ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA

F. Brioschi e L. Cremona

(PRESSO IL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO)

in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.

SERIE II. – TOMO I.

(dal luglio 1867 al maggio 1868).

MILANO

TIPOGRAFIA DI FRANCESCO ZANETTI.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO I.° (SERIE II.ª).

PAG.

Indice.

Sulla teoria delle coordinate curvilinee.

(*del Prof.* FRANCESCO BRIOSCHI, *a Milano*).

In una breve nota pubblicata nel secondo volume degli *Annali di Matematica* (anno 1859), in occasione di alcune ricerche sulle linee di curvatura della superficie delle onde, abbiamo data l'equazione differenziale di quelle linee per una superficie qualunque, formata per mezzo dei parametri del piano tangente, supponendo i parametri stessi funzioni di due coordinate curvilinee. Il sig.r OSSIAN BONNET nella sua interessante memoria « *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* » (1) ha esposto una teorica completa delle superficie curve (non sviluppabili) fondata sulla considerazione delle variabili che servono a fissare la posizione del piano tangente. Rappresentando con Ox, Oy, Oz i tre assi ortogonali, le variabili del sig.r BONNET sono: 1.° l'angolo che il piano passante per la normale alla superficie parallelamente all'asse delle x comprende col piano xz; 2.° il logaritmo–tangente della metà dell'angolo che la normale fa coll'asse delle x; 3.° la distanza dall'origine alla traccia del piano tangente sul piano yz. Le due prime variabili determinano due sistemi di linee sulla superficie e ponno assumersi come parametri delle medesime ossia come coordinate curvilinee.

Ma, sebbene questo sistema di variabili si presti assai opportunamente alla trattazione di molti ed importanti quistioni geometriche, come lo provarono il sig.r BONNET nella citata memoria e più recentemente il Prof. DINI nella sua nota « *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante* » (2), pure pensiamo che il concetto più

(1) LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques.* Deuxième série, tome V, année 1860.

(2) *Annali di Matematica,* tomo VII, anno 1865.

generale adombrato nel breve nostro lavoro rammentato più sopra, di fondare cioè la teoria delle superficie sulla considerazione di variabili che determinino la posizione del piano tangente, senza fissare a priori quali debbano essere queste variabili, presenti il vantaggio di far dipendere la scelta del sistema di variabili dal problema che si ha di mira. Il presente lavoro non è che un saggio di questa maniera di considerazioni nelle ricerche d'analisi applicata alla geometria delle superficie.

1.° Se con x, y, z si indicano le coordinate rettangolari dei punti di una superficie, con u, v le curvilinee, adottando le ordinarie denominazioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} e &= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \\ f &= \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}, \\ g &= \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2, \end{aligned}$$

e $\delta = eg - f^2$; è noto che i valori dei coseni degli angoli α, β, γ, che la normale alla superficie fa coi tre assi, si deducono dalle due equazioni:

$$\alpha\frac{dx}{du} + \beta\frac{dy}{du} + \gamma\frac{dz}{du} = 0 \quad , \qquad \alpha\frac{dx}{dv} + \beta\frac{dy}{dv} + \gamma\frac{dz}{dv} = 0 \ ,$$

e dalla $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Per queste relazioni, indicando con A, B, C i primi membri delle equazioni che seguono, si hanno le:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A &= \alpha\frac{d^2x}{du^2} + \beta\frac{d^2y}{du^2} + \gamma\frac{d^2z}{du^2} = -\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{dx}{du} + \frac{d\beta}{du}\frac{dy}{du} + \frac{d\gamma}{du}\frac{dz}{du}\right], \\ B &= \alpha\frac{d^2x}{du\,dv} + \beta\frac{d^2y}{du\,dv} + \gamma\frac{d^2z}{du\,dv} = -\left[\frac{d\alpha}{dv}\frac{dx}{du} + \cdots\right] = -\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{dx}{dv} + \cdots\right], \\ C &= \alpha\frac{d^2x}{dv^2} + \beta\frac{d^2y}{dv^2} + \gamma\frac{d^2z}{dv^2} = -\left[\frac{d\alpha}{dv}\frac{dx}{dv} + \frac{d\beta}{dv}\frac{dy}{dv} + \frac{d\gamma}{dv}\frac{dz}{dv}\right]. \end{aligned}$$

Ora le (1), (2) danno:

$$\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2}=\frac{1}{2}\frac{de}{du},$$

$$\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{dy}{dv}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{du^2}=\frac{df}{du}-\frac{1}{2}\frac{de}{dv},$$

$$\alpha\frac{d^2x}{du^2}+\beta\frac{d^2y}{du^2}+\gamma\frac{d^2z}{du^2}=A,$$

dalle quali e dalle analoghe si deducono pei differenziali secondi di x, y, z rispetto ad u, v le seguenti espressioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2x}{du^2}&=\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}-q\right)\frac{dx}{du}+r\frac{dx}{dv}+A\alpha,\\ \frac{d^2x}{du\,dv}&=p\frac{dx}{du}+q\frac{dx}{dv}+B\alpha,\\ \frac{d^2x}{dv^2}&=w\frac{dx}{du}+\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}-p\right)\frac{dx}{dv}+C\alpha,\end{aligned}$$

nelle quali:

$$(4)\qquad p=\frac{1}{2\delta}\left(g\frac{de}{dv}-f\frac{dg}{du}\right),\qquad q=\frac{1}{2\delta}\left(e\frac{dg}{du}-f\frac{de}{dv}\right),$$

$$r=\frac{1}{2\delta}\left(2e\frac{df}{du}-e\frac{de}{dv}-f\frac{de}{du}\right),\quad w=\frac{1}{2\delta}\left(2g\frac{df}{dv}-g\frac{dg}{du}-f\frac{dg}{dv}\right).$$

Se inoltre si considera che dalle relazioni (2) e dalle seguenti:

$$\alpha\frac{d\alpha}{du}+\beta\frac{d\beta}{du}+\gamma\frac{d\gamma}{du}=0,\qquad \alpha\frac{d\alpha}{dv}+\beta\frac{d\beta}{dv}+\gamma\frac{d\gamma}{dv}=0$$

si derivano per $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ i seguenti valori:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\delta\cdot\frac{d\alpha}{du}&=\left(fB-gA\right)\frac{dx}{du}+\left(fA-eB\right)\frac{dx}{dv},\\ \delta\cdot\frac{d\alpha}{dv}&=\left(fC-gB\right)\frac{dx}{du}+\left(fB-eC\right)\frac{dx}{dv},\end{aligned}$$

ed analogamente mutando α in β, γ ed x in y, z; si fa evidente per le equazioni (3) che i differenziali di x di qualunque ordine rispetto ad u, v sono funzioni lineari di $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, α. Ma differenziando la prima delle equazioni (3) rispetto a v, la seconda rispetto ad u, i primi membri diventano identici, quindi sottraendo l'una equazione dall'altra, si giungerà ad un risultato della forma:

$$L \frac{dx}{du} + M \frac{dy}{du} + N\alpha = 0,$$

il quale, dovendo sussistere col mutare la x in y, z e la α in β, γ, dà luogo alle:

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Così derivando la seconda delle (3) rispetto a v, e la terza rispetto ad u, si arriverà a tre equazioni:

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0;$$

ma siccome eseguendo le calcolazioni indicate trovasi essere $L = M'$, quelle sei equazioni si ridurranno alle tre seguenti:

$$\begin{aligned}
&\frac{f}{\delta}(AC - B^2) = pq - rw + \frac{dp}{du} + \frac{dq}{dv} - \frac{1}{2}\frac{d^2 \log.\delta}{du\,dv},\\
(6)\quad &\frac{e}{\delta}(AC - B^2) = \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}q + \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}r + \frac{dr}{dv} - \frac{dq}{du} - 2q^2 - 2pr,\\
&\frac{g}{\delta}(AC - B^2) = \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}p + \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}w + \frac{dw}{du} - \frac{dp}{dv} - 2p^2 - 2qw,
\end{aligned}$$

ed alle due:

$$(7)\quad \begin{aligned}
&\frac{dA}{dv} - \frac{dB}{du} = pA + \left(2q - \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}\right)B - rC,\\
&\frac{dB}{dv} - \frac{dC}{du} = wA - \left(2p - \frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}\right)B - qC.
\end{aligned}$$

Notiamo che la seconda e la terza delle (6), osservando essere:

$$\begin{aligned}
2\left(q^2 + pr\right) &= \frac{1}{e}\left(r\frac{de}{dv} - q\frac{de}{du}\right) + \frac{q}{\delta}\frac{d\delta}{du},\\
2\left(p^2 + qw\right) &= \frac{1}{g}\left(w\frac{dg}{du} - p\frac{dg}{dv}\right) + \frac{p}{\delta}\frac{d\delta}{dv},
\end{aligned}$$

si semplificano e danno le:

$$(8)\qquad \frac{AC-B^2}{\sqrt{\delta}}=\frac{d}{dv}\left(\frac{r\sqrt{\delta}}{e}\right)-\frac{d}{du}\left(\frac{q\sqrt{\delta}}{e}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{w\sqrt{\delta}}{g}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{p\sqrt{\delta}}{g}\right).$$

Le equazioni (6) non costituiscono effettivamente che una sola equazione sotto differenti forme, equazione che fornisce il valore di $A\,C-B^2$, ed in conseguenza quello del prodotto dei raggi di curvatura della superficie in funzione di e, f, g e delle loro derivate prime e seconde rispetto ad u ed a v, come pel primo ha dimostrato Gauss.

I valori dei coseni α, β, γ:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right),\ \beta=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}\right),\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)$$

danno evidentemente:

$$(9)\qquad \beta^2+\gamma^2=\frac{1}{\delta}\left[g\left(\frac{dx}{du}\right)^2-2f\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+e\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\right];$$

quindi essendo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, sarà α esprimibile in funzione di e, f, g e dei differenziali primi di x rispetto ad u ed a v. Così per β, γ mutando x in y, z.

2.° Sebbene estranee all'argomento principale di questo scritto, aggiungiamo alcune applicazioni delle formole superiori, per mostrare come la generalità delle medesime non diminuisca la semplicità dei risultati. Se in ciascuna delle equazioni (3) si trasportano tutti i termini del secondo membro, ad eccezione dell'ultimo, nel primo membro, quindi si moltiplicano fra loro la prima e la terza, e si sottrae dal prodotto il quadrato della seconda, si ottiene la equazione:

$$\left[\frac{d^2x}{du^2}-\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}-q\right)\frac{dx}{du}-r\frac{dx}{dv}\right]\left[\frac{d^2x}{dv^2}-w\frac{dx}{du}-\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}-p\right)\frac{dx}{dv}\right]-$$
$$-\left[\frac{d^2x}{du\,dv}-p\frac{dx}{du}-q\frac{dx}{dv}\right]^2=(AC-B^2)\,\alpha^2,$$

la quale, posto per $AC-B^2$ uno dei valori (6) e per α^2 il valore dato dalla (9), diventa una equazione ai differenziali parziali del secondo ordine, i coefficienti della quale sono funzioni di e, f, g e dei loro differenziali. Ora, se queste ultime sono note, la equazione differenziale superiore, e le altre due che ottengonsi mutando la x in y, z, daranno, integrate, i valori di x, y, z; cioè daranno le equazioni delle superficie applicabili a quella definita dagli stessi valori di e, f, g.

Il metodo generale suesposto per la ricerca di quelle equazioni si modifica però nei casi particolari, e si può talvolta giungere ad equazioni differenziali meno complicate. Per esempio, se le A, B, C fossero legate dalla equazione:

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0 ,$$

nella quale le λ, μ, ν siano coefficienti numerici od espressioni conosciute di u e di v, l'equazione differenziale si otterrebbe moltiplicando le (3) per λ, μ, ν e sommandole. Converrà quindi per determinare quelle equazioni ricorrere nei casi particolari alle relazioni (3).

Così, siccome supponendo $e = g$, $f = 0$, donde $\delta = e^2$, $p = - r = = \frac{1}{2e}\frac{de}{dv}$, $q = - w = \frac{1}{2e}\frac{de}{du}$, la prima e la terza delle equazioni (3) sommate danno:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = (A + C)\,\alpha ;$$

se $A + C = 0$, cioè se la superficie che si considera ha i raggi di curvatura eguali e di segno contrario, l'equazione differenziale risulterà la:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = 0 ,$$

e le equazioni (7) daranno:

$$\frac{dA}{dv} = \frac{dB}{du} , \qquad \frac{dA}{du} = - \frac{dC}{du} = - \frac{dB}{dv} ,$$

quindi anche:

$$\frac{d^2B}{du^2} + \frac{d^2B}{dv^2} = 0 .$$

3.° Nelle formole e nelle applicazioni precedenti si sono supposti noti i valori delle e, f, g in funzione di u e di v. Supporrò nel seguito che i coseni α, β, γ degli angoli che la normale alla superficie fa cogli assi ortogonali sieno funzioni conosciute delle coordinate curvilinee. In questa ipotesi pongasi:

$$l=\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{du}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{du}\right)^2,$$

$$m=\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\beta}{du}\frac{d\beta}{dv}+\frac{d\gamma}{du}\frac{d\gamma}{dv},$$

$$n=\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2,$$

e sostituendo per $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\beta}{du}$, ... i valori dati dalle equazioni (5), si avranno le:

$$\begin{aligned}
\delta l &= eB^2 - 2fAB + gA^2,\\
\delta m &= eBC - f(AC+B^2) + gAB,\\
\delta n &= eC^2 - 2fBC + gB^2,
\end{aligned}$$

dalle quali si deducono le reciproche:

$$\begin{aligned}
ke &= lB^2 - 2mAB + nA^2,\\
kf &= lBC - m(AC+B^2) + nAB,\\
kg &= lC^2 - 2mBC + nB^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

essendo $k=ln-m^2$. L'una o l'altra di queste due terne d'equazioni danno anche le due relazioni:

$$\delta k=(AC-B^2)^2$$

$$k(2Bf-Ag-Ce)=(AC-B^2)(2Bm-An-Cl);$$

e siccome indicando con R_1, R_2 i raggi di curvatura principale della superficie si hanno, come è noto, le:

$$R_1 R_2=\frac{\delta}{AC-B^2}, \qquad R_1+R_2=\frac{2Bf-Ag-Ce}{AC-B^2},$$

si avranno altresì le seguenti:

$$R_1 R_2=\sqrt{\frac{\delta}{k}}=\frac{AC-B^2}{k}, \quad R_1+R_2=\frac{2Bm-An-Cl}{k}. \tag{11}$$

Così, siccome per le relazioni superiori si hanno le (12):

$$k(Bf-Ce)=(AC-B^2)(Bm-An),\quad k(Af-Be)=(AC-B^2)(Bl-Am),$$
$$k(Bf-Ag)=(AC-B^2)(Bm-Cl),\quad k(Cf-Bg)=(AC-B^2)(Bn-Cm),$$

dalle equazioni (5) si deducono le:

$$(13)\qquad \begin{aligned} k\frac{dx}{du}&=(Bm-An)\frac{d\alpha}{du}+(Am-Bl)\frac{d\alpha}{dv},\\ k\frac{dx}{dv}&=(Cm-Bn)\frac{d\alpha}{du}+(Bm-Cl)\frac{d\alpha}{dv},\end{aligned}$$

e le analoghe, mutando x in y, z ed α in β, γ.

Infine, osservando che per le (2) si ha:

$$\frac{dA}{dv}-\frac{dB}{du}=\frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{dx}{dv}+\frac{d^2\beta}{du^2}\frac{dy}{dv}+\frac{d^2\gamma}{du^2}\frac{dz}{dv}-\frac{d^2\alpha}{du\,dv}\frac{dx}{du}-\frac{d^2\beta}{du\,dv}\frac{dy}{du}-\frac{d^2\gamma}{du\,dv}\frac{dz}{du},$$

sostituendo nella medesima i valori superiori di $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, si ottiene la:

$$(14)\qquad \frac{dA}{dv}-\frac{dB}{du}=p_{/}A+\left(2q_{/}-\frac{1}{2k}\frac{dk}{du}\right)B-r_{/}C,$$

e nello stesso modo la seconda:

$$\frac{dB}{dv}-\frac{dC}{du}=w_{/}A-\left(2p_{/}-\frac{1}{2k}\frac{dk}{dv}\right)B-q_{/}C,$$

nelle quali le $p_{/}, q_{/}, r_{/}, w_{/}$ si deducono dalle p, q, r, w mutando ordinatamente le e, f, g nelle l, m, n.

4.° Raccogliamo in questo paragrafo alcune formole colle quali, dati i valori delle l, m, n, si ponno nei casi particolari dedurre quelli delle α, β, γ.

Per le espressioni di l, m, n si hanno evidentemente le equazioni:

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{du^2}+\beta\frac{d^2\beta}{du^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{du^2}=-l,$$

$$\frac{d\alpha}{du}\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d\beta}{du}\frac{d^2\beta}{du^2}+\frac{d\gamma}{du}\frac{d^2\gamma}{du^2}=\frac{1}{2}\frac{dl}{du},$$

$$\frac{d\alpha}{dv}\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d\beta}{dv}\frac{d^2\beta}{du^2}+\frac{d\gamma}{dv}\frac{d^2\gamma}{du^2}=\frac{dm}{du}-\frac{1}{2}\frac{dl}{dv},$$

dalle quali si ottengono analogamente alle (3) del § 1.° le seguenti:

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}=\left(\frac{1}{2k}\frac{dk}{du}-q_{\prime}\right)\frac{d\alpha}{du}+r_{\prime}\frac{d\alpha}{dv}-l\,\alpha$$

e nello stesso modo:

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv}=p_{\prime}\frac{d\alpha}{du}+q_{\prime}\frac{d\alpha}{dv}-m\,\alpha\,, \tag{15}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2}=w_{\prime}\frac{d\alpha}{du}+\left(\frac{1}{2k}\frac{dk}{dv}-p_{\prime}\right)\frac{d\alpha}{dv}-n\,\alpha.$$

Così i valori di α, β, γ dedotti dalle:

$$\alpha\frac{d\alpha}{du}+\beta\frac{d\beta}{du}+\gamma\frac{d\gamma}{du}=0\,,\quad \alpha\frac{d\alpha}{dv}+\beta\frac{d\beta}{dv}+\gamma\frac{d\gamma}{dv}=0\,,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

conducono a relazioni simili alle (9):

$$\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{k}\left[n\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2-2m\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}+l\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2\right] \tag{16}$$

ed i valori stessi danno altre tre relazioni della forma:

$$\alpha\beta=-\frac{1}{k}\left[m\left(\frac{d\beta}{du}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\beta}{dv}\frac{d\alpha}{du}\right)-l\frac{d\alpha}{dv}\frac{d\beta}{dv}-n\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du}\right]. \tag{17}$$

5.° Passiamo ora a mostrare come le formole trovate sopra si prestino opportunamente nella trattazione di varie quistioni speciali. Consideriamo dapprima le superficie per le quali la somma dei raggi di curvatura è costante, cioè:

$$R_1+R_2=2h\,,$$

essendo h costante.

La seconda delle equazioni (11) dà:

$$2Bm-An-Cl=2hk$$

alla quale si soddisfà supponendo:

1.° $\quad l=n=0\,,\quad B=-mh\,,$

2.° $\quad l=n\,,\ m=0\,,\quad A+C=-2lh\,.$

Nel 1.° caso, essendo $p_{\prime}=q_{\prime}=r_{\prime}=w_{\prime}=0$, le formole (15) danno:

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}=\frac{1}{m}\frac{dm}{du}\frac{d\alpha}{du}, \qquad \frac{d^2\alpha}{dudv}=-m\alpha, \qquad \frac{d^2\alpha}{dv^2}=\frac{1}{m}\frac{dm}{dv}\frac{d\alpha}{dv}$$

e la (16) diventa:

$$2\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=m(1-\alpha^2).$$

Dalla prima di queste, integrando, si ottiene $\frac{d\alpha}{du}=m\phi(v)$, per la quale la quarta si muta nella:

$$\frac{2d\alpha}{1-\alpha^2}=\phi(v)\,dv,$$

da cui:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=f(u)\,F(v)$$

Supponendo per maggiore semplicità:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=uv,$$

si avranno:

$$\alpha=\frac{uv-1}{uv+1}, \qquad m=\frac{2}{(uv+1)^2}.$$

La (17), pei valori superiori di l, m, n, α, diventa:

$$u\frac{d\beta}{du}+v\frac{d\beta}{dv}=-\alpha\beta,$$

da cui:

$$\beta=\frac{u+v}{uv+1};$$

ed infine, essendo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, si ha $\gamma=i\frac{u-v}{uv+1}$.

Determinati così i valori di α, β, γ in funzione di u, v, i quali annullano l ed n, osserviamo che, essendo $B=-mh$ le equazioni (14) danno le:

$$\frac{dA}{dv}=0, \qquad \frac{dC}{du}=0,$$

cioè:

$$A=\phi(u)\ ,\quad C=\psi(v)\ ;$$

ed infine dalle (12) si deducono le:

$$\frac{dx}{du}=h\frac{d\alpha}{du}-u\phi(u);\frac{dy}{du}=h\frac{d\beta}{du}-\frac{1}{2}(1-u^2)\phi(u);\frac{dz}{du}=h\frac{d\gamma}{du}+\frac{i}{2}(1+u^2)\phi(u),$$

ed analoghi valori per $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$, mutando u in v, ϕ in ψ, ed i in $-i$ nell'ultima.

Si hanno così le equazioni differenziali della superficie:

$$dx=h\,d\alpha-u\,\phi(u)\,du-v\,\psi(v)\,dv\ ,$$

$$dy=h\,d\beta-\frac{1}{2}(1-u^2)\,\phi(u)\,du-\frac{1}{2}(1-v^2)\,\psi(v)\,dv\ ,$$

$$dz=h\,d\gamma+\frac{i}{2}(1+u^2)\,\phi(u)\,du-\frac{i}{2}(1+v^2)\,\psi(v)\,dv\ .$$

Se $h=0$, cioè se la superficie che si considera è quella d'area minima, le relazioni (10) danno le:

$$e=g=0\quad ,\quad f=\frac{1}{2}\,\phi(u)\,\psi(v)\,(uv+1)^2\ ,$$

ed il differenziale dell'arco sarà espresso dalla formola:

$$\overline{dS}^2=2f\,du.\,dv.$$

Da questo sistema di coordinate simmetriche u, v, passando all'altro sistema pure simmetrico, dato dalle relazioni:

$$u=s-it\ ,\quad v=s+it\ ,$$

si avrà:

$$\overline{dS}^2=2f\left(\overline{ds}^2+\overline{dt}^2\right),$$

e le equazioni differenziali superiori si potranno porre sotto la forma data ad esse dal sig. Weierstrass, in un recente lavoro presentato all'Accademia delle scienze di Berlino «*Ueber die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist*».

Nel secondo caso che intendiamo esaminare, se si suppone che l e quindi n sieno funzioni soltanto di v, si hanno le:

$$p_{\prime} = - r_{\prime} = \frac{1}{2l}\frac{dl}{dv} \;, \quad q_{\prime} = w_{\prime} = 0 \;,$$

e la seconda delle (14) dà:

$$\frac{d\alpha}{du} = \phi'(u)\sqrt{l} \;, \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \phi(u)\sqrt{l} + \psi(v);$$

il quale valore sostituito nella terza delle stesse (15), ossia nella:

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2} - \frac{1}{2l}\frac{dl}{dv}\frac{d\alpha}{dv} + l\alpha = 0$$

conduce alla

$$\phi(u)\left[\frac{d^2\sqrt{l}}{dv^2} - \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{d\sqrt{l}}{dv}\right)^2 + l\sqrt{l}\right] + \psi''(v) - \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{d\sqrt{l}}{dv}\psi'(v) + l\psi(v) = 0,$$

per la quale l viene determinata dalla:

$$\frac{d^2\sqrt{l}}{dv^2} - \frac{1}{l}\left(\frac{d\sqrt{l}}{dv}\right)^2 + l\sqrt{l} = 0,$$

e si ha $\psi(v) = \pm\sqrt{l}$. Quest' ultima equazione differenziale è soddisfatta ponendo $\sqrt{l} = \frac{1}{\cos. iv}$; si avrà quindi:

$$\alpha = \frac{1}{\cos. iv}\Big[\phi(u) \pm 1\Big] \;;$$

e siccome sostituendo questo valore di α nella (16) si giunge alla:

$$\phi'^2(u) + \Big[\phi(u) \pm 1\Big]^2 = 1 \;,$$

si ha $\alpha = \frac{\text{sen.}\, u}{\cos.\, iv}$, e la (17) riducesi per questi valori di α, l alla seguente:

$$\text{cotang.}\, u.\, \frac{d\beta}{du} + i\, \text{tang.}\, iv.\, \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\cos.^2 iv}\cdot\beta \;,$$

la quale è subito integrata e dà pel valore di β:

$$\beta = \frac{\cos. u}{\cos. iv} \quad \text{e quindi} \quad \gamma = i \operatorname{tang}. iv.$$

cioè le coordinate curvilinee u, v corrispondono alle prime due variabili del sistema considerato dal sig.r Bonnet nella memoria citata.

Ottenuti così i valori di α, β, γ pei quali $l = n$, $m = 0$ ed l funzione della sola v, osservando che le (14) riduconsi in questo caso alle:

$$\frac{dA}{dv} - \frac{dB}{du} = i \operatorname{tang}. iv . (A + C), \quad \frac{dB}{dv} - \frac{dC}{du} = 0,$$

nel problema che si ha di mira essendo:

$$A + C = -2lh, \quad \text{per cui} \quad \frac{dA}{du} + \frac{dC}{du} = 0,$$

si avrà anche:

$$\frac{d^2A}{du^2} + \frac{d^2A}{dv^2} = -h \frac{d^2l}{dv^2},$$

ossia:

$$A = f(s) + F(t) - \frac{h}{\cos.^2 iv},$$

posto $s = u + iv$, $t = u - iv$. Così avremo:

$$C = -f(s) - F(t) - \frac{h}{\cos.^2 iv}$$

e:

$$B = i\Big[f(s) - F(t)\Big];$$

i quali valori sostituiti nelle (13) danno le equazioni differenziali della superficie richiesta, ossia:

$$dx = hd\alpha - f(s) \cos. s ds - F(t) \cos. t dt,$$

$$dy = hd\beta + f(s) \operatorname{sen}. s ds + F(t) \operatorname{sen}. t dt,$$

$$dz = hd\gamma + i\Big[f(s) ds - F(t) dt\Big].$$

Notiamo che per le (11) essendo:

$$k^2(R_1-R_2)^2=(Al-Cn)^2+4B^2ln+4m(ACm-BCl-ABn),$$

per le superficie nelle quali $R_1=R_2$, nel primo sistema di coordinate deve essere $AC=0$, e nel secondo:

$$A-C=2iB;$$

e le formole superiori si prestano nell'un caso e nell'altro alla ricerca delle equazioni differenziali delle superficie stesse.

6.° Abbiamo dimostrato nel precedente paragrafo come le formole e le considerazioni esposte nei paragrafi terzo e quarto conducono facilmente alla scelta di quel sistema di coordinate u, v che si presenta più opportuno nel problema particolare che si ha di mira. Potremmo aggiungere altri esempi, ma ci limiteremo ad alcune osservazioni sulla equazione generale delle linee di curvatura, giacchè la introduzione delle variabili l, m, n nella equazione stessa conduce ad alcuni risultati di qualche interesse.

È noto che la equazione delle linee di curvatura in coordinate curvilinee u, v è la seguente:

$$(eB-fA)\overline{du}^2+(eC-gA)\,du\,dv+(fC-gB)\overline{dv}^2=0\ ,$$

la quale per le relazioni (12) si trasforma nella:

$$(18)\qquad (mA-lB)\overline{du}^2+(nA-lC)\,du\,dv+(nB-mC)\overline{dv}^2=0\,.$$

Questa equazione nell'ipotesi di $l=n=0$ riducesi alla:

$$A\,\overline{du}^2=C\,\overline{dv}^2\ ;$$

ed essendo per le superficie nelle quali la somma dei raggi di curvatura è costante $A=\phi(u)$, $C=\psi(v)$, la equazione stessa è ridotta alle quadrature da quel sistema di coordinate u, v.

Così se si suppone $l=n$, $m=0$, si ottiene la:

$$\overline{dv}^2+\frac{A-C}{B}\,du\,dv-\overline{du}^2=0\ ,$$

la quale pei valori di A, B, C trovati per le superficie suddette nel sistema di coordinate che ora consideriamo, si trasforma nella:

$$f(s)\,\overline{ds}^2 = F(t)\,\overline{dr}^2.$$

È noto che per una linea di curvatura si hanno le:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma},$$

e che la condizione necessaria e sufficiente perchè una linea nello spazio sia piana è la:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0:$$

quindi affinchè una linea di curvatura sia piana, dovrà sussistere la equazione seguente:

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ d^2\alpha & d^2\beta & d^2\gamma \\ d^3\alpha & d^3\beta & d^3\gamma \end{vmatrix} = 0;$$

Quest'ultima integrata dà:

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = h,$$

essendo λ, μ, ν, h quattro costanti: proprietà dimostrata da Joachimsthal per una linea di curvatura piana; ma supponendo le α, β, γ funzioni di u, v, la equazione stessa condurrà ad una equazione differenziale del terzo ordine, i coefficienti della quale sono funzioni di l, m, n e delle loro derivate. Allorquando questa equazione sia integrabile, si otterrà la relazione che deve sussistere fra le u, v lungo quella linea di curvatura.

Sia $s(u, v) = c$ questa relazione, indicando con c una delle costanti introdotte dalla integrazione; essa potrà evidentemente rappresentare un sistema di linee di curvatura piane; e se con $t(u, v) = c_1$ si indica il sistema ortogonale, dovranno le s, t soddisfare alle due equazioni:

$$e\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}-f\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right)+g\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}=0,$$

$$A\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}-B\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right)+C\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}=0.$$

i primi membri delle quali, fatta astrazione da un fattore, sono i valori delle f, B, corrispondenti al sistema di coordinate curvilinee s, t. Da queste equazioni, rammentando le relazioni (12), deducesi facilmente l'eguaglianza dei rapporti:

$$(20)\qquad \frac{\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}}{Bn-Cm}=\frac{\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}}{An-Cl}=\frac{\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}}{Am-Bl}.$$

Nei due casi considerati al § 5.° la ricerca delle equazioni differenziali considerate sopra e la loro integrazione non presenta alcuna difficoltà; ponendo in fatti $\frac{dv}{du}=v'$ si ottengono le:

$$2v'v'''-3v''^2=0\ ,\qquad (1+v'^2)v'''+(1+v'^2)^2v'-3v'v''^2=0\ ,$$

le quali integrate danno:

$$(21)\qquad v'=\frac{b}{(u+a)^2}\ ,\qquad v'=\frac{a\,\text{sen.}(u+b)}{\sqrt{1-a^2\,\text{sen.}^2(u+b)}}\,,$$

essendo a, b le costanti dell'integrazione. Inoltre dalle equazioni (20) si deducono le seguenti:

$$(22)\qquad \begin{aligned}&\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}=0\ ,\qquad A\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=-C\frac{ds}{du}\frac{dt}{du},\\ &\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=0\ ,\quad (A-C)\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=B\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right);\end{aligned}$$

dalla prima e terza delle quali, supponendo noto s, si otterrà colla integrazione la $t(u,v)=c_1$. Infine, se quest'ultima equazione sarà un integrale particolare della equazione ai differenziali del terzo ordine considerata sopra, anche le linee di curvatura del secondo sistema saranno piane.

Ora trasformando la seconda delle (21) col porre:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\cos.(u+b)=i\cos.\xi$$

si ottiene la $dv=id\xi$, per la quale, indicando con c una costante, si deduce:

$$\frac{\cos.(u+b)}{\cos.i(v+c)}=\frac{i\sqrt{1-a^2}}{a}=h;$$

cioè supponendo:

$$s=\frac{\cos.(u+b)}{\cos.i(v+c)},$$

la equazione $s=h$ rappresenta un sistema di linee di curvatura piane. Sostituendo questo valore di s nella seconda delle (22) si ottiene facilmente per t il valore seguente:

$$t=\frac{\text{sen.}(u+b)}{i\,\text{sen.}\,i(v+c)},$$

e la equazione $t=h_{/}$ rappresenta l'altro sistema di linee di curvatura. Ma siccome mutando la b in $b-\frac{\pi}{2}$ nella seconda delle (21), e ponendo $\frac{1-a^2}{a^2}=h_{/}^2$ si ha la:

$$v'=-\frac{\cos.(u+b)}{\sqrt{h_{/}^2+\text{sen.}^2(u+b)}},$$

di cui l'integrale è appunto $t=h_{/}$, se ne deduce che le linee rappresentate da quest'ultima equazione sono anche linee piane. Le coordinate curvilinee s, t saranno perciò le più opportune nello studio delle superficie nelle quali le linee di curvatura dell'uno e dell'altro sistema sono linee piane. Supponendo $b=0$, otteniamo per s, t i valori trovati dal sig.r Bonnet nella memoria succitata, considerando le trasformate sferiche delle linee di curvatura, e dal medesimo applicati allo studio delle superficie nelle quali tutte le linee di curvatura sono piane. Questa ricerca si rende assai semplice se osservasi che, indicando l'equazione del piano della linea di curvatura $s=h$ con:

$$\lambda x+\mu y+\nu z=\rho,$$

si ha:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=\theta,$$

essendo $\lambda, \mu, \nu, \rho, \theta$ funzioni di s; e che conoscendosi i valori di α, β, γ in funzioni di s, t, dalla seconda di queste equazioni e dai differenziali della medesima rispetto a t si deducono i valori di λ, μ, ν. Così si ha:

$$\text{per le linee } s=h \quad : \quad x-atz=\phi(t)\,, \quad \alpha-at\gamma=bt\,,$$

$$\text{per le linee } t=h_1 \quad : \quad y-bsz=\psi(s)\,, \quad \beta-bs\gamma=as\,,$$

a, b essendo due costanti, cioè $a=\cos.ic$, $b=\cos.ic$. Il sig.r Serret ha già dimostrato nelle sue memorie sulle superficie a linee di curvatura piane, come da queste equazioni si giunga facilmente a quella delle superficie stesse.

7.° Nelle ricerche sulle linee di curvatura delle superficie il problema che d'ordinario ci occupa è il diretto, data, cioè, l'equazione di una superficie, determinare quelle delle sue linee di curvatura; ma le difficoltà che incontransi nella integrazione della equazione delle linee stesse non lasciano lusinga di molti risultati seguendo quella via. In questi ultimi tempi si prese anche a considerare il problema reciproco, nel quale si domandano le superficie di cui un sistema od i due sistemi di linee di curvatura sono linee di una data famiglia; ed i risultamenti ottenuti nelle ricerche sulle superficie aventi le linee di curvatura piane o sferiche, già importanti per sè stessi, mostrano la convenienza di limitare ancora più il problema onde giungere per gradi ad una soluzione completa. Per esempio, ristringendoci al caso di linee piane, quali sono le superficie nelle quali uno dei sistemi di linee di curvatura sono linee piane di cui le coordinate si esprimano in funzioni razionali di un parametro, ed in funzioni elittiche od abeliane?

Siano X, Y le coordinate di un punto di una linea piana, e:

$$\lambda_2 x+\mu_2 y+\nu_2 z=\omega$$

l'equazione del piano di essa linea, riferito a tre assi ortogonali. Se con x, y, z denotiamo le coordinate di quel punto rispetto a questi ultimi assi si hanno le:

$$(23) \qquad x=a+\lambda X+\lambda_1 Y\,; \quad y=b+\mu X+\mu_1 Y\,; \quad z=c+\nu X+\nu_1 Y\,;$$

purchè fra i coseni $\lambda, \lambda_1 \cdots$ sussistano le sei ordinarie equazioni, e perciò sia:

$$\lambda_2 a+\mu_2 b+\nu_2 c=\omega\,.$$

Suppongasi che le a, b, c ed i nove coseni $\lambda, \mu \cdots$ sieno funzioni di una variabile u, e le coordinate X, Y funzioni della stessa u e di un'altra variabile v. Le x, y, z date dalle (23) ponno così considerarsi come coordinate rettangolari, e le u, v come coordinate curvilinee di una superficie; le linee per le quali $u =$ cost. essendo linee piane. Ora siccome ponendo:

$$(24)\quad \begin{gathered} \Sigma\lambda \frac{da}{du} = l, \qquad \Sigma\lambda_1 \frac{da}{du} = l_1, \qquad \Sigma\lambda_2 \frac{da}{du} = l_2, \\ \Sigma\lambda_1 \frac{d\lambda_2}{du} = p, \qquad \Sigma\lambda_2 \frac{d\lambda}{du} = q, \qquad \Sigma\lambda \frac{d\lambda_1}{du} = r, \end{gathered}$$

e:

$$P = l + rY + \frac{dX}{du}, \qquad Q = l_1 - rX + \frac{dY}{du}, \qquad R = l_2 + qX - pY,$$

dalle (23) si deducono le seguenti:

$$\frac{dx}{du} = \lambda P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R, \qquad \frac{dx}{dv} = \lambda \frac{dX}{dv} + \lambda_1 \frac{dY}{dv},$$

e da queste la:

$$\frac{d^2x}{du\,dv} = \lambda \frac{dP}{dv} + \lambda_1 \frac{dQ}{dv} + \lambda_2 \frac{dR}{dv};$$

le condizioni perchè le linee $u =$ cost.^{e}, $v =$ cost.^{e} sieno linee di curvatura prenderanno la forma:

$$\Sigma \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} = P\frac{dX}{dv} + Q\frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{d^2x}{du\,dv} & \frac{d^2y}{du\,dv} & \frac{d^2z}{du\,dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{dX}{dv} & \frac{dY}{dv} & 0 \\ \frac{dP}{dv} & \frac{dQ}{dv} & \frac{dR}{dv} \end{vmatrix} = 0,$$

la seconda delle quali per l'antecedente si riduce alla:

$$R\,\Sigma P\frac{dP}{dv} = \frac{dR}{dv}\Sigma P^2;$$

e questa integrata dà:

(25) $$P^2+Q^2+R^2=\rho^2 R^2,$$

essendo ρ una funzione della sola variabile u. Le X, Y delle equazioni (23) dovranno quindi verificare le due equazioni:

(26) $$P\frac{dX}{dv}+Q\frac{dY}{dv}=0, \qquad P^2+Q^2=\psi^2 R^2,$$

posto $\psi^2=\rho^2-1$. La seconda di esse è soddisfatta supponendo:

(27) $$P=R\psi\,\text{sen.}\eta, \qquad Q=R\psi\cos.\eta,$$

ed η una funzione di u e di v da determinarsi; e per queste dalla prima delle (26) si deducono le:

(28) $$\frac{dX}{dv}=-\zeta\cos.\eta, \qquad \frac{dY}{dv}=\zeta\,\text{sen.}\eta,$$

essendo ζ una seconda funzione indeterminata. Differenziando le equazioni (27) rispetto a v, avuto riguardo alle' (28) si ottengono le due seguenti:

$$\zeta\,\text{sen.}\eta\left[\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)\right]=\cos.\eta\left[\frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}\right],$$

$$\zeta\cos.\eta\left[\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)\right]=-\text{sen.}\eta\left[\frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}\right],$$

per le quali saranno:

(29) $$\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)=0, \qquad \frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}=0.$$

Ora se con ϕ si indica una funzione di u e di v, e si pone:

$$\zeta=\frac{d\varphi}{dv}+\phi\frac{d\eta}{dv}\,\text{cotang.}\eta,$$

la seconda delle equazioni (28) dà $Y=\phi\,\text{sen.}\eta$, e dalla prima risultando:

$$\frac{dX}{dv}=-\left[\frac{d\varphi}{dv}\cos.\eta-\phi\frac{d\eta}{dv}\,\text{sen.}\eta+\frac{\varphi}{\text{sen.}\eta}\cdot\frac{d\eta}{dv}\right],$$

si deduce la:

$$X = -\xi - \phi \cos.\eta\,,$$

supponendo la funzione ϕ determinata mediante la:

(30) $$\phi \frac{d\eta}{dv} = \frac{d\xi}{dv} \operatorname{sen}.\eta\,,$$

e ξ simbolo di una nuova funzione da determinarsi.

Alle X, Y si sono così sostituite due nuove variabili ξ, η legate alle prime per le:

(31) $$X = -\xi - \phi \cos.\eta\,, \qquad Y = \phi \operatorname{sen}.\eta\,,$$

essendo ϕ una funzione di ξ, η data dalla (30), ed η una funzione di u, v determinata dalla prima delle (29). La equazione differenziale che determina la funzione ξ può dedursi dalla seconda delle (29) o più semplicemente sostituendo questi valori delle X, Y nelle (27). In questo modo si ottengono le seguenti:

$$l - \frac{d\xi}{du} - \frac{d\varphi}{du}\cos.\eta - \psi(l_2 - q\xi)\operatorname{sen}.\eta = 0,\ \ l_1 + r\xi + \frac{d\varphi}{du}\operatorname{sen}.\eta - \psi(l_2 - q\xi)\cos.\eta = 0,$$

dalle quali eliminando $\frac{d\varphi}{du}$ si ha:

(32) $$\left(l - \frac{d\xi}{du}\right)\operatorname{sen}.\eta + \left(l_1 + r\xi\right)\cos.\eta - \psi\left(l_2 - q\xi\right) = 0\,,$$

colla quale determinasi ξ, conosciuto η per mezzo della prima delle (29).

Se nelle formole superiori si suppongono $l_1 = l_2 = q = 0$; $l = 1$, le (29) (32) diventano:

$$\frac{d\eta}{du} + r + \psi p \operatorname{sen}.\eta = 0\,,\quad 1 - \frac{d\xi}{du} + r\xi \operatorname{cotang}.\eta = 0,$$

e scrivendo a', $b' \cdots$ in luogo di $\frac{da}{du}$, $\frac{db}{du} \cdots$ si deducono facilmente le seguenti:

$$\lambda = a'\,,\quad -r\lambda_1 = \lambda' = a''\,, \cdots$$

per le quali:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1\,,\quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = r^2\,,$$

ed infine:

$$x = a - a'\left(\xi + \phi \cos.\eta\right) - \frac{a''}{r}\phi \ \text{sen.}\eta\,,$$

ed analogamente per y, z mutando la a in b, c. Sono queste le equazioni già trovate per mezzo di considerazioni geometriche da JOACHIMSTHAL, per le superficie nelle quali le linee di curvatura di un sistema sono piane.

Notisi che, continuando a rappresentare con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale alle superficie fa cogli assi delle x, y, z, si ha:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left(\lambda_2 \psi - \lambda \,\text{sen.}\eta - \lambda_1 \cos.\eta\right),$$

o ponendo $$\rho = -\frac{1}{\text{sen.}\theta}\,, \quad \psi = \rho \cos.\theta\,, \quad \text{sarà:}$$

$$\alpha = \lambda \,\text{sen.}\theta \,\text{sen.}\eta + \lambda_1 \text{sen.}\theta \cos.\eta + \lambda_2 \cos.\theta\,;$$

e quindi θ è l'angolo compreso dal piano tangente e da quello della linea di curvatura, ed η l'angolo che la projezione della normale sopra quest'ultimo piano comprende coll'asse delle Y. Queste espressioni pei coseni degli angoli che la normale, alla superficie considerata, forma cogli assi ortogonali, e quelle che dalle medesime si ponno dedurre per $A, B, C,$ e le altre quantità delle quali si fece uso nei paragrafi precedenti, ci offrirebbero un mezzo facile allorquando si volessero determinare le proprietà generali a questa classe di superficie.

Ma nella trattazione del problema speciale che abbiamo enunciato al principio di questo paragrafo conviene ritornare alle equazioni (26), contenendo esse le coordinate X, Y della linea piana. A queste equazioni aggiungendo quelle che esprimono le proprietà caratteristiche indicate per le coordinate medesime, si otterranno da una parte per le sei quantità (24) valori i quali, si potrebbe dire, limitano i movimenti del piano della linea, e si giungerà dall'altra a stabilire le relazioni che devono sussistere fra i parametri della linea stessa, considerati come funzioni della variabile u, affinchè essa possa essere linea di curvatura.

Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie.

(*dei Professori* A. Clebsch *e* P. Gordan, *a Giessen*).

Una forma binaria di grado $2n+1$ $(n>1)$ può essere rappresentata tipicamente, ossia con coefficienti che siano a un tempo invarianti, se, deviando alquanto dal metodo adottato dal sig.[r] Hermite per le forme di quinto grado, si introducono due covarianti lineari come variabili. Siccome però il numero dei coefficienti della forma tipica, incluso un denominatore comune, supera di quattro il numero degli invarianti, così si possono introdurre i coefficienti medesimi della forma tipica come invarianti fondamentali, purchè si stabiliscano fra essi quattro relazioni, le quali diano a quella il carattere di forma tipica. Ciò si effettua costruendo per la forma tipica i covarianti scelti come variabili e scrivendo le condizioni perchè essi coincidano colle variabili stesse, moltiplicate per una potenza (facile a riconoscersi) del determinante della trasformazione. Questo processo però non è più sufficiente quando si voglia esprimere tutto mediante gli invarianti più semplici della forma. In tal caso conviene seguire vie speciali; e la forma tipica può essere ottenuta con mezzi che, se anche affatto simili fra loro, pure presentano qualche differenza pei diversi gradi. Noi effettueremo questa rappresentazione per le forme di quinto grado; la quale a un di presso comprende in sè tutta la teoria di queste forme; e si rileverà facilmente che le forme di grado dispari possono, l'una dopo l'altra, essere trattate nella stessa guisa.

Similmente per le forme di grado $2n$ $(n>2)$. Qui si ottiene la rappresentazione tipica introducendo tre covarianti di secondo grado; fra questi ha luogo una equazione di secondo grado, mentre la forma stessa è rappresentata come forma ternaria del grado n, ed i coefficienti sono tutti invarianti. Anche in questo caso si possono assumere i coefficenti come invarianti fondamentali, cercando le relazioni fra i medesimi le quali caratterizzano la forma tipica. Per ottenere queste relazioni basta comporre per la forma tipica i prescelti covarianti di secondo grado e paragonarli con quelli assunti come dati. Ed anche qui occorrono metodi particolari per esprimere il tutto mediante gli invarianti più semplici. Noi li svilupperemo, in via d'esempio, per le forme di sesto grado, e daremo i tratti principali della teoria di queste forme; il proseguire la via analoga per le forme di grado superiore non ha alcuna difficoltà.

I risultati ottenuti, in quanto risguardano le forme di quinto grado, o sono già noti pei lavori dei signori CAYLEY, SYLVESTER, SALMON, HERMITE, o facilmente deducibili da essi; noi crediamo quindi che per questa parte l'importanza principale stia nell'esposizione sistematica. Ma rispetto alle forme di sesto grado sono state assegnate finora soltanto alcune forme fondamentali (CAYLEY, *Memoirs upon Quantics*) ed in ispecie calcolati gli invarianti (cfr. SALMON, *Higher Algebra*, 2.ª ediz.), senza che siasi tentato di presentare la connessione delle forme, il che invece noi facciamo completamente. Del resto gli invarianti qui prescelti come fondamentali differiscono da quelli usati altrove, essendo nella presente ricerca emersa da sè la necessità di introdurre appunto questi e non altri invarianti.

§ 1.

Forme di quinto grado. Loro forme fondamentali.

La forma binaria:

$$u=ax_1^5+5bx_1^4x_2+10cx_1^3x_2^2+10dx_1^2x_2^3+5ex_1x_2^4+fx_2^5$$

si rappresenti simbolicamente con:

$$u=a_x^5=a'^5_x=\cdots(a_x=a_1x_1+a_2x_2\,,\ a'_x=a'_1x_1+a'_2x_2\,,\ldots)$$

Ricavando da u la forma di quarto grado nelle y:

$$\tfrac{1}{5}\left(x_1\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right)=a_y^4\cdot a_x\ ,$$

e formando rispetto ad essa gli invarianti i, j della forma di quarto grado, si ottengono covarianti di secondo e terzo grado. Se con u_i, u_{ik} si indicano sempre derivate divise per ν, $\nu(\nu-1), \cdots$, dove ν è il grado della funzione, sarà:

$$i = 2\left\{u_{1111}\,u_{2222} - 4\,u_{1112}\,u_{1222} + 3\,u^2_{1122}\right\},$$

$$j = 3\begin{vmatrix} u_{1111} & u_{1112} & u_{1122} \\ u_{1112} & u_{1122} & u_{1222} \\ u_{1122} & u_{1222} & u_{2222} \end{vmatrix},$$

ovvero simbolicamente, posto $a_i b_k - b_i a_k = (a\,b)$:

$$i = i_x^2 = i'^2_x \cdots = (a\,a')^4\, a_x\, a_x',$$

$$j = j_x^2 = j'^2_x \cdots = \tfrac{1}{2}(a\,a')^2\,(a'\,a'')^2\,(a''\,a)^2\, a_x\, a'_x\, a''_x\,.$$

L'espressione simbolica di j può essere trasformata, e si arriva così ad un'altra maniera di generare j. In fatti, se si fa uso dell'equazione simbolica:

$$(a\,a')\,a_x'' = (a\,a'')\,a_x' - (a'\,a'')\,a_x\,,$$

j si muta nella somma di due termini che collo scambio di a' ed a diventano perfettamente eguali, onde si può invece dei due termini medesimi porre il doppio dell'uno di essi. Si ha così:

$$j = -(a\,a')\,(a'\,a'')^3\,(a\,a'')^2\, a_x^2\, a_x'\,.$$

Sostituendo di nuovo per $(a\,a'')\,a_x'$ il suo valore desunto dall' identità superiore, j si divide ancora in due parti:

$$j = -(a\,a')(a\,a'')\,(a'\,a'')^4\, a_x^3 - (a\,a')^2\,(a\,a'')\,(a'\,a'')^3\, a_x^2\, a_x''\,;$$

la seconda delle quali è $-j$, perchè essa si desume dall'espressione precedente scambiando a' con a''; e la prima è, con altro segno, l' espressione simbolica della funzione $u_{11}\,i_{22} - 2\,u_{12}\,i_{12} + u_{22}\,i_{11}$; si ha dunque la formola:

$$u_{11}\,i_{22} - 2\,u_{12}\,i_{12} + u_{22}\,i_{11} = -2\,j\,,$$

che somministra una seconda maniera di formare j.

Ma fra u e j sussiste ancora un'altra relazione che è di importanza fondamentale per la teoria. Cioè si annulla identicamente il covariante di secondo grado:

$$u_{111}j_{222}-3u_{112}j_{122}+3u_{122}j_{112}-u_{222}j_{111}=(aj)^3\,a_x^2\ .$$

In fatti, se si pone per j l'espressione simbolica:

$$j=-\tfrac{1}{2}(ai)^2\,a_x^3\,,$$

che risulta dalla sua seconda rappresentazione, il covariante anzidetto assume la forma:

$$(ai)^2\cdot(aa')^3\cdot a_x'^2=\tfrac{1}{2}(aa')^3\left\{(ai)^2a_x'^2-(a'i)^2a_x^2\right\}\,,$$

la quale, per l'identità già considerata:

$$(ai)\,a_x'-(a'i)\,a_x=(aa')\,i_x\,,$$

diviene:

$$\tfrac{1}{2}(aa')^4i_x\left\{(ai)a_x'+(a'i)\,a_x\right\}.$$

Ma questa non è altra cosa che il determinante funzionale di due funzioni entrambe uguali ad i, epperò è identicamente zero.

Da j scaturisce un secondo covariante quadratico:

$$\tau=2(j_{11}j_{22}-j_{12}^2)=2\begin{vmatrix} j_{111} & j_{112} & x_2^2 \\ j_{112} & j_{122} & -x_1x_2 \\ j_{122} & j_{222} & x_1^2 \end{vmatrix}=\tau_x^2\cdots=(jj')^2j_xj_x'.$$

Se questo covariante si combina con i nella forma $\tau+\lambda i$, nei coefficienti del determinante di questa funzione si otterranno gli invarianti indipendenti di u. Cioè, se si pone:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11}+\lambda i_{11} & \tau_{12}+\lambda i_{12} \\ \tau_{12}+\lambda i_{12} & \tau_{22}+\lambda i_{22} \end{vmatrix}=\lambda^2A+2\lambda B+C\,,$$

i tre invarianti (i cui ordini sono rispettivamente 4, 8 e 12) saranno:

$$A = i_{11}\, i_{22} - i_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(ii')^2\,,$$
$$B = \tfrac{1}{2}(i_{11}\tau_{22} - 2\, i_{12}\tau_{12} + i_{22}\tau_{11}) = \tfrac{1}{2}(i\tau)^2\,,$$
$$C = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(\tau\tau')^2\,.$$

Il divisore 2 in B non è che apparente, perchè, in virtù del modo con cui sono formati, i_{11}, i_{22}, τ_{11}, τ_{22} sono divisibili per 2.

Inoltre da i e da τ si ricava il covariante:

$$\vartheta = i_1\tau_2 - \tau_1 i_2 = (i\tau)\, i_x \tau_x = \begin{vmatrix} i_{11} & \tau_{11} & x_2^2 \\ i_{12} & \tau_{12} & -x_1 x_2 \\ i_{22} & \tau_{22} & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

L'ultima espressione di ϑ mostra a dirittura che hanno luogo le due equazioni:

$$\vartheta_{11}\, i_{22} - 2\vartheta_{12}\, i_{12} + \vartheta_{22}\, i_{11} = 0\,,$$
$$\vartheta_{11}\tau_{22} - 2\vartheta_{12}\tau_{12} + \vartheta_{22}\tau_{11} = 0\,.$$

Ma il determinante di ϑ è:

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_{11}\vartheta_{22} - 2\vartheta_{12}\vartheta_{12} + \vartheta_{22}\vartheta_{11})\,,$$

e può per conseguenza essere riprodotto dalla moltiplicazione dei determinanti corrispondenti dei sistemi incompleti:

$$\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{22} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{22} & -2i_{12} & i_{11} \\ \tau_{22} & -2\tau_{12} & \tau_{11} \end{vmatrix},$$

che dà il determinante:

$$\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} i_{11} i_{22} - 2 i_{12} i_{12} + i_{22} i_{11} & i_{11}\tau_{22} - 2 i_{12}\tau_{12} + i_{22}\tau_{11} \\ \tau_{11} i_{22} - 2\tau_{12} i_{12} + \tau_{22} i_{11} & \tau_{11}\tau_{22} - 2\tau_{12}\tau_{12} + \tau_{22}\tau_{11} \end{vmatrix}$$

Si ha dunque la formola:

$$\vartheta_{11}\vartheta_{22} - \vartheta_{12}^2 = AC - B^2\,.$$

Per rappresentare ϑ^2 in i e τ, si ha in virtù dell'espressione di ϑ già adoperata:

$$\vartheta^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{22} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{22} \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{22} & -2i_{12} & i_{11} \\ \tau_{22} & -2\tau_{12} & \tau_{11} \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 \end{vmatrix},$$

ossia, eseguendo la moltiplicazione:

$$\vartheta^2 = \begin{vmatrix} A & B & i \\ B & C & \tau \\ i & \tau & 0 \end{vmatrix},$$

e finalmente:

$$\vartheta^2 = -\{A\tau^2 - 2B\tau i + Ci^2\}.$$

Differenziando questa equazione si trova:

$$\vartheta\vartheta_1 = i_1(B\tau - Ci) - \tau_1(A\tau - Bi),$$
$$\vartheta\vartheta_2 = i_2(B\tau - Ci) - \tau_2(A\tau - Bi),$$

e quindi:

$$\vartheta_1 i_2 - \vartheta_2 i_1 = A\tau - Bi,$$
$$\vartheta_1 \tau_2 - \vartheta_2 \tau_1 = B\tau - Ci.$$

Da ultimo ritornando alle forme i e j, dalla combinazione delle medesime nasce un covariante lineare:

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \tfrac{1}{2}(i_{11} j_{22} - 2 i_{12} j_{12} + i_{22} j_{22}) = \tfrac{1}{2}(ij)^2 j_x = -\tfrac{1}{4}(ai)^2 (ai')^2 a_x.$$

Altri covarianti lineari si formano combinando α con i, τ, ϑ (*); di alcuni fra essi si tratterà ancora più avanti.

(*) Formando il determinante funzionale di ciascun covariante quadratico i con ciascun covariante φ di grado ν, si genera un altro covariante dello stesso grado. Ma si possono formare nuovi covarianti dello stesso grado ν anche differenziando φ rispetto ai coefficienti della funzione primitiva u di grado n e mettendo invece delle differen-

§ 2.

Relazioni fra gli invarianti.

L'equazione:

$$\vartheta^2 = -\{A\tau^2 - 2B\tau i + Ci^2\}$$

somministra incontanente la rappresentazione del quadrato dell' invariante (di Hermite) del 18.° ordine mediante gli invarianti A, B, C. In fatti, se in ϑ, τ ed i poniamo per x_1, x_2 i coefficienti α_2, $-\alpha_1$ del covariante lineare α, allora ϑ si cambia nell'invariante del 18.° ordine:

$$2R = \begin{vmatrix} i_{11} & \tau_{11} & \alpha_1^2 \\ i_{12} & \tau_{12} & \alpha_1\alpha_2 \\ i_{22} & \tau_{22} & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \vartheta_{11}\alpha_1^2 - 2\vartheta_{12}\alpha_1\alpha_2 + \vartheta_{22}\alpha_2^2,$$

---

ziali i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_1 u_2$, che è parimente di grado n. Allora si presenta la notabile circostanza che i due processi conducono al medesimo risultato. Sia in fatti la funzione data:

$$u = a_0 x_1^n + n \cdot a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n.\, n-1}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots;$$

le equazioni differenziali parziali soddisfatte dal covariante φ si possono, secondo il signor Aronhold, porre sotto la forma simbolica:

$$\xi_1 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \lambda\varphi, \qquad \xi_2 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0,$$

$$\xi_1 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \qquad \xi_2 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \lambda\varphi,$$

introducendo le equazioni simboliche:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = \xi_1^n, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = n.\, \xi_1^{n-1}\xi_2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = \frac{n.\, n-1}{2} \xi_1^{n-2}\xi_2^2, \text{ ecc.}$$

Indicati ora con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_2 u_1$, corrispondenti agli a, consideriamo la nuova forma nascente da φ:

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}\alpha_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\alpha_1 + \ldots,$$

mentre i e τ diventano gli invarianti del 12.° e del 16.° ordine:

$$2M = i_{11}\alpha_2^2 - 2i_{12}\alpha_1\alpha_2 + i_{22}\alpha_1^2,$$

$$2N = \tau_{11}\alpha_2^2 - 2\tau_{12}\alpha_1\alpha_2 + \tau_{22}\alpha_1^2.$$

Dunque dall'equazione superiore si ha la relazione fra R, M, N:

$$R^2 = -\{AN^2 - 2BMN + CM^2\}.$$

Resta soltanto ad esprimere M ed N per mezzo di $A, B, C,$ ciò che si fa razionalmente.

