mouvements quelconques $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ est un mouvement hélicoïdal dans lequel la direction de l'axe et l'amplitude angulaire de la rotation sont les mêmes que dans le mouvement résultant de la composition de deux rotations $B_{r,o}$, $B'_{r',o}$ autour d'axes concourants et respectivement parallèles à A et à A': la position de cet axe et l'amplitude de la translation longitudinale seraient donnés par des formules plus compliquées, que nous ne nous arrêterons pas à établir.

Nous nous bornerons à indiquer une dernière notion dont nous aurons à faire un constant usage.

4. Soient M un mouvement quelconque, A un point ou une droite arbitraire, A' la nouvelle position que prend A supposé entrainé dans le mouvement M: nous dirons que A' est transformé de A par M.

Nous appellerons points ou droites pareils ou de même espèce, relativement à un groupe de mouvements donné, ceux que les divers mouvements de ce groupe transforment les uns dans les autres.

Théorème. Soient $M = A_{r,t}$ et $N = B_{\varrho,\tau}$ deux mouvements quelconques; $M^{-1} = A_{-r,-t}$ le mouvement égal et contraire à $A_{r,t}$: on aura $M^{-1}NM = B'_{\varrho,\tau}$, B' étant l'axe transformé de B par M (*).

Soit en effet a' un point quelconque: cherchons le déplacement que lui imprime le mouvement $M^{-1}NM$; M^{-1} le transporte en une nouvelle position a: le mouvement N venant ensuite l'amène en une autre position b: enfin M reporte B, a et b en B', a' et b', b' étant un nouveau point dont la situation relativement à B' et a' est la même que celle de b par rapport à B et a. Mais on passe de a à b par le mouvement hélicoïdal $B_{\varrho,\tau}$: on peut donc passer de a' à b' par un mouvement hélicoïdal identique effectué autour de B'. Ce mouvement hélicoïdal $B'_{\varrho,\tau}$ menant un point quelconque à un même point b' que le mouvement $M^{-1}NM$ sera identique à ce dernier.

Ces préliminaires posés, nous allons aborder le problème qui fait l'objet de ce mémoire, en commençant pour plus de simplicité par quelques cas particuliers.

III. **Groupes formés de mouvements de translation.**

5. Par un point quelconque O menons une série de droites représentant en grandeur et en direction les diverses translations du groupe: supposons d'abord qu'aucune d'elles ne soit infiniment petite: soient Oa la plus courte, l sa longueur: prenons Oa pour axe des x: cette translation, répétée à volonté, donnera une infinité de translations parallèles aux x et ayant pour amplitude les multiples de l. Ces translations sont les seules parallèles aux x: car s'il en existait une autre, son amplitude serait égale à $ml \pm r$, m étant un entier et r une longueur comprise entre 0 et $\frac{l}{2}$. Cette translation combinée avec la translation $-ml$, qui fait partie du groupe, donnerait une translation r moindre que l, résultat absurde, r étant supposé différent de zéro.

(*) Cette proposition présente une analogie remarquable avec un théorème fort utile dans la théorie des substitutions, qui a été donné par CAUCHY et par M. BETTI, et que j'ai retrouvé depuis au début de mes recherches sur le même sujet.

6. S'il existe d'autres translations non parallèles aux x, soit Ob celle dont l'extrémité b est à la moindre distance de l'axe des x: soit δ cette distance: elle sera nécessairement finie. En effet prenons pour axe des y la perpendiculaire à Oa située dans le plan bOa: les projections de Ob sur les axes des x et des y pourront être respectivement représentées par $ml \pm r$ et δ, r étant une quantité au plus égale à $\frac{1}{2}l$. Cette translation combinée à la translation $-ml$, qui fait partie du groupe, en donne une autre dont les projections sont $\pm r$ et δ et dont la longueur $\sqrt{r^2+\delta^2}$ ne peut être inférieure à l; donc $\delta^2 \overline{\gtrless} l^2 - r^2 \overline{\gtrless} \frac{3}{4} l^2$.

Cela posé les deux translations Oa et Ob et leurs multiples, combinées ensemble, fournissent une infinité de translations dont les extrémités sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes formé sur les deux lignes Oa, Ob. Ces translations sont les seules situées dans le plan Oab que le groupe puisse contenir: car s'il en contenait une autre Oc, soit d le sommet gauche inférieur de celui des parallélogrammes du réseau qui contient le point c; les translations Oc et dO qui toutes deux font partie du groupe ont pour résultante une translation Of égale et parallèle à cd, et dont l'extrémité f étant située dans l'intérieur du parallélogramme $aObc$ serait à une distance de Oa moindre que b, résultat inadmissible.

Cette démonstration serait en défaut si c était sur l'une des parallèles à l'axe des x qui font partie du réseau: mais alors soit d le sommet le plus voisin de c parmi ceux qui sont situés à sa gauche sur cette parellèle: Oc et Od donneraient une translation Of dirigée suivant l'axe des x, et de longueur $dc < Oa$, résultat également inadmissible (*).

7. S'il existe d'autres translations non situées dans le plan aOb, soit Oc une de celles dont l'extrémite est à la plus courte distance du plan aOb: cette plus court distance ε ne peut être infiniment petite: car soit α la distance de la projection de c à celle des parallèles aux x, que contient le réseau, qui en est la plus approchée: on aura $\alpha \overline{\lessgtr} \frac{1}{2}\delta$ et la distance du point c à cette même ligne $\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}$ doit être au moins égale à δ: d'où $\varepsilon^2 \overline{\gtrless} \delta^2 - \alpha^2 \overline{\gtrless} \frac{3}{4}\delta^2$. Cela posé, la translation Oc combinée avec Oa et Ob donne une infinité de translations, dont les extrémités sont aux sommets d'un assemblage de parallélépipèdes formés sur les lignes Oa, Ob, Oc. Le groupe ne contient aucune autre translation: car s'il y en avait une, Od, on pourrait la combiner aux

(*) Tout le monde connaît la démonstration purement analytique que Jacobi a donnée de ce résultat dans son célébre mémoire sur les fonctions à quatre périodes.

précédentes de manière à en obtenir une, Of, contenue dans le premier parallélépipède $Oabc$: la distance de son extrémité au plan Oab serait moindre que ε, résultat inadmissible.

Cette démonstration serait en défaut si le point d se trouvait dans l'un des plans parallèles à Oab que contient l'assemblage; mais dans ce cas, si d n'était pas lui-même un sommet d'assemblage, on obtiendrait une translation Of située dans le plan Oab, et dont l'extrémité ne serait pas un sommet du réseau formé sur Oa et Ob, résultat dont nous avons démontré l'impossibilité.

8. Supposons maintenant que le groupe contienne une translation infiniment petite. Prenons pour axe des x la direction de cette translation. En la répétant un nombre de fois suffisant, on obtiendra une translation d'une amplitude quelconque dans le sens des x: et il est clair que si le groupe contient d'autres translations, elles résulteront toutes de la combinaison de celle-là avec d'autres translations transversales parallèles au plan des yz.

Si ces dernières translations sont toutes d'amplitude finie, elles se réduiront comme on l'a vu, à celles qui dérivent d'une seule translation convenablement répétée, ou de deux translations de directions différentes. Si au contraire l'une d'elles est d'amplitude infiniment petite, prenons sa direction pour axe des y: le groupe contient toute translation parallèle aux x; il contiendra donc toutes les translations parallèles au plan des xy, lesquelles dérivent évidemment de la combinaison des précédentes. Et s'il contient d'autres translations, elles résulteront nécessairement de la combinaison des précédentes avec des translations paralléles aux z.

Si ces dernières translations sont toutes finies, elles résultent d'une seule d'entre elles convenablement répetée. Si au contraire l'une d'elles est infiniment petite, le groupe contiendra toute translation parallèle aux z, et par suite toute translation.

IV. Groupes formés de mouvements de rotation.

9. Si un groupe est exclusivement formé de mouvements de rotation, leurs axes concourent en un même point. Soient en effet R, R' deux de ces rotations, A, A' les axes correspondants: leur combinaison doit produire une nouvelle rotation $RR' = R''$ autour d'un certain axe A''. Soit x un point

situé sur A'', x_1 le point où x se trouve amené par la rotation R; x et x_1 sont dans un même plan perpendiculaire à A et à égale distance de cet axe: donc A est dans le plan perpendiculaire au milieu de $x\,x_1$. De même R' ramène x_1 en x: donc A' est dans le plan perpendiculaire au milieu de $x\,x_1$; donc A et A' sont dans un même plan. Soit O leur point d'intersection: ce point n'étant déplacé ni par R ni par R', ne le sera pas par R'': il est donc situé sur A''. D'ailleurs A'' passe par x, qui n'est pas situé dans le plan des axes A, A': donc les trois axes A, A', A'' ne sont pas situés dans le même plan.

Soit maintenant R''' une autre rotation quelconque du groupe: son axe A''' devra d'après ce qui précède, rencontrer chacun des trois axes A, A', A'': ceux-ci n'étant pas dans le même plan, il faudra pour cela que A''' passe en O.

Cela posé, du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1: A, A' etc. couperont la sphère en divers points a, a' etc. qui représenteront respectivement les directions de ces axes.

10. Supposons maintenant provisoirement que parmi les rotations du groupe il n'en existe aucune dont l'amplitude angulaire soit infiniment petite. Si le groupe contient plusieurs rotations $A_r, A_{r_1}\dots$ autour d'un même axe A et dont les amplitudes angulaires soient respectivement $r, r_1\dots$, toutes ces rotations se déduiront d'une seule d'entre elles, convenablement répétée, et dont l'amplitude sera une partie aliquote de 2π. Soit en effet ρ le plus petit des nombres $r, r_1\dots$: posons $r = m\rho + \varepsilon$, ε étant $< \rho$ et m un entier convenablement choisi: si ε n'était pas nul, des rotations A_r et A_ρ combinées entre elles on déduirait la suivante $A_{r-m\rho} = A_\varepsilon$ dont l'amplitude serait moindre que ρ, résultat absurde. Soit de même $2\pi = m'\rho - \varepsilon'$, d'où $m'\rho \equiv \varepsilon' \bmod 2\pi$. Si ε' n'est pas nul, la rotation A_ρ convenablement répétée donnerait la suivante $A_{\varepsilon'}$ dont l'amplitude serait moindre que ρ, résultat absurde.

Admettons pour fixer les idées que la rotation A_ρ soit parmi toutes celles du groupe, celle dont l'amplitude est minimum: divers cas seront à distinguer:

11. 1.° Si ρ est égal à π, les rotations autour de l'axe A se réduisent à une seule rotation binaire, laquelle pourra constituer à elle seule le groupe. S'il existe au contraire quelque autre rotation $A'_{\rho'}$ autour d'un nouvel axe A', son amplitude ρ' doit être une partie aliquote de 2π, au moins égale à ρ: donc $\rho' = \pi$.

Cela posé soit α l'angle minimum formé entre les deux axes A, A': d'après la formule donnée plus haut pour la composition des mouvements, on obtiendra la rotation $A_\pi A'_\pi$ en élevant en a et a' des arcs de grand cercle perpendiculaires à $a\,a'$ et cherchant leur point d'intersection a'': la rotation résultante aura pour axe $A'' = Oa''$ et pour amplitude 2α; mais cette amplitude ne peut être moindre que π: donc $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$: mais α ne peut être plus grand que $\frac{\pi}{2}$: donc les axes A, A' sont perpendiculaires entre eux. Ils le sont d'ailleurs à A'' qui aboutit au pôle a'' du grand cercle aa'. Donc le groupe contient des rotations binaires autour de trois axes rectangulaires; il n'en peut contenir aucune autre, car son axe devrait être simultanément perpendiculaire aux trois axes donnés, chose absurde.

12. 2.° Admettons en second lieu que le groupe contienne des rotations d'amplitude inférieure à π, mais que ces dernières rotations aient toutes le même axe A. Elles résulteront toutes d'une seule d'entre elles A_ρ, dont les puissances pourront constituer à elles seules tout le groupe. S'il existe au contraire quelque rotation binaire, telle que B_π, autour d'un autre axe B_π, soyent A' et A'_ρ l'axe et la rotation transformés de A et de A_ρ par B_π. La rotation A_ρ ayant son amplitude inférieure à π, son axe A' doit se confondre avec A: et comme A' est la droite symétrique de A par rapport à B, il faudra que B soit perpendiculaire à A.

Soient donc B, B'...les axes des rotations du groupe autres que A: ils seront tous situés dans un même plan perpendiculaire à A. Soit α le plus petit des angles que deux quelconques de ces axes forment entre eux.

La résultante des deux rotations B_π et B'_π, dont les axes font entre eux l'angle α, est une rotation d'angle 2α autour de A: donc 2α est un multiple de ρ. D'autre part la résultante des deux rotations A_ρ et B_π est, d'après notre construction, une rotation d'angle π autour d'un axe $O\beta$ situé dans le plan perpendiculaire à $Oa = A$ et faisant avec $Ob = B$ un angle $b\beta$ égal à $ba\beta = \frac{1}{2}\rho$: donc α est au plus égal à $\frac{1}{2}\rho$: donc enfin $\alpha = \frac{1}{2}\rho$.

Cela posé la rotation transformée de B_π par B'_π est égale à B''_π, B'' étant symètrique de B par rapport à B', et faisant par conséquent l'angle 2α avec B: de même la transformée de B'_π par B''_π sera égale à B'''_π faisant l'angle 3α avec B etc...On aura ainsi dans le plan normal à A une suite d'axes binaires équidistants B, B', B''...: il n'en existe pas d'autres, car ils feraient avec l'un des précédents un angle moindre que α. Donc le groupe est formée de deux sortes de mouvements: 1° rotations d'un multiple de ρ autour de A: 2° rotations d'angle π autour de l'un des axes B, B', B''... en nombre $\frac{2\pi}{\rho}$ (car leurs extrémités sont en nombre $\frac{2\pi}{\alpha}$ et chacun en a deux).

13. 3°. Admettons enfin qu'il existe plusieurs axes A, B,... autour desquels aient lieu des rotations non binaires A_ϱ, B_ϱ,... Soit A_ϱ celle de ces rotations dont l'amplitude est minimum. Le mouvement transformé de A_ϱ par $B_{\varrho'}$ est égal à A'_ϱ, A' étant l'axe transformé de A, lequel est évidemment différent de A. Il existe donc plusieurs axes A, A',... autour desquels ont lieu des rotations d'amplitude ρ.

Les distances angulaires de ces axes entre eux seront toutes finies, car si l'une d'elles, aa', était infiniment petite, les deux rotations A_ϱ et A'_ϱ qui toutes deux font partie du groupe, auraient évidemment pour résultante une rotation infiniment petite, laquelle serait également contenue dans le groupe, contrairement à notre hypothèse.

Cela posé, soient A et A' deux axes choisis dans la suite A, A'... de telle sorte que leur distance angulaire α soit minimum. La résultante B_r des deux rotations A_ϱ, A'_ϱ se détermine par un triangle isoscéle $aa'b$ fait sur la base aa' avec les angles $\frac{1}{2}\rho$, et son amplitude r sera égal au double de l'angle $aba' = \beta$ (n.° 3). Cela posé, transformons A et A' par B_r: nous obtiendrons deux axes nouveaux, dont les extremités a'' et a''' sont situées sur un petit cercle décrit autour du pôle b avec le rayon ba. Le point a'' étant symètrique de a par rapport à ba', les quatre points a, a', a'', a''' seront équidistants sur le petit cercle et les angles $a\,a'\,a''$, $a'\,a''\,a'''$ seront égaux entre eux et égaux à ρ.

De même B_r transformera les axes $Oa'' = A''$ et $Oa''' = A'''$ en deux nouveaux axes dont les extrémités a_4 et a_5 sont situées sur le méme petit cercle: et poursuivant ainsi, on obtiendra une suite d'axes pareils à A et dont les extrémités son équidistantes. Après avoir décrit le cercle entier, on retombera sur le point a: car sans cela on arriverait à un point a_1 compris entre a et a' et l'axe corréspondant $Oa_1 = A_1$ ferait un angle moindre que A' avec l'axe A, ce qui est inadmissible. Les divers sommets distincts a, a', a'', a'''... forment donc un polygone régulier. La rotation A_ϱ transforme ce polygone en un polygone pareil, qui lui est contigü suivant aa': de même A'_ϱ le transforme en un polygone pareil contigü au premier suivant $a'\,a''$: continuant ainsi, on obtiendra une suite de polygones réguliers égaux, qui couvriront toute la sphère sans empiéter les uns sur les autres. Supposons en effet que l'un de ces polygones P' vienne empiéter sur le premier P: nous allons prouver qu'il ne contient aucun sommet c situé dans l'intérieur de P: joignons-le à a par un arc de grand cercle. Faisons l'angle $a''a'c' = a'ac$ et prenons $a'c' = ac$; c' sera l'extrémité d'un nouvel axe autour duquel a lieu une rotation d'amplitude ρ, laquelle s'obtiendra évidemment en combinant ensemble les rotations $A'\rho$, $A''\rho\dots$ de la même manière qu'on devait combiner entre elles les rotations $A\rho$, $A'\rho\dots$ pour obtenir une rotation d'amplitude ρ autour de l'axe Oc. Cela posé, comparons entre eux les deux triangles aba' et cbc': ils ont évidemment même angle en b, et de plus $bc = bc' < ba = ba'$: donc $cc' < aa'$, ce qui est inadmissible, par hypothèse, à moins toutefois que cc' ne soit nul, auquel cas c et c' se confondent avec b.

Le polygone P' ne peut donc avoir qu'un seul de ses sommets dans l'intérieur du premier polygone, et ce sommet sera en b. Le sommet b' qui suit immédiatement b sur le contour de P' devra coïncider avec un des sommets $a, a'\dots$: car autrement b' serait situé ou sur l'un des côtés aa', $a'a''\dots$, ou en dehors du premier polygone. Ces deux hypothèses sont également absurdes: car si b' est situé sur aa', sa distance à a sera moindre que aa': et si b' est en dehors de P, l'arc de grand cercle bb' coupera l'un des côtés de P, aa' par exemple. Parmi les quatre tronçons bd, db', ad, da' dans lesquels aa' et bb' se partagent mutuellement, deux au moins, bd et ad par exemple, sont égaux ou inférieurs à $\frac{1}{2}aa' = \frac{1}{2}bb'$: on aura alors $ab < ad + bd < aa'$, résultat absurde.

Supposons donc que b' tombe sur a: on aura $ba = bb' = aa'$: le triangle aba' sera donc équilatéral: donc chacun de ses angles dépasse $\frac{\pi}{3}$: donc ρ, somme des angles en a et a', dépasse $\frac{2\pi}{3}$: mais ρ divide 2π: donc $\rho = \pi$, résultat contraire à notre hypothèse.

Supposons maintenant que P' empiéte sur P, sans avoir aucun sommet situé dans l'intérieur de P. Il faudrait pour cela que deux sommets consécutifs de P', c et c', se trouvassent sur le contour de P, sans se confondre avec deux sommets consécutifs de P (auquel cas P' serait contigü à P, mais n'empiéterait pas sur lui). Cette nouvelle hypothèse est absurde: car si c est situé sur aa' par exemple, sa distance à a sera moindre que aa', contrairement à la supposition d'après laquelle aa' est minimum. Pour échapper à cette conclusion il faut admettre que c se confond avec a ou a', avec a par exemple. On voit de même que c' se confond avec un autre somme P, tel que a''. On aura donc $aa'' = cc' = aa'$. Ce résultat est absurde: car on a $a'a''' = aa''$, et ces deux arcs se coupent en un point d; et si les tronçons $a'd$, $a''d$ sont respectivement les plus petits parmi les quatre que l'intersection détermine, on aura $aa' = a'a'' < a'd + a''d < ad + a''d < aa''$.

Les sommets du réseau de polygones réguliers ainsi formés seront évidemment ceux d'un polyèdre régulier inscrit à la sphère. Ce polyèdre ne peut être un tétraèdre: car dans le tétraèdre $aa' > 90^\circ$ et par suite ne peut représenter le plus petit des angles que forment entre eux deux axes donnés, car on aurait dans ce cas $\rho = \frac{2\pi}{3}$, et l'angle $aba' = \frac{4\pi}{5}$ d'où $3aba' = \frac{12\pi}{5} \equiv \frac{2\pi}{5}$ (mod 2π): on aurait donc autour de l'axe Ob une rotation d'une amplitude moindre que ρ, ce qui est contre l'hypothèse.

Il ne reste donc que trois solutions distinctes répondant au cube, à l'octaèdre et à l'icosaèdre. Les valeurs correspondantes de ab et de aa' sont les suivantes:

	aa'	ab
Pour le cube	70° 32′	54° 44′
Pour l'octaèdre	90°	54° 44′
Pour l'icosaèdre	63° 26	37° 23′

Dans chacun de ces trois cas il n'existe aucun axe autour duquel ait lieu une rotation d'amplitude ρ, sauf ceux dont les extrémités sont aux sommets du polyèdre régulier: car s'il en existait un dont l'extrémité x fût dans l'un des polygones sphériques $aa'a''\dots$ l'une des distances angulaires de x aux sommets a, a', $a''\dots$ serait nécessairement inférieure à ab, et a fortiori à aa': ce qui est contraire à l'hypothèse d'inclinaisons minimum des deux axes A, A'.

Les mouvements du groupe, devant tous transformer les uns dans les autres les axes autour desquels a lieu une rotation d'amplitude ρ, superposeront à lui-même le polyèdre régulier correspondant.

Réciproquement dans le cas de l'octaèdre, tout mouvement qui superpose le polyèdre à lui-même fait partie du groupe: car les rotations de 90° autour des sommets de l'octaèdre font partie du groupe, et en combinant ces mouvements on peut amener un sommet quelconque de l'octaèdre à la place de l'un quelconque des six sommets, puis la position de ce premier sommet étant définie, faire tourner l'octaèdre de 90° autour de ce sommet. On obtient ainsi tous les modes distincts en nombre 24 de superposer l'octaèdre à lui-même.

De même dans le cas de l'icosaèdre, les rotations de 72° autour des sommets permettent d'amener chaque sommet à 12 positions distinctes et pour chaque position déterminée de placer l'icosaèdre sur lui-même dans cinq positions différentes, ce qui donne tous les modes distincts en nombre 24 de superposer le polyèdre à lui-même.

La même chose n'a pas lieu dans le cas du cube: car le cube est superposé à lui-même par une rotation de 90° autour de la ligne qui joint les centres de deux faces opposées: mais par hypothèse, l'amplitude minimum des rotations que contient le groupe est de $\frac{2\pi}{3}$: donc il ne contient pas les rotations ci-dessus. Mais soient $S\,S_1\,S_2\,S_3$ quatre sommets contigüs du cube: on voit qu'en combinant les rotations de 120° autour des sommets du cube lesquelles font partie du groupe, on pourra amener successivement S à chacune des quatre places S, S_1, S_2, S_3, puis cette place étant assignée, permuter circulairement entre eux les trois autres sommets par une rotation de 120°. Le groupe contient donc 12 mouvements qui superposent à lui-même ce tétraèdre S, S_1, S_2, S_3.

Nous obtenons ainsi trois groupes de mouvements qui sont respectivement ceux qui superposent à lui-même le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

14. Il nous reste à examiner le cas où parmi les rotations du groupe, il en existe une A_ϱ dont l'amplitude ρ soit infiniment petite. Cette rotation, convenablement répétée, permettra d''obtenir une rotation d'un angle quelconque autour de l'axe A. Il pourra se faire que les rotations ainsi obtenues soient les seules que contienne le groupe.

S'il n'en est pas ainsi, supposons en premier lieu que les autres rotations contenues dans le groupe soient toutes binaires et que les axes correspondants soient perpendiculaires à A. Soit B l'un de ces axes. Les rotations $A_\varrho, A_{2\varrho}...A_{m\varrho}$ transformeront B en une suite d'axes équidistants $B', \ldots B^{(m)}$ tous situés dans le plan normal à A, et infiniment voisins les uns des autres. Le groupe contiendra donc, outre les rotations autour de l'axe A, toute rotation binaire dont l'axe est perpendiculaire à A.

Supposons enfin que le groupe contienne une rotation B_r non binaire, ou dont l'axe B soit oblique à A', différent de A: les diverses rotations autour de A faisant partie du groupe, il en sera de même de leurs transformées qui sont les rotations autour de A'. Soit α l'angle des deux axes A et A'. Les rotations $A_\varrho \ldots A_{m\varrho}$ transforment A' en une infinité d'axes pareils ayant pour lieu de leurs extrémités le petit cercle décrit autour de A avec le rayon α et dont l'angle avec l'axe A' varie d'un manière continue depuis 0 jusqu'à 2α. Soient C l'un quelconque d'entre eux, γ l'angle qu'il fait avec A'. Les rotations $A'_\varrho \ldots A'_{m\varrho}$ le transforment en une infinité d'axes pareils ayant pour lieu de leurs extrémités le petit cercle décrit autour de A' avec le rayon γ; γ prenant successivement les diverses valeurs entre 0 et 2α, on aura une infinité de petits cercles formant autour de A' une calotte sphérique limitée par le cercle de rayon 2α. Chaque point de cette calotte sera l'extrémité d'un axe pareil à A. Il est clair que les angles compris entre ces divers axes et l'axe A varient d'une manière continue entre 0 et 3α. On en conclut comme tout à l'heure, que tous les points d'une nouvelle calotte décrite autour de A avec un rayon 3α sont les extrémités d'un axe pareil à A: qu'il en est de même de tous les points de la calotte décrite autour de A' avec un rayon 4α etc... Donc enfin tous les points de la sphère sont l'extrémité d'axes pareils à A. Le groupe contenant une rotation quelconque autour d'un quelconque de ces axes, contiendra toutes les rotations possibles.

15. En résumant cette discussion, on voit que les groupes de mouvements de rotation se ramènent à 6 types distincts.

1.er type. Rotations ayant toutes le même axe A, et ayant pour amplitudes respectives les divers multiples d'un même angle ρ, ρ étant un diviseur de 2π ou un angle infiniment petit: dans ce dernier cas, toute rotation autour de A fait partie du groupe.

2ème type. S'obtient en adjoignant aux mouvements du type précédent des rotations binaires autour d'axes $B, B' \dots$ situés dans le plan normal à A, équidistants et en nombre $\frac{2\pi}{\rho}$ (Si ρ est infiniment petit, ces axes deviennent contigus les uns aux autres et toute droite située dans le plan normal fait partie de la série $B, B' \dots$).

3ème 4ème et *5ème types.* Ils sont formés respectivement de l'ensemble des mouvements qui superposent à lui même un icosaèdre, un octaèdre, ou un tétraèdre régulier.

6ème type. Il est formé par l'ensemble de tous les mouvements de rotation possibles.

V. Partage des groupes en catégories.

16. Soient $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ etc... un système de mouvements hélicoïdaux quelconques, formant un groupe: soient $B, B' \dots$ des droites parallèles à $A, A' \dots$ menées par un point quelconque O: les rotations $B_{r,0}\, B'_{r',0} \dots$ forment un groupe;

car soit $C_{\varrho,o}$ la rotation résultante de deux d'entre elles $B_{r,o}$ et $B'_{r',o}$: nous avons vu que le mouvement résultant de $A_{r,t}$ et de $A'_{r',t'}$ est égal à $C'_{\varrho,\tau}$, C' étant un axe parallèle à C et τ une translation convenable. Ce mouvement faisant partie de la suite $A_{r,t}\,A'_{r',t'}\dots$ la rotation correspondante $C_{\varrho,o}$ fera partie de la suite $B_{r,o}B'_{r',o}\dots$ donc cette suite de mouvements est telle que le mouvement résultant de deux quelconques d'entre eux fait partie de la suite, ce qui est la définition caractéristique d'un groupe de mouvements.

Les groupes de mouvements tels que $A_{r.t}$, $A'_{r',t'}\dots$ peuvent être partagés en catégories, suivant le type auquel appartient le groupe auxiliaire formé par les rotations $B_{r,o}$, $B'_{r',o}\dots$ d'où plusieurs cas à distinguer dans notre discussion.

VI. Groupes de la première catégorie

17. Cette catégorie est celle où le groupe auxiliaire appartient au 1er type. Les axes $B, B'\dots$ se reduisant à un seul, les axes $A, A'\dots$ seront tous parallèles entre eux: et divers cas pourront se présenter.

18. *1er Cas.* Supposons que parmi les axes A, $A'\dots$ il en existe un, A, unique de son espèce. Le groupe ne peut contenir dans ce cas ni mouvement de translation oblique à A, ni mouvement rotatoire ou hélicoïdal autour d'un autre axe parallèle, tel que A': car un semblable mouvement transformerait A en un autre axe pareil, ce qui est impossible. Le groupe ne contient donc que des mouvements autour de l'axe A et des translations dans le sens de cet axe: soient $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ ces divers mouvements. Supposons d'abord qu'aucun d'entre eux ne soit infiniment petit: les longueurs $t, t'\dots$ devront être commensurables entre elles. En effet la combinaison des mouvements $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ etc. donne évidemment le suivant $A_{mr+m'r'\dots,\, mt+m't'\dots}$ $m, m'\dots$ étant des entiers quelconques. Si $t, t'\dots$ n'étaient pas commensurables entre elles, ces entiers pourraient être choisis de telle sorte que $mt+m't'\dots$ se réduisît à une longueur infiniment petite τ. Parmi les mouvements du groupe, il en existerait donc dans lesquels la translation est infiniment petite: parmi les mouvements de cette espèce, il en existera un où la rotation sera nulle ou infiniment petite: car si cela n'avait pas lieu, soit $A_{\varrho,\tau}$ celui de ces mouvements dans lequel σ aurait sa valeur absolue minimum: ρ étant un angle positif ou négatif au plus égal à π, posons $2\pi = m\rho \pm \varepsilon$, ε étant au plus égal à $\frac{1}{2}\rho$: le mouvement $A_{\varrho,\tau}$, m fois répété,

donnerait le suivant $A_{\pm\varepsilon, m\tau}$ dans lequel $m\tau$ est infiniment petite et $\varepsilon < \rho$, résultat inadmissible. Donc si $t, t' \ldots$ ne sont pas commensurables entre eux, il existera nécessairement un mouvement dans lequel la translation et la rotation seront toutes deux infiniment petites: nous supposons que cela n'a pas lieu: donc $t, t' \ldots$ sont commensurables entre elles.

Soit τ leur plus grand commun diviseur: on peut poser $mt + m't' \ldots = \tau$: soit en même temps $mr + m'r' \equiv \rho \pmod{2\pi}$: on aura dans le groupe un mouvement $A_{\rho,\tau}$: il pourra se faire que le groupe ne contienne d'autre mouvement que celui-là, et ceux qu'on en déduit en le répétant. Dans le cas contraire, tout mouvement du groupe résultera de la combinaison de ce mouvement avec de simples mouvements de rotation: car soit par exemple $t = n\tau$; $A_{r,t}$ résultera des deux mouvements suivants: $(A_{\rho,\tau})^n = A_{n\rho, n\tau}$ et $A_{r-n\rho, o}$. Soient $A_{s,o}, A_{s',o} \ldots$ ces mouvement de rotation: tout mouvements de la forme $A_{ms+m's' \ldots, o}$ sera dérivé de ceux-là: d'ailleurs $s, s' \ldots 2\pi$, seront commensurables entre eux: car s'il n'en était pas ainsi, on pouvait choisir $m, m' \ldots$ de telle sorte que ce mouvement devînt infiniment petit. Soit σ le plus grand commun diviseur de $s, s' \ldots 2\pi$: on pourra poser $ms + m's' \ldots = \sigma$ et tous les mouvements de rotation ci-dessus résultent du seul mouvement $A_{\sigma,o}$ convenablement répété.

Dans le cas que nous venons d'examiner, tous les mouvements du groupe résultent donc d'un mouvement hélicoïdal (qui se réduit à un mouvement de translation si $\rho = 0$) seul, ou combiné à un mouvement de rotation dans l'amplitude angulaire divise 2π.

19. Supposons maintenant qu'il existe dans le groupe un mouvement infiniment petit $A_{\rho,\tau}$. Supposons d'abord $\tau \gtrless 0$, de telle sorte que ce mouvement soit hélicoïdal ou rectiligne. En répétant le mouvement proposé, on obtient le suivant $A_{m\rho, m\tau}$ et l'on peut choisir l'entier m de telle sorte que $m\tau$ prenne une valeur quelconque t. Si le groupe contient d'autres mouvements que ceux-là, soit $A_{r,t}$ l'un d'entre eux: il résulte de la combinaison des deux mouvements $A_{m\rho, m\tau}$ et $A_{r-m\rho, 0}$. Donc tous les mouvements du groupes resultent du mouvement $A_{\rho,\tau}$ joint à des mouvements de rotation: soient $A_{s,o}\ A_{s',o} \ldots$ ces diverses rotations: si $s, s' \ldots 2\pi$ sont incommensurables, on en déduit une rotation $A_{\sigma,o}$ dont la répétition les réproduit toutes. Si elles ne le sont pas, on en déduit une rotation infiniment petite, dont la répétition reproduit une rotation quelconque, laquelle combinée à $A_{\rho,\tau}$ reproduira évidemment un mouvement hélicoïdal quelconque.

Soit au contraire $\tau = 0$. Le mouvement infiniment petit $A_{\rho,o}$ reproduit une rotation quelconque. Les divers mouvements du groupe résultent tous de la combinaison de ces rotations avec des translations $A_{o,t}\,A_{o,t'}$. Si t, t'... sont commensurables, soit θ leur plus grand commun diviseur: toutes ces translations résultent d'une seule d'entre elles $A_{o,\theta}$: si elles sont incommensurables, on en déduit une translation infiniment petite, et le groupe contient tout mouvement hélicoïdal.

20. 2^{me} *Cas.* Supposons que parmi les axes A, A'... il n'en existe aucun qui soit unique de son espèce, mais que dans tous les mouvements du groupe l'amplitude de la rotation soit nulle ou égale à π. Si cette amplitude était toujours nulle, le groupe ne contiendrait que des mouvements de translation, cas déjà examiné: soit donc $A_{\pi,t}$ un mouvement choisi parmi ceux du groupe dans lequel cette amplitude est égale à π, de telle sorte que t soit minimum. Le groupe s'obtiendra tout entier en combinant ce mouvement avec des translations: car soit $A'_{\pi,t'}$ une substitution du groupe qui ne se réduise pas à une translation: les axes A et A' étant parallèles, on aura comme nous l'avons vu (n.° 3) $A'_{\pi,o} = A_{\pi,o}\,T$, et par suite $A'_{\pi,t'} = A_{\pi,t}\,T\,T_1$, T étant une translation perpendiculaire aux axes et T_1 une translation longitudinale égale à $t' - t$.

Parmi ces translations, qui étant jointes à $A_{\pi,t}$ reproduisent le groupe, il en existe une au moins perpendiculaire à A: car si elles lui étaient toutes parallèles, on retomberait sur le premier sous-cas, et si l'une d'elles, θ, lui est oblique, soient θ_1, θ_2 ses deux projections sur A et sur le plan normal: sa transformée θ' par $A_{\pi,t}$ aura pour projections θ_1, $-\theta_2$: en la combinant à θ, on aura une nouvelle translation longitudinale $2\theta_1$, faisant partie du groupe: en la combinant avec la translation 2θ, dont les projections sont $2\theta_1$ et $2\theta_2$, on aura une translation $2\theta_2$ perpendiculaire à A.

Nous venons de voir d'autre part qu'il existe des translations longitudinales, telles que 2θ, s'il en existe d'obliques: la même chose aura lieu si t n'est pas nul: car le mouvement $A_{\pi,t}$ deux fois répété, donne la translation longitudinale $2t$.

21. Divers cas sont à distinguer ici:

Supposons d'abord que parmi les mouvements de translations du groupe il n'y en ait aucun qui soit infiniment petit.

1.° Admettons qu'il n'existe pas de translation longitudinale et que toutes les translations transversales s'obtiennent par la répétition d'une seule τ, qu'on peut supposer dirigée suivant l'axe des x. La combinaison de la translation $m\tau$ avec la rotation binaire $A_{\pi,o}$ par les formules du n.° 3 donne une rotation binaire autour d'un nouvel axe A' parallèle à A et coupant l'axe x au point dont l'abscisse est $\frac{m}{2}\tau$. On aura donc une infinité d'axes $A, A' \ldots$ à rotation binaire et espacés l'un de l'autre de la quantite $\frac{\tau}{2}\cdot$ Ils seront pareils de deux en deux, étant transformés les uns dans les autres par la translation $m\tau$.

22. 2.° S'il n'existe pas de translation longitudinale et si les translations transversales résultent de la combinaison de deux d'entre elles, τ, τ_1 que l'on peut supposer dirigées suivant les x et les y, on aura une infinité de translations représentées généralement en grandeur et en direction par la ligne qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont $m\tau$, $n\tau_1$, m et n étant des entiers arbitraires: cette translation, combinée à $A_{\pi,o}$ donnera une rotation binaire autour de l'axe A' dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}m\tau$, $\frac{1}{2}n\tau_1$. Les axes de rotation binaire passeront donc par les sommets d'un réseau formé sur les deux lignes $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{3}\tau_1$, mais parmi ces axes, ceux-là seulement seront pareils à A qui passent par les sommets du réseau formé sur τ et τ_1.

23. 3.° Supposons maintenant qu'il existe des translations longitudinales. Si elles sont toutes finies, elle sont commensurables entre elles et s'obtiendront toutes par la répétition de la plus petite, θ. En outre, $2t$ étant l'une de ces translations, sera un multiple de θ: soit donc $t = \frac{\mu}{2}\theta$; μ pourra être supposé égal à 0 où à 1: car soit $\mu = \frac{2n+\mu'}{2}\theta$, μ' étant égal à 0 où à 1: des deux mouvements $A_{\pi,t}$ et θ combinés ensemble, on déduirait le suivant $A_{\pi,\frac{\mu'}{2}\theta}$ où la translation serait moindre que t, résultat inadmissible. Cela posé, soient T une quelconque des translations du groupe, τ_1 et τ_2 ses projections sur A et sur le plan normal: nous avons vu que le groupe contient les translations $2\tau_1$ et $2\tau_2$: donc $2\tau_1$ est un multiple de θ, et $2\tau_2$ est l'une des translations normales. Soient donc $\tau_1 = \frac{m}{2}\theta$ et $\tau_2 = \frac{n}{2}\tau'$, τ' étant celles des translations normales ayant la direction τ_2 dont l'amplitude est minimum; soient m' et n' les restes de la division de m et de n par 2: la translation T, combinée avec θ et avec τ', en donnera une nouvelle T' dont les projections seront $\frac{m'}{2}\theta$ et $\frac{n'}{2}\tau'$. Si m' et n' sont constamment nuls

par toutes les translations du groupe, elles résultent toutes de la combinaison de θ avec les translations normales: et le groupe entier résultera donc de ces translations normales et longitudinales jointes au mouvement hélicoïdal $A_{\pi,\frac{\mu'\theta}{2}}$. Les translations normales dérivent soit d'une seule, soit de deux distinctes: d'autre part μ' peut être égal à 0 ou à 1: on obtient donc quatre tipes de groupes distincts.

Supposons au contraire que dans quelqu'une des translations du groupe on ait $m'=1$: on aura nécessairement $n'=1$: car s'il s'annulait, le groupe contiendrait la translation longitudinale $\frac{1}{2}\theta$, laquelle $<\theta$, ce qui ne peut être.

Cela posé, si toutes les translations normales résultent de la répétition d'une seule τ dirigée suivant l'axe des x, on aura $\tau'=\tau$ et les translations du groupe se réduiront toutes à la combinaison de θ, avec τ et avec T' dont les projections sont $\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}\tau$. Cette translation T' transforme l'axe A en un autre axe pareil A' situé à la distance $\frac{1}{2}\tau$ de A: on a ainsi une infinité d'axes pareils à A, espacés de $\frac{1}{2}\tau$ les uns des autre et autour desquels ont lieu respectivement les mouvements $A_{\pi,t}$, $A'_{\pi,t}$ etc. Ces mouvements combinés à la translation T' donnent des mouvements tels que $C_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$ $C'_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}\dots$ $C, C'\dots$ étant de nouveaux axes situés au milieu de l'intervalle des précédents. On voit d'ailleurs qu'on aura nécessairement $t=0$: car si $t=\frac{1}{2}\theta$, $C_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$ combiné à la translation θ donnerait le mouvement $C_{\pi,o}$, où la translation serait nulle et partant moindre que t, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Si les translations normales résultent au contraire de deux d'entre elles τ et τ_1 respectivement dirigées suivant les axes des x et des y, la translation τ' aura pour projections suivant ces axes $p\tau$ et $p_1\tau_1$, p et p_1 étant des entiers: $\frac{1}{2}\tau'$ aura pour projection suivant ces axes $\frac{1}{2}p\tau$ et $\frac{1}{2}p_1\tau_1$ et résultera de la combinaison de τ et τ_1 avec une nouvelle translation ayant pour projection $\frac{1}{2}r\tau$, $\frac{1}{2}r_1\tau_1$, r et r_1 étant égaux à 0 ou à 1. Ils ne peuvent être nuls simultanément: car $\frac{1}{2}\tau'$ serait alors une des translations dérivées de τ et de τ_1, ce qui est contraire à l'hypothèse: on a donc trois systèmes de solutions possibles: $r=1$, $r_1=0$ ou $r=0$, $r_1=1$ ou enfin $r=1$, $r_1=1$: et T' étant la résultante des translations $\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}\tau'$, résultera de la combinaison de τ, et τ_1 avec une translation $\mathbf{T}$ ayant pour projection verticale $\frac{1}{2}\theta$ et pour projection horizontale une des trois translations normales dont nous venons de trouver les projections et que nous pouvons désigner respectivement par ρ_1, ρ_2, ρ_3. Cette translation $\mathbf{T}$ fera partie du groupe.

Or il est impossible que le groupe contienne simultanément des translations T et T_1 ayant respectivement pour projection verticale $\frac{1}{2}\theta$ et pour projections horizontales deux des quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3. Car supposons par exemple que T ait pour projection horizontale ρ_1 et que T_1 ait pour projection horizontale ρ_3. En combinant à la translation T la translation T_1, puis la translation θ prise en sens contraire, on obtiendrait la translation normale ρ_3 laquelle devrait faire partie du groupe, ce qui n'est pas, ses projections n'étant pas des multiples de τ et de τ_1. Donc les translations du groupe s'obtiennent toutes en combinant à θ, τ et τ_1 une seule translation T, dont la projection verticale soit $\frac{1}{2}\theta$ et la projection horizontale une des trois quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3. On peut supposer que cette projection est égale à ρ_1 : car si elle était égale à ρ_2, il suffirait pour ramener ce cas au premier, de changer les x en y et réciproquement; et si elle était égale à ρ_3, il faudrait changer l'axe des x en prenant pour nouvel axe la diagonale du parallélogramme formé sur τ et τ_1.

Cela posé, les translations T, τ et τ_1, convenablement répétées, transforment l'axe A en une infinité d'axes pareils passant par les points dont les coordonnées sont de la forme $x=\frac{1}{2}m\tau$, $y=n\tau_1$: et la translation T, combinée au mouvement $A'_{\pi,t}$ autour de celui des axes qui passe par le point $x=\frac{1}{2}m\tau$, $y=n\tau_1$, donne un mouvement résultant $C_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$, C étant un axe parallèle à A et passant par le point $x=\dfrac{2m+1}{4}\tau$, $y=n\tau_1$. En dernier lieu, la translation τ_1, combinée aux mouvements $A'_{\pi,t}$, $C'_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$, donnera les mouvements $D'_{\pi,t}$, $E'_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$, D' et E' étant des axes parallèles à A et passant respectivement par les points $x=\frac{1}{2}m\tau$, $y=(n+\frac{1}{2})\tau_1$ et $x=\dfrac{2m+1}{4}\tau$, $y=(n+\frac{1}{2})\tau_1$.

On remarquera enfin qu'on doit supposer $t=0$: car si l'on avait $t=\frac{1}{2}\theta$, les mouvements $C_{\pi,t+\frac{1}{2}\theta}$ et θ combinés ensemble donneraient le suivant $C_{\pi,0}$, où la translation serait nulle et par suite $<t$, résultat inadmissible.

24. Il nous reste à considérer le cas où quelqu'une des translations du groupe serait infiniment petite. L'une au moins de ces translations infiniment petites est longitudinale ou normale à A : car si l'une d'elles lui était oblique, ses projections normale et longitudinale étant doublées représenteraient des translations infiniment petites respectivement normale et longitudinale et appartenant au groupe.

Admettons d'abord qu'il existe une translation longitudinale infiniment petite. On pourra en déduire une translation longitudinale arbitraire : et tous les mouvements du groupe s'obtiennent en combinant cette translation avec un autre groupe partiel, exclusivement formé d'une rotation binaire autour de A et de translations normales. Si parmi ces translations normales aucune n'est infiniment petite, ce nouveau groupe se formera comme il vient d'être indiqué dans la discussion précédente. S'il en existe une infiniment petite, on peut la supposer dirigée perpendiculairement à l'axe des x, et sa répétition produit une translation arbitraire perpendiculairement à cet axe. Le groupe cherché résulte de la combinaison de ces translations avec un autre groupe partiel exclusivement formé de la rotation binaire autour de A et de translations suivant les x. Si ces dernières translations sont toutes finies, ce nouveau groupe s'obtient comme nous l'avons indiqué: dans le cas contraire, ce groupe renferme, outre la rotation binaire, toute translation parallèle aux x.

Admettons maintenant qu'il n'existe aucune translation longitudinale infiniment petite, mais qu'il en existe une normale et perpendiculaire aux x. Le groupe résultera de la combinaison de cette translation avec un groupe partiel dans lequel les translations normales seront parallèles aux x. Si aucune de ces dernières n'est infiniment petite, le groupe partiel sera formé comme nous l'avons indiqué. Dans le cas contraire, il contiendra toute translation parallèle aux x et résultera de la combinaison de ces translations avec un autre groupe où il n'y aura plus de translations normales, mais seulement des mouvements hélicoïdaux autour de A; l'amplitude de la rotation dans ces mouvements hélicoïdaux étant 0 ou π, ils résultent tous de la combinaison d'un seul d'entre eux, $A_{\pi,t}$, avec des translations longitudinales. Ces translations résulteront toutes de la répétition de la plus petite d'entre elles, θ: et si t est choisi aussi petit que possible, il sera égal à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta$.

25. *3^me^ cas.* Supposons maintenant que parmi les axes $A, A' \ldots$ il n'en existe aucun qui soit unique de son espèce: que le groupe contienne des mouvements où l'amplitude de la rotation ne soit ni 0 ni π: mais qu'il ne contienne ni mouvement où cette amplitude soit infiniment petite, ni mouvement infiniment petit.

Soit $A_{\varrho,\tau}$ l'un des mouvements où cette amplitude atteint son minimum ρ, et choisi en outre de telle sorte que τ y soit aussi petit que possible: ρ sera évidemment un diviseur de 2π. Soient A, A', A'' les axes pareils à A: $\alpha = AA'$ la distance minimum de ces axes entre eux. α sera fini: car s'il était infiniment petit, le mouvement inverse de $A_{\varrho,\tau}$ combiné au mouvement $A'_{\varrho,\tau}$ donnerait pour résultante une translation infiniment petite.

Cela posé, soient a, a' les traces des axes A, A' sur le plan des xy. Le mouvement résultant de $A_{\varrho,\tau}$, $A'_{\varrho,\tau}$ sera égal à $B_{r,2\tau}$, B étant un axe parallèle à A, dont la trace b se détermine au moyen d'un triangle isoscèle, formé sur la base aa' avec les angles $\frac{1}{2}\rho$, et r étant égal au double de l'angle $aba'=\beta$. Transformons maintenant A et A' par $B_{r,2\tau}$: nous obtiendrons deux axes nouveaux A'', A''', dont les pieds a'' et a''' sont situés sur un cercle décrit autour de b comme centre avec le rayon ba. Le point a'' étant symétrique de a par rapport à ba', les quatre points a, a', a'', a''' sont équidistants sur le cercle, et les angles $a\,a'\,a''$, $a'\,a''\,a'''$ sont égaux entre eux et égaux à ρ.

De même $B_{r,2\tau}$ transformera les axes A'', A''' en deux nouvèaux axes dont les pieds a_4, a_5 sont situés sur le même cercle: et poursuivant ainsi, on obtiendra une suite d'axes équidistants tous pareils à A. Après avoir décrit le cercle entier, on retombera sur le point a, sans quoi on arriverait à un point a_1 compris entre a et a', qui serait le pied d'un axe pareil à A et plus voisin de A que A', ce qui est absurde. Les divers sommets distincts a, a', a'', a'''... forment donc un polygone régulier. D'ailleurs l'angle ρ de ce polygone doit diviser 2π: ce sera donc un triangle, un carré ou un hexagone.

Le mouvement $A_{\varrho,\tau}$ transforme ce polygone en un polygone pareil, qui lui est contigu suivant aa': de même $A'_{\varrho,\tau}$ le transforme en un polygone pareil contigu au premier suivant $a'a''$: continuant ainsi on obtiendra un réseau de polygones réguliers égaux, contigus entre eux et couvrant tous le plan. Chacun de leurs sommets sera le pied d'un axe pareil à A: réciproquement, si le polygone est un triangle ou un carré, il n'existera aucun autre axe pareil à A: car s'il y en avait un C dont le pied c tombât dans le polygone $a\,a'\,a''\,a'''$... par exemple, l'une au moins des distances ca, ca', ca'', ca'''... serait moindre que le rayon ba du cercle circonscrit, et à *fortiori* moindre que le côté aa' du polygone: ce qui est contraire à l'hypothèse de distance minimum des deux axes A, A'.

Dans le cas de l'hexagone cette démonstration est en défaut si le point c tombe au centre de l'hexagone, la distance de ce point aux divers sommets étant précisément égale au côté. On peut donc avoir, conjointement avec le système d'axes trouvé, un autre système d'axes pareils passant au centre des hexagones.

Examinons maintenant séparément les trois cas correspondant aux trois polygones réguliers que nous venons de trouver.

26. *Cas du triangle.* On a $\rho=\frac{\pi}{3}$ et nous avons vu que les mouvements $A_{\varrho,\tau}$, $A'_{\varrho,\tau}$ combinés entre eux, donnent des mouvements tels que $B_{\frac{2\pi}{3},2\tau}$ autour des lignes parallèles aux axes qui passent par les centres des triangles.

D'autre part le groupe contient les mouvements de translation t, t' représentés en grandeur et en direction par les côtés des triangles: car considérons en particulier le triangle $a\ a'\ a''$. Le mouvement $A_{\varrho,\tau}$ suivi du mouvement inverse de $A''_{\varrho,\tau}$ donne la translation aa'. Enfin le groupe peut contenir des translations longitudinales. Si cela a lieu, on les obtiendra toutes en répétant la plus petite entre elles, θ. D'ailleurs le mouvement $A_{\varrho,\tau}$, six fois répété, donne la translation longitudinale 6τ: donc τ sera nécessairement égal à $\frac{m}{6}\theta$, m étant un entier: m sera d'ailleurs moindre que 6, car si $m=6n+m'$, $A_{\varrho,\tau}$ combiné à la translation θ donnerait un mouvement $A_{\varrho,\frac{m'}{6}\theta}$ où la translation serait moindre que τ, contrairement à notre supposition.

Réciproquement le groupe ne contient aucun autre mouvement que ceux qui dérivent de la combinaison de la translation longitudinale θ avec les autres mouvements que nous venons de déterminer. Car tout mouvement du groupe doit superposer à lui-même le système des axes $A, A'\ldots$ pareils à A: il résulte donc de la combinaison d'une translation longitudinale T avec un mouvement transversal qui superpose le réseau à lui-même. Mais les mouvements transversaux qui superposent le réseau à lui-même sont, ou des mouvements de translation, qui résultent évidemment de la combinaison de translations égales et parallèles aux côtés des triangles, ou des mouvements de rotations autour d'un point du plan, lequel pourra être un sommet du réseau, auquel cas l'angle de rotation devra être un multiple de $\frac{\pi}{3}=\rho$, ou un centre de triangle, auquel cas l'angle de rotation devra être un multiple de $\frac{2\pi}{3}=2\rho$. Donc le mouvement cherché est dérivé de la combinaison de $t, t'\ldots$ avec T, translation longitudinale qui devra faire partie du groupe et par suite sera un multiple de θ, ou bien il sera de l'une des deux formes $A_{\varrho,T}$, $A'_{\varrho,T}\ldots$, $B_{2\varrho,T}\ldots$ Le groupe, contenant d'autre part les mouvements $A_{\varrho,\tau}$, $A'_{\varrho,\tau}$, $B_{2\varrho,T}$, contiendra, suivant les cas, l'une ou l'autre des deux translations longitudinales $T-\tau$ ou $T-2\tau$, laquelle devra être un multiple de θ. Donc le mouvement proposé résulte de la combinaison de θ avec l'un des mouvements $A_{\varrho,\tau}$, $A'_{\varrho,\tau}\ldots$, $B_{\frac{2\pi}{3},2\tau}$.

Si $\tau=0$, on aura ainsi deux formes de groupes différentes, suivant qu'il existera ou non des translations longitudinales.

Si $\tau \gtrless 0$ il en existe toujours, et l'on aura cinq formes différentes correspondant aux cinq systèmes de valeurs $\tau = \frac{\theta}{6}, \frac{2}{6}\theta, \frac{3}{6}\theta, \frac{4}{6}\theta, \frac{5}{6}\theta$.

27. *Cas du carré.* Tout mouvement du groupe, devant superposer à lui-même le système des axes semblables à A, est de la forme TR, T étant une translation longitudinale et R un mouvement transversal qui superpose à lui-même le réseau à maille carrée, formé par les pieds des axes. Réciproquement, R' étant un mouvement transversal quelconque qui jouisse de cette propriété, on pourra déterminer une translation longitudinale T' telle que $T' R'$ soit un mouvement du groupe. En effet le groupe contient nécessairement un mouvement $T'' R''$ qui amène l'axe A à la place d'un axe pareil quelconque A': il contient en outre un mouvement hélicoïdal $A'_{\varrho,\tau}$: il contiendra donc tous les mouvements de la forme $T'' R'' (A'_{\varrho,\tau})^m = T'' (A'_{o,\tau})^m . R'' (A'_{\varrho,o})^m$. Posant successivement $m = 0, 1, 2, 3$, on aura successivement pour $R''(A'_{\varrho,o})^m$ les quatre mouvements qui superposent le réseau à lui–même en amenant le sommet a à la place d'un autre sommet a': à chacun d'eux correspond, comme on le voit, un mouvement du groupe.

Or on peut superposer le réseau à lui-même par une rotation de 90° autour du centre B de l'un quelconque des carrés: le groupe contiendra donc un mouvement tel que $B_{\frac{\pi}{2},\tau'}$, τ' étant une translation longitudinale convenable. Ce mouvement transformé par les mouvements autour de A, A'... donnera une suite de mouvements semblables autour des centres B'... des autres carrés.