Se le forme $\alpha, i, j,$ che sono rispettivamente del primo, secondo e terzo grado, si riguardano come indipendenti fra loro, competono ad esse cinque invarianti indipendenti i quali sono gli invarianti A, B, C, M, N.

Se si fa uso solamente della circostanza che α nasce da i e j, considerando però ancora i coefficienti di i e j come indipendenti, ne segue una relazione fra i cinque invarianti, ed in vero si vede facilmente che essa consiste in una rappresentazione di N per mezzo di A, B, C. Si ottiene questa relazione nel modo seguente.

La forma N non è che $\frac{1}{2}\tau$, dove x_1, x_2 siano surrogate da $\alpha_2, -\alpha_1$, cioè si ha:

$$N = \begin{vmatrix} j_{111}\alpha_2 - j_{112}\alpha_1 & j_{112}\alpha_2 - j_{122}\alpha_1 \\ j_{112}\alpha_2 - j_{122}\alpha_1 & j_{122}\alpha_2 - j_{222}\alpha_1 \end{vmatrix},$$

---

la quale per mezzo delle sostituzioni simboliche si trasforma manifestamente in:

$$\alpha_0\xi_1^n + n.\alpha_1\xi_1^{n-1}\xi_2 + \ldots = (u_1 i_2 - i_2 u_1)_\xi,$$

per modo che si ha simbolicamente:

$$\psi = (i_{12}\xi_1 + i_{22}\xi_2)\,u_1(\xi) - (i_{11}\xi_1 + i_{12}\xi_2)\,u_2(\xi),$$

ovvero, per le equazioni differenziali parziali soddisfatte da φ:

$$\psi = \frac{1}{n}\left(i_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - i_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = \frac{\nu}{n}\left(i_2\varphi_1 - i_1\varphi_2\right).$$

Si ha dunque il teorema:

Se si differenzia un covariante φ di grado ν rispetto ai coefficienti della funzione u di grado n, dalla quale esso trae origine, e se invece delle differenziali si pongono i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_1 u_2$, dove i è un covariante quadratico qualsivoglia, si ottiene il covariante $\varphi_1 i_2 - i_1\varphi_2$ moltiplicato per $\frac{\nu}{n}$.

vale a dire, N è il determinante della forma di secondo grado:

$$j_1 \alpha_2 - j_2 \alpha_1 = j_x^2 (j\alpha),$$

la quale, mercè l'introduzione dell' espressione simbolica di α assume successivamente le forme:

$$\begin{aligned} j_x^2 (j\alpha) &= \tfrac{1}{2} j_x^2 (jj')(j'i)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(jj') \{ j_x^2 (j'i)^2 - j'^2_x (ji)^2 \} \\ &= -\tfrac{1}{4}(jj')^2 i_x \{ (ji) j'_x + (j'i) j_x \} \\ &= \tfrac{1}{2}(i\tau)\, i_x \tau_x = \tfrac{1}{2} \vartheta . \end{aligned}$$

Dunque N è il determinante di ϑ, diviso per 4, cioè si ha:

$$N = \tfrac{1}{4}(AC - B^2) .$$

Se poi, in secondo luogo, si considera inoltre che i e j sono composti coi coefficienti della medesima forma di quinto grado, si ottiene una seconda relazione che serve ad esprimere M per mezzo di A, B, C.

A quest'uopo cominciamo dal considerare la forma cubica:

$$v = u_{11}\tau_{22} - 2u_{12}\tau_{12} + u_{22}\tau_{11} = a_x^3 (a\tau)^2 .$$

che è di un'importanza primaria anche per ciò che segue. Il prodotto:

$$Aj = \tfrac{1}{4}(ii')^2 (aa')^2 (aa'')^2 (a'a'')^2 a_x a'_x a''_x ,$$

per mezzo dell'equazione:

$$(ii')^2 (aa')^2 = \{ (ai)(a'i') - (a'i)(ai') \}^2 ,$$

che scaturisce dalla relazione identica già usata più volte, e riunendo i termini identici, si trasforma in:

$$Aj = \tfrac{1}{2} \{ (ai)^2 (a'i')^2 - (ai)(ai')(a'i)(a'i') \} (aa'')^2 (a'a'')^2 a_x a'_x a''_x .$$

Inoltre dalle identità:

$$\begin{aligned} &(ai)(a'a'') + (aa')(a''i) + (aa'')(ia') = 0 , \\ &(ai')(a'a'') + (aa')(a''i') + (aa'')(i'a') = 0 \end{aligned}$$

seguono le equazioni:

$$2(ai)(a'i)(aa'')(a'a'')=(ai)^2(a'a'')^2+(a'i)^2(aa'')^2-(aa')^2(a''i)^2,$$
$$2(ai')(a'i')(aa'')(a'a'')=(ai')^2(a'a'')^2+(a'i')^2(aa'')^2-(aa')^2(a''i')^2;$$

e trasformando, mediante queste equazioni, la seconda parte dell'espressione precedente di Aj, si trova, dopo aver riuniti i termini identici:

$$Aj=-\tfrac{3}{8}(ai)^2(ai')^2(a'a'')^4a_xa_x'a_x''+\tfrac{3}{4}(ai)^2(a'i')^2(aa'')^2(a'a'')^2a_xa_x'a_x''.$$

La prima parte del secondo membro non è altro che $\frac{3}{2}\,\alpha i$; la seconda parte, in virtù della seconda formola per j, può essere surrogata da:

$$3(ja)^2(j'a)^2a_xj_xj_x',$$

e quindi trasformata mediante l'equazione:

$$(ja)j'_x=(jj')a_x-(j'a)j_x,$$

omettendovi la seconda parte contenente $(j'a)^3$, a cagione della relazione fra u e j. Si trova così per quella parte l'espressione:

$$3(ja)(j'a)^2(jj')a_x^2j_x=\tfrac{3}{2}(ja)(j'a)(jj')a_x^2\{(j'a)j_x-(ja)j_x'\}$$
$$=-\tfrac{3}{2}(ja)(j'a)(jj')^2a_x^3=-\tfrac{3}{2}(\tau a)^2a_x^3.$$

Questa è la forma cercata, e si ha perciò l'importante equazione:

$$u_{11}\tau_{22}-2u_{12}\tau_{12}+u_{22}\tau_{11}=-\tfrac{2}{3}Aj+i\alpha.$$

Cerchiamo ora che cosa avvenga di questa equazione, se in luogo delle potenze delle x vi si introducano, in ordine rovesciato e coi segni cambiati, i coefficienti della forma cubica:

$$3(i_1j_2-j_1i_2)=3(ij)i_xj_x^2.$$

Il primo membro diviene:

$$3(a\tau)^2(ij)(ia)(ja)^2=-3(a\tau)(ia)(ja)^2\{(ai)(j\tau)-(aj)(\tau i)\},$$

ovvero, omessa la parte moltiplicata per $(ja)^3$:

$$3(a\tau)(ai)^2(ja)^2(j\tau)=-6(j'\tau)(jj')^2(j\tau)=-6(\tau\tau')^2=-6\,C.$$

Poi da j si ricava:

$$3(ij)(ij')(jj')^2 = 3(i\tau)^2 = 3B\,.$$

Finalmente la combinazione di $i\alpha$ colla funzione $3(i_1 j_2 - j_1 i_2)$ dà:

$$(ij)\{2(ii')(ji')(j\alpha) + (ji')^2(i\alpha)\}\,.$$

La prima parte di questa espressione è identicamente nulla, perchè essa muta di segno se si scambia j con j'. La seconda è:

$$(i\alpha)^2 = 2M\,.$$

Dunque, in seguito a queste operazioni, l'equazione proposta diviene:

$$-6C = -2AB + 2M\,,$$

onde si ottiene per M il valore:

$$M = AB - 3C\,,$$

e questa è la seconda relazione fra gli invarianti.

§ 3.

Forme tipiche per i, τ, ϑ, j.

Se si forma il determinante funzionale di α e di un covariante quadratico, ne risulta un nuovo covariante lineare. Siccome α è del 5^0 ordine nei coefficienti di u, così le combinazioni di α con i, τ, ϑ danno covarianti lineari degli ordini 7, 5, 13. Fra essi l'ultimo ha una particolare importanza, ed è appropriato ad essere introdotto nelle forme tipiche, essendo la differenza del suo ordine con quello di α divisibile per 4; d'onde segue che, se si assumono α e:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \vartheta_2)\,,$$

come variabili nella composizione delle forme tipiche, gli ordini dei coefficienti dei singoli termini saranno tutti numeri congrui rispetto al modulo 4, e conseguentemente l'invariante del 18^0 ordine, il quale è espresso irrazionalmente per mezzo degli altri non può entrare nei coefficienti. Invece esso è il determinante della trasformazione, avendosi:

$$\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2 = R.$$

Prima di tutto esprimiamo i, τ e ϑ per mezzo di α e γ.
Dalle formole:

$$\gamma = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\,,$$

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

segue:

$$R.\, x_1 = \quad \gamma\alpha_2 - \gamma_2\alpha\,,$$

$$R.\, x_2 = -\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha\,,$$

e per una qualsivoglia forma di grado ν:

$$\phi = (\phi_1 x_1 + \phi_2 x_2)^\nu$$

si ottiene l'espressione simbolica:

$$R.^\nu \phi = [(\phi_1\alpha_2 - \phi_2\alpha_1)\gamma - (\phi_1\gamma_2 - \phi_2\gamma_1)\alpha]^\nu$$

$$= \phi_{\alpha^\nu}\cdot\gamma^\nu - \frac{\nu}{1}\cdot\phi_{\alpha^{\nu-1}\gamma}\cdot\gamma^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu.\nu-1}{1.2}\,\phi_{\alpha^{\nu-2}\gamma^2}\cdot\gamma^{\nu-2}\alpha^2 + \cdots$$

In particolare quindi sarà:

$$R^2\cdot\vartheta = \vartheta_{\alpha\alpha}\cdot\gamma^2 - 2\vartheta_{\alpha\gamma}\cdot\alpha\gamma + \vartheta_{\gamma\gamma}\cdot\alpha^2\,,$$

$$R^2\cdot i = i_{\alpha\alpha}\cdot\gamma^2 - 2i_{\alpha\gamma}\cdot\alpha\gamma + i_{\gamma\gamma}\cdot\alpha^2\,,$$

$$R^2\cdot\tau = \tau_{\alpha\alpha}\cdot\gamma^2 - 2\tau_{\alpha\gamma}\cdot\alpha\gamma + \tau_{\gamma\gamma}\cdot\alpha^2\,.$$

I coefficienti si determinano come segue. In primo luogo, per la definizione degli invarianti R, M, N, è:

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = 2R\,,\quad i_{\alpha\alpha} = 2M\,,\quad \tau_{\alpha\alpha} = 2N\,.$$

Poi, se ϕ esprime una qualunque delle funzioni i, τ, ϑ, si ha:

$$\phi_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \phi_{11}\alpha_2 - \phi_{12}\alpha_1 & \vartheta_{11}\alpha_2 - \vartheta_{12}\alpha_1 \\ \gamma_{12}\alpha_2 - \phi_{22}\alpha_1 & \vartheta_{12}\alpha_2 - \vartheta_{22}\alpha_1 \end{vmatrix}\,,$$

cioè $\phi_{\alpha\gamma}$ è la metà del determinante funzionale di ϕ e ϑ, ove pongansi α_2, $-\alpha_1$ invece di x_1, x_2. Perciò dalla espressione di questo determinante funzionale, superiormente data, si ha:

$$\vartheta_{\alpha\gamma} = 0\,,\ i_{\alpha\gamma} = -(AN - BM)\,,\ \tau_{\alpha\gamma} = -(BN - CM)\,.$$

Le due combinazioni:

$$S = AN - BM, \qquad T = CM - BN,$$

che sono le metà delle derivate di $-R^2$ rispetto ad M ed N, sembrano abbastanza importanti per giustificare una particolare notazione. Per mezzo di questa abbiamo:

$$\vartheta_{\alpha\gamma} = 0, \quad i_{\alpha\gamma} = -S, \quad \tau_{\alpha\gamma} = T.$$

Da ultimo si trovano $\vartheta_{\gamma\gamma}$, $i_{\gamma\gamma}$, $\tau_{\gamma\gamma}$, applicando le equazioni:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{11}\vartheta_{22} - \vartheta_{12}^2 &= AC - B^2, \\
\vartheta_{11} i_{22} + \vartheta_{22} i_{11} - 2\vartheta_{12} i_{12} &= 0, \\
\vartheta_{11}\tau_{22} + \vartheta_{22}\tau_{11} - 2\vartheta_{12}\tau_{12} &= 0
\end{aligned}$$

alla forma tipica, onde esse diventano:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\alpha\alpha}\vartheta_{\gamma\gamma} - \vartheta_{\alpha\gamma}^2 = R^2(AC - B^2) = 4NR^2, \\
&\vartheta_{\alpha\alpha} i_{\gamma\gamma} - 2\vartheta_{\alpha\gamma} i_{\alpha\gamma} + \vartheta_{\gamma\gamma} i_{\alpha\alpha} = 0, \\
&\vartheta_{\alpha\alpha}\tau_{\gamma\gamma} - 2\vartheta_{\alpha\gamma}\tau_{\alpha\gamma} + \vartheta_{\gamma\gamma}\tau_{\alpha\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Di qui si desume:

$$\vartheta_{\gamma\gamma} = 2NR, \quad i_{\gamma\gamma} = -2NM, \quad \tau_{\gamma\gamma} = -2N^2,$$

epperò le forme tipiche di ϑ, i, τ sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}R\vartheta &= \gamma^2 + N\alpha^2, \\
\tfrac{1}{2}R^2 i &= M(\gamma^2 - N\alpha^2) + S\alpha\gamma, \\
\tfrac{1}{2}R^2\tau &= N(\gamma^2 - N\alpha^2) - T\alpha\gamma.
\end{aligned}$$

Queste equazioni danno:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 + N\alpha^2 &= \frac{R\vartheta}{2}, \\
\gamma^2 - N\alpha^2 &= -\frac{S\tau + Ti}{2}, \\
\alpha\gamma &= \frac{M\tau - Ni}{2},
\end{aligned}$$

dove si è adoperata soltanto la:

$$MT + NS = -R^2.$$

Di qui si vede che α e γ possono anche essere definiti come i fattori razionali della combinazione $M\tau - Ni$. E finalmente dalle stesse equazioni segue:

$$N\alpha^2 = \frac{R\vartheta + Ti + S\tau}{4},$$

$$\gamma^2 = \frac{R\vartheta - Ti - S\tau}{4},$$

$$\alpha\gamma = \frac{M\tau - Ni}{2}.$$

Ora queste equazioni possono anzitutto essere utilizzate per determinare la forma tipica di j. Sebbene questa determinazione non sia necessaria per ciò che segue, tuttavia essa è degna d'attenzione per sè stessa, in quanto che serve già a mettere in chiaro il metodo generale di queste composizioni.

Posto, dietro le cose premesse:

$$R^2 \cdot j = j_{\alpha^3} \cdot \gamma^3 - 3 j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma^2\alpha + 3 j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma\alpha^2 - j_{\gamma^3} \cdot \alpha^3,$$

si ha anche:

$$R \cdot j_{\alpha\alpha} = R[j_{11}\alpha_2^2 - 2j_{12}\,\alpha_1\alpha_2 + j_{22}\alpha_1^2] = j_{\alpha^3} \cdot \gamma - j_{\alpha^2\gamma} \cdot \alpha.$$

$$R \cdot j_{\alpha\gamma} = R[j_{11}\alpha_2\gamma_2 - j_{12}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + j_{12}\alpha_1\gamma_1] = j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma - j_{\alpha\gamma^2} \cdot \alpha,$$

$$R \cdot j_{\gamma\gamma} = R[j_{11}\gamma_2^2 - 2j_{12}\,\gamma_1\gamma_2 + j_{22}\gamma_1^2] = j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma - j_{\gamma^3} \cdot \alpha.$$

Dunque se nelle formole superiori esprimenti $\alpha^2, \gamma^2, \alpha\gamma$, in luogo di x_1^2, x_1x_2, x_2^2 si pongono le quantità $j_{22}, -j_{12}, j_{11}$, si otterrà:

$$N(j_{\alpha^3} \cdot \gamma - j_{\alpha^2\gamma} \cdot \alpha) = \frac{R}{4}(Rj_\vartheta + Tj_i + Sj_\tau),$$

$$j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma - j_{\alpha\gamma^2} \cdot \alpha = \frac{R}{2}(Mj_\tau - Nj_i),$$

$$j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma - j_{\gamma^3} \cdot \alpha = \frac{R}{4}(Rj_\vartheta - Tj_i - Sj_\tau),$$

dove si è posto per brevità:

$$j_\vartheta = \vartheta_{11} j_{22} - 2\vartheta_{12} j_{12} + \vartheta_{12} j_{11},$$

$$j_i = i_{11} j_{22} - 2 i_{12} j_{12} + i_{22} j_{11},$$

$$j_\tau = \tau_{11} j_{22} - 2\tau_{12} j_{12} + \tau_{22} j_{11}.$$

La seconda di queste funzioni è 2α; la terza, come covariante lineare della forma cubica j, è identicamente nulla; la prima sia $\frac{p\gamma + q\alpha}{R}$. Allora le equazioni superiori, eguagliando i coefficienti, danno:

$$N j_{\alpha^3} = \frac{pR}{4}, \qquad j_{\alpha^2\gamma} = 0, \qquad j_{\alpha\gamma^2} = \frac{pR}{4},$$

$$N j_{\alpha^2\gamma} = -\left(\frac{q}{4} + \frac{T}{2}\right)R, \quad j_{\alpha\gamma^2} = NR, \quad j_{\gamma^3} = -\left(\frac{q}{4} - \frac{T}{2}\right)R.$$

Dal confronto di queste formole segue:

$$q = -2T, \qquad p = 4N,$$

$$j_{\alpha^3} = R, \quad j_{\alpha^2\gamma} = 0, \quad j_{\alpha\gamma^2} = NR, \quad j_{\gamma^3} = TR,$$

epperò la forma tipica di j sarà:

$$R^2 . j = \gamma^3 + 3N\gamma\alpha^2 - T\alpha^3.$$

§ 4.

Rappresentazione di u.

La rappresentazione di u si ottiene in modo analogo a quella di j. A quest' uopo cominciamo dal formare le equazioni:

$$N^2\alpha^4 = \frac{(R\vartheta + \varphi)^2}{16}, \qquad \alpha^2\gamma^2 = \frac{\psi^2}{4},$$

$$N\alpha^3\gamma = \frac{(R\vartheta + \varphi)\psi}{8}, \qquad \alpha\gamma^3 = \frac{(R\vartheta - \varphi)\psi}{8},$$

$$N\alpha^2\gamma^2 = \frac{R^2\vartheta^2 - \varphi^2}{16}, \qquad \gamma^4 = \frac{(R\vartheta - \varphi)^2}{16},$$

dove per brevità si è posto:

$$\phi = Ti + S\tau\,, \quad \psi = M\tau - Ni.$$

Ora rappresentando la forma tipica di u coll'equazione:

$$R^5 \cdot u = u_{\alpha^5} \cdot \gamma^5 - 5u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma^4\alpha + 10u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma^3\alpha^2 - 10u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma^2\alpha^3 + 5u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma\alpha^4 - u_{\gamma^5} \cdot \alpha^5,$$

si ha di nuovo:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha &= R\,[u_{1111}\alpha_2^4 - 4u_{1112}\,\alpha_2^3\alpha_1 + \cdots],\\
u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha &= R\,[u_{1111}\alpha_2^3\gamma_2 - u_{1112}(\alpha_2^3\gamma_1 + 3\alpha_1\alpha_2^2\gamma_2) + \cdots],\\
u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha &= R\,[u_{1111}\alpha_2^2\gamma_2^2 - 2u_{1112}(\alpha_2^2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2\alpha_1\alpha_2) + \cdots],\\
u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha &= R\,[u_{1111}\alpha_2\gamma_2^3 - u_{1112}(\alpha_1\gamma_2^3 + 3\alpha_2\gamma_1\gamma_2^2) + \cdots],\\
u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha &= R\,[u_{1111}\gamma_2^4 - u_{1112}\gamma_2^3\gamma_1 + \cdots];
\end{aligned}$$

i termini fra parentesi nel secondo membro si ottengono surrogando le potenze delle x in α^4, $\alpha^3\gamma$, ecc., colle quantità $u_{1111}, -u_{1112}, \ldots$ Introducendo le notazioni:

$$u_\varphi = u_{11}\phi_{22} - 2u_{12}\phi_{12} + u_{22}\phi_{11}\,, \text{ ecc.}$$

$$u_{\varphi\psi} = u_{\psi\varphi} = (u_\varphi)_{11}\psi_{22} - 2(u_\varphi)_{12}\psi_{12} + (u_\varphi)_{22}\psi_{11}\,. \text{ ecc.}$$

si hanno, per la determinazione dei coefficienti della forma tipica, le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
N^2(u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha) &= \frac{R}{16}(R^2 u_{\vartheta\vartheta} + 2R\,u_{\vartheta\varphi} + u_{\varphi\varphi}),\\
N\,(u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha) &= \frac{R}{8}(R\;u_{\vartheta\psi} + u_{\varphi\psi}),\\
N\,(u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha) &= \frac{R}{16}(R^2 u_{\vartheta\vartheta} - u_{\varphi\varphi}),\\
u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha &= \frac{R}{4}\,u_{\psi\psi},\\
u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha &= \frac{R}{8}(Ru_{\vartheta\psi} - u_{\varphi\psi}),\\
u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha &= \frac{R}{16}(R^2 u_{\vartheta\vartheta} - 2Ru_{\vartheta\varphi} + u_{\varphi\varphi}).
\end{aligned}$$

Il confronto della terza colla quarta equazione dà:

$$R^2 u_{\vartheta\vartheta} = u_{\varphi\varphi} + 4 N u_{\psi\psi} ,$$

onde le sei equazioni precedenti possono essere sostituite dalle cinque seguenti:

$$N^2 (u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha) = \frac{R}{8} (2 N u_{\psi\psi} + u_{\varphi\varphi} + R u_{\vartheta\varphi}) ,$$

$$N \, (u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha) = \frac{R}{8} (R u_{\vartheta\psi} + u_{\varphi\psi}) ,$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha = \frac{R}{4} \cdot u_{\psi\psi} ,$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha = \frac{R}{8} (R u_{\vartheta\psi} - u_{\varphi\psi}) ,$$

$$u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha = \frac{R}{8} (2 N u_{\psi\psi} + u_{\varphi\varphi} - R u_{\vartheta\varphi}) \cdot$$

Dei cinque covarianti lineari:

$$u_{\psi\psi} = a_{\psi\psi} \gamma - b_{\psi\psi} \alpha , \quad u_{\varphi\psi} = a_{\varphi\psi} \gamma - b_{\varphi\psi} \alpha , \quad u_{\varphi\varphi} = a_{\varphi\varphi} \gamma - b_{\varphi\varphi} \alpha ,$$

$$R u_{\vartheta\varphi} = a_{\vartheta\varphi} \gamma - b_{\vartheta\varphi} \alpha , \qquad R u_{\vartheta\psi} = a_{\vartheta\psi} \gamma - b_{\vartheta\psi} \alpha$$

due possono essere espressi mediante gli altri tre. In fatti il confronto dei coefficienti nelle cinque equazioni superiori dà:

$$N^2 u_{\alpha^5} = \frac{R}{8} (2 N a_{\psi\psi} + a_{\varphi\varphi} + a_{\vartheta\varphi}) , \quad N^2 u_{\alpha^4\gamma} = \frac{R}{8} (2 N b_{\psi\psi} + b_{\varphi\varphi} + b_{\vartheta\varphi}) ,$$

$$N u_{\alpha^4\gamma} = \frac{R}{8} (a_{\vartheta\psi} + a_{\varphi\psi}) , \qquad N u_{\alpha^3\gamma^2} = \frac{R}{8} (b_{\vartheta\psi} + b_{\varphi\psi}) ,$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} = \frac{R}{4} a_{\psi\psi} , \qquad u_{\alpha^2\gamma^3} = \frac{R}{4} b_{\psi\psi} ,$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} = \frac{R}{8} (a_{\vartheta\psi} - a_{\varphi\psi}) , \qquad u_{\alpha\gamma^4} = \frac{R}{8} (b_{\vartheta\psi} - b_{\varphi\psi}) ,$$

$$u_{\alpha\gamma^4} = \frac{R}{8} (2 N a_{\psi\psi} + a_{\varphi\varphi} - a_{\vartheta\varphi}) , \qquad u_{\gamma^5} = \frac{R}{8} (2 N b_{\psi\psi} + b_{\varphi\varphi} - b_{\vartheta\varphi}) ,$$

Si ha per conseguenza:

$$
\begin{aligned}
2Nb_{\psi\psi}+b_{\varphi\varphi}+b_{\vartheta\varphi} &= N(a_{\vartheta\psi}+a_{\varphi\psi}),\\
b_{\vartheta\psi}+b_{\varphi\psi} &= 2Na_{\psi\psi},\\
2b_{\psi\psi} &= a_{\vartheta\psi}-a_{\varphi\psi},\\
b_{\vartheta\psi}-b_{\varphi\psi} &= 2Na_{\psi\psi}+a_{\varphi\varphi}-a_{\vartheta\varphi}.
\end{aligned}
$$

Queste equazioni forniscono i valori:

$$
\begin{aligned}
a_{\vartheta\psi} &= 2b_{\psi\psi}+a_{\varphi\psi}, & a_{\vartheta\varphi} &= 2b_{\varphi\psi}+a_{\varphi\varphi},\\
b_{\vartheta\psi} &= 2Na_{\psi\psi}-b_{\varphi\psi}, & b_{\vartheta\varphi} &= 2Na_{\varphi\psi}-b_{\varphi\varphi},
\end{aligned}
$$

introducendo i quali si hanno pei richiesti coefficienti le espressioni:

$$
\begin{aligned}
Nu_{\alpha 5}^2 &= \frac{R}{4}(Na_{\psi\psi}+a_{\varphi\varphi}+b_{\varphi\psi}),\\
Nu_{\alpha^4\gamma} &= \frac{R}{4}(b_{\psi\psi}+a_{\varphi\psi}),\\
u_{\alpha^3\gamma^2} &= \frac{R}{4}a_{\psi\psi}.\\
u_{\alpha^2\gamma^3} &= \frac{R}{4}b_{\psi\psi},\\
u_{\alpha\gamma^4} &= \frac{R}{4}(Na_{\psi\psi}-b_{\varphi\psi}),\\
u_{\gamma^5} &= \frac{R}{4}(Nb_{\psi\psi}+b_{\varphi\varphi}-Na_{\varphi\psi}).
\end{aligned}
$$

Finalmente rimane ad esprimere i covarianti $u_{\varphi\varphi}$, $u_{\varphi\psi}$, $u_{\psi\psi}$ per mezzo di α e γ. Per la definizione di ϕ e ψ si ha:

$$
\begin{aligned}
u_{\varphi\varphi} &= T^2u_{ii}+2STu_{i\tau}+S^2u_{\tau\tau},\\
u_{\varphi\psi} &= -NTu_{ii}+(MT-NS)u_{i\tau}+MSu_{\tau\tau},\\
u_{\psi\psi} &= N^2u_{ii}-2MNu_{i\tau}+M^2u_{\tau\tau}.
\end{aligned}
$$

Inoltre, per le cose precedenti, è:

$$
u_i=-2j, \qquad u_\tau=-\frac{2Aj}{3}+i\alpha^2
$$

dunque:

$$u_{ii} = -2j_i = -4\alpha, \qquad u_{i\tau} = -2j_\tau = 0,$$

$$u_{\tau\tau} = \tfrac{2}{3}\{B\alpha + i_1\alpha_1\tau_{22} - (i_1\alpha_2 + \alpha_1 i_2)\tau_{12} + i_2\alpha_2\tau_{11}\}.$$

L'espressione che segue dopo $B\alpha$ fra le parentesi ha la forma simbolica $i_x(i\tau)(\alpha\tau)$. Ora è evidente che:

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) + \tau_x(i\tau)(\alpha i) = 2\vartheta_x(\alpha\vartheta) = -4\gamma,$$

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) - \tau_x(i\tau)(\alpha i) = \alpha_x(i\tau)^2 = 2B\alpha;$$

dunque:

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) = B\alpha - 2\gamma,$$

e:

$$u_{\tau\tau} = \frac{4}{3}(B\alpha - \gamma).$$

Quindi anche:

$$u_{\varphi\varphi} = -4\alpha T^2 + \frac{4}{3}(B\alpha - \gamma)S^2,$$

$$u_{\varphi\psi} = 4\alpha NT + \frac{4}{3}(B\alpha - \gamma)MS,$$

$$u_{\psi\psi} = -4\alpha N^2 + \frac{4}{3}(B\alpha - \gamma)M^2,$$

ossia:

$$a_{\varphi\varphi} = -\frac{4}{3}S^2, \qquad a_{\varphi\psi} = -\frac{4}{3}MS, \qquad a_{\psi\psi} = -\frac{4}{3}M^2,$$

$$b_{\varphi\varphi} = 4T^2 - \frac{4}{3}BS^2, \quad b_{\varphi\psi} = -4NT - \frac{4}{3}BMS, \quad b_{\psi\psi} = 4N^2 - \frac{4}{3}BM^2.$$

Introducendo questi valori, è facile effettuare la divisione per N e per N^2 nei primi due coefficienti di u. Cioè sarà:

$$u_{\alpha^4\gamma} = R\left(N - \frac{M}{3} \cdot \frac{BM+S}{N}\right) = R\left(N - \frac{AM}{3}\right),$$

$$u_{\alpha^5} = \frac{R}{N^2}\left(-\frac{NM^2}{3} - \frac{S^2}{3} - NT - \frac{BMS}{3}\right) = -\frac{R}{3N}\left(M^2 + AS + 3T\right)$$

$$= -\frac{R}{3N}\left\{M(M - AB + 3C) + N(A^2 - 3B)\right\} = R\left(B - \frac{A^2}{3}\right).$$

Per conseguenza i coefficienti di u sono:

$$u_{\alpha^5} = R\left(B - \frac{A^2}{3}\right), \qquad u_{\alpha^4\gamma} = R\left(N - \frac{AM}{3}\right),$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} = -\frac{RM^2}{3}, \qquad u_{\alpha^2\gamma^3} = R\left(N^2 - \frac{BM^2}{3}\right),$$

$$u_{\alpha\gamma^4} = R\left(NT - \frac{MN - BS}{3} M\right), \quad u_{\gamma^5} = R\left(N^3 + T^2 + \frac{NMS - BM^2N - BS^2}{3}\right),$$

e la forma tipica di u sarà:

$$R^4 \cdot u = \left(B - \frac{A^2}{3}\right)\gamma^5 - 5\left(N - \frac{AM}{3}\right)\gamma^4\alpha - 10\frac{M^2}{3}\gamma^3\alpha^2 - 10\left(N^2 - \frac{BM^2}{3}\right)\gamma^2\alpha^3 +$$

$$+ 5\left(NT - \frac{MN - BS}{3} M\right)\gamma\alpha^4 - \left(N^3 + T^2 + \frac{NMS - BM^2N - BS^2}{3}\right)\alpha^5 .$$

§ 5.

Caso eccezionale: $R = 0$. Seconda forma tipica.

La rappresentazione tipica di u che precede è sempre possibile, purchè R non sia zero. Se R è zero, per ottenere la forma tipica, bisogna invece di γ scegliere un altro covariante. Tale è il seguente derivato da i:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(i_1\alpha_2 - \alpha_1 i_2),$$

ed il determinante della trasformazione è in questo caso:

$$\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 = M .$$

La forma tipica di u sarà allora:

$$M^5 \cdot u = u_{\alpha^5}\cdot\beta^5 - 5u_{\alpha^4\beta}\cdot\beta^4\alpha + 10u_{\alpha^3\beta^2}\cdot\beta^3\alpha^2 - 10u_{\alpha^2\beta^3}\cdot\beta^2\alpha^3 + 5u_{\alpha\beta^4}\cdot\beta\alpha^4 - u_{\beta^5}\cdot\alpha^5 .$$

Noi la svilupperemo in generale, senza supporre da principio la condizione $R = 0$. Per convincersi che questa condizione semplificherà molto l'espressione di $M^5 u$, basta enumerare le dimensioni; donde segue che u_{α^5}, $u_{\alpha^3\beta^2}$, $u_{\alpha\beta^4}$ contengono il fattore R, epperò si annullano con esso; cioè se $R = 0$, α è un fattore di u, ed il rimanente fattore di quarto grado non contiene che i quadrati di α e β. Dunque l'equazione $u=0$ ha allora un fattore razionale conosciuto α, e l'equazione $\frac{u}{\alpha}=0$ è risolubile mediante radici quadrate.

Per cercare, indipendentemente dalla condizione $R=0$, l'espressione tipica di $M^5 u$, mediante α e β, noi possiamo tenere precisamente la stessa strada seguita dianzi, così che non sarà necessario di indicare di nuovo completamente tutti i passaggi. Da prima si trova:

$$\frac{Mi}{2}=\beta^2+\frac{A}{4}\alpha^2,$$

$$\frac{M^2\tau}{2}=N\beta^2+R\alpha\beta+\left(\frac{MB}{2}-\frac{AN}{4}\right)\alpha^2,$$

$$\frac{M^2\vartheta}{2}=R\beta^2-S\alpha\beta+\frac{AR}{4}\alpha^2.$$

La prima di queste equazioni c'insegna che questa forma tipica ha una assai semplice connessione con quella del sig. Hermite. In fatti le variabili introdotte dal sig. Hermite sono i fattori di i, cioè:

$$\beta+\frac{\alpha}{2}\sqrt{-A}, \qquad \beta-\frac{\alpha}{2}\sqrt{-A}.$$

Passando poi a comporre j, troviamo:

$$M^3 j=R\beta^3-\frac{3}{2}S\beta^2\alpha-\frac{3AR}{4}\beta\alpha^2+\left(M^2+\frac{AS}{8}\right)\alpha^3.$$

E da ultimo pei coefficienti della forma tipica di u si ottiene la serie seguente:

$$u_{\alpha^5} = R\left(B-\frac{A^2}{3}\right),$$

$$u_{\alpha^4\beta} = M\left(N-\frac{AM}{3}\right)+\frac{S}{2}\left(B-\frac{A^2}{3}\right),$$

$$u_{\alpha^3\beta^2}=-R\left(M+\frac{A}{4}\left(B-\frac{A^2}{3}\right)\right),$$

$$u_{\alpha^2\beta^3}= M\left(\frac{A^2M}{12}-\frac{AN}{4}-\frac{S}{2}\right)-\frac{AS}{8}\left(B-\frac{A^2}{3}\right),$$

$$u_{\alpha\beta^4} = R\left(\frac{MA}{2} + \frac{A^2}{16}(B - \frac{A^2}{3})\right),$$

$$u_{\beta^5} = M\left(\frac{A^2N}{16} - \frac{A^3M}{48} + \frac{AS}{4} + M^2\right) + \frac{A^2S}{32}\left(B - \frac{A^2}{3}\right),$$

In particolare, per $R=0$, u ha la rappresentazione seguente:

$$M^5u = -5\beta^4\alpha\left[M(N - \frac{AM}{3}) + \frac{S}{2}(B - \frac{A^2}{3})\right]$$

$$-10\beta^2\alpha^3\left[M(\frac{A^2M}{12} - \frac{AN}{4} - \frac{S}{2}) - \frac{AS}{8}(B - \frac{A^2}{3})\right]$$

$$-\alpha^5\left[M(\frac{A^2N}{16} - \frac{A^3M}{48} + \frac{AS}{4} + M^2) + \frac{A^2S}{32}(B - \frac{A^2}{3})\right].$$

§ 6.

Secondo caso d'eccezione: $R=0$, $M=0$.

Nessuna delle precedenti trasformazioni è possibile quando R ed M sono nulli simultaneamente. Per la discussione di questi casi, supponiamo da prima che nessuno dei covarianti α, τ, j, i sia identicamente zero.

Siccome per $M=0$, R si riduce alla forma semplice AN^2, così dobbiamo cominciare dal distinguere due casi, secondo che è zero A od N, ed invero da prima uno solo di questi invarianti.

1. Se $M=0$, $A=0$, l'espressione di M dà anche $C=0$; invece supporremo che B sia diverso da zero, affinchè non si annulli anche N. In questo caso i e τ sono quadrati, però fra loro differenti; siccome inoltre $M = i_{11}\alpha_2^2 - 2i_{12}\alpha_1\alpha_2 + i_{22}\alpha_1^2$ mostra che i è divisibile per α, così ne segue:

$$i = \rho\,.\,\alpha^2 \quad , \quad \tau = \sigma\,.\,\eta^2 ,$$

dove η è un'espressione lineare. Essendo poi τ il determinante di j, anche j conterrà η come doppio fattore, cioè sarà:

$$j = \eta^2(3p\alpha + q\eta)\,.$$

Se ora si considerano α ed η come variabili, il modo col quale j è generato mediante i ed u, dà per quest' ultima forma la condizione che $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ sia proporzionale a j; dunque:

$$u = p' \alpha^5 + 5 q' \alpha^4 \eta + 5 r' \alpha \eta^4 + s' \eta^5 .$$

Ricavando di qui i e ponendolo proporzionale ad α^2, si trova:

$$\tfrac{1}{2} \rho \alpha^2 = p' r' . \alpha^2 + (p' s' - 3 q' r') \alpha \eta + q' s' . \eta^2 .$$

I coefficienti p' ed r' non possono essere nulli, dunque $s' = 0$, $q' = 0$. Cioè in questo caso è:

$$u = \alpha (p' \alpha^4 + r' \eta^4) .$$

2. Se $M = 0$, $N = 0$, i e τ hanno il fattor comune α; e fra gli invarianti sussistono le equazioni:

$$AB = 3C, \qquad AC = B^2,$$

cioè $B = 0$, $C = 0$, oppure $C = \frac{A^3}{9}$ e $B = \frac{A^2}{3}$.

L' invariante A si suppone diverso da zero, per non ricadere nel caso antecedente.

1) $B = 0$, $C = 0$. Qui τ è un quadrato, $\tau = \rho . \alpha^2$, ed i ha il fattore α ed un altro fattore diverso da α, cioè $i = \sigma . \alpha \eta$. Quindi j è della forma:

$$j = \alpha^2 (p \alpha + 3 q \eta) .$$

Allora l' equazione che definisce j per mezzo di u ed i, mostra che $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \eta}$ è proporzionale a j, epperò u avrà la forma:

$$u = p' \alpha^5 + 5 q' \alpha^4 \eta + 10 r' \alpha^3 \eta^2 + s' \eta^5 .$$

Di qui si ricava per i l' espressione:

$$(p' \alpha + q' \eta) s' \eta + 3 r' \alpha^2 ,$$

dunque r' e q' devono essere nulli. Per tal modo si ha finalmente per u la forma:

$$u = p'\alpha^5 + s'\eta^5 \cdot$$

Ma allora $j=0$; dunque l'annullarsi di B e C trae necessariamente seco che vi sia qualche covariante identicamente nullo.

2) $C = \frac{A^3}{9}$, $B = \frac{A^2}{3} \cdot$ In questo caso, se α non si annulla, τ ed i sono divisibili per α, ma nessuno di essi è un quadrato.

Posto:

$$\tau = 2\rho . \alpha\eta \;, \quad i = \sigma . \alpha^2 + 2\pi . \alpha\eta \,,$$

sarà:

$$j = p\alpha^3 + q\eta^3 \,,$$

e se ora da i e j si deriva α, si ottiene $\sigma q \eta$, che in nessun modo può coincidere con α stesso. Dunque è effettivamente impossibile che i e τ siano divisibili per α, senza che α si annulli identicamente: il qual caso sarà esaminato meglio in seguito.

Resta da indagare il caso che si verifichino simultaneamente le ipotesi 1. 2., cioè che A, B, C siano tutti e tre eguali a zero. Allora i e τ sono quadrati non differenti fra loro che per un fattore costante, se pure uno di essi non si annulla. Supposto ancora che α non sia zero, dovrà essere $i = \rho\alpha^2$, $\tau = \sigma\alpha^2$, epperò:

$$j = p\alpha^3 + 3q\alpha^2\eta \,,$$

e $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ proporzionale a j, onde:

$$u = p'\alpha^5 + 5q'\alpha^4\eta + 10r'\alpha^3\eta^2 + 10s'\alpha^2\eta^3 \cdot$$

Formando i, risulta l'espressione:

$$-4(q'\alpha + r'\eta)s'\alpha + 3(r'\alpha + s'\eta)^2 \,;$$

ed affinchè questa sia proporzionale ad α^2, dev'essere $s'=0$; ma allora in j sarebbe anche $q=0$, e per conseguenza τ identicamente nullo: caso che sarà trattato più tardi.

§ 7.

Casi eccezionali che risultano dall'annullarsi di covarianti.

Studiamo da prima il caso che si annulli α. Allora M, N, R sono eguali a zero. Cominciamo col supporre che τ non sia nullo.

1. Non sia i un quadrato, ma invece $i=2\rho xy$. A cagione di α nullo è:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y}=0\,,$$

epperò:

$$j=px^3+qy^3\,,\quad \tau=2\sigma xy,$$

cioè τ proporzionale ad i. Siccome poi anche $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sarà proporzionale a j, così:

$$u=p'x^5+5q'x^4y+5r'xy^4+s'y^4\,.$$

Di qui si ricava per i la forma:

$$(p'x+q'y)\,(r'x+s'y)-4q'r'xy\,,$$

epperò dev' essere $p'r'=q's'=0$, senza che si annulli $p's'-3q'r'$; il che non può aver luogo se non sono zero p' ed s', ovvero q' ed r'. Ma nel secondo caso sarebbe nullo j; dunque dee sussistere il primo, e si avrà:

$$u=5xy\,(q'x^3+r'y^3)\,.$$

Dunque, se α è zero senza che lo sia anche τ, e senza che i sia un quadrato, u è il prodotto di una forma cubica pel suo determinante.

2. Se i è un quadrato, $i=\rho x^2$, si ha $A=0$, epperò anche $B=0$, $C=0$, a cagione di $M=0$, $N=0$; donde segue che se τ non è nullo, sarà $\tau=\sigma x^2$. Quindi $j=3px^2y$, e per conseguenza, siccome $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ è proporzionale a j:

$$u=p'x^5+5q'x^4y+10r'x^2y^3\,.$$

Formando i, otteniamo l'espressione:

$$-4q'r'x^2+3r'^2y^2,$$

la quale, per coincidere con i, richiede $r'=0$; ma allora si annulla i: caso che dev' essere trattato più avanti.

Passiamo ora ai casi nei quali si annulla τ, essendo α e j differenti da zero. Allora $j=\rho x^3$ e, siccome α sarà proporzionale a $\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}$, così $\alpha=\sigma x$. Dalla relazione identica fra u e j, segue $u_{222}=0$, dunque:

$$u=px^5+5qx^4y+10rx^3y^2.$$

Formando $i=2\cdot 3r^2x^2$ e combinandolo con u, si ottiene per j un'espressione che coincide colla precedente. Ma la combinazione di i con j fornisce $\alpha=0$. Dunque, se τ è nullo, si annulla necessariamente anche α, ed in questo caso u ha un fattore triplo.

Se $j=0$, si annullano anche τ, α, B, C. Supposto che i non sia zero, distinguiamo due casi.

1. Se i non è un quadrato, sia $i=2\rho xy$. Allora sarà $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$, epperò u è la somma di due quinte potenze.

2. Se i è un quadrato, $i=\rho x^2$, si ha $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, epperò:

$$u=px^5+5qx^4y.$$

Ma allora si annulla contemporaneamente i.

Non resta dunque da esaminare che il caso dell'annullarsi di i, che trae seco anche $j=0$, ecc.

Questo caso ha primieramente luogo se u è una quinta potenza. Supposto che ciò non sia, potremo scegliere per variabili due fattori differenti di u e porre:

$$u=5bx^4y+10cx^3y^2+10dx^2y^3+5exy^4.$$

L'annullamento di i esige le eguaglianze:

$$3c^2-4bd=0,\quad 2cd-3be=0,\quad 3d^2-4ce=0.$$

Allora o è zero b e quindi anche c e d; ovvero sono zero e, d, c; ed in entrambi i casi u contiene un fattore quadruplo. Da ultimo si può prendere:

$$d=\frac{3c^2}{4b}, \qquad e=\frac{27c^3}{64b^2},$$

ma questo non si può accordare colla seconda delle equazioni superiori. Dunque l'essere i identicamente nullo è la condizione per l'esistenza di una radice quadrupla in $u=0$.

§ 8.

Forme di sesto grado. Forme fondamentali.

Indichiamo una data forma binaria di sesto grado con:

$$u=ax_1^6+6bx_1^5x_2+15cx_1^4x_2^2+20dx_1^3x_2^3+15ex_1^2x_2^4+6fx_1x_2^5+gx_2^6.$$

Se, conservando la notazione già adoperata, ricaviamo da essa la forma:

$$u_{1111}y_1^4+4u_{1112}y_1^3y_2+6u_{1122}y_1^2y_2^2+4u_{1222}y_1y_2^3+u_{2222}y_2^4,$$

che è del quarto grado rispetto alle y e del secondo rispetto alle x; e se prendiamo il primo invariante di questa forma rispetto alle y, otteniamo una forma di quarto grado in x:

$$\begin{aligned} k &= 6(u_{1111}u_{2222}-4u_{1112}u_{1222}+3u^2_{1122}) \\ &= \alpha x_1^4+4\beta x_1^3x_2+6\gamma x_1^2x_2^2+4\delta x_1x_2^3+\varepsilon x_2^4, \end{aligned}$$

dove i singoli coefficienti hanno le significazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha &= 6(ae-4bd+3c^2), \\ \beta &= 3(af-3be+2cd), \\ \gamma &= ag-9ce+8d^2, \\ \delta &= 3(bg-3cf+2de). \\ \varepsilon &= 6(cg-4df+3e^2). \end{aligned}$$

Questa forma k è di fondamentale importanza per la teoria delle forme di sesto grado. Ponendo simbolicamente:

$$u=(a_1x_1+a_2x_2)^6=a_x^2=a'^2_x=a''^2_x\cdots,$$

si ottieno per k la rappresentazione simbolica:

$$k=3(aa')^4\,a_x^2a'^2_x\,.$$

Fra u e k ha luogo una notevole relazione che è espressa dall'annullarsi del covariante di quarto grado formato con esse:

$$h=u_{111}k_{222}-3u_{112}k_{122}+3u_{122}k_{112}-u_{222}k_{111}\,.$$

In fatti dalla rappresentazione simbolica di k si ha:

$$k_{111}y_1^3+3k_{112}y_1^2y_2+3k_{122}y_1y_2^2+k_{222}y_2^3=3(aa')^4a'_xa'_ya_y^2\,,$$

e quindi, sostituendo alle quantità y_1^3, $y_1^2y_2$, $y_1y_2^2$, y_2^3 ordinatamente le:

$$-u_{222}=-a''^3_2\cdot a''^3_x\,,\ u_{122}=a''^2_2\,a''_1\cdot a''^3_x\,,-u_{112}=-a''_2a''^2_1\,.\,a''^3_x\,,\ u_{111}=a''^3_1\cdot a''^3_x\,,$$

sarà:

$$h=-3(aa')^4a'_xa''^3_x\,.\,(a'a'')(aa'')^2\,.$$

E adoperando la solita equazione identica:

$$(aa')a''_x+(a'a'')a_x+(a''a)a'_x=0\,,$$

troviamo:

$$h=3(aa')^3a'_xa''^2_x(a'a'')(aa'')^2\left\{(a'a'')a_x-(aa'')a'_x\right\}\cdot$$

Delle due parti, nelle quali si decompone questa espressione, la prima muta di segno se si fa lo scambio (che evidentemente è indifferente) delle a colle a'; e la seconda muta di segno per lo scambio delle a' colle a''. Dunque ciascuna delle due parti, epperò anche h è identicamente zero; ciò che si voleva provare.

Un altro covariante di quarto grado risulta dallo stesso k, ed è il suo determinante Hessiano. Indichiamolo con Δ, ponendo:

$$\Delta = 2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2),$$

ossia, facendo simbolicamente $k = k_x^4 = k'^4_x \cdots$:

$$\Delta = k_x^2 k'^2_x (kk')^2 \cdot$$

Da k ed u scaturisce una serie di covarianti di secondo grado. Da prima, combinando k con u, si ottiene la forma quadratica:

$$l = u_{1111}k_{2222} - 4u_{1112}k_{1222} + 6u_{1122}k_{1122} - 4u_{1222}k_{1112} + u_{2222}k_{1111}$$
$$= a_x^2(ak)^4 = l_x^2,$$

e poi combinando l con k, ecc.

$$m = k_{11}l_{22} - 2k_{12}l_{12} + k_{22}l_{11} = k_x^2(kl)^2 = m_x^2,$$
$$n = k_{11}m_{22} - 2k_{12}m_{12} + k_{22}m_{11} = k_x^2(km)^2 = n_x^2,$$

. . . .

. . . .

Ponendo:

$$A_{ll} = l_{11}\, l_{22} - l_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(ll')^2,$$
$$A_{mm} = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(mm')^2,$$
$$A_{nn} = n_{11}\, n_{22} - n_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(nn')^2,$$
$$A_{mn} = \tfrac{1}{2}(m_{11}n_{22} - 2m_{12}n_{12} + m_{22}n_{11}) = \tfrac{1}{2}(mn)^2,$$
$$A_{nl} = \tfrac{1}{2}(n_{11}\, l_{22} - 2n_{22}\, l_{12} + n_{22}\, l_{11}) = \tfrac{1}{2}(nl)^2,$$
$$A_{ln} = \tfrac{1}{2}(l_{11}\, m_{22} - 2l_{12}m_{12} + l_{22}m_{11}) = \tfrac{1}{2}(lm)^2,$$

sono questi sei invarianti di u, rispettivamente degli ordini 6, 10, 14, 12, 10, 8. Fra le tre funzioni l, m, n ha luogo una relazione facile a scriversi, i cui coefficienti sono questi medesimi invarianti. Eseguendo il prodotto:

$$0=\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} & 0 \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} & 0 \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} & 0 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} & 0 \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} & 0 \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} & 0 \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix},$$

e dividendo per 4, si ottiene quella relazione nella forma:

$$0=\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & m \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = -\Phi\,,$$

$$=-\{B_{ll}l^2+B_{mm}m^2+B_{nn}n^2+2B_{mn}mn+2B_{nl}nl+2B_{lm}lm\}\,,$$

dove le B indicano i determinanti minori formati colle A.

Se invece formiamo l'altro prodotto:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} & 0 \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} & 0 \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} & 0 \\ x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} & \lambda \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} & \mu \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} & \nu \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix},$$

otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 2A_{ll} & 2A_{lm} & 2A_{ln} & l \\ 2A_{ml} & 2A_{mm} & 2A_{mn} & m \\ 2A_{nl} & 2A_{nm} & 2A_{nn} & n \\ l+\lambda & m+\mu & n+\nu & 0 \end{vmatrix} = -2\{\lambda\Phi'(l)+\mu\Phi'(m)+\nu\Phi'(n)\}\,.$$

Ora il primo fattore dell'antecedente prodotto è l'invariante di 15° ordine (quello d'ordine dispari più piccolo che esista):

$$2R=\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix},$$

mentre l'altro fattore è il determinante:

$$-2\begin{vmatrix} \lambda & l_1 & l_2 \\ \mu & m_1 & m_2 \\ \nu & n_1 & n_2 \end{vmatrix},$$

Perciò confrontando si ottengono i determinanti funzionali delle l, m, n, espressi per mezzo di queste medesime funzioni:

$$\begin{aligned} R(m_1 n_2 - n_1 m_2) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(l) = B_{ll}\, l + B_{lm}\, m + B_{ln}\, n, \\ R(n_1 l_2 - l_1 n_2) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(m) = B_{ml}\, l + B_{mm}\, m + B_{mn}\, n, \\ R(l_1 m_2 - m_1 l_2) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(n) = B_{nl}\, l + B_{nm}\, m + B_{nn}\, n. \end{aligned}$$

E pel quadrato di R si trova:

$$R^2 = \tfrac{1}{8}\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 9.

Relazioni fra gli invarianti.

Fra i sei invarianti $A_{ll}\dots$ sono eguali quei due che sono dello stesso ordine, cioè:

$$A_{nl} = A_{mm}.$$

In fatti è simbolicamente:

$$A_{nl} = \tfrac{1}{2}(nl)^2 = \tfrac{1}{2}(km)^2(kl)^2 = \tfrac{1}{2}(mm')^2 = A_{mm}.$$

Inoltre A_{mn} ed A_{nn} si possono ridurre a quegli invarianti d'ordine inferiore che si derivano senz' altro dalla funzione k, cioè:

$$B = \alpha\varepsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2 = \tfrac{1}{2}(kk')^4,$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(kk')^2(k'k'')^2(k''k)^2.$$

A tale uopo rappresentiamo in due modi diversi il covariante quadratico che segue dopo l, m, n:

$$p = k_{11} n_{22} - 2 k_{12} n_{12} + k_{22} n_{11} .$$

Dall'espressione del determinante funzionale $l_1 m_2 - m_1 l_2$ per mezzo di l, m, n, segue l'equazione:

$$B_{nl} m + B_{nm} n + B_{nn} p = R\{ k_{11} (l_1 m_2 - m_1 l_2)_{22} \dots \} .$$

L'espressione simbolica della quantità fra parentesi è:

$$k_x^2 (lm)(kl)(km) ,$$

e per mezzo della relazione identica:

$$k_x (lm) = l_x (km) - m_x (kl) ,$$

si cambia in:

$$k_x (kl)(km) \{ l_x (km) - m_x (kl) \}$$

$$= n_x l_x (nl) - m_x m'_x (m'm) = n_1 l_2 - n_2 l_1 .$$

Introducendo per quest'ultimo determinante il suo valore, si ha l'equazione:

$$B_{nl} m + B_{nm} n + B_{nn} p = B_{ml} l + B_{mm} m + B_{mn} n ,$$

ossia:

$$B_{nn} p = B_{ml} l + (B_{mm} - B_{nl}) m .$$

Quest'equazione è degna d'attenzione sotto più aspetti. Nell' espressione di p non entra più n. Siccome poi nel ricavare questa formola non si è fatto uso della derivazione di $l, m, \cdots$ da k ed u, ma piuttosto della circostanza che l, m, n, p sono consecutivi nella serie dei covarianti di secondo grado, così si fa chiaro il teorema:

Nella serie dei covarianti di secondo grado $l, m, n, p \dots$ ciascuno è composto linearmente coi due che precedono di due e di tre posti.

La seconda espressione di p scaturisce da due formole che adopreremo anche in seguito e che, spettando alla teoria delle forme di quarto grado, qui saranno solamente citate. Se k è una qualsivoglia forma di quarto grado, e:

$$\Delta = 2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2);$$

se B e C sono gli invarianti di k già menzionati; e inoltre se ϕ è una funzione di secondo grado, e:

$$\psi = k_{11}\phi_{22} - 2k_{12}\phi_{12} + k_{22}\phi_{11}.$$

si avranno le due equazioni:

$$\Delta_{11}\phi_{22} - 2\Delta_{12}\phi_{12} + \Delta_{22}\phi_{11} = k_{11}\psi_{22} - 2k_{12}\psi_{12} + k_{22}\psi_{11} - \tfrac{2}{3}B\phi$$

$$\Delta_{11}\psi_{22} - 2\Delta_{12}\psi_{12} + \Delta_{22}\psi_{11} = \tfrac{1}{3}B\psi + 2C\phi.$$

Ponendo qui $\phi = l$, $\psi = m$, ovvero $\phi = m$, $\psi = n$, si ottengono le quattro equazioni:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}l_{22} - 2\Delta_{12}l_{12} + \Delta_{22}l_{11} &= n - \tfrac{2}{3}Bl, \\ \Delta_{11}m_{22} - 2\Delta_{12}m_{12} + \Delta_{22}m_{11} &= \tfrac{1}{3}Bm + 2Cl \\ &= p - \tfrac{2}{3}Bm, \\ \Delta_{11}n_{22} - 2\Delta_{12}n_{12} + \Delta_{22}n_{11} &= \tfrac{1}{3}Bn + 2Cm. \end{aligned}$$

Dunque è:

$$p = Bm + 2Cl;$$

e confrontando questa colla precedente espressione di p, si trova:

$$B_{ml} = 2C.B_{nn},$$

$$B_{mm} - B_{nl} = B.B_{nn}.$$

Pongansi questi valori nelle equazioni identiche:

$$A_{ll}B_{ml} + A_{ml}B_{mm} + A_{nl}B_{mn} = 0,$$

$$A_{ml}B_{ml} + A_{mm}B_{mm} = A_{nl}B_{nl} + A_{nn}B_{nn},$$

e si osservi che $A_{nl} = A_{mm}$; si avranno le due equazioni:

$$A_{nm} = BA_{lm} + 2CA_{ll},$$

$$A_{nn} = BA_{mm} + 2CA_{ml},$$

mediante le quali A_{nm} ed A_{nn} sono ricondotti ad A_{ll}, A_{ml}, A_{mm} ed a B, C.

Siccome la funzione u non può possedere che quattro invarianti indipendenti fra loro, così fra i cinque invarianti suddetti dovrà verificarsi un'altra relazione. In ciò che precede, non essendo noi risaliti al fatto che l, k traggono origine da u, le forme A_{ll}, A_{ml}, A_{mm}, B, C sono gli invarianti simultanei di k, l, indipendenti fra loro. Perciò l'ultima relazione deve necessariamente tener calcolo di tale origine. Se ammettiamo che, per u, oltre agli invarianti degli ordini 4 (B), 6 (C, A_{ll}), 8 (A_{lm}), 10 (A_{mm}). ne esista anche uno di second' ordine:

$$A = \tfrac{1}{2}(a a')^6 = a g - 6 b f + 15 c e - 10 d^2 ,$$

allora il problema che dobbiamo risolvere consiste nello scoprire due relazioni fra A, B, C, A_{ll}, A_{lm}, A_{mm}. Questo problema si risolve nella seguente maniera.

Secondo il processo più volte impiegato, si ha:

$$A k = \tfrac{1}{2}(a a')^6 \cdot k_x^4 = \tfrac{1}{2}(a a')^2 \{(a k) a'_x - (a' k) a_x\}^4$$

$$= \{(a k)^4 a'^4_x - 4(a k)^3 (a' k) a_x a'^3_x + 3 (a k)^2 (a' k) a_x^2 a'^2_x\} (a a')^2 \cdot$$

Siccome poi dalla:

$$k = 3 (a a')^2 a_x^2 a'^2_x$$

si ricava mediante la differenziazione:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 k}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} y_2^2\right) = (a a')^4 (2 a_x a'_x a_y a'_y + a_x^2 a'^2_y) ,$$

così, ponendo $k_x k_2$, $-k_x k_1$ invece di y_1. y_2 si trova:

$$\Delta = (a a')^4 k_x^2 \left(2 (a k)(a' k) a_x a'_x + (a' k)^2 a_x^2\right)$$

$$= (a a')^2 \left(2 (a k)(a' k) a_x a'_x + (a' k)^2 a_x^2\right)\left((a k)^2 a'^2_x - 2 (a k)(a' k) a_x a'_x + (a' k)^2 a_x^2\right)$$

$$= (a a')^2 (a' k)^4 a_x^4 + 2 (a a')^2 (a' k)^3 (a k) a_x^2 a'_x - 3 (a a')^2 (a' k)^2 (a k)^2 a_x^2 a'^2_x \cdot$$

Da ultimo ricaviamo dal covariante identicamente nullo h la forma parimente nulla $(h a)^3 h_x a_x^3$, ossia l'equazione identica:

$$0 = (a k)^3 (a a')^3 k_x a'^3_x + 3 (a k)^3 (a a')^2 (k a') a_x a'^3_x .$$

la quale, in virtù della:

$$(aa')k_x=(ak)a'_x-(a'k)a_x,$$

si muta in:

$$0=(ak)^4(aa')^2a'^4_x-4(aa')^2(ak)^3(a'k)a_xa'^3_x.$$

Ora, se per brevità si pone:

$$\rho=(aa')^2(ak)^4a'^4_x, \quad \sigma=(ak)^3(a'k)(aa')^2a_xa'^3_x,$$

$$\tau=(aa')^2(ak)^2(a'k)^2a^2_xa'^2_x,$$

per le cose precedenti avremo le equazioni:

$$Ak=\rho-4\sigma+3\tau, \quad 0=\rho-4\sigma,$$

$$\Delta=\rho+2\sigma-3\tau,$$

alle quali si può aggiungere la definizione:

$$u_{11}l_{22}-2u_{12}l_{12}+u_{22}l_{11}=\rho.$$

Si ha dunque:

$$\tau=\tfrac{1}{3}Ak, \quad \rho=\tfrac{2}{3}(\Delta+Ak),$$

e quindi la relazione fra covarianti:

$$u_{11}l_{22}-2u_{12}l_{12}+u_{22}l_{11}=\tfrac{2}{3}(\Delta+Ak).$$

Se si scrive questa equazione nella forma simbolica:

$$a^4_x(al)^2=\tfrac{2}{3}(kk')^2k^2_xk'^2_x+\tfrac{2}{3}Ak^4_x,$$

sostituendo $k_2, -k_1$ in luogo di x_1, x_2, si otterrà:

$$(ak)^4(al)^2=\tfrac{2}{3}(kk')^2(kk'')^2(k'k'')^2+\tfrac{2}{3}A(kk')^4,$$

ossia:

$$A_n=2\left(C+\frac{AB}{3}\right),$$

che è una delle relazioni cercate. L' altra si ricava dalla considerazione dell' espressione:

$$u_{11}m_{22}-2u_{12}m_{12}+u_{22}m_{11}=a_x^4(am)^2=a_x^4(ak)^2(kl)^2$$

$$=(ak)^2a_x^2\{k_x(al)-l_x(ak)\}^2$$

$$=(ak)^2(al)^2a_x^2k_x^2+(ak)^4a_x^2l_x^2-2(ak)^3(al)a_x^2k_xl_x\,.$$

La seconda parte di quest'espressione è a dirittura:

$$(ak)^4a_x^2l_x^2=l'^2_x l_x^2=l^2\,.$$

La prima nasce dalla forma:

$$\phi=u_{11}l_{22}-2u_{12}l_{12}+u_{22}l_{11}=a_x^4(al)^2\,,$$

mediante l'operazione:

$$\phi_{11}k_{22}-2\phi_{12}k_{12}+\phi_{22}k_{11}\,,$$

epperò è eguale a:

$$\tfrac{2}{3}(\Delta_{11}k_{22}-2\Delta_{12}k_{12}+\Delta_{22}k_{11})+\tfrac{2}{3}A\Delta\,;$$

ossia eguale a:

$$\tfrac{2}{9}Bk+\tfrac{2}{3}A\Delta\,,$$

perchè, in virtù della teoria delle forme di quarto grado, l' espressione fra parentesi ha il valore $\frac{1}{3}Bk$.

La terza parte si ottiene col sussidio del covariante $h=(ak)^3a_x^3k_x$, che è identicamente nullo. Da questo si trae subito:

$$0=4(h_1l_2-l_1h_2)=(ak)^3a_x^2\{3(al)k_xl_x+(kl)a_xl_x\}$$

$$=(ak)^3a_x^2\{4(al)k_xl_x-(ak)l_x^2\}\,,$$

dunque:

$$(ak)^3(al)a_x^2k_xl_x=\tfrac{1}{4}(ak)^4a_x^2l_x^2=\tfrac{1}{4}l^2\,.$$

Laonde si ha finalmente la formola:

$$u_{11}m_{22}-2u_{12}m_{12}+u_{22}m_{11}=\tfrac{1}{2}l^2+\tfrac{2}{9}Bk+\tfrac{2}{3}A\Delta\,;$$

la quale simbolicamente equivale a:

$$(am)^2 a_x^4=\tfrac{1}{2}l_x^2 l_x'^2+\tfrac{2}{9}B\,k_x^4+\tfrac{2}{3}A\,(kk')^2 k_x^2 k_x'^2\,,$$

dove, ponendo di nuovo $k_2, -k_1$ invece di x_1, x_2, risulta la relazione fra invarianti:

$$(lm)^2=\tfrac{1}{2}(lm)^2+\tfrac{2}{9}B\,(kk')^4+\tfrac{2}{3}A\,(kk')^2(kk'')^2(k'k'')^2\,,$$

ossia:

$$A_{lm}=\tfrac{4}{9}B^2+4AC\,.$$

In conclusione vediamo essere conveniente di assumere per fondamentali gli invarianti:

$$A\,(\text{di } 2^{\circ} \text{ ordine}),\quad B\,(\text{di } 4^{\circ} \text{ ordine}),\quad C\,(\text{di } 6^{\circ} \text{ ordine}),$$

$$D=A_{mm}\ (\text{del } 10^{\circ} \text{ ordine}),$$

come i più semplici, mentre l'invariante A_{ml} di 8° ordine si esprime razionalmente per mezzo dei precedenti.

Quindi le espressioni finali degli invarianti divengono:

$$A_{ll}=2C+\tfrac{2}{3}AB\,,\quad A_{ml}=\tfrac{4}{9}B^2+4AC\,,\quad A_{nl}=A_{mm}=D\,,$$

$$A_{nm}=4\left(C^2+\tfrac{4}{3}ABC+\tfrac{1}{9}B^3\right),\quad A_{nn}=BD+\tfrac{8}{9}B^2C+8AC^2\,.$$

E da ultimo:

$$R^2=\begin{vmatrix} 2C+\tfrac{2}{3}AB & \tfrac{4}{9}B^2+4AC & D \\ \tfrac{4}{9}B^2+4AC & D & 4C^2+\tfrac{16}{3}ABC+\tfrac{4}{9}B^3 \\ D & 4C^2+\tfrac{16}{3}ABC+\tfrac{4}{9}B^3 & BD+\tfrac{8}{9}B^2C+8AC^2 \end{vmatrix}$$

§ 10.

Rappresentazioni tipiche.

Se per un covariante ϕ si conoscono le forme:

$$\phi_l = \phi_{11} l_{22} - 2\phi_{12} l_{12} + \phi_{22} l_{11},$$

$$\phi_m = \phi_{11} m_{22} - 2\phi_{12} m_{12} + \phi_{22} m_{11},$$

$$\phi_n = \phi_{11} n_{22} - 2\phi_{12} n_{12} + \phi_{22} n_{11},$$

nella loro rappresentazione tipica per mezzo di l, m, n, si può facilmente assegnare anche l'espressione di ϕ. In fatti, se alle equazioni precedenti si aggiunge la:

$$\phi = \phi_{11} x_1^2 + 2\phi_{12} x_1 x_2 + \phi_{22} x_2^2,$$

eliminando ϕ_{11}, ϕ_{12}, ϕ_{22}, risulta:

$$0 = \begin{vmatrix} l_{22} & -l_{12} & l_{11} & \phi_l \\ m_{22} & -m_{12} & m_{11} & \phi_m \\ n_{22} & -n_{12} & n_{11} & \phi_n \\ x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & \phi \end{vmatrix},$$

ovvero, confrontando colla fine del § 6, e moltiplicando per R:

$$R^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & \phi_l \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & \phi_m \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & \phi_n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}.$$

Indichiamo per un momento con ciascuno de' simboli μ, ν,.. uno qualunque degli indici l, m, n, e con ciascuno de' simboli l_μ, l_ν,.. una qualunque delle funzioni l, m, n; allora potremo scrivere l'equazione precedente anche così:

$$R^2 \cdot \phi = \sum_\mu \sum_\nu B_{\mu\nu}\, l_\mu \phi_\nu \cdot$$

Se analogamente ϕ_l, ϕ_m, ϕ_n sono date per mezzo di ϕ_{ll}, $\phi_{lm} = \phi_{ml}$, ecc., sarà anche:

$$R^2 \cdot \phi_\nu = \sum_\varrho \sum_\sigma B_{\varrho\sigma} \, l_\varrho \, \phi_{\nu\sigma} \, ,$$

epperò:

$$R^4 \cdot \phi = \sum_\mu \sum_\nu \sum_\varrho \sum_\sigma B_{\mu\nu} \, B_{\varrho\sigma} \, l_\mu \, l_\varrho \, \phi_{\nu\sigma}$$

$$= \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho} \, B_{\sigma\nu} \, l_\mu \, l_\varrho \, \phi_{\sigma\nu} - R^2 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho\, ,\, \sigma\nu} \, l_\mu \, l_\varrho \, \phi_{\nu\sigma} \, .$$

Ora, siccome $\sum \sum B_{\mu\varrho} l_\mu l_\varrho$ è identicamente zero, così l'equazione si può dividere per R^2, onde si ha:

$$R^2 \cdot \phi = - \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho\, ;\, \sigma\nu} \, l_\mu \, l_\varrho \phi_{\nu\sigma} \, .$$

Quindi, scrivendo per un momento $\overline{\phi_\nu \cdot \phi_\sigma}$ simbolicamente in luogo di $\phi_{\nu\sigma}$, questa formola diviene:

$$R^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l & \overline{\phi_l} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & m & \overline{\phi_m} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & n & \overline{\phi_n} \\ l & m & n & 0 & 0 \\ \overline{\phi_l} & \overline{\phi_m} & \overline{\phi_n} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Queste formole bastano per la rappresentazione di k, Δ ed u. In fatti si ha già per k:

$$k_{11} l_{22} - 2k_{12} l_{12} + k_{22} l_{11} = m \, ,$$

$$k_{11} m_{22} - 2k_{12} m_{12} + k_{22} m_{11} = n \, ,$$

$$k_{11} n_{22} - 2k_{12} n_{12} + k_{22} n_{11} = p = Bm + 2\, Cl \, ;$$

epperò:

$$R^2 \cdot k = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & m \\ A_{ml} & A_{mn} & A_{mn} & n \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & Bm + 2\, Cl \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} \, .$$

Poi si aveva:

$$\Delta_{11} l_{22} - 2\Delta_{12} l_{12} + \Delta_{22} l_{11} = n - \tfrac{2}{3} Bl \, ,$$

$$\Delta_{11} m_{22} - 2\Delta_{12} m_{12} + \Delta_{22} m_{11} = \tfrac{1}{3} Bm + 2\, Cl \, ,$$

$$\Delta_{11} n_{22} - 2\Delta_{12} n_{12} + \Delta_{22} n_{11} = \tfrac{1}{3} Bn + 2\, Cm \, ,$$

dunque:

$$R^2\cdot\Delta = -\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & n-\frac{2}{3}Bl \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & \frac{1}{3}Bm+2Cl \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & \frac{1}{3}Bn+2Cm \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente è:

$$u_l = u_{11}l_{22} - 2u_{12}l_{12} + u_{22}l_{11} = \frac{2}{3}\Delta + \frac{2}{3}Ak,$$

$$u_m = u_{11}m_{22} - 2u_{12}m_{12} + u_{22}m_{11} = \frac{1}{2}l^2 + \frac{2}{9}Bk + \frac{2}{3}A\Delta.$$

A queste equazioni si deve anzitutto aggiungere il valore di u_n. Seguendo precisamente la stessa via adottata per u_m (§ 9), troviamo:

$$u_n = u_{11}n_{22} - 2u_{12}n_{12} + u_{22}n_{11} = ml + \frac{2}{9}B\Delta - \frac{2}{3}Ck.$$

Ora combinando di nuovo u_l, u_m, u_n con $l, m, n,$ si trovano espressioni nelle quali non restano incognite che quelle parti che nascono dai termini l^2, ml. Ma, se ϕ, ψ, χ sono tre funzioni qualunque di secondo grado, si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi.\psi}{\partial x_1^2}\chi_{22} - 2\frac{\partial^2\varphi.\psi}{\partial x_1\partial x_2}\chi_{12} + \frac{\partial^2\varphi.\psi}{\partial x_2^2}\chi_{11}\right)$$

$$= 3\psi(\phi_{11}\chi_{22} - 2\phi_{12}\chi_{12} + \phi_{22}\chi_{11}) + 3\phi(\psi_{11}\chi_{22} - 2\psi_{12}\chi_{12} + \psi_{22}\chi_{11}) -$$

$$-2\chi(\phi_{11}\psi_{22} - 2\phi_{12}\psi_{12} + \phi_{22}\psi_{11}),$$

com'è facile a provarsi. Quindi sarà:

$$(ll)_l = \frac{4}{3}A_{ll}\,.\,l, \qquad (ml)_l = \frac{1}{3}A_{ml}\,.\,l + A_{ll}\,.\,m,$$

$$(ll)_m = 2A_{lm}\,.\,l - \frac{2}{3}A_{ll}\,.\,m, \qquad (ml)_m = A_{mm}\,.\,l + \frac{1}{3}A_{ml}\,.\,m,$$

$$(ll)_n = 2A_{ln}\,.\,l - \frac{2}{3}A_{ll}\,.\,n, \qquad (ml)_n = A_{mn}\,.\,l + A_{nl}\,.\,m - \frac{2}{3}A_{ml}\,.\,n,$$

e per conseguenza:

$$\begin{aligned}
u_{ll} &= -\tfrac{4}{9}Bl+\tfrac{2}{3}Am+\tfrac{2}{3}n\,,\\
u_{ml} &= \tfrac{4}{3}Cl+\tfrac{2}{9}Bm+\tfrac{2}{3}An\,,\\
u_{nl} &= \tfrac{4}{3}ACl+(\tfrac{2}{3}AB+\tfrac{4}{3}C)m+\tfrac{2}{9}Bn\,,\\
u_{mm} &= (\tfrac{4}{9}B^2+\tfrac{16}{3}AC)l-\tfrac{2}{3}Cm+\tfrac{2}{9}Bn\,,\\
u_{mn} &= (D+\tfrac{4}{9}BC)l+(\tfrac{4}{3}AC+\tfrac{2}{9}B^2)m-\tfrac{2}{3}Cn\,,\\
u_{nn} &= (\tfrac{4}{9}B^3+\tfrac{16}{3}ABC+\tfrac{8}{3}C^2)l+(D-\tfrac{2}{9}BC)m-(\tfrac{2}{9}B^2+\tfrac{8}{3}AC)n\,.
\end{aligned}$$

Quindi, introducendo le funzioni di invarianti:

$$\begin{aligned}
E&=\tfrac{2}{3}D-\tfrac{16}{3}A^2C-\tfrac{4}{9}AB^2+\tfrac{4}{9}BC\,,\\
F&=\tfrac{2}{3}AD-\tfrac{20}{9}ABC-\tfrac{4}{3}C^2-\tfrac{16}{81}B^3\,,
\end{aligned}$$

risulta per u la forma tipica:

$$\begin{aligned}
R^2\cdot u=E\{&-8C^2l^3-Cm^3+n^3+(\tfrac{9}{2}D-7BC)l^2m-2B^2lm^2-2Bln^2+Bm^2n-6Clmn\}\\
&+3F\{(B^2+12AC)l^2m-4Cl^2n-4Clm^2+mn^2-2Blmn\}\,,
\end{aligned}$$

mentre la relazione fra l, m, n si muta nella:

$$\begin{aligned}
0=E\{&(\tfrac{3}{2}BD+\tfrac{1}{3}B^2C)l^2+(4BC-\tfrac{3}{2}D)m^2+3Cn^2+\tfrac{4}{3}B^2mn+(2BC-3D)nl+12C^2lm\}\\
&+F\{(B^3+12ABC+12C^2)l^2-12ACm^2+Bn^2+12Cmn-2(B^2+12AC)nl+4BClm\}\,.
\end{aligned}$$

Nello stesso tempo R^2, espresso per mezzo di E, F, assume la forma semplice:

$$R^2=(\tfrac{15}{2}BC-\tfrac{9}{4}D)E^2-(\tfrac{3}{2}B^2+18AC)EF-18CF^2\,.$$

§ 11.

Caso eccezionale: $R=0$. Seconda rappresentazione di u.

La precedente rappresentazione tipica di u diventa impossibile se R è nullo, epperò se ha luogo fra l, m, n una relazione lineare. Supponiamo da prima che m ed l non siano nè proporzionali fra loro, nè identicamente nulle. Allora n è una funzione lineare di l ed m, e per conseguenza non può essere adoperata. Invece si potrà in tal caso usare come terza funzione il determinante:

$$\vartheta = l_1 m_2 - m_1 l_2 ,$$

il quale (cfr. § 1) è legato con l, m mediante l'equazione di secondo grado:

$$\vartheta^2 = -(A_{ll} m^2 - 2 A_{lm} m l + A_{mm} l^2) .$$

Cominceremo dall'eseguire in generale questa trasformazione di u. In luogo di R^2 subentra il determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{ml} & A_{\vartheta l} \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{\vartheta m} \\ A_{l\vartheta} & A_{m\vartheta} & A_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix} ,$$

nel quale $A_{l\vartheta}$, ecc. indicano le espressioni formate analogamene ad A_{ln}, ecc. Ma pel § 1 si ha:

$$A_{l\vartheta} = 0 , \quad A_{m\vartheta} = 0 , \quad A_{\vartheta\vartheta} = A_{ll} A_{mm} - A_{ml}^2 ,$$

onde il valore del determinante superiore è a dirittura $A_{\vartheta\vartheta}^2 = B_{nn}$. Dunque questa trasformazione è possibile ogni qualvolta $A_{\vartheta\vartheta}$ non sia nullo.

Posto per una funzione qualunque ϕ:

$$\phi_\vartheta = \phi_{11} \vartheta_{22} - 2 \phi_{12} \vartheta_{12} + \phi_{22} \vartheta_{11} ,$$

si ha la formola:

$$A_{\vartheta\vartheta}^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & 0 & \phi_l \\ A_{ml} & A_{mm} & 0 & \phi_m \\ 0 & 0 & A_{\vartheta\vartheta} & \phi_\vartheta \\ l & m & \vartheta & 0 \end{vmatrix} ,$$

vale a dire che, dopo aver diviso per $A_{\vartheta\vartheta}$, è:

$$A_{\vartheta\vartheta} \cdot \phi = \vartheta \phi_\vartheta + m (A_{ll} \phi_m - A_{ml} \phi_l) - l (A_{ml} \phi_m - A_{mm} \phi_l) ,$$

e quindi anche:

$$A^2_{\vartheta\vartheta}\phi = \vartheta^2\phi_{\vartheta\vartheta} + 2\vartheta m(A_{ll}\phi_{m\vartheta} - A_{ml}\phi_{l\vartheta}) - 2\vartheta l(A_{ml}\phi_{m\vartheta} - A_{mm}\phi_{l\vartheta})$$
$$+(A_{ll}\phi_{mm} - 2A_{lm}\phi_{ml} + A_{mm}\phi_{ll})(A_{ll}m^2 - 2A_{ml}ml + A_{mm}l^2)$$
$$-A_{\vartheta\vartheta}(m^2\phi_{ll} - 2ml\phi_{ml} + l^2\phi_{mm})$$
$$= 2\vartheta^2\phi_{\vartheta\vartheta} - A_{\vartheta\vartheta}(m^2\phi_{ll} - 2ml\phi_{ml} + l^2\phi_{mm})$$
$$+2\vartheta m(A_{ll}\phi_{m\vartheta} - A_{ml}\phi_{l\vartheta}) - 2\vartheta l(A_{ml}\phi_{m\vartheta} - A_{mm}\phi_{l\vartheta}),$$

essendo identicamente:

$$\phi_{\vartheta\vartheta} = -(A_{ll}\phi_{mm} - 2A_{ml}\phi_{ml} + A_{mm}\phi_{ll}).$$

Ma, se nella formola:

$$A_{\vartheta\vartheta}.\phi = \vartheta\phi_\vartheta + m(A_{ll}\phi_m - A_{ml}\phi_l) - l(A_{ml}\phi_m - A_{mm}\phi_l)$$

poniamo in luogo della funzione arbitraria ϕ la funzione ϕ_ϑ, del pari arbitraria, e moltiplicata per 2 l'equazione risultante la sottraggiamo dall'equazione che dà $A^2_{\vartheta\vartheta}\cdot\phi$, otterremo la formola semplice:

$$A_{\vartheta\vartheta}\cdot\phi = 2\vartheta.\phi_\vartheta - (m^2\phi_{ll} - 2lm\phi_{ml} + l^2\phi_{mm});$$

quindi anche:

$$A_{\vartheta\vartheta}\cdot\phi_\vartheta = 2\vartheta\phi_{\vartheta\vartheta} - (m^2\phi_{ll\vartheta} - 2lm\phi_{ml\vartheta} + l^2\phi_{mm\vartheta}),$$

ossia sarà:

$$A^2_{\vartheta\vartheta}\cdot\phi = 4\vartheta^2\phi_{\vartheta\vartheta} - (m^2\phi_{ll} - 2lm\phi_{lm} + l^2\phi_{mm})A_{\vartheta\vartheta} - 2\vartheta(m^2\phi_{ll\vartheta} - 2ml\phi_{ml\vartheta} + l^2\phi_{mm\vartheta}).$$

Applicando questa formola ad u, si ha:

$$u_{\vartheta\vartheta} = \tfrac{2}{3}BEl - Fm - En,$$
$$m^2u_{ll} - 2mlu_{ml} + l^2u_{mm} = \tfrac{4}{3}ACl^3 + \tfrac{2}{3}Am^3 + \tfrac{2}{3}(AB-2C)l^2m$$
$$-\tfrac{8}{9}Blm^2 + \tfrac{2}{3}n(m^2 - 2Alm + \tfrac{1}{3}Bl^2),$$
$$m^2u_{ll\vartheta} - 2mlu_{lm\vartheta} + l^2u_{mm\vartheta} = \tfrac{2}{3}R(m^2 - 2Alm + \tfrac{1}{3}Bl^2).$$

Quindi la formola per u diviene:

$$A^2_{\vartheta\vartheta}.u = 4\vartheta^2(\tfrac{2}{3}BEl - Fm - En) - (\tfrac{2}{3}nA_{\vartheta\vartheta} + \tfrac{4}{3}R\vartheta)(m^2 - 2Alm + \tfrac{1}{3}Bl^2) -$$
$$-\tfrac{2}{3}A_{\vartheta\vartheta}\{2ACl^3 + (AB-2C)l^2m - \tfrac{4}{3}Blm^2 + Am^3\}.$$

Se s'introduce anche il valore di n preso dalla formola (§ 8):

$$R\vartheta = B_{nl}.l + B_{nm}.m + B_{nn}.n\,,$$

si ottiene la seguente rappresentazione di u per mezzo di l, m, ϑ:

$$\begin{aligned} A^3_{\vartheta\vartheta}\cdot u = & R\vartheta\{4E\vartheta^2 + (2m^2 - 4Alm + \tfrac{2}{3}Bl^2)A_{\vartheta\vartheta}\} \\ & + 4\vartheta^2\{(\tfrac{2}{3}BEB_{nn} + EB_{ln})l + (-FB_{nn} + EB_{mn})m\} \\ & + \tfrac{2}{3}A_{\vartheta\vartheta}(B_{nl}l + B_{nm}m)(m^2 - 2lmA + \tfrac{1}{3}Bl^2) \\ & - \tfrac{2}{3}A^2_{\vartheta\vartheta}\{2ACl^3 + (AB - 2C)l^2m - \tfrac{4}{3}Blm^2 + Am^3\}\,, \end{aligned}$$

che dev'essere combinata coll'equazione:

$$\vartheta^2 = -(A_{ll}m^2 - 2A_{lm}ml + A_{mm}l^2).$$

Consideriamo ora particolarmente il caso di $R=0$. Ponendo per ϑ^2 il suo valore, troviamo:

$$A^3_{\vartheta\vartheta}.u = Pl^3 + 3Ql^2m + 3Slm^2 + Tm^3\,,$$

dove:

$$\begin{aligned} P = & -4A_{mm}E(\tfrac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) + \tfrac{2}{9}BB_{nl}B_{nn} - \tfrac{4}{3}ACB^2_{nn}\,, \\ 3Q = & \;\;8A_{ml}E(\tfrac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) - 4A_{mm}(EB_{mn} - FB_{nn}) - \tfrac{4}{3}AB_{nl}B_{nn} \\ & + \tfrac{2}{9}BB_{nm}B_{nn} - \tfrac{2}{3}(AB - 2C)B^2_{nn}\,, \\ 3S = & -4A_{ll}E(\tfrac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) + 8A_{ml}(EB_{mn} - FB_{nn}) + \tfrac{2}{3}B_{nn}B_{nl} \\ & - \tfrac{4}{3}AB_{nm}B_{nn} + \tfrac{8}{3}BB^2_{nn}\,, \\ T = & -4A_{ll}(EB_{mn} - FB_{nn}) + \tfrac{2}{3}B_{nm}B_{nn} - \tfrac{2}{3}AB^2_{nn}\,. \end{aligned}$$

Si ha dunque il teorema:

Se $R=0$, senza che sia nullo anche $A_{\vartheta\vartheta}$, la forma u si può rappresentare come funzione razionale di terzo grado in l, m.

Ne risulta che in questo caso l'equazione di sesto grado $u=0$ può essere risoluta nel modo seguente. Mediante la sostituzione di secondo grado:

$$z = \frac{m}{l}\,,$$

l'equazione si riduce a quest'altra di terzo grado:

$$P+3Qz+3Sz^2+Tz^3=0 .$$

Se $z=\zeta$ è una radice di questa equazione, si avrà inoltre:

$$\vartheta=l\sqrt{-(A_{ll}\zeta^2-2A_{lm}\zeta+A_{mm})} .$$

Siccome ora i rapporti fra l, m, ϑ sono affatto determinati, così si possono scrivere le equazioni:

$$l=\mu.\alpha, \qquad m=\mu.\beta, \qquad \vartheta=\mu.\gamma,$$

ove μ è un fattore indeterminato ed α, β, γ esprimono numeri dati. Queste tre equazioni sono lineari rispetto ad x_1^2, x_1x_2, x_2^2; e risolvendole si trovano le radici dell'equazione data.

Il caso presente è quello nel quale le radici dell'equazione $u=0$ formano un'involuzione (1). In fatti, se $A_{\vartheta\vartheta}$ non si annulla, l ed m possono essere trasformati simultaneamente, mediante una sostituzione lineare, in somme di quadrati, ed $u=0$ si trasforma in un'equazione che del pari contiene soltanto i quadrati delle variabili: il che è il segno distintivo dell'involuzione. Viceversa, se vi è involuzione, si ha sempre $R=0$. In fatti, supposto che u contenga solamente i quadrati delle variabili, è facile vedere che anche k conterrà i soli quadrati, e la medesima cosa dovrà verificarsi per l, m, n. Quindi fra l, m, n avrà luogo una relazione lineare e per conseguenza il determinante R di queste funzioni dovrà ridursi a zero.

§ 12.

Secondo caso eccezionale: $R=0$, $A_{\vartheta\vartheta}=0$.

Le due rappresentazioni tipiche che abbiamo date precedentemente divengono impossibili quando, oltre R, si annulli anche $A_{\vartheta\vartheta}$. Per mezzo dell'equazione:

$$A_{\vartheta\vartheta}=A_{ll}A_{mm}-A_{lm}^2=0 ,$$

(1) Vedi Salmon, *Higher Algebra*, p. 210 (2.ª ediz.)

la $R^2=0$ si muta in:

$$A_{ll}\,A_{mn}-A_{lm}\,A_{ln}=0\,,$$

ossia:

$$A_{ml}\,A_{mn}-A_{mm}\,A_{ln}=0\,.$$

Siccome $A_{ln}=A_{mm}$, così si possono determinare due numeri λ, μ in modo che:

$$A_{ll}=\lambda^4,\ \ A_{lm}=\lambda^3\mu,\ \ A_{ln}=A_{mm}=\lambda^2\mu^2,\ \ A_{mn}=\lambda\mu^3,$$

e le equazioni:

$$A_{nm}=B\,A_{lm}\ +2\,CA_{ll}\,,\quad A_{nn}=B\,A_{mm}+2\,C\,A_{ml}$$

diverranno allora:

$$\mu^3=B\lambda^2\mu+2\,C\lambda^3\,,\quad A_{nn}=(B\lambda^2\mu+2\,C\lambda^3)\,\mu=\mu^4\,.$$

Gli invarianti A_{ll}, A_{lm}, .., A_{nn} sono dunque i coefficienti di un biquadrato perfetto $(\lambda x+\mu y)^4$; e la quantità $\frac{\mu}{\lambda}$ sodisfà all'equazione cubica:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3-B\frac{\mu}{\lambda}-2\,C=0\,.$$

Poi le equazioni che esprimono A_{ll}, A_{lm} per mezzo di A, B, C, divengono:

$$\lambda^4=2(C+\tfrac{1}{3}AB)\,,\quad \lambda^3\mu=4\,(A\,C+\tfrac{1}{9}B^3)\,,$$

donde si ricava:

$$\frac{\mu}{\lambda}=2\,\frac{A\,C+\frac{1}{9}B^2}{C+\frac{1}{3}AB^2}\,,$$

e introducendo questo valore nell'equazione cubica superiore, si ottiene la relazione seguente fra A, B, C.

$$0=(C+\tfrac{1}{3}A_{ll})^3C+B\,(A\,C+\tfrac{1}{9}B^2)\,(C+\tfrac{1}{3}AB)^2-4\,(A\,C+\tfrac{1}{9}B^2)^2$$

$$=(C^2-\tfrac{1}{27}B^3)\{\,C^2-4\,A^3\,C+2ABC-\tfrac{1}{3}A^2B^2+\tfrac{4}{27}B^3\}\,.$$

Qui si vede che sono a distinguersi due casi secondo che si annulli il primo o il secondo fattore. Alla medesima conseguenza si giunge anche per altra via, che manifesta a un tempo il significato dell' annullarsi di questi fattori. L'equazione $A_{\vartheta\vartheta}=0$, in virtù della quale ϑ è un quadrato perfetto, indica evidentemente che le forme quadratiche l, m posseggono un fattor comune. Se questo fattore è di primo grado, onde $l=a.b$, $m=a.c$ (dove a, b, c sono espressioni lineari, e b è diverso da c), l'equazione $R=0$ dice che fra l, m, n sussiste una relazione lineare, e che per conseguenza anche n contiene il fattore a; sia $n=a.d$. Invece, se quel fattore comune di l ed m è di secondo grado, sarà m proporzionale ad l, ossia $m=\varepsilon.l$, e allora l'equazione $R=0$ è sodisfatta da sè. Siccome poi si ha:

$$n=k_{11}m_{22}-2k_{12}m_{12}+k_{22}m_{11}=\varepsilon(k_{11}l_{22}-2k_{12}l_{12}+k_{22}l_{11})=\varepsilon.m=\varepsilon^2.l\,,$$

così anche n è proporzionale ad l.

Cominciamo dal considerare il primo caso. Posto per brevità:

$$k_1a_2-k_2a_1=k'\,,$$

si ha:

$$k_{11}l_{22}-2k_{12}l_{12}+k_{22}l_{11}=k'_1b_2-k'_2b_1=m=ac\,,$$

$$k_{11}m_{22}-2k_{12}m_{12}+k_{22}m_{11}=k'_1c_2-k'_2c_1=n=ad\,.$$

L'equazione identica:

$$0=\begin{vmatrix} k' & b & c \\ k'_1 & b_1 & c_1 \\ k'_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dà pertanto:

$$0=k'(b_1c_2-c_1b_2)+a(c^2-bd)\,.$$

Di qui segue che k' è divisibile per a, epperò $=ak''$. Ma introducendo questo valore nelle equazioni precedenti si ottiene:

$$3ac=k''(a_1b_2-b_1a_2)+2a(k''_1b_2-k''_2b_1)\,,$$

$$3ad=k''(a_1c_2-c_1a_2)+2a(k''_1c_2-k''_2c_1)\,,$$

e siccome in ogni caso o le b o le c sono diverse dalle a, così risulta di qui che k'' è ancora divisibile per a, cioè $k'=a^2e$, dove ora e è una funzione lineare. Posto per k' questo valore, le equazioni superiori riescono divisibili per a, e servono a definire c e d mediante a, b, e.

Ora dall' equazione:

$$k_1 a_2 - k_2 a_1 = a^2 e$$

segue, se ξ è una funzione lineare qualunque differente da a:

$$0 = \begin{vmatrix} k & a & \xi \\ k_1 & a_1 & \xi_1 \\ k_2 & a_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = k(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a\{(\xi_1 k_2 - k_1 \xi_2) + \xi a e\}.$$

Dunque k è divisibile per a, cioè $k = a.s$; onde la nostra equazione diviene:

$$0 = 3s(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a\{3(\xi_1 s_2 - s_1 \xi_2) + 4\xi e\}.$$

Quindi s è di nuovo divisibile per a; e posto $k = a^2.r$, l'equazione precedente acquista il fattore a. Dunque k contiene due fattori eguali al fattore comune di l ed m.

Passando ora alla forma u, abbiamo le equazioni seguenti, nelle quali si è posto $u' = u_1 a_2 - a_1 u_2$:

$$u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = u'_1 b_2 - u'_2 b_1 = \tfrac{2}{3}\Delta + \tfrac{2}{3} A k,$$

$$u_{11} m_{22} - 2u_{12} m_{12} + u_{22} m_{11} = u'_1 c_2 - u'_2 c_1 = \tfrac{1}{2} l^2 + \tfrac{2}{9} B k + \tfrac{2}{3} A \Delta.$$

Ma la funzione Δ è, insieme con k, divisibile per a^2; epperò questo fattore è comune ai due termini del secondo membro dell'equazione. Si dimostrerà adunque, nello stesso modo come si è fatto sopra per k, che u' è divisibile per a^3, cioè $u' = a^3.f$, ed allora dall'equazione:

$$0 = \begin{vmatrix} u & a & \xi \\ u_1 & a_1 & \xi_1 \\ u_2 & a_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = u(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a\{(\xi_1 u_2 - u_1 \xi_2) + \xi a^2 f\}$$

segue che anche u contiene il fattore a^3. Con ciò è dimostrato il teorema:

Se l ed m hanno un fattore comune, però senza essere proporzionali fra loro, questo fattore è contenuto al quadrato in k ed al cubo in u.

Dalla prima proprietà s'inferisce che in questo caso il discriminante di k è nullo, cioè:

$$C^2 - \tfrac{1}{27} B^3 = 0,$$

dove il primo membro è il primo de'due fattori dell'equazione sopra incontrata.

Il teorema ora enunciato si può anche invertire. Se a è una funzione lineare e w una funzione cubica, entrambe qualisivogliano, e se $u = a^3 w$, sarà k sempre divisibile per a^2, ed l, m divisibili per a. In fatti, assunti a e ξ come variabili, e formato k rispetto a queste variabili, si ha per k, astrazion fatta da un fattore costante, l'espressione:

$$\frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^4} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^3 . \partial \xi} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a . \partial \xi^3} + 3 \left(\frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^2 . \partial \xi^2} \right)^2,$$

nella quale il primo termine è nullo, e ciascuno degli altri è divisibile per a^2. Quindi $k = a^2 r$. Se ora formiamo anche l rispetto alle variabili a, ξ, otteniamo l'espressione:

$$\frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^4} \cdot \frac{\partial^4 a^3 w}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^3 . \partial \xi} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a . \partial \xi^3} + 6 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^2 . \partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^2 . \partial \xi^2}$$

$$- 4 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a . \partial \xi^3} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^3 . \partial \xi} + \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial \xi^4} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^4},$$

che è divisibile per a. La stessa cosa ha luogo per l'espressione di m:

$$\frac{\partial^2 . a^2 r}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 . a^2 r}{\partial a . \partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial \xi . \partial a} + \frac{\partial^2 . a^2 r}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial a^2},$$

come anche per l'espressione analoga di n. Dunque possiamo enunciare il teorema:

Se u contiene un fattore cubico, questo entra al quadrato in k e linearmente in l, m, n, e sono nulli gl'invarianti R e $C^2 - \frac{1}{27} B^3$.

Passiamo ora all'altro caso nel quale m ed l non differiscono che per un fattore costante ε. Per le cose precedenti si ha in questo caso:

$$m = \varepsilon l, \quad n = \varepsilon^2 l,$$

$$A_{ml} = \varepsilon A_{ll}, \quad A_{mm} = A_{nl} = \varepsilon^2 A_{ll}, \quad A_{mn} = \varepsilon^3 A_{ll}, \quad A_{nn} = \varepsilon^4 A_{ll},$$

$$\varepsilon^3 - B\varepsilon - 2C = 0, \qquad \varepsilon(C + \tfrac{1}{3} AB) - 2(AC + \tfrac{1}{9} B^2) = 0 \cdot$$

Le equazioni per k, Δ divengono:

$$k_{11}\, l_{22} - 2k_{12}\, l_{12} + k_{22}\, l_{11} = \varepsilon l,$$
$$\Delta_{11}\, l_{22} - 2\Delta_{12}\, l_{12} + \Delta_{22}\, l_{11} = (\varepsilon^2 - \tfrac{2}{3}B)\, l,$$

mentre dall' equazioni per u si ottiene:

$$\begin{aligned} u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} &= \tfrac{2}{3}Ak + \tfrac{2}{3}\Delta \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon}\left(\tfrac{1}{2}l^2 + \tfrac{2}{9}Bk + \tfrac{2}{3}A\Delta\right) \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\varepsilon l^2 - \tfrac{2}{3}Ck + \tfrac{2}{9}B\Delta\right). \end{aligned}$$

Da queste ultime segue o che k e Δ non differiscono da l^2 che per un fattore, o che dev'essere nullo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & A & 1 \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{2}{9}B & \tfrac{2}{3}A \\ \varepsilon & -\tfrac{2}{3}C & \tfrac{2}{9}B \end{vmatrix} = \tfrac{2}{3}\varepsilon\,(A^3 - \tfrac{1}{3}B) - \tfrac{1}{3}(C + \tfrac{1}{3}AB).$$

Nell' ultimo caso, sostituendo il valore:

$$\varepsilon = 2\,\frac{AC + \tfrac{1}{9}B^2}{C + \tfrac{1}{3}AB},$$

si ottiene la condizione:

$$C^2 - 4A^3C + 2ACB - \tfrac{1}{3}A^2B^2 + \tfrac{4}{27}B^3 = 0,$$

dove il primo membro è il secondo dei fattori dell'equazione sopra ricordata. In questo caso che noi tratteremo pel primo, si può rappresentare simultaneamente B e C come funzioni intere di A ed ε, in modo che la predetta condizione sia sodisfatta identicamente. In fatti dalle equazioni:

$$\varepsilon^3 - B\varepsilon - 2C = 0,\quad 2\varepsilon\,(A^2 - \tfrac{1}{3}B) - (C + \tfrac{1}{3}AB),$$

segue:

$$B = 3\varepsilon(2A - \varepsilon),\quad C = 2\varepsilon^3 - 3A\varepsilon^2.$$

Siccome inoltre:

$$A_u = 2C + \tfrac{2}{3}AB = 4\varepsilon(\varepsilon - A^2),$$

così tutti gli invarianti sono espressi come funzioni intere di A, ε.

Le equazioni sopra riferite per u danno:

$$\tfrac{3}{4} l^2 = \frac{\varepsilon - A}{\varepsilon} (\Delta + \varepsilon k) .$$

In fatti, per la teoria delle forme biquadratiche, le tre quantità λ che rendono $\Delta + \lambda k$ un quadrato perfetto sono date dall'equazione cubica:

$$\lambda^3 - B\lambda - 2C = 0 ,$$

che, per le cose precedenti, ha la radice ε. Si vede poi dall'equazione precedente che per $\lambda = \varepsilon$ la radice del quadrato perfetto differisce da l soltanto di un fattore costante.

Imaginiamo ora che l sia da prima il prodotto di due fattori disuguali. Assumendo questi come variabili x, y, onde $l = 2xy$, l'equazione:

$$k_{11} l_{22} - 2k_{12} l_{12} + k_{22} l_{11} = \varepsilon l$$

diviene:

$$-k_{12} = \varepsilon . xy ,$$

epperò:

$$k = px^4 - 3\varepsilon x^2 y^2 + qy^4 ,$$

dove p e q sono due coefficienti ancora incogniti, fra i quali però ha luogo l' equazione:

$$pq = 6A\varepsilon - \tfrac{15}{4}\varepsilon^2 ,$$

risultante dalle definizioni di B e C. Inoltre l'equazione:

$$u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = \tfrac{2}{3} (Ak + \Delta)$$

diviene:

$$-3u_{12} = (A - \varepsilon) \{ px^4 + qy^4 + 9\varepsilon x^2 y^2 \} ,$$

onde:

$$u = p' x^6 + q' y^6 - 2(A - \varepsilon) \{ (px^4 + qy^4) xy + 5\varepsilon x^3 y^3 \} .$$

Si osservi che qui mancano i termini $x^4 y^2$ ed $x^2 y^4$ ($c = 0$, $e = 0$). Se ora si scrivono i coefficienti di k e si pongono, come dev' essere, il secondo ed il penultimo eguali a zero, si scorge che il discriminante di k è diverso da zero solamente quando p' e q' sono nulli. Ma se è nullo il discriminante di k, si annullano entrambi i fattori dell'equazione di condizione superiormente decomposta: caso che sarà considerato più avanti.

Di qui si vede che se deve annullarsi soltanto il secondo di quei fattori, u diviene il prodotto xy moltiplicato per una funzione pari di quarto grado, ed è facile mostrare che una forma u così fatta conduce sempre ad un covariante k che contiene le sole potenze pari, e che l è proporzionale ad m. Per valutare la scelta speciale delle variabili, si noti che x^2y^2 è uno dei tre quadrati nei quali può essere trasformata una somma della funzione di quarto grado e del suo determinante. Abbiamo dunque il teorema:

Sia ϕ una funzione binaria di quarto grado ed l^2 uno dei quadrati nei quali può essere trasformata l'espressione $\Delta_\varphi+\lambda\phi$. Allora $\phi.l$ è l'unica funzione di sesto grado per la quale $A_{\vartheta\vartheta}$ ed R si annullano in modo che l sia proporzionale ad m e che l'espressione:

$$C^2-4A^3C+2ACB-\tfrac{1}{3}A^2B^2+\tfrac{4}{27}B^3$$

sia nulla, senza che vada a zero anche il discriminante di k.

Per completare la dimostrazione del teorema, si deve ancora mostrare che, se l è un quadrato, sotto le predette condizioni il discriminante di k è zero. In fatti, per ciò che si è detto sopra, allora è zero A_u, epperò anche ε o $\varepsilon-A$. Quindi o è $B=0$. $C=0$, oppure $B=3\varepsilon^2$, $C=-\varepsilon^2$, cioè $B^3=27\,C^2$, ciò che si doveva dimostrare.

Casi ulteriori che risultano dall'annullarsi identicamente di m o di l saranno trattati in seguito.

Del resto la equazione di condizione sopra considerata, insieme con $R=0$, è equivalente ad $E=0$, $F=0$; perchè essa è il risultato dell' eliminazione di D da queste ultime equazioni.

Passiamo ora all'altro caso che si ricava dalla proporzionalità di m ed l. In questo caso k e Δ erano proporzionali ad l^2. Possiamo in ciò che precede cominciare dal supporre che l non sia un quadrato, $l=2xy$, e troviamo allora k, Δ proporzionali ad x^2y^2. Quindi anche u_{12} è proporzionale ad l^2, cioè u assume la forma:

$$u=px^6+20qx^3y^3+ry^6\cdot$$

In fatti, presupponendo questa forma per u, si trova il covariante k proporzionale ad $x^2 y^2$ ed l proporzionale ad $x y$. Si ha così il teorema:

Se m è proporzionale ad l, e se k è proporzionale al quadrato di l, la forma u è riducibile, per mezzo di una sostituzione lineare, ad una funzione quadratica di cubi.

Se in questo caso l è un quadrato, $l=x^2$, avremo k e Δ proporzionali ad x^4, quindi $m=0$, il che sarà più avanti soggetto di speciale ricerca.

Passiamo ora ai casi ne' quali si annullano entrambi i fattori:

$$B^3-27\,C^2\,,\quad C^2-4A^3\,C+2A\,CB-\tfrac{1}{3}A^2B^2+\tfrac{4}{27}B^3\,.$$

Allora introducendo nella prima condizione i valori:

$$B=3\varepsilon\,(2A-\varepsilon)\;,\quad C=\varepsilon^2\,(2\varepsilon-3A)\,,$$

che sodisfanno alla seconda, si trova:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{3}B)^3-C^2&=\varepsilon^3\,\{8A^3-21A^2\varepsilon+18A\varepsilon^2-5\varepsilon^3\}\\&=\varepsilon^3\,(A-\varepsilon)^2\,(8A-5\,\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Fatta astrazione dal caso $\varepsilon=0$ che conduce ad $m=0$, e da $A=\varepsilon$ che, a cagione dell'equazione:

$$\tfrac{3}{4}\,l^2=\frac{\varepsilon-A}{\varepsilon}\,(\Delta+\varepsilon k)\,,$$

conduce ad $l=0$, non rimane che il caso:

$$A=\tfrac{5}{8}\varepsilon\,,\qquad B=\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\,,\qquad C=\tfrac{1}{8}\varepsilon^3\,.$$

Qui possiamo supporre che $A_{ll}=4\varepsilon\,(\varepsilon-A)^2=\frac{9}{16}\varepsilon^3$ non sia zero, epperò che l abbia due fattori differenti. Posto adunque $l=2xy$, segue come sopra:

$$k=p\,x^4+q\,y^4-3\,\varepsilon\,x^2\,y^2\,,$$

colla condizione $p.q=0$. Sia p. e. $q=0$; allora:

$$k=p\,x^4-3\,\varepsilon y^2x^2\,,\qquad \Delta=-p\,\varepsilon\,x^4-\tfrac{3}{2}\,\varepsilon^2x^2y^2\,,$$

quindi:

$$u_{11}\,l_{22}-2u_{12}\,l_{12}+u_{22}\,l_{11}=-\tfrac{1}{15}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\tfrac{3}{8}\,\varepsilon p\,x^4-\tfrac{27}{8}\,\varepsilon^2x^2y^2\,.$$

Per conseguenza u ha la forma:

$$u=a\,x^6+6\,bx^5\,y+20\,dx^3\,y^3+g\,y^6\,.$$

Ricavando di qui k, si trova:

$$k=-24bdx^4+6(ag+8d^2)x^2y^2+12bgxy^3.$$

Affinchè questa espressione coincida colla forma precedente di k, deve essere zero bg. Ma siccome $A=ag-10d^2$, $B=(ag+8d^2)^2$, così la condizione $\frac{4}{3}B-(\frac{8}{5}A)^2$ per $g=0$ non è verificata che per $d=0$, donde $k=0$: caso del quale sarà trattato più sotto. Facendo invece $b=0$, si ha un caso speciale incluso in quello dianzi considerato, nel quale u è rappresentabile come funzione quadratica di cubi lineari.

§ 13.

Ricerca dei casi: $m=0$, $l=0$, $k=0$.

Sinora abbiamo esauriti tutti i casi particolari ne' quali m non si annulla. Se ciò ha luogo, si annullano a dirittura anche gli invarianti:

$$R,\quad A_{ml},\quad A_{mm},\quad A_{mn},\quad A_{nn},$$

e si annullano inoltre le forme n e

$$p=Bm+2Cl.$$

Se l non dev'essere zero, sarà $C=0$. Dalla:

$$0=A_{ml}=\tfrac{4}{9}B^2+4AC,$$

allora segue $B=0$, e quindi anche:

$$A_{ll}=2C+\tfrac{2}{3}AB=0.$$

Dunque l è un quadrato, $l=\rho x^2$. Dall'equazione:

$$k_{11}l_{22}-2k_{12}l_{12}+k_{22}l_{11}=0,$$

abbiamo per k la determinazione $k_{22}=0$, onde:

$$k=px^4+4qx^3y,$$

e simultaneamente:

$$\Delta=-2q^2x^4=\frac{3}{24}\{u_{11}m_{22}-2u_{12}m_{12}+u_{22}m_{11}-\tfrac{1}{2}l^2\}=-\frac{3\rho^2}{4A}x^4;$$

epperò:

$$q^2=\tfrac{3}{8}\frac{\rho^2}{A},$$

se non è $A=0$, donde seguirebbe $\frac{1}{2}l^2=-\frac{2}{3}A\Delta=0$.

Inoltre dalla:

$$u_{11}l_{22}-2u_{12}l_{12}-u_{22}l_{11}=\tfrac{2}{3}(\Delta+Ak)\ ,$$

segue l'equazione:

$$\frac{\rho}{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(Ap-2q^2)x^4+4Aqx^3y\ ;$$

quindi, se non è zero ρ cioè l, si avrà per u la forma:

$$u=ax^6+6bx^5y+6fxy^5+gy^6\ .$$

Ricavando di qui k, si ottiene:

$$k=12afx^3y+6agx^2y^2+12bgxy^3\ .$$

Per tal modo si vede che nelle formole antecedenti dev'essere $p=0$, ed inoltre $ag=0$, $bg=0$. O sono nulli a e b, epperò anche k; o è zero g, ed allora:

$$u=ax^6+6bx^5+6fxy^5\ ,\quad k=12afx^3y\ .$$

Quindi:

$$l=-4u_{1222}k_{1112}=-12af^2y^2\ ,$$

ciò che contradice al valore assunto per l. Dunque è in ogni caso $l=0$, e si ha il teorema:

Se il covariante m si annulla identicamente, è identicamente zero anche il covariante l.

Rimane dunque ad esaminarsi solamente in quali casi l è zero; cominciando a supporre che k non si annulli. Siccome in questo caso:

$$\Delta+Ak=\tfrac{3}{2}\,(u_{11}l_{22}-2u_{12}l_{12}+u_{22}l_{11})=0\ ,$$

così k è un quadrato perfetto. Per conseguenza si può porre $k=6x^2y^2$ oppure $k=x^4$. Nel primo caso l'equazione che definisce l per mezzo di k ed u diviene $u_{1122}=0$, ossia:

$$cx^2+2dxy+ey^2=0\ .$$

Dunque $c=d=e=0$, epperò:

$$u=ax^6+6bx^5y+6fxy^5+gy^6\ .$$

Ricavando k, si trova:

$$k=12afx^3y+6agx^2y^2+12bgxy^3\ .$$

Perciò dev' essere $af=0$, $bg=0$; quindi, se k non deve andare a zero, $b=0$, $f=0$. Dunque u è una somma di seste potenze.

In secondo luogo, se $k=x^4$, l'equazione che definisce l per mezzo di u e k dà $u_{2222}=0$, dunque:

$$u=ax^6+6bx^5y+15cx^4y^2+20dx^3y^3,$$

donde segue:

$$k=6(3c^2-4bd)x^4+24cdx^3y+8d^2x^2y^2.$$

Perchè questa forma di k coincida colla prima, dev' essere $d=0$, onde:

$$u=ax^6+6bx^5y+15cx^4y^2.$$

E si ha così il teorema:

Se l è zero, o u è una somma di due seste potenze, ovvero u contiene una radice quadrupla; ed in entrambi i casi si annulla sempre anche l.

Finalmente restano soltanto i casi ne' quali k è identicamente nullo. Ciò si verifica in primo luogo, evidentemente, se u è una sesta potenza. Se u non ha questa forma, si possono assumere come variabili due diversi fattori di k, onde si avrà $a=0$, $g=0$; ed affinchè allora k si annulli, devono essere sodisfatte le equazioni:

$$4bd-3c^2=0 \quad , \quad 3be-2cd=0,$$
$$4df-3e^2=0 \quad , \quad 3cf-2de=0,$$
$$9ce-8d^2=0.$$

Se in primo luogo è $d=0$, anche c ed e devono essere zero; quindi u ha la forma:

$$u=6(x^5y+y^5x).$$

Ma se d è diverso da zero, nessuno dei coefficienti c, e, b, f può essere nullo, ed esprimendo tutto mediante b, c, si trova:

$$u=\frac{3xy}{2b^3}\{4b^4x^4+10cb^3x^3y+10c^2b^2x^2y^2+5c^3bxy^3+c^4y^4\}$$
$$=\frac{3x(cy+bx)}{2b^3c}\{(cy+bx)^4-b^4x^4\},$$

espressione che mediante una sostituzione lineare si reca del pari alla forma $6xy(x^4+y^4)$.

La forma $6xy(x^4+y^4)$ è il covariante di sesto ordine di una forma biquadratica:

$$x^4+y^4+6\lambda x^2y^2.$$

Si può adunque enunciare il teorema:

Se per una forma binaria u di sesto grado il covariante k è identicamente nullo, u sarà una sesta potenza, ovvero sarà il covariante di sesto grado di una forma biquadratica; e viceversa k si annulla identicamente in ambedue questi casi.

Per risolvere l'equazione $u=0$ nel caso che k sia nullo, basta fare l'osservazione che i fattori di $6xy(x^4+y^4)$, cioè:

$$2xy, \quad x^2+y^2i, \quad x^2-y^2i,$$

danno sempre zero, se si formano gli invarianti simultanei di due qualunque fra essi. Dunque, se i fattori di u si indicano con:

$$x^2+2\alpha xy+\beta y^2, \quad x^2+2\alpha' xy+\beta' x^2, \quad x^2+2\alpha'' xy+\beta'' y^2$$

questi possederanno la medesima proprietà, onde:

$$\beta+\beta'=2\alpha\alpha', \quad \beta'+\beta''=2\alpha'\alpha'', \quad \beta''+\beta=2\alpha''\alpha\,.$$

I coefficienti del prodotto di quei tre fattori diventano perciò i seguenti:

$$1, \quad 2(\alpha+\alpha'+\alpha''), \quad \beta+\beta'+\beta''+4(\alpha\alpha'+\alpha'\alpha''+\alpha''\alpha)=5(\beta+\beta'+\beta''),$$

$$2(\alpha''\beta'+\cdot\cdot)+8\alpha\alpha'\alpha'', \quad 4(\alpha\alpha'\beta''+\alpha'\alpha''\beta+\alpha''\alpha\beta')+\beta'\beta''+\beta''\beta+\beta\beta'=$$

$$=5(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta), \quad 2(\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'), \quad \beta\beta'\beta''\,.$$

Dunque, se è data la forma:

$$u=ax^6+6bx^5y+15x^4y^2+20dx^3y^3+15ex^2y^4+6fxy^5+gy^6,$$

si ricavano le β dall'equazione cubica:

$$a\beta^3-3c\beta^2+3e\beta-g=0,$$

e quindi le α mediante equazioni lineari.

Giessen, febbrajo 1867.

Sopra le funzioni sferiche.

(*del Prof.* Enrico Betti, *a Pisa*).

Una funzione arbitrariamente data sopra tutti i punti della superficie di una sfera, anche se discontinua lungo alcune linee, purchè queste si trovino tra loro a distanza finita, se ha un sol valore in ogni punto e si conserva sempre finita, può esprimersi analiticamente in un solo modo per mezzo di una serie convergente di funzioni sferiche. Questo teorema, di somma importanza nell'applicazione dell'Analisi alla Fisica matematica e alla Meccanica celeste, fu dimostrato da Lejeune Dirichlet nel t. XVII del Giornale di Crelle, con tutto il rigore desiderabile. Ma per altre superficie oltre la sfera esistono funzioni analoghe alle sferiche, per mezzo delle quali si può esprimere in serie convergente una funzione arbitrariamente data sopra tutti i punti della superficie. Tra queste si possono notare le funzioni di Lamé per l'ellissoide. La dimostrazione dell'enunciato teorema, che passo ad esporre, oltre alla sua semplicità, ha il vantaggio di potersi immediatamente generalizzare senza difficoltà.

Lemma I. Se una funzione V dei punti di un dato spazio connesso T sodisfà alla equazione:

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 , \tag{1}$$

e sopra una porzione finita di una superficie S compresa in T, sodisfà alle due equazioni:

$$V = 0 , \quad \frac{dV}{dp} = 0 . \tag{2}$$

denotando con p la normale alla superficie S, non potrà nello spazio T avere valori differenti da zero, a meno che in qualche punto di questo spazio, essa o le sue derivate prime cessino di essere finite e continue.

In fatti, se la funzione V ha valori differenti da zero in vicinanza della superficie S, potremo sempre prendere una parte T' dello spazio T adiacente ad S, e così piccola che in essa V abbia tutti i suoi valori dello stesso segno. Supponiamo che vi abbia tutti i valori positivi. Per quanto piccolo debba essere lo spazio T', una parte T'' di esso si potrà sempre supporre compresa tra la superficie S e una superficie sferica Σ che abbia il centro O fuori di T''.

Denotiamo con r la distanza di un punto qualunque al centro O, e con R il raggio della sfera Σ.

Le due funzioni V ed $\frac{1}{r}$ saranno in T'' ambedue finite e continue insieme colle loro derivate prime e sodisfaranno alla equazione (1). Quindi per il teorema di Green:

$$\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, ds = \int \frac{dV}{dp} \frac{ds}{r},$$

dove gl'integrali debbono essere estesi a tutta la superficie che chiude T'', della quale una parte è una porzione di superficie S, l'altra una porzione di sfera Σ.