Les mouvements $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$, $B_{\frac{\pi}{2},\tau'}$ étant quatre fois répétés, donnent les translations longitudinales 4τ, $4\tau'$: donc si le groupe ne contenait aucune semblable translation, τ et τ' seraient nuls. Pour plus de généralité supposons que le groupe en contienne: soit θ la plus petite: on aura $4\tau \equiv 0 \pmod{\theta}$ et $4\tau' \equiv 0 \pmod{\theta}$. On aura en outre $2(\tau' - \tau) \equiv 0 \pmod{\theta}$. En effet les deux mouvements $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$ et $B_{-\frac{\pi}{2},-\tau}$ combinés ensembles donnent une translation résultante, dont la projection horizontale sera aa' et la projection verticale $\tau' - \tau$. D'autre part $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$ et $A'_{-\frac{\pi}{2},-\tau}$ combinés ensemble donnent une translation horizontale $2aa'$, qui combinée au double de la précédente donnera la translation verticale $2(\tau' - \tau)$, laquelle sera un multiple de θ.

Le mouvement $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$ étant par hypothèse celui des mouvements dans lequel la translation est minimum et l'angle de rotation égal à $\frac{\pi}{2}$, τ sera nécessairement inférieur à θ, et non supérieur à τ', que l'on peut supposer lui-même abaissé au-dessous de θ; on aura donc, en tenant compte des congruences ci-dessus, les six systèmes de solutions que voici:

$$\tau = 0 \text{ et } \begin{cases} \tau' = 0 \\ \tau' = \frac{1}{2}\theta \end{cases}, \quad \tau = \frac{1}{4}\theta \text{ et } \begin{cases} \tau' = \frac{1}{4}\theta \\ \tau' = \frac{3}{4}\theta \end{cases}, \quad \tau = \frac{1}{2}\theta = \tau', \quad \tau = \frac{3}{4}\theta = \tau',$$

lequels caractérisent six groupes distincts, et sept en y comprenant celui qui ne contient pas de translation longitudinale.

28. *Cas de l'hexagone.* Si tous les axes pareils ont leurs pieds aux sommets des hexagones, on verra, comme dans le cas précédent, que tout mouvement transversal qui superpose le réseau à lui-même, joint à une translation longitudinale convenablement choisie, fera partie du groupe. Mais parmi ces mouvements qui superposent le réseau à lui-même se trouve la rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour du centre de l'hexagone. Le groupe contiendrait donc un mouvement hélicoïdal où l'amplitude de la rotation serait $\frac{\pi}{3}$, et $\rho = \frac{2\pi}{3}$ ne serait plus l'amplitude minimum, comme nous l'avons supposé. Ce cas doit donc être exclu.

Admettons au contraire que par les centres α, α' des hexagones passent d'autres axes A, A'... pareils à A, A'. Les mouvements $A_{\frac{2\pi}{3},\tau}$ $A'_{\frac{2\pi}{3},\tau}$ combinés ensembles donnent un mouvement résultant $\mathsf{A}_{\frac{4\pi}{2},2\tau}$ qui, étant répété et combiné à la translation $3\tau = (A_{\frac{2\pi}{3},\tau})^3$, donnera le mouvement $\mathsf{A}_{\frac{2\pi}{3},\tau}$, lequel combiné au mouvement $A_{-\frac{2}{3}\pi,-\tau}$ donne la translation αa_4, qu'il transforme successivement en $a_4 a''$ et en $a'' a$.

Le groupe contient en outre une translation T, dont la projection horizontale soit $aa' = t$. En effet il contient un mouvement M qui transforme A en A', lequel mouvement résultera d'une certaine translation longitudinale v jointe à un mouvement transversal R qui amène a en a', en superposant à lui-même le systéme des points $a, a' \ldots \alpha \ldots$; celui-ci résulte lui-même évidemment de la translation t, jointe à une rotation R' autour de a', dont l'amplitude angulaire doit être un multiple de $\frac{\pi}{3}$. Ce mouvement vtR', combiné au mouvement $A'_{\frac{2\pi}{3},\tau}$ convenablement répété, donnera pour résultante $v't$ ou $v'tR''$, v' étant une translation longitudinale et R'' une rotation de l'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de A'. Mais le mouvement $v'tR''$ serait hélicoïdal autour d'un axe parallèle à A' et l'amplitude de la rotation y serait $\frac{\pi}{3}$, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle l'amplitude minimum est $\frac{2\pi}{3}$: le mouvement résultant se réduit donc à $v't$.

Posons $v' = \tau - \tau'$. Le mouvement inverse de $v't$ combiné à $A_{\frac{2\pi}{3},\tau}$ donnera un mouvement $C_{\frac{2\pi}{3},\tau'}$ autour d'un nouvel axe C passant au point c, centre de gravité du triangle $aa'\alpha$.

Les mouvements $\mathsf{A}_{\frac{2\pi}{3},\tau}$ et $C_{\frac{2\pi}{3},\tau'}$ combinés ensemble donnent un mouvement résultant $D_{\frac{4\pi}{3},\tau+\tau'}$ autour d'un axe D passant par le centre de gravité d du triangle $\alpha a'a''$: l'inverse de ce mouvement sera le suivant $D_{\frac{2\pi}{3},\tau''}$, τ'' satisfaisant à la relation $\tau+\tau'+\tau''=0$.

Les mouvements $C_{\frac{2\pi}{3},\tau'}$ et $D_{\frac{2\pi}{3},\tau''}$ transformés par les autres mouvements du groupe donneront des mouvements analogues autour des centres de gravité des autres triangles dans lesquels le réseau hexagonal peut être décomposé.

D'ailleurs ces trois systemès d'axes $A, A' \ldots, \mathsf{A} \ldots, C \ldots, D \ldots$ sont les seuls autour desquels aient lieu des mouvements où la rotation ait l'amplitude $\frac{2\pi}{3}$: car tous les mouvements du groupe cherché sont évidemment contenus parmi ceux du groupe plus général, qu'on obtiendrait en combinant ensemble: 1° des rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour des axes $\mathsf{A} \ldots, A, A' \ldots$ 2° des translations égales et parallèles aux côtés de l'hexagone; 3° une translation longitudinale dont τ, τ', τ'' fussent des multiples. Mais dans ce dernier groupe lui-même, les seuls axes autour desquels existent des mouvements à amplitude de rotation égale à $\frac{2\pi}{3}$ sont, avec les $A, A' \ldots, \mathsf{A} \ldots$, les $C \ldots$ et les $D \ldots$ (n° 26).

Supposons enfin pour plus de généralité que le groupe renferme des translations longitudinales, ce qui arrivera toujours si τ, τ', τ'' ne sont pas nulles à la fois: soit θ la plus petite de ces translations; on aura $3\tau \equiv 0 \pmod{\theta}$,

$3\tau' \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta)$, $3\tau'' \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta)$: on pourra supposer τ, τ', τ'' moindres que θ pourvu qu'on remplace l'égalité $\tau+\tau'+\tau''=0$ par la congruence $\tau+\tau'+\tau''\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta)$. En effet, d'un mouvement tel que $A_{\frac{2}{3}\pi,\tau}$, dans lequel $\tau = m\theta + \alpha$, et de la translation θ on déduira le mouvement $A_{\frac{2}{3}\pi,\alpha}$ où α peut être supposé $<\theta$. De même pour les autres paramètres τ' et τ''. On peut enfin supposer $\tau \gtreqless \tau' \gtreqless \tau''$. On aura ainsi les 4 systèmes de solutions:

$$\tau = 0 \begin{cases} \tau' = 0, & \tau'' = 0 \\ \tau' = \frac{1}{3}\theta, & \tau'' = \frac{2}{3}\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} \tau = \frac{1}{3}\theta, & \tau' = \frac{1}{3}\theta, & \tau'' = \frac{1}{3}\theta, \\ \tau = & \tau' = & \tau'' = \frac{2}{3}\theta, \end{matrix}$$

et par suite cinq types de groupes distincts, en y comprenant celui qui ne contient pas de translation longitudinale.

29. *4^me cas.* Admettons maintenant qu'il existe un mouvement helicoïdal $A_{\varrho,\tau}$ où l'amplitude de la rotation soit infiniment petite, l'axe A de ce mouvement n'étant pas seul de son espèce.

Soit A' un autre axe pareil à A. Le mouvement $A'_{\varrho,\tau}$ transforme A en un autre axe infiniment voisin A'': le mouvement $A''_{\varrho,\tau}$ combiné à l'inverse de $A_{\varrho,\tau}$ donne une translation transversale infiniment petite, laquelle, combinée à ses transformées par $A_{\varrho,\tau}$, fournira une translation transversale quelconque. Le groupe se compose de ces translations, combinées à un groupe partiel formé de mouvements hélicoïdaux autour de A et de translations longitudinales: ce groupe partiel se détermine comme dans le premier cas.

30. *5^me cas.* Admettons enfin que le groupe ne contienne aucun mouvement où l'amplitude de la rotation soit infiniment petite, mais qu'il en contienne où cette amplitude soit moindre que π, et qu'il contienne en outre une translation infiniment petite t. Si t n'est pas parallèle aux axes, soient τ et τ_1 ses projections sur l'axe et sur le plan perpendiculaire. Les transformées de t par les puissances d'un même mouvement dont l'amplitude de rotation est $\frac{2\pi}{n}$ donnent par leur combinaison une translation longitudinale $n\tau$ qui, combinée avec nt, donne une translation transversale infiniment petite $n\tau_1$: celle-ci jointe à ses transformées donne une translation transversale quelconque, et le groupe résulte de ces translations combinées à l'un des groupes déterminés dans le premier cas.

Si toutes les translations infiniment petites sont longitudinales, le groupe contient toute translation longitudinale, et s'obtient en combinant de semblables translations à un groupe partiel de mouvements où ces translations soient nulles; ce nouveau groupe se déterminera comme nous l'avons indiqué.

VII. Groupes de deuxième catégorie.

31. Cette catégorie est celle où le groupe auxiliaire appartient au second type. Soient **A** et **B**, **B**'... les axes des diverses rotations du groupe auxiliaire. Les mouvements du groupe résultent tous de la combinaison d'un groupe G formé de translations et de mouvements autour d'axes paralleles à **A** avec un seul mouvement autour d'un axe parallèle à l'une des directions **B**, **B**'...

En effet le mouvement B_π répété deux fois équivaut au repos, et les mouvements B_π, B'_π combinés ensemble donnent un mouvement de rotation autour de **A**. Donc deux mouvements hélicoïdaux contenus dans le groupe donneront un mouvement de translation si leurs axes sont parallèles à **B** et un mouvement hélicoïdal autour d'un axe parallèle à **A**, si leurs axes sont respectivement parallèles à **B** et à **B**'. Donc réciproquement un seul mouvement hélicoïdal $B_{\pi,t}$ autour d'un axe parallèle à **B**, combiné aux mouvements G, reproduira le groupe entier.

Le groupe G est l'un de ceux que nous avons déterminés: et de sa nature dépendra celle du groupe cherché.

32. *1er cas.* Si les mouvements de G ont tous lieu autour d'un même axe A, il faut que $B_{\pi,t}$ transforme cet axe en lui-même. Donc B rencontre A, et $t=0$. A ces conditions, $B_{\pi,0}$ transformera chaque mouvement autour de A en son inverse.

33. *2me cas.* Admettons maintenant l'hypothèse contraire à celle du premier cas: admettons en outre que dans chacun des mouvements de G l'amplitude de la rotation soit nulle ou égal à π.

Nous supposerons d'abord, pour éviter des distinctions compliquées, que le groupe ne renferme aucune translation infiniment petite.

Les axes des divers mouvements du groupe sont parallèles à **A** ou lui sont perpendiculaires, et dans ce dernier cas l'angle qu'ils font avec **B** est égal à un multiple de $\frac{\pi}{2}$: il y a donc trois systèmes distincts d'axes A, A'... B, B'... C, C'... respectivement parallèles à trois directions rectangulaires **A**, **B**, **C**. Chacun de ces systèmes contient plusieurs axes: car si l'un d'eux, celui parallèle à **A** par exemple, n'en contenait qu'un seul, on retomberait sur le premier cas que nous venons d'examiner.

Mais deux mouvements contraires, exécutés autour de deux axes pareils et parallèles donnent pour résultante une translation perpendiculaire à ces axes. Le groupe contient donc des translations perpendiculaires à chacune des trois directions **A**, **B**, **C**: donc les translations du groupe ne peuvent être parallèles à un même axe: donc elles ne peuvent être toutes à la fois perpendiculaires à deux de ces trois directions: soit d'ailleurs (α, β, γ) une translation du groupe dont les projections sur les axes soient respectivement α, β, γ. Les mouvements autour de ces axes la transformeront respectivement en $(-\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$, qui combinées à la précédente donnent les translations $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ respectivement parallèles aux axes.

Nous venons de voir qu'il est impossible que deux des trois quantités α, β, γ soient constamment nulles pour toute translation du groupe: donc le groupe contient des translations parallèles à deux au moins des trois systèmes d'axes: il contiendra même des translations parallèles à tous les trois, à moins que toutes ces translations ne soient perpendiculaires à l'une des droites **A**, **B**, **C**...

De là deux cas à examiner séparément.

34. 1° Si toutes les translations sont perpendiculaires à **C**, soient θ_1, θ_2 les translations minima respectivement parallèles à **A** et à **B**: comme on a parallèlement à ces axes les translations $2\alpha, 2\beta$, on aura pour toute translation du groupe $2\alpha \equiv 0 \pmod{\theta_1}$, $2\beta \equiv 0 \pmod{\theta_2}$ avec $\gamma = 0$. Combinant cette translation avec θ_1 et θ_2, on en déduira évidemment une nouvelle translation $(\alpha', \beta', 0)$ dans laquelle α' et β' sont respectivement moindres que θ_1 et θ_2 et par suite égaux à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta_1$ et à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta_2$. Donc ces translations du groupe résultent des translations θ_1, θ_2, seules ou combinées avec les suivantes:

$$(\tfrac{1}{2}\theta_1, 0, 0), \quad (0, \tfrac{1}{2}\theta_2, 0), \quad (\tfrac{1}{2}\theta_1, \tfrac{1}{2}\theta_2, 0).$$

Mais θ_1 étant la translation minimum parallèle à **A**, $(\frac{1}{2}\theta_1, 0, 0)$ ne peut faire partie du groupe: de même pour $(0, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$: donc les translations du groupe résultent des translations θ_1, θ_2, seules, ou combinées avec $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$.

Soient maintenant A l'un des axes du premier système: A', A''... les lignes qui s'en déduisent par la translation $\frac{1}{2}\theta_2$ indéfiniment répétée. Tous les axes pareils à A se confondent avec l'une de ces lignes: car ils sont tous parallèles à A: d'autre part soit $A^{(1)}$ un axe pareil à A: un mouvement hélicoïdal $A^{(1)}{}_{\pi, t}$ autour de $A^{(1)}$, suivi du mouvement contraire autour de A, donnera un mouvement de translation situé dans le plan de ces deux axes, et qui leur sera perpendiculaire. Mais tout mouvement de translation est dirigé dans le plan AA' parallèle à **A** et à **B**: le plan $A^{(1)}A$, ayant deux droites communes avec le plan AA', à savoir l'axe A et la translation, se confond avec ce plan.

Enfin les droites $A, A''\ldots$, se déduisant l'une de l'autre par la translation θ_2, sont des axes pareils à A: et si $A^{(1)}$ ne faisait pas partie de la suite $A, A', A''\ldots$ sa distance δ à l'un de ces axes, A par exemple, serait moindre que $\frac{1}{2}\theta_2$: et $A^{(1)}{}_{\pi,t}$ suivi du mouvement inverse autour de A donnerait une translation 2δ ayant la même direction que θ_2 et une longueur moindre, résultat absurde.

Les axes du second système B, etc.. sont tous situés dans ce même plan: car si B n'y était pas, un mouvement hélicoïdal autour de B transformerait A en un axe pareil situé hors de ce plan, ce qui ne peut être. Soient B l'un de ces axes et $B', B''\ldots$ les droites qui s'en déduisent par la translation $\frac{1}{2}\theta_1$: les axes pareils à B font tous partie de la suite $B, B', B''\ldots$ et ces lignes jointes à $A, A', A''\ldots$ forment à la surface du plan un réseau rectangulaire.

Supposons, ce qui est évidemment permis, que $A_{\pi,t}$ et $B_{\pi,t'}$ sont respectivement, parmi les mouvements dont les axes sont parallèles à **A** et à **B**, ceux où l'amplitude de la translation est minimum: on aura, en répétant ces mouvements, les deux translations $2t$ et $2t'$, qui doivent être multiples de θ_1 et de θ_2. D'autre part t et t' sont moindres que θ_1 et θ_2; car si $t \gtreqless \theta_1$ les mouvements $A_{\pi,t}$ et θ_1 combinés ensemble donneraient le suivant $A_{\pi,t-\theta_1}$ où l'amplitude de la translation serait moindre que t, ce qui est impossible.

On aura donc $t=0$ ou $\frac{1}{2}\theta_1$ et de même, $t'=0$ ou $\frac{1}{2}\theta_2$. Remarquons d'ailleurs que si le groupe contient la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, on aura nécessairement $t=0$, $t'=0$. Car soit $t=\frac{1}{2}\theta_1$; $A_{\pi,t}$, suivi de la translation ci-dessus prise en sens inverse, donne un mouvement résultant $\alpha_{\pi,t-\frac{1}{2}\theta_1}$ autour d'une axe α parallèle à A, dans lequel la translation serait moindre que t, ce qui est impossible.

Soient maintenant C un des axes du 3^{me} système: tout mouvement autour de C se réduit à une rotation binaire: car d'un mouvement hélicoïdal $C_{\pi,t''}$ on déduirait une translation longitudinale $2t''$ qui ne peut exister par hypothèse. Cela posé, la rotation $C_{\pi,o}$ transforme les axes pareils $A, A''\ldots$ en droites de la série $A, A', A''\ldots$ qui soient équidistantes et à la distance θ_2 les unes des autres: elle transformera donc le système de ces axes en lui-même ou dans le système des lignes A', A''': réciproquement il est clair qu'elle transformera le système de ces dernières lignes en lui-même ou en $A, A''\ldots$; enfin elle transformera de même les deux systèmes de lignes $B, B''\ldots$ et $B', B'''\ldots$ l'un dans l'autre, ou chacun en lui-même. $C_{\pi,o}$ superpose ainsi à lui-même le réseau rectangulaire formé par ces droites. Pour que cela ait lieu, il est clair qu'il faut que l'axe C passe par un sommet de l'un des rectangles *opqr* du réseau, par son centre ou par le milieu d'une arête.

Supposons que C passe par le sommet o, point d'intersection de A et de B. Le mouvement $A_{\pi,t}$ combiné à $C_{\pi,o}$ donnera le même résultat que la rotation $B_{\pi,o}$ suivie de la translation $-t$ suivant la direction A. Mais le groupe contient le mouvemeut $B_{\pi,t'}$: il contiendra donc la translation $(-t, t', 0)$. Donc, si le groupe ne contient d'autres translations que celles qui résultent de la combinaison de θ_1 et de θ_2, on aura nécessairement $-t \equiv 0 \pmod{\theta_1}$, $t' \equiv 0 \pmod{\theta_2}$ d'où $t=0$, $t'=0$. Si au contraire le groupe contient la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, on aura encore, comme on l'a vu, $t=0$, $t'=0$. On aura ainsi en tout deux solutions, suivant que le groupe contient ou non cette translation.

Le cas où C passerait en un autre sommet du rectangle $oppr$, en r, par exemple, intersection de A et de B' ne diffère pas essentiellement du précédent. Car la translation θ_1 combinée au mouvement $B_{\pi,t'}$ donne le mouvement analogue $B'_{\pi,t'}$. Il existe donc les mêmes mouvements autour de B' qu'autour de B, et ces lignes jouent ainsi le même rôle dans l'étude du groupe.

Supposons en second lieu que C passe par le centre du rectangle $opqr$. Le mouvement $C_{\pi,o}$ résultant d'une rotation binaire autour d'un axe parallèle à C passant par o jointe à une translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, le mouvement $A_{\pi,t}$ suivi de $C_{\pi,o}$ donnera le même résultat que $B_{\pi,o}$ suivi de la translation $(-t+\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$: mais le groupe contient le mouvement $B_{\pi,t'}$: en le combinant au précédent, il vient la translation suivante $(-t+\frac{1}{2}\theta_1, -t'+\frac{1}{2}\theta, 0)$, laquelle se confond avec $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, si cette dernière translation fait partie du groupe, auquel cas $t=0$, $t'=0$. Au contraire si cette translation ne fait pas partie du groupe, pour que $(-t+\frac{1}{2}\theta_1, -t'+\frac{1}{2}\theta_2, 0)$ en fasse partie, il faut que l'on ait à la fois $t=\frac{1}{2}\theta_1$, $t'=\frac{1}{2}\theta_2$. On a ainsi deux solutions distinctes, comme dans le cas précédent.

Supposons enfin que C passe par le milieu d'une arête du rectangle, telle que op: le mouvement $A_{\pi,t}$ suivi de $C_{\pi,o}$ donne le suivant $B_{\pi,o}$ $(-t, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, qui combiné avec $B_{\pi,t'}$ donne la translation $(-t, -t'+\frac{1}{2}\theta_2, 0)$. Si le groupe ne contient pas la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, il faudra pour qu'il contienne la précédente que $t=0$, $t'=\frac{1}{2}\theta_2$.

Au contraire, si le groupe contient $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, on aura $t=0$, $t'=0$ et la translation ci-dessus se réduirait à $(0, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$; θ_2 ne serait donc pas la translation minimum que nous avons supposée, résultat absurde. On n'a donc ici qu'une solution.

35. 2° Admettons maintenant que le groupe contienne des translations parallèles aux trois directions **A, B, C**... et soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les translations minima respectivement parallèles à ces trois axes. Soient α, β, γ les projections

d'une translation quelconque sur **A**, **B**, **C**. On aura parallèlement à ces lignes les translations 2α, 2β et 2γ: donc $2\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta_1)$, $2\beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta_2)$, $2\gamma \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta_3)$. Il est clair d'ailleurs qu'en combinant (α, β, γ) avec θ_1, θ_2 et θ_3, on arrivera à une nouvelle translation $(\alpha', \beta', \gamma')$, où α', β', γ' sont respectivement moindres que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et par suite égaux à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta_1$, à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta_2$, à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta_3$. Donc toute translation du groupe résulte de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, seules, ou combinées avec des translations telles que α', β', γ'.

Soient respectivement $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,t''}$ ceux des mouvements, dont les axes sont parallèles à **A**, **B**, **C**, pour lesquels les translations t, t', t'' sont minima: on aura comme tout à l'heure $2t \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\theta_1)$ et $t < \theta_1$, d'où $t = 0$ ou $\frac{1}{2}\theta_1$: de même $t' = 0$ ou $\frac{1}{2}\theta_2$, $t'' = 0$ ou $\frac{1}{2}\theta_3$. De plus, si le groupe contient une translation telle que $(\alpha', \beta', \gamma')$, dans laquelle α' par exemple soit égal à $\frac{1}{2}\theta_1$, cette translation combinée avec $A_{\pi,t}$ donnera un nouveau mouvement $A'_{\pi,t-\frac{1}{2}\theta_1}$ autour d'un axe A' parallèle à A: donc t sera nul, sans quoi il serait $< t - \frac{1}{2}\theta_1$, ce qui est absurde. On doit d'ailleurs remarquer que le groupe ne contient aucune translation telle que $(\frac{1}{2}\theta_1, 0, 0)$: donc si $\alpha' = \frac{1}{2}\theta_1$, on aura nécessairement $\beta' = \frac{1}{2}\theta_2$ ou $\gamma' = \frac{1}{2}\theta_3$, et par suite l'une au moins des quantités t', t'' sera nulle.

Cela posé, le cas que nous traitons ici peut se subdiviser en plusieurs autres, en faisant successivement certaines hypothèses contraires.

36. *Première hypothèse.* Admettons 1° que t'' soit nul; 2° qu'aucune des translations du groupe n'ait sa projection sur **C** égale à $\frac{1}{2}\theta_3$. Le groupe résultera de la combinaison des mouvements $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,o}$, θ_1, θ_2, θ_3, seuls ou joints à la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$: chacun de ces mouvements pourra être mis sous la forme $M.\theta_3^{\mu}$, θ_3^{μ} désignant la translation θ_3, μ fois répétée, et M un mouvement dérivé de $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,o}$, θ_1, θ_2 et de $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ seulement: car chacun des mouvements $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,o}$, θ_1, θ_2, θ_3, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ est de cette forme, et nous allons voir que le produit de deux mouvements de cette forme $M'\theta_3^{\mu'}$, $M''\theta_3^{\mu''}$ est lui-même de cette forme. On a en effet identiquement $M'\theta_3^{\mu'}M''\theta_3^{\mu''} = M'M''.\ M''^{-1}\theta_3^{\mu'}M''\theta_3^{\mu''}$, et comme $A_{\pi,t}$ et $B_{\pi,t'}$ transforment θ_3 en θ_3^{-1}, tandis que $C_{\pi,o}$, θ_1, θ_2, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ le transforment en lui-même, la transformée $M''^{-1}\theta_3^{\mu'}M''$ se reduira à $\theta_3^{\pm\mu'}$; donc $M'\theta_3^{\mu'}M''\theta_3^{\mu''} = M'M''\theta_3^{\mu''\pm\mu'} = M\theta_3^{\mu}$, en posant $M = M'M''$, $\mu = \mu'' \pm \mu'$.

La relation $M = M'M''$, que nous venons de trouver, montre que les mouvements M, M', M''..., qui concourent respectivement à la formation des mouvements $M\theta_3^{\mu}, M'\theta_3^{\mu'}, M''\theta_3^{\mu''}$, forment un groupe: car $M\theta_3^{\mu}$, $M'\theta_3^{\mu'}$, $M''\theta_3^{\mu''}$...

formant un groupe, la série de ces mouvements contiendra le produit de deux quelconques d'entre eux $M'\theta_3^{\mu'}.M''\theta_3^{\mu''}=M'M''\theta^{\mu''\pm\mu'}$: la série des mouvements M, M', M''... contiendra donc le produit $M'M''$.

Le groupe des mouvements M, M', M'' est l'un de ceux que nous venons de déterminer, et dans lesquels il n'y a pas de translation suivant les **C**: réciproquement, un quelconque de ces groupes M, M', M''... étant donné, il est clair d'après ce qui précède que les mouvements de la forme $M\theta_3^{\mu}$ etc., obtenus en y adjoignant la translation θ_3, forment un groupe qui sera l'un de ceux que nous cherchons.

37. *Deuxième hypothèse.* Admettons maintenant 1° que $t''=\frac{1}{2}\theta_3$, 2° qu'aucune des translations du groupe n'ait sa projection sur **C** égale à $\frac{1}{2}\theta_3$. Le groupe résultera de la combinaison des mouvements $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,t''}$, θ_1, θ_2, θ_3 seuls ou joints à la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$: et chacun de ses mouvements peut être mis sous la forme Mt''^{μ}, M étant un mouvement résultant de la combinaison de $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,o}$, θ_1, θ_2, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ et μ un entier pair ou impair, suivant que $C_{\pi,o}$ entre un nombre pair ou impair de fois dans la composition de μ. Il est clair en effet que les mouvements $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t'}$, $C_{\pi,t''}$, θ_1, θ_2, θ_3 et $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ sont de cette forme et le produit de deux mouvements de cette forme

$$M't''^{\mu'}M''t''^{\mu''}M'=M''.M''^{-1}t''^{\mu'}M''t''^{\mu''}=M'M''t''^{\mu''\pm\mu'}$$

est de la même forme: car $C_{\pi,o}$ entre $\mu'+\mu''$ fois dans composition de $M'M''$ et $\mu''\pm\mu'$ est pair ou impair en même temps que $\mu'+\mu''$.

On voit comme tout à l'heure que les mouvements M, M', M''... formeront un groupe, qui sera l'un de ceux que nous avons appris à déterminer. Réciproquement, l'un quelconque de ces groupes étant donné, en y changeant $C_{\pi,o}$ en $C_{\pi,t''}$, on obtiendra évidemment un nouveau groupe, qui sera l'un de ceux que nous cherchons.

Une précaution est cependant nécessaire, si l'on tient à n'obtenir que des groupes essentiellement différents de ceux trouvés jusqu'à présent. Si le groupe ne contient pas la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, on voit que tout sera analogue par rapport aux trois directions **A**, **B**, **C**. Si donc on avait $t=0$, on n'aurait qu'à changer **A**, A, t en **C**, C, t'' et réciproquement, pour ramener ce cas à celui déjà examiné où t'' est nul. Pour ne pas retomber sur un des groupes déjà trouvés, il faudra donc nécessairement avoir $t=\frac{1}{2}\theta_1$ et de même $t'=\frac{1}{2}\theta_2$.

38. *Troisième hypothèse.* Supposons que le groupe contienne une trans-

lation dont la projection sur **C** soit $\frac{1}{2}\theta_3$: mais qu'il ne contienne pas la suivante $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, \frac{1}{2}\theta_3)$.

Les translations que le groupe peut contenir avec θ_1, θ_2, θ_3 se réduisent aux trois suivantes $(\frac{1}{2}\theta_1, 0, \frac{1}{2}\theta_3)$, $(0, \frac{1}{2}\theta_2, \frac{1}{2}\theta_3)$, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$. Il les contient d'ailleurs toutes trois, car s'il n'en contenait qu'une, la première par exemple, il ne contiendrait aucune translation dont la projection sur **B** fût $\frac{1}{2}\theta_2$: en changeant **B** et θ_2 en **C** et θ_3 et réciproquement, on ramenerait ce cas à ceux déjà discutés: il contient donc au moins deux de ses translations et par suite la troisième, qui se déduit des deux autres jointes à θ_1, θ_2, θ_3.

On aura, d'après ce que nous avons vu plus haut, $t = t' = t'' = 0$.

Cela posé, prenons pour axes coordonnés **A**, **B**, **C**: soit c le pied de l'axe C sur le plan des xy: les translations θ_1, θ_2, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$ et leurs dérivées le transformeront en un système d'axes pareils ayant leurs pieds aux centres de mailles du réseau rectangulaire formé sur θ et θ_1. D'autre part, la rotation $C_{\pi,o}$ combinée aux mêmes translations donne des rotations binaires autour de noveaux axes, qui passent respectivement aux milieux des côtés et des demi-diagonales des rectangles. Les axes ainsi obtenus sont les seuls parallèles aux z, autour desquels ait lieu une rotation binaire: car soient C' un tel axe et d la ligne qui joint son pied à celui de C: les rotations $C_{\pi,o}$, $C'_{\pi,o}$ combinées ensemble donnent une translation égale en grandeur et en direction à $2d$. Donc d est en grandeur et en direction la moitié d'une des translations derivées de θ_1, θ_2, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$; son extrémité est donc en un des points que nous venons de nommer.

Cela posé, soit aa' la projection de l'axe A sur le plan des xy. La rotation $A_{\pi,o}$ doit transformer les uns dans les autres les axes à rotation binaire, parallèles aux C que nous venons de déterminer. Pour cela, il faut évidemment que aa' partage symétriquement le réseau formé par les pieds de ces axes, et par suite que aa' passe en c, ou à une distance de ce point égale à un multiple de $\frac{1}{4}\theta_2$. Dans tous les cas, aa' passera par des points du réseau: donc A rencontrera un axe à rotation binaire parallèle aux z, et l'on peut supposer, sans nuire à la généralité que l'on ait choisi C pour cet axe.

Les deux rotations binaires $A_{\pi,o}$, $C_{\pi,o}$, combinées ensemble, en donnent une troisième $B_{\pi,o}$ autour d'un axe parallèle aux x et concourant avec les précédents. Ces trois rotations binaires autour d'axe concourants, jointes aux translations, réproduiront tous les mouvements du groupe.

39. *Quatrième hypothèse.* Supposons que le groupe contienne la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, \frac{1}{2}\theta_3)$. Toutes les translations qu'il contient résultent de celle-là,

combinée avec θ_1, θ_2, θ_3. Car s'il en contenait une autre, telle que $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, il contiendrait également la suivante $(0, 0, \frac{1}{2}\theta_3)$, ce qui est impossible.

On aura d'ailleurs, comme tout à l'heure, $t = t' = t'' = 0$.

L'axe C et les axes pareils qu'on en déduit par les translations θ_1 et θ_2 se projettent sur le plan des xy suivant un réseau rectangulaire: et la rotation $C_{\pi,o}$ combinée aux translations θ_1 et θ_2 donne de nouvelles rotations binaires autour d'axes passant par les milieux des côtés et des diagonales des rectangles. On verrait, comme tout à l'heure, que ces axes sont les seuls parallèles aux z autour desquels aient lieu des rotations binaires, et que la projection de l'axe A partage symétriquement le réseau formé par ces points. Cela peut se faire de deux manières:

1°. Si A se projette sur l'une des rangées du réseau formé sur $\frac{1}{2}\theta_1$ et $\frac{1}{2}\theta_2$, A rencontrera des axes à rotation binaire parallèles à C: on peut supposer que l'on ait pris l'un de ces deux axes pour C. Des deux rotations binaires concourantes $A_{\pi,o}$ et $C_{\pi,o}$ on en déduit une troisième autour d'un axe $B_{\pi,o}$ rectangulaire aux deux premières: et ces trois rotations rectangulaires combinées aux translations données reproduiront le groupe.

2°. Si A se projette au milieu des rangées du réseau, on obtiendra, en combinant la rotation $A_{\pi,o}$ avec les translations θ_2 et θ_3, une infinité de rotations binaires dont les axes, parallèles aux x, se projetteront sur le plan xy au milieu des diverses rangées du réseau R ci-dessus déterminé, et sur le plan yz suivant un autre réseau R' à maille rectangulaire formé sur $\frac{1}{2}\theta_2$ et $\frac{1}{2}\theta_3$.

Cela posé, B se projette sur les plans xy et yz suivant des parallèles aux y, qui partagent symétriquement les réseaux R et R': on doit admettre d'ailleurs qu'il ne se projette pas sur les rangées de ces réseaux; car s'il se projetait par exemple sur une des rangées de R, il couperait un autre axe à rotation binaire parallèle à C, et qu'on pourrait supposer être l'axe C: des deux rotations $B_{\pi,o}$ et $C_{\pi,o}$ on en déduirait une nouvelle, dont l'axe est parallèle aux x: cet axe pourrait être pris pour A: mais il coupe C: on rétomberait donc sur le cas précédent. B se projette donc au milieu de deux rangées sur chacun des réseaux: d'ailleurs, en combinant $B_{\pi,o}$ avec les translations θ_1 et θ_3, on obtient des rotations binaires autour d'une infinité d'axes parallèles à B et dont les projections sur les deux plans xy et yz représentent toutes les combinaisons possibles de deux droites parallèles aux y, menées respectivement par le milieu de deux rangées quelconques dans chacun de ces réseaux. Dans ce triple système d'axes de rotation rectangulaires entre eux on peut en choisir arbitrairement un C: parmi les axes parallèles à **A**, il en existe dont la distance à C est égale à $\frac{1}{4}\theta_2$: soit A l'un de ces axes: dans la série des axes parallèles à **B**, il en existe un dont les distances à C et à A sont respectivement $\frac{1}{4}\theta_1$ et $\frac{1}{4}\theta_3$: prenons-le pour B. Les trois axes A, B, C représentent trois arêtes non contigues du parallèlipipède rectangle formé sur les trois lignes $\frac{1}{4}\theta_1$, $\frac{1}{4}\theta_2$, $\frac{1}{4}\theta_3$: et les mouvements du groupe résultent tous de la combinaison des trois rotations binaires $A_{\pi,o}$, $B_{\pi,o}$ $C_{\pi,o}$ avec les translations θ_1, θ_2, θ_3, $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, \frac{1}{2}\theta_3)$.

40. Il reste à considérer le cas, exclu jusqu'à présent, où le groupe renferme des translations infiniment petites. Soit (α, β, γ) une de ces translations: on en déduit les translations infiniment petites 2α, 2β, 2γ suivant les axes: α, β, γ ne pouvant être nuls simultanément, soit par exemple $\gamma \gtrless 0$. La translation infiniment petite 2γ convenablement répétée donne une translation quelconque parallèle aux z.

Cela posé, soient respectivement (α, β, γ), $A_{\pi,t} \ldots, B_{\pi,t'} \ldots, C_{\pi,t''}$ des mouvements d'où le groupe dérive: on a $A_{\pi,t} = A'_{\pi,t}. T$, $B_{\pi,t'} = B'_{\pi,t'}. T'$ etc., $A', \ldots B'$ étant les projections des axes A et B sur le plan des xy: et T, T' des translations convenablement choisies parallèles aux z: et l'on voit aisément que tous les mouvements du groupe sont de la forme MT, $M'T'$, $M''T''$, T, T' T'' étant des translations arbitraires parallèles aux z et $M, M', M'', \ldots$ les divers mouvements du groupe dérivé de $(\alpha, \beta, 0)$, $A_{\pi,t} \ldots$ $B'_{\pi,t'} \ldots C_{\pi,o} \ldots$ En effet il en est ainsi pour les mouvements dont le groupe dérive: d'ailleurs soient $M'T'$ et $M''T''$ deux de ces mouvements: le mouvement résultant sera $M'T'M''T'' = M'M''. M''^{-1}T'M''. T'' = M. T'^{\pm 1}T''$, en remarquant que M'' transforme T' en $T'^{\pm 1}$ et posant $M'M'' = M$.

Il reste à determiner ce groupe partiel $M, M', M'' \ldots$ qui ne contient plus de translations parallèles aux z: ce qui se fera, comme nous l'avons vu (1°), en supposant qu'il n'y ait pas d'autre translation infiniment petite que celles qui étaient dirigées suivant l'axe des z.

Admettons au contraire qu'il existe des translations infiniment petites suivant deux des axes, ceux des y et des z par exemple. On en déduit une translation quelconque dans le plan des yz: et l'on aura $A_{\pi,t} = A''_{\pi,t}\,\mathbf{T}$, A'' étant l'axe des x et $\mathbf{T}$ une translation perpendiculaire à cet axe, convenablement choisie: on aura de même $B_{\pi,t'} = B'_{\pi,o}\,\mathbf{T}'$, $C_{\pi,t''} = C'_{\pi,o}\,\mathbf{T}''$, B', C' étant des parallèles à B et C qui rencontrent l'axe des x, et $\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}''$ des translations perpendiculaires aux x. On verra, comme tout à l'heure, que tous les mouvements du groupe sont de la forme $M\mathsf{T}$, $M'\mathsf{T}'$, $M''\mathsf{T}''\ldots$ $\mathsf{T}, \mathsf{T}', \mathsf{T}''\ldots$ étant des translations arbitraires perpendiculaires aux x et M, M', M'' les divers mouvements du groupe dérivé de $(\alpha, 0, 0)$, $A''_{\pi,t}\ldots$ $B'_{\pi,o}\ldots$, $C'_{\pi,o}\ldots$ Mais tous les mouvements de ce noveau groupe particl transforment l'axe A'' en lui-même: il est donc seul de son espèce et s'obtient comme au premier cas.

41. *3me cas.* Admettons que le groupe G contienne un mouvement $A_{\varrho,\tau}$, où l'amplitude de la rotation ne soit ni 0 ni π. Nous avons vu que ce groupe dérivera d'un réseau à maille triangulaire, carrée ou hexagonale.

1°. Dans le cas du réseau triangulaire, $\rho = \frac{\pi}{3}$, et les axes pareils à A sont les sommets du réseau: et nous avons vu que les mouvements de G ont tous pour axes ou ces sommets ou les centres des triangles, les derniers mouvements ayant tous l'amplitude de leur rotation égale à un multiple de $\frac{2\pi}{3}$. Les axes pareils à A, étant ainsi les seuls autour desquels ait lieu un mouvement où l'amplitude de la rotation soit $\frac{\pi}{3}$, seront transformés en eux-mêmes par le mouvement $B_{\pi,t}$. Ce mouvement devra donc superposer à lui-même le réseau triangulaire formé par l'intersection des axes $A, A'\ldots$ avec le plan perpendiculaire mené par B.

Soit mnp le triangle générateur de ce réseau: les lignes du réseau sont toutes parallèles à mn, mp ou np: elles forment donc avec mn des angles égaux à des multiples de 60°: mais $B_{\pi,o}$ transforme mn en une ligne $m'n'$ symétrique de mn par rapport à B; donc si B fait un angle α avec mn, $m'n'$ fera avec lui l'angle 2α: la translation t faisant glisser $m'n'$ sans altérer sa direction, de manière à l'amener en $m''n''$, cette dernière ligne transformée de mn par $B_{\pi,t'}$ fera avec mn l'angle 2α: donc 2α sera un multiple de 60° ou α un multiple de 30°, ce qui montre que B est parallèle ou perpendiculaire à l'un des côtés du triangle mnp. D'ailleurs ces deux cas sont identiques: car les axes $\mathsf{B}, \mathsf{B}'\ldots$, auxquels ceux des mouvements du groupe cherché sont parallèles, faisant entre eux des angles de 30°, si l'un d'eux est perpendiculaire aux côtés du réseau, le suivant leur sera parallèle.

Soit donc B parallèle à mn. On peut supposer que $B_{\pi,t}$ soit parmi les mouvements hélicoïdaux, dont l'axe est parallèle à mn, celui où la translation est minimum: cela étant, ella sera moindre que $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2}\tau$: car sans cela la translation pm combinée à $B_{\pi,t}$ donnerait un mouvement $B'_{\pi,t-\frac{1}{2}\tau}$ autour d'un nouvel axe B' parallèle à B, et l'on aurait $t-\frac{1}{2}\tau<t$ contre l'hypothèse. D'ailleurs $B_{\pi,t}$ deux fois répété donne la translation $2t$: mais la plus petite translation dans ce sens qui superpose le réseau à lui-même est τ: donc $2t\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\tau)$: donc enfin $t=0$. Cela posé, pour que $B_{\pi,o}$ superpose le réseau à lui-même, il est clair que B doit passer par un de ses sommets et se confond avec un coté du réseau.

Réciproquement, si à l'un des groupes de première catégorie dérivés du réseau triangulaire on adjoint une rotation binaire autour de l'un des côtés des triangles, on obtiendra un nouveau groupe, appartenant à la seconde catégorie.

42. 2.° Dans le cas du carré, $\rho=\frac{\pi}{4}$, et les mouvements de G pour lesquels l'amplitude de la rotation est $\frac{\pi}{4}$ ont pour axes les sommets et les centres d'un réseau à maille carrée. Les divers côtés du réseau faisant entre eux des angles qui sont des multiples de $\frac{\pi}{2}$, l'angle α de B avec un côté quelconque du réseau devra être égal à un multiple de $\frac{\pi}{4}$: donc B est parallèle aux côtés ou aux diagonales du réseau. Ici encore les deux cas reviennent à un seul: car les axes B, B'... faisant entre eux des angles de 45°, si l'un d'entre eux est parallèle aux diagonales du réseau, le suivant le sera aux côtés.

Soit donc B parallèle aux côtés du réseau: on peut supposer $B_{\pi,t}$ choisi de telle sorte que t soit minimum: on aura alors $t<v$, v étant le côté du réseau: autrement la translation v combinée avec $B_{\pi,t}$ donnerait le mouvement $B_{\pi,t-v}$ où la translation serait moindre que t. D'autre part, $B_{\pi,t}$ étant répété donne la translation $2t$ parallèle à B qui doit être un multiple de v: donc $t=0$ ou $t=\frac{1}{3}v$.

Si $t=0$, pour que $B_{\pi,o}$ superpose le réseau à lui-même, il est clair qu'il faut que B passe par un sommet ou un centre du réseau. Ces deux cas sont identiques: car on peut prendre à volonté pour A ou l'un des axes qui passent par les sommets du réseau, ou l'un de ceux qui passant par les centres, auquel cas les centres seraient considérés comme des sommets et réciproquement.

Si $t=\frac{1}{2}v$, B devra passer à une distance égale à $\frac{1}{4}v$ de l'un des sommets du réseau, qu'on pourra supposer être A. Il est clair qu'alors la rotation binaire $B_{\pi,o}$ suivie de la translation $\frac{1}{2}v$ superpose le réseau à lui-même.

Remarquons que dans le dernier cas que nous venons d'examiner, $B_{\pi,t}$ transforme les axes qui passent par les sommets du réseau en ceux qui passent par les centres et réciproquement: ces axes sont donc pareils et par suite les deux translations désignées plus haut par τ et τ' doivent être égales: on n'obtient donc que cinq groupes distincts résultant respectivement de la combinaison de $B_{\pi,\frac{1}{2}v}$ avec les six groupes G qui correspondent respectivement aux 4 systèmes de valeurs $\tau=\tau'=0$, $\tau=\tau'=\frac{1}{4}\theta$, $\tau=\tau'=\theta$, $\tau=\tau'=\frac{3}{4}\theta$ (*).

Au contraire si $t=0$, on a huit groupes correspondant aux huit manières de déterminer le groupe G que nous avons trouvées plus haut.

43. 3.° Dans le cas de l'hexagone, nous avons vu (n.° 28) que les axes des mouvements où l'amplitude de rotation est égale à $\frac{2}{3}\pi$ forment trois systèmes d'axes pareils, passant les uns $A, A'\ldots$ par les sommets et centres de mailles du réseau $a, a'\ldots \alpha$ et les autres $C, C'\ldots$ et $D, D'\ldots$ passant aux centres de gravité $c, c'\ldots$ et $d, d'\ldots$ des triangles formés par les pieds des premiers.

Le réseau formé par les pieds de tous ces axes devra être superposé à lui-même par le mouvement $B_{\pi,t}$. Or si l'on joint chaque point de ce dernier réseau à ceux qui en sont les plus voisins, on aura des lignes orientées suivant trois directions inclinées à 120° l'une sur l'autre. Ces directions devront être permutées les unes dans les autres par le mouvement $B_{\pi,t}$ ou, ce qui revient au même, par la rotation $B_{\pi,o}$. Il faut évidemment pour cela que B soit lui-même orienté suivant une de ces directions. Supposons donc pour fixer les idées, que B soit orienté parallèlement à ac.

La translation minimum dans le sens B que contienne le groupe G est $AA_4=T$; mais il contient la translation $2t$ obtenue en répétant $B_{\pi,t}$: donc $2t\equiv 0 \pmod{T}$: mais si l'on suppose $B_{\pi,t}$ choisi de telle sorte que t soit minimum, on aura $t<\frac{1}{2}T$: car s'il en était autrement, $B_{\pi,t}$ combiné à la translation $a_5 a$ laquelle fait partie du groupe, donnerait un autre mouvement $B'_{\pi,t-\frac{1}{2}T}$ où $t-\frac{1}{2}T$ serait moindre que t, ce qu'on ne peut admettre. Il résulte de là que $t=0$.

Cela posé, les divers points $a, a'\ldots \alpha\ldots c, c'\ldots d$ sont disposés en quinconce

(*) On a vu qu'au système unique de valeurs $\tau=\tau'=0$ correspondent 3 groupes G: 1° celui qui ne contient aucune translation longitudinale; 2° celui qui en contient une; 3° celui qui contient toute translation longitudinale.

suivant des rangées parallèles à B, et pour qu'une rotation binaire autour de B superpose ce réseau à lui-même, il faut évidemment que B coïncide avec l'un des rangées, laquelle pourra être choisie à volonté: on peut donc supposer que B passe par α. Cette unique solution fournira six groupes distincts, correspondant aux six manières de déterminer le groupe G.

44. 4^{me} *Cas.* Admettons que le groupe G contienne un mouvement hélicoïdal $A_{\varrho,\tau}$ où ρ soit infiniment petit, A n'étant pas unique de son espèce.

Nous avons vu que le groupe G contient un mouvement de translation quelconque perpendiculaire à A: un mouvement de cette nature convenablement choisi, combiné avec $B_{\pi,t}$, donnera un mouvement résultant $B'_{\pi,o}$ autour d'un axe parallèle à B et rencontrant A. Et le groupe cherché s'obtient en combinant les translations ci-dessus avec un groupe partiel formé des mouvements qui ont A pour axe, des translations parallèles A et de la rotation $B'_{\pi,o}$. Ce groupe partiel est l'un de ceux qui font l'objet du premier cas.

45. 5^{me} *Cas.* Admettons enfin que le groupe G ne contienne aucun mouvement où l'amplitude de la rotation soit infiniment petite, mais qu'il en contienne où cette amplitude soit moindre que π, et qu'il contienne en outre une translation infiniment petite θ. Si θ n'est pas parallèle à A, soit θ', θ'' ses projections sur A et sur un plan perpendiculaire. Les transformées de θ par les puissances d'un même mouvement dont l'amplitude de rotation soit $\frac{2\pi}{n}$ donnent par leur combinaison une translation $n\theta'$ longitudinale à A, laquelle combinée à $n\theta$ donnera la translation transversale $n\theta''$. Le groupe contient donc une translation transversale infiniment petite, laquelle combinée à ses transformées donnera une translation transversale quelconque: et ici, comme dans le cas précédent, le groupe résultera de ces translations transversales, jointes à un groupe déterminé, comme dans le premier cas.

Supposons au contraire qu'il n'existe aucune translation transversale infiniment petite. θ sera parallèle à A: on en déduit une translation longitudinale quelconque. Chacun des mouvements de G résulte de semblables mouvements combinés à un groupe partiel G' de mouvements, où ces translations longitudinales sont nulles: ce groupe sera l'un de ceux qui dérivent d'un réseau triangulaire, carré ou hexagone en y posant les constantes τ, τ', τ'' égales à zéro. On pourra le combiner avec $B_{\pi,t}$, comme nous l'avons indiqué en discutant le 3^{me} sous-cas. En y adjoignant ensuite les translations longitudinales, on obtiendra le groupe proposé.

VIII. Groupes de troisième catégorie.

46. Cette catégorie est celle pour laquelle le groupe auxiliare est formé des mouvements qui superposent à lui-même un tétraèdre régulier.

Le tétraèdre étant superposé à lui-même par des rotations binaires autour de chacune des trois droites rectangulaires **A**, **B**, **C** qui joignent les milieux de deux arêtes opposées, le groupe contiendra trois axes ou systèmes d'axes respectivement parallèles à **A**, **B**, **C**.

Si comme nous devons le supposer ici, le groupe n'est pas exclusivement formé de mouvements de rotation, il contient au moins une translation. Car tout mouvement hélicoïdal contenu dans le groupe ayant pour amplitude de sa rotation π ou $\frac{2\pi}{3}$, on obtient une translation en le répétant convenablement. Soient τ l'une quelconque de ces translations, τ_1, τ_2, τ_3 ses projections sur **A**, **B**, **C**: A_{π, t_1}, B_{π, t_2}, C_{π, t_3} des mouvements du groupe respectivement correspondants aux rotations binaires $\mathsf{A}_{\pi, o}$, $\mathsf{B}_{\pi, o}$, $\mathsf{C}_{\pi, o}$: les transformées de τ par ces mouvements, combinées avec τ, donneront des translations $2\tau_1, 2\tau_2, 2\tau_3$ respectivement dirigées suivant **A**, **B**, **C**. Mais τ_1, τ_2, τ_3 ne peuvent être nuls à la fois: donc il existe dans le groupe des translations parallèles à l'une de ces directions. Désignons par θ la plus petite d'entre elles, que l'on peut supposer parallèle à **A**. Soit maintenant **D** l'un des axes ternaires du tétraèdre: la rotation $\mathsf{D}_{\frac{2\pi}{3}, o}$ permutant circulairement entre elles les trois lignes **A**, **B**, **C**, le mouvement correspondant du groupe, $D_{\frac{2\pi}{3}, T'}$ permutera circulairement les trois systèmes d'axes: il transformera donc la translation $\mathsf{A}_{o, \theta}$ en $\mathsf{B}_{o, \theta}$, qu'il transforme en $\mathsf{C}_{o, \theta}$. Le groupe contient donc parallèlement à chacun des axes **A**, **B**, **C** la translation θ. Si cette translation est infiniment petite, le groupe contiendra toute translation, et résultera de la combinaison de toutes les translations possibles avec le groupe des mouvements de rotation qui superposent le tétraèdre à lui-même.

Si au contraire cette translation est finie, ce sera par hypothèse la plus petite parmi celles qui sont parallèles à chacun des axes **A**, **B**, **C**: les autres s'il en existe, seront ses multiples: d'où les relations :

$$2\tau_1 \equiv 0 \pmod{\theta}, \quad 2\tau_2 \equiv 0 \pmod{\theta}, \quad 2\tau_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod})\, \theta.$$

Cela posé, il est clair que la translation $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ résulte de la combinaison des translations θ suivant les axes avec une autre translation de la forme $(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$, où $\tau'_1\ \tau'_2\ \tau'_3$ seront chacun égaux à zéro on à $\frac{1}{2}\theta$. Si deux de ces trois quantités sont nulles, la troisième l'est aussi: autrement on aurait une translation dans le sens des axes égale à $\frac{1}{2}\theta$: θ ne sérait donc plus le minimum supposé. D'ailleurs τ, faisant partie du groupe $(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$, en fait aussi partie.

Trois cas pourront ici se presenter: 1° il peut se faire que $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$ se réduisent à zéro pour toute translation du groupe: 2° le groupe peut contenir la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$: il résulte alors de la combinaison de cette seule translation avec les θ: car s'il contenait en outre $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$ par exemple, il contiendrait $(0, 0, \frac{1}{2}\theta)$: ce qui est absurde; 3° il peut contenir $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$, auquel cas il devra contenir simultanément ses transformées $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta,)$ et $(\frac{1}{2}\theta, 0, \frac{1}{2}\theta)$ par les puissances de $D_{\frac{2\pi}{3}, T}$: et comme il ne peut contenir en même temps $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$, il résultera de la combinaison des translations ci-dessus avec les θ.

47. Avant d'examiner séparément ces trois cas, nous allons étudier ce qu'ils ont de commun.

Soit $C_{\pi,t}$ l'un des mouvements corréspondants à $\mathbf{C}_{\pi,o}$, choisi de telle sorte que t y soit minimum: il est clair que t sera $< \theta$, sans quoi $C_{\pi,t}$ combiné à la translation θ suivant $\mathbf{C}$ donnerait le mouvement $C_{\pi,t-\theta}$, ou $t - \theta$ serait $< t$. D'autre part $(C_{\pi,t})^2$ est une translation $2t$ suivant $\mathbf{C}$: donc $2t \equiv 0 \pmod{\theta}$, d'où $t = 0$ ou $t = \frac{1}{2}\theta$. D'ailleurs la première de ces deux solutions sera seule admissible, si le groupe contient une des deux translations $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ ou $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$: car le mouvement $C_{\pi,t}$ suivi de l'inverse d'une semblable translation donne un nouveau mouvement $C'_{\pi,t-\frac{1}{2}\theta}$ autour d'un axe C' parallèle à C: et si l'on avait $t = \frac{1}{2}\theta$, $t - \frac{1}{2}\theta = 0$ serait $< t$.