Ora sopra S abbiamo sodisfatte l'equazioni (2); quindi gl'integrali relativi si annullano. Sopra Σ essendo r costante, V finita e continua insieme colle sue derivate prime nell'interno di tutta la sfera, e potendosi supporre $\frac{dV}{dr}=0$ in tutta la porzione di superficie della sfera che non limita T'', abbiamo per un teorema noto (*):

$$\int \frac{dV}{dp} \frac{ds}{r} = \frac{1}{R} \int \frac{dV}{dr}\, ds = 0 .$$

Rimane dunque:

$$\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dp}\, ds = -\int V d\omega = 0 .$$

(*) Vedi la *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton*, di E. Betti, pag. 26.

dove $d\omega$ è l'elemento di superficie sferica di raggio eguale alla unità, e l'integrale è esteso a tutta la porzione Σ della sfera di raggio R. Questa conseguenza contradice alla supposizione che V sia positiva in tutto la spazio T'. Analogamente si dimostra che non può avere in questo spazio valori tutti negativi. Dunque deve esservi eguale a zero. Cosi continuando di strato in strato si vede che V dovrà essere eguale a zero in tutto lo spazio T, a meno che non si ammettano discontinuità in essa o nelle sue derivate prime.

Lemma II. Non può esservi altro che una sola funzione che in un dato spazio connesso T sodisfaccia alla equazione (1), sia finita e continua insieme colle sue derivate prime, e sopra una porzione finita di una superficie S situata in questo spazio, tanto essa quanto la sua derivata rispetto alla normale ad S prendano dati valori.

In fatti, supponiamo che vi siano due funzioni V e V', che sodisfacciano a queste condizioni. Poniamo: $V - V' = U$. Avremo sopra S:

$$U = 0\,, \quad \frac{dU}{dp} = 0\,,$$

dunque per il lemma I., in tutto lo spazio T, sarà: $U = 0$, e quindi: $V = V'$; come volevamo dimostrare.

Ora sia data una superficie chiusa S, e sopra la medesima una funzione v finita e continua, e con un solo valore in ogni punto. Si potrà determinare sempre una sola funzione V che, nello spazio T racchiuso dalla superficie S, si conservi insieme colle sue derivate finita e continua, sodisfaccia all'equazione (1), e sopra S sia eguale a v; e sarà data dal teorema di Green sotto la forma:

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dp}\frac{ds}{\rho} - \frac{1}{4\pi}\int V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dp}\, ds\,, \tag{3}$$

dove ρ denota la distanza del punto (x', y', z') a cui corrisponde il valore V' dal punto (x, y, z) che è solo variabile nella integrazione da estendersi a tutta la superficie S.

È chiaro che potrà aversi dalla formula (3) una serie convergente per esprimere V', quando si abbia una serie convergente per $\frac{1}{\rho}$. Ma poichè $\frac{1}{\rho}$ diviene infinito quando il punto $(x'\ y'\ z')$ coincide col punto (x, y, z), la serie che dà $\frac{1}{\rho}$ deve cessare di esser convergente per un valore di $\frac{1}{\rho}$, quando il punto (x', y', z') è sopra la superficie; quindi la convergenza della serie che si sarebbe ottenuta per V, rimarrebbe dubbia per i punti della superficie S. L'altra difficoltà che si presenta deriva dal comparire nella formula (3), non solo i valori della funzione V sopra la superficie che sono dati, ma anche quelli della sua derivata $\frac{dV}{dr}$ che non son dati e sono una conseguenza di quelli della funzione. Vediamo come si possono superare queste due difficoltà, limitandoci a considerare per S una sfera di raggio R.

Teorema. Una funzione dei punti di una sfera, sempre finita e discontinua soltanto lungo linee separate da intervalli finiti, è sempre esprimibile per una serie convergente di funzioni sferiche.

Poniamo l'origine delle coordinate nel centro O della sfera, e siano (r', θ', ϕ') le coordinate polari di un punto (x', y', z'), (r, θ, ϕ) quelle di un punto (x, y, z). La distanza inversa di questi due punti, finchè $r' < r$, sarà data dalla serie convergente:

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\theta, \phi; \theta', \phi'), \tag{4}$$

essendo P_n le note funzioni di Legendre.

Sostituendo il valore (4) nella formula (3), abbiamo:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \sum_{0}^{\infty} r'^n \int \left(\frac{P_n}{R^{n+1}} \frac{dV}{dr} - V P_n \frac{d\frac{1}{r^{n+1}}}{dr} \right) R^2 dw .$$

Ma dal teorema di Green, essendo nell'interno della sfera:

$$\Delta^2 r^n P_n = 0 , \quad \Delta^2 V = 0 ,$$

abbiamo:

$$\int \left(R^{n+2} P_n \frac{dV}{dr} - n V P_n R^{n+1} \right) dw = 0 ,$$

ossia:

$$\int P_n \frac{dV}{dr} dw = \frac{n}{R} \int V P_n \, dw ;$$

onde:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \sum_{0}^{\infty} (2n+1) \frac{r'^n}{R^n} \int V P_n \, dw . \tag{5}$$

Se prendiamo:

$$V = r^n Y_n ,$$

essendo Y_n una funzione sferica, sarà:

$$\Delta^2 r^n Y_n = 0 ,$$

e quindi sostituendo nella (5) si deducono le due relazioni note:

$$(6) \qquad \int Y_m P_n d w = 0 ,$$

quando m non è $= n$, e:

$$(7) \qquad \int Y_n P_n d w = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n .$$

Dati i valori di V sopra la sfera S, abbiamo determinata la continuazione della funzione nello spazio interno T, in modo che sodisfaccia all'equazione (1) e si mantenga sempre finita e continua insieme colle sue derivate prime. Dunque sopra la superficie della sfera saranno determinate anche le derivate $\frac{dV}{dr}$, prese procedendo verso l'interno, e quindi per il lemma II. la funzione non potrà continuarsi altro che in un solo modo anche all'esterno, in guisa che non si abbiano discontinuità in essa e nelle sue derivate prime attraversando la superficie. Ond'è che, se prendiamo un'altra sfera S' concentrica colla prima, e di raggio $R' > R$, la funzione V, se si vuole che si conservi finita e continua insieme colle sue derivate prime nello spazio compreso tra le due sfere e vi sodisfaccia all'equazione (1), avrà valori determinati sopra la sfera di raggio R'; il quale non si può prendere infinitamente grande, perchè in qualche punto dello spazio esterno ad S, la funzione V o le sue derivate prime debbono, come è noto, cessare di essere continue.

Pertanto nello spazio interno ad S', denotando con ω i valori di V sopra la sfera S', avremo:

$$V = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \left(\frac{r'}{R'} \right)^n \int \omega P_n d w = \sum_0^\infty \frac{r'^n}{R'^n} Y_n .$$

Sopra la superficie S che è tutta nello spazio racchiuso da S', e in cui $r' = R < R'$, avremo dunque in serie convergente:

$$V = \sum_0^\infty Y_n .$$

Moltiplicando per $P_n\,dw$ i due membri di questa equazione, integrando per tutta la sfera ed osservando l'equazioni (6) e (7), abbiamo sopra la sfera:

$$V' = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2n+1)\int V P_n\,dw\,, \tag{8}$$

che è la serie nota di cui volevamo dimostrare la convergenza.

In questa dimostrazione è supposto che la funzione V sia sopra la sfera S finita e continua in tutti i punti. Se la funzione V fosse sempre finita, ma discontinua lungo linee separate da intervalli finiti, bisognerebbe, nello applicare il teorema di Green, escludere spazi tubulari di diametro infinitesimo che avessero per assi queste linee; quindi si dovrebbero aggiungere nella formola (5) gl'integrali relativi alle parti di queste superficie che rimangono dalla parte interna della sfera, e alla formula (8) gl'integrali relativi a tutte intere queste superficie, i quali sono tutti eguali a zero, perchè V ha sopra queste superficie valori finiti (*). Dunque la serie (8) sarà convergente anche in questo caso e darà i valori della funzione per tutta la sfera, fuorchè nelle linee di discontinuità. Nei punti di queste linee darà i valori medi tra quelli verso i quali converge la funzione data, dalle due parti della linea.

In fatti sia $d\sigma$ un elemento della linea lungo la quale è la discontinuità della data funzione; sia p l'arco di geodetica normale a $d\sigma$ da una parte e p' dall'altra. Si prendano sopra p e p' due lunghezze eguali ad η. Sia α il limite verso cui converge il valore della funzione data V, quando ci avviciniamo a $d\sigma$ lungo p, ed α' quello verso cui converge quando ci avviciniamo a $d\sigma$ lungo p'. Sopra p sarà $V=\alpha+\varepsilon$, e sopra p' analogamente $V=\alpha'+\varepsilon'$, dove ε ed ε' sono due quantità che si possono rendere piccole quanto si vuole, diminuendo sufficientemente la lunghezza η. Ora consideriamo il rettangolo che ha per altezza $d\sigma$ e per base 2η, e determiniamo l'integrale di un termine della formula (8), prendendo invece dei valori dati dalla funzione V, i valori di una funzione continua che prenda i medesimi valori di quella all'estremità p e p'. Siano β e β' questi valori che differiranno da α e da α', tanto poco quanto si vuole, e prendiamo:

$$v = \beta + \frac{x(\beta'-\beta)}{2\eta}\,,$$

(*) Vedi Christoffel, *Zur Theorie der einwerthigen Potentiale* (G. Crelle Borchardt, t. 64).

contando le x sopra le geodetiche a partire dalla estremità di p. Avremo:

$$d\sigma\int_0^{2\eta} P_n v\,dx = \eta\,P_n\,d\sigma(\beta'+\beta)\,.$$

Calcoliamo ora lo stesso integrale coi valori dati dalla funzione V. Trascurando le quantità di secondo ordine avremo, sopra p:

$$V=\beta+\frac{x(\alpha-\beta)}{\eta},$$

e sopra p':

$$V'=\beta'+(x-2\eta)\frac{(\beta'-\alpha')}{\eta}:$$

onde:

$$d\sigma\int_0^{2\eta} VP_n\,dx = d\sigma\int_0^{\eta} VP_n\,dx + d\sigma\int_{\eta}^{2\eta} V'P_n\,dx = \eta\,d\sigma P_n\left(\frac{\beta'+\alpha'}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = \eta\,d\sigma P_n(\beta'+\beta).$$

Dunque, se la funzione è discontinua lungo linee separate da intervalli finiti, la serie (8) rappresenta una funzione che ha per tutto i medesimi valori della funzione data, fuori che nei punti di discontinuità dove ha i valori medi tra quelli che vi prende la data funzione.

Pisa, 12 Marzo 1867.

Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie (*).

(*del prof.* E. B. CHRISTOFFEL, *in Zurigo.*)

Il presente lavoro si occupa del problema delle temperature stazionarie sopra superficie piane, coll'intento di esporre i punti di vista generali che devono mettersi a fondamento nella trattazione di questa quistione.

Ho giudicato conveniente di ritenere per la presente ricerca le condizioni essenziali del problema nella stessa semplicità che è propria della quistione fisica. Se si pone il problema nella sua forma più generale, allora il suo interesse invade un nuovo campo, onde per questo caso è giustificata una speciale ricerca che riservo ad un'altra occasione.

L'unico cangiamento che mi sono permesso per questa volta, concerne l'equazione differenziale del problema, che ho completata col mezzo di un termine indipendente, in guisa che l'espressione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ non vien posta eguale a zero, ma ad una funzione arbitraria ϕ di x, y. Fatta astrazione da ragioni più riposte, questa aggiunta ha l'evidente vantaggio che vengono d'ora in avanti esclusi diversi sussidi non adatti a ricerche generali, per es. trasformazioni e soluzioni particolari.

Il principale interesse che si annoda a questo problema, dipende dalla sua conosciuta relazione colle proprietà generali di una funzione di una variabile complessa $x+iy$. Le ricerche fatte finora, per quanto qui potranno occorrere, non mirano però tanto ad approfondire e spiegare completamente

(*) Traduzione del Dott. CARLO FORMENTI, in Pavia.

questo legame, quanto piuttosto a rendere utile questo legame per gli scopi dell'integrazione.

Se si introducono nell'equazione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$, in luogo delle coordinate ortogonali x, y, le parti reali θ, ω di una funzione di $x+iy$ come variabili indipendenti, in virtù di quella relazione non vien cangiata la forma dell'equazione differenziale. Da ciò si ha subito il principio adoperato dal sig. Lamé nelle sue pregevoli *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, che la soluzione del problema per la superficie circolare $x^2+y^2<c^2$ basta per derivarne, sotto certe supposizioni fatte intorno alla funzione $\theta+i\omega$ ed alla grandezza di c, la soluzione per la superficie $\theta^2+\omega^2<c^2$.

La stessa trasformazione serve anche di fondamento alla bella memoria del sig. Neumann (Giornale di Borchardt, t. 59, pag. 348). La quale, oltre ad una diligente ricerca sulle curve (dapprima trattate da Cauchy) $\theta^2+\omega^2=c^2$, che il signor Neumann chiama *linee di livello*, presenta eziandio un importante progresso nella trattazione dell'attuale problema, facendo dipendere, per mezzo di considerazioni che sono analoghe alla teoria di Green sul potenziale, la determinazione della funzione primitivamente cercata da un'altra $\left[\eta_a^{(p)} d\omega_a \text{ in quanto al valore} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \xi}{\partial p}\, ds \text{ art. 1.}\right]$ che è indipendente dai valori arbitrari di quella nel contorno, e soltanto dipende dalla forma del contorno e dalla posizione di un punto arbitrario p. L'espressione di questa funzione in θ ed ω è data a pag. 354, e la determinazione di θ ed ω per mezzo di x ed y vien ridotta ad un problema (pag. 355) il quale, a meno di una condizione di discontinuità non messa in evidenza, ma tuttavia facile a completarsi, costituisce un caso particolare della quistione primitiva. Non vi si danno però applicazioni di questa interessante riduzione a casi determinati.

Quanto sia anche a me riuscito di trovare nuovi punti di vista ed utili sussidi per la presente questione, lo mostrerannno le ricerche che seguono.

I.

Sia distesa sul piano xy una superficie F ad un solo strato e semplicemente connessa *(eine einblättrige und einfach zusammenhängende Fläche)*, il cui contorno sia formato da una data curva K. Ciò supposto, si cerca una funzione U di x,y, che unitamente alle sue derivate prime sia ad un valore *(einwerthig)* e continua in F, e che sodisfaccia all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\phi(x,y),$$

mentre lungo il contorno K sia:

$$U=\psi(x,y).$$

Per determinare U in punto o di F, separiamo da F un cerchio di raggio ρ, il cui centro sia o, e formiamo, mediante una funzione ξ che colle sue prime derivate sia nella restante superficie F' ad un valore e continua, l'equazione:

$$\int \xi\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]dF'=\int \phi\,\xi\,dF'.$$

Se si indica con ds un elemento arbitrario della linea K, con dp il differenziale della normale a ds diretta verso l'esterno, e finalmente con θ l'angolo che il raggio ρ uscente da o fa colla direzione delle x crescenti; il primo membro dell'ultima equazione diventerà:

$$=\int\left(\xi\frac{\partial U}{\partial p}-U\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)ds-\int\left(\rho\xi\frac{\partial U}{\partial \rho}-U\rho\frac{\partial \xi}{\partial \rho}\right)d\theta+\int U\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right]dF'.$$

Ciò posto, assoggettiamo ξ alle seguenti condizioni:

A. Lungo la curva K sia dappertutto $\xi=0$.

B. Per ρ tendente a zero diventi $\rho\dfrac{\partial \xi}{\partial \rho}=1$.

C. In F, fuori di o, sia $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0$.

Da *B*. pel teorema VII. *e*. della mia *teorica dei potenziali ad un valore* (Giornale di Borchardt, t. 64, pag. 337) discende che anche $\dfrac{\xi}{\log.\rho}$ converge verso il limite 1, quando ρ tende a zero. Per conseguenza, insieme con ρ si annulla $\rho\xi=\rho\log.\rho.\dfrac{\xi}{\log.\rho}$, e l'ultima espressione annullandosi ρ, si trasforma in:

$$-\int\psi\frac{\partial \xi}{\partial p}ds+2\pi U_0.$$

Noi otteniamo adunque:

$$U_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int\psi\frac{\partial \xi}{\partial p}ds+\int\phi\xi dF\right],$$

quindi la determinazione di U è ridotta a quella di ξ.

II.

L'equazione $C.$ è la condizione affinchè $\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx$ sia il differenziale totale di una funzione di x, y. Indicando questa funzione con η, si ottiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

quindi

$$\omega = \xi + i\eta$$

è una funzione di $z = x + iy$, e ξ ne è la parte reale. Questa funzione, per le $A.$ e $B.$ e per le già poste condizioni, ha le seguenti proprietà:

1. Lungo la curva K, la funzione ω è imaginaria senza parte reale, $\mathrm{mod.}\, e^{\omega} = 1$.

2. Fuori di o, ξ ed η epperò anche ω sono monodrome (*einändrig*) e continue.

3. Se si considerano ξ ed η come funzioni delle coordinate polari ρ, θ, aventi origine in o, quando θ cresce per una rotazione dell'asse delle x verso l'asse delle y, è:

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \rho \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{\partial \xi}{\partial \theta}.$$

Da ciò segue subito per $\rho = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$. Se quindi il punto (x, y) gira nella direzione positiva intorno al punto o, per ciascun giro η cresce di 2π, ed ω di $2\pi i$, perchè ξ è ad un valore. Per lo stesso motivo nel piano (ρ, θ), lungo la linea $\rho = 0$, è $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$ (*); quindi per $\rho = 0$ si ha $\rho \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = 0$, $\frac{\eta}{\log.\rho} = 0$. Ne risulta che nel punto o la funzione $\omega - \log.(z - z_0)$ è monodroma, ed insieme anche continua, perchè il quoziente

(*) Per provare questa proposizione, basta mostrare che la funzione $U' = \xi - \log.\rho$, che è ad un valore in F, è in o anche continua, poichè allora essa sarà costante lungo la summenzionata linea $\rho = 0$ (asse delle θ). Se nell'art. I si assume U' in luogo di U, sarà $\varphi = 0$ all'infuori di o. Inoltre, per la rappresentazione di U' in un punto qualsivoglia m diverso da 0, non occorre che il punto o sia escluso da F, perchè per $\rho = 0$ risulta $\rho \frac{\partial U'}{\partial \rho} = 0$, $\rho U' = 0$. Conseguentemente U' è rappresentata da un integrale esteso soltanto lungo K, epperò è una funzione a un valore e continua in ogni punto di F, ed in particolare nel punto o.

$$\frac{\omega - \log.(z - z_0)}{\log.(z - z_0)} = \frac{\xi}{\log.\rho + i\theta} - 1 + i \frac{\eta}{\log.\rho + i\theta},$$

si annulla con ρ, ciò che sarebbe impossibile se la funzione $\omega - \log.(z - z_0)$, monodroma in o, ivi fosse discontinua.

Quindi e^{ω} è dappertutto in F ad un valore e continua, e fuori di o, dove diventa infinitamente piccola del primo ordine, è inoltre diversa da zero. Se si indica con w questa funzione, si ha il seguente risultato:

Sia w una funzione di z ad un valore e continua in F, tale che il suo modulo nel contorno K di questa superficie abbia il valore 1; nel punto o essa divenga infinitamente piccola del primo ordine ed in tutti gli altri punti della superficie F rimanga invece diversa da zero. Allora la parte reale di $\log. w$ sodisfà a tutte le condizioni poste per ξ, e si può porre:

$$\xi = \log. \text{mod.}\, w.$$

Se w' è una seconda funzione di z che sodisfaccia a tutte le condizioni poste, per w, $\frac{w'}{w}$ sarà in F ad un valore, nè nulla nè infinita; ed il suo modulo sarà in K eguale ad 1. Quindi ogni ramo della funzione $\log. \frac{w'}{w}$ è in F monodromo e continuo, ed in K puramente imaginario. La sua parte reale è perciò nel contorno di F eguale a zero, nell'interno nè polidroma (*mehrändrig*) nè discontinua, e quindi dappertutto in F eguale a zero. Per conseguenza $\log. \frac{w'}{w}$ è costante e puramente imaginario, $= \gamma i$. Da ciò si ricava $w' = e^{\gamma i} w$, cioè w per le antecedenti condizioni è determinata fino ad un fattore costante di modulo 1, e quindi ξ è determinata completamente.

III.

Se ora si scompone la funzione w nelle sue parti reali:

$$w = u + iv,$$

siccome lungo K è $\text{mod.}\, w = 1$ e nel punto o di F si ha $w = 0$, così ne emerge che i piani della z e della w si devono corrispondere in modo, che alla data area F esistente nel primo piano corrisponda nell'altro piano il cerchio $u^2+v^2<1$, al punto o il centro di quest'ultimo, ed al contorno K di F il contorno del cerchio. La determinazione di w coincide quindi colla soluzione della questione: rappresentare l'area data F sul piano della w, trasformandola in un cerchio di raggio 1, in modo che nel centro di quest'ultimo riesca rappresentato un punto o scelto ad arbitrio in F.

Dalla conclusione del precedente articolo risulta che questo problema è pienamente determinato, in quanto che due rappresentazioni circolari di F, l'una delle quali si ottiene dall'altra facendola rotare di un angolo γ, non possono essere considerate come essenzialmente diverse.

Questo risultato ed in pari tempi il dimostrare che il presente problema ammette una soluzione per ciascuna forma di F, sono compresi come caso particolare nella proposizione generale sopra le superficie semplicemente connesse, che Riemann ha sviluppata nella sua dissertazione inaugurale, p. 30 (*).

IV.

Per le ricerche ulteriori, conviene sostituire al problema dell'articolo antecedente un altro che dipenda da condizioni più facili ad essere sodisfatte.

Poichè mod.$(z-z_0)$ non è altro che la distanza rettilinea dei due punti z e z_0, così il luogo di tutti i punti z, i quali sodisfanno alla condizione mod.$(z-z_0)=$mod.$(z-z_1)$, è la retta perpendicolare nel punto di mezzo a quella che congiunge i punti z_0 e z_1. Quindi se si assume per z_1 l'espressione $z'_0=x_0-iy_0$ coniugata di $z_0=x_0+iy_0$, ne segue per y_0 positivo che la funzione:

$$\frac{z-z_0}{z-z'_0}$$

nella metà $y>0$ del piano, diventa infinitamente piccola nel solo punto o e propriamente del primo ordine; nel resto rimane continua e nel contorno di questa superficie raggiunge il modulo 1. Per questa superficie è quindi conosciuta anche ξ.

Se ora si è in grado di rappresentare il piano della $Z=X+iY$ sul piano della z, in modo che al mezzo piano $Y>0$, che in seguito si indicherà con E, ed al suo contorno (chiuso all'infinito) $Y=+0$ corrisponda nel piano della z un'area F col proprio contorno dato K, ed a ciascun punto dell'una super-

(*) *Annali di Matematica*, t. 2 (I.ª serie).

ficie corrisponda un punto unico dell'altra; e se in questa supposizione Z_0 è il valore di Z nel punto o di F, e Z'_0 il suo conjugato, allora ciascun punto del piano z corrispondente a Z'_0 giace fuori di F, perchè Z'_0 è situato fuori di E. Inoltre Z è soltanto nel punto o di F eguale a Z_0, perchè a ciascun punto Z_0 di E corrisponde un punto unico o di F. Assumendo quindi:

$$(a) \qquad w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0},$$

w diventerà nel punto o di F infinitamente piccola del primo ordine e nel resto di F si conserverà ad un valore, continua e diversa da zero, ed acquisterà nel contorno K di F, il quale corrisponde al contorno di E, il modulo 1. Quindi per la superficie F è:

$$(b) \qquad \xi = \log.\,\mathrm{mod.}\, \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}\,.$$

Essendo ds, dX gli elementi corrispondenti dei contorni di F ed E, così pure dp, dY i corrispondenti elementi delle loro normali, si avrà:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\partial \xi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial p},$$

perchè a cagione della somiglianza delle parti infinitamente piccole, alla direzione di dp corrisponde la direzione delle Y decrescenti. Qui $\frac{\partial Y}{\partial p}$, come rapporto di elementi lineari corrrispondenti, è eguale a mod. $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial s}$, dunque $\frac{\partial Y}{\partial p} ds = dX$. Allora $\frac{\partial \xi}{\partial Y}$ è la parte reale di $\frac{\partial \log. w}{\partial Y}$ per $Y = 0$. Quindi per l'elemento ds di K corrispondente al dX, si ottiene:

$$(c) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} ds = \frac{2 Y_0\, dX}{(X - X_0)^2 + Y^2},$$

ed ecco allora stabilite tutte le espressioni richieste nell'art. 1, tosto che la superficie E sia rappresentata semplicemente sopra F.

V.

Poligoni ad un solo strato.

Sia F un poligono ad un solo strato, composto di un sol pezzo cogli n vertici $z_1, z_2 \cdots, z_n$, che si succedono in un giro positivo intorno ad F nell'ordine dei loro indici. L'angolo interno nel vertice z_s sia indicato con λ_s, in modo che sarà:

(1) $$\Sigma(\pi-\lambda_s)=2\pi.$$

Noi ci proponiamo la questione di rappresentare semplicemente la superficie E su questo poligono.

Siano $a_1, a_2, .., a_n$ i punti dell'asse delle X corrispondenti ai vertici $z_1, z_2, .., z_n$ del poligono. Questi punti si seguiranno l'un l'altro nella direzione delle X crescenti, nello stesso ordine dei loro indici, e quindi fra due di essi il passaggio si dovrà fare pel punto infinitamente lontano dell'asse. Noi supporremo che questi sieno i punti a_n, a_1, onde fra le quantità reali a avrà luogo la successione:

$$a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n .$$

Il punto giacente sul contorno del poligono fra z_n e z_1, che corrisponde al al punto infinitamente lontano dell'asse delle X, verrà indicato con z'.

Ciò posto, si tratta di stabilire una tale dipendenza fra le quantità z e Z che: 1) ad un giro positivo intorno all'una delle due superficie F, E corrisponda un giro positivo intorno all'altra; 2) che i punti z, Z durante il giro passino contemporaneamente per i punti z_s, a_s; 3) che z percorra una linea retta ogni qual volta Z descrive uno dei segmenti $a_{s-1}a_s$; finalmente 4) che nella rappresentazione di E su F, nell'interno delle due superficie esista perfetta eguaglianza di angoli, cioè ne sia esclusa qualunque diramazione *(Verzweigung)*.

Mentre z e Z percorrono i corrispondenti segmenti rettilinei $z_{s-1}z_s$, $a_{s-1}a_s$ in direzione positiva, rimane inalterata la parte imaginaria di $\log.\frac{\partial z}{\partial Z}$ dipendente soltanto da queste direzioni. Nello stesso momento però in cui z piega intorno al vertice z_s, e quindi Z nel suo giro positivo intorno ad E oltrepassa il punto a_s, dz ruota dell'angolo $\pi-\lambda_s$ in direzione positiva, mentre dZ conserva la sua direzione. Quindi in un mezzo giro negativo intorno ad a_s, $\log.\frac{\partial z}{\partial Z}$ cresce di $(\pi-\lambda_s)i$, cioè in un intero giro positivo cresce di

$\frac{\lambda_s-\pi}{\pi}\cdot 2\pi i$; epperò $\left(Z-a_s\right)^{\frac{\pi-\lambda_s}{\pi}}\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}$ è in a_s monodroma, nè nulla nè infinita. Di qui segue che il prodotto

$$\left(Z-a_1\right)^{\frac{\pi-\lambda_1}{\pi}}\cdot\left(Z-a_2\right)^{\frac{\pi-\lambda_2}{\pi}}\cdots\left(Z-a_n\right)^{\frac{\pi-\lambda_n}{\pi}}\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}=\chi$$

lungo l'asse delle X non ha punti di diramazione (*Verzweigungspuncte*), nè di valor zero, nè di discontinuità, perchè altrimenti K avrebbe od altri vertici o vertici d'altra natura. Inoltre $\frac{\partial z}{\partial Z}$, (e quindi per la relazione (1) anche χ) dev'essere in tutta la superficie E monodroma, continua e diversa da zero; perchè altrimenti la sua rappresentazione od avrebbe diramazioni e quindi non sarebbe ad un solo strato, oppure si estenderebbe all'infinito.

La funzione χ adunque non è mai in E polidroma o discontinua, e deve inoltre essere tale che in ciascun segmento $a_{s-1}\, a_s$ dell'asse delle X il rapporto $\frac{dz}{\text{mod.}dz}$ sia costante, perchè questi segmenti devono essere rappresentati linearmente. Siccome per $Y=0$ è $dZ=dX$, per la realtà della quantità a, il precedente prodotto sta in rapporto costante col suo modulo; perciò

$$\frac{\chi}{\text{mod.}\chi}$$

deve essere costante in ciascun segmento $a_{s-1}\, a_s$, quindi per la sua continuità avrà lo stesso valore costante in tutto l'asse delle X. Indicando questo valore con c, si ha per $Y=0$:

$$\log.\chi=\log.\text{mod.}\chi+\log.c;$$

adunque nell'asse delle X la parte imaginaria di $\log.\chi$ è costante; ed essendo χ in E monodroma, continua e diversa da zero, ciò non è altrimenti possibile se non quando $\log.\chi$, e quindi anche χ, ha dappertutto lo stesso valor costante. Designando con A questo valore, si ha:

$$(1) \qquad dz=A\left(Z-a_1\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}\cdot\left(Z-a_2\right)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1}\cdots\left(Z-a_n\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1}\cdot dZ,$$

dove ora il rapporto della costante A al suo modulo deve essere scelto in modo, che $\frac{dz}{\text{mod.}\,dz}$ ottenga nel punto z' il valore che corrisponde alla data direzione da z_n a z_1.

Se α è l'angolo di questa direzione con quella delle x crescenti, e c una costante positiva, si otterrà:

$$(2) \qquad dz=ce^{\alpha i}\left(a_1-Z\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}\cdot\left(a_2-Z\right)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1}\cdots\left(a_n-Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1}\cdot dZ,$$

supposto che la variabile venga limitata alla superficie E, e ciascun fattore

$$\left(a_s - Z\right)^{\frac{\lambda_s}{\pi} - 1},$$

venga definito colla condizione di rimanere positivo nell'asse delle X, finchè sia $X < a_s$. Ponendo con queste limitazioni:

$$ce^{\alpha i}\left(a_1 - Z\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi} - 1} \cdot \left(a_2 - Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} \cdots \left(a_n - Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} = \mathfrak{Z}, \tag{3}$$

si ottiene mediante l'equazione:

$$z - z' = \int_{-\infty}^{Z} \mathfrak{Z}\, dZ, \tag{4}$$

la richiesta rappresentazione di E sopra F.

Indicando il lato del poligono fra i vertici z_s, z_{s+1} con L_s^{s+1}, si ha:

$$L_1^2 = \int_{a_1}^{a_2} \text{mod.}\mathfrak{Z}\, dX, \quad L_2^3 = \int_{a_2}^{a_3} \text{mod.}\mathfrak{Z}\, dX, \ldots, \; L_{n-1}^n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \text{mod.}\mathfrak{Z}\, dX \tag{5}$$

$$L_n^1 = \int_{a_n}^{\infty} \text{mod.}\mathfrak{Z}\, dX + \int_{-\infty}^{a_1} \text{mod.}\mathfrak{Z}\, dX,$$

se dappertutto in mod. $\mathfrak{Z}$ vien posto $Y = 0$.

Siccome $\mathfrak{Z}$ in E non presenta nè diramazioni nè discontinuità, così $\int \mathfrak{Z}\, dZ$ preso lungo l'intero contorno di E è nullo, cioè avuto riguardo alla (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{Z}\, dX = 0,$$

ove si integri lungo la linea $Y = +0$. Di qui si hanno due equazioni fra i lati L e gli angoli λ, che non sono altro che le condizioni conosciute perchè il poligono K sia chiuso.

VI.

Per gli antecedenti risultati è risoluto il problema dell'art. IV per ciascun poligono F, di rappresentare cioè semplicemente E su F in modo che a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra.

Siccome per ogni posizione del punto Z in E è dato il corrispondente punto z di F, così si può in particolare per l'espressione:

$$w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0},$$

dell'art. IV, sempre assegnare il punto z_0 di F corrispondente a Z_0, per il quale l'ultima formula dell'art. I offra il valore cercato di U. In questo senso adunque (e la più parte delle soluzioni di tali questioni non vanno più oltre) la questione di determinare U si può considerare come risoluta per tutti i poligoni F.

Affatto diversamente si presenta la questione quando non si voglia contentarsi di ciò, ma invece si domandi che la quantità Z_0, che occorre per la formazione di w, venga determinata per ciascuna qualsivoglia posizione del punto o di F.

Infatti questa domanda non altro significa se non che, mediante la inversione dell'equazione (4), Z sia presentata come funzione di z.

Un esame più diligente mostra che sono solamente quattro i poligoni F per i quali questa equazione può essere posta senza ulteriori modificazioni, vale a dire il rettangolo, il triangolo equilatero, e due triangoli rettangoli, l'isoscele cioè e quello i cui angoli all'ipotenusa sono di 30° e 60°.

In tutti gli altri casi o deve essere limitata la variabilità di z e Z nelle superficie F ed E, onde non si ottiene alcuna semplificazione, mentre va perduta l'importanza analitica del problema; oppure, ove si richieda la inversione con variabili illimitate, il problema della rappresentazione dev'essere posto altrimenti.

Ed invero, se in F i rapporti angolari sono tutti razionali, e quindi $\mathfrak{Z}$ è una funzione algebrica di Z, si può facilmente per questa funzione determinare la superficie T rappresentante il suo modo di diramazione (*Verzweigunsart*), e l'ordine $2p+1$ della sua connessione (*Zusammenhang*), ed allora per conseguire l'inversione dell'equazione $dz = \mathfrak{Z} dZ$, devonsi aggiungere a questa, come è noto, ancora $p-1$ altre equazioni $dz_\sigma = \mathfrak{Z}_\sigma dZ_\sigma$, dove tutte le $\mathfrak{Z}_\sigma$ sono funzioni algebriche diramate come T, e tutte le z_σ sono integrali di prima specie non aventi tra loro relazioni lineari, alla quale ultima condizione in virtù dell'equazione (1) dell'art. precedente sodisfà anche z.

In termini più semplici, ciò significa doversi in questo caso rappresentare simultaneamente E su p superficie, una delle quali è la stessa F, e le altre dipendono da F. Il caso di $p=1$ mostra già che da questo punto di vista il problema primitivo si decompone in infiniti gruppi di casi particolari.

Del resto, da queste considerazioni risulta che i risultati dell'articolo precedente insegnano in ciascun caso a conoscere la classe di funzioni alla quale appartengono w e ξ, anche quando l'espressione di U sia stata trovata per altra via.

VII.

Ormai non rimane che a render possibile, collo svolgimento di un esempio trattato anche con altri metodi, il confronto fra questi ed il processo qui esposto. Noi scegliamo per brevità il più semplice di tutti, cioè il caso che la superficie F sia un rettangolo. Assumendo nell'art. I, la funzione arbitraria $\phi=0$, si può assai facilmente determinare per questa superficie la U col metodo dato da Fourier (cfr. Lamé *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes,* xiv), ma il principale risultato della ricerca, cioè la determinazione della specie di funzioni dalla quale dipende la soluzione, non si potrebbe riconoscere per questa via che a stento, sebbene la posteriore verificazione del medesimo non offra alcuna difficoltà.

Siano a e b i lati del rettangolo F, posti rispettivamente sugli assi delle x, y positive. Noi possiamo allora porre:

$$z_1=a, \quad z_2=a+bi, \quad z_3=bi, \quad z_4=0,$$

ed otteniamo:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha=0,$$

quindi:

$$\mathfrak{Z}=C:\sqrt{(a_1-Z)(a_2-Z)(a_3-Z)(a_4-Z)},$$

dove la radice è definita come dianzi.

La superficie T è a due strati *(zweiblättrig),* coi punti di diramazione $a_1<a_2<a_3<a_4$ situati sull'asse delle X. Assumendo, ciò che è lecito, pei

limiti ai quali si estendono i due strati di T gli orli delle rette congiungenti a_1 con a_2, ed a_3 con a_4, fra questi limiti gli strati saranno connessi, ed E sarà la metà positiva (corrispondente ad $Y > 0$) del primo strato.

Per questa connessione di T e per le condizioni imposte all'espressione $\mathfrak{Z}$, questa ottiene 1) valori contrari in due punti di T situati l'un sopra l'altro, ed invece 2) valori coniugati in due punti coniugati dello stesso strato.

Facendo inoltre nella solita maniera, a partire da un punto in E, un taglio trasversale *(Querschnitt)* intorno ad $a_1\,a_2$, e l'altro intorno ad $a_2\,a_3$, ne viene che Z per l'equazione $dz = \mathfrak{Z}\,dZ$ è determinata come una funzione di z ad un solo valore, avente i due periodi $2a$, $2bi$, i cui valori emergono anche da ciò che segue.

Trasportando in a_2 il punto d'incontro dei due tagli trasversali, e riducendo quest'ultimi a linee rette, la connessione del primo strato col secondo tra a_1 e a_2, ed in ciascuno strato la connessione della metà positiva colla metà negativa fra a_2 ed a_3, sarà tolta. La rappresentazione della superficie T' così modificata, sul piano z, diviene un rettangolo Π, i cui lati $2a$, $2b$ sono paralelli agli assi delle x, y, e le cui diagonali s'incontrano nell'origine $z_4 = 0$, e del quale adunque F è quella quarta parte che cade nel quadrante positivo.

Per dimostrarlo, si tiri anzitutto in ciascuno strato da a_4 al corrispondente punto Z una linea, in modo che le due linee così ottenute si coprano; allora la somma degli integrali $\int_{a_4}^{Z} \mathfrak{Z}\,dZ$, presi lungo queste due linee, sarà nulla, quindi a due punti di T' giacenti l'uno sull'altro corrrisponderanno due valori contrari di z, cioè due punti del piano z la cui congiungente passa per l'origine $z_4 = 0$ ed è ivi divisa per metà.

Tirando inoltre da a_4 sullo stesso strato di T' due linee simmetriche rispetto all'asse delle X, cioè congiungenti soltanto punti coniugati e terminate in siffatti punti, si otterranno mediante l'integrazione valori coniugati di z anche nei punti estremi. Due punti coniugati dello stesso strato di T' vengono dunque rappresentati nel piano z in due punti coniugati, cioè situati simmetricamente rispetto all'asse delle x.

Da ciò risulta subito che Π è la rappresentazione di T'. Se i rettangoli nei quali vien diviso Π dagli assi coordinati nell'ordine con cui si succedono in un giro positivo intorno all'origine, si denotano con F, F_1, F_2, F_3, possiamo concludere, siccome per le condizioni del problema E è di già rappresentato su F, che la parte positiva del secondo strato coperta da E sarà rappresentata su F_2, la metà negativa del primo strato su F_3, e quella del secondo su F_1. Contemporaneamente è dimostrato che $2a$, $2bi$ sono i moduli di periodicità di z.

Questi risultati sono sufficienti per esprimere la funzione:

$$w = e^{\gamma i} \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}$$

mediante z. In fatti se z_0 è quel punto di F che corrisponde al punto Z_0 di E, allora $Z - Z_0$ diventa in Π nei due punti $z_0, -z_0$ infinitamente piccola del primo ordine, ma fuori di questi diversa da zero. Se z'_0 è conjugato a z_0, $Z - Z'_0$ non è mai in Π eguale a zero, fuorchè nei punti $z'_0, -z'_0$, nei quali è infinitamente piccola del primo ordine. Quindi w è una funzione di z ad un valore, coi periodi $2a$, $2bi$, la quale nel rettangolo Π dei periodi è infinitamente piccola solamente per $z = (z_0, -z_0)$, infinitamente grande solamente per $z = (z'_0, -z'_0)$, e sempre del primo ordine; e per $Z = \infty$ si riduce a $e^{\gamma i}$. Di qui segue che mediante la funzione di Jacobi:

$$\theta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} x - 2q^{\frac{9}{4}} \operatorname{sen} 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \operatorname{sen} 5x \cdots$$

la w si può esprimere nella forma:

$$w = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z'_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z + z'_0)}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}},$$

dove C è una costante.

Se z' è il punto fra z_4 e z_1, che corrisponde al punto di E infinitamente lontano, si ha:

$$e^{\gamma i} = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z' + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z'_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z' + z'_0)}{2bi}\right)}$$

Siccome z' è reale, nel fattore di C il denominatore è conjugato al numeratore, onde il modulo di questo fattore sarà $= 1$. Quindi, se la quantità

$e^{\gamma i}$, soggetta soltanto a quest'ultima condizione, si assume eguale al fattore di C, riescirà $C=1$, epperò:

$$w = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0)}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z'_0)}{2bi}\right)\cdot\theta_1\left(\frac{\pi(z+z'_0)}{2bi}\right)},\quad q=e^{-\frac{\pi a}{b}}.$$

Moltiplicando quest'espressione di w, coll'espressione che ne risulta per il valore coniugato w', si otterrà il quadrato del mod. w, e quindi per la determinazione di U nel punto z_0 di F:

$$e^{2\xi}=ww',\ \xi=\tfrac{1}{2}\log. ww'.$$

Decomponendo w in $u+iv$ si risolve inoltre il problema di rappresentare il rettangolo F sul cerchio $u^2+v^2<1$, in modo che il centro del cerchio corrisponda al punto z_0 di F, da scegliersi arbitrariamente.

I tre altri problemi accennati nell'art. VI, per i quali soltanto è ancora possibile la rappresentazione di w per mezzo di z, si possono del pari risolvere facilmente coi mezzi qui adoperati.

Zurigo, 25 marzo 1867.

Sul moto di un pendolo, quando la retta passante pel punto di sospensione e pel centro di gravità è, per questo punto, il solo asse principale d'inerzia che sia determinato di posizione.

(*del prof.* Luigi Schläfli, *a Berna*).

---

§ 1. *Dichiarazioni preliminari sulla notazione, e richiamo di alcuni teoremi desunti dalla teoria delle funzioni ellittiche.*

Sieno k, l due costanti positive legate dalla $k^2+l^2=1$; f, h, j tre variabili aventi rispettivamente i valori iniziali 0, 1, 1 e soddisfacenti alle equazioni $h^2=1-f^2$, $j^2=1-k^2f^2$; una quarta variabile x venga definita pel valore iniziale 0 e per l'equazione differenziale $df=hj\,dx$, donde deduconsi anche le $dh=-fj\,dx$, $dj=-k^2fh\,dx$. Quando poi x si consideri come argomento, e finchè questo resti finito, f, h, j saranno funzioni monodrome di esso, e propriamente le stesse che Jacobi indicò con senam, cosam, Δam. Ma invece di questi simboli, per facilitare la scrittura, mi gioverò di quelle lettere semplici come di segni di funzioni. Inoltre sieno $2K$, $2iL$ i due periodi, così che si abbia:

$$\begin{aligned} f\,(2mK+2niL+x)&=(-1)^{m}\ fx\,,\\ h(2mK+2niL+x)&=(-1)^{m+n}hx\,,\\ j\,(2mK+2niL+x)&=(-1)^{n}\ jx\,,\end{aligned}$$

ove m, n dinotano due numeri interi qualunque. Ponendo

$$E=\int_0^K j^2x\cdot dx\,,$$

definisco la funzione *Zeta* di Jacobi pel valore iniziale 0 e la equazione differenziale:

$$Z'x = \mathrm{j}^2x - \frac{E}{K};$$

e sarà:
$$\mathrm{Z}(-x) = -\mathrm{Z}x, \qquad \mathrm{Z}(0) = \mathrm{Z}(K) = 0,$$

$$\mathrm{Z}(2mK + 2niL + x) = -n\frac{i\pi}{K} + \mathrm{Z}x,$$

$$\mathrm{Z}(K+x) = -k^2\frac{\mathrm{f}x\mathrm{h}x}{\mathrm{j}x} + \mathrm{Z}x, \quad \mathrm{Z}(iL+x) = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{\mathrm{h}x\mathrm{j}x}{\mathrm{f}x} + \mathrm{Z}x.$$

La funzione $\mathrm{G}x$ sia poi definita pel valore iniziale 1 e la equazione differenziale $d\log\mathrm{G}x = \mathrm{Z}x \cdot dx$; e finalmente le tre altre funzioni ellittiche intere vengano determinate da:

$$\gamma x = \mathrm{f}x \cdot \mathrm{G}x, \quad gx = \mathrm{h}x \cdot \mathrm{G}x, \quad \mathfrak{G}x = \mathrm{j}x \cdot \mathrm{G}x \text{ (*)}.$$

Per maggior brevità pongo anche $d\log\gamma x = \mathrm{P}x \cdot dx$, così che:

$$\mathrm{P}x = \frac{\mathrm{h}x\mathrm{j}x}{\mathrm{f}x} + \mathrm{Z}x, \qquad \mathrm{P}'x = -\frac{\mathrm{h}^2x}{\mathrm{f}^2x} - \frac{E}{K}.$$

Oltre le formole di addizione più spesso usate, quali sono le:

$$\mathrm{h}(x+y) = \mathrm{h}x\mathrm{h}y - \mathrm{f}x\mathrm{f}y\mathrm{j}(x+y), \qquad \mathrm{f}(x+y) = \frac{\mathrm{f}x\mathrm{h}y\mathrm{j}y + \mathrm{h}x\mathrm{j}x\mathrm{f}y}{1 - k^2\mathrm{f}^2x\mathrm{f}^2y},$$

avrò bisogno anche delle seguenti: se

$$\left.\begin{aligned} & N = \mathrm{f}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{j}\beta - \mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{f}\beta, \\ \text{allora}\quad & N\,\mathrm{f}(\alpha+\beta) = \mathrm{f}^2\alpha - \mathrm{f}^2\beta, \\ & N\mathrm{h}(\alpha+\beta) = \mathrm{f}\alpha\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\beta - \mathrm{j}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{h}\beta, \\ & N\,\mathrm{j}(\alpha+\beta) = \mathrm{f}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{h}\beta - \mathrm{h}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{j}\beta. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Dal teorema di addizione

$$\mathrm{Z}x + \mathrm{Z}y - \mathrm{Z}(x+y) = k^2\mathrm{f}x\mathrm{f}y\mathrm{f}(x+y) \qquad (b)$$

per gli integrali ellittici di seconda specie, si deriva

$$\mathrm{G}(x+y)\mathrm{G}(x-y) = \mathrm{G}^2x\mathrm{G}^2y - k^2\gamma^2x\gamma^2y, \qquad (c)$$

$$\gamma(x+y)\gamma(x-y) = \gamma^2x\mathrm{G}^2y - \mathrm{G}^2x\gamma^2y; \qquad (d)$$

(*) Ho preso i quattro segni γ, g, G, $\mathfrak{G}$ dalla memoria *On the inverse elliptic functions* di Cayley (Cambridge Math. J. IV, pag. 261). Per l'applicazione analitica vi è il vantaggio apprezzabile, che le $\gamma'x$, gx, $\mathrm{G}x$, $\mathfrak{G}x$ cominciano tutte e quattro col valore 1.

e quindi, ove si supponga $x-y$ costante,

$$\mathrm{P}x+\mathrm{P}y-\mathrm{P}(x+y)=-\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\gamma(x+y)\gamma(x-y)}{\gamma^2x\gamma^2y}=-\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\left(\frac{1}{\mathrm{f}^2y}-\frac{1}{\mathrm{f}^2x}\right),$$

donde:

$$\mathrm{P}x+\mathrm{P}y-\mathrm{P}(x+y)=\frac{\mathrm{f}^2x\mathrm{f}^2y}{\mathrm{f}^2x-\mathrm{f}^2y}\left(\frac{\mathrm{h}y\mathrm{j}y}{\mathrm{f}^3y}-\frac{\mathrm{h}x\mathrm{j}x}{\mathrm{f}^3x}\right); \qquad (e)$$

mentre da noti teoremi di addizione per le funzioni fratte e dalla (b) si ricava:

$$\mathrm{P}x+\mathrm{P}y-\mathrm{P}(x+y)=\frac{\mathrm{f}(x+y)}{\mathrm{f}x\mathrm{f}y}-\frac{\mathrm{h}(x+y)\mathrm{j}(x+y)}{\mathrm{f}(x+y)}=\frac{1-\mathrm{h}x\mathrm{h}y\mathrm{h}(x+y)}{\mathrm{f}x\mathrm{f}y\mathrm{f}(x+y)}. \qquad (f)$$

Simultaneamente colla (c) si suole derivare dal teorema (b) l'espressione:

$$\frac{\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\alpha}{\mathrm{f}\alpha}\int_0\frac{dx}{1-k^2\mathrm{f}^2\alpha\mathrm{f}^2x}=\mathrm{P}\alpha\cdot x+\tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{G}(\alpha-x)}{\mathrm{G}(\alpha+x)} \qquad (g)$$

per l'integrale ellittico di terza specie, purchè il logaritmo nel secondo membro esca da $x=0$ col valore iniziale 0 e sia condotto per la stessa via che l'integrale nel primo membro, senza passare per alcun valore di x congruo con $iL\pm\alpha$.

Leggendo lo schema:

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} \mathrm{G}^2\delta & k^2\gamma^2\delta & \mathrm{G}^2\zeta & -\gamma^2\zeta \\ \gamma^2\varepsilon & \mathrm{G}^2\varepsilon & -k^2\gamma^2\eta & \mathrm{G}^2\eta \end{array}\right\|$$

una volta come prodotto di due determinanti, l'altra volta come determinante unico i cui elementi siano le somme di prodotti binari fornite dalla combinazione di linee delle due metà dello schema, in virtù delle (c) e (d), se ne deduce la:

$$\mathrm{G}(\delta+\varepsilon)\mathrm{G}(\delta-\varepsilon)\mathrm{G}(\zeta+\eta)\mathrm{G}(\zeta-\eta)=\begin{vmatrix}\mathrm{G}(\delta+\zeta)\mathrm{G}(\delta-\zeta) & k^2\gamma(\delta+\eta)\gamma(\delta-\eta) \\ \gamma(\varepsilon+\zeta)\gamma(\varepsilon-\zeta) & \mathrm{G}(\varepsilon+\eta)\mathrm{G}(\varepsilon-\eta)\end{vmatrix}.$$

Per $\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\zeta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-x$, $\eta=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, ne segue il teorema particolare:

$$\mathrm{G}(\alpha+\beta)\mathrm{G}(\alpha-x)\mathrm{G}(\beta-x)=\mathrm{G}\alpha\mathrm{G}\beta\mathrm{G}x\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)-k^2\gamma\alpha\gamma\beta\gamma x\gamma(\alpha+\beta-x),$$

il quale coincide con una forma (dovuta a LEGENDRE) del teorema di addizione per gli integrali ellittici di terza specie. Moltiplicata per

$$\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\gamma\alpha\gamma\beta\mathrm{G}(\alpha+\beta)\mathrm{G}x\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)},$$

questa eguaglianza diventa:

$$\frac{\gamma(\alpha+\beta)\mathrm{G}(\alpha-x)\mathrm{G}(\beta-x)}{\gamma\alpha\gamma\beta\mathrm{G}x\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)}=\frac{\mathrm{f}(\alpha+\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta}\left(1-k^2\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{f}x\mathrm{f}(\alpha+\beta-x)\right). \qquad (h)$$

Se poniamo per un istante:

$$V=e^{(\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta)x}\cdot\frac{\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)}{\gamma(\alpha+\beta)\mathrm{G}x},$$

avremo:

$$\frac{d\log V}{dx}=\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta-\mathrm{Z}(\alpha+\beta-x)-\mathrm{Z}x.$$

Ma $\quad \mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta=\frac{\mathrm{f}(\alpha+\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta}+\mathrm{Z}(\alpha+\beta)$ in virtù della (f), e

$-\mathrm{Z}(\alpha+\beta-x)-\mathrm{Z}x=-\mathrm{Z}(\alpha+\beta)-k^2\mathrm{f}(\alpha+\beta)\mathrm{f}x\mathrm{f}(\alpha+\beta-x)$, per la (b);

dunque:

$$\frac{d\log V}{dx}=\frac{\mathrm{f}(\alpha+\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta}\left(1-k^2\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{f}x\mathrm{f}(\alpha+\beta-x)\right)=\frac{\gamma(\alpha+\beta)\mathrm{G}(\alpha-x)\mathrm{G}(\beta-x)}{\gamma\alpha\gamma\beta\mathrm{G}x\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)}$$

in virtù della (h). Moltiplicando per V, si ottiene il teorema:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta)x}\cdot\frac{\mathrm{G}(\alpha+\beta-x)}{\gamma(\alpha+\beta)\mathrm{G}x}\right)=e^{\mathrm{P}\alpha\cdot x}\cdot\frac{\mathrm{G}(\alpha-x)}{\gamma\alpha\mathrm{G}x}\times e^{\mathrm{P}\beta\cdot x}\cdot\frac{\mathrm{G}(\beta-x)}{\gamma\beta\mathrm{G}x}. \qquad (i)$$

Per ciò che segue, gioverà rammentare le seguenti proprietà delle funzioni ellittiche. Posto

$$q=e^{-\frac{\pi L}{K}},$$

le quattro funzioni γ, g, G, $\mathfrak{G}$ dell'argomento $2mK+2niL+x$ sono uguali ai prodotti di uno stesso fattore

$$q^{-n^2}\cdot e^{-n\frac{i\pi x}{K}}$$

moltiplicato ordinatamente per $(-1)^{m+n}\gamma x$, $(-1)^m\mathrm{g}x$, $(-1)^n\mathrm{G}x$, $\mathfrak{G}x$; e l'effetto dell'addizione di un mezzo periodo si rappresenta con:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\gamma(K+x)}{\mathrm{g}x}=\frac{\mathrm{g}(K+x)}{-l\gamma x}=\frac{\mathrm{G}(K+x)}{\mathfrak{G}x}=\frac{\mathfrak{G}(K+x)}{l\mathrm{G}x}=\frac{1}{\sqrt{l}},\\&\frac{\gamma(iL+x)}{\mathrm{G}x}=\frac{\mathrm{g}(iL+x)}{-i\mathfrak{G}x}=\frac{\mathrm{G}(iL+x)}{k\gamma x}=\frac{\mathfrak{G}(iL+x)}{-ik\mathrm{g}x}=\frac{i}{\sqrt{k}}q^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{i\pi x}{2K}}.\end{aligned}\right\} \qquad (j)$$

Ecco anche le derivate seconde:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\log\gamma x}{dx^2}=-\frac{h^2x}{\mathfrak{f}^2x}-\frac{E}{K}, &&\frac{d^2\log g x}{dx^2}=-l^2\frac{\mathfrak{f}^2x}{h^2x}-\frac{E}{K},\\
&\frac{d^2\log Gx}{dx^2}=\mathrm{j}^2x-\frac{E}{K}, &&\frac{d^2\log\mathfrak{G}x}{dx^2}=\frac{l^2}{\mathrm{j}^2x}-\frac{E}{K}.
\end{aligned}\right\}\quad(k)$$

La materia della presente memoria darà origine a funzioni di un argomento complesso, la parte reale del quale varia proporzionalmente al tempo, mentre la parte imaginaria rimane costante; e sarà d'uopo rendersi conto dell'andamento del valore della funzione. Il metodo infinitesimale, vale a dire l'uso di equazioni differenziali, parmi sia più conveniente alla presente quistione, che il far uso delle serie ad esempio di Jacobi(*), ed è per questa ragione che oso esporre le considerazioni seguenti.

S'imagini un piano i cui punti debbano rappresentare tutti i numeri che possono essere valori dell'argomento x; ed in esso piano l'*asse reale* e l'*asse imaginario* incrociantisi nell'origine (punto *zero*) ad angolo retto; l'insieme di tutti i punti rappresentanti il numero *infinito* prendasi per *orizzonte* ed in questo distinguansi i quattro punti: *levante, settentrione, ponente, mezzodì*, per indicare le direzioni da 0 ordinatamente verso $1, i, -1, -i$. Il raggio vettore (uscente da 0) di un punto (x) qualsivoglia esprima colla sua lunghezza *il valore assoluto* (sempre positivo), e coll'angolo ond'esso devia dalla direzione orientale (contato da levante verso settentrione) *la fase* del numero x. Nelle stesso modo, se $Gx=V(\cos\phi+i\,\mathrm{sen}\,\phi)$, essendo V positivo, ϕ reale, chiamo V il valore assoluto e ϕ la fase della Gx. Le rette parallele all'asse reale si chiamino *paralleli;* quelle parallele all'asse imaginario *meridiani.* In queste due serie di rette si distinguano i paralleli principali $2niL$ ed i meridiani principali $2mK$ (ove m, n denotano numeri interi), i quali formano una rete di rettangoli congrui; ed inoltre si fissino i paralleli ed i meridiani dimezzanti le striscie comprese fra due linee principali consecutive.

Tutt' i punti x, nei quali la funzione Gx ha una stessa fase, formeranno sul piano rappresentativo una curva che si chiamerà *isofase;* è nostro intento di farci una idea abbastanza chiara della figura di tali curve, che riempiono tutto il piano.

Sappiamo che la Gx non si annulla che nei punti congrui con iL (cioè nei punti $2mK+2niL+iL$). Intorno ad un tal punto la fase della Gx varia

(*) Giornale di Crelle, t. 39, p. 343.

come l'angolo di rotazione, e per un giro positivo intero prende l'aumento 2π. Perciò da esso punto irradiano innumerabili isofasi; ed a voler prolungare una isofase attraverso il punto medesimo, la fase della $\mathrm{G}x$ sarebbe obbligata a fare un salto di π. Ma fuori di quei punti una isofase non può mai arrestarsi bruscamente, nè avere un regresso, giacchè per x finito la $\mathrm{G}x$ ammette lo sviluppo di Taylor. La sola singolarità che possa aver luogo è un punto doppio a rami perpendicolari; perchè il caso di un punto triplo, i cui rami dividano lo spazio angolare in sei parti uguali, richiederebbe $\mathrm{G}'x=0$, $\mathrm{G}''x=0$, cioè le equazioni incompatibili $\mathrm{Z}x=0$, $\mathrm{j}^2x=E:K$, come vedremo bentosto.