Soit maintenant $\mathbf{T}$ une translation perpendiculaire à C: le mouvement résultant de $C_{\pi,t}$ et de $\mathbf{T}$ est un mouvement $C'_{\pi,t}$ autour d'un nouvel axe C' parallèle à C et dont la distance à C est égale en grandeur et en direction à $\frac{1}{2}\mathbf{T}$. Prenant successivement pour $\mathbf{T}$ toutes les translations du groupe perpendiculaires à C on obtiendra un système d'axes $C, C', C''\dots$ parallèles à C et tels qu'il existe autour de chacun d'eux les mêmes mouvements qu'autour de C. Réciproquement tout axe parallèle à C et jouissant de cette propriété fera partie de ce système: car soit Γ un tel axe: on aura $\Gamma_{\pi,t} = C_{\pi,t}.\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}'$ étant une translation normale à C, laquelle fera partie du groupe.

Le mouvement $D_{\frac{2\pi}{3},T}$ transforme le système C, C', C''... en un autre système pareil A, A', A''... d'axes parallèles à A: et autour desquels auront lieu les mêmes mouvements hélicoïdaux qu'autour de C, C', C''... Réciproquement ce seront les seuls axes parallèles à A et jouissant de cette propriété: car s'il en existait un autre (A), le mouvement inverse de $D_{\frac{2\pi}{3},T}$ le transformerait en un nouvel axe (C) parallèle à C et jouissant de la même propriété, quoique ne faisant pas partie du système C, C', C''.., ce qui est impossible.

Soient B, B', B''... les axes transformés de A, A', A''... par $D_{\frac{2\pi}{3},T}$: ce seront parmi les axes parallèles à B, les seuls autour desquels aient lieu les mêmes mouvements hélicoïdaux qu'autour de C. Enfin tous les mouvements du groupe transformeront nécessairement les uns dans les autres les trois systèmes pareils A, A', A''.., B, B', B''... C, C', C''...: car chacun d'eux transforme les unes dans les autres les trois directions A, B, C: il transformera donc C, C', C''... en un système d'axes parallèles à l'une de ces trois directions et autour desquels auront lieu les mêmes mouvements qu'autour de C: ce système transformé sera donc l'un des trois précédents qui jouissent exclusivement à tous autres de cette propriété.

Les mouvements de translation que le groupe peut contenir étant également transformés les uns dans les autres par tous les mouvements du groupe, les mouvements dérivées de ces translations, jointes aux mouvements autour des axes A, A'... B, B'... C, C'... formeront un groupe partiel dont les mouvements sont transformés les uns dans les autres par un mouvement quelconque du groupe: et il est aisé de démontrer que tous les mouvements du groupe se ramènent à la forme $M\left(D_{\frac{2\pi}{3},T}\right)^{\alpha}$, M étant un mouvement de ce groupe partiel, et α étant égal à 0, 1, ou 2.

En effet il est clair que les mouvements qui superposent le tétraèdre à lui-même sont tous de la forme $\mathsf{M}\left(\mathsf{D}_{\frac{2\pi}{3},o}\right)^{\alpha}$, M se réduisant à l'unité ou à l'un des trois mouvements $\mathsf{A}_{\pi,o}$, $\mathsf{B}_{\pi,o}$, $\mathsf{C}_{\pi,o}$: soit par exemple $\mathsf{A}_{\pi,o}\,\mathsf{D}_{\frac{2\pi}{3},o}$ l'un de ces mouvements: tout mouvement du groupe proposé correspondant à celui-là sera de la forme $(A)_{\pi,t'}\,(D)_{\frac{2\pi}{3},t''}$, (A) et (D) étant des axes parallèles à A et à D. Mais on a évidemment $(A)_{\pi,t'}=A_{\pi,t}\,.\,\tau$ et $(D)_{\frac{2\pi}{3},T}=\tau'.D_{\frac{2\pi}{3},T}$,

τ et τ' étant des translations convenablement choisies: on aura donc

$$(A)_{\pi,t'}\ (D)_{\frac{2\pi}{3},t''} = A_{\pi,t}.\tau\tau'.D_{\frac{2\pi}{3},T}.$$

Ce mouvement faisant partie du groupe, ainsi que $A_{\pi,t}$ et $D_{\frac{2\pi}{3},T}$, $\tau\tau'$ y sera contenu également et $A_{\pi,t}.\tau\tau'$ le sera dans le groupe partiel.

48. *1r cas.* Supposons maintenant que les translations du groupe soient celles qui dérivent des translations θ suivant les trois axes coordonnés $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, seules ou jointes à la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$.

Les translations perpendiculaires à C étant de la forme générale $(m\theta, n\theta, 0)$, les axes du système C, C', C''... se projetteront sur le plan perpendiculaire $\mathbf{AB}$ suivant un système de points dont les coordonnées diffèrent entre elles des multiples de $\frac{1}{2}\theta$: l'ensemble de ces projections forme ainsi un réseau à maille carrée et égale à $\frac{1}{2}\theta$.

Cela posé, le mouvement $B_{\pi,t}$ autour de l'axe B doit transformer le système C, C', C''... en lui-même, ce qui suppose évidemment que B se projette sur l'une des rangées du réseau, ou au milieu de l'intervalle de deux rangées.

Si B se projette sur une rangée du réseau, cet axe et les autres axes du même systême, B', B''... (lesquels se projettent sur le plan $\mathbf{AC}$ suivant un réseau à maille carrée et égale à $\frac{1}{2}\theta$) se projetteront tous sur les rangées. Chaque axe du système B, B'... rencontre donc une infinité d'axes du système C, C'... et réciproquement. Cela posé, le mouvement $D_{\frac{2\pi}{3},T}$ permute circulairement entre eux les trois systèmes A, A'..., B, B'..., C, C'... et d'autre part, si deux lignes se coupent, il est clair que leurs transformées se coupent: donc chacun des axes A, A'... coupe une infinité d'axes du système B, B'.., On voit de même, en transformant les systèmes par $\left(D_{\frac{2\pi}{3},T}\right)^{-1}$, que chacun des axes A, A'... coupe une infinité d'axes du système C, C'... Pour que cela ait lieu, il faut évidemment que A, A'... passent par les points d'intersection des systèmes précédents: les trois systèmes d'axes formeront ainsi les rangées d'un assemblage cubique.

Réciproquement, si B se projette au milieu de deux rangées, il en sera de même des axes B', B''... et des axes A, A', A''...: car si ceux-ci se projettaient sur des rangées, il en serait de même de B, B', B''... d'après le raisonnement que nous venons de faire. Enfin si l'on projette les trois systèmes sur le plan **AC**, par exemple, perpendiculaire à $B, B', B''\ldots$, les traces des axes de ce système formeront un réseau à maille carrée et égale à $\frac{1}{2}\theta$, et ceux des deux autres systèmes se projetteront au milieu des rangées de ce réseau: sans quoi les trois systèmes d'axes devraient se couper mutuellement comme tout à l'heure, ce qui est absurde, $B, B'\ldots$ ne coupant nulle part $C, C'\ldots$

49. Cela posé, admettons d'abord que les trois systèmes d'axes forment les rangées d'un assemblage cubique. On aura nécessairement $t=0$: car A, B, C étant trois axes qui se rencontrent en un même point, si le groupe contenait les trois mouvements $A_{\pi,\frac{1}{2}\theta}$, $B_{\pi,\frac{1}{2}\theta}$, $C_{\pi,\frac{1}{2}\theta}$, il contiendrait leur produit, lequel se réduit à la translation $(\frac{1}{2}\theta, -\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$, laquelle combinée avec $B_{\pi,\frac{1}{2}\theta}$ donnerait un mouvement $B_{\pi,o}$ autour d'un axe parallèle à B; $t=\frac{1}{2}\theta$ ne serait donc pas un minimum, comme nous le supposons.

Le mouvement $D_{\frac{2\pi}{3},T}$, dont la combinaison avec les précédents et les translations θ doit reproduire tout le groupe devant transformer en lui-même le triple système $A, A'\ldots B, B'\ldots C, C'\ldots$, résulte évidemment de la combinaison d'une translation $\left(\frac{m}{2}\theta, \frac{n}{2}\theta, \frac{p}{2}\theta\right)$ avec une rotation R d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour d'une diagonale du cube générateur de l'assemblage. On peut d'ailleurs supposer qu'on ait combiné à ce mouvement les translations θ, de manière à ramener chacun des entiers m, n, p à être égal à zero ou à 1.

1° Si l'on suppose $m=n=p=0$, on obtient deux groupes distincts, suivant que la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ fait ou non partie du groupe. Chacun d'eux est suffisamment défini par ce qui précède.

2° Si l'on suppose $m=1$, $n=0$, $p=0$, le groupe contient la translation $\{(\frac{1}{2}\theta, 0, 0)R\}^3=(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$; cette hypothèse ne donne donc qu'une solution.

3° Soit $m=0, n=1, p=1$; le mouvement $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ combiné aux translations θ donne un nouveau groupe différent des précédents. Mais si l'on veut adjoindre encore à ce groupe la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ on retombera sur le dernier groupe trouvé: car cette translation, combinée à $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$, donne le mouvement $(\frac{1}{2}\theta, 0, 0)R$.

4° Soit enfin $m=1, n=1, p=1$. On obtient un nouveau groupe en combinant le mouvement $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ aux translations θ: mais si l'on veut y adjoindre encore la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$, le groupe formé contiendra le mouvement R, et par suite coïncidera avec l'un de ceux déjà trouvés.

50. Supposons maintenant que B se projette au milieu de deux rangées. Prenons pour axe des x la perpendiculaire commune à C et à B, pour axe des z la ligne C, pour axe des y une parallèle à B. Les lignes C, C'... auront pour équations générales les suivantes $x = \frac{m}{2}\theta$, $y = \frac{n}{2}\theta$, m et n étant des entiers. Les B, B'... auront pour équations $x = \frac{2m'+1}{4}\theta$, $z = \frac{n'}{2}\theta$. Enfin les A, A'..., se projétant au milieu des rangées des réseaux formés par A, A'... sur le plan xy, et par B, B'... sur le plan xz, auront pour équations $y = \frac{2n''+1}{4}\theta$, $z = \frac{2p''+1}{4}\theta$.

Soit maintenant R une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$ autour de la diagonale δ d'un cube ayant pour arêtes les parties positives des trois axes coordonnés: le mouvement $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)R$ transforme le triple système A, A'... B, B'... C, C'... en lui-même: en effet, $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)$ transforme les lignes du système A, A'..., par exemple, en lignes parallèles dont l'équation générale sera $y = \frac{n''+1}{2}\theta$, $z = \frac{p''+1}{2}\theta$ et que R, qui permute circulairement x, y, z, transformera en celles qui ont pour équations générales $z = \frac{n''+1}{2}\theta$, $x = \frac{p''+1}{2}\theta$, lesquelles ne sont autres que celles du système C, C'... Mais le mouvement $D_{\frac{2\pi}{3}, T}$ a son axe parallèle à δ: il sera donc de la forme $\mathbf{T}.(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)R$, $\mathbf{T}$ étant une translation, laquelle devra transformer le triple système en lui-même, puisque l'autre mouvement partiel $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)R$ jouit de cette propriété ainsi que le mouvement résultant $D_{\frac{2\pi}{3}, T}$. Mais les translations qui superposent le triple système à lui-même sont toutes de la forme générale $\left(\frac{\lambda}{2}\theta, \frac{\mu}{2}\theta, \frac{\nu}{2}\theta\right)$: on aura par suite $D_{\frac{2\pi}{3}, T} = \left(\frac{2\lambda+1}{4}\theta, \frac{2\mu+1}{4}\theta, \frac{\nu}{2}\theta\right)R$. D'ailleurs, en combinant ce mouvement avec les translations θ suivant les trois axes, on pourra évidemment réduire chacun des entiers λ, μ, ν à être egal à 0 ou à 1.

On peut d'ailleurs supposer que $\lambda + \mu + \nu + 1 \equiv 0 \pmod 2$: car si l'on avait $\psi = \lambda + \mu + \nu + 1 \equiv 1 \pmod 2$, on pourrait considérer, au lieu de ce mouvement

$$\left\{\left(\frac{2\lambda+1}{4}\theta,\ \frac{2\mu+1}{4}\theta,\ \frac{\nu}{2}\theta\right)R\right\},$$

celui-ci

$$\left\{\left(\frac{2\lambda+1}{4}\theta,\ \frac{2\mu+1}{4}\theta,\ \frac{\nu}{2}\theta\right)R\right\}^4=\left(\frac{2(\lambda+\psi)+1}{4}\theta,\ \frac{2(\mu+\psi)+1}{4}\theta,\ \frac{\nu+\psi}{2}\theta\right)R$$

dans lequel on aurait $\lambda+\psi+\mu+\psi+v+\psi+1\equiv 0 \pmod 2$.

Cela posé, la congruence $\lambda+\mu+\nu+1\equiv 0 \pmod 2$ a quatre systèmes de solutions, que nous allons discuter successivement.

1° Soient $\lambda=1,\ \mu=0,\ \nu=0$: le carré de $(\frac{3}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)R$ sera $(\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta)R^2$ et son cube se réduit à (θ, θ, θ), translation dérivée des translations θ. Si le groupe ne contient d'autres translations que ces dernières, on pourra supposer $t=0$ ou $t=\frac{1}{2}\theta$. Si au contraire le groupe contient en outre la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$,on aura nécessairement $t=0$; ce qui donne en tout trois solutions distinctes.

2° Soient $\lambda=0,\ \mu=1,\ \nu=0$. On aura encore trois cas à distinguer suivant que l'on a $t=\frac{1}{2}\theta$ ou $t=\theta$ et dans ce dernier cas suivant que le groupe contient ou non la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$. Mais ces cas se réduisent aux précédents: car si l'on prend pour axes coordonnés au lieu des parties positives des axes ox, oy, oz les parties négatives des axes oz, oy, ox lesquelles se succèdent dans le même ordre, R sera changé en $R^{-1}=R^2$ et $(\frac{1}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta, 0)R$ le sera en $(0, -\frac{3}{4}\theta, -\frac{1}{4}\theta)R^2$, laquelle dérive des translations θ et du mouvement $(\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta)R^2$ et par suite fait partie des groupes déterminés dans le paragraphe précédent. Réciproquement on voit de même que chaque mouvement de l'un de ces derniers groupes est contenu dans l'un de ceux que nous obtenons ici: il y a donc identité.

3° Soient $\lambda=0, \mu=0, \nu=1$: le carré de $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ sera $(\frac{1}{2}\theta, \frac{3}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta)R^2$ et son cube se réduit à (θ, θ, θ). On aura trois solutions suivant que $t=\frac{1}{2}\theta$ ou $t=\theta$ et dans ce dernier cas suivant que le groupe contient ou non la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$.

4° Soient enfin $\lambda=1, \mu=1, \nu=1$, le carré de $(\frac{3}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ sera $(\frac{6}{4}\theta, \frac{5}{4}\theta, \frac{5}{4}\theta)R^2$ et son cube se réduit à $(2\theta, 2\theta, 2\theta)$. On aura trois solutions suivant que $t=\frac{1}{2}\theta$ ou $t=0$ et dans ce dernier cas, suivant que le groupe contient ou non la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$.

2^{me} *cas.* Supposons maintenant que le groupe contienne les translations $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$, etc.

Les projections de C, C'... sur le plan des xy donnent un système de points dont les coordonnées sont en général $x = \frac{m}{2}\theta$, $y = \frac{m+2n}{2}\theta$, m et n étant des entiers: points dont la disposition est celle d'un quinconce.

Dans le cas qui nous occupe, on a $t = 0$; et pour qu'une demi-révolution autour de B superpose le système C, C'... à lui-même, il faut évidemment que B se projette suivant une des rangées du quinconce: cela posé tous les axes B, B'... se projetteront suivant les rangées du quinconce: d'autre part leurs projections sur le plan des xz dessineront un second quinconce semblable au précédent.

On voit par là que chacun des axes B, B'... coupe une infinité d'axes du système C, C'... et réciproquement. Le mouvement $D_{\frac{2\pi}{3}, T}$ permutant circulairement les trois systèmes A, A'..., B, B'..., C, C'..., chacun des axes A, A'... devra couper une infinité d'axes de chacun des deux systèmes B, B'... et C, C'..., ce qui suppose évidemment que A, A'... passent précisément par les points d'intersection des C, C'... avec les B, B'...

Les trois systèmes d'axes forment ainsi l'ensemble des rangées de deux assemblages cubiques, formés sur le côté $\frac{1}{2}\theta$, et ayant chacun pour sommets les centres des cubes de l'autre. La rotation R superpose le triple système à lui-même, et l'on aura $D_{\frac{2\pi}{3}, T} = \mathbf{T}.R$, $\mathbf{T}$ étant une translation qui le superpose également à lui-même.

Or $\mathbf{T}$ sera évidemment une des translations $\left(\frac{m}{2}\theta, \frac{n}{2}\theta, \frac{p}{2}\theta\right)$ qui superposent à lui-même chacun des deux assemblages cubiques, ou une des translations $\left(\frac{2m+1}{4}\theta, \frac{2n+1}{4}\theta, \frac{2p+1}{4}\theta\right)$ qui transforment les deux assemblages l'un dans l'autre.

Divers cas seront à examiner ici:

1° Si $D_{\frac{2\pi}{3}, T}$ se réduit à R, ce mouvement joint aux translations θ et $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$ donnera un groupe nettement défini par ce qui précéde, et qui ne pourra être combiné avec aucune autre translation.

2° Si $\mathbf{T}$ se réduit $(\frac{1}{2}\theta, 0, 0)$, $(\mathbf{T}R)^3$ serait égal à $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$, translation que le groupe ne peut contenir: cette hypothèse est donc absurde.

3° Si $\mathbf{T}$ se réduit à $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$, le groupe contient $\mathbf{T}$ et par suite R, et l'on retombe sur le groupe déjà trouvé.

4° Enfin $\mathbf{T}$ ne peut être égal à $\left(\frac{2m+1}{4}\theta, \frac{2n+1}{4}\theta, \frac{2p+1}{4}\theta\right)$, car $(\mathbf{T}R)^3$ se réduirait à la translation $\left(\frac{2(m+n+p)+3}{4}\theta, \frac{2(m+n+p)+3}{4}\theta, \frac{2(m+n+p)+3}{4}\theta\right)$ que le groupe devrait contenir: résultat absurde, car il ne peut contenir que des translations dont les projections sur les axes soient des multiples de $\frac{1}{2}\theta$.

(La fin au prochain cahier).

Intorno ad un teorema di Cauchy.

(*del prof.* A. Genocchi, *a Torino*).

Il chiarissimo prof. Trudi ha impugnato un teorema annunziato da Cauchy nel tom. X dei *Comptes rendus* pag. 181. È vero che l'illustre francese non l'ha accompagnato con una dimostrazione formale, ma i principj da lui esposti nel medesimo volume e nel tom. XVII dei *Mémoires de l'Institut* conducono così facilmente alla dimostrazione, che a buon diritto, mi sembra, egli ha potuto ommetterla; e fu dopo averla trovata ch'io citai quel teorema in una Memoria intorno ai residui quadratici pubblicata dall'Accademia delle scienze del Belgio, e potei distintamente indicarvi i casi ne' quali il segno ambiguo nell'equazione di Cauchy deve ridursi al $+$ e quelli in cui deve ridursi al $-$, ciò derivando come conseguenza immediata dagli accennati principj.

Il fondamento della dimostrazione sta nella determinazione della *somma* o *funzione alternata* Δ formata colle radici primitive dell'equazione $1-x^n=0$ divise in due gruppi. Sia ρ una di tali radici primitive: inteso il simbolo $\left(\frac{m}{n}\right)$ nel senso spiegato da Legendre quando n è un numero primo e m non è divisibile per n, si ponga rispetto ad ogni valore impari di m la definizione $\left(\frac{m}{4}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, e l'una o l'altra delle definizioni seguenti:

$$\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}}, \qquad \left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}};$$

poscia supponendo n un numero impari non divisibile per alcun quadrato ovvero un tal numero moltiplicato per 4 o per 8, si determinerà generalmente il valore di $\left(\frac{m}{n}\right)$ se si ammette che sia nullo quando m non è primo ad n, e nel caso contrario, risoluto n ne' suoi fattori primi impari e nel fattore 4 ovvero 8, si applica la relazione $\left(\frac{m}{ab}\right)=\left(\frac{m}{a}\right)\left(\frac{m}{b}\right)$ indicata da Jacobi. Ciò posto, si rappresentino con h quelli fra i numeri inferiori ad n e primi ad n che dànno $\left(\frac{h}{n}\right)=+1$, e con k quelli che dànno $\left(\frac{k}{n}\right)=-1$, e si scriva $\Delta=\Sigma\rho^h-\Sigma\rho^k$; se n è d'una delle forme $4\alpha+1$, $4(4\alpha+3)$, si avrà $\Delta^2=+n$; se n è d'una delle forme $4\alpha+3$, $4(4\alpha+1)$, si avrà $\Delta^2=-n$; se infine n è della forma $8(2\alpha+1)$, si avrà $\Delta^2=n(-1)^r$ quando si suppone $\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$, e $\Delta^2=n(-1)^{r+1}$ quando si supponga $\left(\frac{m}{8}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}}$, fatto in entrambi i casi $r=\frac{n-8}{16}$. Queste proposizioni furono dimostrate da Cauchy, e ottenute tali formole, non resta se non seguire il metodo stesso di Gauss per provare l'esistenza di due polinomj interi Y e Z a coefficienti interi (*) che rendono:

$$2\Pi(x-\rho^h)=Y+\Delta Z, \qquad 2\Pi(x-\rho^k)=Y-\Delta Z,$$

e quindi:

$$4\Pi(x-\rho^h)(x-\rho^k)=Y^2-\Delta^2 Z^2,$$

ossia:

$$4X_n=Y^2\mp nZ^2,$$

chiamato X_n il prodotto $\Pi(x-\rho)$ steso a tutti i valori di ρ. Nel secondo membro dovrà prendersi il segno $-$ quando n è d'una delle forme $4\alpha+1$ e $4(4\alpha+3)$, e il segno $+$ quando n è d'una delle forme $4\alpha+3$ e $4(4\alpha+1)$; e potrà prendersi tanto l'uno quanto l'altro segno se n è divisibile per 8.

Il prof. Trudi avendo trovato nel caso di n pari formole diverse dalla pre-

(*) Il prof. Trudi, nel dire che Dirichlet ha *ridotto a formole* la costruzione dei coefficienti di Y et Z, aggiunge che tal cosa era riputata impossibile da Gauss. Osservo che le formole a cui egli allude contengono i simboli $\left(\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{5}{n}\right)$, ecc., ai quali si possono applicare le parole di Gauss: «variant pro diversa indole numeri n, nec formulæ analyticæ generali subiici possunt». Le regole date da Legendre negli art. 511, 512 della sua *Théorie des nombres* furono da lui stesso dichiarate inesatte nel tomo XI *Mémoires de l'Institut* (1832) pag. 81, dove altre ne sostituì. Noterò ancora che la formola del Trudi $Z(x)=(-x)^{m+1}Z\left(\frac{1}{x}\right)$ per $n\equiv 3$ (mod. 4) non è più esatta di quella del Dedekind ch'esso ha voluto correggere, e che si deve porre $-(-x)^m$ in luogo di $(-x)^{m+1}$

cedente e avendo corroborato le sue deduzioni con esempi numerici, ha conchiuso che per n pari l'esposto teorema di Cauchy non è vero, mentre con questo non è inconciliabile il suo teorema, potendo lo stesso polinomio $4X_n$ ricevere due o più forme quadratiche distinte. E lo mostrano senz'altro gli esempi che soggiungo dando ad n i valori 12, 20, 24, 28, 56, dei quali gli ultimi due sono appunto stati scelti dal sig. Trudi per provare la falsità del teorema di Cauchy:

$$4X_{12} = (2x^2+2)^2 - 12x^2,$$
$$4X_{20} = (2x^4-6x^2+2)^2 + 20(x^3-x)^2,$$
$$4X_{24} = (2x^4-6x^2+2)^2 + 24(x^3-x)^2,$$
$$4X_{24} = (2x^4+6x^2+2)^2 - 24(x^3+x)^2,$$
$$4X_{28} = (2x^6+6x^4+6x^2+2)^2 - 28(x^5+x^3+x)^2,$$
$$4Y_{56} = (2x^{12}+14x^{10}+6x^8-14x^6+6x^4+14x^2+2)^2 \\ -56(x^{11}+2x^9-x^7-x^5+2x^3+x)^2,$$
$$4X_{56} = (2x^{12}-14x^{10}+6x^8+14x^6+6x^4-14x^2+2)^2 \\ +56(x^{11}-2x^9-x^7+x^5+2x^3-x)^2.$$

Pel caso di n impari, il prof. Trudi ammette il teorema, ma lo attribuisce a Dirichlet, che lo avrebbe sommariamente esposto nella Memoria *Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies.* Confesso che in questa (G. Crelle, t. XVII, pag. 57) non ho trovato una parola che si riferisca al menzionato teorema: bensì nello stesso volume fu pubblicata un'altra Memoria di Dirichlet *Sur la manière de résoudre l'équation* $t^2-pu^2=1$ *au moyen des fonctions circulaires*, nel chiuder la quale l'illustre autore afferma che il teorema di Gauss si può ampliare e indica il risultato nel solo caso in cui n è il prodotto di due numeri primi disuguali, aggiungendo l'esempio di $n=33$. E Cauchy non ha ommesso di menzionare queste proposizioni del Dirichlet. Nè relativamente a tal quistione giova allegare le *Lezioni* postume di Dirichlet che sono una compilazione dell'egregio prof. Dedekind, uscita nel 1863, con aggiunte proprie del compilatore.

13 novembre 1868.

Addition à la Note sur quelques torses sextiques.

(*par M.ʳ* A. Cayley, *à Cambridge*).

Je viens de trouver ce que signifie la condition $J=0$. Considérons deux surfaces quadriques qui se touchent (d'un contact ordinaire). Les équations tangentielles peuvent s'écrire sous la forme

$$a\,\xi^2+b\,\eta^2+c\,\zeta^2+2n\,\zeta\omega=0\,,$$
$$a'\xi^2+b'\eta^2+c'\zeta^2+2n'\zeta\omega=0\,,$$

et l'on satisfait à ces équations par des valeurs de ξ, η, ζ, ω qui contiennent un paramètre arbitraire θ, en écrivant

$$\xi:\eta:\zeta:\omega=\alpha\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right):\beta\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right):\varepsilon:\gamma\left(\theta^2+\frac{1}{\theta^2}\right)+\delta;$$

en effet cela donne

$$a\,\alpha^2+b\,\beta^2+2n\gamma\varepsilon=0,\quad 2a\,\alpha^2-2b\,\beta^2+c\,\varepsilon^2+2n\,\delta\varepsilon=0\,,$$
$$a'\alpha^2+b'\beta^2+2n'\gamma\varepsilon=0,\quad 2a'\alpha^2-2b'\beta^2+c'\varepsilon^2+2n'\delta\varepsilon=0\,,$$

ce qui détermine les valeurs de $\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon$. L'équation du plan tangent commun sera donc

$$x\alpha\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)+y\beta\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)+z\varepsilon+w\left[\gamma\left(\theta^2+\frac{1}{\theta^2}\right)+\delta\right]=0,$$

ou, en multipliant par $12\theta^2$, cette équation sera

$$(a,\,b,\,c,\,d,\,e)\;(\theta,\,1)^4=0,$$

les valeurs des coefficients étant

$$\begin{aligned} a &= 12\,\gamma w, \\ b &= 3(\alpha x+\beta y), \\ c &= 2(\delta w+\varepsilon z), \\ d &= 3(\alpha x-\beta y), \\ e &= 12\,\gamma w. \end{aligned}$$

En représentant par $Aa+4Bb+6Cc+4Dd+Ee=0$ l'équation qui lie les fonctions linéaires a, b, c, d, e, cette équation sera $a-e=0$; on a donc $A=-E=1$, $B=C=D=0$; l'invariant J de la fonction $(A, B, C, D, E)(\tau, 1)^4$ est donc $=0$.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que la torse sextique

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace-ad^2-b^2e-c^3+2bcd)^2=0,$$

où les fonctions lineaires a, b, c, d, e sont liées par une équation

$$Aa+4Bb+6Cc+4Dd+Ee=0,$$

telle que l'invariant

$$J=ACE-AD^2-EB^2-C^3-2BCD$$

de la fonction $(A, B, C, D, E)(\tau, 1)^4$ est $=0$ (cas 7° de la Note), est la torse enveloppée par le plan tangent commun de deux surfaces quadriques qui se touchent d'un contact ordinaire. J'ai trouvé l'équation de cette torse dans le Memoire « *On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order* » Quart. Math. Jour. t. V (1350) pp. 46-57, voir p. 56: $a, b, c, n, a', b', c', n'$ y denotent les mêmes coefficients comme à présent, et en ecrivant

$$\begin{aligned} bc'-b'c&=f, & an'-a'n&=p \\ ca'-c'a&=g, & bn'-b'n&=q \\ ab'-a'b&=h, & cn'-c'n&=r \end{aligned}$$

(et delà $pf+qg+rh=0$), l'équation trouvée est

$$f^2g^2h^2w^6\ldots\quad +4pqr(qx^2+py^2)^3=0.$$

Je vais vérifier ces termes. Partant de l'équation $(a, b, c, d, e)(\theta, 1)^4=0$, l'équation de la torse, en y introduisant pour commodité le facteur $-\frac{pqr}{216}$, sera

$$-\frac{pqr}{216}\Big\{4[(\delta w+\varepsilon z)^2+12\gamma^2 w^2-3(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)]^3$$

$$-[2(\delta w+\varepsilon z)^3-9(\delta w+\varepsilon z)(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)-27(\delta w+\varepsilon z)\gamma^2w^2+54(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)\gamma w]^2\Big\}=0.$$

En prenant $\gamma\varepsilon=ab'-a'b=h$, on obtient pour $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ les valeurs

$$\alpha^2=2q,\ \beta^2=-2p,\ \gamma\varepsilon=h,\ \varepsilon^2=-\frac{8pq}{r},\ \delta\varepsilon=\frac{2(fp-gq)}{r},$$

et delà

$$\gamma^2=-\frac{h^2r}{8pq},\ \delta^2=-\frac{(fp-gq)^2}{2pqr}=-\frac{h^2r^2+4fgpq}{2pqr}=4\gamma^2+\frac{2fg}{r},$$

$$\delta^2-4\gamma^2=\frac{2fg}{r}.$$

Les termes en w^6 et $(x^2,y^2)^3$ sont

$$-\frac{pqr}{216}\Big\{[4(\delta^2+12\gamma^2)^3-(2\delta^3-72\gamma^2\delta)^2]w^6-108(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)^3\Big\}$$

$$=-\frac{pqr}{216}\Big\{432\gamma^2(\delta^2-4\gamma^2)^2w^6-108(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)^3\Big\}.$$

Ces termes sont donc

$$=-\frac{pqr}{216}\Big\{-432\,\frac{h^2r}{8pq}\cdot\frac{4f^2g^2}{r^2}w^2+864(qx^2+py^2)^2\Big\}$$

$$=f^2g^2h^2w^6+4pqr(qx^2+py^2)^3,$$

comme cela doit être.

Cambridge, 22 septembre 1868.

Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie. (*)

(*del D.*r T. Reye, *prof. a Zurigo*).

15. « I piani passanti per un punto fisso A di una k^4 incontrano ancora la curva in terne di punti tali che, se cinque nuovi punti di k^4 formano un gruppo di punti associati con una di quelle terne, formeranno « un gruppo analogo con qualunque altra terna (11) ».

Questo teorema conduce al seguente:

« Se per quattro punti A, B, C, D di una k^4 si fanno passare delle superficie arbitrarie di 2° grado, queste segano ancora la curva in quaderne di punti; ed ogni quattro punti A_1, B_1, C_1, D_1 di k^4, formanti un « gruppo di punti associati con una (Q) di queste quaderne, debbono formare anche un tal gruppo con un'altra qualunque (Q_1) delle stesse quaderne ».

Per ipotesi i punti A, B, C, D formano un gruppo di punti associati con ciascuna delle quaderne Q e Q_1. Se ora congiungiamo il punto in cui k^4 è intersegata per la quarta volta dal piano $\overline{BCD}$ con C_1 e D_1 per mezzo di un nuovo piano, e se indichiamo con B^1 la quarta intersezione di questo piano con k^4; anche i punti A, B^1, C_1, D_1 formano un gruppo di punti associati con ciascuna delle quaderne Q e Q_1. Ma se la quaderna Q forma un tal gruppo anche coi punti A_1, B_1, C_1, D_1, allora le rette AB^1 ed A_1B_1 sono generatrici (d'uno stesso sistema) di un'iperboloide passante per k^4 (8), e quindi non solo A, B^1, C_1, D_1, ma anche A_1, B_1, C_1, D_1 formano un gruppo di punti associati colla quaderna Q_1 (10).

16. Possiamo riunire nel modo seguente i teoremi (10) e (15):

Se sopra una k^4 sono dati due gruppi di punti associati, e se otto qualsivogliano di questi sedici punti formano un nuovo gruppo

(*) Continuazione e fine della Memoria a pag. 129 di questo tomo.

di punti associati, anche gli altri otto punti debbono formare un gruppo analogo. Per esempio: « Se una k^4 è intersegata da tre piani ε_1, ε_2, ε_3 « nelle quaderne di punti (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2) e (A_3, B_3, C_3, D_3), « e se A_4, B_4, C_4, D_4 sono gli ultimi quattro punti, nei quali k^4 è rispet- « tivamente incontrata dai piani $\overline{A_1 A_2 A_3}$, $\overline{B_1 B_2 B_3}$, $\overline{C_1 C_2 C_3}$, anche i punti « $A_4 B_4 C_4 D_4$ giaceranno in un piano ». Infatti poichè tanto i punti A e B, quanto i punti C e D formano un gruppo di punti associati, e poichè A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 è un terzo gruppo di punti associati, anche A_3, B_3, C_3, D_3, A_4, B_4, C_4, D_4 dev'essere un gruppo analogo; ed essendo A_3, B_3, C_3, D_3 situati in un piano, passerà un piano anche per A_4, B_4, C_4, D_4.

17. Facendo coincidere nel teorema (16) i piani ε_2 ed ε_3 con ε_1, si ricava l'interessante teorema: Se si costruiscono i piani osculatori, nei quattro punti d'intersezione d'una k^4 con un piano, essi segano la k^4 in altri quattro punti situati parimenti in un piano. Questo teorema è analogo ad una nota proprietà delle curve piane di 3° ordine. Da esso segue immediatamente:

18. « Qualunque piano, il quale unisca tre punti di contatto di piani « tangenti stazionari d'una k^4, incontra questa curva in un altro di tali punti ». È noto come ciascuno dei quattro coni K^2, che si possono far passare per k^4, è toccato da quattro piani tangenti stazionari della k^4. I sedici punti di contatto sono situati quattro a quattro sulle faccie del tetraedro formato dai vertici dei quattro coni nominati. Però in tutto vi sono 140 piani, contenenti quattro qualunque di questi punti di contatto; per ciascuna delle 120 rette congiungenti quei 16 punti di contatto passano sette di questi piani, e per ciascuno dei 16 punti ne passano 35.

19. Dal n.° (17) si ricava pure facilmente il noto teorema: I punti di contatto dei tre piani osculatori, che possono condursi alla k^4 da un suo punto P, giacciono in un piano con P. Per la dimostrazione si congiunga, mediante un piano, P a due di questi punti di contatto, e si applichi alle quattro sue intersezioni con k^4 il teorema (17).

20. Puossi enunciare nel seguente modo il teorema reciproco del (17); « Se da ciascuno dei quattro punti d'intersezione d'un piano con una k^4, si « conducono tre piani osculatori alla k^4, i 12 punti di contatto sono situati « a quattro a quattro in 27 piani ».

Zurigo, 30 settembre 1868.

Sur l'expression la plus simple de certaines fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré.

(*par M.* Michael Roberts, *à Dublin*).

Dans ce Mémoire je ferai usage des fonctions des différences des racines de l'équation:

$$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + 10a_3 x^2 + 5a_4 x + a_5 = 0 \tag{1}$$

qui sont renfermées dans le tableau suivant:

$$H = a_1^2 - a_0 a_2, \quad G = a_0^2 a_3 + 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2, \quad I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

$$K = 4(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)(a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2) - (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3)^2$$

$$K' = \tfrac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial a_5}$$

$$\begin{aligned} L = {} & a_0^2(a_4^2 - a_3 a_5) + 3a_0 a_1(a_2 a_5 - a_3 a_4) + 4a_0 a_2(a_3^2 - a_2 a_4) + 2a_1^2(a_3^2 - a_1 a_5) \\ & + 5a_1^2 a_2 a_4 + 3a_2^4 - 8a_1 a_2^2 a_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = {} & 12a_1^2 a_2 a_3 a_5 + 15a_1^2 a_2 a_4^2 - 10a_1^2 a_3^2 a_4 + 20a_1 a_2 a_3^3 - 8a_0 a_1 a_3^2 a_5 \\ & - 30a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 a_4^2 - 6a_1 a_2^3 a_5 - 10a_2^3 a_3^2 + 2a_0 a_2^2 a_3 a_5 \\ & + 15a_2^4 a_4 - 14a_0 a_2^2 a_4^2 - 6a_1^3 a_4 a_5 + 4a_0 a_1 a_2 a_4 a_5 + 22a_0 a_2 a_3^2 a_4 \\ & + 2a_0^2 a_3 a_4 a_5 - a_0^2 a_4^3 + a_0 a_1^2 a_5^2 - a_0^2 a_2 a_5^2 - 9a_0 a_3^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = {} & (a_0 a_2 a_5 - a_0 a_3 a_4 - a_1^2 a_5 + a_1 a_3^2 + a_1 a_2 a_4 - a_2^2 a_3)^2 \\ & - 3(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3)(a_0 a_3 a_5 - a_0 a_4^2 - a_1 a_2 a_5 + a_1 a_3 a_4 + a_2^2 a_4 - a_2 a_3^2) \end{aligned}$$

Ces fonctions satisfont aux relations suivantes:

$$G^2 = 4H^3 - a_0^2 HI - a_0^3 J, \tag{1}$$

$$GK' = 4H^2 I - 6a_0 HJ + a_0^2 (L - I^2), \tag{2}$$

$$K'^2 = 4HI^2 - 12a_0 IJ - a_0^2 K, \tag{3}$$

$$a_0 R = I^3 - 9J^2 - 2IL - HK, \tag{4}$$

$$a_0 T = RH + (3L - I^2) J. \tag{5}$$

L'équation (1) est bien connue depuis long-temps; l'équation (3) a été donnée pour la première fois par M. Brioschi dans le Journal de M. Tortolini, et les autres se trouvent dans mes articles insérés dans le Quarterly Journal, vol. 4, pages 173, 176, 327.

Maintenant soit $\Phi(\omega, \varkappa)$ une fonction symétrique des différences des racines de l'équation (1), homogène et entière; et soient ω la puissance la plus haute de l'une quelconque des racines dans la fonction dont il s'agit, ou bien son degré quant aux coefficients, et $\varkappa$ son degré par rapport aux racines elles-mêmes. Je vais chercher la forme la plus simple par les coefficients des fonctions, Φ quand on attribue aux quantités ω, $\varkappa$ plusieurs valeurs diverses. Parmi les fonctions ainsi considérées on trouve, comme cas particuliers, les coefficients de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (1) et qui sont présentés sous leur forme la plus simple dans mon Mémoire inséré dans le Journal de M. Tortolini, vol. VII page 257. J'ai réussi de combler une lacune qui semble exister dans la théorie des covariants des formes binaires du cinquième degré, (Voir un Mémoire de M. Cayley, Philosophical Transactions, 1860, page 108).

Pour exposer les principes de ma méthode il faut se rappeler le résultat connu que $\frac{\partial \Phi(\omega, \varkappa)}{\partial a_5}$, $\frac{\partial^2 \Phi(\omega, \varkappa)}{\partial a_5^2}, \cdots$ sont aussi fonctions des différences des racines de l'équation (1); et en désignant par ν la puissance la plus haute de a_5 qui se trouve dans $\Phi(\omega, \varkappa)$, $\frac{\partial^\nu \Phi(\omega, \varkappa)}{\partial a_5{}^\nu}$ ne contient pas ce coefficient et s'exprime par les quantités a_0, H, G, I, J: la résolution du problème actuel consiste à présenter les résultats des intégrations successives de cette valeur de $\frac{\partial^\nu \Phi(\omega, \varkappa)}{\partial a_5{}^\nu}$ par rapport à a_5 comme fonctions des différences des racines de l'équation (1). Il faut ajouter à la première intégration, pour tirer la valeur de $\frac{\partial^{\nu-1} \Phi(\omega, \varkappa)}{\partial a_5{}^{\nu-1}}$, au lieu de constante arbitraire, l'expression la plus générale des fonctions des différences des racines qui dépendent de a_0, H, G, I, J, dont le degré par rapport aux coefficients est $\omega-\nu+1$, et dont le degré par rapport aux racines est $\varkappa-5\nu+5$. Les autres intégrations qui sont nécessaires pour arriver à l'expression générale de $\Phi(\omega,\varkappa)$ s'effectuent d'une manière semblable.

Observons maintenant qu'on a

$$\frac{\partial K'}{\partial a_5}=-a_0^2,\ \frac{\partial^2 K}{\partial a_5^2}=-2a_0^2,\ \frac{\partial^2 R}{\partial a_5^2}=2a_0 H,\ \frac{\partial^2 T}{\partial a_5^2}=2H^2. \tag{6}$$

Il faut remarquer que ces équations suffisent à définir et à déterminer complétement les fonctions K, K', R, T; on a aussi

$$\frac{\partial L}{\partial a_5}=-G. \tag{7}$$

Nous allons maintenant donner quelques formules pour faciliter l'intégration dont nous nous occuperons dans la suite. En multipliant les deux membres de l'équation (2) par da_5 et en intégrant, nous trouvons, en vertu du système (6),

$$2a_0^2\int L\,da_5=GK-4I\frac{\partial T}{\partial a_5}+6J\frac{\partial R}{\partial a_5}-2I^2K'. \tag{8}$$

En tirant par différentiation des équations (4) (5) les valeurs $\frac{\partial R}{\partial a_5}$, $\frac{\partial T}{\partial a_5}$, nous trouvons

$$a_0^2\left(2I\frac{\partial T}{\partial a_5}-3J\frac{\partial R}{\partial a_5}\right)=4GI(HI-3a_0J)-2HK'(2HI-3a_0J);$$

or les équations (2) (3) donnent

$$K'^2+a_0^2K=4I(HI-3a_0J),\quad GK'-a_0^2(L-I^2)=2H(2HI-3a_0J),$$

en sorte que nous avons

$$2I\frac{\partial T}{\partial a_5}-3J\frac{\partial R}{\partial a_5}=GK+K'(L-I^2),$$

d'où nous tirons par intégration

$$2G\int K\,da_5+2\int LK'\,da_5=4IT-6JR+I^2K.$$

Mais on a aussi

$$2\int LK'\,da_5-G\int K\,da_5=LK,$$

on a donc

$$3G\int K da_5 = 4IT - 6JR - K(L - I^2), \tag{9}$$

$$6\int LK' da_5 = K(2L + I^2) + 4IT - 6JR.$$

Nous avons aussi:

$$a_0^2 \left\{ 2H\frac{\partial T}{\partial a_5} - \tfrac{1}{2} a_0 I \frac{\partial R}{\partial a_5} + a_0 JK' \right\} =$$

$$(4H^2 - a_0^2 I)(GI - HK') - 6a_0 HGJ + a_0^3 JK';$$

mais le second membre de cette dernière se réduit, en vertu des équations (1) (2), à $-a_0^2 LG$, en sorte que nous trouvons:

$$2H\frac{\partial T}{\partial a_5} - \tfrac{1}{2} a_0 I \frac{\partial R}{\partial a_5} + a_0 JK' = -LG. \tag{10}$$

On peut déduire cette équation aussi en intégrant l'équation (1) par rapport à a_5.

En multipliant par da_5 les deux membres de l'équation (10) et prenant les intégrales par rapport à a_5 nous trouvons:

$$(L - I^2)^2 = 4HT + K(HI + a_0 J) + 9IJ^2 + I(\alpha I^3 + \beta J^2);$$

on peut déterminer les valeurs des quantités α, β, qui ont été introduites par intégration en supposant $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, ce qui donne

$$L = I^2 = a_0^2 a^2, \quad H = a^1 \quad J = -a_1^2 a_4, \quad T = -3a_0 a_1^2 a_4^3$$

d'où l'on tire $\alpha = 0$, $\beta = 3$, en sorte que nous avons

$$(L - I^2)^2 = 4HT + K(HI + a_0 J) + 12IJ^2, \tag{11}$$

équation que j'ai déjà donnée dans le Quarterly Journal, vol. V, page 147, et que j'ai tirée des équations (1), (2), (3), (4), (5) de ce Mémoire.

Nous allons maintenant donner quelques exemples de notre méthode.

Cherchons l'expression générale des fonctions des différences des racines de l'équation (1) du huitième degré par rapport aux coefficients et du quatorzième degré par rapport aux racines, ou bien de $\Phi(8, 14)$; alors $\nu = 2$ et on a:

$$\frac{\partial^2 \Phi(8, 14)}{\partial a_5^2} = 2a_0^2(\lambda H^2 + \mu a_0^2 I),$$

λ, μ étant des facteurs numériques quelconques; d'où en intégrant, en vertu du système (6), et en nous rappelant notre règle relative à l'introduction des fonctions convenables de a_0, H, G, I, J,

$$\frac{\partial\Phi(8,14)}{\partial a_5}=\lambda a_0^2\frac{\partial T}{\partial a_5}-\mu a_0^2 I\frac{\partial K}{\partial a_5}+G(\theta HI+\phi a_0 J)\ (*)$$

d'où l'on tire pour la valeur générale de $\Phi(8,14)$:

$$\lambda a_0^2 T-\mu a_0^2 IK-\theta HIL-\phi a_0 JL+\psi HI^3+\chi HJ^2+\tau a_0 I^2 J.$$

Cherchons l'expression la plus simple des fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré qui sont du sixième degré par rapport aux coefficients et du douzième degré par rapport aux racines, c'est-à-dire $\Phi(6,12)$; on a pour ce cas $\nu=2$ et:

$$\frac{\partial^2\Phi(6,12)}{\partial a_5^2}=2\lambda a_0^2 H,$$

ce qui dévient en vertu du système (6)

$$\frac{\partial^2\Phi(6,12)}{\partial a_5^2}=-2\lambda H\frac{\partial K'}{\partial a_5},$$

et en intégrant:

$$\frac{\partial\Phi(6,12)}{\partial a_5}=-2\lambda HK'+\mu IG,$$

d'où finalement

$$\phi(6,12)=\psi I^3+\chi J^2-\lambda HK-\mu IL.$$

La valeur la plus simple par les coefficients du déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}$$

où s_0, s_1, s_2... sont les sommes des puissances zéro, première, deuxième.... des racines de l'équation (1), résulte de cette dernière formule qui conduit

(*) Dans la suite de ce Mémoire, les lettres grecques désignent des facteurs numériques arbitraires.

à la suivante

$$a_0^6 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = 2500(HK + 12IL + 4I^3 - 216J^2)$$

(Voir le Quarterly Journal, Vol. IV, page 175).

Pour trouver l'expression la plus simple de $\Phi(6, 14)$, on a

$$\frac{\partial^2 \Phi(6, 14)}{\partial a_5^2} = 2\lambda H^2 + 2\mu a_0^2 I,$$

ce qui donne par intégration, en ayant égard au système (6),

$$\frac{\partial \Phi(6, 14)}{\partial a_5} = \lambda \frac{\partial T}{\partial a_5} - 2\mu I K'.$$

On ne doit point ajouter de fonction de a_0, H, G, I, J au second membre de cette dernière équation, parce que les formes binaires du quatrième degré n'ont pas des covariants quadratiques: et il résulte pour la valeur générale de $\Phi(6, 14)$

$$\lambda T - \mu I K,$$

à cause qu'il n'existe des fonctions de a_0, H, G, I, J qui soient du sixième degré par rapport aux coefficients et du quatorzième degré par rapport aux racines.

Pour trouver l'expression générale de $\Phi(7, 16)$ on a

$$\frac{\partial^2 \Phi(7, 16)}{\partial a_5^2} = 2\lambda a_0^2 J + 2\mu a_0 H I,$$

d'où, comme dans l'exemple précédent nous tirons par intégration, en vertu du système (6),

$$\frac{\partial \Phi(7, 16)}{\partial a_5} = -2\lambda J K' + \mu I \frac{\partial R}{\partial a_5},$$

ce qui conduit à

$$\Phi(7, 16) = -\lambda J K + \mu I R,$$

parce qu'il n'existe pas une fonction de $a_0, H, G, I, J,$ qui soit du septième degré par rapport aux coefficients et du seizième degré par rapport aux racines.

Pour trouver l'expression générale de $\Phi(8, 16)$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \Phi(8, 16)}{\partial a_5^2} = 2\lambda G^2 + 2 a_0^2(\mu H I + \nu a_0 J),$$

d'où l'on trouve par intégration, en vertu du système (6),

$$\frac{\partial \Phi(8, 16)}{\partial a_5} = 2 G(\theta I^2 - \lambda L) - 2 K'(\mu H I + \nu a_0 J),$$

ce qui donne finalement

$$\Phi(8, 16) = I(\psi I^3 + \tau J^2 - \theta I L) - K(\mu H I + \nu a_0 J) + \lambda L^2,$$

ce qui, en ayant égard à l'équation (11), se transforme dans la suivante

$$\Phi(8, 16) = \theta H T + K(\phi H I + \psi a_0 J) + I(\chi I_3 + \tau J^2 + \sigma I L),$$

formule dont j'ai fait usage dans mon Mémoire inséré dans le Journal de M.r Tortolini, Vol. VII, page 257.

Pour trouver l'expression générale de $\Phi(8, 18)$, alors $\nu = 3$ et nous avons

$$\frac{\partial^3 \Phi(8, 18)}{\partial a_5^3} = \lambda a_0^2 G,$$

d'où nous tirons par intégration:

$$\frac{\partial^2 \Phi(8, 18)}{\partial a_5^2} = a_0^2(\mu I^2 - \lambda L) + \nu a_0 H J + \tau H^2 I,$$

et en vertu de l'équation (8) et en observant qu'il est impossible de former une fonction de a_0, G, I, J du septième degré par rapport aux coefficients et du treizième degré par rapport aux racines, nous tirons de cette dernière:

$$\frac{\partial \Phi(8, 18)}{\partial a_5} = \tfrac{1}{2}\left\{2(\lambda - \mu) I^2 K' + (4\lambda + \tau) I \frac{\partial T}{\partial a_5} + (\nu - 6\lambda) J \frac{\partial R}{\partial a_5} - \lambda G K\right\},$$

d'où, en intégrant une seconde fois nous déduirons, en nous rappelant l'équation (9):

$$\Phi(8, 18) = \tfrac{1}{6}\{(2\lambda - 3\mu) I^2 K + (8\lambda + 3\tau) I T + 3(\nu - 4\lambda) R J + \lambda L K\},$$

ou bien:

$$\Phi(8, 18) = K(\theta L + \phi I^2) + \psi I T + \chi R J,$$

en remarquant qu'il n'existe pas une fonction de a_0, H, G, I, J qui soit du huitième degré par rapport aux coefficients et du dix-huitième degré par rapport aux racines.

Nous terminerons en présentant les formules suivantes qui s'obtiennent facilement:

$$\Phi(8,12)=H(\lambda HK+\mu IL+\nu I^3+\sigma J^2)+a_0 J(\theta L+\phi I^2)+\psi a_0^2 IK,$$

$$\Phi(8,10)=a_0^3(\lambda a_0 K+\mu IJ)+a_0^2 H(\theta L+\phi I^2)+a_0\sigma H^2 J+\tau H^2 I,$$

$$\Phi(8,8\ )=a_0^4(\lambda L+\mu I^2)+a_0^3\psi HJ+a_0^2\sigma H^2 I+\tau H^4.$$

Collège de la Trinité à Dublin, le 31 mars 1868.

Teoria fondamentale
degli spazii di curvatura costante.

(*del prof.* Eugenio Beltrami, *a Bologna*).

In una Memoria inserita nel t. VII della prima serie di questi Annali (Roma 1866) ho cercato le superficie dotate della proprietà di avere le loro linee geodetiche rappresentate da equazioni lineari, ed ho trovato che questa proprietà si verifica per le sole superficie di curvatura costante e per certe variabili speciali che l'analisi del problema ha spontaneamente introdotte.

Nel presente scritto espongo i risultati molto più generali a cui mi ha condotto l'ulteriore evoluzione di quel concetto, coordinato ad alcuni principii tracciati da Riemann nell'insigne suo lavoro postumo: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, non ha guari pubblicato dal sig. Dedekind nel XIII volume delle Memorie di Gottinga. Spero che le mie ricerche possano ajutare l'intelligenza di alcune parti di questo profondo lavoro.

Certe locuzioni di cui per amore di brevità faccio uso frequente non parranno, io credo, nè stentate nè oscure a chi guardi più alla sostanza che alla forma. L'attento lettore non avrà da fare alcuno sforzo per intenderle senz'altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuir loro che un significato meramente analitico.

L'espressione differenziale

$$ds = R\,\frac{\sqrt{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}}{x}, \tag{1}$$

dove $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ sono $n+1$ variabili legate dall'equazione

$$x^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2,$$

mentre R ed a sono due costanti, può risguardarsi come rappresentante l'elemento lineare, ossia la distanza di due punti infinitamente vicini, in uno spazio di n dimensioni, ciascun punto del quale è definito da un sistema di valori delle n coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$. La forma di quel-l'espressione determina la natura di questo spazio.

Ponendo per brevità

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2},$$

le linee geodetiche dello spazio in quistione sono quelle che soddisfanno all'equazione

$$\delta \int \frac{\Omega}{x} = 0,$$

colla condizione $x\delta x + x_1 \delta x_1 + \cdots + x_n \delta x_n = 0$. Mercè le solite trasformazioni della variazione dell'integrale, la prima equazione può svilupparsi così:

$$\int \left\{ \delta x \left[\frac{\Omega}{x^2} + d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)\right] + \delta x_1 . d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right) + \cdots + \delta x_n . d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right) \right\} = 0,$$

e, stante la relazione che vincola le variazioni $\delta x, \delta x_1, \cdots \delta x_n$, dà luogo alle equazioni seguenti:

$$\frac{\Omega}{x^2} + d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right) = kx, \quad d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right) = kx_1, \cdots d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right) = kx_n,$$

dove k è un fattore da determinare. Ora, moltiplicando queste equazioni ordinatamente per $x, x_1, \ldots x_n$ e sommando, si ha

$$d\left(\frac{x dx + x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n}{x\Omega}\right) = k(x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

quindi, con riguardo alla (2), $k = 0$; epperò

$$d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right) + \frac{\Omega}{x^2} = 0, \tag{3}$$

$$dx_1 = c_1 x\Omega, \quad dx_2 = c_2 x\Omega, \ldots, \quad dx_n = c_n x\Omega, \tag{4}$$

dove $c_1, c_2, \ldots c_n$ sono costanti. Queste ultime n equazioni, quadrate e sommate, danno

$$\Omega = -\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}}, \tag{5}$$

dove

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c^2_n}.$$

Questo valore di Ω rende identica la (3), della quale è perciò inutile tener conto; mentre le (4), colla eliminazione di $x\Omega$ e susseguente integrazione, danno

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2 \dots \quad x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}.$$

Dunque le linee geodetiche dello spazio considerato sono rappresentate da $n-1$ equazioni lineari fra le n coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$, a simiglianza di ciò che ha luogo nel piano e nello spazio ordinario quando si fa uso di coordinate cartesiane, e nelle superficie di curvatura costante quando si fa uso delle variabili u, v della citata Memoria. Fra i sistemi di linee geodetiche sono da notarsi specialmente quelli che si ottengono eguagliando tutte le coordinate, tranne una, ad altrettante costanti. Per ogni punto dello spazio passa una geodetica di ciascuno di questi sistemi, cui appartengono gli stessi assi coordinati delle x_1, delle $x_2, \dots$, delle x_n, per ciascuno dei quali le restanti coordinate sono tutte nulle: conviene chiamarli sistemi delle x_1, delle $x_2, \dots$ delle x_n.

Per ottenere la lunghezza dell'arco geodetico ρ compreso fra due punti dati, si osservi che per la (5) si ha

$$d\rho = R\frac{\Omega}{x} = -\frac{R\,dx}{x\sqrt{1-c^2x^2}},$$

donde

$$cx = \frac{1}{\cosh\frac{\rho-\rho_0}{R}},$$

ρ_0 essendo una costante arbitraria ed x la funzione $\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x^2_n}$. Indicando con $x_1^0, x_2^0, \dots x^0_n$ i valori delle coordinate al punto $\rho = 0$, cioè all'origine dell'arco, e con x^0 il corrispondente valore della funzione x, si ha

$$cx^0 = \frac{1}{\cosh\frac{\rho_0}{R}}, \tag{6}$$

e quindi, eliminando c,

$$x = \frac{x^0 \cosh \frac{\rho_0}{R}}{\cosh \frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

equazione cui si può dare la forma

$$\frac{x^2 \operatorname{senh}^2 \frac{\rho}{R}}{\cosh^2 \frac{\rho_0}{R}} = 2xx^0 \cosh \frac{\rho}{R} - x^2 - x^{0^2}. \tag{7}$$

D'altra parte, avendosi dalle equazioni precedenti

$$x\Omega = \frac{x^2 d\rho}{R} = \frac{1}{c^2} d \operatorname{tgh} \frac{\rho - \rho_0}{R},$$

le (4) danno

$$x_1 = a_1 + \frac{c_1}{c^2} \operatorname{tgh} \frac{\rho - \rho_0}{R}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{c_2}{c^2} \operatorname{tgh} \frac{\rho - \rho_0}{R}, \qquad \text{ecc.},$$

ovvero, sostituendo alle costanti $a_1, a_2, \ldots$ le $x_1^0, x_2^0, \ldots$,

$$x_1 - x_1^0 = c_1 xx^0 \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}, \qquad x_2 - x_2^0 = c_2 xx^0 \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}, \qquad \text{ecc.},$$

donde, quadrando e sommando,

$$2(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x^0{}_n) - x^2 - x^{0^2} = c^2 x^2 x^{0^2} \operatorname{senh}^2 \frac{\rho}{R}.$$

Quest'equazione, in virtù delle (6) (7), dà finalmente

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x^0{}_n}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x^2{}_n)(a^2 - x_1^{0^2} - x_2^{0^2} - \cdots - x^0{}_n{}^2)}}, \tag{8}$$

e questa è la formola generale che porge la lunghezza di un arco geodetico in funzione delle coordinate dei suoi termini.

Supposte **reali** le variabili $x, x_1, \ldots x_n$ e le costanti R, a, il **limite** dello spazio di n dimensioni qui considerato è lo **spazio** di $n-1$ **dimensioni** dato dall'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2{}_n = a^2. \tag{9}$$

Dentro questo limite, cioè per

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<a^2,$$

il primo spazio è continuo e semplicemente connesso. Dalla (8) risulta poi che i punti appartenenti allo spazio limite sono tutti a distanza infinita.

Due elementi lineari ds, δs uscenti da uno stesso punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e producenti rispettivamente le variazioni $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ e $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_n$, sono fra loro ortogonali quando soddisfanno la relazione

$$dx\,\delta x+dx_1\,\delta x_1+\cdots+dx_n\,\delta x_n=0. \tag{10}$$

Consideriamo per esempio lo spazio di $n-1$ dimensioni $x_1=0$ e supponiamo che da un punto di esso escano due elementi lineari, l'uno ds esistente nello spazio stesso, l'altro δs diretto secondo la geodetica del sistema x_1 passante per questo punto. In tal caso si ha

$$x_1=0,\ dx_1=0,\ \delta x_2=\delta x_3=\cdots=\delta x_n=0,\ \delta x=0,$$

epperò la condizione di ortogonalità è soddisfatta: vale a dire che ciascuna geodetica del sistema x_1 (o più in generale x_r) è ortogonale allo spazio $x_1=0$ (risp. $x_r=0$) nel punto in cui lo incontra. In particolare dunque all'origine delle coordinate le direzioni degli n assi sono tutte ortogonali fra loro. Si dimostra con eguale facilità che l'asse x_r è ortogonale a tutti gli spazii $x_r=$cost. Le n geodetiche condotte da un punto arbitrario dello spazio nei sistemi $x_1, x_2, \ldots x_n$ riescono perpendicolari agli spazii di $n-1$ dimensione $x_1=0$, $x_2=0, \ldots x_n=0$, analogamente a quel che ha luogo nel piano e nell'ordinario spazio quando si usano coordinate rettangole. Chiamando $X_1, X_2, \ldots X_n$ le porzioni di queste geodetiche comprese fra il punto dato e gli spazii cui sono rispettivamente perpendicolari, si ha

$$X_r=\frac{R}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+x_r^2}+x_r}{\sqrt{x^2+x_r^2}-x_r}. \tag{11}$$

Consideriamo il completo sistema delle geodetiche uscenti dal punto determinato $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$. Esso è rappresentato dal seguente sistema d'equazioni differenziali, l'ultima delle quali è una conseguenza delle prime,

$$\frac{dx_1}{x_1-x_1^0}=\frac{dx_2}{x_2-x_2^0}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n-x_n^0}=\frac{dx}{x-\dfrac{z}{x}},$$

dove si è posto per brevità

$$z = a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x^0{}_n.$$

La condizione (10) fornisce come equazione differenziale dello spazio di $n-1$ dimensioni ortogonale a tutte queste geodetiche la seguente

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

donde integrando

$$\frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x^0{}_n}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x^2{}_n}} = C. \tag{12}$$

Confrontando questa equazione colla (8) si vede che lo spazio definito da essa è anche il luogo dei punti equidistanti dal punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots x^0{}_n)$, e chiamando ρ la distanza costante si ha

$$C = \sqrt{a^2 - x_1^{0^2} - x_2^{0^2} - \cdots - x^0{}_n{}^2} \, . \cosh \frac{\rho}{R} = x^0 \cosh \frac{\rho}{R}\,.$$

Siccome l'equazione (12), pel modo in cui fu ottenuta, sussiste anche quando il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots x^0{}_n)$ va all'infinito, cioè quando x^0 diventa nullo e ρ infinito, così si vede che in questo caso il prodotto $x^0 \cosh \frac{\rho}{R}$ converge verso un limite finito, che non può differire da quello del prodotto $\frac{1}{2} x^0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Quindi scrivendo $\rho' - \rho$ invece di ρ e facendo andare all'infinito il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots x^0{}_n)$, mentre ρ rimane costante, si ottiene al limite l'equazione

$$\frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x^0{}_n}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x^2{}_n}} = k e^{-\frac{\rho}{R}}, \tag{13}$$

dove

$$x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + \cdots + x_n{}^{0^2} = a^2,$$

e quest'equazione rappresenta un sistema di spazii ad $n-1$ dimensioni, che possono essere definiti come le traiettorie ortogonali di tutte le geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito $(x_1^0, x_2^0, \ldots x^0{}_n)$. Le varie traiettorie sono distinte fra loro dai valori del parametro ρ, che esprime la distanza costante fra una qualunque di esse e la trajettoria determinata $\rho = 0$. La costante k è data quando è dato un punto di quest'ultima trajettoria.

Ora si dimostrerà che la natura dello spazio fin qui considerato è tale che, limitandone una porzione qualunque e trasportandola in una posizione diversa da quella che prima occupava, si può sempre ottenerne la sovrapposizione con un'altra porzione corrispondente dello stesso spazio. Per concepire come ciò possa accadere si immagini disseminato in quella porzione di spazio un numero ∞^n di punti, infinitamente vicini tra loro, e riuniti a due a due dagli archetti geodetici che ne misurano le mutue distanze. Ciò posto, la sovrapponibilità della quale si tratta consiste in questo, che in ogni altra parte dello spazio considerato si possono disseminare dei punti, ad esso appartenenti, i quali hanno fra loro le medesime distanze mutue e la medesima disposizione che avevano quelli della porzione immaginata; dimodochè il reticolo n^{plice} formato dalle linee congiungenti i punti contigui di questa può essere completamente identificato col reticolo analogo dell'altra porzione, senza che i legami di essi devano essere in alcun punto rotti o duplicati. Le alterazioni che il primo reticolo deve subire per identificarsi col secondo non possono del resto riescire apparenti che quando si considerano l'uno e l'altro in rapporto ad uno spazio avente più di n dimensioni: finchè ciò non accade i due reticoli presentano il carattere dell'eguaglianza per congruenza o per simmetria. Quest'ultima osservazione si collega con un ingegnoso riflesso di MOEBIUS, nel *Barycentrische Calcul*, p. 184.

Suppongasi dapprima riferito lo spazio ad un nuovo sistema di assi geodetici delle $y_1, y_2, \dots y_n$, aventi la stessa origine dei primi ed ortogonali fra loro al pari di questi. Siccome tutte le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari, così è chiaro che le sostituzioni per passare dalle variabili x alle variabili y devono essere lineari: ma è facile convincersi inoltre che la loro forma dev'esser quella denominata ortogonale. Infatti la forma (8) mostra che la distanza dall'origine ad un punto qualunque $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dipende solamente dalla funzione $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Si avrà dunque

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2,$$

epperò

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{y^2}.$$

Questa identità di forma dei due elementi rende manifesto che due reticoli in cui i vertici corrispondenti fossero legati dalle equazioni

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots \quad x_n = y_n$$

sarebbero perfettamente sovrapponibili. Ora è chiaro che il secondo di questi reticoli non sarebbe altro che il primo girato intorno all' origine insieme coi primitivi assi, fino a che questi prendessero le direzioni dei nuovi. È dunque provato che la sovrapponibilità di cui si parlava ha effettivamente luogo quando lo spostamento si riduce ad una semplice rotazione intorno all' origine. Anzi, siccome si potrebbe porre più generalmente

$$x_1 = \pm y_1, \quad x_2 = \pm y_2, \dots \quad x_n = \pm y_n$$

con libertà di combinare i segni in modo qualunque, così è chiaro che oltre l'eguaglianza per congruenza vi sono più specie d'eguaglianza per simmetria.

Poichè un cambiamento d' assi, restando fissa l'origine, non muta la forma dell'elemento lineare, resta ora a cercare l'effetto di un cambiamento d'origine. E poichè, preso nello spazio un punto qualunque, si può già supporre diretto verso di esso l'asse delle x_1, così è lecito prendere la nuova origine su questo stesso asse, nel punto $x_1 = a_1$. La nuova transformazione da eseguire consiste dunque nel mantenere l'asse delle x_1 ed i precedenti sistemi coordinati delle $x_2, x_3, \dots x_n$, e nel sostituire al sistema delle geodetiche perpendicolari allo spazio $x_1 = 0$ quello delle geodetiche perpendicolari allo spazio $x_1 = a_1$ fra le quali si trova il primitivo asse delle x_1. Le nuove coordinate si chiameranno $y_1, y_2, \dots y_n$ e si chiamerà b una costante avente, rispetto a queste, lo stesso ufficio della costante a rispetto alle x. Così si denomineranno $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ le geodetiche analoghe alle $X_1, X_2, \dots X_n$ e si avrà manifestamente, come nella (11),

$$Y_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{y^2 + y_r^2} + y_r}{\sqrt{y^2 + y_r^2} - y_r}.$$

Ciò posto, si osservi che, rimanendo invariati i primitivi sistemi delle $x_2, x_3, \dots x_n$, si ha dapprima, per essi, $X_r = Y_r$ e quindi

$$\frac{x_r}{x} = \pm \frac{y_r}{y} \quad \text{per} \quad r = 2, 3, \dots n. \tag{14}$$

Quadrando e sommando prima queste equazioni, poi le loro differenziali, si hanno le due formole

$$\left.\begin{aligned}(a^2-x_1^2)\,y^2 &= (b^2-y_1^2)\,x^2,\\ \frac{\Omega^2}{x^2}+d\left(\frac{a}{x}\right)^2-d\left(\frac{x_1}{x}\right)^2 &= \frac{\Theta^2}{y^2}+d\left(\frac{b}{y}\right)^2-d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2,\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

dove $\Theta^2=dy^2+dy_1^2+\cdots+dy_n^2$. In secondo luogo se si considerano, sull'asse delle x_1, le porzioni X_1^0, Y_1^0 intercette fra le due origini e il punto in cui l'asse stesso è intersecato dallo spazio $x_1=x_1$, si ha

$$X_1^0=\frac{R}{2}\log\frac{a+x_1}{a-x_1},\qquad Y_1^0=\frac{R}{2}\log\frac{b+y_1}{b-y_1},$$

mentre la distanza delle due origini è data da

$$\frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

È chiaro dunque che bisogna porre

$$X_1^0=Y_1^0+\frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1},$$

cioè

$$\frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)}=\frac{b+y_1}{b-y_1}$$

donde

$$y_1=\frac{ab(x_1-a_1)}{a^2-a_1x_1},\qquad x_1=\frac{a(ay_1+a_1b)}{ab+a_1y_1}.\tag{16}$$

Queste due formole danno luogo alle relazioni

$$a^2-x_1^2=\frac{a^2(a^2-a_1^2)(b^2-y_1^2)}{(ab+a_1y_1)^2},\qquad b^2-y_1^2=\frac{b^2(a^2-a_1^2)(a^2-x_1^2)}{(a^2-a_1x_1)^2},\tag{17}$$

le quali, combinate opportunamente colla prima delle (15), conducono a queste altre due:

$$\frac{a}{x}\sqrt{a^2-a_1^2}=a\,\frac{b}{y}+a_1\,\frac{y_1}{y},$$

$$\frac{x_1}{x}\sqrt{a^2-a_1^2}=a_1\,\frac{b}{y}+a\,\frac{y_1}{y},$$

donde

$$d\left(\frac{a}{x}\right)^2 - d\left(\frac{x_1}{x}\right)^2 = d\left(\frac{b}{y}\right)^2 - d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2.$$

In virtù di quest'ultima equazione, la seconda delle (15) dà

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx^2_n}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy^2_n}{y^2},$$

donde consegue che l'espressione dell'elemento lineare conserva la stessa forma anche mutando l'origine, e quindi, per un ragionamento analogo a quello di pocanzi, che la sovrapponibilità ha luogo in ogni caso, poichè basterebbe ora far uso di una nuova sostituzione ortogonale per rendere i nuovi assi affatto indipendenti dai primi.

Le (14) (15, 1ª) (17) danno

$$x_r = \pm \frac{a y_r \sqrt{a^2 - a_1^2}}{ab + a_1 y_1} \qquad \text{per } r = 2, 3, \ldots n,$$

da cui e dalla (16, 2ª) si conclude che la più generale trasformazione d'assi ha luogo per mezzo di sostituzioni omografiche.

Prescindendo da questa trasformazione delle coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ in altre della stessa specie, vi sono altre trasformazioni che danno all'elemento una forma notabile. Quella che si potrebbe chiamar polare si ottiene ponendo primieramente

$$x_1 = r\lambda_1, \quad x_2 = r\lambda_2, \ldots x_n = r\lambda_n,$$

colla condizione $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda^2_n = 1$. Di qui si ricava

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx^2_n = dr^2 + r^2 d\Lambda^2,$$

dove $d\Lambda^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \cdots + d\lambda^2_n$, epperò

$$ds^2 = \left(\frac{R\,a\,dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2}\, d\Lambda^2.$$

Ma chiamando ρ la distanza geodetica dall'origine, o polo, al punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, si ha

$$\frac{R\,a\,dr}{a^2 - r^2} = d\rho, \qquad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \operatorname{sen h}^2 \frac{\rho}{R},$$

dunque

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}\right)^2 d\Lambda^2, \tag{18}$$

forma che giustifica la denominazione di **polare**, poichè in essa le variabili sono il raggio vettore ρ, e le quantità λ che definiscono la direzione di questo raggio.

Da questa forma si passa facilmente ad un' altra che si potrebbe chiamare **stereografica**, e che si ottiene ponendo

$$\xi_r = 2R \operatorname{tg h} \frac{\rho}{2R} \cdot \lambda_r,$$

dove ρ e λ_r hanno i significati di pocanzi. Di qui si cava

$$\lambda_r d\rho + R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R} \cdot d\lambda_r = d\xi_r. \cos \mathrm{h}^2 \frac{\rho}{2R},$$

$$\cos \mathrm{h}^2 \frac{\rho}{2R} = \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi^2_n}{4R^2}},$$

e quindi, quadrando e sommando le equazioni che risultano dalla penultima col fare $r = 1, 2, \ldots n$, con riguardo all'ultima ed alla (18),

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \cdots + d\xi^2_n}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi^2_n}{4R^2}}. \tag{19}$$

Questa forma è stata indicata senza dimostrazione da Riemann, nella citata Memoria postuma (II, § 4).

Riemann ha indicato un altro sistema di coordinate, dal quale egli trae la misura delle curvature di un dato spazio intorno ad un punto (II, § 2). Queste coordinate sono per certi rispetti analoghe alle ortogonali cartesiane, poichè si ottengono dalle polari col porre

$$z_1 = \rho\lambda_1, \quad z_2 = \rho\lambda_2, \ldots, \; z_n = \rho\lambda_n.$$

Da queste si ha

$$d\lambda_r = \frac{\rho\, dz_r - z_r\, d\rho}{\rho^2},$$

epperò, quadrando e sommando,

$$d\Lambda^2 = \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z^2_n)(dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz^2_n) - (z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + \cdots + z_n dz_n)^2}{\rho^4}$$

ossia

$$d\Lambda^2 = \frac{\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^4},$$

dove il segno $\sum$ comprende tutte le combinazioni binarie degli indici. Si ha pure

$$d\rho^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz^2_n - \frac{\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^2},$$

laonde, sostituendo nella (18), si ottiene finalmente

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz^2_n + \frac{1}{\rho^2}\left\{\left(\frac{R}{\rho}\operatorname{senh}\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1\right\}\sum(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2, \quad (20)$$

ossia

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz^2_n + \frac{1}{3R^2}\left(1 + \frac{2\rho^2}{15R^2} + \cdots\right)\sum(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2, \quad (20)'$$

dove $\rho^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots z^2_n$, e dove la serie convergente posta fra parentesi procede secondo le potenze crescenti di $\frac{\rho}{R}$ · Per piccolissimi valori di ρ si può prendere semplicemente

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz^2_n + \frac{1}{3R^2}\sum(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2.$$

Ora considerando un elemento di superficie passante per l'origine, si può fare in modo (con un'opportuna scelta degli assi $z_1, z_2, \ldots$, ossia $x_1, x_2 \ldots$) che esso coincida con quello della superficie $z_3 = 0$, $z_4 = 0, \ldots z_n = 0$, alla quale corrisponde, nelle vicinanze dell'origine, l'elemento lineare

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{1}{3R^2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2;$$

e poichè l'area del triangolo infinitesimo che ha i vertici nei punti (0, 0), (z_1, z_2), (dz_1, dz_2), dei quali il secondo è infinitamente vicino all'origine, è $= \frac{1}{2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, se ne conclude che $\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$ è eguale al quadruplo del quadrato dell'area del triangolo infinitesimo che ha i vertici nei punti $(0, 0, \ldots 0)$, $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, $(dz_1, dz_2, \ldots dz_n)$ il secondo dei quali è infinitamente vicino all'origine. Se dunque si divide la somma dei termini di 4° ordine nella (20)' per il quadrato dell'area del triangolo infinitesimo anzidetto, si ha il quoziente $\frac{4}{3R^2}$; e poichè, secondo la definizione di RIEMANN, tale quoziente moltiplicato per $-\frac{3}{4}$ esprime la misura della curvatura nel senso dell'elemento superficiale anzidetto, si vede che nello spazio qui considerato tale misura è costante ed $= -\frac{1}{R^2}$ in ogni direzione intorno a ciascun punto (*). Egli è perciò che questo spazio può acconciamente esser chiamato di curvatura costante.

Una quarta transformazione, importantissima, è quella che si ottiene introducendo n nuove variabili indipendenti $\eta, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ e ponendo

$$\frac{Rx}{a-x_n} = \eta, \quad \frac{Rx_1}{a-x_n} = \eta_1, \ldots \quad \frac{Rx_{n-1}}{a-x_n} = \eta_{n-1}.$$

Se ne trae immediatamente

$$ds = R\,\frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + \cdots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta}, \tag{21}$$

(*) Per vedere la coincidenza della definizione di RIEMANN con quella di GAUSS, si rammenti che, secondo GAUSS, la misura della curvatura della superficie definita dall'elemento

$$ds^2 = d\rho^2 + m^2 d\theta^2$$

è espressa da $-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \rho^2}$, m essendo funzione in generale di ρ e di θ. Se la variabile ρ è la lunghezza di un arco geodetico uscente da un punto della superficie nel quale questa abbia una curvatura ordinaria, la funzione m è della forma $m = \rho(1 + m'\rho^2)$ dove m' è una funzione che per $\rho = 0$ non è nè nulla nè infinita (veggansi p. es. questi Annali, p. 358 del tomo prec.) e quindi la misura della curvatura nel punto $\rho = 0$ è $= -6m'_0$. Ciò posto, le coordinate di RIEMANN

$$z_1 = \rho\cos\theta, \qquad z_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

danno all'elemento testè considerato la forma

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}\left(\frac{z_1\,dz_2 - z_2\,dz_1}{2}\right)^2,$$

epperò la misura della curvatura nel punto $\rho = 0$ è, secondo RIEMANN, $-\frac{3}{4}\lim\frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}$. Ora $\lim\frac{m^2-\rho^2}{\rho^4}$ (per $\rho = 0$) $= 2m'_0$; dunque le due espressioni coincidono.

È chiaro che m'_0 cioè $(m')_{\rho=0}$ dev'essere una quantità indipendente da θ.

donde si conclude intanto che la formola (1) rappresenta l'elemento lineare di uno spazio di curvatura costante anche quando le $n+1$ variabili $x, x_1, \ldots x_n$ sono indipendenti fra loro e non punto legate dalla relazione (2), salvo che in questo caso il numero delle dimensioni dello spazio è $n+1$ e non sussiste più la proprietà che le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari (*). Ma una conseguenza assai notabile che si deduce dalla espressione (21) è che lo spazio ad $n-1$ dimensioni $\eta = \text{cost.}$ ha la sua curvatura nulla in ogni punto, poichè il suo elemento lineare ha la forma

$$ds = \text{cost.} \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \cdots + d\eta^2_{n-1}}.$$

Ed infatti, se si pon mente alla formola di Riemann (19) si vede subito che l'elemento non può ridursi ad essere la radice quadrata della somma dei quadrati di tanti differenziali esatti quante sono le dimensioni, se non si abbia $\frac{1}{R} = 0$. Lo spazio $\eta = \text{cost.}$ è dunque uno di quelli che Riemann denomina piani (II, § 1) e nei quali rientrano il piano e lo spazio ordinario, definiti dalle formole

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ora l'equazione $\eta = \text{cost.}$ ammette una molto semplice interpretazione, dietro quanto precede. Il punto all'infinito sull'asse delle x_n ha per coordinate

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, \qquad x_n = a,$$

e quindi l'equazione (13) diventa per esso

$$\frac{a - x_n}{x} = k' e^{-\frac{\rho}{R}}$$

dove $k' = \frac{k}{a}$. Dunque

$$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{R}},$$

epperò l'equazione $\eta = \text{cost.}$ equivale a quest'altra $\rho = \text{cost.}$, donde si conclude (poichè è arbitraria la direzione dell'asse delle x_n) che lo spazio ad $n-1$ dimensioni $\eta = \text{cost.}$ non è altro che una delle trajettorie ortogonali

(*) La forma (21) è stata indicata, per il caso di due sole dimensioni, dal sig. Liouville, nelle sue note all'opera di Monge, p. 600.

di tutte le geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito, cioè di un sistema di geodetiche parallele fra loro. Reciprocamente ciascuna di queste trajettorie ortogonali ha in ogni punto la curvatura nulla, epperò due qualunque di esse (appartenenti o meno al medesimo sistema) sono sovrapponibili l'una all'altra in tutti i modi possibili.

Introducendo nella (21) la variabile ρ al posto della η si ha l'altra forma equivalente

$$ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} (d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \cdots + d\eta^2_{n-1}). \tag{21$'$}$$

Si è già veduto che il complesso di $n-1$ equazioni lineari fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ rappresenta una linea geodetica. Vediamo cosa rappresenti, più in generale, il complesso di $n-m$ equazioni lineari.

Supponendo dedotte da queste equazioni le espressioni di $n-m$ coordinate in funzione delle rimanenti m, riesce manifesto che il numero dei parametri indipendenti contenuti in un tal sistema è $(m+1)(n-m)$. Si immagini ora che tutte le n coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ vengano espresse linearmente in funzione di m variabili $u_1, u_2, \ldots u_m$. Queste espressioni comprendono fra tutte $(m+1)n$ parametri, ma se si assoggettano questi parametri a verificare l'identità

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u^2_m + h^2$$

(h restando indeterminata), è chiaro che si aggiungono con ciò $\frac{m(m+1)}{2} + m$ condizioni, talchè il numero dei parametri indipendenti rimane di $(m+1)n - \frac{m(m+1)}{2} - m$. Ora questo numero eccede di $\frac{m(m-1)}{2}$ il numero $(m+1)(n-m)$; dunque le relazioni ammesse fra le x e le u, colla indicata condizione, sono tali da poter sempre tener luogo, senza restrizione alcuna, del dato sistema di $n-m$ equazioni. Ciò posto, da quelle relazioni, ponendo

$$u^2 + u_1^2 + \cdots + u^2_m = a^2 - h^2 = a'^2,$$

si deduce

$$dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx^2_n = du^2 + du_1^2 + \cdots + du^2_m,$$

$$x^2 = u^2,$$

dunque

$$ds = R \frac{\sqrt{du^2 + du_1^2 + \cdots + du^2_m}}{u}$$

colla condizione

$$u^2 + u_1^2 + \cdots + u_m^2 = a'^2.$$

Conseguentemente il luogo dei punti rappresentati dal complesso delle $n-m$ equazioni lineari fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ è uno spazio ad m dimensioni, la cui curvatura è dovunque costante ed eguale a quella dello spazio primitivo.

Così per es. $n-2$ equazioni lineari rappresentano una superficie di curvatura costante $\left(= -\frac{1}{R^2}\right)$, che conviene distinguere col nome di superficie di prim'ordine; $n-3$ rappresentano uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante $\left(= -\frac{1}{R^2}\right)$; ecc.

Una linea geodetica reale è individuata senza ambiguità da due punti dello spazio: nelle ipotesi fin qui ammesse non è possibile alcuna eccezione a questa proprietà.

Una superficie di prim'ordine è individuata senza ambiguità da tre punti dello spazio. Essa contiene tutta intera la geodetica che passa per due suoi punti reali, talchè se due superficie reali di prim'ordine hanno due punti reali in comune, hanno del pari in comune tutta la geodetica individuata da questi.

Un triangolo geodetico giace sempre sopra una determinata superficie di prim'ordine, la quale è individuata anche quando il triangolo è infinitesimo. Perciò se si prolungano secondo linee geodetiche tutti gli elementi lineari contenuti in uno stesso elemento di superficie, le linee geodetiche così ottenute hanno tutte un luogo geometrico che è una determinata superficie di prim'ordine.

Quando due superficie di prim'ordine si intersecano lungo una linea, necessariamente geodetica, il loro angolo è dovunque costante; cioè condotti da un punto della loro intersezione due elementi lineari normali ad essa, l'uno nella prima, l'altro nella seconda superficie, la distanza infinitesima dei loro termini è costante, se sono costanti le loro lunghezze. Infatti (*) supposto diretto l'asse x_1 secondo la comune sezione delle due superficie, le equazioni di queste possono evidentemente esser messe sotto la forma

$$(x_2 = m_2\, x_n, \quad x_3 = m_3\, x_n \ldots \quad x_{n-1} = m_{n-1}\, x_n),$$
$$(x_2 = m'_2 x_n, \quad x_3 = m'_3 x_n, \ldots \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x_n),$$

(*) La seguente dimostrazione, che poteva a rigore essere omessa, si è inserita in grazia delle formole a cui conduce.

dove le m, m' sono parametri costanti. Queste due superficie sono intersecate dallo spazio $x_1 = a_1$ secondo due geodetiche che, per una precedente osservazione, sono ortogonali all'asse x_1. I due punti di coordinate

$$(x_2 = a_1, \quad x_2 = m_2 x_n, \ldots \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n, \quad x_n = x_n),$$
$$(x_2 = a_1, \quad x_2 = m'_2 x'_n, \ldots \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x'_n, \quad x_n = x'_n),$$

giacciono rispettivamente sulla prima e sulla seconda superficie, e precisamente sulle due geodetiche anzidette, e la loro distanza ρ è data (8) dalla formola

$$\cosh\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - a_1^2 - M x_n x'_n}{\sqrt{(a^2 - a_1^2 - m^2 x^2_n)(a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2)}},$$

dove si è posto

$$m^2 = 1 + m_2^2 + \cdots + m^2_{n-1}, \quad m'^2 = 1 + m_2'^2 + \cdots + m'^2_{n-1},$$
$$M = 1 + m_2 m'_2 + \cdots + + m_{n-1} m'_{n-1}.$$

Da essa, chiamando σ, σ' le lunghezze delle due geodetiche comprese fra il punto comune $x_1 = a_1$ ed i due punti considerati, si trae

$$\cosh\frac{\sigma}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x^2_n}}, \qquad \cosh\frac{\sigma'}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

e quindi

$$\operatorname{senh}\frac{\sigma}{R} = \frac{m x_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x^2_n}}, \qquad \operatorname{senh}\frac{\sigma'}{R} = \frac{m' x'_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

valori i quali mostrano che

$$\cosh\frac{\rho}{R} = \cosh\frac{\sigma}{R}\cosh\frac{\sigma'}{R} - \frac{M}{mm'}\operatorname{senh}\frac{\sigma}{R}\operatorname{senh}\frac{\sigma'}{R}.$$

Siccome in questa formola non resta più traccia del punto a_1 preso sull'asse x_1, così si vede che da qualunque punto di questo asse si conducano nelle due superficie le geodetiche di lunghezza σ, σ', la distanza geodetica dei loro estremi è sempre costante. E poichè questa proprietà sussiste per lunghezze σ, σ' qualunque, necessariamente sussiste per lunghezze infinitesime, donde scaturisce il teorema annunciato.

Ammettendo, come già si è fatto implicitamente nel porre la condizione di ortogonalità, che i triangoli infinitesimi siano soggetti alle relazioni della ordinaria trigonometria piana, si riconosce immediatamente, rendendo infinitesime le lunghezze ρ, σ, σ', che $\frac{M}{m m'}$ è il coseno dell'angolo fatto dai primi elementi delle due geodetiche σ, σ', cioè delle due superficie. D'altra parte è facile vedere che il triangolo ora considerato può essere un triangolo geodetico interamente arbitrario; dunque fra i lati a, b, c e gli angoli opposti A, B, C di un triangolo geodetico esistente nello spazio considerato, sussiste la relazione

$$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \operatorname{senh}\frac{b}{R}\operatorname{senh}\frac{c}{R}\cos A, \tag{22}$$

insieme colle sue analoghe, la quale non differisce dalla formola fondamentale della trigonometria sferica che per il cambiamento di R in $R\sqrt{-1}$ (R raggio della sfera), rimanendo invariati i lati e gli angoli. Ciò concorda pienamente con un fatto già avvertito dal Minding (nel t. XX del Giornale di Crelle) e dimostrato dal Codazzi (negli Annali di Tortolini, 1857), se si rammenta che il triangolo geodetico qui considerato giace intieramente sopra una superficie di prim'ordine, cioè di curvatura costante negativa, rispetto alla quale esso è pure geodetico nel senso ordinario. Se si suppone retto l'angolo C, le due formole che si deducono dalla (22) colla permutazione degli elementi danno, opportunamente combinate,

$$\operatorname{tgh}\frac{a}{R} = \operatorname{tgh}\frac{c}{R}\cos B. \tag{23}$$

Se ora si imagina che il vertice dell'angolo A vada indefinitamente allontanandosi sul cateto b, mentre il lato a rimane invariato di posizione e di grandezza, l'ipotenusa c crescerà fino all'infinito, ed a questo limite le equazioni (22) (23) daranno

$$\cos A = 1, \qquad \operatorname{tgh}\frac{a}{R} = \cos B.$$

La prima formola insegna che $A = 0$, cioè che i due lati b, c si accostano assintoticamente, quando il vertice dell'angolo A è all'infinito; la seconda che il limite dell'angolo B non è l'angolo retto, come nel piano, ma un angolo minore di 90°, la cui grandezza dipende dalla distanza a, mediante la formola

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}} \tag{24}$$

(equivalente alla superiore). Se si chiamano parallele due geodetiche convergenti verso un medesimo punto all'infinito, come già si è fatto, si vede dunque che da un punto si possono condurre due distinte geodetiche parallele ad una geodetica data, che queste due parallele sono egualmente inclinate da una parte e dall'altra della geodetica condotta dallo stesso punto normalmente alla data, e che la loro inclinazione B sulla normale è legata alla lunghezza a di questa stessa normale mediante la relazione (24). Questo risultato s'accorda pienamente con quello che forma la base fondamentale della geometria non-euclidea, i cui principii, già famigliari a Gauss, sono stati compendiati maestrevolmente da Lobatschewsky nella *Théorie des parallèles* (trad. Hoüel), sotto una veste sintetica. La possibilità della sua costruzione col mezzo dell'ordinaria sintesi (limitatamente allo spazio di tre dimensioni) dipende in primo luogo da ciò che, come si è dimostrato, negli spazii di curvatura costante (positiva o negativa) ogni figura può essere mutata arbitrariamente di posizione senza subire alcuna alterazione nella grandezza e nella disposizione mutua dei suoi elementi contigui, possibilità da cui dipende l'esistenza delle figure eguali e quindi la validità del principio di sovrapposizione. In secondo luogo negli spazii di curvatura costante negativa le geodetiche sono caratterizzate, come la retta euclidea, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da due soli dei loro punti, talchè vige per esse l'assioma della retta. E del pari le superficie di prim'ordine sono caratterizzate, come il piano euclideo, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da tre soli dei loro punti, talchè vige per esse l'assioma del piano. Inoltre le relazioni delle linee geodetiche colle superficie di prim'ordine e di queste fra loro, sono le stesse di quelle delle rette coi piani e dei piani fra loro, poichè una di quelle superficie contiene tutta una geodetica tosto che ne contiene due punti, e due di quelle superficie si segano secondo una geodetica (e sotto un angolo costante) se s'incontrano in un solo punto. Da questa corrispondenza consegue che se si ammettono gli assiomi fondamentali della geometria ordinaria, escludendo il postulato delle parallele, i teoremi che si ottengono sono eguali a quelli della geometria dello spazio di curvatura costante negativa, poichè questa seconda geometria ha le stesse basi di quella, tranne il postulato anzidetto. I teoremi di essa sussistono per ogni valore della curvatura, che è il parametro della geometria non-euclidea (la quale io propongo di denominare pseudosferica), e le sole misure prese nello spazio obbiettivo possono far riconoscere che il valore speciale della sua curvatura è zero, cioè che $R = \infty$ per esso; nello stesso modo che per sole misure si può assegnare la curvatura di una sfera data, che è il parametro della geometria sferica.

Effettivamente si può verificare che la teoria di LOBATSCHEWSKY coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa. Chi ami vedere sviluppata questa corrispondenza ne potrà trovare altrove una più minuta esposizione (*). Qui, per non fare una troppo lunga digressione, mi limiterò ad alcuni cenni sommarii.

La planimetria non–euclidea non è altro che la geometria delle superficie di curvatura costante negativa. Le circonferenze di quella corrispondono alle linee che tagliano ortogonalmente tutti i raggi geodetici uscenti da uno stesso punto della superficie, ossia alle circonferenze geodetiche. Il perimetro ne è dato in funzione del raggio geodetico r dalla formola

$$\pi R\left(e^{\frac{r}{R}} - e^{-\frac{r}{R}}\right),$$

come aveva già enunciato GAUSS. Per tre punti della superficie non si può sempre far passare una circonferenza geodetica avente il centro in un punto reale. Gli oricicli o curve–limiti di LOBATSCHEWSKY non sono altro che le circonferenze geodetiche il cui centro è all'infinito, cioè i cui raggi formano un sistema di geodetiche parallele. Facendo nella (21)' $n = 2$ si ha

$$ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} d\eta^2 ,$$

espressione dell'elemento lineare della superficie di curvatura costante negativa riferita ad un sistema di oricicli concentrici ed ai loro raggi. La forma di quest'espressione insegna che gli oricicli possono diventare, mercè una flessione opportuna della superficie, i paralleli della superficie di rotazione il cui meridiano è la curva delle tangenti di lunghezza costante $= R$.

La stereometria non–euclidea non è altro che la geometria degli spazii a tre dimensioni di curvatura costante negativa. Si è già detto a che corrispondano, in questa geometria, le rette ed i piani. Alle superficie sferiche corrispondono le superficie che tagliano ortogonalmente tutti i raggi geodetici uscenti da uno stesso punto, cioè le sfere geodetiche. Anche qui può

(*) Si vegga il Giornale Matematico di Napoli, settembre-ottobre 1868, dove le particolarità svolte per il caso di due dimensioni si possono agevolmente ripetere per quello di tre, massime se si tien conto dei risultati del presente scritto e se si ricorre ad una sfera ausiliare.

darsi che per tre punti, e molto più per quattro, non si possa far passare una sfera geodetica col centro in un punto reale. Le orisfere o superficie-limiti di LOBATSCHEWSKY (*) non sono altro che le sfere geodetiche il cui centro è all'infinito, cioè i cui raggi formano un sistema di geodetiche parallele dello spazio di curvatura costante negativa. Facendo nella (21) $n=3$ si ha

$$ds = R\,\frac{\sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+d\eta_2^2}}{\eta} \tag{25}$$

dove

$$\frac{Rx}{a-x_3}=\eta, \qquad \frac{Rx_1}{a-x_3}=\eta_1, \qquad \frac{Rx_2}{a-x_3}=\eta_2,$$

e reciprocamente

$$x_1=\frac{2aR\eta_1}{\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2+R^2}, \qquad x_2=\frac{2aR\eta_2}{\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2+R^2},$$

$$x_3=\frac{a(\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2-R^2)}{\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2+R^2}.$$

La formola (25) rappresenta l'elemento lineare dello spazio non-euclideo riferito ad un sistema di orisfere concentriche ed a quello dei loro raggi. La forma di questo elemento insegna che ogni orisfera, essendo rappresentata da $\eta=\text{cost.}$, è una superficie di curvatura nulla, poichè il suo elemento lineare ha la forma

$$ds=\text{cost.}\ \sqrt{d\eta_1^2+d\eta_2^2}\,;$$

e che le variabili η_1, η_2 sono le coordinate rettangole dei suoi punti. Una superficie di prim'ordine

$$lx_1+mx_2+nx_3+p=0$$

è rappresentata in coordinate η, η_1, η_2 dall'equazione

$$2aR(l\eta_1+m\eta_2)+(an+p)(\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2)=(an-p)R^2,$$

epperò taglia l'orisfera (per la quale $\eta=\text{cost.}$) secondo un cerchio. Questo si riduce ad una retta solamente quando $p=-an$, cioè quando l'equazione

(*) Ossia le superficie F di J. BOLYAI.

della superficie di prim' ordine ha la forma

$$lx_1 + mx_2 + n(x_3 - a) = 0,$$

il che accade quand' essa è una superficie diametrale dell' orisfera, ossia passa pel centro (all' infinito) di questa. In questo caso la linea d' intersezione è evidentemente un oriciclo di questa superficie diametrale, mentre rispetto all' orisfera è tale che si converte in una retta quando questa venga distesa secondo un piano. Di qui emerge che il triangolo tracciato sopra un' orisfera da tre superficie diametrali è in sostanza un triangolo geodetico esistente in una superficie di curvatura nulla, il quale perciò soddisfa a tutte le relazioni dell' ordinaria trigonometria piana, poichè è esattamente applicabile sopra un triangolo rettilineo.

Così tutti i concetti della geometria non–euclidea trovano un perfetto riscontro nella geometria dello spazio di curvatura costante negativa. Solamente fa d'uopo osservare che mentre quelli relativi alla semplice planimetria ricevono in tal modo un' interpretazione vera e propria, poichè diventano costruibili sopra una superficie reale, quelli all'incontro che abbracciano tre dimensioni non sono suscettibili che di una rappresentazione analitica, poichè lo spazio in cui tale rappresentazione verrebbe a concretarsi è diverso da quello cui generalmente diamo tal nome. Per lo meno l'esperienza non sembra poter essere messa d'accordo coi risultati di questa geometria più generale, se non si suppone infinitamente grande la costante R, cioè nulla la curvatura dello spazio; il che per altro potrebbe non essere dovuto che alla piccolezza dei triangoli che noi possiamo misurare, ossia alla piccola estensione dello spazio a cui le nostre osservazioni si estendono, non altrimenti da ciò che accade per le misure prese sopra una piccola parte di superficie terrestre, la precisione delle quali non è sufficiente a mettere in evidenza la sfericità del globo.

Fin qui non si è parlato che di spazii ad n dimensioni la cui curvatura è costante, ma negativa; del che è causa l'aversi avuto principalmente in vista il ravvicinamento dei concetti ad essi relativi con quelli della geometria non–euclidea, rispetto alla quale l'ipotesi opposta ha minore interesse. Nondimeno se ne diranno qui alcune poche cose.

L' elemento lineare

$$ds = R\,\frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx^2}}{x} \tag{26}$$

dove

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

appartiene ad uno spazio di n dimensioni la cui curvatura è dovunque costante ed $= \frac{1}{R^2}$. Esso si ottiene da (1) mutando R, a ed x in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, e tutte le proprietà e le equazioni fondate sopra mere trasformazioni analitiche dell'elemento (1) valgono evidentemente, coi cambiamenti indicati, anche per quest'altro. Per es. la (8) si muta nella seguente

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \cdots + x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)(a^2 + x_1^{0^2} + \cdots + x_n^{0^2})}}, \tag{27}$$

formola che dà per ρ un valore reale, qualunque siano i valori reali di $x_1, x_2, \ldots x_n$; $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$. È chiaro che per questi spazii sussiste integralmente il teorema della sovrapponibilità di due loro porzioni qualunque.

Se nella (26) si suppongono reali le variabili $x, x_1, \ldots x_n$ e le costanti R, a, i valori ammissibili per le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ non hanno limite alcuno, e possono variare fra $-\infty$ e $+\infty$. Per tutti i valori reali di queste coordinate lo spazio è continuo e semplicemente connesso, ma non infinito (Riemann, III, § 2), perchè se si fa nella (27)

$$x_1^0 = \lambda_1 \tau, \quad x_2^0 = \lambda_2 \tau, \ldots \quad x_n^0 = \lambda \tau,$$

dove $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$, si ha per $\tau = \infty$

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}},$$

formola che dà per ρ un valore finito e determinato. Le linee geodetiche continuano ad essere rappresentate da equazioni lineari, ma, stante l'ammissibilità dei valori infiniti per le coordinate, il principio che due punti individuano senza ambiguità una geodetica cessa d'esser vero senza restrizione. Infatti siano

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \ldots \quad \text{ecc.}$$

le equazioni d'una geodetica. Finchè uno almeno dei punti pei quali essa deve passare ha le sue coordinate finite, i coefficienti possono esser tutti determinati senza ambiguità. Ma se ambedue i punti hanno coordinate infinite bisogna mettere le equazioni sotto la forma

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b'_1}{x_n}, \qquad \frac{x_2}{x_n} = b_2 + \frac{b'_2}{x_n}, \cdots \quad \text{ecc.}$$

e sostituire ai primi membri i valori limiti a cui convergono nei due punti. Se questi limiti sono eguali in entrambi, i valori dei secondi coefficienti restano indeterminati e la linea geodetica non è più unica ed individuata. Se poi i limiti sono diversi le coordinate della linea geodetica sono infinite in ogni punto.

Le considerazioni che hanno condotto all'equazione (13) non sono applicabili agli spazii di curvatura costante positiva, poichè non esistono, per questi, punti all'infinito. Quindi gli enti rappresentati da quella equazione non hanno riscontro in questi nuovi spazii, come non lo hanno le geodetiche reciprocamente parallele.

Si vede che la geometria degli spazii di curvatura costante positiva (che può acconciamente esser chiamata geometria sferica in senso largo, stantechè, come insegna l'equazione (22), i triangoli geodetici vi soggiacciono alle leggi della trigonometria sferica), differisce molto notabilmente dalla pseudosferica, sebbene abbia con questa in comune l'esistenza delle figure eguali. Del resto la geometria pseudosferica conduce spontaneamente a considerare gli spazii di curvatura costante positiva. Infatti ponendo nella (26)

$$\frac{a}{x} = y, \qquad \frac{x_1}{x} = y_1, \ldots, \frac{x_n}{x} = y_n,$$

si trova

$$ds = R\sqrt{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}$$

colla condizione

$$y^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1,$$

risultato il quale, posto a riscontro colla equazione (18) in cui siasi fatto $\rho =$ cost. insegna che le sfere geodetiche di raggio ρ nello spazio ad n dimensioni di curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ sono spazii ad $n-1$ dimensioni di curvatura costante positiva $\left(\frac{1}{R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}}\right)^2$. Quindi la geometria sferica può risguardarsi come contenuta nella pseudosferica.

Bologna, agosto 1868.

Intorno ad alcune forme di numeri primi.

(*del prof.* A. Genocchi, *a Torino*).

Provò il celebre Dirichlet col mezzo delle serie e di considerazioni infinitesimali che la forma lineare $ax+b$, se a e b sono due numeri interi primi tra loro, contiene una infinità di numeri primi. Potendo esser utile, specialmente nella dottrina dei numeri, il considerare una medesima questione in diversi aspetti, dimostrerò qui alcuni casi particolari dello stesso teorema con un metodo più semplice e anzi elementare che condurrà insieme ad alcune proprietà notabili di certe funzioni.

1° Supposto k un numero intero e positivo, facciamo

$$(a+\sqrt{b})^k = A_k + B_k\sqrt{b}, \tag{1}$$

intendendo con A_k e B_k due funzioni intere di a e b.

Si avrà nello stesso tempo $(a-\sqrt{b})^k = A_k - B_k\sqrt{b}$, e quindi

$$A_k = \frac{(a+\sqrt{b})^k + (a-\sqrt{b})^k}{2}, \qquad B_k = \frac{(a+\sqrt{b})^k - (a-\sqrt{b})^k}{2\sqrt{b}}; \tag{2}$$

di più, ponendo

$$r = a^2 - b, \qquad z = 2(a^2+b), \tag{3}$$

si avrà

$$A^2_k - bB^2_k = r^k, \tag{4}$$

$$2(A^2_k + bB^2_k) = z^k - kr^2z^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1.2}r^4z^{k-4} - \quad \text{ecc.} \tag{5}$$

Siano a e b due numeri interi; saranno tali anche A_k e B_k; e se A_k e bB_k hanno un fattor primo comune, esso per la (4) sarà divisore anche di r, e quindi per la (5) sarà parimente divisore di z; dunque un tal fattore sarà

2 oppure dividerà insieme a^2+b e a^2-b, per ciò anche $2a^2$ e $2b$, ossia a e b. Adunque se a e b sono primi fra loro, e l'uno pari, e l'altro impari, anche A_k e bB_k saranno primi tra loro, e l'uno pari, l'altro impari a causa di r impari e della equazione (4). Se a e b sono ambedue impari, A_k e B_k saranno pari poichè sono somme di termini della forma $ma^p b^q$, che è pari o impari come m, onde si potrà ad un tal termine sostituire m, ovvero supporre $a=b=1$, il che darà $A_k=B_k=2^{k-1}$ valori pari. Ma non avranno comune alcun fattore impari se a e b non ne hanno: noi supporremo sempre a e b primi fra loro.

2.° Se n è un numero intero e positivo si ha

$$\frac{t^n-u^n}{t-u}=t^{n-1}+t^{n-2}u+t^{n-3}u^2+\cdots+tu^{n-2}+u^{n-1}$$

$$=nu^{n-1}+(t-u)\left(\frac{t^{n-1}-u^{n-1}}{t-u}+u\frac{t^{n-2}-u^{n-2}}{t-u}+u^2\frac{t^{n-3}-n^{n-3}}{t-u}+\cdots+u^{n-2}\right)$$

$$=nu^{n-1}+(t-u)(t^{n-2}+2t^{n-3}u+3t^{n-4}u^2+\cdots+(n-2)tu^{n-3}+(n-1)n^{n-2}):$$

scambiando t con u e poi sommando le due equazioni si otterrà

$$\frac{t^n-u^n}{t-u}=n.\frac{t^{n-1}+u^{n-1}}{2}-V(t-u),$$

$$V=(n-2)\frac{t^{n-2}-u^{n-2}}{2}+(n-4)tu\frac{t^{n-4}-u^{n-4}}{2}+(n-b)t^2u^2\frac{t^{n-6}-u^{n-6}}{2}+\text{ecc.}$$

Sia m un altro numero intero e positivo, e si faccia $t=(a+\sqrt{b})^m$, $u=(a-\sqrt{b})^m$; ne risulterà $tu=(a^2-b)^m$, $t-u=2\sqrt{b}.B_m$, $t^n-u^n=2\sqrt{b}.B_{mn}$, $t^k-u^k=2\sqrt{b}.B_{km}$, $t^{n-1}+u^{n-1}=2A_{mn-m}$, ritenute le supposizioni del numero precedente; quindi

$$\frac{B_{mn}}{B_m}=nA_{mn-m}-2V\sqrt{b}.B_m,$$

e V prenderà la forma $H\sqrt{b}$ con H numero intero, onde anche il quoziente $\frac{B_{mn}}{B_m}$ sarà un numero intero, ossia B_{mn} sarà divisibile per B_m. Per conseguenza anche B_{mn-m} sarà divisibile per B_m. Ma secondo la stessa eguaglianza il numero $\frac{B_{mn}}{B_m}$ non può aver comuni con B_m altri divisori che quelli di nA_{mn-m}: e d'altra parte B_{mn-m} che deve contenere tutti i divisori di B_m non può, pel n.° precedente, aver comune con A_{mn-m} alcun divisore impari, cosicchè nessun divisore impari di B_m sarà comune ad A_{mn-m}: dunque $\frac{B_{mn}}{B_m}$ non potrà aver comuni con B_m altri divisori impari che quelli dell'esponente n.

3.° Sia p un divisore impari del numero intero B_k nel caso di $k=m$, e sia h il più piccolo valore di k che rende B_k divisibile per p: dico che h sarà un divisore di m. Imperocchè se h non eguaglia m sarà minore di m e se non divide m esattamente, sia q il quoziente e h' il resto della divisione, onde $m=hq+h'$: posto $B_m=Mp$, $B_h=Hp$, sarà eziandio $B_{hq}=H'p$ con M, H, H' interi poichè B_{hq} sarà divisibile per B_h (n.° 2°), e ne dedurremo

$$\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^m - 1 = \frac{2\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^m}\cdot Mp\,,\quad \left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{hq} - 1 = \frac{2\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^{hq}}\cdot H'p$$

e però

$$\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{hq}\left[\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{h'} - 1\right] = \frac{2p\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^{hq}}\left[\frac{M}{(a-\sqrt{b})^{h'}} - H'\right],$$

ossia

$$(a^2-b)^{hq}.\ B_{h'} = p\left[M(a-\sqrt{b})^{hq} - H'(a-\sqrt{b})^m\right],$$

dal cui secondo membro dovendo sparire $\sqrt{b}$ come sparisce dal primo, risulterà che p è un divisore del primo membro. Ma se un divisor primo di p dividesse $(a^2-b)^{hq}$ dividerebbe a^2-b e quindi dividendo insieme r e B_m dividerebbe anche A_m per la (4), mentre A_m e B_m non hanno comune alcun fattore impari: dunque p sarebbe divisore di $B_{h'}$ e h' sarebbe $<h$, la qual cosa è contraria all'ipotesi.

Segue da ciò che se B_k è multiplo di p per due valori $k=m$ e $k=m'$ dell'indice, saranno m e m' multipli di h; quindi anche il massimo comun divisore μ di m e m' sarà multiplo di h, e in conseguenza sarà multiplo di p anche B_μ.

4.° Secondo teoremi noti, chiamato p un numero primo impari, se b è un residuo quadratico di p, il numero B_{p-1} è divisibile per p, e se b è un non residuo quadratico di p, il numero B_{p+1} è divisibile per p: ciò qualunque numero intero sia a (*). Sia pertanto $\frac{B_{mn}}{B_m}=P$, e p un divisor primo impari di

(*) Mém. Acad. de Berlin, 1775, pag. 352; GAUSS, *Disquis. Arithm.* art. 123.

P che non divida n: sarà p un divisore di B_{mn} che non dividerà B_m (n.° 2°), e nel primo caso $p-1$, nel secondo $p+1$ avrà comune coll'indice mn un divisore che sarà estraneo all'indice m. Se dunque n sia un numero primo e m una sua potenza n^{i-1}, dovrà $p \pm 1$ aver per divisore $mn = n^i$, onde sarà $p \mp 1 = n^i z$, $p = n^i z \pm 1$. E così nel primo caso avremo trovato un numero primo della forma $n^i z + 1$, nel secondo un numero primo della forma $n^i z - 1$.

Nel caso di $i = 1$, sarà $B_m = B_1 = 1$, $B_{mn} = B_n$, $P = B_n$. Il numero n può anche essere $= 2$.