Cerchiamo dapprima i punti doppi della serie di isofasi. Siccome un punto così fatto richiede $\mathrm{G}'x=0$, e

$$\mathrm{G}'(2mK+(2n+1)iL)=q^{-(n+\frac{1}{2})^2}\sqrt{k}\cdot i^{2n+1}$$

non è zero, così la $\mathrm{G}x$ non può annullarsi in alcun punto doppio; per lo che la condizione $\mathrm{Z}x=0$ basta a determinare tutt'i punti doppi. Sia $\mathrm{Z}(y+iz)=N+iM$, ove y, z, M, N significano numeri reali. Il teorema (b) dà:

$$\left.\begin{aligned} M&=-i\mathrm{Z}(iz)+ik^2\frac{\mathfrak{f}^2y\,\mathfrak{f}(iz)\mathfrak{h}(iz)\mathfrak{j}(iz)}{1-k^2\mathfrak{f}^2y\,\mathfrak{f}^2(iz)}\,,\\ N&=\mathrm{Z}y-k^2\frac{\mathfrak{f}y\,\mathfrak{h}y\,\mathfrak{j}y\,\mathfrak{f}^2(iz)}{1-k^2\mathfrak{f}^2y\,\mathfrak{f}^2(iz)}\,. \end{aligned}\right\}(l)$$

Se $0<y<K$, l'espressione N essendo una somma di due termini positivi non può ridursi a zero; invece essa si annulla nei meridiani 0 e K ed in tutti quelli congrui con essi. Ponendo $M=Q(z)$ quando $y=0$, $M=R(z)$ quando $y=K$, abbiamo

$$Q(z)=-i\mathrm{Z}(iz)=-\frac{d\log\mathrm{G}(iz)}{dz}\,,\quad Q'(z)=\mathrm{j}^2(iz)=-\frac{E}{K}\,;$$

$$R(z)=-i\mathrm{Z}(iz)+ik^2\frac{\mathfrak{f}(iz)\mathfrak{h}(iz)}{\mathfrak{j}(iz)}=-\frac{d\log\mathfrak{G}(iz)}{dz}\,,\quad R'(z)=\frac{l^2}{\mathrm{j}^2(iz)}-\frac{E}{K}\,,$$

in virtù delle (k). Mentre z va da 0 ad L, $\mathrm{j}^2(iz)$ cresce continuamente da 1 fino a $+\infty$; $l^2K<E<K$. Dunque $Q'(z)$ è sempre positivo, $R'(z)$ sempre negativo e finito. Perciò $R(z)$, avendo 0 per valore iniziale, è negativo nella parte boreale, positivo nella parte australe del meridiano. Dunque i meridiani K, $3K$, $5K,\cdots$ non contengono altri punti doppi che quelli situati nell'asse reale, e nulla osta ad attribuir loro la fase 0. D'altra parte la $Q(z)$ cresce continuamente da 0 fino a $+\infty$, mentre z va da 0 ad L; poi da $-\infty$

fino a $+\infty$, mentre z va da L a $3L$, e così ripetutamente. Dunque in ciascun intervallo $(2n-1)L<z<(2n+1)L$ la funzione $Q(z)$ passa una sola volta per lo zero, in un punto che indicheremo con $2nL+\alpha_n$. Se n significa un intero positivo, il numero α_n verrà unicamente determinato dalle due condizioni:

$$0<\alpha_n<L, \qquad \mathrm{Z}(i\alpha_n)=n\frac{i\pi}{K},$$

che danno $\mathrm{Z}(2niL+i\alpha_n)=0$ per conseguenza. Dunque se m è un intero qualunque, ed n un intero positivo, tutti i punti doppi della serie di isofasi saranno rappresentati dalle due espressioni $(2m+1)K$, $2mK\pm(2niL+i\alpha_n)$.

Camminiamo ora lungo l'asse imaginario dall'origine verso il settentrione, evitando però verso levante i punti raggianti iL, $3iL$, $5iL,\ldots$ Da 0 fino ad iL troveremo per la $\mathrm{G}(iz)$ la fase nulla; di qui fino a $3iL$ la fase π; indi fino a $5iL$ la fase 2π, e così via via. Questo stato di cose non può di subito alterarsi, se ci trasportiamo nel cammino anzidetto dall'asse imaginario verso il levante. Dunque, per un passaggio boreale dentro la prima semi-striscia orientale, il punto doppio $2niL+i\alpha_n$ apparterrà alla isofase $n\pi$, la quale comincia in $(2n+1)iL$ per andare in linea retta al suo punto doppio, e là si volge di subito verso levante e diventa una curva propriamente detta, situata dalla banda boreale del parallelo che la tocca nel punto doppio. Questo ramo curvo, come fra poco vedremo, ha la parte boreale del meridiano K per asintoto, del pari che tutte le altre isofasi. Donde è evidente che nessuna isofase, corrispondente a fasi non divisibili per π, può avere un punto doppio.

Cerchiamo l'equazione differenziale di una isofase. Indicando con h un piccolo incremento di x, abbiamo:

$$\mathrm{G}(x+h)=\mathrm{G}x\,.\,(1+\mathrm{Z}x\,.\,h+\cdots)\,.$$

Acciocchè la fase di questa espressione non sia diversa da quella della $\mathrm{G}x$, bisogna e basta che $\mathrm{Z}x\cdot h$ sia reale, cioè che

$$\mathrm{Z}(y+iz)\,d(y+iz)=(N+iM)(dy+idz),$$

sia reale; per lo che la equazione differenziale richiesta sarà:

$$Mdy+Ndz=0\,.$$

Abbiamo già veduto che N non può annullarsi se non nei meridiani 0 e K. Dunque nessuna isofase è, dentro la suddetta semi-striscia, toccata da alcun meridiano. Ne segue che una isofase non ha mai una parte staccata rientrante in sè stessa, almeno dentro la semi-striscia $(0<y<K)$. Ma poichè due isofasi non s'incontrano se non nei punti raggianti, ed in conseguenza neppure il meridiano K può essere attraversato da un'altra isofase, possiamo sicuramente asserire che non vi è mai un'isofase formante una curva rientrante.

Vediamo però se non vi siano dei paralleli tangenti ad una isofase. La condizione ne è $M=0$. Uno sguardo alla espressione (l) mostra che, nell'intervallo $0<y<K$, supposto essere z costante, la M ha una variazione continua, di diminuzione o di accrescimento, secondo che $-\mathrm{if}(iz)$ è positivo o negativo. Dunque se, nel passaggio sul parallelo da $y=0$ fino ad $y=K$, la M può ridursi a zero, ciò avviene una sola volta e richiede nella parte boreale della semistriscia, dove $R(z)$ è sempre negativo, che $Q(z)$ sia positivo. La qual cosa si verifica negli intervalli $0<z<L$, $2nL+\alpha_n<z<(2n+1)L$, ove $n=1, 2, 3, \cdots$ In questi intervalli ciascun parallelo tocca una isofase (dentro la semi-striscia in un solo punto) (*).

Indicandosi con n un intero qualsivoglia (o pari od impari), la fase della $\mathrm{G}(y+niL)$ sarà $\frac{n\pi}{2}\left(1-\frac{y}{K}\right)$. La isofase $\lambda\pi$ passa adunque il parallelo niL nella distanza occidentale $\frac{2\lambda}{n}K$ dal meridiano K; ove λ significa un numero qualunque, fratto o intero. Ecco perchè questo meridiano è assintoto per tutte le isofasi contenute nella semi-striscia considerata.

Rispetto alle altre parti del piano rappresentativo, le formole:

$$\mathrm{G}(-y+iz)=\mathrm{G}(y-iz) \text{ conjugata a } \mathrm{G}(y+iz), \quad \mathrm{G}(2mK+y+iz)=\mathrm{G}(y+iz)$$

parlano abbastanza chiaramente.

Qualunque sia la linea descritta dall'argomento x, la fase della $\mathrm{G}x$ o cresce e diminuisce continuamente finchè la detta linea non riesce a toccare una isofase; ma nel passare per un contatto ordinario (contatto bipunto) la fase deve retrocedere, cambiando il senso della variazione. Se, in particolare, la linea è un parallelo fra $-iL$ ed iL, si determini β per mezzo delle due condizioni:

(*) I punti di contatto costituiscono più curve rientranti, ciascuna delle quali è situata fra due paralleli che la toccano sull'asse imaginario nel modo ordinario; il loro insieme è rappresentato dalla equazione $M=0$. Quella situata fra i paralleli $-iL$ ed iL attraversa l'asse reale laddove $\mathrm{j}^2 y=E:K$ epperò $y<\frac{1}{2}K$. Le curve $M=0$ contengono i punti dove ciascuna isofase s'avvicina di più all'asse reale.

e pongasi:

$$0<\beta<K, \qquad k^2 \mathrm{f}(iz)\mathrm{h}(iz)\mathrm{j}(iz)\frac{\mathrm{f}^2\beta}{1-k^2\mathrm{f}^2(iz)\mathrm{f}^2\beta}=\mathrm{Z}(iz),$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{G}(\beta+iz)}{\mathrm{G}(\beta-iz)},$$

allora $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, e la fase della $\mathrm{G}(y+iz)$ oscillerà, durante il corso di y, fra $-\varepsilon$ ed ε.

Con quel che fin qui si è detto, anche l'andamento della fase della $\mathfrak{G}x=\sqrt{l}.\mathrm{G}(K+x)$ è già descritto; soltanto bisognerà assumere il punto K per origine.

Lungo una curva che attraversi le isofasi ad angoli retti, la $\mathrm{G}x$ conserva lo stesso valore assoluto, come è chiaro dallo sviluppo di Taylor. L'equazione differenziale della serie delle nuove curve è $Ndy-Mdz=0$. Esse hanno i loro punti doppi in comune colle isofasi, mentre i loro rami in questi punti dimezzano gli angoli retti compresi fra i rami delle isofasi. Due qualunque delle nuove curve non si incontrano mai. Intorno ai punti raggianti iL, $3iL$, $5iL$..... esse sono quasi piccoli cerchi concentrici.

Rispetto alle isofasi della funzione γx, i loro punti di partenza, intorno ai quali la fase varia di 2π, sono tutti i punti congrui all'origine. I loro punti doppi stanno in primo luogo sull'asse reale nei punti $(2m+1)K$; in secondo luogo sono situati sui meridiani principali e vengono determinati nel modo seguente. Vi è un solo numero positivo minore di L che soddisfaccia alla condizione:

$$\mathrm{Z}(i\beta_{2n+1})=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{i\pi}{K}\ldots(2n+1=1,3,5,\ldots);$$

allora i punti accennati sono rappresentati da

$$2mK\pm\{(2n+1)iL+i\beta_{2n+1}\}.$$

Del resto tutti questi punti doppi sono compresi nella equazione $\mathrm{P}x=0$. L'equazione differenziale di una isofase della $\gamma(y+iz)$ sarebbe:

$$\left(-i\mathrm{Z}(iz)+i\frac{\mathrm{f}(iz)\mathrm{h}(iz)\mathrm{j}(iz)}{\mathrm{f}^2y-\mathrm{f}^2(iz)}\right)dy+\left(\mathrm{Z}y+\frac{\mathrm{f}y\mathrm{h}y\mathrm{j}y}{\mathrm{f}^2y-\mathrm{f}^2(iz)}\right)dz=0;$$

ma forse vale meglio, supponendo $x=y+i(L+z)$, darle la forma:

$$\left(M-\frac{\pi}{2K}\right)dy+Ndz=0.$$

ove M, N hanno il significato suesposto. Quindi si vede che fra 0 ed $i(L+\beta_1)$ nessun parallelo tocca alcuna isofase; bensì ciascun parallelo fra $i(L+\beta_1)$ e $2iL$, poi fra $i(3L+\beta_3)$ e $4iL$, e così di seguito. Camminando fra i paralleli 0 ed iL, attribuiremo al punto $(2m+1)K$ la fase $-m\pi$; e camminando fra i meridiani 0 e K attribuiremo al punto $(2n+1)iL+i\beta_{2n+1}$ la fase $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. La isofase 0 è composta del segmento di asse reale dall'origine al punto $2K$ e di tutto il meridiano K. Sui paralleli principali ed intermedi fra 0 e K, la fase della γx coincide con quella della Gx e varia uniformemente, sui paralleli intermedi in tutta la loro estensione, sui principali solo fra due meridiani principali consecutivi. Di qui si scorge che i meridiani intermedi sono asintoti delle isofasi.

I punti doppi della serie di isofasi, sia della Gx come della γx, hanno la proprietà che in essi il valore assoluto della rispettiva funzione consegue il suo massimo.

§ 2. *Il problema generale del pendolo.*

Prendasi il punto di sospensione O per origine comune di due sistemi di coordinate rettangolari, l'uno fisso, l'altro mobile col pendolo. Nel primo sistema uno degli assi abbia la direzione della gravità e si chiami *piombino;* e siano ξ, ξ', ξ'' le coordinate della molecola m alla fine del tempo t. L'altro sistema sia quello degli assi principali d'inerzia del pendolo, rispetto ai quali la molecola abbia le coordinate x, y, z, supposte invariabili secondo la ipotesi ordinaria di una rigidezza assoluta. La relazione fra il sistema d'inerzia ed il fisso sia espressa dalle relazioni:

$$\xi\ =\lambda\ x+\mu\ y+\nu\ z\,,$$

$$\xi'\ =\lambda' x+\mu' y+\nu' z\,,$$

$$\xi''=\lambda''x+\mu''y+\nu''z\,;$$

ordinate per modo che il determinante dei nove coseni di direzione sia 1. Le coordinate del centro di gravità siano w, w', w'' nel sistema fisso, X, Y, Z in quello d'inerzia. La massa totale del pendolo si chiami M; e $M\mathfrak{A}, M\mathfrak{B}, M\mathfrak{C}$ denotino i momenti d'inerzia principali, relativi al punto di sospensione. L'accelerazione per la gravità sia g. Le somme relative a tutte le molecole, agli assi fissi, agli assi d'inerzia saranno indicate coi simboli $\int$, S, $\sum$.

Posto
$$M\times(W,\ W',\ W'')$$
$$=\int m\times\begin{vmatrix} \xi & . & \xi' & . & \xi'' \\ \frac{d\xi}{dt} & . & \frac{d\xi'}{dt} & . & \frac{d\xi''}{dt}\end{vmatrix},$$

i tre termini distinti del secondo membro siano detti *somme di aree riferite ai piani fissi.* Con questa abbreviazione le equazioni del moto si scrivono così:

$$\frac{dW}{dt}=0\,,\qquad \frac{dW'}{dt}=gw''\,,\qquad \frac{dW''}{dt}=-gw'\,. \tag{1}$$

Convien riferirle al sistema d'inerzia. Pongasi:

$$p=\mathrm{S}\nu\frac{d\mu}{dt}=-\mathrm{S}\mu\frac{d\nu}{dt}\,,\ q=\mathrm{S}\lambda\frac{d\nu}{dt}=-\mathrm{S}\nu\frac{d\lambda}{dt}\,,\ r=\mathrm{S}\mu\frac{d\lambda}{dt}=-\mathrm{S}\lambda\frac{d\mu}{dt}\,;$$

donde segue per esempio:

$$\frac{d\xi}{dt}=\begin{vmatrix}\lambda\,.\,\mu\,.\,\nu \\ p\cdot q\cdot r \\ x\,.\,y\,.\,z\end{vmatrix};$$

e si avrà:

$$W=\Sigma\mathfrak{A}p\lambda,\quad W'=\Sigma\mathfrak{A}p\lambda',\quad W''=\Sigma\mathfrak{A}p\lambda''\,. \tag{2}$$

La prima equazione del gruppo (1) è integrabile. Le tre equazioni moltiplicate ordinatamente per $\Sigma p\lambda$, $\Sigma p\lambda'$, $\Sigma p\lambda''$, sommate ed integrate danno la stessa equazione di forza viva, la quale risulterebbe anche da una più semplice considerazione. Indicate con $\mathfrak{D}$, H le costanti d'integrazione, abbiamo le due equazioni integrali del sistema (1):

$$W=\mathfrak{A}p\lambda+\mathfrak{B}q\mu+\mathfrak{C}r\nu=\mathfrak{D}\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2-2g(X\lambda+Y\mu+Z\nu)=H\,; \tag{4}$$

ed il sistema stesso, riferito agli assi d'inerzia, si muterà nel seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}\frac{dp}{dt}-(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})qr=g(Y\nu-Z\mu)\,,\\
&\mathfrak{B}\frac{dq}{dt}-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})rp=g(Z\lambda-X\nu)\,,\\
&\mathfrak{C}\frac{dr}{dt}-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})pq=g(X\mu-Y\lambda)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aggiunta la $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ alle (3), (4), i coseni λ, μ, ν saranno noti come funzioni di p, q, r; ed il sistema (1) fornirà per una delle tre variabili p, q, r, dipendenti da t, eliminate le altre due, una equazione differenziale del terz'ordine; una delle tre costanti d'integrazione della quale equazione proviene dall'arbitrario valore iniziale del tempo. Sotto questo aspetto la integrazione del sistema (5) porta seco solamente cinque costanti. Ma una sesta, estranea a questa interpretazione delle (5), comparirebbe, se per caso volessimo integrare la:

$$d.\,\text{arctang.}\frac{\lambda''}{\lambda'}=\frac{\mu q+\nu r}{1-\lambda^2}\,dt\ ,$$

e si riferisce all'arbitraria posizione del secondo asse fisso nel piano orizzontale. Conosciamo dunque quattro costanti, cioè $\mathfrak{D}, H$ e quelle relative al valore iniziale del tempo ed alla posizione del secondo asse fisso; e ne rimangono soltanto due incognite.

§ 3. *Il problema particolare. — Prima separazione delle variabili. Distinzione dei casi generali che si presentano a prima vista.*

Quando hanno luogo le circostanze accennate nel titolo della presente memoria, la retta passante pel centro di gravità e pel punto di sospensione è, anche per questo punto, l'asse principale d'inerzia e *singolare*, gli altri due essendo dotati di momenti uguali, epperò indeterminati di posizione nel loro piano *equatoriale*. Osservando i simboli del § 2, abbiamo adesso in particolare $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$, $Y=0$, $Z=0$. Siamo liberi di dirigere l'asse singolare dal punto di sospensione al centro di gravità, cosichè X divien positivo. La prima delle equazioni (5) riducendosi ora a $dp=0$ dà $p=$costante. Se la p fosse negativa, lo scambio degli assi delle y, z muterebbe la p nella positiva $-p$. È sottinteso che insieme vengano scambiati anche gli assi delle ξ', ξ'', affinchè il determinante dei coseni di direzione ritenga il valore 1. Per conseguenza sta in nostro arbitrio l'assumere la costante p positiva, se non è nulla.

L'indeterminatezza di posizione del secondo asse d'inerzia nel piano equatoriale corrisponde ad una costante d'integrazione. Questa e la p sono appunto quelle due costanti che nel caso generale erano rimaste ancora incognite. Ed è per tale cagione che il presente problema dev'essere riducibile alle quadrature.

Le (3), (4) insieme colla $p=\text{cost.}^e$ costituiscono le tre prime equazioni integrali del sistema (5) e ponno esser scritte come segue:

$$p=\text{cost.}^e,\ \ \mathfrak{B}(q\mu+r\nu)=\mathfrak{D}-\mathfrak{A}p\lambda,\ \ \mathfrak{B}(q^2+r^2)=2gX\lambda+H-\mathfrak{A}p^2\ .$$

La identità

$$(\mu r-\nu q)^2=(\mu^2+\nu^2)(q^2+r^2)-(\mu q+\nu r)^2\,,$$

moltiplicata per $\mathfrak{B}:\,2gX$, somministra la:

$$\frac{\mathfrak{B}}{2gX}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=(1-\lambda^2)\left(\lambda+\frac{H-\mathfrak{A}p^2}{2gX}\right)-\frac{(\mathfrak{D}-\mathfrak{A}p\lambda)^2}{2gX\mathfrak{B}}\,.$$

Per maggior brevità poniamo:

$$\frac{H-\mathfrak{A}p^2}{2gX}=A,\quad \frac{\mathfrak{A}p}{\sqrt{2gX\mathfrak{B}}}=B,\quad \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{2gX\mathfrak{B}}}=C\,,$$

ed intendiamo la $\sqrt{2gX\mathfrak{B}}$ esser positiva (come in somma tutte le radici di date quantità positive), cosichè anche la B è positiva, a cagione della supposizione fatta rispetto a p. La equazione differenziale può adesso scriversi così:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{2gX}}\frac{d\lambda}{dt}=\sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda+A)-(C-B\lambda)^2}\,. \tag{6}$$

Il radicale (nel secondo membro), avendo $-\lambda^3$ per termine più alto e riducendosi a $-(C\mp B)^2$ pel caso di $\lambda=\pm1$, è *positivo* quando $\lambda=-\infty$, e *negativo* quando $\lambda=-1,\ 1,\ +\infty$. Oltre a ciò la realtà del moto esige che la limitazione $-1<\lambda<1$ e l'esser positivo il radicale abbiano luogo ad un tempo. Dunque bisogna che il radicale abbia la forma $(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda+c)$, ove $-c<-1<b<a<1$; (seppure trascuriamo i casi particolari). Se queste condizioni sono soddisfatte, allora $\lambda+A<0$ è una conseguenza del valore positivo del radicale, e potranno assegnarsi alle $q,\ r$ tali valori reali i quali soddisfacciano alla $q^2+r^2=\frac{2gX}{\mathfrak{B}}(\lambda+A)$. E siccome allora non solo $q\mu+r\nu$, ma anche $r\mu-q\nu$ è reale, così le $\mu,\ \nu$ sono determinate in modo reale. Per quanto si è detto, non solo le condizioni superiori sono richieste dalla realtà del moto, ma viceversa all'adempimento di esse corrisponde anche sempre uno stato reale del movimento.

Sostituendo, successivamente, $\lambda=1,\ -1,\ a,\ b,\ -c,\ -A,\ \frac{C}{B}$ nella uguaglianza identica:

$$(\lambda^2-1)(\lambda+A)+(C-B\lambda)^2=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda+c)\,,$$

se ne ottengono le relazioni seguenti:

$$(C-B)^2=(1-a)(1-b)(c+1) \tag{7}$$

$$(C+B)^2=(1+a)(1+b)(c-1)\,, \tag{8}$$

$$(C-Ba)^2=(1-a^2)(a+A)\,, \tag{9}$$

$$(C-Bb)^2=(1-b^2)(b+A)\,, \tag{10}$$

$$(C+Bc)^2=(c^2-1)(c-A)\,, \tag{11}$$

$$(C+AB)^2=(a+A)(b+A)(c-A)\,, \tag{12}$$

$$(C^2-B^2)(C+AB)=(C-Ba)(C-Bb)(C+Bc)\,. \tag{13}$$

Dalle (7) e (8) si desume che, date a piacimento le a, b fra -1 e 1, e le $c>1$, allora le B, C risulteranno sempre reali. Queste due equazioni, sciolte rispetto a $\frac{C}{B}$, hanno due soluzioni reciproche, ciascuna delle quali abbraccia, rispetto alle B, C medesime, di nuovo due soluzioni differenti tra loro come (B, C), $(-B, -C)$. Perciò vi sono sempre due soluzioni che soddisfanno alla condizione convenzionale $B>0$. Poscia una qualunque delle (9), (10), (11) fornisce la A in modo lineare, epperò anche reale.

Dalle (10) e (11) segue $c>A>-b$; ma rimane incerto, se sia $A>1$ od $A<1$. Entrambi questi casi sono possibili. In fatti, osservando solo le condizioni $-1<b<a<1$, $A>-b$, possiamo ancora assegnare le a, b, A a piacimento; le (9) e (10) daranno B, C reali, e poi si caverà dalla (8) la c del pari reale; finalmente la (11) mostra che $c>A$.

Mettendo la (13) sotto la forma:

$$\{(C^2-B^2)(C+AB)\}^2$$
$$=(C-B)(C-Ba)(C-Bb)\times(C+B)(C+AB)\times(C+Bc)\,,$$

scorgiamo dall'esser positivo il primo membro, che $\frac{C}{B}$ deve cadere o sopra 1, ovvero fra a, b, ovvero fra -1, $-A$, ovvero sotto $-c$. Ma poichè nel penultimo caso vi è a distinguere fra $A>1$ ed $A<1$, otteniamo in tutto cinque casi diversi, che numereremo così:

$$1.^\circ\ C>B,\quad 2.^\circ\ Ba>C>Bb,\quad 3.^\circ\ -B>C>-AB\,.$$
$$4.^\circ\ -AB>C>-B\,,\quad 5.^\circ\ -Bc>C\,.$$

§ 4. *Ricerca intorno alla realtà dei cinque casi.*

In più modi si possono accoppiar due dei casi generali come successivi, così che fra essi vi sia un caso limite, che serva di passaggio dall'uno all'altro; ed è più facile l'investigare la realtà del moto nei casi limiti che nei casi generali. Il passagio dal 1° caso al 2°, dal 2° al 3°, dal 4° al 5°, dal 2° al 4°, dal 3° al 5° richiede ordinatamente $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $b=-A$, $c=A$. Però cominciamo dal considerare le conseguenze di ciascuna di queste cinque supposizioni particolari. Poi, se, per esempio, il supporre $a=1$, si trova compatibile con un movimento reale, si domanderà se questo caso limite sia isolato ovvero se il moto continui ad essere reale entro ambedue i casi contigui.

I. Quando $a=1$, dalla (7) segue $C=B$. Le altre relazioni danno $B^2=\frac{1}{2}(1+b)(c-1)$, $b+A=\frac{1}{2}(1-b)(c-1)$, $c-A=\frac{1}{2}(1+b)(c+1)$, $1+A=\frac{1}{2}(1-b)(c+1)$. Questo caso viene attuato, p. e. ponendo:

$$\lambda=1,\ \mu=0,\ \nu=0,\ q^2+r^2=\frac{2gX}{\mathfrak{B}}(1+A),$$

e corrisponde ad un passaggio del centro di gravità per la sua posizione inferiore di riposo.

II. Quando $b=-1$, ne segue $C=-B$, $B^2=\frac{1}{2}(1-a)(c+1)$, $A-1=\frac{1}{2}(1+a)(c-1)$. Questo caso è verificato da:

$$\lambda=-1,\ \mu=0,\ \nu=0,\ q^2+r^2=\frac{2gX}{\mathfrak{B}}(A-1),$$

ed importa un passaggio del centro di gravità per la posizione superiore di riposo.

III. Quando $c=1$, si ha $C=-B$, $B^2=\frac{1}{2}(1-a)(1-b)$, $1-A=\frac{1}{2}(1+a)(1+b)$. Possibile.

IV. Quando $b=-A$, allora $C=Bb$, $B^2=c-a$, $a-b=\frac{1-a^2}{c-a}\cdot$ Possibile.

V. Quando $c=A$, allora $C=-Bc$, $B^2=-a-b$, $c-1=\frac{(1+a)(1+b)}{-a-b}$.
Almeno b deve essere compreso fra -1 e 0, e poi bisogna che sia $a<-b$. Ma anche questo caso è possibile.

Ora nessuno di questi cinque casi limiti è isolato. Dinotando con ω un numero abbastanza piccolo, se per esempio nel caso I poniamo $a=1-\omega^2$, saremo liberi di conchiudere le:

$$C-B=\omega\sqrt{(1-b)(c+1)}\,,\qquad C-Ba=\omega\left(\sqrt{(1-b)(c+1)}+B\omega\right)$$

dalla (7). La prima di esse mostra attuato il caso 1° se $\omega>0$, e la seconda il caso 2° se $\omega<0$.

Analoghi ragionamenti circa i casi II, III bastano per convincerci della realtà di tutti i casi generali.

§ 5. *La distanza del piombino dall'asse singolare del pendolo, espressa in funzione del tempo.*

Ritorniamo alla equazione (6), che ha ora presa la forma:

$$\sqrt{\frac{2\mathfrak{B}}{gX}}\cdot\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}=\sqrt{(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda+c)}\,,$$

e poniamo $\lambda=a-(a-b)\mathrm{f}^2$, onde $a-\lambda=(a-b)\mathrm{f}^2$, $\lambda-b=(a-b)(1-\mathrm{f}^2)$, $\lambda+c=(a+c)\left(1-\frac{a-b}{a+c}\mathrm{f}^2\right)$. Perciò assumendo:

$$k=\sqrt{\frac{a-b}{a+c}}\,,$$

per modulo di funzioni ellittiche e ponendo $1-\mathrm{f}^2=\mathrm{h}^2$, $1-k^2\mathrm{f}^2=\mathrm{j}^2$, sarà permesso scegliere $-(a-b)\sqrt{a+c}\,.\,\mathrm{fhj}$ per valore del radicale; onde la (6) diverrà:

$$\frac{d\mathrm{f}}{\mathrm{hj}}=\sqrt{\frac{gX}{2\mathfrak{B}}}\sqrt{a+c}\,.\,dt.$$

Quindi ponendo per brevità:

$$n=\sqrt{\frac{gX}{2\mathfrak{B}}}\sqrt{a+c}, \tag{14}$$

indicando con u l'argomento delle funzioni ellittiche e cominciando il tempo t laddove u svanisce, avremo:

$$\lambda=a-(a+c)k^2\mathrm{f}^2u,\quad nt=u\,. \tag{15}$$

Delle sei costanti d'integrazione involte nel problema, alle tre prime $\mathfrak{D}$, H, p vennero sostituite le a, b, c, ed una quarta è implicita nell'ultima integrazione. Così rimangono da eseguirsi due sole integrazioni. Ma perchè esse dipendono da alcuni integrali ellittici di terza specie, nei cui denominatori compajono $1-\lambda$, $1+\lambda$; e siccome vi figura in modo simile anche $\lambda+A$, così cerchiamo dapprima di mettere quelle espressioni sotto la forma consueta di $1-k^2 \mathrm{f}^2\alpha \mathrm{f}^2 u$.

§ 6. *Argomenti costanti.*

Avvertendo che

$$1-\lambda=(1-a)\left(1-k^2\left(-\frac{a+c}{1-a}\right)\mathrm{f}^2 u\right),$$

$$1+\lambda=(1+a)\left(1-k^2\frac{a+c}{1+a}\mathrm{f}^2 u\right),$$

$$\lambda+A=(a+A)\left(1-k^2\frac{a+c}{a+A}\mathrm{f}^2 u\right),$$

poniamo:

$$\mathrm{f}^2\alpha=-\frac{a+c}{1-a}, \quad \text{epperò } \mathrm{h}^2\alpha=\frac{c+1}{1-a}, \quad \mathrm{j}^2\alpha=\frac{1-b}{1-a};$$

$$\mathrm{f}^2\beta=\frac{a+c}{1+a}, \quad \text{epperò } \mathrm{h}^2\beta=-\frac{c-1}{1+a}, \quad \mathrm{j}^2\beta=\frac{1+b}{1+a}.$$

Ma $\dfrac{a+c}{a+A}$ nella terza espressione non può dar luogo ad un nuovo argomento indipendente da quelli già introdotti α, β, perchè invece delle costanti arbitrarie a, b, c vi sono già le tre k, α, β. In fatti si può rappresentare il terzo argomento come somma del primo e del secondo. Per provarlo non dobbiamo stare ai soli valori di $\mathrm{f}^2\alpha, \ldots$; ma bisogna distinguere i cinque casi rispetto ai segni delle radici quadrate. Propongo il seguente ripiego, che non è il solo possibile, ma ci dispensa tuttavia dal percorrere a più riprese i casi diversi:

$$\left.\begin{array}{llll}
\mathrm{f}\alpha=\substack{+\\-\\-}\,i\sqrt{\dfrac{a+c}{1-a}}, & \mathrm{h}\alpha=\substack{+\\-\\-}\sqrt{\dfrac{c+1}{1-a}}, & \mathrm{j}\alpha=\substack{+\\-\\+}\sqrt{\dfrac{1-b}{1-a}}; & \left|\begin{array}{l}1\\2\\3.4.5\end{array}\right| \\[2ex]
\mathrm{f}\beta=\substack{+\\+}\sqrt{\dfrac{a+c}{1+a}}, & \mathrm{h}\beta=\substack{+\\-}\,i\sqrt{\dfrac{c-1}{1+a}}, & \mathrm{j}\beta=\substack{+\\+}\sqrt{\dfrac{1+b}{1+a}}; & \left|\begin{array}{l}1.2.4\\3.5\end{array}\right| \\[2ex]
\mathrm{f}(\alpha+\beta)=\substack{+\\+}\sqrt{\dfrac{a+c}{a+A}}, & \mathrm{h}(\alpha+\beta)=\substack{-\\+}\,i\sqrt{\dfrac{c-A}{a+A}}, & \mathrm{j}(\alpha+\beta)=\substack{+\\+}\sqrt{\dfrac{b+A}{a+A}}; & \left|\begin{array}{l}1.2.3\\4.5\end{array}\right|
\end{array}\right\} \quad (16)$$

(al lato destro delle formole si trovan notati quei casi ai quali corrispondono i segni prefissi ad esse.) Il computo della terza linea si appoggia alle formole (a). Se nel seguito ad una formola è prefisso un solo segno, epperò al suo lato destro non è notato alcun caso, ciò significa che essa vale per tutti i cinque casi. Per mezzo delle uguaglianze (7),... (11), presentate sotto le forme:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(c+1)}=\pm(C-B) \quad \left|\begin{matrix}1\\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$\sqrt{(1+a)(1+b)(c-1)}=\pm(C+B) \quad \left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 4\\ 3.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$C-Ba=\pm\sqrt{(1-a^2)(a+A)} \quad \left|\begin{matrix}1\\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$C-Bb=\pm\sqrt{(1-b^2)(b+A)} \quad \left|\begin{matrix}1.\ 2\\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$C+Bc=\pm\sqrt{(c^2-1)(c-A)} \quad \left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3.\ 4\\ 5\end{matrix}\right|,$$

dalle (16) si ricava:

$$\mathrm{f}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{j}\beta=\mp\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)^{3/2}}(1-a)\sqrt{(1+a)(1+b)(c-1)} \quad \left|\begin{matrix}1.\ 3.\ 5\\ 2.\ 4\end{matrix}\right|$$

$$=\mp\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)^{3/2}}(1-a)(C+B) \quad \left|\begin{matrix}1\\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$-\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{f}\beta=-\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)^{3/2}}(1+a)\sqrt{(1-a)(1-b)(c+1)}$$

$$=\mp\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)^{3/2}}(1+a)(C-B) \quad \left|\begin{matrix}1\\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|;$$

quindi sommando, e posto $N=\mathrm{f}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{j}\beta-\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{f}\beta$, siccome nel gruppo (a),

$$N=\mp 2\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}(C-Ba) \quad \left|\begin{matrix}1\\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|=-2\frac{\sqrt{(a+c)(a+A)}}{1-a^2};$$

e perchè $\mathrm{f}^2\alpha-\mathrm{f}^2\beta=-2\frac{a+c}{1-a^2}$, finalmente $\mathrm{f}(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{a+c}{a+A}}$.

Analogamente si trova:

$$\mathrm{f}\alpha\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\beta=\pm i\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{c^2-1}}(c+1)(C+B) \quad \left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3.\ 5\\ 4\end{matrix}\right|,$$

$$-\mathrm{j}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{h}\beta=\mp i\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{c^2-1}}(c-1)(C-B) \quad \left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3.\ 5\\ 4\end{matrix}\right|;$$ e sommando

$$N\mathrm{h}(\alpha+\beta)=\pm 2i\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{c^2-1}}(C+Bc)\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3.\ 5\\ 4\end{matrix}\right|=\pm 2i\frac{\sqrt{(a+c)(c-A)}}{1-a^2}\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3\\ 4.\ 5\end{matrix}\right|;$$

dunque $\mathrm{h}(\alpha+\beta)=\mp i\sqrt{\frac{c-A}{a+A}}\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3\\ 4.\ 5\end{matrix}\right|$. In terzo luogo si ha:

$$\mathrm{f}\alpha\mathrm{j}\alpha\mathrm{h}\beta=\mp\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}}(1-b)(C+B)\left|\begin{matrix}1.\ 2\\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

$$-\mathrm{h}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{j}\beta=\mp\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}}(1+b)(C-B)\left|\begin{matrix}1.\ 2\\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|, \text{ e sommando:}$$

$$N\mathrm{j}(\alpha+\beta)=\mp 2\frac{\sqrt{a+c}}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}}(C-Bb)\left|\begin{matrix}1.\ 2\\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|=-2\frac{\sqrt{(a+c)(b+A)}}{1-a^2},$$

$$\text{epperò } \mathrm{j}(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{b+A}{a+A}}\,.$$

Per tal modo la terza linea del gruppo (16) è verificata. Ora, indicando con α', β', δ' dei numeri situati nell'intervallo fra 0 ed L, dal gruppo suddetto si desumono per gli argomenti α, β, $\alpha+\beta$ i luoghi seguenti:

$$\begin{aligned}\alpha&=i\alpha'\\&=2iL-i\alpha'\\&=-i\alpha'\end{aligned}\left|\begin{matrix}1\\2\\3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right|,\quad \begin{aligned}\beta&=K-i\beta'\\&=K+i\beta'\end{aligned}\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 4\\3.\ 5\end{matrix}\right|,\quad \begin{aligned}\alpha+\beta&=K+i\delta'\\&=K-i\delta'\end{aligned}\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 3\\4.\ 5\end{matrix}\right|,$$

ed in conseguenza per i casi:

$$\begin{matrix}1^\circ\\2^\circ\\3^\circ\end{matrix}\left|\begin{aligned}\delta'&=\alpha'-\beta'\\ \delta'&=2L-\alpha'-\beta'\\ \delta'&=\beta'-\alpha'\end{aligned}\right|\qquad \begin{matrix}4^\circ\\5^\circ\end{matrix}\left|\begin{aligned}\delta'&=\alpha'+\beta'\\ \delta'&=\alpha'-\beta'\end{aligned}\right|.$$

Inoltre dalla stessa fonte si derivano le:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{h}\alpha\mathrm{j}\alpha}{\mathrm{f}^3\alpha}=i\frac{C-B}{(a+c)^{3/2}},\quad \frac{\mathrm{h}\beta\mathrm{j}\beta}{\mathrm{f}^3\beta}=i\frac{C+B}{(a+c)^{3/2}},\\ &\frac{\mathrm{f}^2\alpha\mathrm{f}^2\beta}{\mathrm{f}^2\alpha-\mathrm{f}^2\beta}=\frac{a+c}{2},\ \text{cioè}\ \frac{2}{a+c}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)\gamma(\alpha-\beta)}{\gamma^2\alpha\gamma^2\beta}.\end{aligned}\right\}(17)$$

Mediante le uguaglianze (e) ed (f) ne risultano le:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{iB}{\sqrt{a+c}}=\mathrm{P}\alpha-\mathrm{P}\beta-\mathrm{P}(\alpha+\beta)=\frac{1-\mathrm{h}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{h}(\alpha+\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{f}(\alpha+\beta)},\\ &\frac{iC}{\sqrt{a+c}}=\mathrm{P}(\alpha-\beta)+\mathrm{P}\beta-\mathrm{P}\alpha=\frac{1-\mathrm{h}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{h}(\alpha-\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{f}(\alpha-\beta)}.\end{aligned}\right\}(18)$$

Le tre equazioni che stanno al principio di questo § hanno ora, in virtù delle (16), assunte le forme seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1-\lambda}{a+c} &= -\frac{1}{\mathfrak{f}^2\alpha} + k^2\mathfrak{f}^2 u = -\frac{G(\alpha+u)\,G(\alpha-u)}{\gamma^2\alpha\, G^2 u}\,,\\
\frac{1+\lambda}{a+c} &= \frac{1}{\mathfrak{f}^2\beta} - k^2\mathfrak{f}^2 u = \frac{G(\beta+u)\,G(\beta-u)}{\gamma^2\beta\, G^2 u}\,,\\
\frac{\lambda+A}{a+c} &= \frac{1}{\mathfrak{f}^2(\alpha+\beta)} - k^2\mathfrak{f}^2 u = \frac{G(\alpha+\beta+u)\,G(\alpha+\beta-u)}{\gamma^2(\alpha+\beta)\, G^2 u}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

§ 7. *I nove coseni di direzione vengono trasformati in quattro variabili imaginarie.*

Le quattro posizioni:

$$\frac{1-\lambda}{a+c} = -xx'\,,\qquad \frac{1+\lambda}{a+c} = yy'\,,$$

$$\frac{\mu-i\nu}{a+c} = ixy\,,\qquad \frac{\lambda'-i\lambda''}{a+c} = ixy'\,,$$

traggono seco come conseguenze le:

$$\frac{\mu+i\nu}{a+c} = ix'y'\,,\qquad \frac{\lambda'+i\lambda''}{a+c} = ix'y\,,$$

(giacchè $\mu^2+\nu^2=\lambda'^2+\lambda''^2=1-\lambda^2$) e determinano i rapporti delle quattro nuove variabili x, x', y, y', in modo unico, mentre a causa di

$$x^2 = -\frac{ixy\,.\,ixy'}{yy'}\,,$$

la scelta x e $-x$ è libera. Siccome ixy è coniugato ad $ix'y'$, ed ixy' ad $ix'y$, anche i prodotti $-x^2yy'$, $-x'^2yy'$ saranno coniugati. Quindi, essendo yy' reale, bisogna che x^2 sia coniugato ad x'^2; e perchè xx' è negativo, ne segue che ix, ix' sono coniugati, epperò y, y' lo sono del pari. Oltre a ciò sappiamo già dalle (19) che:

$$xx' = \frac{G(\alpha+u)\,G(\alpha-u)}{\gamma^2\alpha\, G^2 u}\,,\qquad yy' = \frac{G(\beta+u)\,G(\beta-u)}{\gamma^2\beta\, G^2 u}\,.\qquad(20)$$

Sommando e sottraendo le uguaglianze notissime:

$$\mu' = \nu''\lambda - \nu\lambda''\,,\qquad \nu' = \lambda''\mu - \lambda\mu''\,,$$

$$\mu'' = \nu\lambda' - \nu'\lambda\,,\qquad \nu'' = \lambda\mu' - \lambda'\mu\,,$$

secondo ambedue le diagonali, otterremo le:

$$\left.\begin{array}{l|l} \lambda'\mu-\nu\lambda''=(1+\lambda)(\mu'-\nu'') & \lambda'\mu+\nu\lambda''=-(1-\lambda)(\mu'+\nu'') \\ \nu\lambda'+\lambda''\mu=(1+\lambda)(\mu''+\nu') & \nu\lambda'-\lambda''\mu=\quad(1-\lambda)(\mu''-\nu') \end{array}\right| .$$

Moltiplicando le equazioni di una stessa colonna ordinatamente per 1, $-i$, e sommando, si hanno le:

$$(\mu-i\nu)(\lambda'-i\lambda'')=\quad(1+\lambda)[\mu'-\nu''+i(\mu''+\nu')] \,,$$
$$(\mu-i\nu)(\lambda'+i\lambda'')=-(1-\lambda)[\mu'+\nu''+i(\mu''-\nu')] \,.$$

Onde, raccolto il tutto, abbiamo il gruppo di dieci equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{l|l|l} 1-\lambda=-(a+c)xx' & \mu+i\nu=(a+c)ix'y' & \lambda'+i\lambda''=(a+c)ix'y \\ 1+\lambda=\quad(a+c)yy' & \mu-i\nu=(a+c)ixy & \lambda'-i\lambda''=(a+c)ixy' \end{array} \\ \begin{array}{l|l} \mu'+\nu''+i(\mu''-\nu')=-(a+c)y^2 & \mu'-\nu''+i(\mu''+\nu')=-(a+c)x'^2 \\ \mu'+\nu''-i(\mu''-\nu')=-(a+c)y'^2 & \mu'-\nu''-i(\mu''+\nu')=-(a+c)x^2 \end{array} \end{array}\right\} \quad (21)$$

il quale lega la costante $x+c$ ed i nove coseni di direzione alle quattro nuove variabili x, x', y, y'. Le due prime equazioni di questo sistema, ove si osservi alla (17), somministrano la relazione:

$$yy'-xx'=\frac{2}{a+c}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)\gamma(\alpha-\beta)}{\gamma^2\alpha\gamma^2\beta} \qquad (22)$$

fra le quattro nuove variabili, le quali perciò contano solo per tre fra loro indipendenti, come era da aspettarsi.

Passiamo ora alle derivate delle nuove variabili, per ottenere espressioni analoghe alle $\frac{d\lambda}{dt}=\mu r-\nu q, \ldots$ Essendo:

$$\frac{d}{dt}[\mu'-i\mu''-i(\nu'-i\nu'')]=-i\begin{vmatrix} 0 & i & 1 \\ \lambda'-i\lambda'' & \mu'-i\mu'' & \nu'-i\nu'' \\ p & q & r \end{vmatrix} \begin{array}{l} =ip[\mu'-i\mu''-i(\nu'-i\nu'')] \\ -i(\lambda'-i\lambda'')(q-ir) \,, \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}[\mu'+i\mu''-i(\nu'-i\nu'')]=-i\begin{vmatrix} 0 & i & 1 \\ \lambda'+i\lambda'' & \mu'+i\mu'' & \nu'+i\nu'' \\ p & q & r \end{vmatrix} \begin{array}{l} =ip[\mu'+i\mu''-i(\nu'+i\nu'')] \\ -i(\lambda'+i\lambda'')(q-ir) \,, \end{array}$$

sostituitevi dal gruppo (21) le nuove variabili, e fatte ordinatamente le divisioni per $-2n(a+c)x$, $-2n(a+c)y$, se poniamo per brevità:

$$\frac{p}{2n}=\varepsilon\,, \quad \frac{q-ir}{2n}=z\,, \quad \frac{q+ir}{2n}=z',$$

conseguiremo le:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{du}&=\quad i\varepsilon x-y'z\,, & \frac{dy}{du}&=\quad i\varepsilon y-x'z\,,\\ \frac{dx'}{du}&=-i\varepsilon x'+yz'\,, & \frac{dy'}{du}&=-i\varepsilon y'+xz'\,,\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

ove la seconda linea è stata dedotta dagli scambi simultanei $(i,-i)$, $(x,-x')$, (y, y'), (z, z').

Per trovare delle relazioni fra le z, z' e le x, x', y, y' ricorriamo alle tre equazioni integrali che stanno al principio del § 3, ed in virtù delle abbreviazioni ivi introdotte e della (14) possono scriversi come segue:

$$\frac{q\mu+r\nu}{2n}=\frac{C-B\lambda}{\sqrt{a+c}}\,,\qquad \frac{q^2+r^2}{4n^2}=\frac{\lambda+A}{a+c}\,.\tag{24}$$

Ma per le notazioni dianzi introdotte, si ha:

$$\frac{q\mu+r\nu}{2n}=\frac{a+c}{2}(ix'y'z+ixyz')\,,\qquad \frac{q^2+r^2}{4n^2}=zz'\,,$$

$$\frac{C-B\lambda}{(a+c)^{3/2}}=\frac{C-B}{(a+c)^{3/2}}-\frac{B}{\sqrt{a+c}}xx'=\frac{C+B}{(a+c)^{3/2}}-\frac{B}{\sqrt{a+c}}yy'\,.$$

Dunque, se poniamo per brevità:

$$\frac{B}{\sqrt{a+c}}=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\varepsilon=\zeta\,,\tag{25}$$

ed abbiamo riguardo alle (17), otterremo finalmente:

$$i\frac{C-B\lambda}{(a+c)^{3/2}}=-\tfrac{1}{2}(x'y'z+xyz')=\frac{\mathfrak{h}\alpha\mathfrak{j}\alpha}{\mathfrak{f}^3\alpha}-i\zeta xx'=\frac{\mathfrak{h}\beta\mathfrak{j}\beta}{\mathfrak{f}^3\beta}-i\zeta yy'\,;\tag{26}$$

$$zz'=\frac{\lambda+A}{a+c}=\frac{\mathrm{G}(\alpha+\beta+u)\mathrm{G}(\alpha+\beta-u)}{\gamma^2(\alpha+\beta)\mathrm{G}^2u}\,.\tag{27}$$

§ 8. *Le due ultime integrazioni.*

Dalle (23) deduconsi agevolmente le:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{x}{x'}=i\varepsilon-\tfrac{1}{2}\frac{x'y'z+xyz'}{xx'}\,,\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{y}{y'}=i\varepsilon-\tfrac{1}{2}\frac{x'y'z+xyz'}{yy'}\,,$$

e da ciascuna di queste mediante la più opportuna delle due espressioni (26)

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{x}{x'}=i(\varepsilon-\zeta)+\frac{\mathfrak{h}\alpha\mathfrak{j}\alpha}{\mathfrak{f}^3\alpha}\cdot\frac{1}{xx'}=i(\varepsilon-\zeta)+\frac{\mathfrak{h}\alpha\mathfrak{j}\alpha}{\mathfrak{f}\alpha}\cdot\frac{1}{1-k^2\mathfrak{f}^2\alpha\mathfrak{f}^2u}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{y}{y'}=i(\varepsilon-\zeta)+\frac{\mathfrak{h}\beta\mathfrak{j}\beta}{\mathfrak{f}\beta}\cdot\frac{1}{1-k^2\mathfrak{f}^2\beta\mathfrak{f}^2u}\,.$$

Integrando dietro la formola (g) e ponendo per brevità $\varepsilon-\zeta=\eta$, si ha

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x}{x'}=(i\eta+\mathrm{P}\alpha)u+\tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{G}(\alpha-u)}{\mathrm{G}(\alpha+u)},$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{y}{y'}=(i\eta+\mathrm{P}\beta)u+\tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{G}(\beta-u)}{\mathrm{G}(\beta+u)}.$$

Mi sono qui permesso di trascurare le due costanti d'integrazione, perchè il metterle non sarebbe altro che scrivere $e^{im}x$, $e^{in}y$ invece di x, y, cioè $e^{i(m+n)}(\mu-i\nu))$, $e^{i(n-m)}(\lambda'+i\lambda'')$ invece di $\mu-i\nu$, $\lambda'+i\lambda''$, cioè alterare le posizioni dei secondi assi nei loro rispettivi piani equatoriale ed orizzontale. (È sottinteso che m, n siano costanti reali.) Perciò anche la suddetta scelta fra x e $-x$ è inconcludente, giacchè -1 è reciproco a sè stesso. Il confronto di queste due equazioni colle (20) ci dà

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{(i\eta+\mathrm{P}\alpha)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha-u)}{\gamma\alpha\mathrm{G}u}, & x'&=e^{-(i\eta+\mathrm{P}\alpha)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha+u)}{\gamma\alpha\mathrm{G}u},\\ y&=e^{(i\eta+\mathrm{P}\beta)u}\frac{\mathrm{G}(\beta-u)}{\gamma\beta\mathrm{G}u}, & y'&=e^{-(i\eta+\mathrm{P}\beta)u}\frac{\mathrm{G}(\beta+u)}{\gamma\beta\mathrm{G}u},\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

ed ora, per mezzo delle (21) e (28), i coseni di direzione che determinano la posizione del pendolo rispetto al sistema fisso sono espressi in funzione del tempo.

Conviene aver riguardo alla qualità degli argomenti costanti α, β. Secondo che $\alpha=i\alpha'$ (1°), $2iL-i\alpha'$ (2°), $-i\alpha'$ (3°, 4°, 5°), ove $0<\alpha'<L$, avvertendo alle uguaglianze

$$\mathrm{P}(-x)=-\mathrm{P}x,\ \mathrm{P}(2iL+x)=-\frac{i\pi}{K}+\mathrm{P}x,\ \frac{\mathrm{G}(2iL-i\alpha'-u)}{\gamma(2iL-i\alpha')}=-e^{\frac{i\pi u}{K}}\frac{\mathrm{G}(i\alpha'+u)}{\gamma(i\alpha')},$$

avremo $\qquad ix=\ e^{\left(i\eta+\mathrm{P}(i\alpha')\right)u}\dfrac{i\mathrm{G}(i\alpha'-u)}{\gamma(i\alpha')\mathrm{G}u}$ nel caso 1°

ed $\qquad ix=-e^{\left(i\eta-\mathrm{P}(i\alpha')\right)u}\dfrac{i\mathrm{G}(i\alpha'+u)}{\gamma(i\alpha')\mathrm{G}u}$ nei casi rimanenti

(ove il fattore -1 è inconcludente); ed è da notarsi che soltanto nel 2° caso il nuovo esponente

$$\left(i\eta-\mathrm{P}(i\alpha')\right)u\quad\text{eguaglia}\quad\left(i\eta+\mathrm{P}\alpha+\frac{i\pi}{K}\right)u,$$

non già $(i\eta+\mathrm{P}\alpha)u$, mentre negli altri casi è lo stesso che dianzi.

In conseguenza delle cose esposte al § 1, la fase della $\mathrm{G}(i\alpha'-u)$ oscilla, coll' aumentar del tempo, fra due limiti più stretti che non lo sono $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. Dunque, dopo l' intervallo $2K:n$ di tempo, la fase di ix si sarà sempre accresciuta della costante $(\eta\mp i\mathrm{P}(i\alpha')).2K$, cioè di $2\pi+(\eta-i\mathrm{P}\alpha).2K$ nel 2.° caso, di $(\eta-i\mathrm{P}\alpha).2K$ in tutti gli altri casi, perchè l'espressione

$$\frac{i\mathrm{G}(i\alpha'-u)}{\gamma(i\alpha')\mathrm{G}u}, \text{ oppure } \frac{i\mathrm{G}(i\alpha'+u)}{\gamma(i\alpha')\mathrm{G}u}$$

dopo il detto intervallo rientra in sè medesima.

In quanto alla y, si ha $\beta=K-i\beta'$ (1°, 2°, 4°,), $=K+i\beta'$(3°, 5°), ove $0<\beta'<L$, epperò in tutti i casi la fase delle $\mathrm{G}(\beta-u)$ oscilla fra due limiti più stretti di $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. Inoltre abbiamo

$$\mathrm{P}(K\mp i\beta')=\pm\left(\frac{\mathrm{f}(i\beta')\mathrm{j}(i\beta')}{\mathrm{h}(i\beta')}-\mathrm{Z}(i\beta')\right),$$

$$y=e^{(i\eta+\mathrm{P}(K\mp i\beta'))u}\frac{\mathfrak{B}(i\beta'\pm u)}{\mathrm{g}(i\beta')\mathrm{G}u}\left|\begin{matrix}1.\ 2.\ 4.\\ 3.\ 5.\end{matrix}\right|,$$

In tutti i casi la fase della y avrà sempre preso l'aumento $(\eta-i\mathrm{P}\beta).2K$ dopo l'intervallo $2K:n$.

Per quanto si è detto, la parte proporzionale al tempo, della fase di $\mu-i\nu$ è $\left(\frac{\pi}{K}+2\eta-i(\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta)\right)u$ nel 2° caso, e $[2\eta-i(\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta)]\,u$ in tutti gli altri casi.

E la analoga parte della fase di $\lambda'+i\lambda''$ è $\left(-\frac{\pi}{K}+i(\mathrm{P}\alpha-\mathrm{P}\beta)\right)u$ nel 2° caso, ed $i(\mathrm{P}\alpha-\mathrm{P}\beta)u$ negli altri casi.

Se projettiamo il piombino sul piano equatoriale del pendolo e l'asse singolare del pendolo sul piano orizzontale, allora la fase di $\lambda'+i\lambda''$ sarà l'azimut dell'asse singolare, e la fase di $\mu-i\nu$ sarà l'angolo onde il secondo asse d'inerzia precede la projezione del piombino sul piano equatoriale.

Pongasi $y=Me^{i\psi}$, $ix=Ne^{i\omega}$, ove M, N siano positivi, ψ, ω reali, ed il gruppo (21) fornirà per i coseni di direzione, moltiplicati per M^2+N^2, le espressioni seguenti:

$$(M^2+N^2)\times\begin{Bmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} M^2-N^2 & , & 2MN\cos(\psi-\omega) & , & 2MN\operatorname{sen}(\psi-\omega) \\ 2MN\cos(\psi+\omega), & & -M^2\cos2\psi+N^2\cos2\omega, & & -M^2\operatorname{sen}2\psi-N^2\operatorname{sen}2\omega \\ -2MN\operatorname{sen}(\psi+\omega), & & M^2\operatorname{sen}2\psi-N^2\operatorname{sen}2\omega, & & -M^2\cos2\psi-N^2\cos2\omega \end{Bmatrix}.$$

S'imagini ora un raggio (di coseni di direzione $\alpha, \alpha', \alpha''$ rispetto agli assi fissi) tale che una rotazione di angolo θ (nel senso positivo) intorno ad esso trasferisca un sistema di coordinate dalla coincidenza iniziale col sistema fisso nella coincidenza finale col sistema d'inerzia del pendolo. Allora per mezzo delle formole (*)

$$2\operatorname{sen}\theta\times(\alpha, \alpha', \alpha'')=\mu''-\nu',\ \nu-\lambda'',\ \lambda'-\mu,$$

$$4\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\lambda+\mu'+\nu'',$$

troveremo, ponendo per brevità $R^2=M^2\cos^2\psi+N^2$,

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{M\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{M^2+N^2}},\quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=-\frac{R}{\sqrt{M^2+N^2}},$$

$$R\alpha=M\cos\psi,\quad R\alpha'=N\cos\omega,\quad R\alpha''=-N\operatorname{sen}\omega.$$

§ 9. *L'asse istantaneo di rotazione.*

Passiamo a calcolare la z. A questo scopo possiamo giovarci della prima equazione (23), la quale ci dà:

$$y'z=i\varepsilon x-\frac{dx}{du}=-e^{i\varepsilon u}\frac{d}{du}(e^{-i\varepsilon u}x)=-e^{i\varepsilon u}\frac{d}{du}\left(e^{(-i\zeta+\mathrm{P}\alpha)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha-u)}{\gamma\alpha\mathrm{G}u}\right).$$

Per le (18) si ha $-i\zeta+\mathrm{P}\alpha=\mathrm{P}(\alpha+\beta)-\mathrm{P}\beta$; epperò, se nella proposizione (i) sostituiamo $\alpha+\beta, -\beta, u$ rispettivamente per α, β, x, avremo:

$$\frac{d}{du}(e^{-i\varepsilon u}x)=-e^{[\mathrm{P}(\alpha+\beta)-\mathrm{P}\beta]u}\frac{\mathrm{G}(\alpha+\beta-u)\mathrm{G}(\beta+u)}{\gamma(\alpha+\beta)\gamma\beta\mathrm{G}^2u}.$$

(*) Veggasi Brioschi, *Teorica dei determinanti,* pag. 67.

e quindi:

$$z = e^{(2i\eta+P\alpha+P\beta)u}\frac{G(\alpha+\beta-u)}{\gamma(\alpha+\beta)Gu}, \quad z' = e^{-(2i\eta+P\alpha+P\beta)u}\frac{G(\alpha+\beta+u)}{\gamma(\alpha+\beta)Gu}; \tag{29}$$

ove la seconda equazione si deriva dal confronto della prima colla (27). Poichè $\alpha+\beta=K+i\delta'$ (1°, 2°, 3°), $K-i\delta'$ (4°, 5°,), essendo $0<\delta'<L$, in tutti cinque i casi la fase della $G(\alpha+\beta-u)$ oscilla fra due limiti più vicini che non lo sono $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; epperò $[2\eta-i(P\alpha+P\beta)]u$ è sempre la esatta espressione per la parte uniformemente variante della fase di $q-ir$.

Mi sia permesso di aggiungere una verificazione della espressione (29) per la z. La (26) può essere posta sotto la forma:

$$\tfrac{1}{2}(x'y'z+xyz') = i\frac{B\lambda-C}{(a+c)^{3/2}} = \frac{iB}{\sqrt{a+c}}\frac{\lambda-a}{a+c} - i\frac{C-Ba}{(a+c)^{3/2}},$$

ove $\frac{iB}{\sqrt{a+c}} = \frac{1-\mathfrak{h}\alpha\mathfrak{h}\beta\mathfrak{h}(\alpha+\beta)}{\mathfrak{f}\alpha\mathfrak{f}\beta\mathfrak{f}(\alpha+\beta)}$ per la (18), $\frac{\lambda-a}{a+c} = -k^2\mathfrak{f}^2u$. Dal gruppo (16) poi si ricava:

$$\frac{i}{\mathfrak{f}\alpha\mathfrak{f}\beta\mathfrak{f}(\alpha+\beta)} = \pm\frac{\sqrt{(1-a^2)(a+A)}}{(a+c)^{3/2}}\left|\begin{matrix}1\\2.\ 3.\ 4.\ 5\end{matrix}\right| = \frac{C-Ba}{(a+c)^{3/2}}.$$

Dunque:

$$\tfrac{1}{2}(x'y'z+xyz') = \frac{\mathfrak{j}^2u+k^2\mathfrak{h}\alpha\mathfrak{h}\beta\mathfrak{h}(\alpha+\beta)\mathfrak{f}^2u}{\mathfrak{f}\alpha\mathfrak{f}\beta\mathfrak{f}(\alpha+\beta)}.$$

Inoltre le equazioni differenziali (23) danno:

$$\tfrac{1}{2}(x'y'z-xyz') = -\tfrac{1}{2}\frac{d.xx'}{du} = -\frac{1}{a+c}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{d\lambda}{du} = k^2\mathfrak{f}u\mathfrak{h}u\mathfrak{j}u.$$

Sommando si ha per il valore di $x'y'z$ una equazione, la quale mediante le (28) e (29) si ridurrà alla uguaglianza:

$$G(\alpha+u)G(\beta+u)G(\alpha+\beta-u)$$
$$=G\alpha G\beta G(\alpha+\beta)Gu\mathfrak{B}^2u+k^2g\alpha g\beta g(\alpha+\beta)Gu\gamma^2u+k^2\gamma\alpha\gamma\beta\gamma(\alpha+\beta)\gamma ugu\mathfrak{B}u,$$

la cui esattezza apparisce dai noti teoremi di addizione risguardanti gli integrali ellittici di terza specie.

§ 10. *Le somme di aree.*

Al § 2 le somme di aree projettate sui piani fissi vennero indicate con MW, MW', MW'', essendo M la massa totale del pendolo; e poi le supposizioni particolari dal § 3 traggono seco le equazioni:

$$W=\mathfrak{D}, \quad W'=\mathfrak{A}p\lambda'+\mathfrak{B}(q\mu'+r\nu'), \quad W''=\mathfrak{A}p\lambda''+\mathfrak{B}(q\mu''+r\nu'').$$

Dividendole per $2n\mathfrak{B}=\sqrt{2gX\mathfrak{B}}\sqrt{a+c}$ e ponendo:

$$T=\frac{W'-iW''}{2n\mathfrak{B}}, \qquad T'=\frac{W'+iW''}{2n\mathfrak{B}},$$

otterremo:

$$\frac{W}{2n\mathfrak{B}}=-i\frac{1-\mathrm{h}\alpha\mathrm{h}\beta\mathrm{h}(\alpha-\beta)}{\mathrm{f}\alpha\mathrm{f}\beta\mathrm{f}(\alpha-\beta)}, \qquad \text{[veggasi (18)]}$$

$$\begin{aligned}
T&=\zeta(\lambda'-i\lambda'') + \tfrac{1}{2}(z+z')(\mu'-i\mu'') + \tfrac{1}{2}(z-z')(\nu''+i\nu')\\
&=\zeta(\lambda'-i\lambda'') + \tfrac{1}{2}z[\mu'+\nu''-i(\mu''-\nu')]+\tfrac{1}{2}z'[\mu'-\nu''-i(\mu''+\nu')]\\
&=(a+c)(i\zeta xy'-\tfrac{1}{2}y'^2z-\tfrac{1}{2}x^2z')=\frac{a+c}{2}\left(-2i\eta xy'+y'\frac{dx}{du}-x\frac{dy'}{du}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{a+c}{2}e^{2i\eta u}y'^2\frac{d}{du}\left(e^{-2i\eta u}\frac{x}{y'}\right)=\frac{a+c}{2}e^{-2\mathrm{P}\beta.u}\frac{\mathrm{G}^2(\beta+u)}{\gamma\alpha\gamma\beta\mathrm{G}^2u}\cdot\frac{d}{du}\left(e^{(\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha-u)}{\mathrm{G}(\beta+u)}\right).$$

Quindi giovandoci del teorema (i), ov'è da porsi $x=\beta+u$, e rammentandoci che:

$$\frac{a+c}{2}=\frac{\gamma^2\alpha\gamma^2\beta}{\gamma(\alpha+\beta)\gamma(\alpha-\beta)},$$

conseguiremo:

$$T=e^{(\mathrm{P}\alpha-\mathrm{P}\beta)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha-\beta-u)}{\gamma(\alpha-\beta)\mathrm{G}u}, \qquad T'=e^{-(\mathrm{P}\alpha-\mathrm{P}\beta)u}\frac{\mathrm{G}(\alpha-\beta+u)}{\gamma(\alpha-\beta)\mathrm{G}u}. \tag{30}$$

Senza fare un nuovo calcolo ho pure posto qui il valore della T' come conjugato a quello della T. In fatti lo scambio $(i, -i)$ muta α, β, $\alpha-\beta$, $\alpha-\beta-u$ ordinatamente in $-\alpha$, $2K-\beta$, $-2K-(\alpha-\beta)$, $-2K-(\alpha-\beta+u)$; ond'è facile convincersi della esattezza del valore qui scritto, al quale, per altro, avrebbe condotto anche la calcolazione di TT'.

Intorno alle fase della $\mathrm{G}(\alpha-\beta-u)$ è difficile dir qualche cosa, non sapendosi, in generale, se la parte imaginaria di $\alpha-\beta$ stia fra $-iL$ ed iL, ovvero se oltrepassi questi limiti.

Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent à trois cercles donnés.

(*par M.* A. Cayley *prof. à Cambridge*).

Les deux problèmes que voici sont identiques:

1° Trouver un cercle qui touche à trois cercles donnés;

2° Trouver une 0-sphère (sphère à rayon zéro) qui passe par trois points donnés (en espace).

En effet, en dénotant par z une constante donnée (qui peut être $=0$) si dans le premier problème on prend $a_1, b_1, i(z-c_1)$; $a_2, b_2, i(z-c_2)$; $a_3, b_3, i(z-c_3)$ pour les coordonnées des centres et les rayons des trois cercles donnés, et de même $A, B, i(z-C)$ pour les coordonnées du centre et le rayon du cercle cherché, les équations des cercles donnés seront:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=0\,,$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=0\,,$$
$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2=0\,.$$

Les conditions de contact, en supposant, pour fixer les idées, que les cercles donnés soient intérieurs au cercle cherché, seront:

$$(A-a_1)^2+(B-b_1)^2+(C-c_1)^2=0\,,$$
$$(A-a_2)^2+(B-b_2)^2+(C-c_2)^2=0\,,$$
$$(A-a_3)^2+(B-b_3)^2+(C-c_3)^2=0\,,$$

et, en supposant que A, B, C soient déterminés par ces conditions, on aura:

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=0$$

pour équation du cercle cherché. En éliminant A, B, C entre les quatre équations on obtient une équation laquelle est (comme nous allons voir) de l'ordre 4 en x, y, (et z), et qui représente ainsi l'ensemble de deux cercles dont chacun touche aux trois cercles donnés. Il est évident que dans le second problème, en prenant a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 pour les coordonnées des trois points donnés, et A, B, C pour les coordonnées du centre de la 0-sphère, les mêmes formules ont lieu, et l'équation finale en (x, y, z) sera celle de l'ensemble de deux 0-sphères qui passent chacune par les trois points donnés.

On obtient l'équation de la 0-sphère passant par trois points donnés, en cherchant la relation qui existe entre les coordonnées de quatre points sur une même 0-sphère. Considérons cinq points quelconques 1, 2, 3, 4, 5, et soient $\overline{12}$, etc., les distances des points 1 et 2, etc. On a entre les distances des cinq points la relation connue

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \overline{12}^2, & \overline{13}^2, & \overline{14}^2, & \overline{15}^2 \\ 1, & \overline{21}^2, & 0, & \overline{23}^2, & \overline{24}^2, & \overline{25}^2 \\ 1, & \overline{31}^2, & \overline{32}^2, & 0, & \overline{34}^2, & \overline{35}^2 \\ 1, & \overline{41}^2, & \overline{42}^2, & \overline{43}^2, & 0, & \overline{45}^2 \\ 1, & \overline{51}^2, & \overline{52}^2, & \overline{53}^2, & \overline{54}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et delà, en supposant que 5 est le centre d'une 0-sphère qui passe par les points 1, 2, 3, 4 (ce qui donne $\overline{51} = \overline{52} = \overline{53} = \overline{54} = 0$), on obtient la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

entre les coordonnées de quatre points quelconques 1, 2, 3, 4 sur une même 0-sphère; cette équation est de l'ordre 4 par rapport aux coordonnées de l'un quelconque des points; donc en prenant (x, y, z) pour les coordonnées du point 4, l'équation sera celle de l'ensemble de deux 0-sphères qui passent chacune par les trois points 1, 2, 3. L'équation est la forme rationale de celle-ci

$$\overline{23}\,.\,\overline{14} + \overline{31}\,.\,\overline{24} + \overline{12}\,.\,\overline{34} = 0,$$

et en supposant, comme auparavant, que (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) (a_3, b_3, c_3) soient les coordonnées des points 1, 2, 3, les valeurs des exspressions qui y entrent sont

$$\overline{23}=\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2}, \quad \overline{14}=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2},$$
$$\overline{31}=\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2+(c_3-c_1)^2}, \quad \overline{24}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2},$$
$$\overline{12}=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}, \quad \overline{34}=\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2}.$$

On se souvient que dans le premier problème z est une constante, et que les rayons des cercles donnés sont $i(z-c_1)$, $i(z-c_2)$, $i(z-c_3)$; donc $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$ représentent les distances tangentielles directes des cercles 2 et 3, 3 et 1 1 et 2, et l'on reconnait ainsi dans l'équation $\overline{23}.\overline{14}+\overline{31}.\overline{24}+\overline{12}.\overline{34}=0$, l'équation $\sqrt{l_1 S_1}+\sqrt{l_2 S_2}+\sqrt{l_3 S_3}=0$ qu'a donnée M. Casey (*Trans. Irish Acad.* 1866) pour équation de l'ensemble de deux cercles qui touchent chacun aux trois cercles donnés $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$, les coefficients $\sqrt{l_1}$, $\sqrt{l_2}$, $\sqrt{l_3}$ étant respectivement les distances tangentielles directes des cercles 2 et 3, 3 et 1, 1 et 2. En substituant pour les trois distances tangentielles directes, les systèmes composés de deux distances inverses et une seule distance directe, on obtient les équations de trois autres paires de cercles, en tout les équations des quatre paires de cercles, qui touchent aux trois cercles donnés.

Je remarque qu'en menant par le centre d'un cercle perpendiculairement à son plan, en l'un ou l'autre sens, une distance $=i\times$ *rayon*, les extrémités de ces distances sont les centres des deux 0-sphères qui passent par le cercle: les points peuvent s'appeler les *contre-foyers* (en anglais *antifoci*) du cercle. Cela étant, on a la construction imaginaire que voici, pour les cercles qui touchent à trois cercles donnés. Prenez (A, A'), (B, B'), (C, C') les contre-foyers des trois cercles donnés; soient K, L les contre-foyers du cercle par les points (A, B, C) et de même K', L' les contre-foyers du cercle par les points (A', B', C'), K, K' et de même L, L' étant des points symétriquement situés par rapport au plan des cercles donnés: alors K, K' seront les contre-foyers d'un cercle qui touche aux trois cercles donnés, et L, L' les contre-foyers d'un autre cercle qui touche aux trois cercles donnés: et si, au lieu des combinaisons (A, B, C), (A', B', C'), on considère les autres combinaisons (A, B', C'), (A', B, C), etc., on obtient de même les autres trois paires de cercles qui touchent aux trois cercles donnés.

Cambridge, 24 mai 1867.

Note sur les équations du cinquième degré.

(*par M.* Michael Roberts *à Dublin.*)

Dans mon Mémoire inséré dans le tome VII des *Annali di Matematica,* page 257, j'ai donné une expression par les racines de l'invariant gauche d'une équation du cinquième degré, qui est assez compliquée. Dans les savantes recherches de M. Hermite on trouve une valeur de cette fonction remarquable par sa simplicité et son élégance. Dans ce qui suit je vais faire voir comment on peut parvenir à ce résultat, en partant de la définition de l'invariant dont il s'agit, que j'ai donnée pour la première fois (voir le *Quarterly Journal n.° 18*, mars 1862, page 150)*, savoir qu'il résulte de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre l'équation proposée, rendue homogène, et le covariant dont l'origine est la fonction J. Pour cela remarquons d'abord qu'en désignant par l, m, n, p quatre quantités quelconques, on a

$$\begin{aligned}(2l-m-n)(2m-l-n)(2n-l-m)+(2l-m-p)(2m-l-p)(2p-l-m)+(2l-n-p)(2n-l-p)(2p-l-n)\\ +(2m-n-p)(2n-m-p)(2p-m-n)+6(l+m-n-p)(l+n-m-p)(l+p-m-n)=0\,,\end{aligned}$$

d'où l'on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma l^3\{2mp-n(m+p)\}\{2np-m(n+p)\}\{2mn-p(m+n)\}\\ +6\{mp(n-l)+ln(p-m)\}\{np(m-l)+lm(p-n)\}\{np(m-l)+lm(n-p)\}=0\,.\end{aligned}$$

Observons maintenant qu'en conservant les notations de mon Mémoire, le covariant dont l'origine est la fonction J peut s'écrire de la manière suivante:

(*) Cette définition résulte comme corollaire d'un théorème que j'ai donné (*Quarterly Journal,* vol. v, pag. 19) savoir que, si φ, ψ sont deux covariants d'une forme U, la quantité qui provient de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre les équations $\varphi=0$, $\psi=0$ est un invariant de la forme U.

$$a_0^3\{J_1(x-\alpha y)^3+J_2(x-\beta y)^3+J_3(x-\gamma y)^3+J_4(x-\delta y)^3+J_5(x-\varepsilon y)^3\},$$

et par conséquent l'invariant gauche a pour facteur la quantité

$$J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3.$$

Mais en posant $\alpha-\beta=l$, $\alpha-\gamma=m$, $\alpha-\delta=n$, $\alpha-\varepsilon=p$, nous tirons

$$J_2=\{2np-m(n+p)\}\{2mp-n(m+p)\}\{2mn-p(m+n)\},$$
$$J_3=\{2ln-p(l+n)\}\{2lp-n(l+p)\}\{2np-l(n+p)\},$$
$$J_4=\{2lm-p(l+m)\}\{2lp-m(l+p)\}\{2mp-l(m+p)\},$$
$$J_5=\{2lm-n(l+m)\}\{2ln-m(l+n)\}\{2mn-l(m+n)\},$$

en sorte que $J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3$ s'exprime par l, m, n, p de la manière suivante

$$-6\{mp(n-l)+ln(p-m)\}\{np(m-l)+lm(p-n)\}\{np(m-l)+lm(n-p)\}$$

d'où, en remettant leurs valeurs par les racines et en posant

$$f=(\alpha-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\gamma-\varepsilon),\quad g=(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\delta-\varepsilon),$$
$$h=(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)$$

nous trouvons

$$J_2(\alpha-\beta)^3+J_3(\alpha-\gamma)^3+J_4(\alpha-\delta)^3+J_5(\alpha-\varepsilon)^3=-6fgh,$$

ce qui coïncide avec l'expression de M. Hermite.

Désignons maintenant par $Jx^3+3J'x^2y+3J''xy^2+J'''y^3$ le covariant dont l'origine est J, et nous savons que l'invariant du douzième degré que nous nommons C a pour expression

$$C=27(JJ'''-J'J'')^2-108(J'^2-JJ'')(J''^2-J'J''').$$

Si l'équation donnée a deux racines doubles, ou bien si $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, ce dernier covariant devient, en introduisant les valeurs par les racines des quantités J, J', J'', J''':

$$\frac{a_0^3(\alpha-\gamma)^3}{3000}\{2(\gamma-\varepsilon)^3(x-\alpha y)^3-2(\alpha-\varepsilon)^3(x-\gamma y)^3+(\alpha-\gamma)^3(x-\varepsilon y)^3\}.$$

(Je dois observer qu'au lieu de cette formule j'ai donné par inadvertence un résultat inexact dans mon Mémoire). Pour le cas de deux racines doubles nous avons:

$$C=\frac{a_0^{12}(\alpha-\gamma)^{18}(\alpha-\varepsilon)^6(\gamma-\varepsilon)^6}{2^8\times5^{12}},$$

et pour l'octinvariant Ω, l'expression suivante:

$$\Omega = \frac{a_0^8(\alpha-\gamma)^{12}(\alpha-\varepsilon)^4(\gamma-\varepsilon)^4}{2^5 \times 5^8}$$

et pour l'invariant K:

$$K = \frac{2(\alpha-\gamma)^6(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2}{5^4},$$

en sorte que, si λ, μ, ν sont des facteurs numériques, un invariant du douzième degré $\lambda K^3 + \mu K\Omega + \nu C$ s'anéantit pour deux racines doubles si $2^{11}\lambda + 2^4\mu + \nu = 0$, ou bien si l'invariant peut être mis sous la forme: $\lambda(K^3 - 2^{11}C) + \mu(K\Omega - 2^4 C)$.

On voit que d'après les notations de mon Mémoire le produit $J_1 J_2 J_3 J_4 J_5$ s'exprime par un invariant du douzième degré: et nous trouvons la formule suivante:

$$\frac{a_0^{12} J_1 J_2 J_3 J_4 J_5}{5^{10}} = K^3 - 2^7 \times 3^2 K\Omega + 2^{13} \times 3^3 C,$$

et la valeur nulle de cet invariant indique l'existence d'une relation de la forme

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) + (\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = 0$$

entre les racines d'une équation du cinquième degré.

D'après l'expression de M. Hermite, on voit que son invariant s'anéantit en supposant deux racines égales, p. e. $\beta = \gamma$, si l'on a en même temps l'une ou l'autre des conditions

$$\delta - \varepsilon = 0, \quad (\alpha-\delta)(\beta-\varepsilon) + (\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta) = 0;$$

par conséquent l'invariant gauche s'anéantit pour ces deux systèmes de conditions

$$\left.\begin{aligned} K^2 - 12\delta\Omega &= 0 \\ K^3 - 2^{11} C &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} K^2 - 12\delta\Omega &= 0 \\ K^3 - 2^{10} \cdot 3^3 C &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ce qui s'accorde avec des résultats déjà connus.

Nous avons aussi, en nous rappelant les notations de mon Mémoire,

$$\frac{a_0^{12} N_1 N_2 N_3 N_4 N_5}{2^{10} \times 5^{10}} = K^3 - 2K\Omega + qC,$$

et l'anéantissement de cette quantité établit entre les racines d'une équation du cinquième degré une relation de la forme:

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2$$
$$+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2=0.$$

On peut mettre le premier membre de cette dernière équation sous la forme

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)^2 I_2+(\alpha-\gamma)^2 I_3+(\alpha-\delta)^2 I_4+(\alpha-\varepsilon)^2 I_5\}$$

et, en observant que le covariant dont l'origine est la fonction I peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{a_0^2}{200}\{I_1(x-\alpha y)^2+I_2(x-\beta y)^2+I_3(x-\gamma y)^2+I_4(x-\delta y)^2+I_5(x-\varepsilon y)^2\},$$

on déduit que la quantité qui résulte de l'élimination de $\frac{y}{x}$ entre les équations :

$$a_0x^5+5a_1x^4+10a_2x^3+10a_3x^2+5a_4x+a_5=0$$

$$I_1(x-\alpha)^2+I_2(x-\beta)^2+I_3(x-\gamma)^2+I_4(x-\delta)^2+I_5(x-\varepsilon)^2=0$$

est $K^3-2K\Omega+qC$: ce qui a été déjà remarqué par M. Hermite.

On trouve aussi que la quantité

$$81\,J_1J_2J_3J_4J_5-8\,N_1N_2N_3N_4N_5$$

s'annulle pour deux racines doubles.

Collège de la Trinité à Dublin, le 12 avril 1867.

Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a sè stessa, scorre con tre delle sue rette sopra tre punti fissi.

(*del D.r* Cristiano Wiener, *professore a Carlsruhe*).

---

1. Anzitutto rendiamoci persuasi della possibilità del moto sovra enunciato. Poichè tre rette a, b, c del sistema piano α debbono costantemente passare per tre punti fissi A, B, C rispettivamente, è chiaro che α non può uscire dal piano fisso ABC e che può essere spostato in esso, ma non già capovolto. Quindi tutti i punti e le rette su cui cadrà il discorso si supporranno giacenti nel piano fisso ABC. I punti e le rette che rimangono immobili in questo piano saranno rappresentati da lettere senza indice numerico (A, K_a); mentre invece le diverse posizioni dei punti e delle rette che partecipano al moto della figura saranno notate con lettere munite d'indice numerico (A_1, A_2, a_2).

Dovendo α mantenersi simile alla figura iniziale, se ne otterrà una seconda posizione conducendo per A una qualunque nuova posizione a_2 della retta a_1, indi per B e per C due rette b_2 e c_2 rispettivamente, tali che risulti

$$\widehat{a_2 b_2} = \widehat{a_1 b_1} \qquad \text{ed} \qquad \widehat{a_2 c_2} = \widehat{a_1 c_1},$$

e che dei due triangoli $a_2 b_2 c_2$ simili ad $a_1 b_1 c_1$, conciliabili con queste condizioni, si trovi con esse formato quello che può, mediante un semplice spostamento nel proprio piano, senza ribaltamento, essere disposto parallelamente ad $a_1 b_1 c_1$.

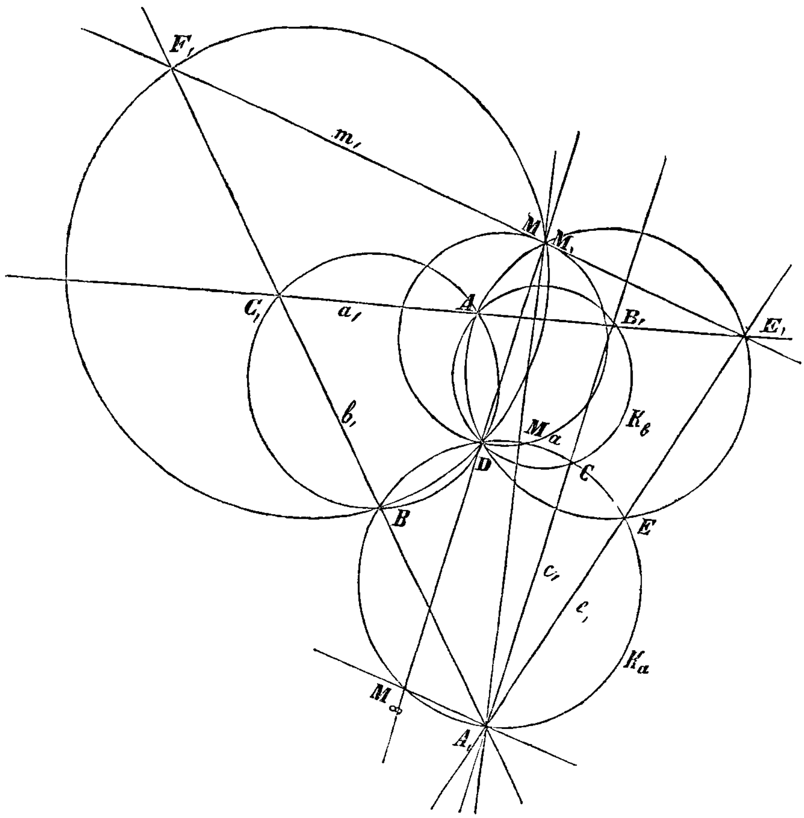
Inoltre il moto è intieramente determinato, perchè ad ogni nuova posizione a_2 di una retta a_1 corrisponde solamente una posizione b_2, c_2 delle rette b_1, c_1; ed un qualunque punto M_1 passa nella posizione M_2 determinata senza ambiguità dall'eguaglianza dei seguenti fasci di rette:

$$A_2(B_2 C_2 M_2) = A_1(B_1 C_1 M_1),$$
$$B_2(C_2 A_2 M_2) = B_1(C_1 A_1 M_1),$$
$$C_2(A_2 B_2 M_2) = C_1(A_1 B_1 M_1).$$

dove A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 rappresentano rispettivamente le intersezioni b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1; b_2c_2, c_2a_2, a_2b_2.

2. Per investigare il moto del sistema dobbiamo appoggiarci sul seguente:

Lemma. Se sui tre lati a_1, b_1, c_1 di un triangolo i cui vertici opposti sieno rispettivamente A_1, B_1, C_1, vi sono tre punti A, B, C; e se si descrivono tre cerchi, ciascuno dei quali passi per un vertice e pei due punti collocati sui lati adiacenti ad esso, cioè i cerchi A_1BC, B_1CA, C_1AB; questi si intersecano in un solo e medesimo punto D, e gli archi circolari compresi fra ciascun vertice e il punto D, associati a tre a tre in modo che due qualunque non passino per uno stesso dei tre punti A, B, C, cioè tanto gli archi della terna A_1BD, B_1CD, C_1AD, quanto quelli dell'altra terna A_1CD, B_1AD, C_1BD, sottendono eguali angoli al centro.



Dimostrazione. Sia D l'intersezione dei cerchi A_1BC e B_1CA, e sia questo punto interno al triangolo $A_1B_1C_1$. Si ha

$$BDC = 180^\circ - BA_1C, \quad CDA = 180^\circ - CB_1A,$$

ed

$$ADB = 360^\circ - BDC - CDA,$$

quindi

$$ADB = BA_1C + CB_1A = 180° - AC_1B,$$

cioè nel quadrangolo AC_1BD la somma dei due angoli opposti vale 180.° Dunque il quadrangolo è inscrittibile in un cerchio, ed il cerchio passante pei punti A, B, C_1 passa anche pel quarto punto D. Se D non giace entro il triangolo $A_1B_1C_1$, la dimostrazione si compie in un modo del tutto analogo.

L'angolo A_1CD è eguale alla metà dell'angolo al centro misurato dall'arco A_1BD, ed è altresì eguale alla metà dell'angolo al centro misurato dall'arco B_1CD. Quindi sono eguali fra loro due angoli al centro misurati da archi che vanno dai vertici del triangolo $A_1B_1C_1$ al punto D, e di questi archi l'uno passa pel secondo punto comune ai due cerchi, cioè A ovvero C, mentre l'altro non contiene questo punto. Di qui il teorema sovraenunciato.

3. Passeremo ora ad esaminare il moto di un sistema piano α. In primo luogo si trova che: Quando un triangolo $a_1b_1c_1$, che si conserva sempre simile a sè stesso, si muove in modo che i suoi lati passino costantemente pei punti fissi A, B, C risp., ciascuno dei vertici A_1 $(= b_1c_1)$, B_1, C_1 descrive un cerchio fisso determinato dal vertice stesso e dai due punti fissi situati sui due lati adiacenti. I tre cerchi si intersecano in uno stesso punto D.

In fatti, poichè l'angolo BA_1C rimane invariato ed i suoi lati passano sempre pei punti fissi B e C, il suo vertice A_1 descrive il cerchio A_1BC: così B_1 descrive il cerchio B_1CA, e C il cerchio C_1AB. Questi tre cerchi si intersecano in uno stesso punto, secondo il n.° 2.

Chiameremo polo di scorrimento (*Gleitungspunkt*) di una retta, un punto sul quale essa debba in pari tempo girare e scorrere. Così A è il polo di scorrimento di a_1. Quando non ha luogo alcuno scorrimento, quel punto si chiamerà polo di rotazione (*Drehungspunkt*). Noi troveremo che D è il polo di rotazione di ogni retta passante per esso. Se i punti di una tal retta mantenessero invariate le loro mutue distanze, il punto D sarebbe il centro di rotazione (*Drehungsmittelpunkt*) intorno al quale tutti gli altri punti si muoverebbero in cerchi concentrici. Questo caso non si verifica nel nostro sistema.

4. Una qualunque retta e_1 condotta da un vertice A_1 del triangolo iniziale $A_1B_1C_1$ ha per polo di scorrimento il suo punto di intersezione E col cerchio K_a descritto da quel vertice.

Essendo invariabili gli angoli delle tre rette b_1, c_1, e_1 divergenti da A_1, così, se due rette b_1, c_1 passano sempre per i medesimi punti B, C del cerchio K_a, anche la retta e_1 deve sempre incontrare il cerchio in uno stesso punto E.

5. Ogni punto E_1 di un lato a_1 del triangolo iniziale a_1, b_1, c_1 descrive un cerchio passante pel punto E_1, pel polo di scorrimento A di quel lato a_1 e pel polo di rotazione D.

Si tiri da A_1 la retta e_1 al punto E_1 sul lato a_1, e si otterrà un triangolo $a_1\, b_1\, e_1$ (ovvero $a_1\, c_1\, e_1$), i cui tre lati passano costantemente pei tre punti fissi A, B, E (n.° 4) ed il cui vertice E_1 descrive quindi, secondo il n.° 3, un cerchio passante per E_1, A, E e per l'intersezione D dei cerchi descritti da A_1 e B_1.

Osservazione. In luogo del triangolo iniziale $a_1\, b_1\, c_1$ si può ora considerare come triangolo iniziale $a_1\, b_1\, e_1$ od $a_1\, c_1\, e_1$, giacchè questo possiede le medesime proprietà caratteristiche.

6. Una qualunque retta m_1 possiede un polo di scorrimento M, che è la seconda intersezione di m_1 col cerchio descritto dall'intersezione E_1 della retta m_1 con un lato a_1 del triangolo iniziale.

In fatti considerando $A_1\, B_1\, E_1$ come triangolo iniziale (n.° 5), m_1 è una retta divergente da uno dei suoi vertici, E_1, la quale passa costantemente, in virtù del n.° 4, per il suo punto d'intersezione M_1 col cerchio $E_1 AED$ descritto da E_1. Lo stesso vale per le intersezioni di m_1 con b_1 e c_1.

Osservazione I.ª — Poichè ogni retta ha un polo di scorrimento, si può considerare come triangolo iniziale ogni triangolo della figura, unitamente ai poli di scorrimento dei suoi lati.

Osservazione II.ª — Ogni retta condotta pel polo di rotazione D passa costantemente per questo punto.

7. Ogni punto M_1 descrive un cerchio passante per M_1, pel polo di rotazione D e per la seconda intersezione M_a della retta condotta da M_1 ad uno dei vertici A_1 del triangolo iniziale $A_1\, B_1\, C_1$ col cerchio descritto da A_1.

In fatti considerando $A_1\, B_1\, M_1$ come un nuovo triangolo iniziale (n. 6), il teorema diventa una conseguenza del n. 3.

Osservazione I.ª — Se si fa coincidere il punto M_1 con D, il cerchio da esso descritto si riduce ad un punto. Questo è il solo punto del sistema che rimanga fisso; esso è quindi il polo di rotazione del sistema piano.

Osservazione II.ª — Il cerchio descritto dal punto all'infinito di una retta m_1 si confonde colla retta DM, che congiunge il polo di rotazione D col polo di scorrimento M della retta m_1. Esso deve anche contenere l'intersezione M_∞ del cerchio descritto da un punto arbitrario A_1 colla retta condotta per A_1 parallelamente ad m_1.

8. Ogni punto M_1 è il polo di scorrimento di una retta m_1, le cui intersezioni E_1 ed F_1 con due rette a_1 e b_1, aventi A e B per poli di scorrimento, si trovano segando il cerchio MDA colla a_1 in E_1, ed il cerchio MDB colla b_1 in F_1. La retta cercata m_1 è la congiungente $E_1 F_1$.

Ciò emerge dall'effettuare in ordine inverso le costruzioni del n. 6.

9. Un fascio di rette M_1 si muove in modo che il suo centro descrive un cerchio passante pel polo di rotazione D, mentre il polo di scorrimento di ciascuna retta giace all'intersezione della sua posizione iniziale collo stesso cerchio.

Se questa intersezione si fa convergere verso M_1, si trova che quella retta m_1 che ha il suo polo di scorrimento nella posizione iniziale di M_1, è tangente al cerchio descritto da M_1.

Il fascio D gira intorno al suo vertice fisso D.

Quando le rette del fascio sono parallele, i loro poli di scorrimento sono i loro punti d'intersezione colla retta descritta dal centro (all'infinito) del fascio.

10. Una retta punteggiata m_1 gira intorno al suo polo fisso di scorrimento M, mentre ciascuno dei suoi punti descrive un cerchio passante pel punto stesso, per M e per il polo di rotazione D.

I centri di questi cerchi giacciono quindi sulla retta che taglia perpendicolarmente la MD nel suo punto di mezzo. Se si fa coincidere un punto M_1 della punteggiata col punto M, si trova che la posizione iniziale di m_1 è tangente al cerchio descritto da M_1.

I punti di una retta passante per D descrivono cerchi che toccano in D la retta luogo geometrico del punto all' infinito su quella prima retta.

I punti della retta all'infinito seguono trajettorie rettilinee, formanti un fascio D che è eguale ed egualmente disposto al fascio projettante i punti all'infinito. Ciò risulta dal n.° 7, *Oss. II.ª*

11. Un sistema piano α che, rimanendo sempre simile a sè stesso, deve muoversi in guisa che tre delle sue rette passino co-

stantemente per tre punti fissi, è determinato anche dal suo polo di rotazione D, da un punto arbitrario A_1 e dal cerchio K_a descritto da A_1.

In fatti mediante questi dati si può determinare, secondo il n.° 7, il cerchio descritto da un qualunque punto E_1, segando in E il cerchio K_a colla $E_1 A_1$ e costruendo il cerchio $E_1 DE$.

Da ciò poi si deduce, secondo il n.° 6, il polo di scorrimento di una qualunque retta m_1, cercando il cerchio $E_1 DE$ descritto da un qualunque punto E_1 della retta m_1 e determinando la seconda intersezione M di questo cerchio con m_1.

12. In ogni posizione del sistema α le distanze di tutti i punti dal polo di rotazione D, contate nella direzione del moto sulle rispettive trajettorie circolari, sottendono eguali angoli al centro.

In fatti siano A_1 e B_1 due punti qualunque: l'accennata distanza di A_1 da D sarà o l'arco $A_1 CD$ o l'arco $A_1 BD$. Poichè l'angolo $A_1 DB_1$ deve rimanere invariato durante il moto (n°. 9, ultimo teorema), è chiaro che nel primo caso è $B_1 AD$, nel secondo $B_1 CD$ la distanza circolare di B_1 da D. Ora le distanze circolari corrispondenti $A_1 CD$ e $B_1 AD$, oppure $A_1 BD$ e $B_1 CD$ sottendono, pel n.° 2, eguali angoli al centro.

13. Considerando due posizioni qualunque del sistema α, la distanza circolare delle due posizioni di un medesimo punto, contata nella direzione del moto, sottende un angolo al centro che ha lo stesso valore per tutti i punti del sistema.

Ossia: Tutti i punti del sistema α hanno la medesima velocità angolare.

È una conseguenza del n.° 12.

14. Considerando due posizioni qualunque del sistema α, l'angolo delle due posizioni di una retta, contato nel senso del moto, ha lo stesso valore per tutte le rette del sistema.

Ciascuno di questi angoli, essendo un angolo alla periferia del cerchio descritto dal suo vertice (n.° 9), equivale alla metà dell'angolo al centro sotteso dall'arco percorso dal vertice stesso. Poichè dunque, secondo il n.° 3, gli archi descritti da due vertici sottendono eguali angoli al centro, anche gli angoli descritti dalle due rette, equivalendo alla metà di questi, sono eguali fra loro.

Quando ogni retta ha compiuto un mezzo giro, ogni punto ha descritto un'intera circonferenza.

15. Dal n.° 12 risulta immediatamente che:

Tutti i punti del sistema vanno in uno stesso istante a coincidere col polo di rotazione D.

Ovvero: V'è una posizione del sistema nella quale il sistema stesso si concentra tutto in un sol punto, che è il suo polo di rotazione.

Tutti i punti a distanza finita sono allora riuniti in D, mentre i punti all'infinito coprono, in questa posizione del sistema, tutte le rette condotte per D rappresentanti, secondo il n.° 7, le loro trajettorie.

16. Ogni cerchio K_a condotto per il polo di rotazione D viene descritto da un solo punto del sistema, la cui posizione A_1 si desume dalla posizione corrispondente di un altro punto B_1 e dal cerchio K_b descritto da quest'ultimo, conducendo da B_1 la retta che va alla seconda intersezione C dei due cerchi K_a, K_b e protraendola fino alla sua seconda intersezione A_1 con K_a.

È una conseguenza del n.° 13 (*).

Carlsruhe, maggio 1867.

(*) Nei *Nouv. Annales de Mathématiques* (2e série, t. 6, 1867, p. 80) il sig. Petersen dimostra il seguente teorema, sviluppato anche in questa memoria: «Si une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière que trois de ses droites passent par des points fixes, toute autre droite de la figure passera aussi par un point fixe.» Ivi si dà come teorema reciproco quest'altro: «Si une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira une ligne droite.» Ma a persuadersi che tale inversione non è lecita, basta osservare che le figure reciproche di due triangoli simili non sono più triangoli simili.

Correzione. Nel n.° 1 di questa memoria, in luogo di «quello che può, mediante un semplice spostamento nel proprio piano, senza ribaltamento, essere disposto parallelamente ad $a_1 b_1 c_1$» (pag. 139, lin. 17), leggasi «quello pel quale gli angoli di rotazione $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ sono uguali e dello stesso senso.»

Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane.

(*del professore* Ulisse Dini, *a Pisa*).

1. Il sig. Ossian Bonnet, in una importante memoria pubblicata nel *Journal de l'école polytechnique* (cah. 35), ha trovato pel primo le equazioni in termini finiti delle superficie le cui linee di curvatura sono piane; e quindi il problema della ricerca di queste superficie dal lato analitico può dirsi completamente risoluto (*). Però, quando si volesse procedere alla determinazione delle funzioni arbitrarie contenute in quelle equazioni per poterne dedurre le superficie della stessa classe che godono di speciali proprietà, il problema presenterebbe il più spesso delle gravi difficoltà, e quindi riesce ancora di qualche importanza il determinare per altra via le classi più notevoli delle medesime superficie. Guidato da queste considerazioni, mi sono proposto di determinare le superficie a linee di curvatura piane che sono al tempo stesso gobbe, partendo per questo dalla loro equazione differenziale, ed ho trovato che l'iperboloide di rivoluzione ad una sola falda è la sola superficie gobba le cui linee di curvatura siano piane.

La dimostrazione di questo teorema, che credo nuovo, forma l'oggetto della presente nota.

2. La equazione differenziale delle superficie le cui linee di curvatura sono piane, quando si prenda l'asse delle y parallelo alle generatrici di uno dei cilindri che sono l'inviluppo dei piani delle linee di curvatura di uno stesso sistema, è la seguente:

$$\left.\begin{aligned} &pq\left\{m(1+q^2)-\sqrt{1+p^2+q^2}\right\}r\\ +&\left\{m^2(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}-2m(1+p^2)(1+q^2)+(1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}\right\}s\\ +&pqm\left\{(1+p^2)-m\sqrt{1+p^2+q^2}\right\}t=0\,,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

(*) Le superficie in questione sono state l'oggetto d'interessanti studi anche per parte dei sigg. J. A. Serret, Joachimsthal, Brioschi, Picart, ecc.

ove p, q, r, s, t indicano al solito le derivate parziali di primo e secondo ordine di z, ed m è una costante che si riduce a zero quando le linee di curvatura di un sistema sono tutte situate in piani paralleli ad un piano fisso che allora viene ad essere preso per quello delle xz.

Dovendo qui trovare le superficie gobbe che soddisfanno alla equazione a derivate parziali (1), il metodo che primo si presenta è quello già indicato dal Wantzel per la ricerca della superficie gobba di area minima, e applicato poi dal sig. J. A. Serret e da me alla ricerca di superficie gobbe che devono soddisfare a date equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Questo metodo consiste, come è noto, nel combinare le equazioni della generatrice di una superficie gobba con la equazione data, e determinare poi i parametri della medesima generatrice in modo che questa equazione riesca identicamente soddisfatta. Esso, anche nel nostro caso, risolve ben facilmente la questione che ci siamo proposta, e noi andiamo perciò subito ad applicarlo.

3. Siano

$$\left.\begin{aligned} y&=ax+A, \\ z&=bx+B \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

le equazioni delle generatrici di una superficie rigata; a, A, b, B saranno funzioni di un parametro variabile α, e siccome le superficie che qui cerchiamo devono essere gobbe, bisognerà che il determinante

$$\lambda = a'B' - A'b' \qquad (3)$$

formato colle derivate delle medesime quantità abbia un valore differente da zero.

Ricaviamo dalle equazioni (2) i valori di p, r, s, t in funzione di α e q per poi sostituirli nella equazione (1), la quale dovrà allora divenire identica quando a, A, b, B avranno i valori che convengono alle superficie gobbe (2) che hanno le linee di curvatura piane, e servirà così a darci delle equazioni che determineranno questi valori di a, A, b, B.

Per questo osserviamo che lungo ogni generatrice delle superficie (2) si ha:

$$dy = a\,dx, \qquad dz = b\,dx,$$

e quindi sostituendo nella equazione della superficie:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

se ne dedurrà:

$$p = b - aq\,, \tag{4}$$

e così avremo intanto ottenuto p.

Per trovare ora anche r, s, t, osserviamo che dalla seconda delle equazioni (2) si ha:

$$q = (b'x + B')\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,;$$

e poichè la prima dà:

$$1 = (a'x + A')\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,, \qquad 0 = (a'x + A')\frac{\partial \alpha}{\partial x} + a\,,$$

così si avrà:

$$q = \frac{b'x + B'}{a'x + A'}\,, \tag{5}$$

e se ne dedurrà:

$$x = \frac{A'q - B'}{b' - a'q}\,, \quad a'x + A' = -\frac{\lambda}{b' - a'q}\,, \quad b'x + B' = -\frac{\lambda q}{b' - a'q}\,.$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{a(b' - a'q)}{\lambda}\,, \quad \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{(b' - a'q)}{\lambda}\,.$$

Quindi per le (4) e (5) e per queste ultime si avrà:

$$r = (b' - a'q)\frac{\partial \alpha}{\partial x} - as = \frac{a(b' - a'q)^2}{\lambda} - as\,,$$

$$s = (b' - a'q)\frac{\partial \alpha}{\partial y} - at = -\frac{(b' - a'q)^2}{\lambda} - at\,,$$

$$t = \frac{(b''x + B'')(a'x + A') - (b'x + B')(a''x + A'')}{(a'x + A')^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} =$$

$$\frac{(b' - a'q)}{\lambda^2}\left\{(b' - a'q)(B'' - A''q) - (B' - A'q)(b'' - a''q)\right\};$$

e indicando con L_0, L_1, L_2 i coefficienti di q^0, q, q^2 nella parentesi di t, cioè ponendo:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= (B''b' - B'b'')\,, \\ L_1 &= (a''B' - a'B'') - (A''b' - A'b'')\,, \\ L_2 &= (A''a' - A'a'')\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

si avrà finalmente pei valori cercati di p, r, s, t:

$$\left.\begin{aligned}
p&=b-aq\,,\\
r&=\frac{(b'-a'q)}{\lambda^2}\{(a^2L_0+2a\lambda b')+(a^2L_1-2aa'\lambda)q+a^2L_2q^2\}\,,\\
s&=\frac{(b'-a'q)}{\lambda^2}\{(-aL_0-\lambda b')-(aL_1-a'\lambda)q-aL_2q^2\}\,,\\
t&=\frac{(b'-a'q)}{\lambda^2}\{L_0+L_1q+L_2q^2\}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

4. Calcolati così i valori di p, r, s, t in funzione di a e di q, per avere le equazioni che determinano i valori di a, A, b, B che convengono alle superficie gobbe (2) le cui linee di curvatura sono piane, bisogna, come abbiam detto, sostituire questi valori (7) nella equazione (1) ed esprimere che la equazione che ne risulta è una identità.

Ora, per questo, distinguiamo i due casi di m differente da zero, e di $m=0$; e osserviamo che nel primo caso la equazione (1) può scriversi:

$$\begin{gathered}
mpq(1+q^2)r-2m(1+p^2)(1+q^2)s+mpq(1+p^2)t\\
-[pqr-\{m^2(1+q^2)+(1+p^2)\}s+m^2pqt]\sqrt{1+p^2+q^2}=0\,;
\end{gathered}$$

e quindi per la sostituzione dei valori (7) si otterrà un risultato della forma:

$$m\Omega+\Omega'\sqrt{1+(b-aq)^2+q^2}=0\,,$$

ove Ω e Ω' sono funzioni razionali intere di q.

Questa equazione dovendo divenire identica, e d'altra parte la quantità sotto il radicale non potendo mai ridursi ad un quadrato, bisognerà che si abbia separatamente:

$$\Omega=0\,,\qquad \Omega'=0\,,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned}
pq(1+q^2)r-2(1+p^2)(1+q^2)s+pq(1+p^2)t=0\,,\\
pqr-\{m^2(1+q^2)+(1+p^2)\}s+m^2pqt=0\,;
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

quando per p, r, s, t vi si intendano posti i valori (7).

Così la quistione si riduce a trovare le superficie gobbe che soddisfacciano a queste due equazioni.

È facile però di vedere che non esistono superficie gobbe che soddisfacciano alla prima di queste equazioni.

Osserviamo infatti che essa dovendo restare soddisfatta dai valori (7) qualunque sia q, dovrà esserlo in particolare per $q=0$, $q=\sqrt{-1}$, e $q=\frac{b}{a}$.

Ora per $q=0$ essa ci dà

$$(s)_0=0;$$

e quindi si vede intanto che si dovrà avere

$$a L_0 = -\lambda b'. \tag{9}$$

Per $q=\sqrt{-1}$, siccome allora si ha $p=b-a\sqrt{-1}$, non si potrà avere nè $p=0$, nè $p=\sqrt{-1}$, poichè altrimenti ne verrebbe $\lambda=0$; quindi si avrà

$$(t)_{\sqrt{-1}}=0,$$

e per conseguenza sarà:

$$L_0=L_2, \quad L_1=0. \tag{10}$$

Per $q=\frac{b}{a}$ si ha $p=0$ (*), quindi si vede che dovrà aversi

$$(s)_{\frac{b}{a}}=0,$$

ovvero

$$a L_1 - a'\lambda = -L_2 b,$$

o anche per le (10)

$$a'\lambda = L_2 b.$$

Dopo queste condizioni, se si sostituiscono i valori (7) nella prima delle (8) si ottiene subito l'altra equazione

$$a^2 L_0 + 2a\lambda b' = L_0(1+b^2),$$

e questa per la (9) si riduce all'altra

$$L_0(1+a^2+b^2)=0,$$

che non potrebbe essere soddisfatta che da $L_0=0$, ciò che, insieme alle precedenti, darebbe $\lambda=0$.

Di qui risulta evidentemente che non esistono superficie gobbe (2) che soddisfacciano alla equazione (1) quando m è differente da zero; e quindi le superficie gobbe (2) a linee di curvatura piane corrisponderanno ad $m=0$,

(*) È da notarsi che p non sarebbe zero per $q=\frac{b}{a}$, se a potesse esser nullo; ma questo caso è da escludersi, poichè per la (9) ne verrebbe $b'=0$, e quindi $\lambda=0$.

vale a dire avranno le linee di curvatura di un sistema situate in piani paralleli ad un piano fisso che qui è preso per quello delle xz.

5. Per ritrovarle osserviamo che per $m=0$ la equazione (1) diviene

$$pqr-(1+p^2)s=0\,; \tag{11}$$

e basterà perciò determinare i valori di a, A, b, B in modo che questa equazione divenga identica pei valori (7) di p, r, s.

Ora per questo osserviamo che la (11) per $q=0$ dà come precedentemente la condizione

$$aL_0=-\lambda b'\,, \tag{12}$$

e per $q=\frac{b}{a}$, o $p=0$, dà

$$aL_1-a'\lambda=-L_2 b\,; \tag{13}$$

e per queste condizioni la stessa equazione (11) sostituendovi i valori (7), diviene

$$a^2L_0+2a\lambda b'-L_2(1+b^2)+(a^2L_1-2aa'\lambda+2L_2ab)q=0\,,$$

e dà le altre due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} a^2L_0+2a\lambda b'&=L_2(1+b^2)\,,\\ a^2L_1-2aa'\lambda&=-2L_2ab\,,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

e così si vede che le quantità a, A, b, B devono soddisfare alle quattro equazioni (12), (13) e (14).

Per determinarle, osserviamo prima di tutto che, non potendo essere $a=0$, la equazione (13) per la seconda delle (14) ci dà $L_1=0$; e le equazioni (14) per questa e per la (12) si possono anche scrivere:

$$a\lambda b'=L_2(1+b^2)\,,$$

$$a'\lambda=L_2 b\,;$$

e quindi al sistema di equazioni (12), (13) e (14) si potrà sostituire quelle delle quattro seguenti:

$$a\lambda b'=L_2(1+b^2)\,, \tag{15}$$

$$a'\lambda=L_2 b\,, \tag{16}$$

$$aL_0=-\lambda b'\,, \tag{17}$$

$$L_1=0\,. \tag{18}$$

Ora le (15) e (16) ci danno subito (siccome nessuna delle quantità L_2. a' e b' può essere zero)

$$\frac{a'}{a}=\frac{bb'}{1+b^2};$$

e quindi integrando si avrà

$$a^2=k^2(1+b^2), \tag{19}$$

ove k è una costante arbitraria.

Prendiamo ora b per la stessa variabile indipendente α, ciò che evidentemente può farsi perchè b non può esser costante; allora a e b potranno riguardarsi come conosciuti, e resteranno a determinarsi A e B.

Ora, per far questo, osserveremo che, avendo preso b per la variabile stessa α, si ha $b'=1$, $b''=0$, e quindi la (17) per le (3) e (6) ci dà

$$A'=aB''+a'B',$$

da cui integrando si avrà

$$A=aB', \tag{20}$$

trascurando la costante arbitraria, il che evidentemente può farsi, poichè ciò equivale solo a uno spostamento d'origine degli assi coordinati.

Inoltre la (16) ci dà, per le (3) e (6),

$$a'^2B'-A'a'=b(A''a'-A'a'')$$

ovvero

$$B'=\frac{A'}{a'}+b\,\frac{d}{db}\left(\frac{A'}{a'}\right);$$

quindi integrando si avrà

$$B=b\frac{A'}{a'}, \tag{21}$$

trascurando al solito la costante.

Da questa, osservando che la (19) dà

$$aa'=k^2b, \tag{22}$$

si deduce

$$B=\frac{aA'}{k^2}; \tag{23}$$

e moltiplicando per k^2B' e avendo riguardo alla (20), si ottiene

$$k^2BB'=AA',$$

da cui integrando si trae

$$k^2B^2=A^2+c,$$

essendo c un'altra costante.

Ora questa ci dà

$$kB = \pm \sqrt{A^2 + c};$$

e quindi la (23), avendo riguardo anche alla (19), si riduce all'altra

$$\frac{A'}{\sqrt{A^2+c}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+b^2}},$$

dalla quale integrando si avrà

$$\operatorname{arc\,senh} \frac{A}{c} = \operatorname{arc\,senh}(\pm b) + c',$$

essendo c' un' altra costante, e indicando con senh e cosh i seni e coseni iperbolici.

Di qui si ha finalmente

$$A = \pm bc \cosh c' + c\sqrt{1+b^2}\,\operatorname{senh} c';$$

e quindi, per la (23),

$$B = b\frac{c}{k}\operatorname{senh} c' \pm \frac{c}{k}\sqrt{1+b^2}\cosh c';$$

e così abbiamo determinate a, A e B in funzione di b, facendo uso soltanto delle equazioni (15), (16) e (17). La (18) del resto riesce ora subito soddisfatta dai valori trovati.

La superficie che cercavamo ha dunque le seguenti equazioni:

$$y = k\sqrt{1+b^2}\,x \pm bc\cosh c' + c\sqrt{1+b^2}\,\operatorname{senh} c',$$

$$z = bx + \frac{c}{k} b \operatorname{senh} c' \pm \frac{c}{k}\sqrt{1+b^2}\cosh c',$$

ovvero:

$$y = k\sqrt{1+b^2}\,x \pm bk',$$

$$z = bx \pm \frac{k'}{k}\sqrt{1+b^2},$$

facendo uno spostamento dell'origine lungo l'asse della x, e indicando con k' la costante $c\cosh c'$.

Da queste equazioni eliminando b si deduce l'altra

$$k^2(x^2+z^2) - y^2 = k'^2,$$

che rappresenta appunto l'iperboloide gobbo di rivoluzione attorno all'asse y.

6. Il teorema enunciato in principio potrebbe ora dirsi dimostrato com-

pletamente se tutte le superficie gobbe potessero rappresentarsi col sistema di equazioni (2). Vi sono però le superficie gobbe le cui generatrici sono parallele al piano yz, che hanno equazioni della forma:

$$\left.\begin{aligned} x&=\phi(\alpha)\,, \\ z&=\psi(\alpha)y+\psi_1(\alpha), \end{aligned}\right\}(24)$$

e che evidentemente non rientrano nella forma (2); quindi, onde il teorema sia completamente dimostrato, bisognerà anche far vedere che di queste superficie non ve ne ha alcuna che soddisfacciano alla equazione (1).

Ora, per vedere questo, osserviamo che le superficie (24) hanno per equazione in x, y, z

$$z=yF(x)+f(x)\,,$$

e si ha per esse:

$$\begin{aligned} p&=yF'(x)+f'(x)\,, & q&=F(x)\,, & & \\ r&=yF''(x)+f''(x)\,, & s&=F'(x)\,, & t&=0\,; \end{aligned}$$

e quindi se esistessero delle superficie (24) per le quali la equazione (1) fosse soddisfatta, si dovrebbero potere determinare $F(x)$ ed $f(x)$ in modo che la (1) stessa divenisse identica per questi valori di p, q, r, s, t.

Ora, dovendo qui escludere il caso di $F'(x)=0$ che corrisponde alle superficie sviluppabili, si vede subito che non è possibile di rendere identica la (1) coi valori precedenti, poichè per $y=-\frac{f'(x)}{F'(x)}$ essa non può divenire identica che con $F'(x)=0$.

Da ciò segue che non esistono superficie gobbe (24) che soddisfacciano alla equazione (1), e quindi il teorema è completamente dimostrato.

Pisa, 30 agosto 1867.

Sur l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(*par* M.r Hermite, *à Paris.*)

L'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ présente deux cas bien distincts, suivant que l'exposant m, est pair ou impair; dans le premier elle est transcendante, dans le second simplement algébrique et de la forme $P\sqrt{1-x^2}$, P étant un polynôme entier en x qu'on obtient ordinairement au moyen du procédé de l'intégration par parties, mais qu'on peut déterminer différemment et de manière à mieux mettre en évidence sa nature analytique.