5.° Se k è impari, avremo dalle (2)

$$\left.\begin{aligned} A_k &= a^k + \frac{k(k-1)}{1.2} a^{k-1} b + \cdots + k a b^{\frac{k-1}{2}}, \\ B_k &= k a^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} a^{k-3} b + \cdots + \frac{k(k-1)}{1.2} a^2 b^{\frac{k-3}{2}} + b^{\frac{k-1}{2}} : \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dalla seconda delle quali è chiaro che se b è primo ad a, e a è multiplo di n, sarà B_k primo ad n. Quindi preso a multiplo di n, fatto $b = 1$, e chiamato p un divisor primo impari di P come nel n.° precedente, avremo $p = n^i z + 1$, poichè b sarà residuo quadratico di p, e p non sarà divisore di n, essendo B_{mn} e perciò P primo ad n.

Ciò vale per n numero primo impari e anche per $n = 2$.

Supponendo invece $b = -1$, a pari e multiplo di n, potremo trovare un numero primo p della forma $n^i z - 1$, quando n sia della forma $4K + 3$. Poichè i numeri m e mn saranno l'uno della forma $4K + 1$ e l'altro della forma $4K + 3$, ed essendo $B_k = Ca^2 + (-1)^{\frac{k-1}{2}}$, anche i numeri B_m e B_{mn} saranno l'uno della forma $4K + 1$ e l'altro della forma $4K + 3$, onde il quoziente $\frac{B_{mn}}{B_m}$ ossia P sarà della forma $4K + 3$ e avrà qualche divisore primo p della stessa forma: questo numero primo essendo diverso da n e avendo -1 per non residuo quadratico sarà $= n^i z - 1$.

6.° Supponiamo anche $b = \pm 2$. Se a e k sono impari, abbiamo, separando i multipli di 8,

$$B_k = k \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} \cdot 2a + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2.3.4.5} \cdot 4 + 8C,$$

almeno per $k > 6$. Ne segue che quando k abbia la forma $8K + 1$, anche

B_k sarà della stessa forma. Se k è della forma $8K-1$, avremo

$$B_k=-1\pm\left(\frac{-1.-2.-3}{3}\right)a+\left(\frac{-1.-2.-3.-4.-5}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\right)\cdot 4+8C'=8C''\pm 2a-5,$$

e quindi B_k sarà della forma $8K-3$, se nel caso di $b=2$ prenderemo a della forma $4K-1$, e nel caso di $b=-2$ prenderemo a della forma $4K+1$. Supposto n della forma $8K-1$, e $m=n^{i-1}$, uno dei numeri m e mn avrà la forma $8K+1$ e l'altro la forma $8K-1$; per ciò uno dei numeri B_m e B_{mn} avrà la forma $8K+1$, e l'altro la forma $8K-3$, onde il quoziente P sarà della forma $8K-3$, e avrà almeno un divisore primo p d'una delle forme $8K\pm 3$, che sarà diverso da n essendo n della forma $8K-1$. Nel caso di $b=2$, sarà b non residuo di p, e ne risulterà $p=n^i z-1$. Sarà lo stesso nel caso di $b=-2$, se p ha la forma $8K-3$; se invece p ha la forma $8K+3$, sarà b residuo di p e si avrà $p=n^i z+1$, ma in questo caso P ammetterà eziandio un divisor primo della forma $8K-1$, di cui b sarà non residuo e che sarà diverso da n se prendasi a multiplo di n, e chiamandolo p si avrà ancora $p=n^i z-1$.

Se k è della forma $8K+3$, avremo $B_k=3\pm 2a+8C'$, che sarà della forma $8K-3$ se nel caso di $b=2$ prenderemo a della forma $4K+1$, e nel caso di $b=-2$ prenderemo a della forma $4K-1$. Se infine k è della forma $8K-3$, avremo $B_k=-3\mp 4.\ 5a-5.\ 4+8C'$, che per a impari è sempre della stessa forma $8K-3$. Quindi supposto n d'una delle forme $8K\pm 3$, i numeri m e mn saranno l'uno della forma di n, e l'altro della forma $8K+1$; B_m e B_{mn} saranno l'uno della forma $8K+1$, l'altro della forma $8K-3$, onde (preso a multiplo di n) si giungerà ancora alle medesime conclusioni di poc' anzi.

Convien notare che anche quando facciamo b negativo noi supponiamo positivi i valori di B_k perchè prendendo a abbastanza grande si può sempre rendere il primo termine ka^{k-1} del polinomio B_k superiore al complesso di tutti gli altri termini.

7.° Le precedenti proposizioni possono servire ad una dimostrazione del teorema di Fermat sulla possibilità di risolvere con numeri interi l'equazione

$$2n=x^2+y^2+z^2$$

ogniqualvolta n sia un numero *primo* $8K-1$. Imperocchè abbiamo provato che è possibile trovar un numero primo $8K\pm 3$ compreso nella formola $p=nz-1$: dovendo z esser pari, faremo $z=2s$, e avremo $1+p=2ns$, donde coi simboli di LEGENDRE trarremo $\left(\frac{-p}{n}\right)=1$, e quindi per legge di reciprocazione trarremo $\left(\frac{n}{p}\right)=-1$ nel caso di $p=8K-3$, e $\left(\frac{n}{p}\right)=+1$ nel caso di $p=8K+3$; inoltre nel primo caso è $\left(\frac{-2}{p}\right)=-1$, e nel secondo $\left(\frac{-2}{p}\right)=+1$: dunque in ambedue i casi $\left(\frac{-2n}{p}\right)=1$, sicchè potrà rendersi divisibile per p la formola $1+2nt^2$, e chiamato r il quoziente si avrà $1+2nt^2=pr=r(2ns-1)$, ossia $2nt^2+r-2nrs=-1$.

Potendosi, dato n, determinare valori interi di r, s, t, che soddisfacciano a questa equazione, ciò basta, come avvertì il DIRICHLET (*), per dedurne che $2n$ si può trasformare nell'espressione ternaria $x^2+y^2+z^2$.

8.° Sia n un numero primo impari qualsivoglia, b uno de'suoi non residui quadratici: si avrà $b^{\frac{n-1}{2}}\equiv -1 \pmod{n}$, e quindi $B_n = Cn-1$ per la seconda delle (6): dunque B_n non sarà divisibile per n e avrà qualche divisore primo di cui b sarà non residuo, poichè ogni divisore primo di B_n del quale b sia residuo quadratico deve avere la forma $nz+1$ (n.° 4°) e quindi se tutti i divisori primi di B_n avessero b per residuo quadratico sarebbero tutti della forma $nz+1$ e B_n loro prodotto avrebbe pure la stessa forma. Chiamato dunque p un divisore primo di B_n avente b per non residuo quadratico, sarà $p=nz-1$; e così viene dimostrata l' esistenza di numeri primi di questa forma che inoltre debbano avere per non residuo il numero b scelto ad arbitrio fra i non residui di n.

9.° Si ha dalla (1)

$$A_{mn}+B_{mn}\sqrt{b}=(a+\sqrt{b})^{mn}=(A_m+B_m\sqrt{b})^n$$

e quindi se n è impari

$$A_{mn}=A_m{}^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_m{}^{n-2}B_m{}^2 b+\cdots+nA_mB_m{}^{n-1}b^{\frac{n-1}{2}},$$

$$B_{mn}=nA_m{}^{n-1}+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_m{}^2B_m{}^{n-2}b^{\frac{n-3}{2}}+B_m{}^n b^{\frac{n-1}{2}}:$$

(*) G. Crelle tom. XL pag. 228.

donde supposto n un numero primo, risulta

$$A_{mn} \equiv A_m^n \equiv A_m, \quad B_{mn} \equiv B_m^n b^{\frac{n-1}{2}} \equiv B_m \left(\frac{b}{n}\right) \pmod{n}. \tag{7}$$

Se b è non residuo quadratico di n, sarà dunque $B_{mn} \equiv -B_m \pmod{n}$; e poichè abbiam già trovato $B_n \equiv -1$, facendo successivamente $m=n, n^2, n^3, \ldots$ ne trarremo di mano in mano $B_{nn} \equiv -B_n \equiv 1$, $B_{nnn} \equiv -B_{nn} \equiv -1$, ecc. talchè supposto $m=n^{i-1}$, avremo sempre $B_{mn} \equiv -B_m \equiv \pm 1 \pmod{n}$, e dei due numeri B_m, B_{mn} l'uno avrà la forma $Cn+1$, l'altro avrà la forma $Cn-1$. Pertanto il quoziente P avrà sempre la forma $Cn-1$, non sarà divisibile per n, e dovrà avere qualche divisor primo p di cui b sarà non residuo, essendo della forma $nz+1$ tutti i divisori primi di B_{mn} de'quali b è residuo quadratico (n.° 4°) e della stessa forma tutti i prodotti formati con questi. Avrem dunque $p=n^i z-1$; e sarà così dimostrata l'esistenza di siffatti numeri primi p, aggiunta la condizione che b sia non residuo quadratico tanto di n quanto di p.

10.° Abbiamo

$$A_2 + B_2 \sqrt{b} = (a+\sqrt{b})^2,$$
$$A_{2m} + B_{2m}\sqrt{b} = (a+\sqrt{b})^{2m} = (A_m + B_m\sqrt{b})^2,$$

donde

$$A_2 = a^2+b, \quad B_2 = 2a, \quad A_{2m} = A_m^2 + bB_m^2, \quad B_{2m} = 2A_m B_m.$$

Quindi $B_2, B_4, B_6, \ldots$ sono tutti numeri pari.

Preso $a=2$, $b=-1$, risulterà $A_2=3$, $B_2=4$, $A_{2m}=A_m^2-B_m^2$: saranno numeri impari A_4, A_8, $A_{16}, \ldots$; di più l'equazione $B_{2m}=2A_m B_m$ darà B_4 multiplo di 8, B_8 multiplo di 16, ecc. Si troverà A_4 negativo, A_8 negativo, A_{16} positivo. Sia generalmente A_{2m} positivo, cioè $A_m^2 > B_m^2$, e facciamo $A_m = kB_m$, onde $k^2>1$: avremo $A_{2m}=(k^2-1)B_m^2$, $B_{2m}=2kB_m^2$, e fatto $A_{2m}=k'B_{m2}$, ne trarremo $k'=\frac{1}{2}k-\frac{1}{2k}$, talchè k' sarà positivo se k è positivo, negativo se k è negativo, ma in entrambi i casi sarà quanto al valor assoluto $k'<\frac{1}{2}k$. Similmente fatto $A_{4m}=k''B_{4m}$, si avrà in valor assoluto $k''<\frac{1}{2}k'$, e però $k''<\frac{1}{4}k$; fatto $A_{8m}=k'''B_{8m}$, si avrà $k'''<\frac{1}{2}k''<\frac{1}{8}k$, e così in progresso finchè i coefficienti $k, k', k'', \ldots$ resteranno numericamente superiori all'unità. Ma continuando la serie $k, \frac{1}{2}k, \frac{1}{4}k, \frac{1}{8}k, \ldots$ si troverà infine un termine numericamente minore di 1; dunque un tal termine si troverà anche nella serie $k, k', k'', \ldots$, e supponendo che sia $k^{(i)}$, fatto $m' = 2^i m$, si avrà numericamente $A_{m'} < B_{m'}$, e sarà negativo $A_{2m'}$. Adunque nella serie $A_2, A_4, A_8, \ldots$ si troveranno termini negativi il cui indice sia maggiore di qualsiasi numero dato.

Di qui si deduce l'esistenza di numeri primi della forma $2^i z - 1$, essendo i un numero dato qualsivoglia. Poichè indicata con m una potenza di 2 eguale o superiore a 2^{i-1} tale che A_m sia negativo, si avrà il quoziente $P = \frac{B_{2m}}{B_m} = 2A_m$, che sarà negativo; ma fatto $m = 2m'$, si avrà $-A_m = B_{m'}^2 - A_{m'}^2$, e saranno $A_{m'}$ impari, $B_{m'}$ divisibile almeno per 4, onde $-A_m$ sarà un numero positivo della forma $8K-1$, e $-P$ un numero positivo della forma $2(8K-1)$: dunque P ammetterà per divisore qualche numero primo della forma $4K+3$, e chiamatolo p si avrà $p = 2mz - 1$ (n.º 4º), essendo $b = -1$ non residuo di p. Il numero p avrà la forma voluta perchè $2m$ sarà eguale o multiplo di 2^i. Così tali numeri primi si troveranno fra i divisori della formola

$$\frac{(2+\sqrt{-1})^k - (2-\sqrt{-1})^k}{2\sqrt{-1}}$$

supponendo k una potenza del 2.

11.º Consideriamo finalmente un numero m composto di fattori primi differenti, e rappresentiamo con n_1, uno qualsiasi di tali fattori, con $n_2, n_3, n_4, \ldots$ uno qualsiasi dei loro prodotti a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ecc.; poniamo inoltre $\frac{m}{n_1} = m_1$, $\frac{m}{n_2} = m_2$, $\frac{m}{n_3} = m_3$, ecc. Si faccia $b = 1$, e si prenda a multiplo di tutti i fattori primi n_1. Sarà B_m multiplo di tutti i valori di B_{m_1} corrispondenti ai diversi valori di n_1, e chiamato M il minimo multiplo comune di tali valori di B_{m_1} sarà $\frac{B_m}{M}$ un numero intero che indicheremo con P: sarà P come B_m primo ad a e perciò a tutti i numeri n_1; e $\frac{B_m}{B_{m_1}}$ che è multiplo di P non potendo aver comune con B_{m_1} altro divisore impari che n_1 (n.º 2º) poichè $m = m_1 n_1$, non avrà comune con B_{m_1} alcun divisore impari. Sia p un divisore primo impari di P: sarà p un divisore di B_m che non dividerà B_{m_1} e quindi non dividerà B_k qualunque sia k dei divisori di m, escluso m, poichè k sarà multiplo d'alcuno dei valori di m_1. Ma essendo $b = 1$ residuo di p, anche B_{p-1} sarà multiplo di p: dunque $p - 1$ sarà multiplo di m (n.º 3º) e si avrà $p = mz + 1$.

Adunque per ogni numero m, pari o impari, primo o composto, è dimostrata l'esistenza di numeri primi della forma $mz+1$. Occorrono altri principj pei numeri primi della forma $mz-1$, se m è un numero composto di fattori primi differenti.

12.° Dinotiamo generalmente con $f(x)^k$ la frazione $\frac{x^k-1}{x-1}$, e ritenuto il significato di m, m_i, n_i dato nel n.° precedente poniamo

$$X=f(x)^m\cdot\frac{\Pi f(x)^{m_2}.\Pi f(x)^{m_4}.\Pi f(x)^{m_6}\ldots}{\Pi f(x)^{m_1}.\Pi f(x)^{m_3}.\Pi f(x)^{m_5}\ldots}.$$

ove i segni Π indicano moltiplicazioni stese a tutti i valori di m_1, m_2, ecc.: sarà $X=0$ l'equazione avente per radici le radici primitive dell'equazione $x^m-1=0$. Ora presi a e b primi fra loro, formate le quantità B_{m_1}, chiamato M il minimo multiplo comune di tali quantità, e fatto $\frac{B_m}{M}=P$, potremo dedurre P da X ponendo $x=\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. Poichè avremo

$$P=B_m\cdot\frac{\Pi B_{m_2}.\Pi B_{m_4}.\Pi B_{m_6}\ldots}{\Pi B_{m_1}.\Pi B_{m_3}.\Pi B_{m_5}\ldots},\tag{8}$$

e insieme $f(x)^k=\frac{B_k}{(a-\sqrt{b})^{k-1}}$, e quindi

$$X=\frac{P}{(a-\sqrt{b})^\lambda}$$

per un conveniente valore di λ formato dalla somma algebrica di tutti i valori di $k-1$. Distinguendo in λ la parte derivante dal termine k e la parte derivante dal termine -1, e chiamando s il numero dei fattori primi diversi di m, avremo per la seconda parte

$$-\left[1-\frac{s}{1}+\frac{s(s-1)}{1.2}-\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}+\cdots\right]=-(1-1)^s=0,$$

e la prima parte sarà espressa da

$$m-\sum m_1+\sum m_2-\sum m_3+\cdots=m-\sum\frac{m}{n_1}+\sum\frac{m}{n_2}-\sum\frac{m}{n_3}+\cdots$$
$$=m\Pi\left(1-\frac{1}{n_1}\right),$$

numero che dinota quanti sono i numeri inferiori ad m e primi ad m. Adunque λ si ridurrà a questo numero; e tale essendo pure il grado del polinomio X rispetto ad x, basterà sostituire in questo polinomio il valore di $x = \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$, e fare sparire i denominatori: allora X sarà trasformato in P.

Si supponga $b = -h^2$, indicato con h un numero intero; e sia ρ il modulo, ϕ l'argomento dell'espressione immaginaria $a + h\sqrt{-1}$, onde $a \pm h\sqrt{-1} = \rho e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}$, e $x = \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$. Rappresentando inoltre con u uno qualsivoglia degl'interi inferiori e primi ad m, e stendendo la moltiplicazione a tutti i valori di u, potremo scrivere

$$X = \Pi\left(x - e^{-\frac{2u\pi}{m}\sqrt{-1}}\right):$$

ma sarà

$$x - e^{-\frac{2u\pi}{m}\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,.\, e^{\left(\varphi - \frac{u\pi}{m}\right)\sqrt{-1}} \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{u\pi}{m}\right);$$

quindi

$$X = 2^\lambda(\sqrt{-1})^\lambda.\, e^{\left(\lambda\varphi - \frac{\pi\Sigma u}{m}\right)\sqrt{-1}}.\, \Pi \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{u\pi}{m}\right),$$

che si riduce a

$$X = 2^\lambda e^{\lambda\varphi\sqrt{-1}}.\, \Pi \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{u\pi}{m}\right)$$

perchè

$$\Sigma u = \tfrac{1}{2}\lambda m,\ e^{-\frac{1}{2}\lambda\pi\sqrt{-1}} = (-\sqrt{-1})^\lambda,\ (\sqrt{-1})^\lambda\,(-\sqrt{-1})^\lambda = 1.$$

Essendo

$$P = X(a - \sqrt{b})^\lambda = X.\rho^\lambda e^{-\lambda\varphi\sqrt{-1}},$$

ne risulta

$$P = 2^\lambda \rho^\lambda.\, \Pi \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{u\pi}{m}\right).$$

Il maggior valore di u sarà $m-1$, e quindi se l'arco ϕ sia maggiore di $\frac{\pi}{m}$ e minore di $\frac{2\pi}{m}$, l'arco $\phi + \frac{m-1}{m}\pi$ sarà compreso tra π e 2π e avrà un seno negativo, mentre tutti gli altri archi $\phi + \frac{u\pi}{m}$ saranno minori di π e avranno seni positivi, il che darà P negativo. Ma avendosi tang $\phi = \frac{h}{a}$, infiniti valori razionali e irrazionali di a e h soddisfaranno alla condizione $\frac{\pi}{m} < \phi < \frac{2\pi}{m}$, cosicchè in infiniti modi, anche supposti a e h interi, si potrà render P negativo.

13.° Sia m impari, e si prenda h impari, a multiplo di 4 e di tutti i fattori primi di m. Saranno impari tutti i valori di m_1, m_2, ecc., e così nella espressione (8) tutti gl'indici saranno impari. Ma dalle (6) avremo $B_k \equiv b^{\frac{k-1}{2}}$ (mod. 8), e quindi dalla (8) dedurremo $P \equiv b^{\frac{\lambda}{2}} \equiv (-h^2)^{\frac{\lambda}{2}}$ (mod. 8): ora entrando in m almeno due fattori primi differenti il numero λ sarà divisibile per 4; dunque sarà $P \equiv h^\lambda \equiv 1$ (mod. 8). Supposto inoltre P negativo, ne segue che $-P$ sarà un numero intero positivo della forma $8K-1$, e avrà qualche divisor primo p della forma $4K+3$. Sarà B_m primo ad m e a b ossia ad h; quindi p non sarà divisore di m nè di h, ed essendo della forma $4K+3$, sarà $b = -h^2$ uno de'suoi non residui, onde P sarà divisore di B_{p+1}. Da ciò ragionando come al n.° 11° si concluderà che $p+1$ sarà divisibile per m, e così $p = mz - 1$, e il numero z sarà multiplo di 4 perchè p ha la forma $4K+3$.

14.° Se m è pari ma divisibile soltanto per 2 ovvero per 4, basta ancora la data dimostrazione, poichè essendo z multiplo di 4, la forma $mz-1$, dimostrata nel caso di m impari, comprende le due $2mz'-1$ e $4mz''-1$. Per gli altri casi, intenderemo che $n_1, n_2, n_3, \ldots$ rappresentino i fattori primi impari di m e i loro prodotti, e ritenuto $\frac{m}{n_1} = m_1$, $\frac{m}{n_2} = m_2$, $\frac{m}{n_3} = m_3, \ldots$ dovremo nella formola (8) per tener conto del fattore 2 sostituire a ΠB_{m_1} il prodotto $B_{\frac{1}{2}m} . \Pi B_{m_1}$, e generalmente a ΠB_{m_i} il prodotto $\Pi B_{\frac{1}{2}m_{i-1}} . \Pi B_{m_i}$. Ma si ha (n.° 10°) $B_{2k} = 2A_k B_k$, onde $B_k = \frac{B_{2k}}{2A_k}$: fatte queste sostituzioni, e ommesso il fattor 2 che avrebbe per esponente

$$1 - \frac{s-1}{2} + \frac{(s-1)(s-2)}{1.2} - \cdots = (1-1)^{s-1} = 0,$$

si otterrà

$$P = A_{\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\Pi A_{\frac{1}{2}m_2} \cdot \Pi A_{\frac{1}{2}m_4} \cdot \Pi A_{\frac{1}{2}m_6} \ldots}{\Pi A_{\frac{1}{2}m_1} \cdot \Pi A_{\frac{1}{2}m_3} \cdot \Pi A_{\frac{1}{2}m_5} \ldots}.$$

Ora $A_k = a^k + \frac{k(k-1)}{1.2} a^{k-1} b +$ ecc.; quindi prendendo a impari, h multiplo di 4, e però b di 16, avremo $A_k \equiv a^k$ (mod. 16). Adunque $P \equiv a^{\frac{1}{2}\lambda}$ (mod. 16), essendo $\lambda = m - \sum m_1 + \sum m_2 - \cdots$; ma supponendosi m divisibile per 8. e per qualche fattore impari, sarà λ multiplo di 16, e $\frac{1}{2}\lambda$ di 8; dunque $P \equiv 1$ (mod. 16). Pertanto se P è negativo sarà $-P$ un numero positivo della forma $16K-1$, e avrà qualche divisor primo p della forma $4K+3$, che sarà diverso da tutti i valori di n_1, se si prenderà a multiplo di tutti questi, e che avrà b per non residuo quadratico. Dal che si concluderà come dianzi $p = mz - 1$.

Trovato un numero primo p della forma $mz+1$ o della forma $mz-1$, se ne troverà un altro p', se in luogo di a si metterà $a' = ap$, indi un altro p'' se in luogo di a' si metterà $a'' = a'p'$, e così via via: laonde se ne troveranno infiniti.

Alcune proprietà delle funzioni B_k sono state dimostrate da Lagrange e Legendre (*).

(*) Lagrange, *Miscell. Taurin.*, t. IV e *Additions à l'Alg. d'Euler* p. 606; Legendre, *Théorie des nombres*, n° 443.

Théorie des coordonnées curvilignes par **M. AOUST.**

(Voir Annali di Matematica pura ed applicata, Tomo II°, fasc. I°).

ERRATA.

N° 1 et N° 3. Au lieu de ϕ lisez: ϕ_2.

N° 2. Au lieu de $R, R_1, I_{10}, L_{10}, L_{01}, P,$ lisez: $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{J}_{10}, \mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{01}, \mathfrak{P}$.

N° 3. 4me ligne avant la fin du N°, au lieu de *courbure,* lisez: *courbure géodésique.*

N° 4. Formule $(4)''$, changez les signes des deux derniers termes.
6me ligne avant la fin du n°, au lieu de R, lisez: R_1.
Même ligne, au lieu de $d\sigma, d\sigma_1,$ lisez: $d\sigma_1, d\sigma$.

N° 5. 7me ligne du n°, écrivez à la fin $=0$,
Dernière équation, au lieu de $d_\varrho(d\nu)$, lisez: $d_{\varrho_1}(d\nu)$.

N° 6. A partir de ce numéro, on a supprimé l'indice de ϕ_2, pour abréger.

N° 14. Équation (12), après $\frac{d\sigma^2}{\pi}$, écrivez: le signe $=$

N° 16. 8me ligne du n°, au lieu de $\frac{d\sigma}{l} = -d\varepsilon$, lisez: $\frac{d\sigma}{l} = 0$.

N° 20. 2me équation, au lieu de $\frac{1}{\lambda}$, lisez: $\frac{1}{l}$.

N° 22. 3me équation, 2me terme, au lieu de dq, lisez: ζdq.

N° 23. Équation (17) au lieu de $\cos\theta$, lisez: $\cos\phi$.
Même équation, dernier terme, au lieu de $-d\alpha$ lisez: $+d\alpha$.

Sulle coordinate curvilinee d' una superficie e dello spazio.

MEMORIA TERZA (*).

(*del prof.* DELFINO CODAZZI, *a Pavia*).

Divido questa Memoria terza in due parti, l'una delle quali relativa alle coordinate curvilinee d'una superficie e l'altra alle coordinate curvilinee dello spazio.

PARTE PRIMA.

L'oggetto di questa Parte prima è quello di ridurre le sei equazioni della Memoria seconda Parte seconda a tre sole tra le seguenti sei quantità: le m, n, ε_λ, i due raggi di curvatura della superficie (λ) qualunque e l'angolo formato dalla intersezione (ν, λ) con una individuata delle due linee di curvatura. L'una di queste equazioni è alle derivate parziali del second'ordine, e le altre due sono alle derivate parziali del prim'ordine.

1.

Cominciamo dal costituire l'equazione alle derivate parziali del secondo ordine.

Siano λ_i le coordinate rettilinee del centro di curvatura per un punto qualunque d'una superficie del sistema (λ) ed r_λ un raggio di curvatura. Avremo

$$\lambda_i - i = r_\lambda I_\lambda,$$

(*) I numeri adoperati per indicare le formole di questa Memoria terza sono in continuazione con quelli della Memoria seconda.

ove potremo far variare le μ, ν conservando costanti le λ_i, r_λ. Così facendo, risulterà, in causa delle (45), (46),

$$m i_\mu d\mu + n i_\nu d\nu = r_\lambda \left\{ i_\mu (\alpha_\mu + \gamma_\mu \cot\varepsilon_\lambda) - i_\nu \frac{\gamma_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} \right\} d\mu$$
$$+ r_\lambda \left\{ i_\nu \, (a_\nu - c_\nu \cot\varepsilon_\lambda) + i_\mu \frac{c_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} \right\} d\nu;$$

la quale, moltiplicata dapprima per i_μ dipoi per i_ν e sottoposta ad ogni volta all'operazione $\sum$, somministra le due

$$m\, d\mu + n \cos\varepsilon_\lambda \cdot d\nu = r_\lambda \{ \alpha_\mu d\mu + (a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) d\nu \},$$
$$m \cos\varepsilon_\lambda \cdot d\mu + n\, d\nu = r_\lambda \{ \alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) d\mu + a_\nu d\nu \}.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto al rapporto $\frac{d\nu}{d\mu}$, si ottengono

$$\left.\begin{aligned} \{ n \cos\varepsilon_\lambda - r_\lambda (a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) \} \frac{d\nu}{d\mu} &= r_\lambda \alpha_\mu - m, \\ (n - r_\lambda a_\nu) \frac{d\nu}{d\mu} &= r_\lambda (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) - m\, \mathrm{cop}\, \varepsilon_\lambda; \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

le quali, in seguito all'eliminazione dello stesso rapporto $\frac{d\nu}{d\mu}$, danno

$$\{ n \cos\varepsilon_\lambda - r_\lambda (a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) \} \{ r_\lambda (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) - m \cos\varepsilon_\lambda \}$$
$$(r_\lambda \alpha_\mu - m)(n - r_\lambda a_\nu),$$

ovvero

$$- r_\lambda^2 \{ (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda)(a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) - \alpha_\mu a_\nu \}$$
$$+ r_\lambda \{ n \cos\varepsilon_\lambda (\alpha_\mu \cos\varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) + m \cos\varepsilon_\lambda (a_\nu \cos\varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda) - n \alpha_\mu - m a_\nu \}$$
$$+ mn \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\lambda = 0,$$

oppure

$$\frac{mn \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{r_\lambda^2} - \frac{n(\alpha_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu \cos\varepsilon_\lambda) + m(a_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu \cos\varepsilon_\lambda)}{r_\lambda}$$
$$+ (\alpha_\mu a_\nu + \gamma_\mu c_\nu) \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - (\alpha_\mu c_\nu - a_\nu \gamma_\mu) \cos\varepsilon_\lambda = 0. \tag{53}$$

Dunque, chiamando ρ_λ l'altro de' due raggi di curvatura, avremo, in causa delle (49), (44),

$$\frac{1}{r_\lambda \rho_\lambda} = \frac{1}{mn\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{\dfrac{\partial\cdot m\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}-\dfrac{\partial n}{\partial\mu}}{m\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu}\cdot\frac{\dfrac{\partial\cdot n\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\dfrac{\partial m}{\partial\nu}}{n\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}+\frac{\partial^2\varepsilon_\lambda}{\partial\mu\,\partial\nu}\right); \qquad (54)$$

la quale è l'equazione alle derivate parziali del second'ordine che si trattava di costituire. Ora, indichiamo con s_λ l'arco d'una linea qualunque tracciata nella superficie (λ) e poniamo

$$ds_\lambda^2 = e\,d\mu^2 + 2f\,d\mu\,d\nu + g\,d\nu^2;$$

per cui

$$m = \sqrt{e}, \qquad n = \sqrt{g}, \qquad \cos\varepsilon_\lambda = \frac{f}{\sqrt{eg}}.$$

La (54), dopo la sostituzione di questi valori e dopo l'esecuzione delle derivazioni indicate, si riduce alla nota formola di Gauss.

2.

Esprimiamo ora le a_μ, a_ν, γ_μ, c_ν in funzioni de' due raggi di curvatura, dell'angolo formato dalla intersezione (ν, λ) con la linea di curvatura di raggio r_λ, e delle m, n, ε_λ.

Si chiamino rispettivamente θ_λ, θ_λ' gli angoli compresi tra la linea di curvatura di raggio r_λ e le intersezioni (ν, λ), (λ, μ). Saranno, per note formole,

$$\frac{a_\mu}{m} = \frac{\cos^2\theta_\lambda}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda}{\rho_\lambda}, \qquad \frac{a_\nu}{n} = \frac{\cos^2\theta_\lambda'}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}; \qquad (55)$$

ove

$$\theta_\lambda' = \varepsilon_\lambda - \theta_\lambda. \qquad (56)$$

Le (55), unitamente alla (56), servono ad esprimere le a_μ, a_ν nel modo dichiarato.

Le (53) somministrano

$$\frac{n(a_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda + \gamma_\mu\cos\varepsilon_\lambda) + m(a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda)}{mn\operatorname{sen}_\lambda} = \frac{1}{r_\lambda} + \frac{1}{\rho_\lambda};$$

da cui, avuto riguardo alle (55),

$$(n\gamma_\mu - mc_\nu)\cos\varepsilon_\lambda = mn\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda - \cos^2\theta_\lambda'}{r_\lambda} + \frac{\cos^2\theta_\lambda - \operatorname{sen}^2\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right).$$

Ma

$$\operatorname{sen}^2\theta_\lambda - \cos^2\theta_\lambda' = -\cos^2\theta_\lambda + \operatorname{sen}^2\theta_\lambda' = -\cos\varepsilon_\lambda \cos(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda);$$

perciò sarà pure

$$n\gamma_\mu - mc_\nu = -mn\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right). \qquad (a)$$

L'equazione finita (42) alla sua volta somministra

$$(n\gamma_\mu + mc_\nu)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda = mn\cos\varepsilon_\lambda\left(\frac{\cos^2\theta_\lambda - \cos^2\theta_\lambda'}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda - \operatorname{sen}^2\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right).$$

Ma

$$\cos^2\theta_\lambda - \cos^2\theta_\lambda' = -\operatorname{sen}^2\theta_\lambda + \operatorname{sen}^2\theta_\lambda' = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda);$$

perciò sarà pure

$$n\gamma_\mu + mc_\nu = mn\cos\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right). \qquad (b)$$

Dalle (a), (b) si concludono

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\mu &= -m\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right), \\ c_\nu &= n\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - \theta_\lambda)\cos(\varepsilon_\lambda - \theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

le quali esprimono le γ_μ, c_ν nel modo dichiarato.

Osserviamo, a titolo di verificazione, che i valori (55), (57) rendono soddisfatta la (54) posta sotto la forma

$$\frac{1}{r_\lambda\rho_\lambda} = \frac{(\alpha_\mu a_\nu + \gamma_\mu c_\nu)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - (\alpha_\mu c_\nu - a_\nu\gamma_\mu)\cos\varepsilon_\lambda}{mn\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}.$$

3.

Passiamo a costituire le due equazioni alle derivate parziali del prim'ordine. Si trovano, osservando i valori del numero precedente,

$$a_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - c_\nu\cos\varepsilon_\lambda = n\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda} + \frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right),$$

$$a_\nu\cos\varepsilon_\lambda + c_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda = n\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda} - \frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right).$$

Perciò la (47), in causa anche delle (44), (57), potrà essere scritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{n\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{m\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\partial\cdot n\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial m}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\partial m}{\partial\nu}\cos\varepsilon_\lambda-\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\cos^2\theta_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda}{\rho_\lambda}\right)=0,$$

ovvero

$$n\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)-m\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial n}{\partial\mu}\left(\frac{\cos^2\theta_\lambda'-\cos^2\theta_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda'-\operatorname{sen}^2\theta_\lambda}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+\frac{\partial m}{\partial\nu}\left\{\frac{\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda)-\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda)+\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right\}$$
$$-n\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)=0,$$

o finalmente

$$n\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{r_\lambda}+\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{\rho_\lambda}\right\}-m\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}= \tag{58}$$
$$\frac{\partial n}{\partial\mu}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)+\frac{\partial m}{\partial\nu}\operatorname{sen}2\theta_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+n\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\left\{\frac{\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{\rho_\lambda}\right\};$$

perocchè sono

$$\cos^2\theta_\lambda'-\cos^2\theta_\lambda=-\operatorname{sen}^2\theta_\lambda'+\operatorname{sen}^2\theta_\lambda=-\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda),$$
$$\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda)-\cos_\lambda\theta\cos\theta_\lambda'=-\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}2\theta_\lambda,$$
$$\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda)+\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'=\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}2\theta_\lambda.$$

Dipoi si trovano, sempre osservando i valori del n. precedente,

$$\alpha_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda+\gamma_\mu\cos\varepsilon_\lambda=m\left(\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right),$$
$$\alpha_\mu\cos\varepsilon_\lambda-\gamma_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda=m\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right).$$

Perciò la (48), avuto riguardo anche alle (44), (57), potrà scriversi

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{m\left(\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{n\operatorname{sen}\theta_\lambda'\cos\theta_\lambda'\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\partial\cdot m\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\partial n}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\lambda-\frac{\partial m}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\cos^2\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)=0,$$

ovvero

$$m\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)-n\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\theta_\lambda'\cos\theta_\lambda'\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial m}{\partial\nu}\left(\frac{\cos^2\theta_\lambda-\cos^2\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda-\operatorname{sen}^2\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+\frac{\partial n}{\partial\mu}\left\{\frac{\cos\theta_\lambda'\cos(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda')-\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda'\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda')+\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right\}$$
$$-m\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'}{\rho_\lambda}\right)=0,$$

o finalmente

$$m\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{\rho_\lambda}\right\}-n\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)\right\}= \tag{59}$$
$$-\frac{\partial m}{\partial\nu}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)+\frac{\partial n}{\partial\mu}\operatorname{sen}2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)$$
$$+m\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\left\{\frac{\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)}{\rho_\lambda}\right\};$$

perocchè sono

$$\cos\theta_\lambda'\cos(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda')-\cos\theta_\lambda\cos\theta_\lambda'=-\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda),$$
$$\operatorname{sen}\theta_\lambda'\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda+\theta_\lambda')+\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda'=\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda).$$

Le (58), (59) sono le due equazioni alle derivate parziali del prim' ordine che si volevano costituire. Notiamo che esse si convertono l'uno nell'altra, quando si cambino le μ, ν, m, n, θ_λ, $\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda$ nelle ν, μ, n, m, $\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda$, θ_λ.

4.

Finalmente, rendiamo esplicite nelle (58), (59) le derivate delle quantità $\frac{1}{r_\lambda}, \frac{1}{\rho_\lambda}, \theta_\lambda$.

Siccome

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\right\}+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)=\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\mu}\right),$$

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\right\}-\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)=-\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\mu}\right);$$

così la (58) assumerà la forma

$$n\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\frac{\partial\frac{1}{r_\lambda}}{\partial\mu}+n\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\frac{\partial\frac{1}{\rho_\lambda}}{\partial\mu}-m\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\frac{\partial\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)}{\partial\nu}= \tag{60}$$

$$\left\{n\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial n}{\partial\mu}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)+m\cos2\theta_\lambda\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\nu}+\frac{\partial m}{\partial\nu}\operatorname{sen}2\theta_\lambda\right\}\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right).$$

Siccome poi

$$-\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\right\}+\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\cos\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)=\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\nu},$$

$$-\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\right\}-\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\nu}\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)=-\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\nu};$$

così la (59) diventerà

$$m\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\frac{\partial\frac{1}{r_\lambda}}{\partial\nu}+m\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\frac{\partial\frac{1}{\rho_\lambda}}{\partial\nu}-n\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\cos(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)}{\partial\mu}= \tag{61}$$

$$\left\{m\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial m}{\partial\nu}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)+n\cos2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\left(\frac{\partial\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial n}{\partial\mu}\operatorname{sen}2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)\right\}\left(\frac{1}{r_\lambda}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right).$$

Le (60), (61) sono le due equazioni del numero precedente trasformate nel modo dichiarato.

PARTE SECONDA.

In questa Parte seconda si stabiliscono in primo luogo le equazioni, le quali servono ad esprimere i sei raggi di curvatura r, ρ estesi alla superficie de' tre sistemi, ed i tre angoli θ estesi pure alle medesime superficie, in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate. Si stabiliscono in secondo luogo le equazioni, le quali uniscono tra loro le sei quantità $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$. Queste ultime equazioni sono in numero di nove, tre delle quali alle derivate parziali del second'ordine, e sei alle derivate parziali del terzo riducibili però, mediante le tre prime, ad altre sei alle sole derivate parziali del secondo.

1.

Estendiamo alle superficie (μ), (ν) i significati delle α, a relative alla superficie (λ); cioè poniamo

$$m'\cos\omega'_\mu = \alpha_\mu, \quad n'\cos\omega_\nu = a_\nu,$$
$$n'\cos\omega'_\nu = \alpha_\nu, \quad l'\cos\omega_\lambda = a_\lambda,$$
$$l'\cos\omega'_\lambda = \alpha_\lambda, \quad m'\cos\omega_\mu = a_\mu.$$

Estendiamo pure alle stesse superficie (μ), (ν) i significati delle β, b relative alla superficie (λ); cioè poniamo altresì

$$m'\operatorname{sen}\omega'_\mu = \beta_\mu, \quad n'\operatorname{sen}\omega_\nu = b_\nu,$$
$$n'\operatorname{sen}\omega'_\nu = \beta_\nu, \quad l'\operatorname{sen}\omega_\lambda = b_\lambda,$$
$$l'\operatorname{sen}\omega'_\lambda = \beta_\lambda, \quad m'\operatorname{sen}\omega_\mu = b_\mu.$$

Cominceremo dall'esprimere le sei α, a in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime.

In causa della (32), abbiamo

$$b_\lambda = -l'\operatorname{sen}(\eta_\lambda + \omega'_\lambda),$$

ovvero

$$b_\lambda = -\alpha_\lambda \operatorname{sen}\eta_\lambda - \beta_\lambda \cos\eta_\lambda.$$

Perciò ne concludiamo la prima tra le seguenti

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\lambda \operatorname{sen} \eta_\lambda &= -b_\lambda - \beta_\lambda \cos \eta_\lambda, \\ \alpha_\mu \operatorname{sen} \eta_\mu &= -b_\mu - \beta_\mu \cos \eta_\mu, \\ \alpha_\nu \operatorname{sen} \eta_\nu &= -b_\nu - \beta_\nu \cos \eta_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

In causa delle stesse (32), abbiamo pure

$$\beta_\lambda = l' \operatorname{sen}(\eta_\lambda - \omega_\lambda),$$

ovvero

$$\beta_\lambda = a_\lambda \operatorname{sen} \eta_\lambda - b_\lambda \cos \eta_\lambda.$$

Ne concludiamo la prima tra le seguenti

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda \operatorname{sen} \eta_\lambda &= \beta_\lambda + b_\lambda \cos \eta_\lambda, \\ a_\mu \operatorname{sen} \eta_\mu &= \beta_\mu + b_\mu \cos \eta_\mu, \\ a_\nu \operatorname{sen} \eta_\nu &= \beta_\nu + b_\nu \cos \eta_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Ora, le (44) somministrano immediatamente

$$\left.\begin{aligned} \beta_\lambda &= -\frac{\frac{\partial l}{\partial \mu} - \frac{\partial \cdot m \cos \varepsilon_\nu}{\partial \lambda}}{m \operatorname{sen} \varepsilon_\nu}, & b_\lambda &= \frac{\frac{\partial l}{\partial \nu} - \frac{\partial \cdot n \cos \varepsilon_\mu}{\partial \lambda}}{n \operatorname{sen} \varepsilon_\mu}, \\ \beta_\mu &= -\frac{\frac{\partial m}{\partial \nu} - \frac{\partial \cdot n \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}}{n \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}, & b_\mu &= \frac{\frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cdot l \cos \varepsilon_\nu}{\partial \mu}}{l \operatorname{sen} \varepsilon_\nu}, \\ \beta_\nu &= -\frac{\frac{\partial n}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cdot l \cos \varepsilon_\mu}{\partial \nu}}{l \operatorname{sen} \varepsilon_\mu}, & b_\nu &= \frac{\frac{\partial n}{\partial \mu} - \frac{\partial \cdot m \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \nu}}{m \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Le (62), (63) servono ad esprimere le α, a nel modo dichiarato, quando s'intendono sostituiti in esse, in luogo delle β, b, i valori dati dalle (64).

2.

Estendiamo alle superficie (μ), (ν) i significati delle r, ρ, θ, θ' relative alla superficie (λ). Esprimeremo in primo luogo i sei raggi di curvatura r, ρ in funzioni de' tre angoli θ e delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime;

esprimeremo in secondo luogo i tre angoli θ in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime e seconde.

Abbiamo, in causa delle (55),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha_\mu}{m}=\frac{\cos^2\theta_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\lambda}{\rho_\lambda}, && \frac{\alpha_\nu}{n}=\frac{\cos^2\theta'_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta'_\lambda}{\rho_\lambda},\\
&\frac{\alpha_\nu}{n}=\frac{\cos^2\theta_\mu}{r_\mu}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\mu}{\rho_\mu}, && \frac{\alpha_\lambda}{l}=\frac{\cos^2\theta'_\mu}{r_\mu}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta'_\mu}{\rho_\mu},\\
&\frac{\alpha_\lambda}{l}=\frac{\cos^2\theta_\nu}{r_\nu}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_\nu}{\rho_\nu}, && \frac{\alpha_\mu}{m}=\frac{\cos^2\theta'_\nu}{r_\nu}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta'_\nu}{\rho_\nu};
\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

ove sono, in forza della (56),

$$\theta'_\lambda=\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda,\qquad \theta'_\mu=\varepsilon_\mu-\theta_\mu,\qquad \theta'_\nu=\varepsilon_\nu-\theta_\nu.$$

Ora, siccome

$$\operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\theta-\cos^2\theta'\operatorname{sen}^2\theta=\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(\varepsilon-2\theta),$$

così dedurremo dalle (65) le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)}{r_\lambda}=\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}^2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda)-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}^2\theta_\lambda,\\
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)}{\rho_\lambda}=\frac{\alpha_\nu}{n}\cos^2\theta_\lambda-\frac{\alpha_\mu}{m}\cos^2(\varepsilon_\lambda-\theta_\lambda),\\
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)}{r_\mu}=\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}^2(\varepsilon_\mu-\theta_\mu)-\frac{\alpha_\lambda}{l}\operatorname{sen}^2\theta_\mu,\\
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)}{\rho_\mu}=\frac{\alpha_\lambda}{l}\cos^2\theta_\mu-\frac{\alpha_\nu}{n}\cos^2(\varepsilon_\mu-\theta_\mu),\\
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)}{r_\nu}=\frac{\alpha_\lambda}{l}\operatorname{sen}^2(\varepsilon_\nu-\theta_\nu)-\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}^2\theta_\nu,\\
&\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)}{\rho_\nu}=\frac{\alpha_\mu}{m}\cos^2\theta_\nu-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cos^2(\varepsilon_\nu-\theta_\nu).
\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

Queste equazioni servono ad esprimere i sei raggi di curvatura nel modo dichiarato, quando s'intendano sostituiti in esse, in luogo delle α, a, i valori trovati nel numero precedente.

Deduciamo dalle prime due (67)

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}^2(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)}{r_\lambda\rho_\lambda}=\frac{\alpha_\mu\alpha_\nu}{mn}(\operatorname{sen}^2\theta'_\lambda\cos^2\theta_\lambda+\cos^2\theta'_\lambda\operatorname{sen}^2\theta_\lambda)$$

$$-\frac{\alpha^2_\mu}{m^2}\operatorname{sen}^2\theta'_\lambda\cos^2\theta'_\lambda-\frac{\alpha^2_\nu}{n^2}\operatorname{sen}^2\theta_\lambda\cos^2\theta_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}^2(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)}{r_\lambda\rho_\lambda}=\frac{\alpha_\mu\alpha_\nu}{mn}\operatorname{sen}^2(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)-\left(\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda\right)^2;$$

la quale, avuto riguardo alla (54), somministra .

$$\frac{\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda}{\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)}=T_\lambda, \tag{a}$$

ove s'è posto per brevità

$$T_\lambda=\pm\sqrt{\frac{\alpha_\mu\alpha_\nu}{mn}-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{mn}\left(-\frac{\partial b_\nu}{\partial\mu}+\frac{\partial\beta_\mu}{\partial\nu}+\frac{\partial^2\varepsilon_\lambda}{\partial_\mu\partial_\nu}\right)}.$$

Ma

$$\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}2\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}2\theta_\lambda\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\mu}{m}-\frac{\alpha_\nu}{n}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\mu}{m}+\frac{\alpha_\nu}{n}\right)\cos\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda).$$

Perciò, estendendo alle superficie (μ), (ν) il significato della T relativa alla superficie (λ), concluderemo dalla (a) la prima tra le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha_\mu}{m}-\frac{\alpha_\nu}{n}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)=2\,T_\lambda-\left(\frac{\alpha_\mu}{m}+\frac{\alpha_\nu}{n}\right)\cos\varepsilon_\lambda,\\
&\left(\frac{\alpha_\nu}{n}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cot(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)=2\,T_\mu-\left(\frac{\alpha_\nu}{n}+\frac{\alpha_\lambda}{l}\right)\cos\varepsilon_\mu,\\
&\left(\frac{\alpha_\lambda}{l}-\frac{\alpha_\mu}{m}\right)\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)=2\,T_\nu-\left(\frac{\alpha_\lambda}{l}+\frac{\alpha_\mu}{m}\right)\cos\varepsilon_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Queste equazioni servono ad esprimere i tre angoli θ nel modo dichiarato.

3.

Estendiamo alle superficie (μ), (ν) i significati delle γ, c relative alla superficie (λ), cioè poniamo

$$\gamma_\mu = m'' - \frac{\partial \omega'_\mu}{\partial \mu}, \qquad c_\nu = n'' - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial_\nu},$$

$$\gamma_\nu = n'' - \frac{\partial \omega'_\nu}{\partial \nu}, \qquad c_\lambda = l'' - \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \lambda},$$

$$\gamma_\lambda = l'' - \frac{\partial \omega'_\lambda}{\partial \lambda}, \qquad c_\mu = m'' - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial \mu};$$

da cui, avuto riguardo alle (32),

$$\gamma_\mu - c_\mu = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \mu}, \qquad \gamma_\nu - c_\nu = \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \nu}, \qquad \gamma_\lambda - c_\lambda = \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \lambda}. \tag{α}$$

Ciò posto, esprimeremo dapprima le sei quantità γ, c in funzioni de' tre angoli θ e delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime; formeremo dipoi le equazioni che servono ad esprimere i tre angoli θ in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e delle loro sole derivate prime.

Dalle prime due (67) si deduce

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) = \frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{a_\nu}{n};$$

perciò le (57) diventeranno

$$2\gamma_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda) = -m\left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{a_\nu}{n}\right)\operatorname{sen}2\theta_\lambda,$$

$$2c_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda) = -n\left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{a_\nu}{n}\right)\operatorname{sen}(2\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda).$$

Avremo quindi il seguente gruppo di formole

$$\left.\begin{aligned}
2\gamma_\mu &= -m\left(\frac{a_\mu}{m}-\frac{a_\nu}{n}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)-\cot\varepsilon_\lambda\right\},\\
2c_\nu &= n\left(\frac{a_\mu}{m}-\frac{a_\nu}{n}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)+\cot\varepsilon_\lambda\right\},\\
2\gamma_\nu &= -n\left(\frac{a_\nu}{n}-\frac{a_\lambda}{l}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)-\cot\varepsilon_\mu\right\},\\
2c_\lambda &= l\left(\frac{a_\nu}{n}-\frac{a_\lambda}{l}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)+\cot\varepsilon_\mu\right\},\\
2\gamma_\lambda &= -l\left(\frac{a_\lambda}{l}-\frac{a_\mu}{m}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)-\cot\varepsilon_\nu\right\},\\
2c_\mu &= m\left(\frac{a_\lambda}{l}-\frac{a_\mu}{m}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)+\cot\varepsilon_\nu\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(69)$$

le quali servono ad esprimere le γ, c nel modo dichiarato.

In seguito, le (a) potranno porsi sotto alla forma

$$\left.\begin{aligned}
&m\left(\frac{a_\mu}{m}-\frac{a_\nu}{n}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)-\cot\varepsilon_\lambda\right\}+m\left(\frac{a_\lambda}{l}-\frac{a_\mu}{m}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)+\cot\varepsilon_\nu\right\}+2\frac{\partial\eta_\mu}{\partial\mu}=0,\\
&n\left(\frac{a_\nu}{n}-\frac{a_\lambda}{l}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)-\cot\varepsilon_\mu\right\}+n\left(\frac{a_\mu}{m}-\frac{a_\nu}{n}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)+\cot\varepsilon_\lambda\right\}+2\frac{\partial\eta_\nu}{\partial\nu}=0,\\
&l\left(\frac{a_\lambda}{l}-\frac{a_\mu}{m}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)-\cot\varepsilon_\nu\right\}+l\left(\frac{a_\nu}{n}-\frac{a_\lambda}{l}\right)\left\{\cot(\varepsilon_\mu-2\theta_\mu)+\cot\varepsilon_\mu\right\}+2\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(70)$$

le quali servono ad esprimere i tre angoli θ nel modo dichiarato.

4.

Passiamo a costituire le tre equazioni alle derivate parziali del second'ordine tra le $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$.

Eliminando dalla prima (70) le $\cot(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)$, $\cot(\varepsilon_\nu-2\theta_\nu)$ mediante le (68), risulta

$$\begin{aligned}
&m\left\{\frac{2T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\left(\frac{a_\mu}{m}+\frac{a_\nu}{n}\right)\cot\varepsilon_\lambda\right\}-m\left(\frac{a_\mu}{m}-\frac{a_\nu}{n}\right)\cot\varepsilon_\lambda\\
&+m\left\{\frac{2T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\left(\frac{a_\lambda}{l}+\frac{a_\mu}{m}\right)\cot\varepsilon_\nu\right\}+m\left(\frac{a_\lambda}{l}-\frac{a_\mu}{m}\right)\cot\varepsilon_\nu+2\frac{\partial\eta_\mu}{\partial\mu}=0.
\end{aligned}$$

Avremo quindi la prima delle seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}+\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}=\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\lambda+\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\nu-\frac{1}{m}\frac{\partial\eta_\mu}{\partial\mu},\\
&\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}+\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}=\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\mu+\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\lambda-\frac{1}{n}\frac{\partial\eta_\nu}{\partial\nu},\\
&\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}+\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}=\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\nu+\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\mu-\frac{1}{l}\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}.
\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

Queste sono le tre equazioni che si volevano formare.

5.

Finalmente, veniamo a costituire le sei equazioni alle derivate parziali del terz' ordine.