Je chercherai en premier lieu le degré de P, en développant suivant les puissances décroissantes de la variable, les deux membres de l'équation:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = P\sqrt{1-x^2}\,. \tag{1}$$

Dans le premier, le terme le plus élevé en x sera $\frac{x^m}{m\sqrt{-1}}$, et dans le second $\alpha x^{\mu+1}\sqrt{-1}$, si l'on fait $P=\alpha x^\mu+\alpha' x^{\mu-1}+\ldots\ldots$; de sorte que l'on a: $\mu=m-1$, et l'on obtient en même temps la valeur du coefficient α, savoir: $\alpha=-\frac{1}{m}\cdot$ Cela fait, je poserai pour obtenir P:

$$\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = P\sqrt{1-x^2}-C\,,$$

C étant une constante, et on en déduira:

$$P=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or en développant le second membre suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie:

$$\frac{C}{\sqrt{1-x^2}} = C\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4+\cdots\cdots+\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\ldots 2n-1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\ldots\ldots 2n}x^{2n}+\cdots\cdots\right].$$

Quant au second terme $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il donnera également naissance à une série infinie, mais commençant évidemment par la puissance x^{m+1}. Comme P est un polynôme fini du degré $m-1$, il est clair qu'en posant $m-1=2n$, l'effet de ce second terme doit être de détruire tous ceux de la série $\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ venant après $\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6,\ldots\ldots 2n}x^{2n}$, d'où cette conclusion: *dans l'équation* (1), *le polynôme P est, à un facteur constant près, l'ensemble des* m—1 *premiers termes du développement de* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, *suivant les puissances ascendantes de la variable.* Pour déterminer le facteur constant C, il suffira de profiter de la remarque faite tout-à-l'heure que $\alpha=-\frac{1}{m}$; on devra donc poser:

$$C\cdot\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.\ 2n}=-\frac{1}{m},$$

d'où:

$$C=-\frac{1}{m}\cdot\frac{2.4.6\ldots.2n}{1.3.5\ldots.2n-1}.$$

J'observerai enfin que l'équation (1) différentiée donne $x^m=\frac{dP}{dx}(1-x^2)-$ $-Px$, d'où on tire aisément une équation linéaire du second ordre sans second membre, car il suffit de différentier une seconde fois, puis d'éliminer le terme indépendant de P et de ses dérivées. On trouve de la sorte:

$$x(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}+\Big[(m-3)x^2-m\Big]\frac{dP}{dx}+(m-1)xP=0\,.$$

Cette équation est vérifiée en posant $P=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ainsi *en partageant d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de* x, *de la série* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, *les deux parties satisfont à une même équation du second ordre.*

J'arrive au cas de m pair dans l'intégral $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et je pose alors:

$$\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=\mathfrak{P}\sqrt{1-x^2}+\varepsilon\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\tag{2}$$

ε désignant une constante et $\mathfrak{P}$ un nouveau polynôme, commençant comme tout-à-l'heure par le terme $-\frac{x^{m-1}}{m}$. Je n'ajoute pas de constante, le second membre devant être comme le premier une fonction impaire de la variable. La grande différence de nature analytique des relations (1) et (2), va se manifester à l'egard des polynômes P et $\mathfrak{P}$, car en opérant absolument comme plus haut, on obtient cette conclusion: *dans l'équation* (2) *le polynome* P *est, à un facteur près, l'ensemble des* m—1 *premiers termes du développement de la fonction transcendante* $\frac{\text{arc. sin.}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$, *suivant les puissances ascendantes de la variable.*

Ce développement bien connu, et que donne immédiatement l'équation:

$$\frac{dy}{dx}(1-x^2)-xy=1\,,$$

savoir:

$$\frac{\text{arc. sin.}\, x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\cdots\cdots+\frac{2.4.6\ldots.2n-2}{3.5.7\ldots..2n-1}x^{2n-1}+\cdots\cdots$$

conduit, en faisant $m=2n$, à l'expression suivante:

$$\mathfrak{P}=-\varepsilon\left[x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\cdots\cdots+\frac{2.4.6\ldots.2n-2}{3.5.7\ldots.2n-1}x^{2n-1}+\cdots\cdot\right]$$

Et en même temps on arrive à la détermination de ε en posant:

$$\varepsilon\,.\,\frac{2.4.6\ldots.2n-2}{3.5.7\ldots.2n-1}=\frac{1}{m}=\frac{1}{2n}\,,$$

d'où:

$$\varepsilon=\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots\ldots.2n}\,,$$

c'est à dire, précisement le coefficient de x^{2n} dans le développement considéré plus haut de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On tire aisément de ce dernier résultat la proposition suivante: En désignant par $F(x)$ un polynôme entier, l'intégrale $\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sera de la forme:

$$\phi(x)\sqrt{1-x^2}+\varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$\phi(x)$ désignant aussi un polynôme entier, et le coefficient ε de la partie transcendante s'obtiendra en calculant le terme indépendant de x dans le développement de l'expression $F(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances décroissantes de la variable. Mais on peut le démontrer immédiatement en remarquant d'abord que l'on a évidemment: $\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\varepsilon$, et ensuite que l'intégrale définie $2\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'obtenir en intégrant $\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$, z décrivant un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine. Il faut à cet effet développer suivant les puissances décroissantes de z, l'expression proposée:

$$\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{z\sqrt{-1}}F(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or $F(z)$ étant un polynôme entier, la quantité $F(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ne renferme qu'un *nombre fini* de puissances positives, et en désignant par ρ le terme indépendant de la variable dans cette quantité, l'intégrale cherchée se réduira simplement à celle-ci: $\frac{\rho}{\sqrt{-1}}\int\frac{dz}{z}=2\pi\rho$, de sorte qu'on a bien $\rho=\varepsilon$.

On arriverait enfin au résultat, par une voie purement algébrique et très simple, en partant de l'égalité:

$$\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\Phi(x)\sqrt{1-x^2}+\varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il suffit en effet de différentier, de développer ensuite les deux membres suivant les puissances décroissantes de la variable, et de comparer les termes en $\frac{1}{x}$.

Il discriminante delle forme binarie del sesto grado.

(*del Prof.* Brioschi, *a Milano*).

Nella interessante memoria dei sig.ri Clebsch e Gordan *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie* pubblicata in questi Annali (pag. 23), sono dati i valori dei cinque invarianti $A, B, C, D, R,$ del secondo, quarto, sesto, decimo, quindicesimo ordine, delle forme binarie del sesto grado. A completare la teoria di queste forme manca il valore del discriminante delle medesime, il quale, come è noto, è del decimo ordine ed è esprimibile razionalmente in funzione dei primi quattro fra quegli invarianti. Le equazioni differenziali caratteristiche pel discriminante che abbiamo date nella monografia: *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie* (*), conducono facilmente al seguente risultato. Indicando con $6^6.\Delta$ il discriminante della forma binaria del sesto grado, e supponendo che le A, B, C, D abbiano lo stesso significato che nella memoria succitata, si trova:

$$6^4.\Delta = -4^4.6^3.A^5 + 6.4^3.5^3.A^3B + 4^3.5^4.A^2C - \tfrac{8}{3}5^5AB^2 - \tfrac{8}{3}5^5BC - 5^6D,$$

ossia ponendo:

$$\alpha = 3.4.A, \qquad \beta = 5^2.B, \qquad \gamma = 5^3.C, \qquad \delta = 5^5.D,$$

si ha:

$$16.3^6.\Delta = -2\alpha^5 + 10\alpha^3\beta + 20\alpha^2\gamma - 10\alpha\beta^2 - 24\beta\gamma - 9\delta.$$

(*) *Annali di Matematica*, I.a serie, t. 2, Roma, 1859, p. 82.

Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction.

(*par le prof.* JULIUS PLÜCKER, *à Bonn*).

1. Une ligne droite, qui dans l'espace se meut d'une manière continue, décrit une surface, dite réglée. Pour déterminer le mouvement de la ligne droite, il faut que les quatre quantités, dont sa position dépend, soient données en fonction d'une quatrième variable, par ex. du temps. Ces quatre quantités, constantes pour une position donnée de la droite, mais variables d'une position à une autre, ont été appelées par moi coordonnées de la ligne droite. En éliminant le temps, on obtient trois équations entre les quatre coordonnées; ces trois équations représentent trois complexes de lignes droites. Les droites, dont les coordonnées satisfont aux trois équations, appartenant à la fois aux trois complexes, constituent une surface réglée.

2. Une surface réglée peut être regardée comme la trajectoire d'une droite projetée dans l'espace sous l'action de forces qui lui soient appliquées. C'est d'une manière tout-à-fait analogue qu'une courbe gauche est la trajectoire d'un point matériel attiré ou repoussée par des forces. La courbe gauche est l'arête de rebroussement d'une surface développable qui peut être considérée elle-même comme l'enveloppe d'un plan sur lequel agissent des forces rotatoires (*).

Mais je laisse de coté la question mécanique, dont je me propose de faire ressortir plus tard la portée, et n'aborde ici que la question géométrique.

3. Dans un complexe du n^{me} degré les droites se groupent de manière que toutes les droites qui passent par un point donné quelconque constituent un cone du n^{me} ordre, et que toutes les droites comprises dans un

(*) *Fundamental views regarding Mechanics* (Philos. Trans. 1866, pag. 379).

même plan enveloppent une courbe de la n^{me} classe. J'ai appelés ces cones et ces courbes cones et courbes du complexe (*).

En faisant tourner un plan autour d'une droite fixe quelconque, la courbe du complexe, située dans le plan mobile, engendre une surface qui en même tems est l'enveloppe du cone du complexe, dont le sommet décrit la même droite fixe. J'ai appelé la surface ainsi déterminée une surface du complexe et la droite fixe son diamètre. La surface est de l'ordre et de la classe n^2; et son diamètre est une ligne multiple suivant le nombre n.

4. La classification des surfaces réglées, d'après les degrés des trois complexes auxquels leurs génératrices appartiennent, est analogue à la classification des courbes gauches d'après les ordres des deux surfaces dont elles constituent l'intersection. Si n, p, q sont les degrés des trois complexes, le symbole $[n, p, q]$ indiquera l'origine et la nature de la surface réglée, lieu des droites communes aux trois complexes. On prouve aisément qu'en général le degré (ordre et classe) de la surface est égal à $2npq$ (voyez la *Note*).

Supposons que le degré de la surface réglée soit $2N$. Dans le cas que le nombre N est premier, la seule origine possible (**) de la surface est désignée par le symbole $[N, 1, 1]$. Si au contraire le nombre N n'est pas premier, l'origine de la surface ne sera plus unique. A chaque mode de décomposition du nombre N en trois facteurs correspond un mode particulier de génération. Ainsi par ex. les surfaces réglées du huitième degré peuvent se rapporter à l'un ou à l'autre des deux symboles $[4, 1, 1]$, $[2, 2, 1]$. On obtient ainsi deux espèces de surfaces réglées de nature très-différente, selon qu'on prend pour génératrices les droites communes, ou à un complexe du quatrième degré et à deux complexes linéaires, où à un complexe linéaire et à deux complexes du deuxième degré.

5. J'ai démontré ailleurs que les droites communes à deux complexes linéaires rencontrent deux droites fixes, que j'ai appelées *directrices*, et que vice-versâ toute droite appuyée aux deux directrices appartient à la fois aux deux complexes. Conséquemment la construction des surfaces réglées qui correspondent au symbole $[n, 1, 1]$ revient à choisir parmi les droites d'un

(*) Voir le journal *les Mondes* 10 janvier 1867. — *On a new geometry of space* (Phil. Trans. 1865, p. 751).

(**) Ici on ne considère pas le cas d'une surface réglée qui ne soit pas le système *complet* des droites communes à trois complexes: cas analogue à celui d'une courbe gauche qui ne soit pas l'intersection complète de deux surfaces.

complexe du n^{me} degré celles qui coupent deux directrices rectilignes fixes. On y parvient de deux manières corrélatives.

Désignons par A et B les deux directrices. Qu'on fasse passer par A un plan, qui renfermera une courbe de la n^{me} classe enveloppée par les droites du complexe, et qui coupera B en un point unique. Menons par ce point les n tangentes à la courbe. En faisant tourner le plan autour de la directrice A, ces n tangentes, variables d'une position du plan à l'autre et appuyées constamment à l'autre directrice B, engendreront la surface réglée demandée.

Qu'on décrive le cone du complexe dont un point de A est le sommet. Le cone étant du n^{me} ordre, n de ses arêtes vont rencontrer B. Si le sommet du cone variable décrit la directrice A, ces n arêtes appuyées à B engendreront la surface réglée.

Il n'y a qu'une seule ligne droite qui passe à la fois par un point donné et par les deux directrices; d'où l'on conclut que l'ensemble des génératrices est le même dans les deux générations, que nous venons de signaler.

En remplaçant l'une par l'autre les deux directrices A et B, on n'obtient pas des générations nouvelles de la surface réglée; seulement l'une des deux générations se transforme dans l'autre.

Dans la première génération, chacune des droites du complexe, situées dans le plan tournant autour de A et coupant B en un seul point, décrit une nappe de la surface, de manière que celle-ci se partage en n nappes, passant toutes par B. De même dans l'autre génération la même surface se partage d'une manière différente en n nappes, décrites par les n génératrices issues d'un même point de A; c'est-à-dire que ces nouvelles nappes se coupent suivant la directrice A. Donc les deux directrices sont des lignes $n$tuples pour la surface réglée.

6. On peut énoncer ces modes de génération d'une manière un peu différente, eu égard que la courbe du complexe située dans un plan tournant autour de A engendre la surface du complexe dont A est le diamètre.

Une surface du complexe et une droite B étant donnée, menons aux courbes d'intersection de la surface avec les plans passant par son diamètre A les tangentes qui se coupent sur B. Toutes ces tangentes appartiennent à une surface réglée de l'espèce $[n, 1, 1]$. On obtient la même surface réglée en prenant parmi les arêtes des cones circonscrits à la surface du complexe et ayant leurs sommets sur le diamètre A, celles qui sont rencontrées par la droite donnée B.

La surface réglée reste encore la même, si l'on prend pour surface du complexe celle qui a pour diamètre B, et pour droite donnée la droite A. On conclut de là que les droites d'un complexe du n^{me} degré qui sont tangentes à la fois à deux quelconques de ses surfaces, constituent une surface réglée de l'espèce $[n, 1, 1]$.

7. On établit aisément une propriété intéressante des surfaces réglées de l'espèce $[n, 1, 1]$. Tout hyperboloïde passant par les deux directrices joue, par rapport à une telle surface, un rôle analogue à celui du plan par rapport à une courbe gauche.

Par les deux directrices rectilignes de la surface réglée on peut faire passer une infinité d'hyperboloïdes, chacun d'eux étant déterminé par une troisième droite quelconque qui ne rencontre pas les deux directrices données. La surface réglée, dont l'ordre est $2n$, est coupée par la troisième droite en $2n$ points. Par chacun de ces points passe une génératrice unique, appartenant à la fois à la surface réglée et à l'hyperboloïde; d'où l'on conclut que tout hyperboloïde, passant par les deux directrices rectilignes de la surface réglée, la coupe en outre suivant $2n$ génératrices. Ces $2n$ génératrices forment, avec les deux directrices, l'intersection complète des deux surfaces; car chacune de ces dernières, étant une ligne $n$tuple pour la surface d'ordre $2n$, représente n droites (coïncidentes) communes.

Trois génératrices de la surface réglée déterminent un hyperboloïde passant par les deux directrices. On pourra donc considérer les hyperboloïdes tangents suivant une ou plusieurs génératrices, les hyperboloïdes osculateurs, etc., de la même manière qu'on procède avec les plans par rapport à une courbe gauche (*).

8. Nous nous contenterons d'ajouter quelques remarques par rapport aux surfaces réglées du quatrième degré, que l'on obtient à l'aide des surfaces appartenant à des complexes du second degré. Une cinquantaine de ces surfaces de complexe, dont on peut distinguer plus de mille espèces différentes, ont été modelées en bois dur, avec soin et précision, par M. Epkens de Bonn. Les modèles nous permettent de suivre avec l'œil la génération générale des surfaces en question, et de nous faire une idée nette de leurs formes. La variété des surfaces de complexe est très–grande; celle des surfaces réglées est potentiée encore par les differentes positions qu'une ligne droite peut

(*) Tout ceci subsiste pour une surface réglée quelconque qui possède deux droites directrices, même si celles-ci ne sont pas des lignes multiples suivant le même nombre.

prendre relativement à une surface donnée d'un complexe du deuxième degré.

9. La surface de complexe (ayant pour diamètre la droite A) et la droite B, au moyen desquelles on construit la surface réglée, se rencontrent en quatre points, de sorte que, si ces points sont tous réels, on obtient la droite B divisée en quatre segments, en comptant pour un seul les deux segments extrêmes qui se réunissent à l'infini. Il y a deux génératrices de la surface réglée issues de chaque point de B. Si ce point passe d'un segment quelconque à l'un des deux segments adiacents, les deux génératrices deviennent imaginaires si d'abord elles étaient réelles, et réciproquement; c'est-à-dire que, de deux segments consécutifs, l'un est l'intersection de deux nappes réelles de la surface réglée, et l'autre est l'intersection de deux nappes imaginaires. Au point (réel) de division qui sépare les deux segments, les deux génératrices se confondent en une seule droite, suivant laquelle la surface réglée est touchée par un même plan passant par le diamètre A.

Ce que nous venons de dire à propos de B, s'applique également à la droite A, qui est l'autre ligne double de la surface réglée. Cette surface a donc huit génératrices singulières, suivant chacune desquelles le plan tangent est constant. Quatre de ces plans tangents passent par A; les autres quatre passent par B.

10. La classification des surfaces réglées en question résulte immédiatement de la considération des huit points de division des droites doubles A et B: suivant que ces points sont tous ou en partie réels, imaginaires, coïncidents (*). Ces diverses circonstances dépendent de la position de l'une

(*) On ne verra pas sans intérêt que la discussion des cas differents de la surface réglée du quatrième degré avec deux droites doubles A, B, peut être ramenée à une question très-simple de géométrie plane.

Les génératrices de la surface coupent A et B en deux séries de points correspondants x, y, de manière qu'à chaque point x de A correspondent deux points y de B, et de même à chaque point y correspondent deux points x. Les points x auxquels correspondent deux points y coïncidents, et les points y auxquels correspondent deux points x coincidents sont les points de division des droites directrices A et B.

Soient maintenant a, b deux points quelconques d'une courbe plane du troisième ordre (cubique plane); X une droite issue de a et Y une droite issue de b, tellement que ces droites se rencontrent sur la courbe. Alors nous aurons deux faisceaux de rayons correspondants X, Y; la loi de correspondance est la même que pour les points x, y ci-devant; et la cubique sera le lieu du point XY, ainsi que la surface réglée est engendrée par la droite xy. Les droites $X(Y)$ auxquelles correspondent deux droites $Y(X)$ coïncidentes sont évidemment les tangentes de la courbe, issues du point $a\,(b)$.

On sait qu'une cubique plane générale est en un seul trait, ou en deux traits, en tenant compte de la continuité par l'infini. Si la courbe n'a qu'un seul trait, il n'y a que deux tangentes réelles des deux droites doubles, A ou B, par rapport à la surface du complexe dont l'autre est le diamètre.

Pour approfondir la question et pour se faire une idée nette de la forme générale del surfaces réglées en question, il faut tenir compte des huit points doubles et des huit plans tangents doubles des deux surfaces du complexe, dont A et B sont les diamètres; et particulièrement des quatre droites qui passent par les huit points doubles de chaque surface, pris deux à deux, et qui rencontrent le diamètre: ainsi que des quatre intersections des huit plans doubles, pris deux à deux, qui également coupent le diamètre de la surface.

11. Si la droite B rencontre le diamètre A de la surface du complexe, il est évident que la surface réglée correspondante, qui est en général du quatrième degré, se décompose dans le système d'un cone du deuxième ordre, dont le point (AB) est le sommet, et d'une courbe de la deuxième classe contenue dans le plan (AB). Si l'on se sert des coordonnées ordinaires x, y, z, le cone seul, comme lieu de second ordre, peut être représenté par une équation unique, tandis que la courbe échappe à ce mode de représentation. Au contraire, en se servant des coordonnées planaires t, u, v, la courbe seule, comme enveloppe de seconde classe, peut être représentée par une équation. Sous ce point de vue, il est curieux à voir l'équation de la surface réglée, qui en général est du quatrième degré, s'abaisser au deuxième; parceque, selon le choix des coordonnées, les traces du cone ou de la courbe disparaissent de l'équation (*).

(et il y en a deux toujours) qu'on peut mener par un quelconque de ses points. Ce cas correspond à celui où les directrices A, B de la surface réglée ont chacune deux points réels de division.

Si la cubique plane est composée de deux traits, on a une ovale et une branche serpentine avec trois inflexions. Les quatre tangentes issues d'un point de la courbe sont toutes réelles ou toutes imaginaires suivant que le point est pris sur la branche serpentine ou sur l'ovale. Donc si nous prenons 1° les deux points a, b sur la branche serpentine; 2° le deux points a, b sur l'ovale; 3° l'un des deux points sur l'ovale et l'autre sur la branche serpentine, on aura trois cas correspondants à ceux de la surface réglée où 1° les directrices ont chacune quatre points réels de division; 2° les directrices n'ont aucun point réel de division; 3° l'une des deux directrices a quatre points réels de division et l'autre n'en a aucun.

Voilà les seuls cas généraux. Il n'y a pas de difficulté à donner les cas particuliers qui correspondent à une cubique douée d'un point double, à une cubique composée d'une droite et d'une conique; etc. L. C.

(*) En effet, le premier membre de l'équation du quatrième degré, qui représente (en coordonnées ordinaires ou planaires) la surface réglée, se décompose, sous l'hypothèse ci-devant, en deux facteurs; dont l'un est quadratique et a le discriminant nul, et l'autre est le carré d'une fonction linéaire. L. C.

12. Une surface quelconque, étant touchée en un quelconque de ses points par un plan, est coupée par ce plan suivant une courbe qui est du même ordre de la surface et est douée d'un point double, coïncidant avec le point de contact; en d'autres termes, deux branches de la courbe d'intersection, réelles ou imaginaires, se coupent en ce point. Dans le cas des surfaces réglées [2, 1, 1] (ainsi que pour une surface réglée quelconque), l'une des deux branches de la courbe d'intersection avec un plan tangent devient une droite: une génératrice de la surface. Cette droite, en se détachant de la courbe lui fait perdre sa singularité au point de contact, et réduit son ordre d'une unité. Il n'y a qu'un seul système de génératrices, quoiqu'il y ait double mode de génération.

Pour qu'il y ait deux systèmes de génératrices il faudrait que tout plan tangent à la surface contînt deux droites, situées sur elle dans toute leur étendue. Cette circonstance n'a lieu que pour les surfaces du deuxième degré. Les surfaces réglées d'ordre plus élevé ont un nombre simplement infini de points (formant une ligne multiple), où se croisent deux ou plusieurs génératrices rectilignes. En un point quelconque de la ligne multiple, la surface admet un nombre de plans tangents égal à celui des génératrices qui s'y croisent; et ces plans tangents passent ensemble par la droite qui touche la ligne multiple au point considéré. Deux des génératrices qui se rencontrent déterminent un plan bitangent; ce plan coupera en outre la surface suivant une courbe passant par les deux points de contact. Les autres intersections de la courbe avec les deux génératrices sont autant de points de la ligne multiple.

De même, il y a un nombre simplement infini de plans tangents (enveloppant une surface développable), dont chacun contient deux ou plusieurs génératrices et touche la surface en autant de points: un pour chaque génératrice. Les points de contact sont rangés en ligne droite: la droite de contact de la développable avec le plan qu'on considère; etc.

13. Considérons, par exemple, les surfaces réglées qui correspondent au symbole [2, 2, 1]. Particularisons encore en supposant que le complexe linéaire donné soit formé par des droites appuyées à une directrice rectiligne fixe. Dans ce cas, il s'agit de choisir parmi les droites communes aux deux complexes donnés du second degré, celles qui coupent la directrice. Pour y parvenir construisons les deux surfaces, appartenant aux deux complexes et ayant la directrice pour diamètre commun. Un plan mené arbitrairement par la directrice coupe les deux surfaces suivant deux courbes de deuxième

classe, ayant quatre tangentes communes; si l'on fait tourner ce plan autour de la directrice, les quatre tangentes communes aux deux courbes qu'il contient, engendreront la surface réglée. D'autre part, tout point de la directrice est le sommet commun de deux cones du second ordre, circonscrits aux deux surfaces des complexes: ces cones se coupent suivant quatre arêtes, appartenant à la fois aux deux complexes. Si le sommet se déplace sur la directrice, les quatre arêtes communes aux deux cones engendreront la même surface réglée. Il résulte de deux constructions que nous venons d'indiquer, que la directrice est une ligne quadruple (comme lieu et comme enveloppe) et que la surface réglée est du huitième degré.

Tout plan passant par la ligne quadruple coupe la surface réglée suivant quatre droites. C'est un plan quadri-tangent, qui touche la surface aux quatre points où ces quatre génératrices rencontrent la directrice. Ces quatre génératrices se rencontrent deux à deux en six points, qui, résultant de l'intersection de deux génératrices non successives, sont des points doubles de la surface. Si le plan tourne autour de la directrice, ces points doubles décriront une courbe nodale de la surface. Cette courbe est toujours réelle, même si la surface est imaginaire; car les quatre génératrices ont au moins deux intersections réelles.

Corrélativement: les quatre génératrices issues d'un même point de la directrice, sont deux à deux dans six plans, dont chacun est un plan bitangent de la surface. Si le point se déplace sur la directrice, ces plans enveloppent une développable doublement circonscrite à la surface réglée. Cette développable est toujours réelle, même si la surface réglée est imaginaire; car deux au moins des six plans déterminés par les quatre génératrices sont réels.

Occupé que je suis de préparer un traité sur les complexes du deuxième degré (premier pas à faire pour développer les principes exposés dans deux mémoires insérés dans les *Philosophical Transactions* pour 1866), j'en ai été détourné un moment par le beau travail récemment publié par M. DE LA GOURNERIE sur les surfaces réglées (*). Le mémoire qu'on vient de lire n'est nullement le résumé d'un travail fait, ce n'est qu'un premier aperçu des développements du n.° 16 des *additional notes* (premier mémoire anglais). Si je le donne hors de l'ordre naturel de mes travaux, c'est surtout dans

(*) *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques,* avec des notes par M. CAYLEY.

l'espoir de voir s'associer à moi d'autres géomètres dans des recherches, que mes propres forces ne suffisent pas pour pousser à bout (*). L'origine et la nature de cet écrit m'excuseront de n'avoir pas cité les travaux antérieurs sur le même sujet. Cependant, après y avoir jeté un coup d'œil, il ne m'est plus permis de passer sous silence la théorie générale des surfaces réglées, donnée par M. CAYLEY dans deux mémoires qu'il a publiés dans les *Philosophical Transactions* pour 1863 et 1864. En laissant à d'autres le soin de réunir sous un même point de vue les deux théories, dont le point de départ est différent, je me félicite d'avoir rencontré dans plusieurs circonstances cet illustre géomètre, dont j'admire la pénétration.

Note additionnelle.

En prenant r, s, σ, ρ, pour coordonnées d'une droite, représentée en coordonnées ordinaires par les deux équations:

$$x = rz + \rho,$$

$$y = sz + \sigma,$$

et en posant:

$$r\sigma - s\rho = \eta, \tag{1}$$

les trois équations:

$$\Omega_n = 0, \quad \Omega_p = 0, \quad \Omega_q = 0 \tag{2}$$

représentent trois complexes du $n^{\text{me}}, p^{\text{me}}, q^{\text{me}}$ degré, les trois symboles Ω_n, Ω_p, Ω_q signifiant trois fonctions de ces degrés entre les cinq quantités r, s, ρ, σ, η, regardées comme variables.

En éliminant entre les quatre équations (1) et (2) les trois variables r, s, η, on obtient une équation:

$$f(\rho, \sigma) = 0$$

du degré $2npq$. Dans cette équation ρ et σ signifient, sur le plan xy, les coordonnées du point où ce plan est percé par une droite quelconque com-

(*) D'après la seule connaissance de la communication présentée par l'illustre professeur de Bonn dans les *Proceedings* 2 févr. 1865 de la Société Royale de Londres, M. BATTAGLINI a déjà éxécuté une étude intéressante des complexes du deuxième degré, dans un mémoire publié par l'Acad. des sciences de Naples. Les systèmes (doublement infinis) de droites et particulièrement ceux du premier et du deuxième ordre, ont donné lieu à plusieurs excellents mémoires de M. KUMMER (G. di CRELLE t. 57; Monatsb. d. berl. Akad. 1864-65; Abhandl. d. berl. Akad. 1866).
L. C.

mune aux complexes donnés, c'est-à-dire par une génératrice de la surface réglée, dont $[n, p, q]$ est le symbole. Cette équation représente donc la trace de la surface sur le plan xy; et cette trace est une courbe de l'ordre $2npq$.

La classe d'une surface réglée est la même que son ordre. Pour le prouver directement, prenons pour les équations de la droite:

$$t = pv + \pi, \qquad u = qv + \varkappa,$$

et posons:

$$p\varkappa - q\pi = \omega. \tag{3}$$

Les cinq quantités $p, q, \varkappa, \pi, \omega$ remplacent r, s, σ, ρ, η dans la détermination de la droite. L'on obtient pour représenter la même surface réglée trois équations nouvelles:

$$\phi_n = 0, \qquad \phi_p = 0, \qquad \phi_q = 0, \tag{4}$$

en désignant par ϕ_n, ϕ_p, ϕ_q trois fonctions de $p, q, \pi, \varkappa, \omega$ du $n^{\text{me}}, p^{\text{me}}, q^{\text{me}}$ degré. En éliminant entre les quatre équations (3) et (4) les trois variables p, q, ω, on obtient une équation:

$$F(\pi, \varkappa) = 0$$

du degré $2npq$. Dans cette équation π et $\varkappa$ signifient les deux coordonnée t et u d'un plan, dont la troisième coordonnée v est égal à zéro. D'où l'on conclut que le cylindre, circonscrit à la surface réglée, dont l'axe est parallèle à Oz, est de la classe $2npq$.

On ne saurait discuter la réduction du nombre $2npq$ sans la discussion préalable des complexes.

Bonn, le 31 mars 1867.

Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

(*par M.*[r] C. Jordan, *Ingénieur des mines à Paris*).

Considérons un corps flottant en équilibre à la surface d'un liquide pesant. Il est soumis à deux forces: à son poids d'une part, et d'autre part à la poussée du liquide: d'après le principe d'Archimede, cette dernière force est verticale et appliquée au centre de gravité du liquide déplacé, point que les marins désignent par abréviation sous le nom de *centre de carène.*

Il faut et il suffit, pour que l'équilibre existe, que ces deux forces soient égales et opposées: d'où ces deux conditions bien connues:

1° Le poids du corps doit être égal au poids du liquide déplacé.

2° Le centre de gravité et le centre de carène doivent être sur la même verticale.

Dérangeons le corps de sa position d'équilibre, et abandonnons-le à lui-même, après lui avoir imprimé une impulsion initiale: il prendra un certain mouvement, modifié à chaque instant par les réactions du liquide. Ces réactions dépendent de la forme extérieure du corps, élément trop complexe pour qu'on puisse espérer de déterminer les lois du mouvement d'une manière générale, et abstraction faite de toute hypothèse particulière.

Mais dans le cas particulier où le déplacement initial et la vitesse initiale sont tous les deux infiniment petits, les équations différentielles du mouvement peuvent se simplifier par la suppression des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier. Elles deviennent alors susceptibles d'être intégrées généralement. L'inspection des formules intégrales montre que le corps, quelle que soit sa forme, tendra généralement à s'écarter d'une quantité finie de sa position d'équilibre initiale: mais cet effet pourra se produire de deux manières bien différentes:

Imaginons un plan idéal invariablement lié au corps, et qui, dans la position d'équilibre initiale, coïncide avec la surface du liquide: nous donnerons à ce plan, suivant l'usage généralement adopté, le nom de *plan de flottaison;* la partie de ce plan comprise dans l'intérieur du corps flottant se nomme la *flottaison.*

Cela posé, si le corps s'incline d'une quantité finie, il courra le risque de chavirer: en outre, s'il est creux à l'intérieur, comme le sont les navires, il pourra être submergé: il courra le même danger s'il se transporte verticalement d'une quantité finie.

Si au contraire, le corps se transporte horizontalement, ou tourne autour d'un axe vertical sans subir d'inclinaison ou de déplacement vertical sensible, l'équilibre ne sera évidemment pas compromis.

Dans le premier cas le plan de flottaison s'éloignera d'une quantité finie de la surface du liquide: dans le second cas, il ne s'en écartera que d'une quantité infiniment petite.

Les considérations qui précèdent nous permettent de définir d'une manière précise ce que l'on doit entendre par ces termes: *stabilité de l'équilibre des corps flottants.*

Déplaçons d'une quantité infiniment petite un corps flottant en équilibre et abandonnons-le ensuite à lui-même avec une impulsion infiniment petite: si, pendant toute la durée du mouvement, le plan de flottaison reste infiniment voisin de la surface du liquide, et cela quelles que soient la direction et la grandeur relative du déplacement et de l'impulsion, l'équilibre sera *stable:* dans le cas contraire, *instable.*

Pour déterminer les conditions qui assurent la stabilité de l'équilibre; nous allons poser, puis intégrer les équations différentielles qui régissent les mouvements infiniment petits du corps flottant.

I. **Formation des équations différentielles.**

Nous supposerons que la surface du liquide est assez étendue pour que son niveau ne soit par altéré par les oscillations du flotteur: qu'elle reste plane pendant toute la durée du mouvement: enfin, que la poussée du liquide sur le flotteur à un instant quelconque est précisément la même que si tout le système était maintenue en repos.

Ces hypothèses ne sont pas parfaitement exactes: on conçoit en effet qu'il est impossible que le flotteur, en oscillant, ne communique pas quelque mouvement au liquide qui l'entoure, et que d'autre part l'état de mouvement devra modifier les réactions qui se produisent: mais ces causes perturbatrices, qui ne paraissent pas susceptibles d'être soumises à un calcul précis, diminuent évidemment en même temps que l'amplitude et la vitesse des oscillations; et dans le cas limite où le déplacement et la vitesse initiale sont infiniment petits tous les deux, elles déviennent négligeables.

On sait que tout mouvement du flotteur peut se décomposer en deux autres: 1° un mouvement général de translation; 2° un mouvement relatif de rotation autour du centre de gravité.

Si l'on désigne par M la masse totale du corps, par ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de son centre de gravité à un instant quelconque, prises par rapport à trois axes fixes rectangulaires OX, OY, OZ; par F_x, F_y, F_z les sommes respectives des composantes suivant les trois axes des forces qui sollicitent le flotteur à l'instant considéré: le mouvement de translation sera régi par les trois équations connues:

$$M\frac{d^2\xi_1}{dt^2}=F_x \quad , \quad M\frac{d^2\eta_1}{dt^2}=F_y \quad , \quad M\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}=F_z \; .$$

Désignons d'un autre côté par m la masse de l'un des éléments des corps, par ξ, η, ζ ses coordonnées à un instant donné, prises par rapport à un système d'axes mobiles ox, oy, oz, respectivement parallèles à OX, OY, OZ, et se coupant au centre de gravité du corps, qu'ils suivront dans son mouvement de translation; soient enfin μ_x, μ_y, μ_z les sommes des moments des forces appliquées au flotteur, pris respectivement par rapport à ox, oy, oz. Le mouvement relatif autour du centre de gravité sera régi par les trois équations connues sous le nom *d'équations des aires*:

$$\sum m\left\{\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right\}=\mu_x, \quad \sum m\left\{\zeta\frac{d^2\xi}{dt}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right\}=\mu_y, \quad \sum m\left\{\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right\}=\mu_z,$$

ces signes de sommation Σ s'étendant à tout le corps.

Le mouvement de translation est complètement déterminé lorsque on connait à chaque instant donné les trois coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du centre de gravité. Le mouvement de rotation de son côté, peut être déterminé au moyen de trois angles α, β, γ.

Imaginons en effet un plan mobile invariablement lié au corps, et coïncidant dans la position d'équilibre initiale avec le plan zox. La situation des divers points de ce plan, et par suite celle du corps à un instant donné de la rotation, sera complètement déterminée si l'on connait 1° la trace $o\alpha$ sur le plan xoy; 2° l'angle qu'il forme avec ce plan; 3° enfin, la position initiale $o\alpha'$ de la droite située dans ce plan et qui vient se coucher en $o\alpha$ sur le plan zoy.

Or on peut évidemment passer de la positon initiale à la position ainsi définie en exécutant successivement 1° un mouvement de rotation autour de l'axe des y, amenant la droite $o\alpha'$ à coïncider avec l'axe des x; 2° un mouvement de rotation autour de l'axe des x, amenant le plan mobile à faire l'angle voulu avec le plan yox; 3° enfin un mouvement de rotation autour de l'axe des z, amenant la trace du plan mobile de la position ox à la position $o\alpha$.

La position du corps relativement à son centre de gravité sera donc parfaitement définie à un instant quelconque, lorsque on connaîtra les amplitudes respectives α, β, γ de ces trois mouvements successifs.

La position absolue du corps dans l'espace ne dépend ainsi que des six quantités $\alpha, \beta, \gamma, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$. Ce sont là les seules inconnues du problème, et les équations ci-dessus posées suffiront à les déterminer, lorsque toutes les quantités qui entrent dans ces équations auront été exprimées en fonction de ces six inconnues et des données de la question.

Proposons-nous en premier lieu de déterminer les formules qui donnent à un instant donné les coordonnées relatives ξ, η, ζ d'un point quelconque, en fonction des quantités α, β, γ, et de ses coordonnées x, y, z, prises par rapport aux mêmes axes dans l'état d'équilibre.

Soit A le point considéré, a sa projection initiale sur le plan des xz, $oB=x$ et $aB=z$ ses coordonnées. Soit a' la projection du même point après une rotation d'un angle α autour de l'axe des y; $oB'=x'$ et $a'B'=z'$ les coordonnées de a': par le point o menons une droite ox_1 faisant l'angle α avec l'axe des x: abaissons $a'B_1$ perpendiculaire sur ox_1. Les triangles rectangles oaB, $oa'B_1$ sont égaux: car l'angle en o est le même, et les hypothénuses Oa, Oa' sont égales comme représentant toutes deux la distance du point considéré à l'axe Oy, distance qui reste invariable pendant la rotation: donc $oB_1=x$ et $a'B_1=z$.

Cela posé, projétons le contour $oB_1a'B'$ successivement sur l'axe des x et sur celui des z: il viendra les deux relations:

$$x' = x\cos\alpha - z\sin\alpha \qquad z' = z\cos\alpha + x\sin\alpha\,.$$

D'ailleurs la rotation autour de l'axe Oy n'a évidemment pas altéré la troisième coordonnée y du point considéré: on devra donc joindre aux deux équations précédentes celle-ci:

$$y' = y$$

qui achève de déterminer les coordonnées du point A'.

On verra de la même façon que la rotation β autour de l'axe des x transportera le point mobile, actuellement en A' et dont les coordonnées sont x', y', z', en un point A'' dont les coordonnées sont:

$$x'' = x', \quad y'' = y' \cos\beta + z' \sin\beta, \quad z'' = z' \cos\beta - y' \sin\beta \cdot$$

De même la troisième rotation γ autour de l'axe des z transportera le point mobile, de A'' en un autre point dont les coordonnées définitives seront:

$$\xi = x'' \cos\gamma + y'' \sin\gamma, \quad \eta = y'' \cos\gamma - z'' \sin\gamma, \quad \zeta = z'' \cdot$$

Ces formules combinées entre elles donnent celles-ci:

$$\xi = x\{+\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\} + y\cos\beta\sin\gamma + z\{-\sin\alpha\cos\gamma + \\ + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\} \tag{1}$$

$$\eta = x\{-\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\} + y\cos\beta\cos\gamma + z\{+\sin\alpha\sin\gamma + \\ + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\} \tag{2}$$

$$\zeta = x\sin\alpha\cos\beta - y\sin\beta + z\cos\alpha\cos\beta \cdot \tag{3}$$

Ces relations, et celles qu'on obtient en les différentiant, vont nous permettre d'exprimer les trois sommes:

$$\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right), \quad \sum m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right), \quad \sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)$$

en function des trois quantités α, β, γ et de leurs derivées successives par rapport au temps.

Jusqu'à présent nous avons laissé le choix des axes fixes OX, OY, OZ entièrement indéterminé: en les choisissant convenablement, nous pourrons apporter dans les calculs qui vont suivre d'importantes simplifications.

Nous prendrons en premier lieu pour centre des coordonnées le point de l'espace que le centre de gravité du corps occupait dans la position primitive d'équilibre: les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 de ce centre de gravité à un instant quelconque représenteront alors exactement les déplacements du centre de gravité dans chacune des trois directions OX, OY, OZ.

Nous prendrons en second lieu l'axe OZ vertical et nous choisirons le plan ZOX de telle sorte qu'il contienne le centre de gravité de la flottaison, lorsque le corps est dans sa position primitive d'équilibre.

Cela posé, le plan de flottaison étant horizontal à l'origine, son équation sera de la forme $z=h$, la quantité h étant une constante. Si, comme nous le supposons, l'équilibre est stable, ce plan s'éloignera infiniment peu du plan horizontal avec lequel il coïncidait. Le déplacement vertical de chacun de ses points sera donc infiniment petit à un instant quelconque. Mais pour avoir ce déplacement, il suffira d'ajouter ensemble les deux déplacements partiels: ζ_1 produit par le mouvement de translation, et $\zeta-h$ produit par le mouvement de rotation; le déplacement cherché sera donc:

$$\zeta-h+\zeta_1=x\sin\alpha\cos\beta-y\sin\beta+h(\cos\alpha\cos\beta-1)+\zeta_1\,.$$

Pour que cette expression soit infiniment petite pour toutes les valeurs de x et y, il faut et il suffit qu'on ait séparément:

$\sin\beta$	infiniment petit,	d'où	β	infiniment petit,
$\sin\alpha\ \cos\beta$	id.	d'où	α	id.
$h(\cos\alpha\cos\beta-1)+\zeta_1$	id.	d'où	ζ_1	id.

Il résulte de ces relations que le déplacement vertical:

$$\zeta-z+\zeta_1=x\sin\alpha\cos\beta-y\sin\beta+z(\cos\alpha\cos\beta-1)+\zeta_1 \tag{4}$$

d'un point quelconque du corps restera infiniment petit pendant toute la durée du mouvement, condition plus générale que celle relative au plan de flottaison et qui pourrait servir, comme cette dernière, à définir l'équilibre stable.

La quantité γ peut passer par tous les états de grandeur: mais toutes les dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ seront constamment infiniment petites.

En effet, soit v_0 la vitesse initiale d'un point du corps, m sa masse, v sa vitesse à un instant donné, et T le travail total des forces qui agissent sur le corps depuis l'instant initial: le principe des forces vives donne la relation:

$$\sum mv^2=\sum mv_0^2+2\,T\cdot$$

L'impulsion initiale étant infiniment petite, par hypothèse, la force vive initiale sera infiniment petite du second ordre, et il est aisé de voir qu'il en sera de même de T, et par suite de Σmv^2.

En effet les forces qui agissent sur le systéme se ramènent dans l'état d'équilibre à deux forces égales et opposées: le poids $-P$ du corps, appliqué au centre de gravité, et la poussée P appliquée au centre de carène. Pendant la durée du mouvement, la poussée varie: mais on peut la considérer à chaque instant comme formée par la combinaison 1° de la poussée primitive P appliquée au centre de carène; 2° d'une série de forces élémentaires verticales p appliquées au centre de chacun des éléments du solide qui, se trouvant au dessus du liquide dans l'état primitif, sont immergés à l'instant que l'on considère: chacune de ces forces étant égale au poids du liquide déplacé par l'élément auquel elle est appliquée; 3° d'une serie de forces élémentaires $-p'$ en sens inverse des précédentes, et appliquées au centre de chacun des éléments qui, étant plongés dans le liquide dans l'état primitif, sont actuellement émergés: car les poussées que ces éléments supportaient entrent dans l'expression de p, et comme elles sont actuellement supprimées, il faut corriger l'erreur en les comptant de nouveau en sens contraire.

Le travail de la poussée P et celui du poids $-P$ du corps se détruisent aux infiniment petits près du second ordre: en effet ces deux forces sont égales et de sens contraire, et d'autre part leurs points d'application, étant situés à l'origine sur une même verticale, subissent le même déplacement vertical, aux termes près du second ordre, ainsi que l'indique la formule (4) où le seul terme dépendant de z, $z(\cos\alpha\cos\beta-1)$, est du second ordre.

Le travail total des forces élémentaires p sera également du second ordre. En effet, le travail de chacune d'elles est égal à cette force elle-même, multipliée par la quantité dont l'élément qu'elle affecte s'est enfoncé au-dessous du liquide, si l'élément, après s'étre enfoncé, s'est relevé au-dessus du liquide, ce travail sera nul. On n'a donc à considérer que les travaux relatifs aux éléments qui se trouvent encore immergés à la fin de la période que l'on considère. Or d'une part ces éléments réunis forment un volume infiniment petit compris entre le niveau du liquide et le plan de flottaison: d'autre part chacun d'eux s'est infiniment peu enfoncé: le travail total est donc infiniment petit du second ordre.

La même démonstration s'applique aux travaux des forces $-p'$.

Il est donc établi qu'à un instant quelconque du mouvement la force vive Σmv^2 doit être infiniment petite du second ordre. Or on sait que cette force vive est la somme de deux autres, l'une due au mouvement de translation, l'autre due au mouvement de rotation, et qui sera la même que si le mouvement de translation n'existait pas. Chacune de ces forces vives partielles devra être infiniment petite du second ordre.

La force vive de translation a pour formule :

$$M\left\{\frac{d\xi_1^2}{dt^2}+\frac{d\eta_1^2}{dt^2}+\frac{d\zeta_1^2}{dt^2}\right\}.$$

Pour que cette expression se réduise au second ordre, il faudra que chacune des quantités $\frac{d\xi_1}{dt}$, $\frac{d\eta_1}{dt}$, $\frac{d\zeta_1}{dt}$ soit au moins du premier ordre.

Le mouvement de rotation autour du centre de gravité à un instant donné se résume en un mouvement de rotation autour d'un certain axe instantané: et pour que la force vive de rotation soit infiniment petite du second ordre, il faudra, ou que la masse soit concentrée tout entière sur l'axe de rotation ou que la vitesse angulaire soit infiniment petite du premier ordre.

Nous écarterons la première hypothèse qui suppose le corps flottant constitué d'une manière singulière et nullement pratique: il faudra donc que la vitesse angulaire, et par suite la vitesse d'un point quelconque de l'espace, supposé invariablement lié au corps, soit infiniment petite à chaque instant du mouvement.

Ce dernier résultat implique nécessairement que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ sont infiniment petits.

En effet, considérons un point situé sur l'axe oy, à une distance quelconque y. Ses coordonnées après les rotations successives α, β, γ séront devenues (formules 1, 2 et 3).

$$\xi = y\cos\beta\sin\gamma, \qquad \eta = y\cos\beta\cos\gamma, \qquad \zeta = -y\sin\beta.$$

Au bout de l'instant dt, les rotations partielles étant devenues $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$, les coordonnées de ce point seront devenues:

$$\begin{aligned}
\xi+d\xi &= y\cos\beta\sin\gamma - y\sin\beta\sin\gamma\cdot d\beta + y\cos\beta\cos\gamma\cdot d\gamma,\\
\eta+d\eta &= y\cos\beta\cos\gamma - y\sin\beta\cos\gamma\cdot d\beta - y\cos\beta\sin\gamma\cdot d\gamma,\\
\zeta+d\zeta &= -y\sin\beta \qquad - y\cos\beta \qquad \cdot d\beta.
\end{aligned}$$

La vitesse de son déplacement $\sqrt{\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}}$ étant infiniment petite, on devra avoir séparément:

$$\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\xi}{dt} \text{ infiniment petits},$$

ou

$$-y\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}+y\cos\beta\cos\gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt} \text{ infiniment petit},$$

$$-y\sin\beta\cos\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}-y\cos\beta\sin\gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt} \qquad \text{id.}$$

$$-y\sin\beta\cdot\frac{d\beta}{dt} \qquad \text{id.}$$

β étant infiniment petit et par suite $\cos\beta$ sensiblement égal à 1, $\frac{d\beta}{dt}$ devra être infiniment petit en vertu de la dernière de ces relations, et $\frac{d\gamma}{dt}$ le sera en vertu des deux premières.

Si nous considérons maintenant un point situé sur l'axe ox, à une distance arbitraire x, on aura pour ce point, après les rotations successives α, β, γ:

$$\zeta = x\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = x\cos\alpha\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt} - x\sin\alpha\sin\beta\cdot\frac{d\beta}{dt},$$

La vitesse du déplacement de ce point étant infiniment petite, on aura a fortiori $\frac{d\zeta}{dt}$ infiniment petit, ou comme $\alpha, \beta, \frac{d\beta}{dt}$ sont infiniment petits

$$\frac{d\alpha}{dt} \text{ infiniment petit},$$

ce qui complète notre démonstration.

Nous pouvons maintenant passer au calcul des sommes :

$$\sum m\left\{\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right\},\quad \sum m\left\{\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right\},\quad \sum m\left\{\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right\}.$$

Nous négligerons dans ce calcul les quantités infiniment petites par rapport à celles que nous cherchons à déterminer : ainsi dans l'exspression des quantités ξ, η, ζ nous négligerons les infiniment petits, ce qui nous donnera les valeurs approchées :

$$\xi = x\cos\gamma + y\sin\gamma,\quad \eta = -x\sin\gamma + y\cos\gamma,\quad \zeta = z.$$

Déterminons maintenant $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, On a d'après les formules connues de la différentiation :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{d^2\xi}{d\alpha^2}\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\frac{d^2\xi}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\frac{d^2\xi}{d\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+2\frac{d^2\xi}{d\alpha d\beta}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}+2\frac{d^2\xi}{d\beta d\gamma}\cdot\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt}+\right.\\&\left.\qquad+2\frac{d^2\xi}{d\gamma d\alpha}\cdot\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right]+\frac{d\xi}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\xi}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{d\xi}{d\gamma}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, les termes entre parenthèses disparaissent, et il reste la valeur approchée:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d\xi}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\xi}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{d\xi}{d\gamma}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

On aura de même approximativement:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d\eta}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\eta}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\eta}{d\gamma}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d\zeta}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\zeta}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot\frac{d\zeta}{d\gamma}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Or on a d'après la relation (1)

$$\frac{d\xi}{d\alpha}=x\,[-\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma]+z[-\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma],$$

$$\frac{d\xi}{d\beta}=x\,[\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma]-y\sin\beta\sin\gamma+z\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma,$$

$$\frac{d\xi}{d\gamma}=x\,[-\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma]+y\cos\beta\cos\gamma+z[\sin\alpha\sin\gamma+$$

$$+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma];$$

ou en négligeant les infiniment petits :

$$\frac{d\xi}{d\alpha}=-z\cos\gamma,\quad\frac{d\xi}{d\beta}=z\sin\gamma,\quad\frac{d\xi}{d\gamma}=-x\sin\gamma+y\cos\gamma\,.$$

On obtient de même au moyen des relations (2) et (3) les autres valeurs approchées :

$$\frac{d\eta}{d\alpha}=z\sin\gamma,\quad\frac{d\eta}{d\beta}=z\cos\gamma,\quad\frac{d\eta}{d\gamma}=-x\cos\gamma-y\sin\gamma,$$

$$\frac{d\zeta}{d\alpha}=x,\qquad\frac{d\zeta}{d\beta}=-y,\qquad\frac{d\zeta}{d\gamma}=0\,.$$

On déduit de ces expressions:

$$\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}=\left(-x\sin\gamma+y\cos\gamma\right)\left(x\frac{d^2\alpha}{dt^2}-y\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)-z\Big[z\sin\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+z\cos\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}+$$
$$+\left(-x\cos\gamma-y\sin\gamma\right)\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big]=\sin\gamma\left[-(x^2+z^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2}+xy\frac{d^2\beta}{dt^2}+yz\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right]+$$
$$+\cos\gamma\left[xy\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\left(y^2+z^2\right)\frac{d^2\beta}{dt^2}+zx\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right],$$

$$\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt_2}=z\left[-z\cos\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\sin\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}+\left(-x\sin\gamma+y\cos\gamma\right)\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right]-\Big(x\cos\gamma+$$
$$+y\sin\gamma\Big)\left(x\frac{d^2\alpha}{dt^2}-y\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)=\cos\gamma\left[-\left(x^2+z^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}+xy\frac{d^2\beta}{dt^2}+yz\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right]-$$
$$-\sin\gamma\left[xy\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\left(y^2+z^2\right)\frac{d^2\beta}{dt^2}+zx\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right],$$

$$\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}=\begin{cases}(x\cos\gamma+y\sin\gamma)\left[z\sin\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+z\cos\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-(x\cos\gamma+y\sin\gamma)\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right]\\ -(-x\sin\gamma+y\cos\gamma)\left[-z\cos\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+z\sin\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}+(-x\sin\gamma+y\cos\gamma)\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right]\end{cases}$$
$$=yz\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}+xz\frac{d^2\beta}{dt^2}-(x^2+y^2)\frac{d^2\gamma}{dt^2};$$

d'où en posant pour abréger:

$$\sum m(x^2+y^2)=A,\quad \sum m(y^2+z^2)=A',\quad \sum m(z^2+x^2)=A''$$
$$\sum mxy=B,\quad \sum myz=B',\quad \sum mzx=B'',$$

il vient:

$$\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\sin\gamma\left(-A''\frac{d^2\alpha}{dt^2}+B\frac{d^2\beta}{dt^2}+B'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\cos\gamma\left(B\frac{d^2\alpha}{dt^2}-A'\frac{d^2\beta}{dt^2}+B''\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$\sum m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=\cos\gamma\left(-A''\frac{d^2\alpha}{dt^2}+B\frac{d^2\beta}{dt^2}+B'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\sin\gamma\left(B\frac{d^2\alpha}{dt^2}-A'\frac{d^2\beta}{dt^2}+B''\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=B'\frac{d^2\alpha}{dt^2}+B''\frac{d^2\beta}{dt^2}-A\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

Il ne reste plus qu'à calculer $F_x, F_y, F_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$, en fonction des quantités $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \alpha, \beta, \gamma$.

Reportons nous aux formules 1. 2. 3 qui déterminent en fonction des α, β, γ les coordonnées relatives ξ, η, ζ à un instant quelconque du point dont les coordonnées primitives sont x, y, z: si dans ces formules on néglige les infiniment petits du second ordre, on aura:

$$\xi = x\cos\gamma + y\sin\gamma + z(-\alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma), \tag{5}$$

$$\eta = -x\sin\gamma + y\cos\gamma + z(\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma), \tag{6}$$

$$\zeta = z + \alpha x - \beta y. \tag{7}$$

Les forces qui agissent sur le solide à l'instant considéré sont son poids $-P$ et la poussée. Ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, cette dernière force peut être considéré comme résultant: 1° de la poussée primitive P agissant au centre de carène; 2° d'une série de forces élémentaires verticales p appliquées au centre de chacun des éléments du solide que le mouvement a immergés et égales chacune au poids du volume de liquide que déplace cet élément; 3° d'une série de forces élémentaires $-p'$, dirigées en sens inverse des précédentes, appliquées au centre de chacun des éléments que le mouvement a émergés, et égales chacune au poids du volume de liquide que cet élément ne déplace plus.

Toutes ces forces étant verticales, on aura tout d'abord $F_x = F_y = \mu_z = 0$.

La poussée P est connue: elle est appliquée au centre de carène: soit a la distance de ce point au centre de gravité: ses coordonnées primitives seront $x=0$, $y=0$, $z=a$; ses coordonnées ξ', η', ζ' à l'instant considéré seront donc d'après les formules 5, 6, 7:

$$\xi' = a(-\alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma),$$

$$\eta' = a(\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma),$$

$$\zeta' = a.$$

Les moments de la poussée P par rapport aux axes ox et oy seront donc respectivement:

$$\eta' P = Pa\{\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma\}, \qquad \text{et} \qquad -\xi' P = Pa\{\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma\}.$$

Pour évaluer d'autre part la somme des forces élémentaires p et $-p'$ et la somme de leurs moments, décomposons idéalement l'espace tout entier en prismes élémentaires indéfinis dans les deux sens, perpendiculaires au plan de flottaison, et ayant pour base les éléments de surface de ce plan.

Considérons isolément l'un de ces prismes, que nous supposerons invariablement lié au corps et le suivant dans son mouvement: soit $d\sigma$ la surface de sa base; x, y, z les coordonnées du centre de gravité de cette base.

Le déplacement vertical de ce point sera donné par la formule:

$$\zeta - z + \zeta_1 = \alpha x - \beta y + \zeta_1.$$

Il se trouvera ainsi à una distance du niveau du liquide égale en grandeur et en signe à $\alpha x - \beta y + \zeta_1$, quantité infiniment petite du premier ordre.

Tout point infiniment voisin du point x, y, z subira évidemment le même déplacement verticale au second ordre près. Les points du prisme qu'à l'instant considéré affleureront à la surface du liquide seront donc ceux qui en étaient distincts primitivement de la quantité $-(\alpha x - \beta y + \zeta_1)$. Si donc $\alpha x - \beta y + \zeta_1$ est négatif, le mouvement aura immergé le parallélépipède dont la base est $d\sigma$ et la hauteur $-(\alpha x - \beta y + \zeta_1)$: au contraire si cette quantité est positive, le mouvement aura émergé un parallélépipède dont la base est $d\sigma$ et la hauteur $\alpha x - \beta y + \zeta_1$.

1° Si l'élément $d\sigma$ est compris dans l'intérieur de la flottaison, le parallélépipède que nous venons de déterminer fera partie du corps: si le mouvement l'a immergé, il subira de la part du liquide une poussée p égale à son volume $-(\alpha x - \beta y + \zeta_1) d\sigma$ multiplié par la densité δ du liquide: s'il a été émergé au contraire la force élémentaire correspondante p' sera égale à son volume $(\alpha x - \beta y + \zeta_1) d\sigma$, multiplié par δ: mais cette force doit être prise négativement. Ainsi dans tous les cas, la force élémentaire relative au prisme considéré sera $-(\alpha x - \beta y + \zeta_1) d\sigma \cdot \delta$. Cette force est appliquée au centre de gravité du parallélépipède élémentaire: les coordonnées primitives de ce point sont, aux infiniment petits près, x, y, z; d'après les formules 5. 6. 7 ses coordonnées à l'instant considéré seront donc, en négligeant également les infiniments petits:

$$\xi = x\cos\gamma + y\sin\gamma, \qquad \eta = -x\sin\gamma + y\cos\gamma, \qquad \zeta = z.$$

Le moment de la force élémentaire par rapport à l'axe des x sera donc:

$$\eta p = (x\sin\gamma - y\cos\gamma)(\alpha x - \beta y + \zeta_1) d\sigma \cdot \delta$$

et son moment par rapport à l'axe des y:

$$-\xi p = (x\cos\gamma + y\sin\gamma)(\alpha x - \beta y + \zeta_1) \alpha\sigma \cdot \delta$$

2° Si l'élément $d\sigma$ est situé en dehors de la flottaison, le parallélépipède est extérieur au corps. Il n'a donc qu'une existence idéale et son immersion ou son émersion ne développe aucune force.

3° Il resterait à considérer le cas où l'élément $d\sigma$ est situé sur le contour même de la flottaison: dans ce cas il peut se faire que le parallélépipède soit en partie intérieur au corps flottant, en partie extérieur, ce qui compliquerait la question. Mais nous remarquerons que les éléments ainsi placés sont infiniment moins nombreux que ceux qui occupent l'intérieur de la flottaison et que par suite leur influence peut être négligée dans l'approximation du premier ordre.

En résumé, la somme des forces élémentaires p et $-p'$, chacune prise avec son signe, sera donc:

$$-\int(\alpha x-\beta y+\zeta_1)d\sigma\cdot\delta\,,$$

la somme de leurs moments par rapport à l'axe des x:

$$\int(x\sin\gamma-y\cos\gamma)(\alpha x-\beta y+\zeta_1)d\sigma\cdot\delta\,,$$

et la somme de leurs moments par rapport à l'axe des y:

$$\int(x\cos\gamma+y\sin\gamma)(\alpha x-\beta y+\zeta_1)d\sigma\cdot\delta;$$

les signes de sommation $\int$ s'étendant à toute la surface de la flottaison.

Considérons isolément chaque terme de ces intégrales, et faisons sortir du signe $\int$ les quantités constantes α, β, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, ζ_1, δ; on voit que les expressions précédentes dépendent des six intégrales:

$$\int d\sigma,\ \int x d\sigma,\ \int y d\sigma,\ \int x^2 d\sigma,\ \int y^2 d\sigma,\ \int xy\, d\sigma.$$

Si b désigne l'abscisse du centre de gravité c de la flottaison, on aura d'après la définition même de ce point:

$$\int x d\sigma = b\int d\sigma\,.$$

On aurait de même:

$$\int y d\sigma = b'\int d\sigma\,,$$

en désignant par b' la distance du point c au plan des zx. Ce plan ayant été choisi de manière à contenir le point c, on aura $\int y d\sigma = 0$.