Deduciamo dalle due prime (67)

$$\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right)=\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda;$$

per cui, osservando la (a) del numero 2, sarà

$$\frac{\cos\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda}{r_\lambda}-\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}=T_\lambda.\qquad(a)$$

Deduciamo pure dalle stesse due prime (67)

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right)=$$

$$-\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda\cos\varepsilon_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}(\operatorname{sen}^3\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda-\cos^3\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda);$$

ma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda-\cos^3\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda&=\cos\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda-\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos2\theta_\lambda\\&=-\cos\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda-\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda);\end{aligned}$$

perciò sarà

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta'_\lambda}{r_\lambda}+\frac{\cos\theta_\lambda\operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right)=$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda\frac{\alpha_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda\cos\theta'_\lambda-\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda\cos\theta_\lambda)+\frac{\alpha_\nu}{n}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda-2\theta_\lambda),$$

ovvero, osservando la (a) del numero 2,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta'_\lambda}{r_\lambda} + \frac{\cos\theta_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda}{\rho_\lambda} = -T_\lambda \cot\varepsilon_\lambda + \frac{a_\nu}{n}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{b}$$

Ricaviamo ancora dalle due prime (67)

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{\cos\theta_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right) =$$

$$\frac{a_\mu}{m}(\operatorname{sen}^3\theta'_\lambda \cos\theta_\lambda - \cos^3\theta'_\lambda \operatorname{sen}\theta_\lambda) + \frac{a_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta_\lambda \cos\varepsilon_\lambda;$$

ma

$$\operatorname{sen}^3\theta'_\lambda \cos\theta_\lambda - \cos^3\theta'_\lambda \operatorname{sen}\theta_\lambda = \cos\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda \cos\theta'_\lambda - \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos 2\theta'_\lambda$$
$$= -\cos\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda \cos\theta'_\lambda - \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta'_\lambda);$$

perciò

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{\cos\theta_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta'_\lambda}{\rho_\lambda}\right) =$$

$$-\cos\varepsilon_\lambda\left(\frac{a_\mu}{m}\operatorname{sen}\theta'_\lambda \cos\theta'_\lambda - \frac{a_\nu}{n}\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta_\lambda\right) + \frac{a_\mu}{m}\operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda),$$

e quindi

$$\frac{\cos\theta_\lambda \operatorname{sen}\theta'_\lambda}{r_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\theta_\lambda \cos\theta'_\lambda}{\rho_\lambda} = -T_\lambda \cot\varepsilon_\lambda + \frac{a_\mu}{m}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}. \tag{c}$$

Inoltre, sussistono le due formole

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) = \frac{a_\mu}{m} - \frac{a_\nu}{n}, \\ &\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda)\left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) = \frac{2T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} - \left(\frac{a_\mu}{m} + \frac{a_\nu}{n}\right)\cot\varepsilon_\lambda; \end{aligned}\right\}. \tag{d}$$

l'una delle quali proviene dalle due prime (67) e l'altra è la prima (68) trasformata. Finalmente, siccome

$$\operatorname{sen}2\theta_\lambda = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda) - \cos\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda),$$
$$\operatorname{sen}2\theta'_\lambda = \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda) + \cos\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}(\varepsilon_\lambda - 2\theta_\lambda);$$

così concluderemo dalle (d)

$$\operatorname{sen} 2\theta_\lambda \left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) = \frac{2\, T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \left(\frac{\alpha_\mu}{m} + \frac{\alpha_\nu}{n}\right) \cot \varepsilon_\lambda - \cot \varepsilon_\lambda \left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{\alpha_\nu}{n}\right),$$

$$\operatorname{sen} 2\theta'_\lambda \left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) = \frac{2\, T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \left(\frac{\alpha_\mu}{m} + \frac{\alpha_\nu}{n}\right) \cot \varepsilon_\lambda + \cot \varepsilon_\lambda \left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{\alpha_\nu}{n}\right),$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\theta_\lambda \left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) &= 2\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\mu}{m} \cot \varepsilon_\lambda\right), \\ \operatorname{sen} 2\theta'_\lambda \left(\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) &= 2\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\nu}{n} \cot \varepsilon_\lambda\right). \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Ora, le (58), (59), in seguito alla sostituzione de' valori (a), (b), (c), (d), (e), diventano

$$n \frac{\partial}{\partial \mu}\left(T_\lambda \cot \varepsilon_\lambda - \frac{\alpha_\nu}{n} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\right) + m \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\mu}{m} \cot \varepsilon_\lambda\right)$$

$$+ \frac{\partial n}{\partial \mu} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{\alpha_\nu}{n}\right) + 2 \frac{\partial m}{\partial \nu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\mu}{m} \cot \varepsilon_\lambda\right) + n \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} T_\lambda = 0,$$

$$m \frac{\partial}{\partial \nu}\left(T_\lambda \cot \varepsilon_\lambda - \frac{\alpha_\mu}{m} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\right) + n \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\nu}{n} \cot \varepsilon_\lambda\right)$$

$$- \frac{\partial m}{\partial \nu} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\left(\frac{\alpha_\mu}{m} - \frac{\alpha_\nu}{n}\right) + 2 \frac{\partial n}{\partial \mu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} - \frac{\alpha_\nu}{n} \cot \varepsilon_\lambda\right) + m \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} T_\lambda = 0.$$

Siccome poi

$$\frac{\partial \cdot T_\lambda \cot \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} + T_\lambda \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} = \cos \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\alpha_\nu}{n} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\right) = \cos \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\alpha_\nu}{n} \cot \varepsilon_\lambda\right) + \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \frac{\alpha_\nu}{n},$$

$$\frac{\partial \cdot T_\lambda \cot \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} + T_\lambda \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} = \cos \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{T_\lambda}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\alpha_\mu}{m} \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}\right) = \cos \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\alpha_\mu}{m} \cot \varepsilon_\lambda\right) + \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{\alpha_\mu}{m};$$

così le due precedenti equazioni si cambiano nelle due prime tra le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&n\cos\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\lambda\right)+m\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\lambda\right)-n\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{\alpha_\nu}{n}\\
&\qquad+2\frac{\partial m}{\partial\nu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\lambda\right)+\frac{\partial n}{\partial\mu}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\alpha_\mu}{m}-\frac{\alpha_\nu}{n}\right)=0,\\
&m\cos\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\lambda\right)+n\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\lambda\right)-m\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\cdot\frac{\alpha_\mu}{m}\\
&\qquad+2\frac{\partial n}{\partial\mu}\left(\frac{T_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\lambda\right)-\frac{\partial m}{\partial\nu}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\left(\frac{\alpha_\mu}{m}-\frac{\alpha_\nu}{n}\right)=0,\\
&l\cos\varepsilon_\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\mu\right)+n\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\mu\right)-l\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\cdot\frac{\alpha_\lambda}{l}\\
&\qquad+2\frac{\partial n}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\mu\right)+\frac{\partial l}{\partial\nu}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\left(\frac{\alpha_\nu}{n}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\right)=0;\\
&n\cos\varepsilon_\mu\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\nu}{n}\cot\varepsilon_\mu\right)+l\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\mu\right)-n\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\frac{\partial}{\partial\lambda}\cdot\frac{\alpha_\nu}{n}\\
&\qquad+2\frac{\partial l}{\partial\nu}\left(\frac{T_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\mu\right)-\frac{\partial n}{\partial\lambda}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\left(\frac{\alpha_\nu}{n}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\right)=0,\\
&m\cos\varepsilon_\nu\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\nu\right)+l\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\nu\right)-m\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\frac{\partial}{\partial\lambda}\cdot\frac{\alpha_\mu}{m}\\
&\qquad+2\frac{\partial l}{\partial\mu}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\nu\right)+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\left(\frac{\alpha_\lambda}{l}-\frac{\alpha_\mu}{m}\right)=0,\\
&l\cos\varepsilon_\nu\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\lambda}{l}\cot\varepsilon_\nu\right)+m\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\nu\right)-l\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{\alpha_\lambda}{l}\\
&\qquad+2\frac{\partial m}{\partial\lambda}\left(\frac{T_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}-\frac{\alpha_\mu}{m}\cot\varepsilon_\nu\right)-\frac{\partial l}{\partial\mu}\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\left(\frac{\alpha_\lambda}{l}-\frac{\alpha_\mu}{m}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(72)$$

Queste sono le sei equazioni che si volevano costituire.

È chiaro che, se si risolvessero le (71) rispetto alle T_λ, T_μ, T_ν, si formassero i valori delle $\frac{\partial T_\lambda}{\partial\mu}$, $\frac{\partial T_\lambda}{\partial\nu}$, $\frac{\partial T_\mu}{\partial\nu}$, $\frac{\partial T_\mu}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial T_\nu}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial T_\nu}{\partial\mu}$ e questi si sostituissero nelle (72), risulterebbero sei novelle equazioni tra le $l, m, n, \varepsilon_\lambda$, ε_μ, ε_ν alle sole derivate parziali del second'ordine.

6.

Da ultimo, vediamo come si modificano i valori (67) de' sei raggi di curvatura e le equazioni (71), (72) nel caso in cui le superficie de' tre sistemi sono ortogonali tra loro.

In questo caso, pel noto teorema di Dupin, le superficie de' tre sistemi si segheranno secondo le loro linee di curvatura; per cui saranno

$$\theta = 0, \quad \theta' = \frac{1}{2}\pi,$$

ove s'intendano attribuiti a θ e θ' i tre indici λ, μ, ν. Dunque, le (67), in causa anche delle (62), (63), diventeranno

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_\lambda} = -\frac{1}{lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}, \quad \frac{1}{\rho_\lambda} = -\frac{1}{nl}\frac{\partial n}{\partial \lambda}, \\ &\frac{1}{r_\mu} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial n}{\partial \mu}, \quad \frac{1}{\rho_\mu} = -\frac{1}{lm}\frac{\partial l}{\partial \mu}, \\ &\frac{1}{r_\nu} = -\frac{1}{nl}\frac{\partial l}{\partial \nu}, \quad \frac{1}{\rho_\nu} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial m}{\partial \nu}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Osserviamo che le $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$, come risulta dalle espressioni formate alla fine del numero 3 della Memoria I.ª, Parte I.ª, sono le quantità chiamate dal signor Lamé *parametri differenziali del prim' ordine* delle λ, μ, ν riguardate come funzioni delle x, y, z. Le (73) s' identificano adunque con le formole analoghe date dal signor Lamé nelle *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (éd. Paris 1859, p. 51).

Le (71) somministrano

$$T = 0,$$

ove s'intendano attribuiti a T i tre indici λ, μ, ν, ovvero

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l^2}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\frac{1}{m}\frac{\partial n}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{n}\frac{\partial m}{\partial \nu} = 0, \\ &\frac{1}{m^2}\frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\partial l}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{l}\frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0, \\ &\frac{1}{n^2}\frac{\partial l}{\partial \nu}\frac{\partial m}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{l}\frac{\partial m}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\frac{1}{m}\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Queste equazioni sono identiche alle tre date dal signor Lamé alla p. 78 delle *Leçons* suddette.

Infine, le prime due (72), scritte sotto la forma

$$\frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\alpha_\mu}{m}=\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial m}{\partial \nu}\frac{\alpha_\nu}{n}=\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial_\nu},$$

somministrano le prime due tra le seguenti

$$\frac{1}{lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial n}{\partial \mu}=\frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\frac{1}{l}\frac{\partial n}{\partial \lambda}, \qquad \frac{1}{nl}\frac{\partial n}{\partial \lambda}\frac{\partial m}{\partial \nu}=\frac{\partial}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{l}\frac{\partial m}{\partial \lambda},$$

$$\frac{1}{mn}\frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\partial l}{\partial \nu}=\frac{\partial}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{m}\frac{\partial l}{\partial \mu}, \qquad \frac{1}{lm}\frac{\partial l}{\partial \mu}\frac{\partial n}{\partial \lambda}=\frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{m}\frac{\partial n}{\partial \mu},$$

$$\frac{1}{nl}\frac{\partial l}{\partial \nu}\frac{\partial m}{\partial \lambda}=\frac{\partial}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{n}\frac{\partial m}{\partial \nu}, \qquad \frac{1}{mn}\frac{\partial m}{\partial \nu}\frac{\partial l}{\partial \mu}=\frac{\partial}{\partial \mu}\cdot\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \nu}.$$

Si vede che la prima di queste equazioni coincide con la quarta, la seconda con la quinta e la terza con la sesta; dimodochè le sole equazioni differenti si riducono alle tre prime, le quali possono scriversi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda \partial \mu}&=\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial \mu}\frac{\partial n}{\partial \lambda}+\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial n}{\partial \mu},\\
\frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \nu}&=\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \nu}\frac{\partial l}{\partial \mu}+\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\partial l}{\partial \nu},\\
\frac{\partial^2 m}{\partial \nu \partial \lambda}&=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial \lambda}\frac{\partial m}{\partial \nu}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial \nu}\frac{\partial m}{\partial \lambda}.
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Queste equazioni sono identiche alle tre altre date dal signor Lamé alla pag. 76 delle *Leçons* citate.

Pavia, 21 dicembre 1868.

Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie.

(*del prof.* R. Lipschitz, *a Bonn*).

I più importanti progressi che ha fatti la teorica dei sistemi di equazioni differenziali, nelle quali certe variabili sono considerate come funzioni d'una variabile indipendente, dai lavori di Jacobi in poi, sono dovuti allo sviluppo della teorica delle quantità complesse. Per ogni dato sistema di equazioni differenziali una questione capitale è questa: se sia possibile, alla prima, di determinare le variabili dipendenti in modo che esse soddisfacciano il sistema di equazioni differenziali, e che per un dato valore della variabile indipendente soddisfacciano un numero di equazioni corrispondente al numero d'ordine del sistema. Tale questione è stata esaminata a fondo pel caso che le espressioni ch'entrano nel sistema di equazioni differenziali permettano immediatamente l'ipotesi, che tanto la variabile indipendente quanto le dipendenti sieno della forma $a+b\sqrt{-1}$. Siccome ogni funzione d'una quantità complessa, escludendo certi luoghi singolari del suo campo, dev'essere sviluppabile in serie procedente secondo le potenze intere e positive d'una funzione lineare di questa quantità complessa, così ne viene che la soluzione della questione in discorso dipende dalla risposta all'altra domanda, se cioè sia possibile di esprimere corrispondentemente alle addotte condizioni, sotto forma di serie di potenze, convergenti per un certo campo della variabile indipendente, le variabili dipendenti che entrano nel sistema di equazioni differenziali. È da questo punto di vista che l'esame della possibilità dell'integrazione completa d'un dato sistema di equazioni differenziali, avente l'indicato carattere, venne generalmente intrapreso ed eseguito (*).

(*) Weierstrass, *Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.* Gior. di Crelle, t. LI, pag. 43. Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, pag. 49.

Se invece le espressioni che entrano in un dato sistema di equazioni differenziali sono date nell'ipotesi soltanto di elementi reali, e non permettono un'immediata estensione all'ipotesi di elementi complessi, allora non siamo più autorizzati ad ammettere che le variabili dipendenti sieno sviluppabili in serie procedenti secondo le potenze d'una funzione lineare della variabile indipendente reale. Le condizioni della possibilità d'un'integrazione completa devono per ciò basarsi sopra altro terreno. Non essendovi a mia cognizione un lavoro indirizzato con rigore a questo scopo, io farò conoscere nelle seguenti pagine una ricerca relativa allo argomento, avvertendo che ne è guida la dimostrazione dell'esistenza d'un integrale definito (*).

Si può supporre che il proposto sistema di equazioni differenziali sia ridotto, mercè l'introduzione di nuove variabili dipendenti, ad una forma contenente soltanto i coefficienti differenziali di primo ordine delle n variabili $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$ rispetto alla variabile indipendente x. Supporremo inoltre che i valori di ogni singolo coefficiente differenziale $\frac{d\overset{a}{y}}{dx}$, dove $a = 1, 2, \dots n$, possano essere rappresentati per mezzo delle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$ (**), e sieno espressi per mezzo delle medesime. Allora il sistema di equazioni differenziali assume la seguente forma

$$\frac{d\overset{a}{y}}{dx} = \overset{a}{f}(x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}). \tag{1}$$

Ammettiamo ora che le n funzioni $\overset{a}{f}$ siano date per un certo complesso di sistemi continuamente connessi e reali di valori delle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$; questo complesso si chiamerà il campo G. Nel caso che sia il numero $n = 2$, il concetto che alle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}$ corrispondano coordinate ortogonali nello spazio offre una rappresentazione alla quale le seguenti considerazioni si collegano naturalmente. Per tutti i sistemi di valori del campo G, le n fun-

(*) Newton, *Principia,* liber I, sectio I, lemma II. Lejeune Dirichlet, *Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinus-Reihen.* (Repertorium der Physik di Dove e Moser, t. I, pag. 152).

(**) La condizione necessaria e sufficiente per ciò, nei sistemi di equazioni differenziali isoperimetriche trattati nei *Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale* (G. di Crelle-Borchardt t. 65, pag. 26), consiste in ciò, che il determinante ivi indicato con Δ non debba annullarsi identicamente; e questa condizione fu ivi esplicitamente notata.

zioni f debbono esser determinate in modo unico, numericamente minori di un valore fisso, e continue. Esse inoltre debbono avere la proprietà che per ogni coppia di sistemi di valori, differenti rispetto alle variabili $\overset{a}{y}$, ma aventi lo stesso valore della variabile x, $x=h$, $\overset{a}{y}=\overset{a}{k}$ ed $x=h$, $\overset{a}{y}=\overset{a}{l}$, sussistano le seguenti ineguaglianze

$$\left[\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{k}, \overset{2}{k}, \ldots \overset{n}{k}\right)-\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{l}, \overset{2}{l}, \ldots \overset{n}{l}\right)\right]< \tag{2}$$
$$<\overset{a,1}{c}\left[\overset{1}{k}-\overset{1}{l}\right]+\overset{a,2}{c}\left[\overset{2}{k}-\overset{2}{l}\right]+\cdots+\overset{a,n}{c}\left[\overset{n}{k}-\overset{n}{l}\right].$$

Qui le $\overset{a,b}{c}$ sono costanti finite e positive e il simbolo $[w]$ indica, come sempre in seguito, il valore assoluto della quantità reale w. La condizione della continuità consistendo in ciò, che per due sistemi qualsivogliano di valori differenti rispetto a tutte le variabili, $x=h$, $\overset{a}{y}=\overset{a}{k}$ ed $x=j$, $\overset{a}{y}=\overset{a}{l}$, il valore $\left[\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{k}, \overset{2}{k} \ldots \overset{n}{k}\right)-\overset{a}{f}\left(j, \overset{1}{l}, \overset{2}{l}, \ldots \overset{n}{l}\right)\right]$ diventi piccolo quanto si voglia, quando i valori $[h-j]$, $\left[\overset{a}{k}-\overset{a}{l}\right]$ si approssimano a zero; ne viene che la condizione della continuità nell'ipotesi delle ineguaglianze (2) sarà soddisfatta allora e solo allora quando, per una quantità σ piccola quanto si voglia ed una differenza decrescente $[h-j]$ fra due sistemi qualunque di valori che differiscano solo rispetto al valore di x, riescano soddisfatte le ineguaglianze

$$\left[\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{l}, \overset{2}{l}, \ldots \overset{n}{l}\right)-\overset{a}{f}\left(j, \overset{1}{l}, \overset{2}{l}, \ldots \overset{n}{l}\right)\right]<\sigma. \tag{3}$$

Il sistema (1) di equazioni differenziali è completamente integrato, quando siasi determinato un sistema di funzioni $\overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots \overset{n}{y}$ che soddisfacciano il sistema (1) e che per $x-x_0$ diano le n equazioni

$$\overset{a}{y}=\overset{a}{y}_0. \tag{1^a}$$

Il sistema di valori $\left(x_0, \overset{1}{y}_0, \overset{2}{y}_0 \ldots \overset{n}{y}_0\right)$ può prendersi ad arbitrio nel campo G, colla limitazione però che ciascuna delle $(n+1)$ variabili abbia ancora in G, a partire da esso sistema, un campo finito di variabilità. Cioè, pel sistema di valori $\left(x_0, \overset{1}{y}_0, \ldots \overset{n}{y}_0\right)$ debbono potersi scegliere le quantità finite positive a_0, $\overset{a}{b}_0$, in modo che le ineguaglianze

$$[x - x_0] \leqq a_0, \quad \left[\overset{a}{y} - \overset{a}{y}_0\right] \leqq \overset{a}{b}_0$$

determinino un campo situato entro G.

Per conseguenza debbono esservi delle costanti finite e positive $\overset{a}{c}_0$, per le quali sussistano nel campo testè indicato le ineguaglianze

$$\left[\overset{a}{f}\right] < \overset{a}{c}_0. \tag{4}$$

Scelgasi ora un valore positivo A_0 in modo che sia

$$A_0 \overset{a}{c}_0 < \overset{a}{b}, \quad A_0 < a_0, \tag{4^a}$$

e si chiami H_0 il luogo limitato dalle ineguaglianze

$$[x - x_0] \leqq A_0, \quad \left[\overset{a}{y} - \overset{a}{y}_0\right] \leqq \overset{a}{b}_0 \tag{4^b}$$

il quale è contenuto nel campo testè indicato e quindi in G. In queste ipotesi esiste in fatto uno ed un solo sistema di n funzioni $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots \overset{n}{y}$, che soddisfanno il sistema (1) di equazioni differenziali, e che inoltre, quando la variabile x percorre il cammino da $x_0 - A_0$ ad $x_0 + A_0$, variano in modo continuo entro H_0, e pel valore $x - x_0$ soddisfanno le n equazioni $\overset{a}{y} = \overset{a}{y}_0$.

Per la dimostrazione di questa proposizione basta seguire il movimento della variabile x da x_0 ad $x_0 + A_0$, poichè il movimento della stessa da x_0 ad $x_0 - A_0$ permette una considerazione affatto analoga. Per provare dapprima l'esistenza d'una soluzione del sistema (1), avente l'indicato carattere, imaginiamo interpolata tra i valori x_0 ed $x_0 + A_0$ una serie di quantità x_1, $x_2, \ldots x_{p-1}$ tali, che

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_p = x_0 + A_0,$$

e determiniamo poi n quantità $\overset{a}{\eta}_1$ per mezzo delle n equazioni seguenti:

$$\overset{a}{\eta}_1 - \overset{a}{y}_0 = \overset{a}{f}\left(x_0, \overset{1}{y}_0, \overset{2}{y}_0, \ldots \overset{n}{y}_0\right)(x_1 - x_0). \tag{5}$$

Queste equazioni non sono altro che il sistema dato di equazioni differenziali (1), dove nel primo membro siasi sostituito a dx la differenza finita $x_1 - x_0$, ed a $d\overset{a}{y}$ la differenza finita $\overset{a}{\eta}_0 - \overset{a}{y}_0$, e nel secondo membro siasi fatta la sostituzione $x = x_0$, $\overset{a}{y} = \overset{a}{y}_0$. Per le ipotesi (4) e ($4^a$), dalle (5) seguono le ineguaglianze

$$\left[\overset{a}{\eta}_1 - \overset{a}{y}_0\right] < \overset{a}{c}_0 (x_1 - x_0) < \overset{a}{b}_0,$$

le quali mostrano che il sistema di valori $\left(x_1, \overset{1}{\eta}_1, \overset{2}{\eta}_1 \ldots \overset{n}{\eta}_1\right)$ è situato entro H_0. Ora può nello stesso modo formarsi una serie di sistemi di valori $\left(x_{\alpha+1}, \overset{1}{\eta}_{\alpha+1}, \overset{2}{\eta}_{\alpha+1}, \ldots \overset{n}{\eta}_{\alpha+1}\right)$ ponendo successivamente $\alpha = 1, 2, \ldots p-1$ nelle equazioni

$$\overset{a}{\eta}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_\alpha = \overset{a}{f}\left(x_\alpha, \overset{1}{\eta}_\alpha, \overset{2}{\eta}_\alpha \ldots \overset{n}{\eta}_\alpha\right)(x_{\alpha+1} - x_\alpha), \tag{5^a}$$

e si ha la completa sicurezza che tutti questi sistemi di valori sono inclusi in H_0. Dopo di ciò, la partizione dell'intervallo venga continuata in modo che fra due valori qualunque x_α ed $x_{\alpha+1}$ siano interpolati in ordine di grandezza i valori

$$x_{\alpha,1},\ x_{\alpha,2}, \ldots,\ x_{\alpha,q_\alpha-1} < x_{\alpha,q_\alpha} = x_{\alpha+1,0} = x_{\alpha+1}$$

e si profitti della nuova partizione dell'intero spazio da x_0 ad $x_0 + A_0$ per formare, partendo dal dato sistema $(x_0, \overset{1}{y}_0, \overset{2}{y}_0, \ldots \overset{n}{y}_0)$, e col processo or ora indicato, una nuova serie di sistemi di valori, che evidentemente restano pure inclusi in H_0. Questa novella serie di sistemi di valori $(x_{\alpha,\mu_\alpha}, \overset{1}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha}, \overset{2}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha}, \ldots \overset{n}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha})$ nasce dalle equazioni

$$\overset{a}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha} = \overset{a}{f}\left(x_{\alpha,\mu_\alpha}, \overset{1}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha}, \ldots \overset{n}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha}\right)\left(x_{\alpha,\mu_\alpha+1} - x_{\alpha,\mu_\alpha}\right) \tag{6}$$

ponendovi successivamente α eguale ai numeri da 0 a $p-1$, μ_α eguale ai numeri da 0 a $q_\alpha - 1$, e prendendo

$$\overset{a}{\eta}_{0,0} = \overset{a}{y}_0, \qquad \overset{a}{\eta}_{\alpha,q_\alpha} = \overset{a}{\eta}_{\alpha+1,0}.$$

Adesso si tratta di stabilire che, se le quantità $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$ prese originariamente si mantengono fisse, mentre per ogni α il numero q_α cresce infinitamente nel tempo stesso che gl'intervalli $x_{\alpha,\mu_\alpha+1} - x_{\alpha,\mu_\alpha}$ decrescono incessantemente secondo una legge qualunque, i valori

$$\overset{a}{\eta}_{\alpha+1,0} = \overset{a}{y}_{\alpha+1},$$

che corrispondono ai valori della variabile indipendente $x = x_{\alpha+1}$, convergono verso limiti fissi, e completamente indipendenti dal modo di crescere dei numeri q_α e dalla legge secondo cui decrescono i nuovi intervalli interpolati fra $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}, x_p$. Questa proposizione però emergerà dalla circostanza, che nelle condizioni esistenti è sempre possibile di scegliere sin da principio le quantità fisse $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$, in modo che i valori assoluti delle differenze $\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}$ debbano per ciascuna α restare minori di una quantità data piccola quanto si voglia.

Sostituendo successivamente nella equazione (6) $\mu_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \mu_\alpha$ e sommando le equazioni risultanti, si ottiene la nuova equazione

$$\overset{a}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha,0} = \sum_{\mu'_\alpha=0}^{\mu'_\alpha=\mu_\alpha} \overset{a}{f}\left(x_{\alpha,\mu'_\alpha}, \overset{1}{\eta}_{\alpha,\mu'_\alpha}, \ldots \overset{n}{\eta}_{\alpha,\mu'_\alpha}\right)\left(x_{\alpha,\mu'_\alpha+1} - x_{\alpha,\mu'_\alpha}\right). \tag{7}$$

Questa, applicando la (4), offre l'ineguaglianza

$$\left[\overset{a}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha,0}\right] < \overset{a}{c}_0\,(x_{\alpha,\mu_\alpha+1} - x_{\alpha,0}) < \overset{a}{c}_0\,(x_{\alpha+1} - x_\alpha).$$

Tale ineguaglianza esprime, che i sistemi di valori $(x_{\alpha,\mu_\alpha}, \overset{1}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha}, \ldots \overset{n}{\eta}_{\alpha,\mu_\alpha})$, qualora si mantenga fisso l'indice α, e si dieno all'indice μ_α tutt'i valori da 0 a $q_\alpha - 1$, sono inclusi in un luogo K_α, nel quale i limiti di ciascuna delle $(n+1)$ variabili possono restringersi a piacere, purchè la differenza $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ si scelga sufficientemente piccola. Ora siccome per ipotesi le funzioni $\overset{a}{f}$ sono dappertutto continue entro H_0, si potrà sempre prendere la differenza $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ tanto piccola, che ciascuna differenza tra i valori di una stessa $\overset{a}{f}$ entro K_α sia più piccola di una data quantità positiva λ, piccola quanto si voglia. Supponendo quindi, come d'ora in poi deve essere, che le differenze $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ sieno scelte secondo questa condizione (e con ciò si determina anche il numero p), e indicando con $\overset{a}{\varepsilon}_\alpha$ una frazione propria positiva o negativa, l'equazione (7), ponendovi $\mu_\alpha = q_\alpha - 1$, dà il risultato

$$\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{y}_\alpha = \left[\overset{a}{f}\left(x_\alpha, \overset{1}{y}_\alpha, \overset{2}{y}_\alpha, \ldots \overset{n}{y}_\alpha\right) + \overset{a}{\varepsilon}_\alpha \lambda\right]\left(x_{\alpha+1} - x_\alpha\right). \tag{8}$$

Da questa equazione sottraendo la (5ª), si ricava la nuova relazione:

$$\overset{a}{y}_{\alpha+1}-\overset{a}{\eta}_{\alpha+1}=\overset{a}{y}_{\alpha}-\overset{a}{\eta}_{\alpha}+\left[\overset{a}{f}\left(x_\alpha,\overset{1}{y}_\alpha,\overset{2}{y}_\alpha,\dots\overset{n}{y}_\alpha\right)-\overset{a}{f}\left(x_\alpha,\overset{1}{\eta}_\alpha,\overset{2}{\eta},\dots\overset{n}{\eta}_\alpha\right)+\overset{a}{\varepsilon}_\alpha\lambda\right](x_{\alpha+1}-x_\alpha). \quad (9)$$

Ma per la (2) si ha la relazione

$$\left[\overset{a}{f}\left(x_\alpha,\overset{1}{y}_\alpha,\dots\overset{n}{y}_\alpha\right)-\overset{a}{f}\left(x_\alpha,\overset{1}{\eta}_\alpha,\dots\overset{n}{\eta}_\alpha\right)\right]<\overset{a,1}{c}\left[\overset{1}{y}_\alpha-\overset{1}{\eta}_\alpha\right]+\overset{a,2}{c}\left[\overset{2}{y}_\alpha-\overset{2}{\eta}_\alpha\right]+\dots+\overset{a,n}{c}\left[\overset{n}{y}_\alpha-\overset{n}{\eta}_\alpha\right],$$

e per ciò l'equazione (9), adottando la notazione

$$\left[\overset{a}{y}_\alpha-\overset{a}{\eta}_\alpha\right]=\overset{a}{z}_\alpha, \quad (10)$$

conduce alla serie d'ineguaglianze

$$\overset{a}{z}_{\alpha+1}<\overset{a}{z}_\alpha+\left(\overset{a,1}{c}\,\overset{1}{z}_\alpha+\overset{a,2}{c}\,\overset{2}{z}_\alpha+\dots+\overset{a,n}{c}\,\overset{n}{z}+\lambda\right)(x_{\alpha+1}-x_\alpha) \quad (11)$$

mentre per l'ipotesi si ha

$$\overset{a}{z}_0=0. \quad (11^a)$$

Ora egli è chiaro che formando una serie di nuove quantità $\overset{a}{u}_\alpha$ mediante questa serie ricorrente di equazioni

$$\left.\begin{aligned}&\overset{a}{u}_{\alpha+1}-\overset{a}{u}_\alpha=\left(\overset{a,1}{c}\,\overset{1}{u}_\alpha+\overset{a,2}{c}_\alpha\,\overset{2}{u}_\alpha+\dots+\overset{a,n}{c}\,\overset{n}{u}_\alpha+\lambda\right)(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\\&\overset{a}{u}_0=0\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

ove la lettera α prende come sopra tutti i valori da 0 a $p-1$, sussisteranno le ineguaglianze

$$\overset{a}{z}_{\alpha+1}<\overset{a}{u}_{\alpha+1}. \quad (13)$$

Ma siccome nella dimostrazione da farsi si tratta di trovare per le quantità $\overset{a}{z}_{\alpha+1}$ dei limiti superiori, i quali per un valore di λ, piccolo quanto si voglia, si dimostrino piccoli quanto si voglia; ne viene il problema o di determinare le quantità $\overset{a}{u}_{\alpha+1}$ stesse, o di ricercare tali quantità che superino rispettivamente le $\overset{a}{u}_{\alpha+1}$, e sieno tuttavia adatte allo scopo indicato. Noi preferiremo di cercare quantità $\overset{a}{v}_{\alpha+1}$ tali, che superino rispettivamente le $\overset{a}{u}_{\alpha+1}$, e soddisfacciano a quello scopo il più semplicemente ch'è possibile.

Dunque, se s'indica con C un valore positivo maggiore della più grande delle n^2 costanti $\overset{ab}{c}$, un sistema di quantità $\overset{a}{v}_\alpha$, determinato dalla seguente serie di equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\overset{a}{v}_{\alpha+1} - \overset{a}{v}_\alpha = \left[C\left(\overset{a}{v}_\alpha + \overset{a}{v}_\alpha + \cdots + \overset{n}{v}_\alpha\right) + \lambda\right](x_{\alpha+1} - x_\alpha) \\ &\overset{a}{v}_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12^a)$$

avrà senza dubbio la proprietà di soddisfare per $\alpha = 1, 2, 3, \ldots (p-1)$ le ineguaglianze

$$\overset{a}{u}_{\alpha+1} < \overset{a}{v}_{\alpha+1}. \qquad (13^a)$$

Ora dalla prima della (12^a) si hanno subito le relazioni

$$\overset{1}{v}_{\alpha+1} - \overset{1}{v}_\alpha = \overset{2}{v}_{\alpha+1} - \overset{2}{v}_\alpha = \cdots = \overset{n}{v}_{\alpha+1} - \overset{n}{v}_\alpha,$$

e quindi dalla seconda delle (12^a) queste altre

$$\overset{1}{v}_\alpha = \overset{2}{v}_\alpha = \cdots = \overset{n}{v}_\alpha.$$

Mediante queste relazioni la prima equazione (12^a) si muta in

$$\overset{a}{v}_{\alpha+1} - \overset{a}{v}_\alpha = \left(n C \overset{a}{v}_\alpha + \lambda\right)(x_{\alpha+1} - x_\alpha),$$

la quale per l'addizione della quantità $\dfrac{\lambda}{nC}$ si esprime così

$$\overset{a}{v}_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{nC} = \left(\overset{a}{v}_\alpha + \frac{\lambda}{nC}\right)\left(1 + n C (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\right).$$

Da qui nasce dunque la seguente determinazione delle quantità $\overset{a}{v}_{\alpha+1}$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{a}{v}_{\alpha+1} = -\frac{\lambda}{nC} + \frac{\lambda}{nC}\left(1 + nC(x_1 - x_0)\right) \times \\ \times \left(1 + nC(x_2 - x_1)\right) \cdots \left(1 + nC(x_{\alpha+1} - x_\alpha)\right). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Si riconosce facilmente che il prodotto

$$\left(1 + nC(x_1 - x_0)\right)\left(1 - nC(x_2 - x_1)\right) \cdots \left(1 + nC(x_{\alpha+1} - x_\alpha)\right),$$

che si presenta nel secondo membro di questa equazione, essendo nC una quantità positiva, ha un valore pure positivo e dippiù minore del valore della funzione esponenziale $e^{nC(x_{\alpha+1}-x_0)}$. Per ciò è $\overset{a}{v}_{\alpha+1} < -\frac{\lambda}{nC} + \frac{\lambda}{nC} e^{nC(x_{\alpha+1}-x_0)}$. Collegando questa osservazione alle ineguaglianze (13) e (13[a]), si perviene alla relazione

$$\left[\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right] = \overset{a}{z}_{\alpha+1} < \frac{-1+e^{nC(x_{\alpha+1}-x_0)}}{nC} \cdot \lambda < \frac{-1+e^{nCA_0}}{nC} \cdot \lambda, \tag{15}$$

e poichè il fattore $\frac{-1+e^{nCA_0}}{nC}$ ha un valore finito fisso, la relazione (15) giustifica l'asserto, che le differenze $\left[\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$ restano sempre piccole quanto si voglia. Imperocchè λ è un valore dato, piccolo quanto si vuole, dalla cui grandezza dipende la scelta degl'intervalli $x_1-x_0\, x_2-x_1, \ldots x_p-x_{p-1}$ secondo una norma sopra indicata. Restando le differenze $\left[\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$ in ogni circostanza piccole quanto si vuole, le quantità $\overset{a}{y}_{\alpha+1}$, corrispendenti ai valori fissi della variabile $x = x_{\alpha+1}$, qualora i numeri q_α crescano indefinitamente e i nuovi intervalli decrescano secondo qualsiasi legge, convergeranno a limiti fissi, affatto indipendenti dal modo di crescere dei numeri q_α e dalla legge secondo cui decrescono i nuovi intervalli. Ma per le (8) questi valori limiti presentano una soluzione del sistema dato di equazioni differenziali, la quale per $x=x_0$ soddisfa le n equazioni $\overset{a}{y} = \overset{a}{y}_0$. È quindi dimostrata l'esistenza d'una soluzione che adempie alle condizioni richieste nella proposizione enunciata, la prima parte della quale è così esaurita.

Che poi non possano esistere due soluzioni diverse del sistema (1), le quali soddisfacciano per $x = x_0$ le equazioni $\overset{a}{y} = \overset{a}{y}_0$ e che, passando x da $x_0 - A_0$ ad $x_0 + A_0$, variino in modo continuo entro H_0, lo si dimostra nel modo seguente. Sia $\overset{a}{y} = \overset{a}{Y}$ una data soluzione avente l'indicato carattere; allora l'intervallo da x_0 ad $x_0 + A_0$, che anche qui è il solo che basti considerare, può sempre coll'interpolazione di valori $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$ ordinati secondo la grandezza, ripartirsi in modo che, essendo $\overset{a}{\varepsilon}_\alpha$ una frazione propria positiva o negativa e λ una quantità positiva data, quanto si voglia piccola, sussista la serie di equazioni

$$\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{Y}_\alpha = \left[\overset{a}{f}\left(x_\alpha, \overset{1}{Y}_\alpha, \overset{2}{Y}_\alpha, \ldots \overset{n}{Y}_\alpha\right) + \overset{a}{\varepsilon}_\alpha \lambda\right](x_{\alpha+1} - x_\alpha), \tag{16}$$

ove il sistema di valori $\overset{a}{y} = \overset{a}{Y}_\alpha$ appartiene al valore della variabile indipendente $x = x_\alpha$, ed ove è, secondo l'ipotesi, $\overset{a}{Y}_0 = \overset{a}{y}_0$. Questa serie di equazioni è una conseguenza immediata delle due ipotesi che il sistema dato di funzioni $\overset{a}{y} = \overset{a}{Y}$ soddisfaccia al sistema (1) di equazioni differenziali, e che, passando x da x_0 ad $x_0 + A_0$, varii con continuità. Or se coi valori $x_0, x_1, x_2 \ldots x_{p-1}$ mediante le superiori equazioni (5) e (5ª) si formi la serie dei sistemi $\overset{a}{\eta}_\alpha$, egli è chiaro che dalla combinazione di queste equazioni colla (16) possono dedursi rispetto alle differenze

$$\left[\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$$

le medesime conclusioni, che prima si sono dedotte rispetto alle differenze

$$\left[\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$$

dalla combinazione dell'equazioni stesse coll'equazione (8). Infatti la (16) scaturisce dalla (8) scrivendo Y_α in luogo di $\overset{a}{y}_\alpha$, e $\overset{a}{Y}_{\alpha+1}$ in luogo di $y_{\alpha+1}$, ed è per ipotesi $\overset{a}{Y}_0 = \overset{a}{y}_0$. Quindi tanto le differenze $\left[\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$ quando le differenze $\left[\overset{e}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right]$, per un λ arbitrariamente piccolo, restano piccole quanto si voglia; e siccome si ha la relazione

$$\left[\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{y}_{\alpha+1}\right] \leqq \left[\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right] + \left[\overset{a}{y}_{\alpha+1} - \overset{a}{\eta}_{\alpha+1}\right],$$

così nelle condizioni esistenti le differenze $\left[\overset{a}{Y}_{\alpha+1} - \overset{a}{y}_{\alpha+1}\right]$ debbono pure essere tanto poco diverse da zero, quanto si voglia. Ma con ciò si viene a dire appunto, che il dato sistema di funzioni $\overset{c}{Y}_\alpha$, e il sistema di funzioni $\overset{a}{y}_\alpha$ che trae origine coll'esposto metodo dal continuo aumento dei numeri q_α e dal decremento dei nuovi intervalli, non possono essere tra loro diversi; e questa era la seconda parte dell'enunciata proposizione. La dimostrazione della quale è dunque completamente finita.

Aggiungeremo ancora alcune osservazioni intorno alle condizioni prescritte per le funzioni $\overset{a}{f}$. Le funzioni $\overset{a}{f}$, per una variazione della variabile x, ferme restando le n variabili $\overset{a}{y}$, sono soggette soltanto alla condizione della continuità

$$\left[\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{l}, \overset{2}{l} \ldots \overset{n}{l}\right) - \overset{a}{f}\left(j, \overset{1}{l}, \overset{2}{l} \ldots \overset{n}{l}\right)\right] < \sigma; \tag{3}$$

mentre invece per una variazione delle n variabili $\overset{a}{y}$, ferma restando la variabile x, queste funzioni sono soggette alle limitazioni

$$\left[\overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{k}, \overset{2}{k} \ldots \overset{n}{k}\right) - \overset{a}{f}\left(h, \overset{1}{l}, \overset{2}{l} \ldots \overset{n}{l}\right)\right] < \overset{a,1}{c}\left[\overset{1}{k} - \overset{1}{l}\right] + \overset{a\,2}{c}\left[\overset{2}{k} - \overset{2}{l}\right] + \cdots + \overset{a\,n}{c}\left[\overset{n}{k} - \overset{n}{l}\right], \tag{2}$$

che sono di una specie particolare.

La validità del metodo di dimostrazione usato è però subordinata a questa specie di limitazione. Ciò si apprende già nella considerazione del caso $n=1$, in cui il sistema (1) riducesi all' unica equazione differenziale

$$\frac{d\overset{1}{y}}{dx} = \overset{1}{f}\left(x, \overset{1}{y}\right).$$

Infatti se invece dell'ineguaglianza (2) si suppone l'ineguaglianza

$$\left[\overset{1}{f}\left(h, \overset{1}{k}\right) - \overset{1}{f}\left(h, \overset{1}{l}\right)\right] < \overset{1,1}{c}\left[\overset{1}{k} - \overset{1}{l}\right]^{\delta} \tag{2*}$$

ove δ dev'essere una quantità positiva minore dell'unità (*), le considerazioni fatte, ritenendo la notazione superiormente usata, conducono invece che alle ineguaglianze (11), alle seguenti ineguaglianze

$$\overset{1}{z}_{\alpha+1} < \overset{1}{z}_{\alpha} + \left[\overset{1,1}{c}\left(\overset{1}{z}_{\alpha}\right)^{\delta} + \lambda\right]\left(x_{\alpha+1} - x_{\alpha}\right), \tag{11*}$$

ed è come allora $\overset{1}{z}_0 = 0$.

Quindi per riconoscere, se le quantità $\overset{1}{z}_{\alpha+1}$ debbono restare piccole ad arbitrio, per una λ arbitrariamente piccola, si formerà il seguente sistema di equazioni per la determinazione di nuove quantità u_α

$$u_{\alpha+1} - u_{\alpha} = \left(\overset{1,1}{c}\, u_{\alpha}^{\delta} + \lambda\right)\left(x_{\alpha+1} - x_{\alpha}\right),\ u_0 = 0, \tag{12*}$$

(*) Cf. Newton, *Principia*, liber I, sectio I, scholium ad lemma XI.

per le quali sussistono nuovamente le ineguaglianze

$$\overset{1}{z}_{\alpha+1} < u_{\alpha+1} \tag{13*}$$

e si ricercherà se queste quantità u_α, per un valore quanto si voglia piccolo di λ, debbano restare o no piccole quanto si voglia. Se avesse luogo il primo caso, la dimostrazione potrebbe per mezzo delle ineguaglianze (13*) condursi a termine come sopra. Ma poichè, come subito apparirà chiaro, ha luogo il secondo caso, non può darsi la dimostrazione in parola. È stato stabilito che gl'intervalli $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \dots x_p - x_{p-1}$ sieno presi così piccoli, che la differenza di due valori qualunque della funzione $\overset{1}{f}(x, \overset{1}{y})$ in un luogo K_α, ove la differenza di due valori x qualunque è minore della quantità $x_{\alpha+1} - x_\alpha$, e la differenza di due valori $\overset{1}{y}$ è minore della quantità $\overset{1}{c}_0 (x_{\alpha+1} - x_\alpha)$, risulti minore del valore dato λ. Per questo motivo, quando sia data la quantità λ, non può essere vietato di scegliere dapprima gl'intervalli $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \dots x_p - x_{p-1}$ in modo ch'essi soddisfacciano a dirittura a questa condizione, e di assumerli poi ancora più piccoli onde vi debbano soddisfare a maggior ragione. Imaginando che ciò sia avvenuto e che x_α indichi una quantità di valore fisso, in seguito delle (12*) la relazione fra questo x_α e il corrispondente u_α sarà rappresentata con quanta esattezza si vuole dalla seguente equazione

$$x_\alpha - x_0 = \int_0^{u_\alpha} \frac{du}{\overset{1,1}{c}\, u^{\overset{1,1}{\delta}} + \lambda}\,.$$

Ma da questa segue la relazione

$$x_\alpha - x_0 < \int_0^{u_\alpha} \frac{du}{\overset{1,1}{c}\, u^{\overset{1,1}{\delta}}} = \frac{1}{\overset{1,1}{c}(-\delta + 1)}\, u_\alpha^{-\delta+1}$$

e invertendo

$$u_\alpha > \left\{ \left(-\delta + 1\right) \overset{1,1}{c} \left(x_\alpha - x_0\right) \right\}^{\frac{1}{-\delta+1}}$$

la quale mostra che la quantità u_α, per un λ quanto si voglia piccolo, non resta in niun modo piccola quanto si vuole; le ineguaglianze (13*) dunque non permettono di concluder nulla sulla grandezza dei valori $\overset{1}{z}_{\alpha+1}$.

È manifesto, che le ineguaglianze (2) sono sempre soddisfatte, quando le funzioni $\overset{a}{f}$ per tutti i sistemi di valori del luogo G hanno i primi quozienti differenziali parziali rispetto alle n variabili $\overset{a}{y}$, finiti, continui e determinati in modo unico. Perchè in quest'ipotesi la differenza

$$\overset{a}{f}(h, \overset{1}{k}, \overset{2}{k}, \ldots \overset{n}{k}) - \overset{a}{f}(h, \overset{1}{l}, \overset{2}{l}, \ldots \overset{n}{l})$$

può rappresentarsi mediante la determinazione del resto del teorema di Taylor sotto una forma, dalla quale si ricavano le ineguaglianze (2). Ma non si può reciprocamente ricavare da queste la proprietà in parola dei quozienti differenziali parziali.

Nel caso che le funzioni $\overset{a}{f}$ non contengano la variabili $\overset{a}{y}$, resta soltanto per queste funzioni $\overset{a}{f}(x)$ la condizione di esser determinate in modo unico, di esser finite, e di essere continue rispetto alla variabile x, e ciascuna delle n equazioni del sistema (1) contiene solo una delle variabili $\overset{a}{y}$. In tal caso il risultato della intrapresa ricerca, che si riduce alla determinazione di

$$\overset{a}{y}_{\alpha} - \overset{a}{y}_0 = \int_{x_0}^{x} \overset{a}{f}(\xi)\, d\xi,$$

si può risolvere nelle due proposizioni, che l'integrale

$$\int_{x_0}^{x} \overset{a}{f}(\xi)\, d\xi$$

abbia un senso determinato, e che il suo quoziente differenziale preso rispetto al superiore x sia eguale al valore funzionale $\overset{a}{f}(x)$. Per la Memoria postuma di Riemann *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* si è fatto noto che anche sotto un' ipotesi più generale di quella della continuità, il concetto dell'integrale definito ha un significato chiaro. Questa ipotesi è dichiarata nel luogo citato, per un integrale definito con due limiti fissi, e, chiamando $\overset{a}{f}(x)$ la funzione, x_0 il limite inferiore, $x_0 + A_0$ il limite superiore, si enuncia come segue. La funzione $\overset{a}{f}(x)$ per tutti i valori da $x = x_0$ ad $x = x_0 + A_0$ dev'essere finita, e deve avere la proprietà che per una ripartizione dell'intervallo mediante i valori $x_1, x_2 \ldots x_{p-1}$ seguentisi secondo la loro grandezza, e pel decremento infinito di tutte le quantità $x_{\alpha+1} - x_\alpha$, la grandezza totale s degli intervalli, nei quali esistano variazioni delle funzioni $\overset{a}{f}(x)$ maggiori di una data quantità σ, riesca all'ultimo sempre infinitamente piccola. Assumiamo ora che questa ipotesi subentri per le nostre funzioni $\overset{a}{f}(x)$ in luogo dell'ipotesi della continuità, ed osserviamo ciò che ne consegue. Egli è chiaro che allora è adempiuta la corrispondente ipotesi per l'integrale

$$\int_{x_0}^{x} \overset{a}{f}(\xi)\, d\xi$$

col limite inferiore x_0 e con un limite superiore x, compreso tra x_0 ed $x_0 + A_0$; ed essa stabilisce il primo degli accennati teoremi, che cioè l'integrale

$$\int_{x_0}^{x} \overset{a}{f}(\xi)\, d\xi$$

ha un senso determinato. Però l'assunta ipotesi, per quanto io veggo, non ha per necessaria conseguenza il secondo degli accennati teoremi, il quale dice, che il quoziente differenziale dell'integrale preso rispetto al suo limite superiore è eguale al valore della funzione corrispondente ad esso limite. Per questo motivo ho creduto che per la presente questione, relativa all'integrazione dell'equazione differenziale $\frac{d\overset{a}{y}}{dx} = \overset{a}{f}(x)$, non si potesse far senza dell'ipotesi che la funzione $\overset{a}{f}(x)$ sia continua.

La presente generale disamina del sistema di equazione differenziali (1) può rendersi utile per la teoria dei problemi isoperimetrici, che formano lo oggetto della Memoria accennata nella nota a pag. 289 (*). Le $y_1, y_2, \ldots y_\sigma$ sono ivi funzioni da determinarsi della variabile indipendente x, f è una funzione data delle quantità x ed $y_{a\,b}$, ove a prende i valori da 1 a σ, e b i valori da 1 ad n, ed inoltre è $y_{a\,0} = y_a$, ma per $b \gtreqless 1$ è $y_{a\,b} = \frac{d^b y_a}{dx^b}$, e si

(*) G. di Crelle-Borchardt, t. 65, pag. 26.

tratta della variazione dell'integrale $V=\int_p^q f\,dx$. Ponendo, come ivi,

$$F_{a.2n-b}=\frac{\partial f}{\partial y_{a.b}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{a.b+1}}+\cdots+(-1)^{n-b}\frac{d^{n-b}}{dx^{n-b}}\frac{\partial f}{\partial y_{a.n}},$$

il sistema delle σ equazioni differenziali appartenenti a quel problema di variazione è

$$F_{a.2n}=0. \tag{I}$$

Ora ove il determinante

$$\Delta=\sum\pm\frac{\partial^2 f}{\partial y_{1.n}\,\partial y_{1.n}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_{2.n}\,\partial y_{2.n}}\cdots\frac{\partial^2 f}{\partial y_{\sigma.n}\,\partial y_{\sigma.n}}$$

non si annulli, questo sistema di equazioni differenziali può esser ridotto alla forma seguente (*), nella quale le quantità y_a, $y_{a.1}, \ldots y_{a.n-1}$ ed $F_{a.n}$, $F_{a.n+1}, \ldots F_{a.2n-1}$ entrano come variabili dipendenti, e che coincide colla forma del nostro sistema (1):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy_a}{dx}=\frac{\partial H}{\partial F_{a.2n-1}},\ldots\frac{dy_{a.n-1}}{dx}=\frac{\partial H}{\partial F_{a.n}},\\&\frac{dF_{a.2n-1}}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_a},\ldots\frac{dF_{a.n}}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_{a.n-1}}.\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

La funzione H è qui così espressa:

$$H=\sum_{a=1}^{a=\sigma}(F_{a.2n-1}\,y_{a.1}+\cdots+F_{a.n}\,y_{a.n})-f.$$

L'attuale ricerca fornisce ora il risultato che, sotto le sviluppate condizioni, deve esistere una soluzione del sistema (II), nella quale le nuove variabili dipendenti per $x=x_0$ sono rispettivamente eguali ai valori costanti prescritti $y_a(0)$, $y_{a.1}(0), \ldots y_{a.n-1}(0)$ ed $F_{a.n}(0)$, $F_{a.n+1}(0) \ldots F_{a.2n-1}(0)$, ed una tale soluzione è presupposta, per le formole (28) delle citata Memoria, nella trasformazione della seconda variazione dell'integrale V ivi eseguita.

Bonn, 15 giugno 1868.

(*) Jacobi, *Theoria novi multiplicatoris aequationum differentialium vulgarium applicandi,* Giornale di Crelle, t. 29, p. 365. Jacobi, *Nova methodus, aequationes differentiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*, Giornale di Crelle t. 60, pag. 159.

Recherche des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique.

(*par M.r* John Casey, *à Kingstown.*)

I.

Angles anharmoniques de deux quadriques inscrites dans une même quadrique.

1. Ce qui suit est une extension de la méthode employée dans la question analogue, où il s'agit de trouver l'équation des coniques inscrites par couples dans une conique donnée et tangentes à deux coniques données, inscrites aussi dans la même conique.

Puisque $S^{\frac{1}{2}}-A=0$ et $S^{\frac{1}{2}}-B=0$ sont deux (surfaces) quadriques inscrites dans la même quadrique $S\equiv x^2+y^2+z^2+w^2$, A et B étant les plans $ax+a'y+a''z+a'''w=0$ et $bx+b'y+b''z+b'''w=0$ respectivement, on voit que $S^{\frac{1}{2}}-A+k(S^{\frac{1}{2}}-B)=0$ est l'équation d'une quadrique inscrite dans S et passant par une des coniques d'intersection de $S-A^2$ et de $S-B^2$, savoir par l'intersection commune de ces deux quadriques et du plan $A-B=0$. Or, si on délivre des radicaux l'équation $S^{\frac{1}{2}}-A+k(S^{\frac{1}{2}}-B)=0$ et qu'on en forme le discriminant pour l'égaler à zero, il est aisé de voir qu'on parvient au résultat suivant

$$(1-S'')k^2+2(1-L)k+1-S'=0, \tag{1}$$

où S', S'' sont les résultats de la substitution des coordonnées des pôles des plans A et B dans S, et L est le résultat de la substitution du pôle de A dans B.

On aurait trouvé le même résultat, si on eût pris les équations des deux quadriques sous la forme $S^{\frac{1}{2}}+A$ et $S^{\frac{1}{2}}+B$. Mais, si on eût pris la couple $S^{\frac{1}{2}}-A$ et $S^{\frac{1}{2}}+B$, ou bien $S^{\frac{1}{2}}+A$ et $S^{\frac{1}{2}}-B$, on aurait obtenu

$$(1-S'')k^2+2(1+L)k+1-S'=0. \tag{2}$$

2. Comme les équations (1) et (2) sont du deuxième dégré par rapport à k, on en conclut que par chaque conique d'intersection de $S-A^2$ et de $S-B^2$ il passe deux cônes circonscrits à la surface S. Les équations de ces couples de cônes sont évidemment les suivantes, dont il faut chasser les radicaux,

$$(1-S'')(S^{\frac{1}{2}}-A)^2-2(1-L)(S^{\frac{1}{2}}-A)(S^{\frac{1}{2}}-B)+(1-S')(S^{\frac{1}{2}}-B)^2=0 \tag{3}$$

$$(1-S'')(S^{\frac{1}{2}}-A)\ -2(1+L)(S^{\frac{1}{2}}-A)(S^{\frac{1}{2}}+B)+(1-S')(S^{\frac{1}{2}}+B)^2=0. \tag{4}$$

3. Si l'intersection commune des quadriques $S-A^2$, $S-B^2$ et du plan $A-B$ est une paire de droites, les deux cônes (3) doivent coïncider et l'équation (1) doit être un carré parfait. De même si l'intersection commune des deux quadriques et du plan $A+B$ est une paire de droites, les deux cônes (4) doivent coïncider et l'équation (2) doit être un carré parfait. Pour que l'une de ces deux choses arrive, il faut donc que l'on ait

$$(1-S')(1-S'')-(1\pm L)^2=0. \tag{5}$$

Or, dans chacun de ces cas les deux quadriques $S-A^2$, $S-B^2$, qui ont déjà un double contact entre elles, en ont encore un troisième au point double de la paire de droites. La condition de ce contact spécial est donc donnée par l'équation (5).

4. Si l'on pose

$$1-L=\sqrt{(1-S')(1-S'')}\cdot\cos\theta,$$
$$1+L=\sqrt{(1-S')(1-S'')}\cdot\cos\phi,$$

on voit aisément que le rapport des racines de l'équation (1) est $=e^{2\theta\sqrt{-1}}$, et que celui des racines de l'équation (2) est $=e^{2\phi\sqrt{-1}}$. On en conclut que les conditions de contact données par l'équation (5) sont équivalentes aux équations

$$\theta = 0, \qquad \phi = 0. \tag{6}$$

5. La considération des angles invariantifs θ et ϕ est très importante dans la théorie des couples de quadriques inscrites dans une même quadrique. Je les appellerai les *angles anharmoniques* des deux quadriques.

Si θ est un angle droit, le rapport des racines de l'équation (1) est l'unité négative, et on a un faisceau harmonique de quatre plans, qui sont les plans A, B et les plans des contacts de S avec les cônes menés par la conique d'intersection de $S-A^2$ et de $S-B^2$ avec le plan $A-B$; en d'autres termes, les pôles de A et de B et les sommets de ces cônes forment un groupe harmonique de points. On a des résultats analogues lorsque l'autre angle ϕ est droit. Lorsque un des angles invariantifs de deux quadriques inscrites dans une même quadrique est un angle droit, je dirai que les deux quadriques se coupent orthogonalement. La condition pour que deux quadriques $S-A^2$, $S-B^2$ se coupent orthogonalement est donc

$$1 \pm L = 0. \tag{7}$$

II.

Équations des huit quadriques qui coupent orthogonalement quatre quadriques inscrites dans une même quadrique.

6. Si on rapporte la quadrique S à un tétraèdre conjugué, de sorte que l'on ait $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, et si on a $A = ax + a'y + a''z + a'''w$, en effectuant l'opération $\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial w}$ sur la quadrique $S^{\frac{1}{2}} - A$, on obtient la nouvelle quadrique

$$(a\lambda + a'\mu + a''\nu + a'''\rho)\, S^{\frac{1}{2}} - (\lambda x + \mu y + \nu z + \rho w) = 0, \tag{8}$$

qui est évidemment reliée avec $S^{\frac{1}{2}} - A$ par la relation $1 - L = 0$ de l'art. 5. On a donc ce théorème fondamental:

Le résultat de l'opération $\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial w}$ *sur toute quadrique de la forme* $S^{\frac{1}{2}} \pm A$ *est une quadrique orthogonale à* $S^{\frac{1}{2}} \pm A$.

7. Soient $S^{\frac{1}{2}} \pm A$, $S^{\frac{1}{2}} \pm B$, $S^{\frac{1}{2}} \pm C$, $S^{\frac{1}{2}} \pm D$ quatre quadriques. S'il s'agit de trouver une quadrique qui les coupe orthogonalement, il est clair, d'après l'équation (8), qu'il faudra poser

$$\begin{aligned} a\lambda + a'\mu + a''\nu + a'''\rho &= \mp 1, \\ b\lambda + b'\mu + b''\nu + b'''\rho &= \mp 1, \\ c\lambda + c'\mu + c''\nu + c'''\rho &= \mp 1, \\ d\lambda + d'\mu + d''\nu + d'''\rho &= \mp 1, \end{aligned}$$

λ, μ, ν, ρ étant les coordonnées du pôle de la quadrique cherchée par rapport à S, et que cette quadrique sera alors

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \rho w = S^{\frac{1}{2}}.$$

Eliminant λ, μ, ν, ρ parmi les cinq dernières équations on obtient

$$\begin{vmatrix} S^{\frac{1}{2}} & x & y & z & w \\ \mp 1 & a & a' & a'' & a''' \\ \mp 1 & b & b' & b'' & b''' \\ \mp 1 & c & c' & c'' & c''' \\ \mp 1 & d & d' & d'' & d''' \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

où les doubles signes de la première colonne répondent à ceux des binômes $S^{\frac{1}{2}} \pm A$, etc. Les différentes combinaisons de ces signes donnent lieu ainsi à huit quadriques orthogonales aux quatre quadriques $S-A^2$, $S-B^2$, $S-C^2$, $S-D^2$.

8. Désignant, pour abréger, par la notation $(S^{\frac{1}{2}}, a, b', c'', d''')$ le déterminant (9) dans le cas où les unités de la prémière colonne sont toutes positives, les huit quadriques orthogonales sont:

$$(S^{\frac{1}{2}},\ a,\ b',\ c'',\ d''') = 0, \tag{9}$$

$$(S^{\frac{1}{2}},\ -a,\ b',\ c'',\ d''') = 0, \tag{10}$$

$$(S^{\frac{1}{2}},\ a,\ -b',\ c'',\ d''') = 0, \tag{11}$$

$$(S^{\frac{1}{2}},\ a,\ b',\ -c'',\ d''') = 0, \tag{12}$$

$$(S^{\frac{1}{2}}, \quad a, \quad b', \quad c'', -d''') = 0\,, \tag{13}$$

$$(S^{\frac{1}{2}}, -a, -b', \quad c'', \quad d''') = 0\,, \tag{14}$$

$$(S^{\frac{1}{2}}, -a, \quad b', -c'', \quad d''') = 0\,, \tag{15}$$

$$(S^{\frac{1}{2}}, -a, \quad b', \quad c'', -d''') = 0\,; \tag{16}$$

ainsi, par exemple, l'équation (12) développée est

$$\begin{vmatrix} S^{\frac{1}{2}} & x & y & z & w \\ 1 & a & a' & a'' & a''' \\ 1 & b & b' & b'' & b''' \\ 1 & -c & -c' & -c'' & -c''' \\ 1 & d & d' & d'' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

9. Désignons par $J_1, \ldots, J_8$ les huit quadriques orthogonales (9),...., (16), et rappelons-nous que λ, μ, ν, ρ sont les coordonnées du pôle du plan du contact d'une de ces surfaces avec S. Puisque ces coordonnées satisfont aux quatre premières équations de l'art. 7, on voit aisément qu'elles appartiennent au point commun à un système de six plans représentés par le système de six équations

$$\pm A = \pm B = \pm C = \pm D;$$

où la disposition des signes est celle qui répond à la quadrique J que l'on a en vue. On a donc le théorème suivant:

Les pôles des contacts des huit quadriques orthogonales $J_1, \ldots, J_8$ avec S sont les huit centres radicaux $A = \pm B = \pm C = \pm D$ des quatre quadriques $S - A^2$, $S - B^2$, $S - C^2$, $S - D^2$.

10. Le plan polaire du point $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ par rapport à $S - A^2$ est

$$\lambda(x - Aa) + \mu(y - Aa') + \nu(z - Aa'') + \rho(w - Aa''') = 0,$$

savoir, d'après la première équation de l'art. 7,

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \rho w = \mp A.$$

Eliminant λ, μ, ν, ρ parmi cette équation et les quatre premières équations du dit article, on obtient

$$\begin{vmatrix} \pm A & x & y & z & w \\ \pm 1 & a & a' & a'' & a''' \\ \pm 1 & b & b' & b'' & b''' \\ \pm 1 & c & c' & c'' & c''' \\ \pm 1 & d & d' & d'' & d''' \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

où le choix des signes dépend de ceux de la quadrique J. Ceci est évidemment le plan d'une des coniques d'intersection de J et de $S-A^2$. On a donc la construction suivante pour les huit quadriques orthogonales J:

Qu'on imagine les cônes tangents dont les sommets sont les huit centres radicaux, et qu'on détermine les quadriques passant par les coniques des contacts.

11. Si les deux surfaces $S-A^2$ et $S-B^2$ se coupent orthogonalement, le pôle du plan du contact de S et de $S-A^2$, savoir le pôle du plan A par rapport à S, est le pôle du plan d'intersection $A-B$ par rapport à $S-B^2$.

Démonstration. Le plan polaire du point (a, a', a'', a''') par rapport à $S-(bx+b'y+b''z+b'''w)^2$ est donné par l'équation

$$a(x-Bb)+a'(y-Bb')+a''(z-Bb'')+a'''(w-Bb''')=0,$$

qui, d'après la condition $ab+a'b'+a''b''+a'''b'''=1$ satisfaite ici à cause de l'orthogonalité des deux quadriques, revient à cette autre

$$A-B=0,$$

qui démontre l'enoncé.

12. *Corollaire.* Si les deux quadriques $S-A^2$, $S-B^2$ sont orthogonales, et si le pôle du contact de S et de $S-A^2$ est sur la quadrique $S-B^2$, la surface $S-A^2$ doit se réduire à un cône dont le sommet est en ce point. En d'autres termes, si l'on considère deux quadriques inscrites l'une dans l'autre, tous les cônes ayant leurs sommets sur l'une et enveloppant l'autre sont des quadriques orthogonales à la première quadrique. Cette remarque est importante.

13. Les équations de J_1, J_2, etc., prennent une forme très-simple si on les rapporte au tétraédre qui a pour sommets les pôles des plans des contacts des quadriques $S-A^2$, $S-B^2$, etc. avec la quadrique S, au moyen des coordonnées de volume relatives à ce tétraèdre.

Soient x', y', z', w' les coordonnées nouvelles du point (x, y, z, w). Les pôles étant (a, a', a'', a'''), (b, b', b'', b'''), etc. il y aura à faire les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned}
x &= a\ x' + b\ y' + c\ z' + d\ w',\\
y &= a'\ x' + b'\ y' + c'\ z' + d'\ w',\\
z &= a''\ x' + b''\ y' + c''\ z' + d''\ w',\\
w &= a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''w'.
\end{aligned}$$

Or, par ces formules on a, d'après les premières équations de l'art. 7,

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \rho w = \pm x' \pm y' \pm z' \pm w',$$

et par suite l'équation transformée de la quadrique J (correspondant au choix que l'on fait des doubles signes) est simplement

$$\pm x' \pm y' \pm z' \pm w' = S^{\frac{1}{2}},$$

savoir

$$\begin{aligned}
(\pm x' \pm y' \pm z' \pm w')^2 = (ax' + by' + cz' + dw')^2 + (a'x' + b'y' + c'z' + d'w')^2 +\\
+ (a''x' + b''y' + c''z' + d''w')^2 + (a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''w')^2.
\end{aligned}$$

Afin d'écrire d'une manière commode le développement de cette équation, dans laquelle on peut maintenant supprimer les accents des coordonnées, nous désignerons les résultats de la substitution des coordonnées

du pôle de	B	dans	C....	par	L	et du pôle de	A	dans	D....	par	P,
»	C	»	A....	»	M	»	B	»	D....	»	Q,
»	A	»	B....	»	N	»	C	»	D....	»	R,

et nous aurons alors l'équation de J_1 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
J_1 \equiv (1 - S')x^2 + (1 - S'')y^2 + (1 - S''')z^2 + (1 - S'''')w^2 \\
+ 2(1 - L)yz + 2(1 - M)zx + 2(1 - N)xy \qquad (18)\\
+ 2(1 - P)xw + 2(1 - Q)yw + 2(1 - R)zw = 0.
\end{aligned}$$

14. Quant aux autres sept quadriques orthogonales, on les déduit de J_1 changeant quelques uns des binômes $L-1$, $M-1$, etc. en $L+1$, $M+1$, etc.; et précisément on doit faire ce changement dans les binômes formés avec

les lettres suivantes:

pour J_2	dans ceux formés avec		$M,$	$N,$	P		(19)
» J_3	»		$N,$	$L,$	Q		(20)
» J_4	»		$L,$	$M,$	R		(21)
» J_5	»		$P,$	$Q,$	R		(22)
» J_6	»	$L,$	$M,$	$P,$		Q	(23)
» J_7	»	$L,$	$N,$	$P,$		R	(24)
» J_8	»	$M,$	$N,$	$Q,$		$R.$	(25)

Ainsi, par exemple, on aurait

$$\begin{aligned}J_3 \equiv (1-S')x^2 + (1-S'')y^2 + (1-S''')z^2 + (1-S'''')w^2 \\ -2(1+L)yz + 2(1-M)zx - 2(1+N)xy \\ +2(1-P)xw - 2(1+Q)yw + 2(1-R)zw = 0.\end{aligned}$$

15. La quadrique J_1 est le lieu de tous les points doubles de

$$\lambda(S^{\frac{1}{2}} - A) + \mu(S^{\frac{1}{2}} - B) + \nu(S^{\frac{1}{2}} - C) + \rho(S^{\frac{1}{2}} - D) = 0.$$

En effet cette équation est équivalente à cette autre

$$(\lambda+\mu+\nu+\rho)^2 S - (\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D)^2 = 0,$$

dont les dérivées, multipliées respectivement par

$$\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d, \quad \lambda a' + \mu b' + \nu c' + \rho d', \text{ etc.}$$

donnent, pour le discriminant égalé à zéro,

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu+\nu+\rho)^2 = (\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d)^2 + (\lambda a' + \mu b' + \nu c' + \rho d')^2 + \\ + (\lambda a'' + \mu b'' + \nu c'' + \rho d'')^2 + (\lambda a''' + \mu b''' + \nu c''' + \rho d''')^2.\end{aligned}$$

D'ailleurs la forme des mêmes dérivées montre que λ, μ, ν, ρ sont des quantités proportionnelles aux coordonnées du point double par rapport au tétraèdre formé par les pôles de A, B, C, D; donc le lieu représenté par le discriminant égalé à zéro est la même chose que la surface J_1; ce qu'il s'agissait de prouver.

16. L'équation (18) de J_1 peut être écrite d'une façon plus commode par l'introduction des angles anharmoniques de l'art. 4. Désignons à cet effet

$$\frac{1-L}{\sqrt{(1-S'')(1-S''')}} \text{ par } \cos L; \quad \frac{1+L}{\sqrt{(1-S'')(1-S''')}} \text{ par } -\cos L',$$

et ainsi des autres expressions analogues; le signe L dans $\cos L$ exprimant évidemment autre chose qu'auparavant, mais étant conservé pour plus de simplicité. L'angle dans $\cos L$ peut être réel ou imaginaire. — Posons de même

$$S' = \cos^2\rho', \qquad S'' = \cos^2\rho'', \text{ etc.}$$

On obtient de cette manière

$$\begin{gathered} J_1 \equiv x^2\sin^2\rho' + y^2\sin^2\rho'' + z^2\sin^2\rho''' + w^2\sin^2\rho'''' \\ + 2yz\sin\rho''\sin\rho'''\cos L + 2zx\sin\rho'''\sin\rho'\cos M + 2xy\sin\rho'\sin\rho''\cos N \qquad (26) \\ + 2xw\sin\rho'\sin\rho''''\cos P + 2yw\sin\rho''\sin\rho''''\cos Q + 2zw\sin\rho'''\sin\rho''''\cos R = 0. \end{gathered}$$

Les équations, transformées d'une manière semblable, des autres quadriques orthogonales se déduisent de celle-ci en ajoutant des accents aux différentes lettres, ainsi qu'on le voit ci-dessous:

on obtient	J_2	en accentuant		M,	N,	P,		(27)
»	J_3	»		N,	L,	Q,		(28)
»	J_4	»		L,	M,	R,		(29)
»	J_5	»		P,	Q,	R,		(30)
»	J_6	»	L,	M,		P,	Q,	(31)
»	J_7	»	L,	N,		P,	R,	(32)
»	J_8	»	M,	N,		Q,	R.	(33)

17. Chaque quadrique orthogonale $J_1, J_2, \ldots J_8$ est inscrite dans huit autres quadriques. Ainsi J_1 est inscrite dans chacune des huit quadriques

$$J_1 = (x\sin\rho' \pm y\sin\rho'' \pm z\sin\rho''' \pm w\sin\rho'''')^2 \qquad (34)$$

(les doubles signes ici n'ayant aucun rapport avec ceux qui donnent lieu aux huit surfaces J). Les huit plans des contacts, ainsi qu'on peut le voir aisément, sont les huit plans de similitude des quatre quadriques $S - A^2$, $S - B^2$, etc.

Si on désigne par $F_1, F_2, \ldots, F_8$ les huit quadriques dans lesquelles est inscrite la quadrique J_1, on verra facilement que

$$\begin{aligned} F_1 \equiv & \, yz \sin\rho'' \sin\rho''' \sin^2\tfrac{1}{2}L + zx \sin\rho''' \sin\rho' \sin^2\tfrac{1}{2}M + xy \sin\rho' \sin\rho'' \sin^2\tfrac{1}{2}N \\ & + xw \sin\rho' \sin\rho'''' \sin^2\tfrac{1}{2}P + yw \sin\rho'' \sin\rho'''' \sin^2\tfrac{1}{2}Q + zw \sin\rho''' \sin\rho'''' \sin^2\tfrac{1}{2}R. \end{aligned} \tag{35}$$

Les coefficients de $yz \sin\rho'' \sin\rho'''$, etc. dans les équations des autres quadriques F dans lesquelles J_1 est inscrite, sont donnés par le tableau suivant:

$$F_2:\quad \sin^2\tfrac{1}{2}L,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}M,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}N,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}P,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}Q,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}R, \tag{36}$$

$$F_3:\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}L,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}M,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}N,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}P,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}Q,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}R, \tag{37}$$

$$F_4:\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}L,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}M,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}N,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}P,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}Q,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}R, \tag{38}$$

$$F_5:\quad \sin^2\tfrac{1}{2}L,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}M,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}N,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}P,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}Q,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}R, \tag{39}$$

$$F_6:\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}L,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}M,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}N,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}P,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}Q,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}R, \tag{40}$$

$$F_7:\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}L,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}M,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}N,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}P,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}Q,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}R, \tag{41}$$

$$F_8:\quad \sin^2\tfrac{1}{2}L,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}M,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}N,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}P,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}Q,\quad -\cos^2\tfrac{1}{2}R. \tag{42}$$

Accentuant les lettres L, M, etc., comme dans le dernier article, on déduit des équations (35)...(42) celles des huit surfaces analogues, pour chacune des autres quadriques orthogonales $J_2, \ldots, J_8$.

III.

Équations des soixante-quàtre couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique.

18. Étant donné une quadrique J inscrite dans une quadrique S et un point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, on peut trouver, par la méthode de l'art. 6, une quadrique orthogonale à J et dont le pôle du contact avec S soit au point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Soit W cette quadrique. Quand le point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ varie, W varie aussi, et nous allons faire voir que, si le lieu du point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est une quadrique F, l'enveloppe de W est une surface du 4^me^ ordre avec une conique double.

Démonstration. Soient $W_1 \equiv S^{\frac{1}{2}} - A$, $W_2 \equiv S^{\frac{1}{2}} - B$, $W_3 \equiv S^{\frac{1}{2}} - C$, $W_4 \equiv S^{\frac{1}{2}} - D$ quatre quadriques particulières du système coupant J orthogonalement. On peut regarder le pôle du contact de W avec S, comme étant le centre des moyennes distances des pôles des contacts de W_1, W_2, W_3, W_4 avec S, pour un système convenable de multiplicateurs. Si ces multiplicateurs sont désignés par x, y, z, w, on a donc

$$\alpha = \frac{ax+by+cz+dw}{x+y+z+w}, \qquad \beta = \frac{a'x+b'y+c'z+d'w}{x+y+z+w},$$

$$\gamma = \frac{a''x+b''y+c''z+d''w}{x+y+z+w}, \qquad \delta = \frac{a'''x+b'''y+c'''z+d'''w}{x+y+z+w}.$$

et comme tout revient aux rapports $x:y:z:w$, il est clair que l'on peut poser

$$W = xW_1 + yW_2 + zW_3 + wW_4.$$

En outre, puisque le lieu du point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est la quadrique F, on voit, par la substitution des valeurs précédentes de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans son équation, que les quantités x, y, z, w sont reliées entr'elles par une équation de 2me degré. Si l'on représente cette équation par

$$ax^2+by^2+cz^2+dw^2+2lyz+2mzx+2nxy+2pxw+2qyw+2rzw=0,$$

il s'agit donc de trouver l'enveloppe de $xW_1+yW_2+zW_3+wW_4=0$ sous la condition exprimée par l'équation précédente.

La théorie des enveloppes donne

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & W_1 \\ n & b & l & q & W_2 \\ m & l & c & r & W_3 \\ p & q & r & d & W_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que l'enveloppe cherchée est

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & S^{\frac{1}{2}}-A \\ n & b & l & q & S^{\frac{1}{2}}-B \\ m & l & c & r & S^{\frac{1}{2}}-C \\ p & q & r & d & S^{\frac{1}{2}}-D \\ S^{\frac{1}{2}}-A & S^{\frac{1}{2}}-B & S^{\frac{1}{2}}-C & S^{\frac{1}{2}}-D & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (43)$$

Le développement de ce déterminant donne évidemment un résultat de la forme $U_2 + U_1 S^{\frac{1}{2}} = 0$, où U_2 représente une quadrique et U_1 un plan; par suite, chassant les radicaux, on a $U_2^2 - U_1^2 S = 0$, équation d'une surface du 4^{me} ordre dont la conique d'intersection de U_2 par U_1 est évidemment une ligne double: ce qu'il fallait démontrer.

19. Les quantités x, y, z, w du dernier article sont évidemment proportionnelles aux coordonnées tétraédriques du point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans le tétraèdre dont les sommets sont les pôles des contacts des quadriques données $S - A^2$, $S - B^2$, etc., de sorte que l'équation de condition en x, y, z, w n'est autre que celle de la surface F par rapport à ce dernier tétraèdre, en coordonnées de volume. En rapprochant cette remarque des résultats de l'art. dernier, on obtient par là un moyen de génération pour les surfaces du 4^{me} ordre ayant une conique double, en analogie à la méthode de génération des lignes bicirculaires du 4^{me} ordre, développée dans mon Mémoire lu le 10 février 1867 à l'Académie Royale d'Irlande.

Ainsi étant donné une quadrique J inscrite dans S et une autre quadrique F, si le lieu du pôle d'une quadrique variable W, inscrite aussi dans S et coupant orthogonalement J, est cette quadrique F, l'enveloppe de W sera une surface du 4^{me} ordre ayant une conique double. Maintenant, si la quadrique J est inscrite dans F, la surface du 4^{me} ordre aura une autre conique double (voir l'art. 12), savoir la conique de contact de J et de F; donc cette surface du 4^{me} ordre se décomposera en deux quadriques.

Ces principes vont nous servir à former les équations des soixante-quatre couples de quadriques tangentes aux quatre quadriques données $S - A^2$, $S - B^2$, $S - C^2$, $S - D^2$.

20. Soit J une des huit quadriques orthogonales aux quatre quadriques données $S - A^2$, $S - B^2$, $S - C^2$, $S - D^2$, par exemple J_1, dont l'équation (26) est écrite *in estenso* à l'art. 16; et soit F une des huit quadriques de l'art. 17 dans lesquelles J_1 est inscrite, par exemple F_1, dont l'équation (35) est écrite *in estenso* dans le même article. Si, pour abréger, on désigne par l, m, n, p, q, r les coefficients de cette dernière équation, l'enveloppe de W c'est-à-dire de

$$x(S^{\frac{1}{2}} - A) + y(S^{\frac{1}{2}} - B) + z(S^{\frac{1}{2}} - C) + w(S^{\frac{1}{2}} - D) = 0,$$

est, d'après l'équation (43),

$$\begin{vmatrix} 0 & n & m & p & S^{\frac{1}{2}}-A \\ n & 0 & l & q & S^{\frac{1}{2}}-B \\ m & l & 0 & r & S^{\frac{1}{2}}-C \\ p & q & r & 0 & S^{\frac{1}{2}}-D \\ S^{\frac{1}{2}}-A & S^{\frac{1}{2}}-B & S^{\frac{1}{2}}-C & S^{\frac{1}{2}}-D & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (44)$$

Celle-ci est donc l'équation d'une couple de quadriques tangentes à $S-A^2$, $S-B^2$, $S-C^2$, $S-D^2$.

21. Pour écrire les équations des autres couples de quadriques d'une manière abrégée, nous maintiendrons les abréviations de l'article dernier et y ajouterons encore les suivantes: savoir, nous désignerons les quantités $-\sin\rho''\sin\rho'''\cos^2\frac{1}{2}L$, $-\sin\rho'''\sin\rho'\cos^2\frac{1}{2}M$, etc., qui se présentent dans les équations des quadriques $F_2,\dots, F_8$ de l'art. 17 par $\grave{l}, \grave{m}, \grave{n}, \grave{p}, \grave{q}, \grave{r}$; nous écrirons W_1, W_2, W_3, W_4 au lieu de $S^{\frac{1}{2}}-A$, $S^{\frac{1}{2}}-B$, $S^{\frac{1}{2}}-C$, $S^{\frac{1}{2}}-D$ aux bords du déterminant (44); et finalement nous représenterons un déterminant, tel que celui qui vient d'être nommé, par la notation

$$[l, m, n, p, q, r]\ [W_1, W_2, W_3, W_4].$$

D'après ces abreviations il est facile de voir que les équations des huit couples de quadriques tangentes, correspondant à la quadrique orthogonale J_1, sont les suivantes:

1°)
$$\begin{vmatrix} [\,l, & m, & n, & p, & q, & r] \\ [\,l, & \grave{m}, & \grave{n}, & p, & q, & r] \\ [\grave{l}, & m, & n, & p, & \grave{q}, & r] \\ [\grave{l}, & \grave{m}, & n, & p, & q, & \grave{r}] \\ [\,l, & m, & n, & \grave{p}, & \grave{q}, & r] \\ [\,l, & m, & n, & \grave{p}, & \grave{q}, & r] \\ [\grave{l}, & m, & n, & p, & q, & \grave{r}] \\ [\,l, & m, & \grave{n}, & p, & \grave{q}, & r] \end{vmatrix}\ [W_1, W_2, W_3, W_4] = 0.$$

2°) Pour écrire les autres équations nous désignerons $S^{\frac{1}{2}}+A$, $S^{\frac{1}{2}}+B$, $S^{\frac{1}{2}}+C$, $S^{\frac{1}{2}}+D$ par W_1', W_2', W_3', W_4' et $\sin\rho''\sin\rho'''\sin^2\frac{1}{2}L'$, etc. par l', m', n', p', q', r', de même que $-\sin\rho''\sin\rho'''\cos^2\frac{1}{2}L'$, etc. par $\grave{l}'$, m', $\grave{n}'$, $\grave{r}'$, $\grave{q}'$, r'; et les équations des huit couples correspondant a J_2 seront:

$$\left|\begin{matrix} [\,l, & m', & n', & p', & q, & r\,] \\ [\,l, & \grave{m}', & n', & \grave{p}', & q, & r\,] \\ [\,\grave{l}, & m', & \grave{n}', & p', & \grave{q}, & r\,] \\ [\,l, & \grave{m}', & n', & p', & q, & \grave{r}\,] \\ [\,l, & m', & n', & \grave{p}', & \grave{q}, & \grave{r}\,] \\ [\,\grave{l}, & \grave{m}', & n', & \grave{p}', & \grave{q}, & r\,] \\ [\,l, & m', & \grave{n}', & \grave{p}', & q, & \grave{r}\,] \\ [\,l, & \grave{m}', & \grave{n}', & p', & \grave{q}, & \grave{r}\,] \end{matrix}\right| [W_1', W_2, W_3, W_4] = 0.$$

On déduit ce système d'équations du système 1°) accentuant les lettres m, n, p, $m, \grave{n}, \grave{p}$, W_1.

3°) Il n'est pas nécessaire d'écrire *in estenso* les systèmes correspondant à J_3, J_4, etc. car ils se tirent tous du systéme 1°) par l'accentuation convenable des lettres. Ainsi le système correspondant à J_3 s'obtient en accentuant

$$n,\ l,\ q,\ \grave{n},\ \grave{l},\ q,\ W_2;$$

et l'on obtient de même:

4°) le système correspondant a J_4 an accentuant

$$l,\ m,\ r,\ \grave{l},\ m,\ \grave{r},\ W_3;$$

5°) le système correspondant à J_5 en accentuant

$$p,\ q,\ r,\ \grave{p},\ \grave{q},\ \grave{r},\ W_4;$$

6°) le système correspondant à J_6 en accentuant

$$l,\ m,\ p,\ q,\ \grave{l},\ \grave{m},\ \grave{p},\ \grave{q},\ W_1,\ W_2;$$

7°) le système correspondant à J_7 en accentuant

$$l,\ n,\ p,\ r,\ \grave{l},\ \grave{n},\ \grave{p},\ r,\ W_1,\ W_3;$$

8°) et enfin le système correspondant à J_8 en accentuant

$$m, n, q, r, \grave{m}, \grave{n}, q, r, W_2, W_3.$$

Et de cette manière nous avons les équations des soixante-quatre couples de quadriques tangentes à quatre quadriques inscrites dans une même quadrique.

Mon objet dans ce travail ayant été celui d'établir, sous leur forme la plus condensée, les équations des couples de quadriques tangentes à quatre quadriques inscrites dans une même quadrique, je n'ai pas fait de place, malgré leur intérêt, à plusieurs considérations accessoires qui s'offraient d'elles mêmes dans le cours de ma recherche. J'ai voulu éviter par là de dévier l'attention du lecteur; mais les personnes, qui voudront bien reflêchir sur ce que je viens d'exposer, ne laisseront de reconnaître différentes propriétés importantes. Ainsi, les huit quadriques $F_1, F_2, \ldots, F_8$ de l'art. 17 ont toutes une même quadrique orthogonale. D'autre côté, l'équation de la quadrique orthogonale J_1 est évidemment une généralisation de celle du cercle imaginaire à l'infini (voir SALMON, *Geometry of three dimensions*, p. 168). Et l'on peut remarquer de même plusieurs autres théorèmes.

Rose Cottage,
Tivoli Terrace, North,
Kingstown (Ireland)
17 septembre 1868.

Observatio Geometrica

(*Auctore* H. J. STEPHANO SMITH, *Geometriæ apud Oxonienses Professore Saviliano*).

Vir clarissimus, H. SIEBECK, in commentatione eximia mense Augusto edita (*), solutionem dedit problematis non inelegantis:

« Datis quinis punctis in una quaque quatuor sectionum conicarum Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, invenire nonum punctum Ω omnibus curvis cubicis commune, quæ transeunt per octo puncta (Σ_1, Σ_2) et (Σ_3, Σ_4) ».

Cujus problematis solutionem et nos paullo ante inveneramus, et cum Societate Britannica eodem mense Augusto communicavimus (**); nec ægre ferimus disquisitionem viri clarissimi nostræ antevertisse. Illud vero nobis proprium fortasse fuit, quod docuimus problematis solutionem revera linearem esse, cum determinatione cubica trianguli chordalis omnino supersederi possit. Cujus rei rationem paucis hic explicare liceat.

Quoties duarum conicarum altera A alterius B triangulo polari circumscripta est, hanc illi harmonice inscriptam, illam huic harmonice circumscriptam, brevitatis causa dicere consuevimus: conicæ autem harmonice circumscriptæ ordinem, conicæ harmonice inscriptæ classem, præcipue respicere oportet. Sint S_1, S_2 duæ conicæ quatuor conicis datis harmonice inscriptæ; omnis conica systematis

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 \dots \quad (S)$$

(quod est simplex secundæ classis) omni conicæ systematis

$$\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 + \lambda_3 \Sigma_3 + \lambda_4 \Sigma_4 \dots \quad (\Sigma)$$

(quod est triplex secundi ordinis) harmonice inscripta erit. Atque in universum,

(*) Hujus Diarii Vol. II. p. 65.
(**) *British Association for the Advancement of Science,* Norwich Meeting, Aug. 22, 1868.

cuivis systemati lineari curvarum secundi ordinis respondebit per inscriptionem harmonicam systema lineare curvarum secundæ classis, triplici simplex, duplici duplex, simplici triplex: quin etiam (si rem ulterius persequi placet) curvæ unicæ secundi ordinis systema quadruplex secundæ classis respondebit, et similiter systemati quadruplici secundi ordinis curva unica secundæ classis. Cujusmodi bina systemata non sine caussa *contravariantia* appellavimus; eorumque proprietates in commentatione peculiari aliquatenus explicavimus (*); in qua etiam tractavimus linearem solutionem problematis:

« Datis quatuor conicis ex systemate triplici Σ, invenire quotlibet elementa conicæ pertinentis ad systema S, et rectam datam tangentis ».

Quo problemate hic utimur ad determinationem conicarum S_1 et S_2; ipsam vero solutionem, cum sit maxime elementaris, hoc loco iterare supervacaneum putamus.

Systema S continet tres conicas evanescentes; quæ, quum conicis Σ nihilo secius inscriptæ esse debeant, fiunt ipsarum poli conjugati. Itaque triangulus chordalis systematis Σ idem est atque triangulus polaris systematis S; datur autem implicite, quinis punctis inventis in utrâque conicarum S_1 et S_2. Præterea apparet universum systema conicarum triangulo chordali $\alpha\beta\gamma$ circumscriptarum contineri in systemate Σ; unde sequitur tria puncta $\alpha\beta\gamma$, et quaterna puncta intersectionis binarum quarumvis conicarum ex systemate Σ, ad unam eandemque conicam pertinere. Systema enim duplex et simplex, quæ ambo in eodem systemate triplici continentur, unam conicam semper communem habent. Cum autem compertum sit punctum quæsitum Ω esse quartum punctum intersectionis conicarum $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_3, \Sigma_4)$, in eo versatur cardo quæstionis, ut demonstretur quotlibet harum elementa lineari ratione determinari posse. Quarum in neutra ne unum quidem elementum datur separatim; dantur enim implicite tum tria puncta $\alpha\beta\gamma$ utrique communia, tum in singulis quaterna (Σ_1, Σ_2) et (Σ_3, Σ_4).

Sint $a_1\, a_2$, $p_1\, p_2$ duo paria polorum conjugatorum in systemate (Σ_1, Σ_2). Puncta $a_1\, a_2$ erunt etiam poli conjugati unius ex conicis (Σ_3, Σ_4); cujus conicæ ponemus (quod licet) puncta $p_1\, p_2$ nequaquam esse polos conjugatos; ita ut omnis conica ex systemate Σ, quæ utramque rectam $a_1\, a_2$, $p_1\, p_2$, harmonice secet, in systemate (Σ_1, Σ_2) necessario comprehendatur. Sit (S_1, S_2) systema curvarum secundi ordinis, determinatum per conicas S_1 et S_2, quarum utramque (ut supra diximus) quinis punctis definiri intelligimus. Hujus-

(*) Lecta est *Societati Mathematicæ Londinensi*, die 28$^{\text{mo}}$ Maii, 1868.

modi systematis poli conjugati ita se habent, ut punctis in recta sitis reciproce respondeant puncta in conica triangulo $\alpha\beta\gamma$ circumscripta. Sint igitur A, P conicæ rectis $a_1 a_2$, $p_1 p_2$, reciprocæ; sit præterea, in conica A, a polus rectæ $a_1 a_2$; et similiter p polus rectæ $p_1 p_2$ in conica P. Conica $[ap]$, rectæ ap reciproca, erit ipsa conica quæsita $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$. Nam, quod primum est, conica $[ap]$ circumscribitur triangulo $\alpha\beta\gamma$, utpote rectæ reciproca; ideoque continetur in systemate Σ. Deinde, quod secundum est, secat harmonice utramque rectam $a_1 a_2$, $p_1 p_2$; rectæ enim $a_1 a_2$, ap conicam A quatuor punctis harmonice secant; punctis autem harmonicis in circumferentia conicæ A respondent reciproce puncta in recta $a_1 a_2$ harmonica; hoc est, conica $[ap]$ rectam $a_1 a_2$ secat harmonice; quod idem de recta $p_1 p_2$ similiter probatur. Sit denique bq recta conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_3, \Sigma_4)$ eodem modo respondens quo recta ap conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$: punctum quæsitum Ω erit punctum conjugatum puncto intersectionis rectarum ap, bq: eamque determinationem linearem esse patet.

Etiam solutionem problematis:

« Determinare puctum μ quatuor punctis (Σ_3, Σ_4) oppositum in cubica quæ transit per octo puncta (Σ_1, Σ_2), (Σ_3, Σ_4), et per punctum m separatim datum » ita tractari posse demonstravimus, ut ad constructionem regula tantum opus sit. Sint r_1, r_2, r_3, r_4 puncta conicis Σ_1 et Σ_2 communia; constat ex notissimo theoremate conicam $(\Omega, r_1, r_2, r_3, r_4)$, quæ est ipsa illa conica $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$ rectæ ap reciproca, satisfacere æquationi anharmonicæ

$$[r_1, r_2, r_3, r_4] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \,.\, [r_1, r_2, r_3, r_4].$$

Itaque res eo redit ut in ejusdem conicæ circumferentia inveniatur punctum M, quod satisfaciat æquationi

$$[r_1, r_2, r_3, r_4, M] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \,.\, [r_1, r_2, r_3, r_4, m].$$

Designante litera σ conicam (Σ_3, Σ_4, m), systema conicarum

$$\lambda\sigma + \lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2$$

cum systemate conicarum triangulo chordali circumscriptarum systema simplex Θ commune habet; quia utrumque systema duplex est, et in uno eodemque systemate triplici continetur. Cujus systematis Θ omnes conicæ per puncta $\alpha\beta\gamma$ manifesto transeunt; habent autem quartum punctum intersectionis X, quod erit in circumferentia conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$, quippe quæ et ipsa pertineat ad systema Θ. Jam apparet punctis X in circumferentia conicæ $(\alpha, \beta,$

$\gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$ respondere conicas σ in systemate simplici (Σ_3, Σ_4); respondent autem singulis singulæ; hoc est, respondent anharmonice. Præterea conicæ $(\Sigma_3, \Sigma_4, r_i)$, quam per literam σ_i designabimus, manifesto respondet punctum r_i; quia id punctum omnibus conicis

$$\lambda\sigma_i + \lambda_1\Sigma_1 + \lambda_2\Sigma_2,$$

atque adeo omnibus conicis Θ, commune est. Unde sequitur punctum X ipsum esse punctum quæsitum M, cum satisfaciat æquationi

$$[r_1, r_2, r_3, r_4, X] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \cdot [r_1, r_2, r_3, r_4, m].$$

Hinc nanciscimur sequentem determinationem puncti M respondentis datæ conicæ $\sigma = (\Sigma_3, \Sigma_4, m)$. Designante litera ρ quamvis conicam ex systemate (Σ_1, Σ_2), conica $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho)$ pertinebit ad systema Θ. Capiatur recta R huic conicæ reciproce respondens; quod quomodo fieri possit jam supra explicavimus; punctum M erit punctum reciproce respondens puncto intersectionis rectarum R et ap. Simplicissima autem erit constructionis ratio, si incipimus a determinatione punctorum M_3 et M_4 conicis Σ_3 et Σ_4 respondentium; quo facto habebimus tria puncta Ω, M_3, M_4, tribus conicis $(\Omega, r_1, r_2, r_3, r_4)$, Σ_3, Σ_4 respondentia; quartum vero punctum quartæ cuivis conicæ respondens ex æqualitate rationis anharmonicæ facillime determinabitur.

Mémoire sur les groupes de mouvements (*)

(*par M.*r C. Jordan, *Ingénieur des mines à Paris*).

IX. Quatrième catégorie.

Cette catégorie est celle où le groupe auxiliaire est formé des mouvements qui superposent à lui-même un octaèdre régulier.

52. Si tous les mouvements du groupe ne sont pas des rotations concourantes, l'un au moins d'entre eux ne se réduira pas à une rotation. Le mouvement correspondant du groupe auxiliaire étant une rotation commensurable à 2π, on obtiendra une simple translation en répétant convenablement le mouvement proposé.

Le groupe contient donc des translations: soient α, β, γ les projections de l'une d'elles sur les trois axes quaternaires rectangulaires **A**, **B**, **C**, que possède l'octaèdre. Le groupe contient des mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, t} \ldots$, $B_{\frac{\pi}{2}, t'} \ldots$, $C_{\frac{\pi}{2}, t''} \ldots$ autour d'axes respectivement parallèles à **A**, **B**, **C**. dans lesquels l'amplitude de la rotation est égale à $\frac{\pi}{2}$. Ces mouvements, deux fois répétés, transforment la translation (α, β, γ) dans les suivantes $(-\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$, lesquelles combinées à (α, β, γ) donneront suivant les axes les translations 2α, 2β, 2γ.

Le groupe contient donc des translations parallèles aux axes. Si l'une d'elles est infiniment petite, et dirigée suivant **A**, par exemple, ses transformées par $B_{\frac{\pi}{2}, t'}$ et $C_{\frac{\pi}{2}, t''}$ sont des translations infiniment petites et parallèles à **C** et à **B**: le groupe contenant ainsi des translations infiniment petites, dans trois directions rectangularies, contiendra toute translation, et résultera de

(*) Continuazione e fine della Memoria a pag. 167 di questo tomo.

la combinaison de translations arbitraires avec les mouvements qui superposent à lui-même l'octaèdre donné.

Admettons au contraire que les translations parallèles aux axes soient toutes finies: soit θ la plus petite de toutes, laquelle soit dirigée suivant **A**; $B_{\frac{\pi}{2}, t'}$ et $C_{\frac{\pi}{2}, t''}$ la transformeront en translations égales, dirigées suivant les deux autres axes, et qui devront être respectivement les plus petites parmi celles dirigées suivant ces axes. Cela posé, soit (α, β, γ) une translation quelconque: le groupe contient les translations $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ suivant les axes, lesquelles doivent être des multiples de θ: donc α, β, γ sont des multiples de $\frac{1}{2}\theta$. Soit d'autre part, parmi les mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, t} \ldots B_{\frac{\pi}{2}, t'} \ldots C_{\frac{\pi}{2}, t''} \ldots, C_{\frac{\pi}{2}, \tau}$ celui où la translation τ est minimum: ce mouvement quatre fois répété donne la translation 4τ parallèle à **A**: donc $4\tau \equiv 0 \bmod \theta$. D'ailleurs τ sera $<\theta$: autrement le groupe contiendrait le mouvement $C_{\frac{\pi}{2}, \tau-\theta}$ où l'amplitude de la translation serait moindre que dans le proposé.

Cela posé soient $C, C' \ldots$ les axes pareils et parallèles à C: le mouvement $A_{\frac{\pi}{2}, t}$ les transforme en un système d'axes $B, B' \ldots$ parallèles à **B**: ces axes sont les seuls qui soient à la fois pareils à C et parallèles à **B**: car s'il en existait un autre B'', le mouvement inverse de $A_{\frac{\pi}{2}, t}$ le transformerait en un axe pareil et parallèle à C, ne faisant pas partie de la suite $C, C' \ldots$, ce qui est impossible.

De même le mouvement $B_{\frac{\pi}{2}, t'}$ transformera $C, C' \ldots$ en une suite d'axes pareils, parallèles à **A**: désignons-les par $A, A' \ldots$: ce seront les seuls axes qui soient à la fois pareils à C et parallèles à **A**. D'ailleurs tout mouvement du groupe transforme les unes dans les autres les trois directions **A**, **B**, **C**: donc tous les axes pareils à C feront partie de l'une des trois suites $C, C' \ldots$ $B, B' \ldots, A, A' \ldots$, que nous venons de déterminer.

Cherchons maintenant à déterminer le système des axes $C, C' \ldots$: les translations θ suivant **A** et suivant **B** transforment C en une infinité d'axes pareils et parallèles, dont les traces sur le plan **AB** forment un réseau à maille carrée θ. Cherchons s'il peut exister d'autres axes pareils et parallèles à C: soient Γ l'un d'entre eux, d la distance de sa trace à celle de C, ϕ l'angle de cette droite avec **A**. Les deux mouvements $C_{-\frac{\pi}{2}, -\tau}$ et $\Gamma_{\frac{\pi}{2}, \tau}$ combinés ensemble donnent une translation suivant l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle construit sur le côté d: les projections de cette translation sur **A** et **B** seront respectivement $d\cos\phi - d\sin\phi$ et $d\cos\phi + d\sin\phi$. Ces quantités doivent être respectivement égales à des multiples de $\frac{1}{2}\theta$, tels que $\frac{m}{2}\theta$, $\frac{n}{2}\theta$: d'où l'on déduit $d\cos\phi = \frac{m+n}{4}\theta$, $d\sin\phi = \frac{n-m}{4}\theta$, m et n étant des entiers. D'ailleurs m et n sont simultanément pairs ou impairs: car si l'on avait, par exemple, m pair et n impair, la translation trouvée $\left(\frac{m}{2}\theta, \frac{n}{2}\theta, 0\right)$ combinée aux translations θ suivant **A** et **B** donnerait la suivante $(0, \frac{1}{2}\theta, 0)$ parallèle à **B** et $<\theta$, ce qui est absurde. Donc $m+n$ et $m-n$ seront pairs, et $d\cos\phi$, $d\sin\phi$ seront des multiples de $\frac{1}{2}\theta$. L'axe Γ passera donc nécessairement ou en un sommet de réseau, ou au milieu de la ligne qui joint deux sommets voisins, ou au centre d'une maille.

53. *1^er^ Cas.* Supposons qu'il n'existe aucun axe pareil et parallèle à C, autre que ceux qui passent par les sommets du réseau.

Soit B un axe pareil à C et parallèle à **B**. Le mouvement $B_{\frac{\pi}{2}, \tau}$, étant deux fois répété, donne le suivant $B_{\pi, 2\tau}$, qui transforme C, C'... en axes pareils et parallèles à C: il les transformera donc les uns dans les autres: ce qui ne pourra se faire évidemment que si B se projette sur l'une des rangées du réseau, ou au milieu de deux rangées.

1° Si B se projette sur une rangée de réseau, τ devra être nul: en effet, τ est égal à $0, \frac{1}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta$, ou $\frac{3}{4}\theta$. Les solutions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}\theta$ sont évidemment inadmissibles: car $B_{\pi, 2\tau}$ ne superposerait pas à lui-même le système C, C'... La solution $\tau = \frac{1}{2}\theta$ doit également être rejetée: car le mouvement $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ transformerait les axes C, C'... en axes A, A'... parallèles à **A** et se projétant au milieu des rangées du réseau: le mouvement $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ transformerait C, C'... en un système d'axes pareils, parallèles à B, et se projétant au milieu des rangées du réseau: B étant pareil à C devrait coïncider avec l'un de ces axes, ce qui est absurde, B se projetant sur une rangée.

Soit donc $\tau = 0$: et soit C l'un des axes C, C'.., que rencontre B. Les deux rotations $C_{\frac{\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{\pi}{2}, 0}$ combinées entre elles en donnent une troisième $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$ autour d'un axe A concourant avec le deux premiers. Les axes C, C'... transformés respectivement par B et par A donneront deux autres systèmes d'axes

$A, A' \ldots$ et $B, B' \ldots$ formant avec $C, C' \ldots$ le système complet des rangées d'un assemblage cubique. Tout mouvement du groupe, devant transformer les uns dans les autres les axes $A, A' \ldots B, B' \ldots C, C' \ldots$, superposera cet assemblage à lui-même. Réciproquement il est clair que les trois rotations $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{\pi}{2}, 0}$, $C_{\frac{\pi}{2}, 0}$, combinées à la translation θ suivant chacun des axes, permettent de superposer l'assemblage à lui-même de toutes les manières possibles.

Le groupe obtenu peut donc être ainsi défini: le système des mouvements qui superposent à lui-même un assemblage cubique.

2° Si B se projette au milieu de deux rangées, τ devra être égal à $\frac{1}{2}\theta$: car si l'on avait $\tau = \frac{1}{4}\theta$, ou $\tau = \frac{3}{4}\theta$, il est clair que $B_{\pi, 2\tau}$ ne superposerait pas à lui-même le système $C, C' \ldots$ Enfin, si l'on avait $\tau = 0$, $B_{\pi, 0}$ transformerait $C, C' \ldots$ en axes $A, A' \ldots$ se projétant sur les rangées du réseau: le mouvement $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$ transformerait à son tour $C, C' \ldots$ en un système d'axes parallèles à B et se projétant sur les rangées du réseau: B devrait faire partie de ce système, ce qui est absurde, B se projétant entre deux rangées.

Soit donc $\tau = \frac{1}{2}\theta$. $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ transformera $C, C' \ldots$ en axes $A, A' \ldots$ se projétant au milieu des rangées du réseau: et réciproquement il transformera le système $A, A' \ldots$ dans le système $C, C' \ldots$: les mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$, $A'_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ etc. transformeront l'un dans l'autre les deux systèmes $C, C' \ldots$ et $B, B' \ldots$: enfin les mouvements $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ etc. transforment l'un dans l'autre les deux systèmes $A, A' \ldots$ et $B, B' \ldots$

Soient A, B, C trois axes choisis dans les trois systèmes de manière à être aussi voisins que possible les uns des autres: ce seront évidemment trois arêtes non contigües du cube qui a pour côté $\frac{1}{2}\theta$. Les seuls mouvements du groupe sont ceux qui résultent de la combinaison des trois mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$, $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$, $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ avec les translations $(\theta, 0, 0)$, $(0, \theta, 0)$, $(0, 0, \theta)$ le long des axes. En effet, soit M un mouvement du groupe: il doit superposer à lui-même le triple système d'axes $A, A' \ldots B, B' \ldots C, C' \ldots$; supposons pour fixer les idées, qu'il transforme B' en A: les translations θ transforment B' en B, que $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ transforme en A, que $\left(B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}\right)^2 . (0, \theta, 0)^{-1}$ transforme en lui-même en le retournant. Il existe donc un mouvement N, parmi ceux qui sont dérivés des proposés, qui transforme B' de la même manière que M. Les deux mouvements M et N transformant en lui-même le triple système d'axes $A, A' \ldots B, B' \ldots C, C' \ldots$, il en sera de même de MN^{-1} lequel en outre ne déplace pas A: soit P ce dernier mouvement: s'il transforme le système $B, B' \ldots$ en lui-même, il résulte évidemment de la translation $(\theta, 0, 0)$ convenablement répétée: au contraire s'il transforme $B, B' \ldots$ en $C, C' \ldots$ et réciproquement, il résulte de cette translation combinée à $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$. Dans tous les cas, P et par suite $M = PN$ résultent des mouvements proposés.

54. 2^{me} *Cas.* Supposons qu'il existe un axe C' pareil et parallèle à C, passant par le centre d'une maille du réseau, mais qu'il n'en existe aucun passant au milieu de la ligne qui joint deux sommets voisins.

Les translations $(\theta, 0, 0)$ et $(0, \theta, 0)$ transforment C' en une infinité d'axes pareils situés aux centres des diverses mailles du réseau.

Soit B un axe pareil à C et parallèle à **B**: le mouvement $B_{\pi, 2\tau}$ transformera le système $C, C' \ldots$ en lui-même, ce qui ne pourra se faire que si B se projette suivant une des rangées du réseau C, C_1 ou suivant une ligne $C' C'_1$ joignant deux centres de mailles, ou enfin suivant une des deux lignes $D D_1$, $D' D'_1$ situées au milieu des précédentes.

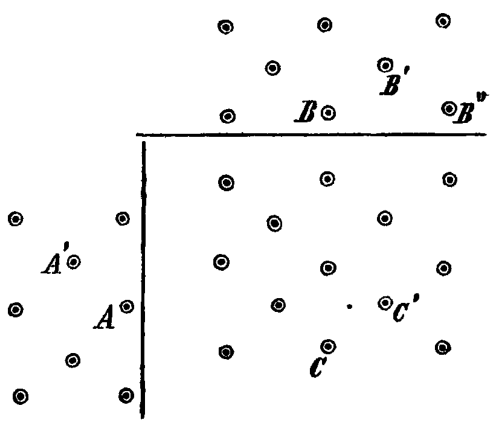
Les deux premiers cas reviennent au même: car C et C' étant deux axes pareils, le cas où B passe par C et celui où il passe par C' ne diffèrent que par un simple changement de dénomination des axes. De même le cas où B se projette suivant $D' D'_1$ est au fond parfaitement équivalent à celui où il se projette sur $D D_1$.

55. 1° Si B recontre C, τ doit être égal à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta$: car s'il était égal à $\frac{1}{4}\theta$ ou à $\frac{3}{4}\theta$, $B_{\pi, 2\tau}$ ne superposerait pas le système C, C' à lui-même.

Soit d'abord $\tau = 0$. $B_{\frac{\pi}{2}, 0}$ transforme $C, C' \ldots$ en d'autres axes $A, A' \ldots$ dont le premier A passe par le point de concours de B et de C: $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$ transforme à son tour $C, C' \ldots$ en un nouveau système d'axes $B, B' \ldots$ L'ensemble de ces axes $A, A' \ldots B, B' \ldots C, C' \ldots$ peut se partager en deux catégories, dont la première forme le système des rangées d'un assemblage cubique, et la seconde celui des parallèles aux axes menées par les centres des cubes, lequel forme évidemment le système de rangées d'un nouvel assemblage cubique ne différant du premier que par une simple translation. Les mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{\pi}{2}, 0}$, $C_{\frac{\pi}{2}, 0}$, joints aux translations θ, permettent du superposer le premier assemblage cubique à lui-même d'une manière quelconque. Le groupe doit contenir en outre un mouvement qui transforme un axe de la seconde catégorie, tel que C', en un axe de la première, tel que C: les axes de la seconde catégorie coupant tous ou C', ou l'un de ceux qui coupent C', ou enfin l'un de ceux qui coupent les précédents, leurs transformés couperont ou C, ou l'un des axes qui coupent C, ou l'un de ceux qui coupent ceux qui coupent C: ces transformés seront donc les axes de la première catégorie. Le mouvement cherché superposera donc le second assemblage cubique au premier, et par suite résultera de la combinaison d'un translation égale en grandeur et en direction à la demi-diagonale du cube, laquelle opère cette superposition, avec un mouvement qui superpose à lui-même le premier assemblage. Ce dernier mouvement faisant partie du groupe, la dernière translation en fera elle-même partie et combinée aux θ et $A_{\frac{\pi}{2},0}$, $B_{\frac{\pi}{2},0}$ reproduira le groupe.

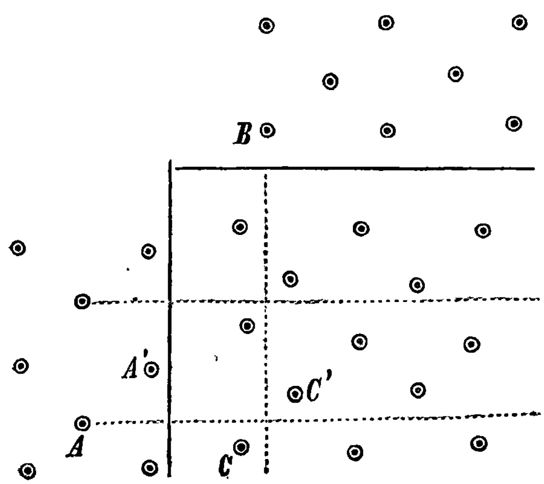
On remarquera que tous les mouvements du groupe superposeraient à lui-même un assemblage cubique construit sur la ligne $\frac{1}{2}\theta$. Mais le groupe ne contient qu'une partie des mouvements qui opéreraient cette superposition.

Soit maintenant $\tau = \frac{1}{2}\theta$: $B_{\frac{\pi}{2},\tau}$ transforme C, C'... en nouveaux axes A, A'... se projetant au milieu des rangées du réseau, et dont les traces sur le plan **BC** forment un quinconce, ainsi qu'il est indiqué dans la figure ci-jointe, où l'on suppose pour plus de clarté le plan **BC** rabattu sur le plan horizontal **AB** ainsi qu'on a coutume de le faire dans les représentations de la géométrie descriptive. $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$ transformera à son tour C, C'... en un système d'axes B', B''... dont les traces forment un quinconce B, B', B''... sur le plan **CA** (supposé également rabattu dans la figure). Tous les mouvements du groupe doivent superposer à lui-même le triple système d'axes pareils A, A'... B, B'... C, C'...



Cela posé, nous allons démontrer que le groupe contient la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta) = T$. En effet il contient un mouvement qui transforme l'axe C' en l'axe pareil C, tout en transformant en lui-même le triple système $A, A' \dots B, B' \dots C, C' \dots$ Ce mouvement peut être considéré comme résultant de la translation T et d'un second mouvement N qui transforme le système à lui-même, tout en transformant C en lui-même. Ce dernier mouvement appartient au groupe. En effet supposons qu'il transforme l'une dans l'autre les deux extrémités de C, ce qui est le cas le plus compliqué; il peut s'obtenir en exécutant successivement le mouvement $B_{\pi, 2\tau}$, une translation θ dans le sens de **B**, enfin un nouveau mouvement P, qui transforme encore le système en lui-même, tout en transformant chaque extrémité de C en elle-même. L'axe K que ce mouvement transforme en B lequel coupe C, doit également couper C, et cette transformation pourra s'accomplir en répétant le mouvement héliçoïdal $C_{\frac{\pi}{2}, \tau}$. P sera donc une puissance du mouvement $C_{\frac{\pi}{2}, \tau}$, combinée à un mouvement Q qui transforme C et B en eux-mêmes, tout en transformant encore le système en lui-même. Mais il est clair que le repos est le seul mouvement qui jouisse de cette propriété; N résultera donc de mouvements connus pour appartenir au groupe: donc $T = MN^{-1}$ y appartiendra également. Mais de cette translation combinée au mouvement $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ on déduit une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe parallèle à C: donc τ ne serait pas minimum, comme nous l'avons supposé. Ce cas est donc à rejeter.

56. 2° Admettons maintenant que B se projette à égale distance des deux axes C, C'. Pour que $B_{\pi, 2\tau}$ transforme le système $C, C' \dots$ en lui-même il faut évidemment que τ soit égal à $\frac{1}{4}\theta$ ou à $\frac{3}{4}\theta$.



Soit pour fixer les idées $\tau = \frac{1}{4}\theta$. — B transforme $C, C' \dots$ en nouveaux axes $A, A' \dots$ dont les traces sur le plan **BC** forment un quinconce disposé comme l'indique la figure, de telle sorte que ces axes se projettent horizontalment au milieu des rangées du quinconce $C, C' \dots$ A transformera à son tour $C, C' \dots$ en un nouveau système d'axes parallèles à B et dont B fera partie: ces axes étant disposés comme l'indique encore la figure.

Les mouvements du groupe doivent tous transformer en lui-même le triple système d'axes $A, A' \dots B, B' \dots C, C' \dots$ et dériveront tous des mouvements $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$, $B_{\frac{\pi}{2},\tau}$, $C_{\frac{\pi}{2},\tau}$ combinés aux translation θ. En effet, soit par exemple M un mouvement du groupe qui transforme C' en C: M résulte du mouvement $\left(A_{\frac{\pi}{2},\tau}\right)^{-2} = A_{-\pi-2\tau}$ joint à un mouvement N qui transforme C en lui-même, tout en continuant àtransformer le triple système en lui-même. Ce nouveau mouvement N doit transformer en lui-même le système des axes B, A etc.... qui sont à la distance $\frac{1}{4}\theta$ de l'axe C, lesquels axes sont les transformés les uns des autres par le mouvement hélicoïdal $C_{\frac{\pi}{2},\tau}$: supposons donc que N transforme par exemple B en A: on peut poser $N = C_{\frac{\pi}{2},\tau} Q$, Q étant un mouvement qui transforme C et A en eux-mêmes, tout en trasformant le triple système en lui-même. Mais aucun mouvement, sauf le repos, ne jouit de cette propriété: car tout mouvement qui transforme C en lui-même doit être une rotation binaire autour d'un axe perpendiculaire à C et rencontrant C: de même pour A: donc Q ne pourrait être qu'une rotation binaire autour de la plus courte distance de A et de C: mais une semblable rotation ne transformerait pas le système en lui-même: car elle change B eu un axe pareil situé à la même hauteur, et à une distance de B égale à $\frac{1}{2}\theta$. Donc le facteur Q se réduit nécessairement à l'unité: et par suite M dérive, comme nous l'avons annoncé, des seuls mouvements $A_{\frac{\pi}{2},\tau}$, $B_{\frac{\pi}{2},\tau}$, $C_{\frac{\pi}{2},\tau}$ et θ.

Si l'on avait $\tau = \frac{3}{4}\theta$, on pourrait faire identiquement les mêmes raisonnements.

67. 3^{me} *Cas*. Supposons enfin qu'il existe un axe C' pareil et parallèle à C et passant au milieu de la ligne qui joint deux sommets voisins du réseau.

Les deux mouvements $C_{-\frac{\pi}{2},\tau}$ et $C'_{\frac{\pi}{2},\tau}$ combinés ensemble donnent une translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$ égale en grandeur et en direction à la moitié de la diagonale du réseau. On aura donc un nouvel axe C'' au centre de la maille du réseau.

Cette translation T jointe aux translations θ transforme C, C', C'' en une infinité d'axes pareils, passant respectivement par les sommets du réseau, les milieux des lignes qui les joignent, et les centres de mailles.

On aura nécessairement $\tau = 0$ ou $\tau = \frac{1}{4}\theta$: car si l'on avait $\tau = \frac{1}{2}\theta$ ou $\tau = \frac{3}{4}\theta$, la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$ combinée au mouvement $B_{\frac{\pi}{2},\tau}$ donnerait autour d'un axe B' parallèle à B le mouvement $B'_{\frac{\pi}{2},\tau-\frac{\theta}{2}}$, où la translation serait moindre que τ, ce qui est inadmissible.

Cela posé, $B_{\pi,2\tau}$ doit transformer le système $C, C', C''\ldots$ en lui-même, ce qui suppose que B se projette sur l'un des rangées du réseau à maille $\frac{1}{2}\theta$ formé par les points $C, C', C''\ldots$ ou au milieu de deux rangées.

1° Supposons que B se projette sur une rangée. Si $\tau=0$, $B_{\frac{\pi}{2},0}$ transforme C en un axe concourant A, et $C', C''\ldots$ en axes pareils $A', A''\ldots$: $A_{\frac{\pi}{2},0}$ transformera $C, C', C''\ldots$ en axes $B, B', B''\ldots$ pareils et parallèles à B. La translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$ transformée par $B_{\frac{\pi}{2},0}$ et $A_{\frac{\pi}{2},0}$ donnera les deux suivantes $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ et $(\frac{1}{2}\theta, 0, \frac{1}{2}\theta)$. Ces translations, combinées aux translations θ et à $A_{\frac{\pi}{2},0}$, $B_{\frac{\pi}{2},0}$, $C_{\frac{\pi}{2},0}$ reproduisent tous les mouvements du groupe.

En effet ces translations jointes aux translations θ permettent évidemment de transformer l'un quelconque des axes $A, A', A''\ldots$ par exemple, en A, que $B_{\frac{\pi}{2},0}$ transforme en C, que $B_{\pi,0}$ transforme en lui-même en le retournant. Donc les mouvements ci-dessus permettent de transformer un axe quelconque du système en C, en amenant l'une de ses extrémités à la place d'une extrémité de C choisie à volonté.

Cela posé, soit M un mouvement du groupe qui transforme un axe quelconque en C: on pourra poser $M=NP$, N étant le mouvement dérivé des précédents qui produit cette même transformation et P un nouveau mouvement, qui transforme en elle-même chacune des extrémités de l'axe C, tout en transformant le système entier en lui-même. P devra transformer les uns dans les autres les points d'intersection de C avec les autres axes qui le rencontrent: ces points d'intersection étant échelonnés sur C à des intervalles $\frac{1}{2}\theta$, on aura $P=\left(0, 0, \frac{m}{2}\theta\right)Q$, m étant un entier et Q un mouvement qui laisse immobile chacun des points de C: P et $\left(0, 0, \frac{m}{2}\theta\right)$ transformant le système en lui-même, Q en fera autant: Q se réduira donc à une puissance de $C_{\frac{\pi}{2},0}$. Or m ne peut être supposé impair: car le groupe contiendrait la translation $\left(0, 0, \frac{m}{2}\theta\right)=N^{-1}MQ^{-1}$ et par suite la suivante $(0, 0, \frac{1}{2}\theta)$, ce qui est contraire à notre supposition: donc m est pair: mais alors $\left(0, 0, \frac{m}{2}\theta\right)$ est un multiple de θ et M est dérivé des mouvements ci-dessus indiqués.

Soit au contraire $\tau = \frac{1}{4}\theta$. On arrive à une conséquence absurde: car $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$ transforme $C, C', C''\ldots$ en axes A, A' se projetant au milieu des rangées, et A transforme de même $C, C', C''\ldots$ en axes parallèles aux B et se projetant au milieu des rangées: B devrait être l'un de ces axes, ce qui est absurde puisqu'il se projette sur une rangée.

2° Supposons enfin que B se projette au milieu de deux rangées. On aura nécessairement $\tau = \frac{1}{4}\theta$. Car supposons pour un instant $\tau = 0$; $B_{\frac{\pi}{2}, 0}$ transforme C en un axe pareil A situé dans le même plan perpendiculaire à B: $A_{\frac{\pi}{2}, 0}$ transformera $C, C', C''\ldots$ en un systéme d'axes parallèles à B et se projetant sur les rangées: B devrait faire partie de ce système, ce qui est absurde, puisque il se projette au milieu des rangées.

Soit donc $\tau = \frac{1}{4}\theta$: $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$ transforme $C, C', C''\ldots$ en un système d'axes $A, A', A''\ldots$ se projetant au milieu des rangées; $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$ transformera de même le système $C, C', C''\ldots$ en un système $B, B', B''\ldots$ se projetant au milieu des rangées: et l'on démontre absolument comme tout à l'heure, que les mouvements du groupe résultent tous de la combinaison des mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$, $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$, $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{4}}$ avec les translations $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$, $(\frac{1}{2}\theta, 0, \frac{1}{2}\theta)$, $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ et θ.

X. Cinquième catégorie.

58. Cette catégorie est celle pour laquelle le groupe auxiliaire est formé des mouvements qui superposent à lui-même un icosaèdre régulier.

Si tous les mouvements du groupe ne sont pas de rotations concourantes, nous avons vu que l'un au moins d'entre eux ne se réduira pas à une rotation. Le mouvement correspondant du groupe auxiliaire étant une rotation commensurable à 2π, on obtiendra une simple translation en répétant convenablement le mouvement proposé. D'ailleurs les axes $A, A'\ldots$ des mouvements où l'amplitude de rotation est $\frac{2\pi}{5}$ sont parallèles aux rayons menés du centre de l'icosaèdre à ses sommets, lesquels ne sont pas perpendiculaires à une même droite: soit donc $A_{\frac{2\pi}{5}, \tau}$ l'un de ces mouvements dont l'axe ne soit pas perpendiculaire à T: soient t la projection de T sur A: T, T_1, T_2, T_3, T_4

les transformées de T par les diverses puissance de $A_{\frac{2\pi}{5},\tau}$: ces cinq translations étant jointes ensemble, leurs composantes transversales se détruisent, ed il reste une translation $5t$ le long de A. Le groupe contient donc des translations longitudinales à l'axe A... Il contiendra des translations égales le long des autres axes A'... etc. En effet, A et A' sont parallèles à deux rayons de l'icosaèdre, A et A': parmi les mouvements qui superposent l'icosaèdre à lui-même, il en existe un M qui amène A en A': soit M l'un des mouvements correspondants du groupe proposé: il transformera A en un nouvel axe parallèle à A' et le long duquel aura lieu la translation $5t$.

Cela posé, le groupe contiendra une translation infiniment petite le long de chacun des axes A, A'... Car sans cela, soit θ la plus petite de ces translations longitudinales, dirigées suivant A, $\theta\cos\alpha$ sa projection sur l'un des axes A': on aura suivant l'axe A' une translation $5\theta\cos\alpha$: mais la translation minimum suivant A' a pour longueur θ, et toute autre translation suivant cet axe doit être un multiple de celle-là: il faudrait donc qu'on eût $5\cos\alpha =$ un entier. Or en prenant pour A et A' les axes parallèles aux deux rayons de l'icosaèdre qui aboutissent à deux sommets voisins, on a $\alpha = 63^\circ 26'$, d'où $\cos\alpha = 0{,}4472$, et $5\cos\alpha$ n'est pas entier.

La translation infiniment petite suivant A, combinée aux translations pareilles suivant A'... etc., donne une translation quelconque: et chacun mouvement du groupe, tel que $A_{\varrho,\tau}$, résulte évidemment d'une semblable translation jointe à une rotation $B_{\varrho,o}$ autour d'un axe B parallèle à A et passant par un point quelconque O. Ces rotations $B_{\varrho,o}$ etc. combinées entre elles donnent le groupe des mouvements qui superposent à lui-même un icosaèdre: en y joignant des translations arbitraires on aura le groupe cherché.

XI. Sixième catégorie.

Cette catégorie est celle dans laquelle le groupe auxiliaire contient toutes les rotations possibles.

59. Les axes des mouvements du groupe ayant toutes les directions, et leurs amplitudes de rotation toutes les valeurs possibles, on pourra déterminer dans le groupe un mouvement $A_{\varrho,\tau}$ dans lequel ρ soit inférieur à une constante ε d'une petitesse arbitrarie, et un second mouvement $B_{\varrho',\tau'}$ dans lequel ρ' soit également $<\varepsilon$, et dont l'axe B fera avec A un angle moindre

que $\frac{1}{2}\varepsilon$. Ce mouvement transforme $A_{\varrho,\tau}$ en un mouvement pareil $A'_{\varrho,\tau}$. Les deux axes A, A' faisant chacun avec B un angle $<\frac{1}{2}\varepsilon$, leur angle mutuel sera à fortiori $<E$.

Soient maintenant $A''_{\varrho,\tau}$ le mouvement transformé de $A_{\varrho,\tau}$ par $A'_{\varrho,\tau}$: $A'''_{\varrho,\tau}$ le mouvement transformé de $A_{\varrho,\tau}$ par $(A''_{\varrho,\tau})^{-1}$: $A''''_{\varrho,\tau}$ le mouvement transformé de $A_{\varrho,\tau}$ par $A'''_{\varrho,\tau}$ etc.... En prolongeant suffisamment cette suite, on aura des axes tous distincts de A, mais s'en rapprochant indéfiniment.

Désignons en effet par α_{n-1} l'angle des deux axes A et $A^{(n)}$ et par δ_{n-1} leur plus courte distance. Par un point qualconque M de l'espace menons MP, MN parallèles à ces deux axes: faisons tourner MP de l'angle $PNQ=\rho$ autour de MN: il viendra se placer sur une nouvelle ligne MQ évidemment parallèle à $A^{(n+1)}$. Les angles $PMQ=\alpha_n$ et $PNQ=\rho$ étant très petits sont sensiblement entre eux dans le rapport inverse des rayons MP et NP, lequel rapport est égal à $\frac{1}{\sin PMN}=\frac{1}{\sin\alpha_{n-1}}$ on aura donc sensiblement

$$\alpha_n=\rho\sin\alpha_{n-1} \text{ ou plus simplement } \alpha_n=\rho\alpha_{n-1}$$

Mais ρ est très-petit: donc les axes $A^{(n)}$, $A^{(n+1)}$,... tendent rapidement à devenir parallèles à A, ce qui était à peu près évident. Il reste à prouver que leurs distances à A tendent également vers zéro.

Pour cela, supposons que pour déterminer $A^{(n+1)}$ transformé de A par $A^{(n)}_{\varrho,\tau}$ on commence par le faire tourner de l'angle ρ autour de $A^{(n)}$, ce qui l'amènera en une nouvelle position K; puis qu'on le fasse glisser de la longueur t suivant $A^{(n)}$, de manière à le faire passer de la position K à sa position définitive $A^{(n+1)}$. Soit p le point de A le plus voisin de $A^{(n)}$: le mouvement $A^{(n)}_{\varrho,o}$ l'amène en p', en lui faisant décrire un arc dont la longueur est égale à $\rho\delta_{n-1}$: donc la distance de p' à p est moindre que $\rho\delta_{n-1}$. La translation τ, exécutée ensuite, peut se décomposer en deux autres, l'une $\tau\cos\alpha_{n-1}$ parallèle à A, l'autre $\tau\sin\alpha_{n-1}$ qui lui est normale. La distance du point p'', position définitive de p, à la droite A sera donc inferieure à $\rho\delta_{n-1}+\tau\sin\alpha_{n-1}$ et a fortiori à $\rho\delta_{n-1}+\tau\alpha_{n-1}$. Mais p'' est sur $A^{(n+1)}$: donc la distance δ_n de cette ligne à A est moindre que $\rho\delta_{n-1}+\tau\alpha_{n-1}$.

De cette relation $\delta_n<\rho\delta_{n-1}+\tau\alpha_{n-1}$ on peut déduire que δ_n décroît indéfiniment: car prenons le cas le plus défavorable, où l'on aurait en général $\delta_n=\rho\delta_{n-1}+\tau\alpha_{n-1}$. On aurait de même $\delta_{n-1}=\rho\delta_{n-2}+\tau\alpha_{n-2}$ d'où

$$\rho\tau\alpha_{n-2}=\rho\delta_{n-1}-\rho^2\delta_{n-1};$$

mais $\rho\tau\alpha_{n-2}$ est sensiblement égal à $\tau\alpha_{n-1}$: on aurait donc sensiblement $\delta_n = 2\rho\delta_{n-1} - \rho^2\delta_{n-2}$, qui montre que les δ décroissent indéfiniment.

60. Il importe encore de remarquer que les lignes de plus courte distance de A avec les axes d'ordre pair $A^{(2n)}$, $A^{(2n+2)}$ etc.... se rapprochent indéfiniment d'un point déterminé de l'axe A, situé à une distance finie sur cet axe.

Soient en effet $\delta_{2n-1} = MO$ la plus courte distance des axes A et $A^{(2n)}$, O et PQ les projections de $A^{(2n)}$ et de A sur un plan perpendiculaire à $A^{(2n)}$ et passant par MO. Soient, comme précédemment, $A^{(2n+1)}$ ce que devient la ligne A par une rotation ρ autour de $A^{(2n)}$: $P'M'Q'$ sa projection: cherchons quel sera le point de A le plus rapproché de $A^{(2n)}$.

Considerons un point quelconque de A se projetant en R: la distance de ce point, (R), à $A^{(2n+1)}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour un de ses côtés la distance RR' du point donné au plan vertical projetant de $A^{(2n+1)}$ et l'autre la distance de la ligne $A^{(2n-1)}$ au point $(R)'$, projection de (R) sur ledit plan vertical. Or la hauteur de $(R)'$ au-dessus du plan horizontal est égale à celle de (R), soit à $MR\cot\alpha_{n-1}$: celle du point $(R)''$ de le ligne A' qui se projette en R' sera égale à $M'R'\cot\alpha_{2n-1}+\tau$: la distance de $(R)'$ à $A^{(2n+1)}$ comptée suivant la verticale, sera donc égale à $(MR - M'R')\cot\alpha_{2n-1} - \tau$: comptée suivant la perpendiculaire, elle sera évidemment $(MR - M'R')\cos\alpha_{2n-1} - \tau\sin\alpha_{2n-1}$. Le carré de la distance de (R) à $A^{(2n+1)}$ sera donc égal à

$$\overline{RR'}^2 + \left\{(\overline{MR} - \overline{M'R'})\cos\alpha_{2n-1} - \tau\sin\alpha_{2n-1}\right\}^2$$

Posons pour abréger $MR = a$: on aura

$$RR' = RT\sin\rho = (a - MT)\sin\rho = (a - \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho)\sin\rho$$

$$MR - M'R' = MR - R'T + MT = a - (a - \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho)\cos\rho + \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho.$$

Le carré de la distance cherchée deviendra, en y substituant ces valeurs,

$$\left(a - \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho\right)^2\sin^2\rho + \left\{\Big(a(1-\cos\rho) + \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho(1+\cos\rho)\Big)\cos\alpha_{2n-1} - \tau\sin\alpha_{2n-1}\right\}^2$$

expression qui ne contient plus d'autre quantité variable que a. On aura son minimum, en égalant à zéro sa demi-différentielle

$$(a - \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho)\sin^2\rho + \left\{\Big(a(1-\cos\rho) + \delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho(1+\cos\rho)\Big)\cos\alpha_{2n-1} - \tau\sin\alpha_{2n-1}\right\}(1-\cos\rho)\cos\alpha_{2n-1}$$

ce qui donne

$$a\left\{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^2\right\}=\delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho\left\{\sin^2\rho-\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos^2\rho)\right\}$$
$$+\tau(1-\cos\rho)\sin\alpha_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}$$
$$=\delta_{2n-1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\rho\sin^2\rho\sin^2\alpha_{2n-1}+\tau(1-\cos\rho)\sin\alpha_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}$$

d'où enfin

$$a=m_{2n-1}\delta_{2n-1}\sin^2\alpha_{2n-1}+p_{2n-1}\tau\sin\alpha_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}$$

en posant pour abréger

$$m_{2n-1}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\rho\sin^2\rho}{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^2},\ \text{et}\ p_{2n-1}=\frac{1-\cos\rho}{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^2}.$$

On connait ainsi le point M_1 où la plus courte distance de A^{2n+1} et de A vient rencontrer cette dernière ligne: la distance de ce point au point M sera égale à

$$\frac{a}{\sin\alpha_{2n-1}}=m_{2n-1}\delta_{2n-1}\sin\alpha_{2n-1}+p_{2n-1}\tau\cos\alpha_{2n-1}.$$

La formule qui donne la distance du point M_1 au point M_2, pied de la perpendiculaire commune à A et à l'axe suivant $A^{(2n+2)}$, se déduira de la précédente en y remplaçant δ_{2n-1}, α_{2n-1} par δ_{2n}, α_{2n} et changeant en outre les signes de ρ et de τ: on aura donc en posant

$$m_{2n}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\rho\sin^2\rho}{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n}(1-\cos\rho)^2},\qquad p_{2n}=\frac{1-\cos\rho}{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n}(1-\cos\rho)^2},$$
$$M_1M_2=-m_{2n}\delta_{2n}\sin\alpha_{2n}-p_{2n}\tau\cos\alpha_{2n}$$

et enfin

$$MM_2=m_{2n-1}\delta_{2n-1}\sin\alpha_{2n-1}-m_{2n}\delta_{2n}\sin\alpha_{2n}+\tau(p_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}-p_{2n}\cos\alpha_{2n})$$

formule d'où l'on déduira M_2M_4, M_4M_6 etc. en y remplaçant successivement n par $n+1$, $n+2$, etc.

Or la série dont les termes successifs sont MM_2, $M_2M_4\ldots$ est convergente. En effet elle peut être décomposée en trois autres series ayant respectivement pour terme général

$$m_{2n-1}\delta_{2n-1}\sin\alpha_{2n-1},\quad m_{2n}\delta_{2n}\sin\alpha_{2n}\ \text{et}\ \tau(p_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}-p_{2n}\cos\alpha_{2n})$$

La première de ces séries partielles est évidemment convergente: car en supposant n très-grand, $\cos^2\alpha_{2n-1}$ tendant vers l'unité, m_{2n-1} tend vers la valeur constante $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\rho\sin^2\rho}{\sin^2\rho+(1-\cos\rho)^2}$, tandis que δ_{2n-1} décroît indéfiniment. D'autre part la série $\sin\alpha_{2n-1}+\sin\alpha_{2n+1}+\sin\alpha_{2n+3}+\cdots$ est convergente, le rapport d'un terme au précédent étant sensiblement égale à la quantité très-petite ρ^2: et si l'on multiplie les termes de cette serie par les facteurs $m_{2n-1}\,\delta_{2n-1}$, $m_{2n+1}\,\delta_{2n+1}$, etc.... qui décroissent indéfiniment, on aura encore une serie convergente.

On voit de même que la seconde série $m_{2n}\,\delta_{2n}\sin\alpha_{2n}+m_{2n+2}\,\delta_{2n+2}\sin\alpha_{2n+2}+\cdots$ est convergente. Quant à la 3[me] série elle a pour terme général

$$\begin{aligned}\tau\{p_{2n-1}\cos\alpha_{2n-1}-p_{2n}\cos\alpha_{2n}\} &= \tau p_{2n}(\cos\alpha_{2n-1}-\cos\alpha_{2n})+\tau(p_{2n}-p_{2n-1})\cos\alpha_{2n-1}\\ &= \tau p_{2n}(\cos\alpha_{2n-1}-\cos\alpha_{2n})+\frac{\tau\cos\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^3(\cos^2\alpha_{2n-1}-\cos^2\alpha_{2n})}{\{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^2\}\{\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n}(1-\cos\rho)^2\}}\\ &= \tau q_{2n}\{\cos\alpha_{2n-1}-\cos\alpha_{2n}\}\end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$q_{2n}=p_{2n}+\frac{\cos\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^3(\cos\alpha_{2n-1}+\cos\alpha_{2n})}{[\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n-1}(1-\cos\rho)^2][\sin^2\rho+\cos^2\alpha_{2n}(1-\cos\rho)^2]}.$$

Cela posé, l'angle α_{2n} étant moindre que l'angle α_{2n-1}, on aura

$$\cos\alpha_{2n-1}<\cos\alpha_{2n}:$$

q_{2n} étant essentiellement positif, et τ une cos̄tante, tous les termes de la serie auront le même signe: et on accroîtra la valeur absolue de chacun d'eux en remplaçant $\cos\alpha_{2n-1}$ par la quantité moindre $1-\frac{1}{2}\alpha_{2n-1}^2$ et $\cos\alpha_{2n}$ par la quantité plus grande 1: la somme de la série sera donc inférieure en valeur absolue à la suivante $-\frac{1}{2}\tau q_{2n}\alpha_{2n-1}^2-\frac{1}{2}\tau q_{2n+2}\alpha_{2n+1}^2\ldots$ laquelle est convergente, car, q_{2n}, $q_{2n+2}\ldots$ tendant vers une même limite (qui s'obtient en remplaçant $\cos\alpha_{2n-2}$ et $\cos\alpha_{2n}$ par l'unité dans l'expréssion de q_{2n}), leur rapport tend vers l'unité: le rapport de α_{2n+1} à α_{2n-1} tend vers ρ^2; le rapport de deux termes consécutifs de la série tend donc vers ρ^4, quantité très-petite.

La série $MM_2+M_2M_4+\cdots$ étant convergente, notre proposition que les lignes de plus courtes distances entre A et A_{2n}, $A_{2n+2}\ldots$ tendent à s'approcher indéfiniment d'un point fixe **M** situé à distance finie sur A, se trouve vérifiée.

61. Cela posé, combinons ensemble les deux mouvements $A_{\varrho,\tau}$ et $A^{(2n)}{}_{-\varrho,-\tau}$, l'indice n étant supposé très-considerable: soit M_{2n} le point d'intersection de A et de sa ligne de plus courte distance avec $A^{(2n)}$: soit enfin B une pa-

rallèle à $A^{(2n)}$ menée par M_{2n}: on aura $A^{(2n)}_{-\varrho,-\tau} = B_{-\varrho,-\tau}.\theta$; θ étant une translation égale en grandeur à $2\delta_{2n-1}\sin\rho$. De plus cette translation est perpendiculaire à $A^{(2n)}$ et fait l'angle $90^\circ - \frac{1}{2}\rho$ avec la ligne de plus courte distance; elle est donc située dans le plan qui passe par B et fait l'angle $\frac{1}{2}\rho$ avec le plan AB. On aura par suite

$$A_{\varrho,\tau}\, A^{(2n)}_{-\varrho,-\tau} = A_{\varrho,\tau}\, B_{-\varrho,-\tau}\cdot\theta = A_{\varrho,o}\, B_{-\varrho,o}\cdot B_{\varrho,o}\cdot A_{o,\tau}\, B_{o,-\tau}\cdot B_{-\varrho,o}\cdot\theta.$$

Or $A_{\varrho,o}\, B_{-\varrho,o}$ produit de deux rotations concourantes, s'obtiendra, comme on l'a vu, au moyen d'un triangle sphérique ayant pour base l'arc α_{2n-1} compris entre les deux axes A et B, et pour angles adjacents $\frac{1}{2}\rho$ et $180^\circ - \frac{1}{2}\rho$. Ces deux angles ayant mêmes sinus, il en est de même des côtés opposés: ces côtés sont donc supplémentaires; mais leur différence est moindre que le troisième côté α_{2n-1}. Donc non seulement l'axe C du mouvement $A_{\varrho,o}\, B_{-\varrho,o}$ est situé dans le plan qui passe par B et par la perpendiculaire θ, mais en outre il fait avec cette perpendiculaire un angle ϕ moindre que α_{2n-1}. Enfin l'amplitude r de la rotation autour de C est donnée dans le triangle sphérique par le double de l'angle en C, dont le sinus est égal à $\sin\alpha_{2n-1}\cdot\frac{\sin\rho}{\cos\varphi}\cdot$ D'autre part, la translation $A_{o,\tau}\, B_{o,-\tau}$ est la diagonale d'un losange ayant pour côté τ et pour angle α_{2n-1}: elle a donc pour longueur $2\tau\sin\frac{1}{2}\alpha_{2n-1}$: sa transformée $B_{\varrho,o}\, A_{o,\tau}\, B_{o,\tau}\, B_{-\varrho,o}$ aura la même amplitude et fera avec C un certain angle, que l'on peut désigner par ψ.

Le mouvement résultant cherché se composera donc: 1.° d'une rotation d'amplitude r autour de C: 2.° d'une translation qui peut être décomposée en deux autres: l'une t longitudinale à C et égale à

$$2\delta_{2n-1}\sin\rho\cdot\cos\phi + 2\tau\sin\tfrac{1}{2}\alpha_{2n-1}\cos\psi,$$

l'autre T normale à C et au plus égale à la somme des deux projections normales $2\delta_{2n-1}\sin\rho\sin\phi$ et $2\tau\sin\frac{1}{2}\alpha_{2n-1}\sin\psi$. Cette translation normale combinée avec le mouvement héliçoïdal $C_{r,t}$ donne un mouvement analogue $C'_{r,t}$ autour d'un nouvel axe C', dont la distance d à M_{2n} est donnée par la formule $2d\sin\frac{1}{2}r = T$.

Cela posé, r et t contenant en facteurs α_{2n-1} et δ_{2n-1} décroissent indéfiniment lorsque n augmente et $d = \frac{T}{2\sin\frac{1}{2}r} = \frac{T\cos\varphi}{2\sin\alpha_{2n-1}\sin\rho}$ reste toujours inférieur à la somme des deux termes $\frac{\delta_{2n-1}\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha_{2n-1}}$ et $\frac{\tau\sin\frac{1}{2}\alpha_{2n-1}\sin\psi\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha_{2n-1}\sin\rho}\cdot$ Le premier de ces termes decroît indéfiniment quand n augmente, δ_{2n-1} décroissant indéfiniment, tandis que $\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha_{2n-1}}$ reste <1, ϕ étant $<\alpha_{2n-1}$. Le second tend vers la limite finie $\frac{\tau\sin\psi}{2\sin\rho}$. Enfin M_{2n} tend vers le point fixe $\mathbf{M}$. Donc en passant à la limite, il est démontré que le groupe contient un mouvement infiniment petit autour d'un axe C' perpendiculaire à A et situé à distance finie: car cet axe est à une distance finie de $\mathbf{M}$, qui lui-même est situé à une distance finie sur la ligne A: d'ailleurs la distance de C' à $\mathbf{M}$ s'annulerait si τ se réduisait à zéro.

62. Le mouvement infiniment petit, dont nous venons de démontrer l'existence, peut être un simple mouvement de rotation, ou plus généralment un mouvement héliçoïdal.

Supposons d'abord ce mouvement héliçoïdal. En le répétant convenablement, on peut en obtenir un où l'amplitude de la rotation soit $\equiv 0 \bmod. 2\pi$: le mouvement ainsi obtenu sera une simple translation: le groupe contiendra donc au moins une translation $\mathbf{T}$. Cela posé, parmi les mouvements du groupe il en existe un dont l'axe fait avec la direction de $\mathbf{T}$ un angle moindre que toute quantité donnée, ε: la transformée $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{T}$ par ce mouvement fera avec $\mathbf{T}$ un angle 2ϕ inférieur à 2ε: et la translation $\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$ aura pour amplitude $2\mathbf{T}\sin\phi$, quantité qu'on peut rendre aussi petite que l'on voudra. Donc le groupe renferme une translation infiniment petite. En la transformant par les divers mouvements du groupe, on obtiendra des translations infiniment petites dans tous les directions. Ces translations convenablement répétées donnent une translation quelconque: donc le groupe contient toute translation. Chacun de ses mouvements résulte d'une semblable translation jointe à la rotation correspondante du groupe auxiliare, laquelle devra elle-même faire partie du groupe cherché. Mais le groupe auxiliare contient toutes les rotations possibles autour de l'origine. Ces rotations combinées à des translations convenables reproduisent un mouvement quelconque. Donc le groupe cherché contient tous les mouvements possibles.

Supposons maintenant que le mouvement infiniment petit autour de C' soit une simple rotation $C'_{r,o}$, r étant infiniment petit. En raisonnant à partir de ce mouvement, comme nous l'avons fait, à partir de $A_{\varrho,\tau}$, on verra de même qu'on peut déterminer sur C' un point $\mathbf{N}$ situé à distance finie, puis un mouvement infiniment petit $D'_{r',t'}$ autour d'un axe D', perpendiculaire à C' et dont la distance à **N** soit *nulle*. Si ce mouvement est héliçoïdal, on aura les mêmes conséquences que tout à l'heure: si c'est une simple rotation $D'_{r,0}$ les deux rotations infiniment petites et concourantes $C'_{r,0}$, $D'_{r,0}$, combinées ensemble, donneront une rotation quelconque autour de **N**. Le groupe contient donc toutes les rotations possibles autour de **N**. Mais il contient par hypothèse un mouvement au moins qui ne se reduise pas à une rotation: ce mouvement résulte de l'une des rotations ci-dessus combinée à une translation qui fera partie du groupe. Le groupe contenant une translation, on verra comme tout à l'heure qu'il contient tous les mouvements possibles.

XII. Récapitulation.

63. En récapitulant les résultats obtenus on voit qu'il existe 174 groupes distincts, ainsi répartis.

Section III. *Groupes formés de mouvements de translation.*

1er groupe. Tous les mouvements s'obtiennent en répétant une même translation d'amplitude finie.

2ème groupe. Ses mouvements dérivent de deux translations finies et de directions différentes.

3ème groupe. Dérivé de trois translations finies, faisant un angle trièdre.

4ème, 5ème et *6ème groupe.* Dérivés d'une translation infiniment petite, seule ou combinée à une ou deux translations finies qui lui soient perpendiculaires.

7ème et *8ème groupe.* Dérivés de deux translations infiniment petites, seules ou jointes à une translation finie, perpendiculaire à leur plan.

9ème groupe. Contient toute translation.

Section IV. *Groupes formés exlusivement de rotations.*

10ème et *11ème groupe.* Dérivent d'une rotation d'un angle fini $\frac{2\pi}{n}$, ou d'un angle infiniment petit autour d'un axe A.

12ème et *13ème groupe.* S'obtiennent en joignant aux mouvements du groupe précédent une rotation binaire autour d'un axe perpendiculaire à A.

14ème, 15ème et *16ème groupe.* Formés respectivement des mouvements qui superposent à lui-même un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre réguliers.

17ème groupe. Contient toutes les rotations possibles autour d'un point.

Section VI. *Groupes de première catégorie.*

18ème et *19ème groupe.* Dérivés d'un mouvement héliçoïdal fini, seul ou combiné à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour du même axe A.

20ème groupe. S'obtient en remplaçant dans le groupe 19 le mouvement héliçoïdal par une translation finie t le long de A.

21ème, 22ème et *23ème groupe.* Se déduisent des groupes 18, 19, 20 en supposant infiniment petits le mouvement héliçoïdal ou la translation.

24ème groupe. Dérive d'un translation t parallèle à A et d'une rotation infiniment petite autour de A.

25ème groupe. Contient tout mouvement héliçoïdal autour de A.

26ème groupe. Dérive d'un rotation binaire $A_{\pi,0}$ et d'une translation transversale τ.

27ème groupe. Dérivé de $A_{\pi,0}$ et de deux translations transversales différentes τ et τ_1.

28ème et *29ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupe 26 et 27 une translation longitudinale θ.

30ème et *31ème groupe.* S'obtiennent en remplaçant dans les groupes 28 et 29 la rotation $A_{\pi,0}$ par le mouvement $A_{\pi,\frac{1}{2}\theta}$.

32ème et *33ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 28 et 29 une translation égale à la moitié de la résultante de θ et de τ.

34ème à *41ème groupe.* S'obtiennent en supposant infiniment petites une ou plusieurs des quantités θ, τ dans les groupes 26, 27, 28 et 29. (On pourrait supposer en outre τ_1 infiniment petit: mais les groupes ainsi obtenus scraient contenus comme cas particuliers dans ceux que nous déterminerons plus loin).

42ème, 43ème et *44ème groupe.* S'obtiennent en supposant infiniment petites une ou deux des quantités τ, τ_1 dans les groupes 30 et 31.

45ème groupe. S'obtient en supposant τ_1 infiniment petit dans le groupe 33.

46ème groupe. Dérivé de rotations $A_{\frac{\pi}{3},0}$, $A'_{\frac{\pi}{3},0}, \ldots$ autour d'axes perpendiculaires à un même plan et passant par les sommets d'un réseau dont la maille est un triangle régulier. Ses mouvements sont ceux qui superposent le résau à lui-même.

47ème à 52ème groupe. Dérivé des mouvements $A_{\frac{\pi}{3}, \frac{m\theta}{6}}$, $A'_{\frac{\pi}{3}, \frac{m\theta}{6}}, \ldots$ et de la translation longitudinale θ: m étant égal à l'un des six nombres $0, 1, 2, 3, 4, 5$. (Les axes $A, A'\ldots$ étant déterminés comme au groupe 46).

53ème groupe. Formé de mouvements dont les axes sont perpendiculaires à un même plan et qui superposent à lui-même un réseau à maille carrée situé dans ce plan.

54ème à 59ème groupe. Dérivés de mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \tau}$ autour d'axes perpendiculaires à un même plan passant par les sommets du réseau à maille carrée, combinés à des mouvements $B_{\frac{\pi}{2}, \tau'}$ dont les axes parallèles aux précédents passent par les centres de mailles, et à une translation longitudinale θ, τ et τ' ayant l'un des six systèmes de valeurs suivants:

$$\tau = \tau' = 0, \quad \tau = \tau' = \tfrac{1}{4}\theta, \quad \tau = \tau' = \tfrac{1}{2}\theta, \quad \tau = \tau' = \tfrac{3}{4}\theta$$
$$\tau = 0, \qquad \tau' = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad \tau = \tfrac{1}{4}\theta, \qquad \tau' = \tfrac{3}{4}\theta.$$

60ème groupe. Dérivé de rotations d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$ dont les axes sont perpendiculairs à un même plan et passent: 1° par les sommets et les centres d'un réseau situé dans ce plan et ayant pour maille un hexagone régulier: 2° par les centres de gravité des triangles réguliers dans lesquels l'hexagone est décomposable.

61ème à 64ème groupe. Dérivés d'une translation longitudinale θ, jointe à des mouvements $A_{\frac{2\pi}{3}, \tau}$ autour d'axes passant par les sommets et centres de mailles d'un réseau hexagonal, joints à des mouvements $C_{\frac{2\pi}{3}, \tau'}$ autour d'axes passant par les centres de gravité de la moitié des triangles équilatéraux, et à des mouvements $D_{\frac{2\pi}{3}, \tau''}$ autour d'axes passant par les centres de gravité des autres triangles: τ, τ', τ'' ayant l'un des quatres systèmes de valeurs suivantes:

$$\tau = \tau' = \tau'' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = \tfrac{1}{3}\theta, \quad \tau'' = \tfrac{2}{3}\theta$$
$$\tau = \tau' = \tau'' = \tfrac{1}{3}\theta, \quad \tau = \tau' = \tau'' = \tfrac{2}{3}\theta.$$

65ème et 66ème groupe. S'obtiennent en adjoignant aux mouvements des groupes 10 et 11 toutes les translations transversales possibles.

67ème à 74ème groupe. S'obtiennent en adjoignant aux mouvements des groupes 18 à 25 toutes le translations transversales possibles.

75ème à 77ème groupe. S'obtiennent en adjoignant une translation longitudinale infiniment petite à chacun des trois groupes 46, 53 et 60.

Section VII. *Groupes de deuxième catégorie.*

78ème à 85ème groupe. S'obtiennent en adjoignant aux groupes 18 à 25 une rotation binaire autour d'un nouvel axe B qui coupe A à angle droit.

86ème groupe. Dérivé de rotations binaires autour de trois axes rectangulaires concourants A, B, C et de translations θ_1, θ_2 respectivement parallèles à A et à B.

87ème groupe. S'obtient en adjoignant au groupe précédent la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$.

88ème groupe. Dérivé des translations θ_1, θ_2 et des mouvements $A_{\pi, \frac{1}{2}\theta_1}$, $B_{\pi, \frac{1}{2}\theta_2}$, $C_{\pi, o}$: A, B, C étant encore rectangulaires, mais C passant à des distances $\frac{1}{4}\theta_2$, $\frac{1}{4}\theta_1$ de A et B, lesquels se coupent.

89ème groupe. Dérivé des mouvements θ_1, θ_2, $A_{\pi, o}$, $B_{\pi, o}$, $C_{\pi, o}$ et de la translation $(\frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, 0)$, les axes A, B, C étant disposés comme dans le groupe précédent.

90ème groupe. Dérivé des mouvements θ_1, θ_2, $A_{\pi, o}$, $B_{\pi, \frac{1}{2}\theta_2}$, $C_{\pi, o}$: B et C rencontrant A et leur distance mutuelle étant $\frac{1}{4}\theta_1$; ces trois axes étant d'ailleurs rectangulaires.

91ème à 95ème groupe. S'obtiennent en adjoignant aux groupes 86 à 90 une translation θ_3 parallèle à C.

96ème à 98ème groupe. S'obtiennent en changeant $C_{\pi, o}$ en $C_{\pi, \frac{1}{2}\theta_3}$ dans les groupes 87 à 89.

99ème groupe. S'obtient en adjoignant au groupe 91 les translations

$$(\tfrac{1}{2}\theta_1, \tfrac{1}{2}\theta_2, 0), \ (\tfrac{1}{2}\theta_1, 0, \tfrac{1}{2}\theta_3), \ (0, \tfrac{1}{2}\theta_2, \tfrac{1}{2}\theta_3).$$

100ème groupe. S'obtient en adjoignant au groupe 91 la translation

$$(\tfrac{1}{2}\theta_1, \tfrac{1}{2}\theta_2, \tfrac{1}{2}\theta_3)$$

101ème groupe. Dérivé des mouvements

$$A_{\pi, o}, B_{\pi, o}, C_{\pi, o}, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \text{ et } (\tfrac{1}{2}\theta_1, \tfrac{1}{2}\theta_2, \tfrac{1}{2}\theta_3),$$

$A, B, C,$ étant trois arêtes non contigües du parallélépipède rectangle formé sur les lignes $\frac{1}{4}\theta_1, \frac{1}{4}\theta_2, \frac{1}{4}\theta_3$.

102ème à *106ème groupe.* Dérivés des groupes 91 à 95 en supposant la translation θ_3 infiniment petite.

107ème à *114ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 46 à 52 et au 75 une rotation binaire autour d'une des rangées du réseau triangulaire.

115ème à *122ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 53 à 59 et au groupe 76 une rotation binaire autour d'une rangée du réseau à maille carrée.

123ème à *128ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 53, 57 et 76 un mouvement $B_{\pi, \frac{1}{4}\theta}$ autour d'une parallèle au côté du carré passant à la distance $\frac{1}{4}\theta$ de l'une de ses rangées.

129ème à *134ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 60, 64 et 77 une rotation binaire autour d'un axe situé dans le plan du réseau, passant par le centre de l'hexagone et perpendiculaire à l'un de ses côtés.

135ème et *136ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux groupes 10 et 11 une rotation binaire autour d'un axe B qui coupe A normalement et l'ensemble des translations transversales à A.

137ème à *144ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant aux mouvements 78 à 85 l'ensemble des translations transversales à A.

145ème et *146ème groupe.* S'obtiennent en adjoignant une translation infiniment petite et longitudinale à A, à chacun des groupes 107, 115, 123 et 129.

Section VIII. *Groupes de troisième cetégorie.*

149ème groupe. S'obtient en adjoignant aux translations du groupe 14 l'ensemble de toutes les translations possibles.

150ème groupe. Dérivé de rotations binaires autour de trois axes rectangulaires concourants A, B, C, de translations égales θ suivant chacun de ces axes et d'une rotation R d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$ autour de la diagonale du cube formé sur les trois translations θ.

151ème groupe. S'obtient en adjoignant au précédent la translation

$$(\tfrac{1}{2}\theta, \tfrac{1}{2}\theta, \tfrac{1}{2}\theta).$$

152ème à *154ème groupe.* S'obtiennent en remplaçant dans le groupe 150 le mouvement R par $(\frac{1}{2}\theta, 0, 0)R$, $(0, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ ou $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$.

155ème et *156ème groupe.* A, B, C étant trois arêtes non contiguës du cube formé sur le côté $\frac{1}{4}\theta$, ces groupes sont dérivés des mouvements $A_{\pi,t}$, $B_{\pi,t}$,

$C_{\pi, t}$ joints aux translations θ et à $(\frac{3}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, 0)R$, R désignant encore la rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$ autour de la diagonale du cube, et t étant égal à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta$.

157ème groupe. S'obtient en adjoignant à 155 la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$.

158ème et *159ème groupe.* A, B, C sont encore trois arêtes non contiguës du cube $\frac{1}{4}\theta$: le groupe dérive des mouvements $A_{\pi, t}$, $B_{\pi, t}$, $C_{\pi, t}$, θ et $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$, t étant égal à 0 ou à $\frac{1}{2}\theta$.

160ème groupe. S'obtient en adjoignant à 166 la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$.

161ème à *163ème groupe.* S'obtiennent en remplaçant $(\frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ par $(\frac{3}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta, \frac{1}{2}\theta)R$ dans 158, 159 et 160.

164ème groupe. S'obtient en adjoignant à 150 la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$.

Section IX. *Groupes de quatrième catégorie.*

166ème groupe. S'obtient en adjoignant à 15 toutes les translations possibles.

166ème groupe. Dérivé de rotations de 90° autour de 3 axes rectangulaires concourants A, B, C et de translations égales θ le long de ces axes.

167ème et *168ème groupe.* S'obtiennent respectivement en adjoignant au groupe précédent les translations $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta)$ et $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$.

169ème groupe. Dérivé des mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$, $B_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$, $C_{\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}}$ et des trois translations θ; A, B, C étant trois arêtes non contiguës du cube formé sur $\frac{1}{2}\theta$.

170ème et *171ème groupe.* Dérivés des mouvements $A_{\frac{\pi}{2}, \tau}$, $B_{\frac{\pi}{2}, \tau}$, $C_{\frac{\pi}{2}, \tau}$ et θ; A, B, C étant des arêtes non contiguës du cube formé sur $\frac{1}{4}\theta$, et τ étant égal à $\frac{1}{4}\theta$ ou à $\frac{3}{4}\theta$.

172ème groupe. S'obtient en adjoignant à 170 la translation $(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta, 0)$.

Section X. *Groupe de cinquième catégorie.*

173ème groupe. S'obtient en adjoignant à 16 toutes les translations possibles.

Section XI. *Groupe de sixième catégorie.*

174ème groupe. Contient tous les mouvements possibles.

64. Parmi les 174 groupes que nous venons d'énumérer, il en est 23 qui méritent une considération particulière et que nous nommerons *groupes*

principaux. Ce sont les groupes 3, 12, 15, 16, 17, 27, 29, 78, 79, 80, 86, 91, 107, 108, 115, 116, 135, 137, 138, 139, 166, 173 et 174.

Les autres groupes sont de deux espèces: les uns se déduisent des groupes principaux en y supposant les paramètres infiniment petits. Ainsi, par exemple, on passera du groupe 3 au groupe 9 en admettant que les trois translations dont le groupe 3 est dérivé deviennent simultanément infiniment petites; le groupe 165 se déduit de même du groupe 166 en y supposant θ infiniment petit, etc.

Ceux des groupes du tableau précédent qui ne peuvent être formés de cette manière sont tous des groupes *mériédriques*, contenant une fraction déterminée des mouvements qui constituent l'un des groupes principaux. Ainsi, par exemple, le groupe 15 contient 24 mouvements différents, qui superposent à lui-même un octaèdre régulier. Le groupe 14 qui superpose à lui-même un tétraèdre régulier contient la moitié de ces mouvements: c'est donc un groupe *hémiédrique*. De même encore chacun des groupes 150 à 164 et 167 à 172 contient évidemment une fraction des mouvements que renfermerait le groupe dérivé de rotations binaires $A_{\pi,0}$ $B_{\pi,0}$ $C_{\pi,0}$ et de translations égales à $\frac{1}{4}\theta$ dans le sens de ces axes: ce dernier groupe rentre dans le type 166, en y remplaçant θ par $\frac{1}{4}\theta$. Les types 150 à 164 et 167 à 172 sont donc tous mériédriques du type 166.

Applicazione di alcuni risultati contenuti nella Memoria « Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie del 5.° e del 6.° grado » agli integrali iperellittici.

(*del prof.* Gordan, *a Giessen*).

Nel §. 11 della citata Memoria (*) è dimostrato che una forma binaria f del sesto grado, di cui l'invariante del quindicesimo ordine sia nullo, si può esprimere per una forma cubica $F(l, m)$ dei suoi covarianti l, m, i coefficienti della quale sono funzioni degli invarianti fondamentali della forma data.

Da questa proprietà si può facilmente dedurre che l'integrale iperellittico:

$$I = \int \frac{(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}},$$

in cui $f(x_1, x_2)$ rappresenta una forma binaria del sesto grado per la quale è nullo l'invariante del 15° ordine, trasformasi in un aggregato di integrali ellittici, allorquando si sostituiscano alle variabili x_1, x_2 i covarianti di secondo grado l, m come nuove variabili.

L'integrale I per quella sostituzione diventa dapprima:

$$I = \int \frac{(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{\sqrt{F(l, m)}},$$

e la corrispondente trasformazione del numeratore si può conseguire colle seguenti considerazioni. Dalla Memoria citata risulta che il quadrato del covariante di secondo grado:

$$\vartheta = l_1 m_2 - l_2 m_1$$

(*) *Annali di Matematica*, tomo I.°

esprimesi in funzione dei covarianti l, m e degli invarianti A_{ll}, A_{lm}, A_{mm}; si ha cioè:

$$\vartheta^2 = -[A_{ll}m^2 - 2A_{lm}lm + A_{mm}l^2].$$

Ora supponendo:

$$\vartheta^2 = (\rho_{11}l + \rho_{12}m)(\rho_{21}l + \rho_{22}m)$$

si ottengono facilmente le:

$$\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} = \frac{\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} - A_{lm}}{A_{mm}}, \qquad \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} = -\frac{\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} + A_{lm}}{A_{mm}}, \tag{1}$$

posto:

$$A_{\vartheta\vartheta} = A_{ll}A_{mm} - A^2_{lm};$$

e le espressioni $\sqrt{\rho_{11}l + \rho_{12}m}$, $\sqrt{\rho_{21}l + \rho_{22}m}$, dal prodotto delle quali si ha il covariante ϑ del secondo grado, saranno funzioni lineari delle x_1, x_2; e per esse la funzione lineare $\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1$ prenderà la forma:

$$\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = k_1\sqrt{\rho_{11}l + \rho_{12}m} + k_2\sqrt{\rho_{21}l + \rho_{22}m}, \tag{2}$$

k_1, k_2 essendo due costanti rispetto alle x.

Per determinare i valori delle k_1, k_2 pongasi per brevità:

$$\sqrt{\rho_{11}l + \rho_{12}m} = L, \qquad \sqrt{\rho_{21}l + \rho_{22}m} = M,$$

e si indichino con L_α, M_α i valori di L, M nei quali alle x_1, x_2 si sostituiscano le α_1, α_2. Dalla equazione (2) si avrà dapprima:

$$k_1 L_\alpha + k_2 M_\alpha = 0;$$

poi, siccome quadrando la equazione stessa si ottiene la:

$$(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)^2 = k_1^2 L^2 + k_2^2 M^2 + 2k_1k_2\vartheta,$$

se in questa si sostituiscono in luogo delle x_1^2, $-x_1x_2$, x_2^2 i coefficienti ϑ_{22}, ϑ_{12}, ϑ_{11} della forma ϑ, si ha facilmente essere $L = M = 0$ e ϑ diventa eguale a $2A_{\vartheta\vartheta}$. Si avrà quindi la seconda relazione:

$$\vartheta(\alpha) = 4k_1k_2A_{\vartheta\vartheta},$$

dalla quale e dalla superiore si deducono per k_1, k_2 i valori:

$$k_1 = -\frac{M_\alpha}{2\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}}}, \qquad k_2 = \frac{L_\alpha}{2\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}}}.$$

Sostituendo questi valori nella (2) si giunge alla:

$$\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = \frac{\vartheta}{2\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}}}\left[\frac{L_\alpha}{L} - \frac{M_\alpha}{M}\right],$$

dalla quale, osservando essere:

$$\vartheta(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & dx_1 \\ x_2 & dx_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & dl \\ m & dm \end{vmatrix},$$

si otterrà:

$$(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{l\,dm - m\,dl}{2\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}}}\left(\frac{L_\alpha}{L} - \frac{M_\alpha}{M}\right).$$

Se infine si considera che per le relazioni (1) si hanno le:

$$\frac{L_\alpha}{L} = \frac{\sqrt{\{A_{mm} l_\alpha + (\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} - A_{lm}) m_\alpha\}}}{\sqrt{\{A_{mm} l + (\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} - A_{lm}) m\}}},$$

$$\frac{M_\alpha}{M} = \frac{\sqrt{\{A_{mm} l_\alpha - (\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} + A_{lm}) m_\alpha\}}}{\sqrt{\{A_{mm} l - (\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}} + A_{lm}) m\}}},$$

l'integrale iperellittico I si trasformerà nel seguente aggregato di integrali ellittici:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{-A_{\vartheta\vartheta}}}\int\left(\frac{L_\alpha}{L} - \frac{M_\alpha}{M}\right)\frac{l\,dm - m\,dl}{F(l,m)},$$

nei quali rapporti $\frac{L_\alpha}{L}$, $\frac{M_\alpha}{M}$ hanno i valori ultimi trovati.

10 aprile 1869.

FINE DEL TOMO II.° (SERIE II.ª).