Si donc nous posons pour abréger:

$$\int d\sigma = S,\quad \int x^2 d\sigma = R,\quad \int y^2 d\sigma = R',\quad \int xy\, d\sigma = Q\,,$$

d'où $\int x d\sigma = bS$ avec $\int y d\sigma = 0$, les intégrales cherchées deviendront respectivement:

$$-\int(\alpha x-\beta y+\zeta_1)\,d\sigma\cdot\delta = -\alpha\cdot\delta b S-\zeta_1\cdot\delta S,$$

$$\int(x\sin\gamma-y\cos\gamma)(\alpha x-\beta y+\zeta_1)d\sigma\cdot\delta = \sin\gamma\{\alpha\cdot\delta R-\beta\cdot\delta Q+\zeta_1\cdot\delta b S\}-$$
$$-\cos\gamma\{\alpha\cdot\delta Q-\beta\cdot\delta R'\}$$

$$\int(x\cos\gamma+y\sin\gamma)(\alpha x-\beta y+\zeta_1)\,d\sigma\cdot\delta = \cos\gamma\{\alpha\cdot\delta R-\beta\cdot\delta Q+\zeta_1\cdot\delta b S\}$$
$$+\sin\gamma\{\alpha\cdot\delta Q-\beta\cdot\delta R'\}\cdot$$

En réunissant les divers éléments qui précèdent, nous aurons pour les quantités F_z, μ_x, μ_y les expressions suivantes:

$$F_z = -P + P - \alpha\cdot\delta bS - \zeta_1\cdot\delta S = -\alpha\cdot\delta bS - \zeta_1\cdot\delta S\,,$$

$$\mu_x = Pa\{\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma\} + \sin\gamma\{\alpha\cdot\delta R - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\cdot\delta bS\} - \cos\gamma\{\alpha\cdot\delta Q - \beta\cdot\delta R'\}$$
$$= \sin\gamma\{\alpha\cdot(\delta R + Pa) - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\cdot\delta bS\} + \cos\gamma\{-\alpha\cdot\delta Q + \beta(\delta R' + Pa)\}$$

$$\mu_y = Pa\{\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma\} + \cos\gamma\{\alpha\cdot\delta R - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\delta bS\} + \sin\gamma\{\alpha\cdot\delta Q - \beta\delta R'\}$$
$$= \cos\gamma\{\alpha\cdot(\delta R + Pa) - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\delta bS\} - \sin\gamma\{-\alpha\cdot\delta Q + \beta(\delta R' + Pa)\}\,.$$

Substituons ces valeurs et celles trouvées plus haut pour les sommes $\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)$ etc., dans les six équations du mouvement: elles deviendront:

$$M\,\frac{d^2\xi_{\prime}}{dt^2} = 0\,,$$

$$M\,\frac{d^2\eta_{\prime}}{dt^2} = 0\,,$$

$$M\,\frac{d^2\zeta_{\prime}}{dt^2} = -\alpha\cdot\delta bS - \zeta_1\cdot\delta S\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\gamma\left\{-A''\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + B\dfrac{d^2\beta}{dt^2} + B'\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\right\}\\ +\cos\gamma\left\{\;\;B\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - A'\dfrac{d^2\beta}{dt^2} + B''\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\right\}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\;\;\sin\gamma\left\{\alpha(\delta R + Pa) - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\cdot\delta bS\right\}\\ +\cos\gamma\left\{-\alpha\cdot\delta Q + \beta(\delta R' + Pa)\right\}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\gamma\left\{-A''\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + B\dfrac{d^2\beta}{dt^2} + B'\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\right\}\\ -\sin\gamma\left\{\;\;B\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + A'\dfrac{d^2\beta}{dt^2} + B''\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\right\}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\;\;\cos\gamma\left\{\alpha(\delta R + Pa) - \beta\cdot\delta Q + \zeta_1\cdot\delta bS\right\}\\ -\sin\gamma\left\{-\alpha\cdot\delta Q + \beta(\delta R' + Pa)\right\}\end{array}\right.$$

$$B'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + B''\frac{d^2\beta}{dt^2} - A\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0\,.$$

Ces équations se simplifient aisément. En effet si dans la quatrième et la cinquième on fait passer tous les termes dans le premier membre, elles prennent la forme:

$$\mathfrak{A}\sin\gamma + \mathfrak{B}\cos\gamma = 0,$$

$$\mathfrak{A}\cos\gamma - \mathfrak{B}\sin\gamma = 0\,,$$

en posant pour abréger:

$$\mathfrak{A} = -A''\frac{d^2\alpha}{dt^2} + B\frac{d^2\beta}{dt^2} + B'\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \alpha\cdot(\delta R + Pa) + \beta\cdot\delta Q - \zeta_1\cdot\delta b S,$$

$$\mathfrak{B} = \quad B\frac{d^2\alpha}{dt^2} - A'\frac{d^2\beta}{dt^2} + B''\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \alpha\cdot\delta Q - \beta(\delta R' + Pa).$$

Multipliant maintenant la première de ces deux équations par $\sin\gamma$, la seconde par $\cos\gamma$ et ajoutant, il vient:

$$\mathfrak{A}(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = \mathfrak{A} = 0\cdot$$

On trouverait de même:

$$\mathfrak{B} = 0\cdot$$

Ces deux nouvelles équations pourront être avantageusement substituées à celles d'où elles sont tirées; car elles ne contiennent plus l'inconnue γ que par sa dérivée seconde, qu'on peut éliminer en la remplaçant par sa valeur $\frac{B'}{A}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{B''}{A}\frac{d^2\beta}{dt^2}$, tirée de la dernière équation.

Cette élimination faite, et en posant pour abréger:

$$\begin{array}{lll} \frac{B'^2}{A} - A'' = -\lambda, & B + \frac{B'B''}{A} = \nu, & \delta R + Pa = \phi\,, \quad \delta b S = \chi, \\ & & \delta R' + Pa = \phi', \quad \delta Q = \psi, \\ \frac{B''^2}{A} - A' = -\lambda', & & \delta S \qquad = \phi'', \end{array}$$

nous aurons les équations définitives:

$$M\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = 0\,, \tag{8}$$

$$M\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = 0\,, \tag{9}$$

$$M\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = -\chi\cdot\alpha - \phi''\cdot\zeta_1\,, \tag{10}$$

$$-\lambda\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \nu\frac{d^2\beta}{dt^2} = \phi\cdot\alpha - \psi\cdot\beta + \chi\cdot\zeta_1\,, \tag{11}$$

$$\nu\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \lambda'\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\psi\cdot\alpha + \phi'\cdot\beta\,, \tag{12}$$

$$B'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + B''\frac{d^2\beta}{dt^2} - A\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0\,, \tag{13}$$

système d'équations linéaires à coéfficients constants, qu'il nous sera facile d'intégrer.

II. Intégration des équations différentielles.

Le mouvement horizontal du centre de gravité étant régi par les deux équations (8) et (9), sera rectiligne et uniforme. Il sera d'ailleurs sans influence sur les autres mouvements du solide, puisque les équations (10), (11), (12), (13), qui les déterminent, ne contiennent ni ξ_1 ni η_1. Ces résultats étaient faciles à prévoir.

Il n'y a donc, à vrai dire, dans le problème actuel que quatre inconnues $\zeta_1, \alpha, \beta, \gamma$, qui seront déterminées, les trois premières par les équations (10), (11), (12), et la dernière γ par l'équation (13).

Avant de procéder aux intégrations, nous allons démontrer que les quantités λ, λ' et $\lambda\lambda'-\gamma^2$ sont essentiellement positives, propriété sur laquelle nous aurons à nous appuyer dans la discussion qui va suivre.

Les deux quantités λ et λ' étant entièrement analogues, il suffira de donner la démonstration pour l'une d'elles, λ' par exemple.

On a $\lambda'=A'-\dfrac{B''^2}{A}=\dfrac{AA'-B''^2}{A}\cdot$ Cette quantité aura le même signe que $AA'-B''^2$, car le dénominateur A étant un moment d'inertie est nécessairement positif. D'ailleurs:

$$A=\sum m(x^2+y^2),\qquad A'=\sum m(y^2+z^2),\qquad B''=\sum mzx\cdot$$

Pour calculer la quantité AA' on devra évidemment multiplier successivement chaque terme de la somme A par chaque terme de la somme A', et ajouter les résultats. Le produit AA' contiendra donc deux sortes de termes: 1° ceux de la forme $m(x^2+y^2).m(y^2+z^2)$ résultant de la multiplication de deux termes relatifs à un même point dont les coordonnées sont x, y, z et la masse m; 2° ceux qui résultent de la multiplication de deux termes relatifs à des points différentes x, y, z, m et x', y', z', m'. Ceux-ci peuvent être groupés deux à deux, en réunissant ensemble les deux termes $m(x^2+y^2).m'(y'^2+z'^2)$ et $m'(x'^2+y'^2).m(y^2+z^2)$.

On aura ainsi:

$$\begin{aligned}AA'=\sum m^2(x^2+y^2)(y^2+z^2)+\mathbf{S}\,[&m(x^2+y^2)\cdot m'(y'^2+z'^2)+\\&+m'(x'^2+y'^2)\cdot m'(x'^2+y'^2)\cdot m(y^2+z^2)]\,,\end{aligned}$$

le signe de sommation $\sum$ s'appliquant à tous les points du corps, et le signe

$\mathbf{S}$ à tous les systèmes de deux points différents que l'on peut prendre dans le corps.

On aura de même:

$$B''^2 = \sum mzx \cdot mzx + \mathbf{S}[mzx \cdot m'z'x' + m'z'x' \cdot mzx] = \sum m^2 z^2 x^2 + \mathbf{S} 2mzx \cdot m'z'x' .$$

On aura enfin:

$$AA' - B''^2 = \sum [m^2(x^2+y^2)(y^2+z^2) - m^2 z^2 x]^2 +$$
$$+ \mathbf{S}[m(x^2+y^2)m'(y'^2+z'^2) + m'(x'^2+y'^2)m(y^2+z^2) - 2mzx \cdot m'z'x'] =$$
$$\sum m^2 y^2 (x^2+y^2+z^2) + \mathbf{S} mm' \{(xz'-x'z)^2 + y^2(x'^2+y'^2+z'^2) + y'^2(x^2+y^2+z^2)\}$$

Sous cette forme on voit que chacune des deux sommes précédentes a chacun de ses termes nul ou positif.

Pour que la première somme $\sum$ eût tous ses termes nuls, il faudrait que l'on eût pour tous les points du corps $m=0$ ou $y=0$: ainsi toute la masse du corps se trouverait concentrée dans le plan des zx. Si l'on voulait en outre que la seconde somme $\mathbf{S}$ eût tous ses termes nuls, il faudrait que, le point m, x, y, z étant donné, tous les autres points du corps satisfissent à l'une des conditions $m'=0$ ou $xz'-x'z=0$. Cette dernière équation est celle d'un plan passant par l'origine et qui devrait contenir tous les points du corps dont la masse n'est pas nulle. La masse du corps serait donc tout entière concentrée sur la droite d'intersection de ce plan avec le plan des zx, hypothèse singulière que nous avons déjà écartée.

La quantité $AA'-B''^2$ et par suite la quantité λ' est donc nécessairement positive et différente de zéro.

Passons à l'examen de la quantité $\lambda\lambda' - \nu^2$:

$$\lambda\lambda' - \nu^2 = \left(A'' - \frac{B'^2}{A}\right)\left(A' - \frac{B''^2}{A}\right) - \left(B + \frac{B'B''}{A}\right)^2 = \frac{-AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + AA'A'' - 2BB'B''}{A^2};$$

$\lambda\lambda' - \nu^2$ a donc le même signe que son numérateur

$$-AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + AA'A'' - 2BB'B'' .$$

Pour démontrer que cette quantité est positive, on pourrait employer un calcul analogue à celui que nous venons de faire pour $AA'-B''^2$, mais nous parviendrons plus simplement à ce résultat par les considérations suivantes:

Supposons le corps en repos, et rapportons-le à trois axes coordonnés rectangulaires quelconques ox_1, oy_1, oz_1 passant par le centre de gravité: donnons au corps un mouvement petit quelconque, en le faisant tourner successivement d'un angle infiniment petit α_1 autour de l'axe oy_1, d'un angle infiniment petit β_1 autour de l'axe ox_1, enfin d'un angle infiniment petit γ_1 autour de l'axe oz_1.

Soient m la masse de l'un des points du corps; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées initiales, $\xi_1=x_1+dx_1$, $\eta_1=y_1+dy_1$, $\zeta_1=z_1+dz_1$ ses coordonnées après le mouvement: on aura les trois formules suivantes, analogues aux formules (1), (2), (3) :

$$\xi_1=x_1+dx_1=x_1\{\cos\alpha_1\cos\gamma_1+\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\}+y_1\cos\beta_1\sin\gamma_1+$$
$$+z_1\{-\sin\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\},$$
$$\eta_1=y_1+dy_1=x_1\{-\cos\alpha_1\sin\gamma_1+\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1\}+y_1\cos\beta_1\cos\gamma_1+$$
$$+z_1\{\sin\alpha_1\sin\gamma_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1\},$$
$$\zeta_1=z_1+dz_1=x_1\sin\alpha_1\cos\beta_1-y_1\sin\beta_1+z_1\cos\alpha_1\cos\beta_1;$$

ou en négligeant les infiniments petits du second ordre,

$$\begin{aligned} dx_1&=\gamma_1 y_1-\alpha_1 z_1\\ dy_1&=-\gamma_1 x_1+\beta_1 z_1\\ dz_1&=\gamma_1 x_1-\beta_1 y_1\,. \end{aligned}$$

Les sommes des aires décrites par les divers éléments du solide sur les trois plans coordonnés seront respectivement:

$$\begin{aligned} \sum m(y_1dz_1-z_1dy_1)&=\alpha_1\sum mx_1y_1-\beta_1\sum m(y_1^2+z_1^2)+\gamma_1\sum mz_1x_1,\\ \sum m(z_1dx_1-x_1dz_1)&=-\alpha_1\sum m(z_1^2+x_1^2)+\beta_1\sum mx_1y_1+\gamma_1\sum my_1z_1,\\ \sum m(x_1dy_1-y_1dx_1)&=\alpha_1\sum my_1z_1+\beta_1\sum mz_1x_1-\gamma_1\sum m(x_1^2+y_1^2)\,. \end{aligned}$$

En général ces trois sommes ne pourrons s'annuler à la fois que si $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=0$, auquel cas le corps reste en repos. Mais si le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sum mx_1y_1 & -\sum m(y_1^2+z_1^2) & \sum mz_1x_1\\ -\sum m(z_1^2+x_1^2) & \sum mx_1y_1 & \sum my_1z_1\\ \sum my_1z_1 & \sum mz_1x_1 & -\sum m(x_1^2+y_1^2) \end{vmatrix}$$

est nul, les trois sommes ci-dessus ne sont plus distinctes et peuvent être satisfaites par d'autres systèmes de valeurs que $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=0$. On pourra donc imprimer au corps un mouvement tel que les sommes des aires décrites par les divers éléments du solide soient nulles sur les trois plans coordonnés.

Les aires relatives à un plan quelconque s'expriment linéairement, comme on le sait, en fonction des aires relatives aux plans coordonnés. Il en résulte que la somme des aires relatives à un plan quelconque sera nulle également.

Considérons particulièrement les aires relatives à un plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation. Toutes les aires décrites sur ce plan seront dans le même sens. Leur somme ne peut donc être nulle, à moins que les masses qui les multiplient ne soient toutes nulles; la masse entière du corps se trouverait ainsi concentrée sur l'axe instantané de rotation.

Ainsi le déterminant Δ ne peut s'annuler que si la masse entière du solide est concentrée sur une droite unique, cas singulier que nous excluons de nos calculs; comme nous l'avons déjà dit précédemment.

Si nous faisons coïncider les axes ox_1, oy_1, oz_1 avec les axes principaux du solide, $\sum mx_1y_1=0$, $\sum my_1z_1=0$, $\sum mz_1x_1=0$ et la valeur de Δ se réduit à

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sum m(y_1^2+z_1^2) & 0 \\ -\sum m(z_1^2+x_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sum m(x_1^2+y_1^2) \end{vmatrix} = \sum m(z_1^2+x_1^2)\,.\sum m(y_1^2+z_1^2)\,.\sum m(x_1^2+y_1^2),$$

quantité essentiellement positive.

Si maintenant on fait varier d'une manière continue la direction des axes arbitraires ox_1, oy_1, oz_1, la quantité Δ, qui est essentiellement réelle, variera elle-même d'une manière continue, et comme elle ne peut s'annuler, elle restera positive, quelle que soit la direction finale des axes. Si ces axes coïncident avec ox, oy, oz, la quantité Δ devient:

$$\begin{vmatrix} B & -A' & B'' \\ -A'' & B & B' \\ B' & B'' & -A \end{vmatrix} = -AB^2-A'B'^2-A''B''^2+AA'A''-2BB'B''.$$

Ce dernier polynôme et par suite $\lambda\lambda'-\nu^2$ sont donc essentiellement positifs.

Procédons maintenant à l'intégration des trois équations simultanées :

$$-\lambda\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\nu\frac{d^2\beta}{dt^2} \quad = \quad \phi\cdot\alpha-\psi\cdot\beta+\chi\cdot\zeta_1 \qquad (11)$$

$$\nu\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\lambda'\frac{d^2\beta}{dt^2} \quad =-\psi\cdot\alpha-\phi'\cdot\beta \qquad (12)$$

$$M\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}=-\chi\cdot\alpha \quad \cdot \quad -\phi''\cdot\zeta_1\,. \qquad (10)$$

Nous aurons un système d'intégrales particulières en posant, suivant un procédé connu:

$$\alpha=fe^{kt},\quad \beta=ge^{kt},\quad \gamma=he^{kt},$$

les constantes f, g, h étant assujetties aux relations:

$$(\phi+\lambda k^2)f-(\psi+\nu k^2)g+\chi h \qquad =0 \qquad (14)$$

$$-(\psi+\nu k^2)f+(\phi'+\lambda'k^2)g \qquad =0 \qquad (15)$$

$$-\chi\cdot f \qquad -(\phi''+Mk^2)h=0. \qquad (16)$$

Ces équations déterminent les rapports des constantes f, g, h, si la constante k est choisie de manière que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \phi+\lambda k^2 & -(\psi+\nu k^2) & \chi \\ -(\psi+\nu k^2) & \phi'+\lambda'k^2 & 0 \\ -\chi & 0 & -(\phi''+Mk^2) \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi:

$$-(\phi+\lambda k^2)(\phi'+\lambda'k^2)(\phi''+Mk^2)+(\psi+\nu k^2)^2(\phi''+Mk^2)+\chi^2(\phi'+\lambda'k^2)=0 \quad (17)$$

ou

$$-M\lambda'(\phi+\lambda k^2)\left(\frac{\varphi'}{\lambda}+k^2\right)\left(\frac{\varphi''}{M}+k^2\right)+M(\psi+\nu k^2)^2\left(\frac{\varphi''}{M}+k^2\right)+\chi^2\lambda'\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2\right)=0,$$

équation du troisième degré par rapport à l'inconnue k^2.

Nous supposerons d'abord que les trois quantités χ, $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$, $\frac{\varphi''}{M}-\frac{\varphi'}{\lambda'}$ sont différentes de 0, sauf a procéder ensuite à un examen spécial pour les cas particuliers dans lesquels quelqu'une de ces quantités s'annule. Cette restriction faite, il est facile d'établir d'une manière générale que l'équation (17) donne pour k^2 trois valeurs réelles inégales et différentes de $\frac{\varphi'}{\lambda'}$ et $\frac{\varphi''}{M}$. En effet, substituons dans le premier membre de l'équation la valeur $k^2 = +\infty$. Le résultat de la substitution aura le même signe que le coefficient $-M(\lambda\lambda' - \nu^2)$ du terme du degré le plus élevé: il sera donc négatif.

1° Si maintenant $\frac{\varphi''}{M} < \frac{\varphi'}{\lambda'}$, substituons successivement dans le premier membre de l'équation (17) la valeur $K^2 = -\frac{\varphi''}{M}$, puis la valeur $K^2 = -\frac{\varphi'}{\lambda'}$. La première de ces deux valeurs annulera les deux premiers termes de l'équation: le troisième deviendra $\chi^2\lambda'\left(\frac{\varphi'}{\lambda'} - \frac{\varphi''}{M}\right)$, quantité essentiellement positive, puisque λ' est positif, ainsi que $\frac{\varphi'}{\lambda'} - \frac{\varphi''}{M}$. La seconde valeur annulera le premier et le troisième terme de l'équation (17); le second terme deviendra $M\left\{\psi - \frac{\nu\varphi}{\lambda'}\right\}^2\left\{\frac{\varphi''}{M} - \frac{\varphi'}{\lambda'}\right\}$, quantité essentiellement négative. Enfin substituons dans le premier membre de l'équation (17) la valeur $K^2 = -\infty$: le résultat sera de signe contraire à $-M(\lambda\lambda' - \nu^2)$: il sera donc positif.

Ainsi, en substituant successivement dans le premier membre de l'équation, à la place de K^2, la suite des valeurs décroissantes $+\infty, -\frac{\varphi''}{M}, -\frac{\varphi'}{\lambda'}, -\infty$, on obtiendra des résultats alternativement négatifs et positifs. Les trois racines de l'équation sont donc réelles, inégales et comprises, l'une entre $+\infty$ et $-\frac{\varphi''}{M}$, une autre entre $-\frac{\varphi''}{M}$ et $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$, et la dernière entre $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$ et $-\infty$.

2° Si au contraire $\frac{\varphi''}{M} > \frac{\varphi'}{\lambda'}$, on pourra substituer successivement dans le premier membre de l'équation (17), à la place de K^2 les quantités en série décroissante $+\infty, -\frac{\varphi'}{\lambda'}, -\frac{\varphi''}{M}, -\infty$. Les résultats seront alternativement positifs et négatifs. Les trois racines seront donc encore réelles, inégales et comprises, la première entre $+\infty$ et $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$, la seconde entre $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$ et $-\frac{\varphi''}{M}$, la troisième entre $-\frac{\varphi''}{M}$ et $-\infty$.

La constante k étant déterminée de manière à satisfaire à l'équation (17), les équations (15) et (16) donneront pour les rapports des quantités f, g, h les valeurs suivantes:

$$\frac{g}{f}=\frac{\psi+\nu k^2}{\varphi'+\lambda' k^2}, \qquad \frac{h}{f}=\frac{-\chi}{\varphi''+Mk^2}.$$

La quantité k^2 n'étant égale, ainsi que nous l'avons vu, ni à $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$ ni à $-\frac{\varphi''}{M'}$, ces expressions seront finies et admissibles.

Soient q_1, q_2, q_3 les trois valeurs de k^2 déterminées d'après l'équation (17): supposons d'abord ces valeurs différentes de zéro. On aura pour k six valeurs distinctes, $\pm\sqrt{q_1}, \pm\sqrt{q_2}, \pm\sqrt{q_3}$, et les intégrales générales des équations (10), (11), (12) seront:

$$\alpha= f_1 e^{\sqrt{q_1}t}+f'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}+f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t}+f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t} \tag{18}$$

$$\beta=\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\left\{f_1 e^{\sqrt{q_1}t}+f'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}\right\}+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left\{f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t}\right\}+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\left\{f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \tag{19}$$

$$\zeta=\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\left\{f_1 e^{\sqrt{q_1}t}+f'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}\right\}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\left\{f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t}\right\}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\left\{f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \tag{20}$$

Il reste à déterminer les constantes $f_1, f'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3$ de manière à satisfaire aux conditions initiales. Soient $[\alpha]_0, [\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$, les valeurs initiales de α, β, ζ_1 et de leurs dérivées. Les formules (18), (19), (20) donneront, en y posant $t=0$:

$$\left\{f_1+f'_1\right\}+\left\{f_2+f'_2\right\}+\left\{f_3+f'_3\right\}=[\alpha]_0 \tag{21}$$

$$\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\left\{f_1+f'_1\right\}+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left\{f_2+f'_2\right\}+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\left\{f_3+f'_3\right\}=[\beta]_0 \tag{22}$$

$$\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\left\{f_1+f'_1\right\}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\left\{f_2+f'_2\right\}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\left\{f_3+f'_3\right\}=[\zeta_1]_0 \tag{23}$$

Les mêmes formules, différentiées, donneront en y posant $t=0$:

$$\sqrt{q_1}\left(f_1-f'_1\right)+\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0 \tag{24}$$

$$\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\cdot\sqrt{q_1}\left(f_1-f'_1\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0 \tag{25}$$

$$\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\cdot\sqrt{q_1}\left(f_1-f'_1\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0 \tag{26}$$

Les équations (21), (22), (23) déterminent les trois sommes f_1+f_1', f_2+f_2', f_3+f_3' en fonction linéaire de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$. Les équations (24), (25), (26) déterminent de même les quantités $\sqrt{q_1}(f_1-f'_1)$, $\sqrt{q_2}(f_2-f'_2)$, $\sqrt{q_3}(f_3-f'_3)$ en fonction linéaire de $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$. On en déduit ensuite aisément les valeurs de chacune des constantes f_1, f'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3 au moyen des formules:

$$f_1=\tfrac{1}{2}(f_1+f'_1)+\frac{1}{2\sqrt{q_1}}\cdot\sqrt{q_1}\,(f_1-f'_1),\qquad f'_1=\tfrac{1}{2}(f_1+f'_1)-\frac{1}{2\sqrt{q_1}}\cdot\sqrt{q_1}\,(f_1-f'_1),\ \text{etc...}$$

Cette détermination souffrirait quelque difficulté, si le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1} & \dfrac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2} & \dfrac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3} \\ \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_1} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_2} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_3} \end{vmatrix}$$

commun au système des équations (21), (22), (23), et à celui des équations (24), (25), (26), était égal à zéro. Mais on voit aisément que cette circonstance ne peut se présenter.

On a en effet: $D=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}-\dfrac{\nu}{\lambda'} & \dfrac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}-\dfrac{\nu}{\lambda'} & \dfrac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}-\dfrac{\nu}{\lambda'} \\ \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_1} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_2} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_3} \end{vmatrix}=-\chi(\psi\lambda'-\varphi'\nu)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\varphi'+\lambda' q_1} & \dfrac{1}{\varphi'+\lambda' q_2} & \dfrac{1}{\varphi'+\lambda' q_3} \\ \dfrac{1}{\varphi''+Mq_1} & \dfrac{1}{\varphi''+Mq_2} & \dfrac{1}{\varphi''+Mq_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\chi(\psi\lambda' - \varphi'\nu)}{(\varphi'+\lambda' q_1)(\varphi'+\lambda' q_2)(\varphi'+\lambda' q_3)(\varphi''+Mq_1)(\varphi''+Mq_2)(\varphi''+Mq_3)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (\varphi'+\lambda' q_1)(\varphi''+Mq_1) & (\varphi'+\lambda' q_2)(\varphi''+Mq_2) & (\varphi'+\lambda' q_3)(\varphi''+Mq_3) \\ \varphi''+Mq_1 & \varphi''+Mq_2 & \varphi''+Mq_3 \\ \varphi'+\lambda' q_1 & \varphi'+\lambda' q_2 & \varphi'+\lambda' q_3 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est une fonction du troisième degré seulement en q_1, q_2, q_3. En effet, les termes du quatrième degré

$$M\lambda' q_1^2 \{ Mq_2 \cdot \lambda' q_3 - Mq_3 \cdot \lambda' q_2 \} + M\lambda' q_2^2 \{ Mq_3 \cdot \lambda' q_1 - Mq_1 \cdot \lambda' q_3 \} + M\lambda' q_3^2 \{ Mq_1 \cdot \lambda' q_2 - Mq_2 \cdot \lambda' q_1 \}$$

s'annulent identiquement. Cette fonction s'annule d'ailleurs toutes les fois que $q_1 = q_2$, ou $q_2 = q_3$, ou $q_3 = q_1$: car deux colonnes du déterminant deviennent identiques. Cette fonction est donc nécessairement égale à $\Gamma(q_1-q_2)(q_2-q_3)(q_3-q_1)$, Γ étant un coefficient constant. D'ailleurs le coefficient du terme en $q_1^2 q_2$ est égal à $M\lambda' \{ M\varphi' - \lambda' \varphi'' \}$. D'autre part, dans l'expression $\Gamma(q_1-q_2)(q_2-q_3)(q_3-q_1)$ ce coefficient est $-\Gamma$. Donc:

$$\Gamma = -M\lambda'(M\varphi' - \lambda'\varphi'') = -M^2\lambda'^2\left(\frac{\varphi'}{\lambda'} - \frac{\varphi''}{M}\right).$$

On a donc en définitive:

$$D = \frac{\lambda'\chi\left(\psi - \frac{\varphi'\nu}{\lambda'}\right) \cdot M^2\lambda'^2\left(\frac{\varphi'}{\lambda'} - \frac{\varphi''}{M}\right) \cdot (q_1-q_2)(q_2-q_3)(q_3-q_1)}{(\varphi'+\lambda' q_1)(\varphi'+\lambda' q_2)(\varphi'+\lambda' q_3)(\varphi''+Mq_1)(\varphi''+Mq_2)(\varphi''+Mq_3)},$$

expression qui ne renferme, tant au numérateur qu'au dénominateur, que des facteurs que nous avons supposé ou démontré être différents de zéro.

On est donc sûr de pouvoir exprimer sans difficulté les constantes $f_1, f'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3$ en fonction des quantités $[\alpha]_0, [\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$ etc... qui déterminent l'état initial. Il importe d'ailleurs de remarquer qu'aucune de ces constantes ne peut s'annuler identiquement pour tout système de valeurs des quantités $[\alpha]_0, [\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$ etc. Supposons en effet que l'une d'elles, f_1 par exemple, s'annule identiquement pour tout système de valeurs de ces quantités. On a $f_1 = \frac{1}{2}\left\{ f_1 + f'_1 \right\} + \frac{1}{2\sqrt{q_1}} \cdot \sqrt{q_1}(f_1 - f'_1)$ · D'après les équations

(21), (22), (23), $f_1 + f'_1$ sera une fonction linéaire de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$. Soit $f_1+f'_1 = R[\alpha]_0 + S[\beta]_0 + T[\zeta_1]_0$; les équations (24), (25), (26) donneront

$$\sqrt{q_1}\,(f_1 - f'_1) = R\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0 + S\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0 + T\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0.$$

On aura ainsi

$$f_1 = R[\alpha]_0 + S[\beta]_0 + T[\zeta_1] + \frac{R\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0 + S\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0 + T\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0}{2\sqrt{q_1}}.$$

Pour que cette expression fût identiquement nulle pour tout système de valeur de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$, il faudrait que l'on eût à la fois $R=0$, $S=0$, $T=0$. Mais alors le déterminant D, qu'on sait être égal a $R + \frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1} S + \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1} T$, serait nul, ce qui ne peut être, ainsi que nous venons de le démontrer.

Supposons maintenant que l'une des quantités q_1, q_2, q_3, q_1 par exemple, soit égale à zéro. L'équation en k aura une racine double égale à zéro et quatre autres racines inégales $\pm\sqrt{q_2}$, $\pm\sqrt{q_3}$. On sait qu'on devra remplacer dans les intégrales générales (18), (19,) (20) les deux termes $f_1 e^{\sqrt{q_1}t} + f'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}$ correspondants à la racine double, par une fonction linéaire $f_1 + f'_1 t$. On pourra d'ailleurs y laisser subsister pour la symétrie les termes affectés du facteur nul q_1.

Les équations qui déterminent les constantes en fonction de l'état initial seront identiques aux équations (21), (22), (23), (24), (25), (26), sauf le remplacement de f_1+f_1' par f_1 et de $\sqrt{q_1}\,t\,(f_1-f_1')$ par f_1'. Le déterminant D étant différent de zéro, les constantes s'exprimeront sans difficulté en fonction de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$, et aucune d'elles ne sera identiquement nulle pour tout système de valeurs de ces quantités.

Les intégrales des équations (10), (11), (12) se trouvent ainsi complètement déterminées: il est d'ailleurs aisé de voir dans quel cas les valeurs trouvées pour α, β, ζ_1 resteront infiniment petites pendant toute la durée du mouvement, et quel que soit l'état initial, ce qui est, comme nous l'avons vu, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit stable.

1° Si les quantités q_1, q_2, q_3 sont toutes les trois négatives, chacune des exponentielles imaginaires $e^{\sqrt{q_1}t}$, $e^{-\sqrt{q_1}t}$, $e^{\sqrt{q_2}t}$, $e^{-\sqrt{q_2}t}$, $e^{\sqrt{q_3}t}$, $e^{-\sqrt{q_3}t}$ restera finie et périodique en vertu de la formule connue:

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1}\sin x \cdot$$

D'ailleurs les coefficients $f_1, f'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3$ étant des fonctions linéaires de $[\alpha]_0\,[\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$ seront infiniment petits, quels que soient les rapports relatifs de ces dernières quantités, supposées elles-mêmes infiniment petites. Les valeurs de α, β, ζ_1 resteront donc elle-mêmes infiniment petites, quel que soit l'état initial. L'équilibre sera donc stable.

2° Supposons au contraire que quelqu'une des quantités q_1, q_2, q_3 soit positive: soit q_3 la plus grande d'entre elles. On a d'après la formule (18):

$$\frac{\alpha}{e^{\sqrt{q_3}t}} = f_1\frac{e^{\sqrt{q_1}t}}{e^{\sqrt{q_3}t}} + f_1'\frac{e^{-\sqrt{q_1}t}}{e^{\sqrt{q_3}t}} + f_2\frac{e^{\sqrt{q_2}t}}{e^{\sqrt{q_3}t}} + f_2'\frac{e^{-\sqrt{q_2}t}}{e^{\sqrt{q_3}t}} + f_3 + f_3'\frac{e^{-\sqrt{q_3}t}}{e^{\sqrt{q_3}t}},$$

(si l'on avait $q_1 = 0$, il faudrait remplacer les deux premiers termes du second membre par $\left.\frac{f_1}{e^{\sqrt{q_3}t}} + \frac{f_1't}{e^{\sqrt{q_3}\,t}}\right)$.

Faisons croître t au delà de toute limite. Tous les termes du second membre tendront vers zéro, excepté le terme constant f_3. On aura donc sensiblement, lorsque t sera très-grand, $\frac{\alpha}{e^{\sqrt{q_3}t}} = f_3$. Cette formule montre que α croît indéfiniment, à moins que f_3 ne soit nul: mais nous avons vu que f_3 est une fonction linéaire, et non identiquement nulle, de $[\alpha]_0, [\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0,$ etc. La quantité f_3 ne pourra donc s'annuler, et α rester infiniment petit d'une manière générale et pour un état initial quelconque. L'équilibre sera donc instable.

Il en sera de même si l'une des quantités q_1, q_2, q_3 est nulle. Supposons en effet $q_1 = 0$, q_2 et q_3 négatifs (Si l'une des quantités q_2, q_3 était positive, l'instabilité serait démontrée par ce qui précède). La formule correspondante à ce cas est:

$$\alpha = f_1 + f_1't + f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f_2' e^{-\sqrt{q_2}t} + f_3 e^{\sqrt{q_3}t} + f_3' e^{-\sqrt{q_3}t}\ .$$

Tous les termes qui entrent dans cette expression sont infiniment petits et périodiques, à l'exception de $f'_1 t$ qui croîtra indéfiniment avec le temps: α croîtra donc lui-même indéfiniment, à moins que l'on n'ait $f'_1 = 0$. Mais il sera impossible de satisfaire à cette dernière condition d'une manière générale et quel que soit l'état initial: l'équilibre sera donc instable.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est que les trois valeurs réelles de k^2, données par l'équation (17), soient négatives.

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, l'équilibre est instable: mais on peut distinguer en quelque sorte plusieurs degrés d'instabilité, suivant le nombre des équations de condition qui doivent exister entre $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta}{dt}\right]_0$, pour que α, β, ζ_1 restent infiniment petits pendant toute la durée du mouvement.

En effet, supposons toujours que nous fassions croître t au delà de toute limite. Si une seule des quantités q_1, q_2, q_3, q_3 par exemple, est positive ou nulle, chacun des termes qui entrent dans l'expressions de α, β, ζ_1 restera infiniment petit, à l'exception du terme $f_3 e^{\sqrt{q_3}\,t}$. La quantité f_1 est d'ailleurs une fonction linéaire de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$ etc. Si ces quantités sont choisies de manière à satisfare à là relation $f_3=0$, α, β, ζ_1 resteront infiniment petits pendant tout le mouvement.

Si sur les trois quantités q_1, q_2, q_3 il y en a deux q_1, q_2 positives ou nulles, il faudra, pour que α, β, ζ_1 restent infiniment petits, que les quantités $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$ etc., satisfassent à la fois aux deux relations

$$f_2=0 \quad \text{et} \quad f_3=0\,.$$

Si q_1, q_2, q_3 sont tous trois positifs ou nuls, on aura trois équations de condition

$$f_1=0\,, \qquad f_2=0\,, \qquad f_3=0\,.$$

Ainsi le nombre des équations de condition qui doivent exister entre les quantités $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$ etc... pour que α, β, ζ_1 restent infiniment petits pendant toute la durée du mouvement, nombre qu'on pourrait assez bien appeler le *degré de l'instabilité*, est egal au nombre des racines positives ou nulles de l'équation (17).

Il nous reste à examiner les cas laissés de côté précédemment, où quelqu'une des quantités χ, $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$, $\frac{\varphi'}{M}-\frac{\varphi'}{\lambda'}$ est égale à zéro.

Supposons en premier lieu $\chi \gtrless 0$, $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\gtrless 0$, mais $\frac{\varphi''}{M}=\frac{\varphi'}{\lambda'}$. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{\varphi'}{M}$ dans l'équation (17), elle devient:

$$\left\{\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2\right\}\left\{-M\lambda'\left(\phi+\lambda k^2\right)\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2\right)+M\left(\psi+\nu k^2\right)^2+\chi^2\right\}=0\,.$$

En posant $\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2=0$, on obtient une première racine $q_1=-\frac{\varphi'}{\lambda'}$. Les deux autres q_2, q_3 s'obtiennent en posant:

$$-M\lambda'\left(\phi+\lambda k^2\right)\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2\right)+M\left(\psi+\nu k^2\right)^2+\chi^2=0\,.$$

Ces deux racines sont réelles, et l'une plus grande, l'autre plus petite que $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$. En effet, si l'on substitue dans le premier membre de cette dernière équation la valeur $k^2=\infty$, le résultat aura le signe du coefficient du terme le plus élevé $-M(\lambda\lambda'-\nu^2)$, lequel est négatif. Au contraire, en posant $k^2=-\frac{\varphi'}{\lambda'}$, on obtient un résultat essentiellement positif, $M\left(\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\right)^2+\chi^2$.

L'équation (17) aura donc ses trois racines réelles et inégales, comme dans le cas général.

Les intégrales générales des équations (10), (11), (12) seront de la forme:

$$\alpha=f_1e^{\sqrt{q_1}t}+f'_1e^{-\sqrt{q_1}t}+f_2e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2e^{-\sqrt{q_2}t}+f_3e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3e^{-\sqrt{q_3}t}\,,$$

$$\beta=g_1e^{\sqrt{q_1}t}+g'_1e^{-\sqrt{q_1}t}+g_2e^{\sqrt{q_2}t}+g'_2e^{-\sqrt{q_2}t}+g_3e^{\sqrt{q_3}t}+g'_3e^{-\sqrt{q_3}t}\,,$$

$$\zeta_1=h_1e^{\sqrt{q_1}t}+h'_1e^{-\sqrt{q_1}t}+h_2e^{\sqrt{q_2}t}+h'_2e^{-\sqrt{q_2}t}+h_3e^{\sqrt{q_3}t}+h'_3e^{-\sqrt{q_3}t}\,,$$

les constantes f_1, g_1, h_1, f'_1, g'_1, h'_1, f_2, g_2, h_2, f'_2, g'_2, h'_2 etc... étant liées entre elles, comme dans le cas général, par les six groupes d'équations suivantes:

$$\begin{array}{ll}
(\phi+\lambda q_1)f_1-(\psi+\nu q_1)g_1+\chi h_1=0\,, & (\phi+\lambda q_1)f'_1-(\psi+\nu q_1)g'_1+\chi h'_1=0\,,\\
-(\psi+\nu q_1)f_1+(\phi'+\lambda' q_1)g_1 \qquad =0\,, & -(\psi+\nu q_1)f'_1+(\phi'+\lambda' q_1)g'_1 \qquad =0\,,\\
-\chi f_1 \qquad -(\phi''+Mq_1)h_1=0\,, & -\chi f'_1 \qquad -(\phi''+Mq_1)h'_1=0\,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(\phi+\lambda q_2)f_2-(\psi+\nu q_2)g_2+\chi h_2=0\,, & \\
-(\psi+\nu q_2)f_2+(\phi'+\lambda' q_2)g_2 \qquad =0\,, & \text{etc...}\\
-\chi f_2 \qquad -(\phi''+Mq_2)h_2=0\,, &
\end{array}$$

Les deux premiers groupes d'équations donneront, en remarquant que $q_1=-\frac{\varphi'}{\lambda'}=-\frac{\varphi''}{M}$, d'où $\phi'+\lambda' q_1=\phi''+Mq_1=0$, $\psi+\nu q_1=\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$,

$$f_1=f'_1=0\,,\qquad \frac{h_1}{g_1}=\frac{h'_1}{g'_1}=\frac{\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi}\,.$$

Les autres groupes d'équations donneront, comme dans le cas général:

$$\frac{g_2}{f_2}=\frac{g'_2}{f'_2}=\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}, \qquad \frac{h_2}{f_2}=\frac{h'_2}{f'_2}=\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2},$$

$$\frac{g_3}{f_3}=\frac{g'_3}{f'_3}=\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}, \qquad \frac{h_3}{f_3}=\frac{h'_3}{f'_3}=\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3},$$

ce qui donne aux intégrales générales α, β, ζ_1 la forme définitive:

$$\alpha= f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t} + f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t} \tag{18}$$

$$\beta= g_1 e^{\sqrt{q_1}t}+g'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left(f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_3}t}\right)+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\left(f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right) \tag{19}$$

$$\zeta_1=\frac{\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi}\left(g_1 e^{\sqrt{q_1}t}+g'_1 e^{-\sqrt{q_1}t}\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\left(f_2 e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t}\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\left(f_3 e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right) \tag{20}$$

Il reste à déterminer les quantités constantes g_1, g_1', f_2, f_2', f_3', f_3', au moyen de l'état initial, ce qui se fera par les équations:

$$\left(f_2+f'_2\right)+\left(f_3+f'_3\right)=[\alpha]_0 \tag{21}$$

$$\left(g_1+g'_1\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left(f_2+f'_2\right)+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\left(f_3+f'_3\right)=[\beta]_0 \tag{22}$$

$$\frac{\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi}\left(g_1+g'_1\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\left(f_2+f'_2\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\left(f_3+f'_3\right)=[\zeta_1]_0 \tag{23}$$

et par celles-ci:

$$\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0 \tag{24}$$

$$\sqrt{q_1}\left(g_1-g'_1\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0 \tag{25}$$

$$\frac{\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi}\cdot\sqrt{q_1}\left(g_1-g'_1\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(f_2-f'_2\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(f_3-f'_3\right)=\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0 \tag{26}$$

Ces équations déterminent sans difficulté les quantités $(g_1+g'_1)$, $(f_2+f'_2)$, $(f_3+f'_3)$, $\sqrt{q_1}(g_1-g'_1)$, $\sqrt{q_2}(f_2-f'_2)$, $\sqrt{q_3}(f_3-f'_3)$ et par suite g_1, g'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3, pourvu que le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2} & \dfrac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3} \\ \dfrac{\chi-\dfrac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_2} & \dfrac{-\chi}{\varphi''+Mq_3} \end{vmatrix} \text{ soit} \gtrless 0.$$

Or ce déterminant est égal à

$$\frac{\chi}{\varphi''+Mq_3}-\frac{\chi}{\varphi''+Mq_2}+\frac{\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}}{\chi}\left(\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}-\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\right)=\frac{\chi}{M}\cdot\frac{q_2-q_3}{\left(\frac{\varphi''}{M}+q_2\right)\left(\frac{\varphi''}{M}+q_3\right)}+\frac{\left(\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\right)^2}{\lambda'\chi}\,\frac{q_2-q_3}{\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+q_2\right)\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+q_3\right)}$$

Si l'on remplace $\frac{\varphi'}{\lambda'}=\frac{\varphi''}{M}$ par leur valeur commune q_1, cette expression devient:

$$\frac{\left\{\lambda'\chi^2+M\left(\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\right)^2\right\}\left(q_2-q_3\right)}{M\lambda'\chi(q_2-q_1)(q_3-q_1)},$$

et ne renferme plus que des facteurs que nous avons supposé ou démontré être $\lessgtr 0$.

La détermination des constantes g_1, g'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3 ne peut donc souffrir aucune difficulté: on verrait en outre comme dans le cas général, qu'aucune de ces quantités ne peut s'annuler identiquement, quelque soit l'état initial.

Nous avons supposé implicitement dans la démonstration qui précède, que q_1, q_2, q_3 sont différents de zéro. Supposons maintenant que q_1 par exemple soit nul. On aura les intégrales générales relatives à ce cas, en remplaçant dans les équations (18)′ (19)′ 20)′ les deux termes $g_1 e^{\sqrt{q_1}t}+g_1' e^{-\sqrt{q_1}t}$ par une fonction lineaire $g_1+g'_1 t$: et l'on obtiendra les équations qui déterminent les constantes, en remplaçant dans les équations (21)′, (22)′, (23)′, (24)′, (25)′, (26)′ $g_1+g'_1$ par g_1, et $\sqrt{q_1}(g_1-g'_1)$ par g'_1. Le déterminant D' étant différent de zéro, les constantes pourront encore se déterminer sans difficulté, et aucune d'elles ne s'annulera identiquement.

On verra maintenant, comme dans le cas général, que les expressions de α, β, ζ_1 resteront infiniment petites pendant toute la durée du mouvement, quelles que soient les quantités infiniment petites $[\alpha]_0, [\beta]_0, [\zeta_1]_0, \left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0, \left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$, lorsque les trois racines de l'équation (17) q_1, q_2, q_3 sont négatives. L'équilibre sera donc stable. Au contraire, si quelqu'une de ces racines est nulle ou positive, l'équilibre sera instable, et les variables α, β, ζ_1 croîtront indéfiniment avec le temps, à moins que les quantités $[\alpha]_0$ $[\beta]_0$ etc. ne satisfassent à un certain système d'équations linéaires en nombre précisément égal à celui des racines nulles ou positives de l'équation (17).

Supposons en second lieu $\chi=0, \psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\gtrless 0$.

Ce cas est celui où le centre de gravité de la flottaison se trouve situé au moment de l'équilibre sur la même verticale que le centre de gravité du corps. En effet, la condition $\delta b S=\chi=0$ donne $b=0$.

Les équations (10), (11), (12) deviennent:

$$-\lambda\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\nu\frac{d^2\beta}{dt^2}=\quad\phi\alpha-\psi\beta, \qquad (11)'$$

$$\nu\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\lambda'\frac{d^2\beta}{dt^2}=-\psi\alpha+\phi'\beta, \qquad (12)'$$

$$M\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}=-\phi''\zeta_1, \qquad (13)'$$

et l'on voit immédiatement que les variations des quantités ζ_1 d'une part, α et β d'autre part, sont entièrement indépendantes les unes des autres.

Les variations de ζ_1 sont définies par l'équation (10)', dont l'intégrale générale est

$$\zeta_1=he^{\sqrt{\frac{-\varphi''}{M}}t}+h'e^{-\sqrt{\frac{-\varphi''}{M}}t}.$$

Les constantes h et h' sont données par les relations:

$$h+h'=[\zeta]_0\,, \quad \sqrt{\frac{-\varphi''}{M}}(h-h')=\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0,$$

d'où

$$h=\tfrac{1}{2}[\zeta_1]_0+\frac{1}{\sqrt{\frac{-\varphi''}{M}}}\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0, \qquad h'=\tfrac{1}{2}[\zeta_1]_0-\frac{1}{2\sqrt{\frac{-\varphi''}{M}}}\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0.$$

Les quantités ϕ'' et M étant essentiellement positives, $-\frac{\varphi''}{M}$ sera négatif, et ζ_1 sera toujours infiniment petit pendant toute la durée du mouvement.

Passons à l'intégration des équations (11)′ et (12)′. Nous aurons une intégrale particulière en posant:

$$\alpha = fe^{kt}, \qquad \beta = ge^{kt},$$

si les constantes f, g, k satisfont aux conditions:

$$-(\phi+\lambda k^2)f+(\psi+\nu k^2)g=0,$$
$$(\psi+\nu k^2)f-(\phi'+\lambda' k^2)g=0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} -(\phi+\lambda k^2) & (\psi+\nu k^2) \\ (\psi+\nu k^2) & -(\phi'+\lambda' k^2) \end{vmatrix} = (\phi+\lambda k^2)(\phi'+\lambda' k^2)-(\psi+\nu k^2)^2=0.$$

Cette dernière équation donne pour k^2 deux valeurs réelles, inégales et l'une plus grande, l'autre plus petite que $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$: en effet, substituons dans le premier membre $k^2=\pm\infty$: le résultat aura le signe du premier terme $(\lambda\lambda'-\nu^2)k^4$, qui est positif. Substituons au contraire la valeur $k^2=-\frac{\varphi'}{\lambda'}$, nous avons un résultat négatif, $-\left(\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda}\right)^2$.

Les intégrales générales des équations (11)′ et (12)′ seront:

$$\alpha = f_1 e^{\sqrt{q_1}\,t}+f_1' e^{-\sqrt{q_1}\,t} + f_2 e^{\sqrt{q_2}\,t}+f_2' e^{-\sqrt{q_2}\,t},$$

$$\beta = \frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\left(f_1 e^{\sqrt{q_1}\,t}+f_1' e^{-\sqrt{q_1}\,t}\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left(f_2 e^{\sqrt{q_2}\,t}+f_2' e^{-\sqrt{q_2}\,t}\right),$$

et nous aurons pour déterminer les constantes f_1, f_1', f_2, f_2', d'après l'état initial, les équations:

$$f_1+f_1' + f_2+f_2' = [\alpha]_0,$$

$$\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\left(f_1+f_1'\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left(f_2+f_2'\right)=[\beta]_0,$$

avec celles-ci:

$$\sqrt{q_1}\left(f_1-f_1'\right)+\sqrt{q_2}\left(f_2-f_2'\right)=\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0,$$

$$\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\cdot\sqrt{q_1}\left(f_1-f_1'\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' g_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(f_2-f_2'\right)=\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0.$$

Ces équations permettent de déterminer sans difficulté les quantités f_1+f_1', f_2+f_2', $\sqrt{q_1}\,(f_1-f_1')$, $\sqrt{q_2}\,(f_2-f_2')$, et par suite f_1, f_1', f_2, f_2', pourvu que le déterminant

$$D''=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1} & \frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

Or ce déterminant est égal à $\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}-\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}=\frac{\lambda'\left(\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}\right)\left(q_2-q_1\right)}{\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+q_1\right)\left(\frac{\varphi'}{\lambda'}+q_2\right)}$, et sous cette forme on voit que les facteurs qui le composent sont tous différents de zéro.

D'ailleurs D'' n'étant pas nul, aucune des expressions de f_1, f_1', f_2, f_2' ne pourra s'annuler identiquement, et quel que soit l'état initial.

Cela posé, on verra, comme dans le cas général, que si q_1, q_2 sont tous deux négatifs, α et β résteront infiniment petits pendant toute la durée du mouvement, et l'équilibre sera stable. Au contraire si quelqu'une de ces quantités est nulle ou positive, l'équilibre est instable, et les variables α, β croîtront indéfiniment avec le temps, à moins que les quantités $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$ ne satisfassent à un certain système d'équations linéaires que sera facile de déterminer, et qui contiendra précisément autant d'équations qu'il y a de racines nulles ou positives.

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est donc que l'équation

$$(\phi+\lambda k^2)(\phi'+\lambda' k^2)-(\psi+\nu k^2)^2=0$$

donne pour k^2 deux valeurs négatives, ou, ce qui revient au même, que l'équation

$$-(\phi''+Mk^2)\{(\phi+\lambda k^2)(\phi'+\lambda' k^2)-(\psi+\nu k^2)^2\}=0$$

donne pour k^2 trois racines négatives. Or cette équation se déduit immédiatement de l'équation (17), en y introduisant la condition $\chi=0$. Donc ici encore, la condition de la stabilité de l'équilibre est que l'équation (17) donne pour k^2 trois valeurs négatives.

Supposons enfin $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}=0$. Eliminons $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ entre les équations (11) et (12): il viendra l'équation suivante:

$$(\lambda\lambda'-\nu^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2}=(\psi\nu-\phi\lambda')\alpha+(\psi\lambda'-\nu\phi')\beta-\chi\lambda'\zeta_1.$$

Le terme en β s'évanouira en vertu de la relation $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}=0$, et il restera l'équation:

$$(\lambda\lambda'-\nu^2)\frac{d^2\alpha}{dt}=(\psi\nu-\phi\lambda')\alpha-\chi\lambda'\zeta_1, \tag{11''}$$

qu'on pourra employer pour déterminer les inconnues α, β, ζ_1 à la place de l'équation (11), et conjointement avec les équations:

$$\nu \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \lambda' \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\psi\alpha + \phi'\beta\,, \tag{12}$$

et

$$M \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = -\chi\alpha + \phi''\zeta_1\,. \tag{10}$$

On voit maintenant aisément une particularité remarquable. C'est que les valeurs de α et de ζ_1 sont entièrement indépendantes de celles de β et peuvent être déterminées isolément par les équations (10) et (11)'', sauf à déterminer ensuite β par l'équation (12).

Intégrons d'abord les équations (10) et (11): et supposons en premier lieu $\chi \gtrless 0$.

On aura une integrale particulière en posant $\alpha = fe^{kt}$, $\zeta_1 = ge^{kt}$, avec les conditions:

$$\{\psi\nu - \phi\lambda' + (\nu^2 - \lambda\lambda')k^2\}f - \chi\lambda' \cdot g \qquad = 0\,, \tag{27}$$

$$-\chi \cdot f \qquad -(\phi'' + Mk^2)g = 0\,, \tag{28}$$

d'où

$$-\{\psi\nu - \phi\lambda' + (\nu^2 - \lambda\lambda')k^2\}\{\phi'' + Mk^2\} - \chi^2\lambda' = 0. \tag{29}$$

L'équation (29) a ses deux racines réelles, inégales et différentes de $-\frac{\varphi''}{M}\cdot$ Car en substituant dans le premier membre de cette équation la valeur $k^2 = \pm\infty$, le résultat aura le même signe que le premier terme $-M(\nu^2 - \lambda\lambda')k^4$, qui est positif. Au contraire, en substituant $k^2 = -\frac{\varphi''}{M}$, on aura un résultat négatif, $-\chi^2\lambda'$.

Si les deux racines de cette équation, q_1 et q_2, sont différentes de zéro, les intégrales générales des équations (10) et (11)'' seront:

$$\alpha = \qquad f_1 e^{\sqrt{q_1}t} + f_1' e^{-\sqrt{q_1}t} + \qquad f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f_2' e^{-\sqrt{q_2}t}\,,$$

$$\zeta_1 = \frac{-\chi}{\varphi'' + Mq_1}\left(f_1 e^{\sqrt{q_1}t} + f_1' e^{-\sqrt{q_1}t}\right) + \frac{-\chi}{\varphi'' + Mq_2}\left(f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f_2' e^{-\sqrt{q_2}t}\right).$$

Si $q_1 = 0$, on devra remplacer dans les expressions précédentes les deux termes $f_1 e^{\sqrt{q_1}t} + f_1' e^{-\sqrt{q_1}t}$ par une fonction linéaire $f_1 t + f_1'$.

Dans l'un et l'autre cas, pour calculer les constantes f_1, f_1', f_2, f_2' d'après l'état initial, on aura à résoudre deux systèmes d'équations linéaires ayant chacun pour déterminant:

$$D''' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-\chi}{\varphi'' + Mq_1} & \dfrac{-\chi}{\varphi'' + Mq_2} \end{vmatrix} = \frac{-\chi M(q_2 - q_1)}{(\varphi'' + Mq_1)(\varphi'' + Mq_2)}.$$

Sous cette forme on voit que le déterminant ne sera jamais nul. Le calcul des constantes f_1, f_1', f_2, f_2' ne pourra donc souffrir aucune difficulté. Chacune d'elles sera exprimée par une fonction linéaire de $[\alpha]_0$, $[\zeta_1]_0$, $\left[\dfrac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\dfrac{d\zeta}{dt}\right]_0$. D'ailleurs D''' n'étant pas nul, aucune de ces fonctions ne pourra s'annuler identiquement et quel que soit l'état initial.

Supposons en second lieu $\chi = 0$: les équations (11)$''$ et (10) deviennent

$$\left(\lambda\lambda' - \nu^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = (\psi\nu - \phi\lambda')\alpha,$$

$$M\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = -\phi''\zeta_1.$$

Posons pour simplifier $\dfrac{\psi\nu - \varphi\lambda'}{\lambda\lambda' - \nu^2} = q_1$, $\quad -\dfrac{\varphi''}{M} = q_2$.

La première équation a pour intégrale générale

$$\alpha = f_1 e^{\sqrt{q_1}t} + f_1' e^{-\sqrt{q_1}t},$$

ou si $q_1 = 0$

$$\alpha = f_1 t + f_1'.$$

La seconde a pour intégrale générale

$$\zeta_1 = f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f_2' e^{-\sqrt{q_2}t},$$

en remarquant que $q_2 = -\dfrac{\varphi''}{M}$ ne peut être nul.

On déterminera sans aucune difficulté les constantes f_1, f_1' en fonction de $[\alpha]_0$, $\left[\dfrac{d\alpha}{dt}\right]_0$, et les constantes f_2, f_2' en fonction de $[\zeta_1]_0$, $\left[\dfrac{d\zeta_1}{dt}\right]$.

Nous remarquerons que les quantités q_1, q_2 sont les deux racines de l'équation

$$-\{\psi\nu - \phi\lambda' + (\nu^2 - \lambda\lambda')k^2\}\{\phi'' + Mk^2\} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (29) dans laquelle on a introduit la supposition $\chi = 0$.

Les quantités α et ζ_1 se trouvent ainsi déterminées dans tous les cas. Nous aurons maintenant pour déterminer β l'équation (12) :

$$\nu \frac{d^2\alpha}{dt_2} - \lambda' \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\psi\alpha + \phi'\beta .$$

Si nous remplaçons ψ par sa valeur $\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$ cette équation peut s'écrire sous la forme suivante

$$\lambda' \frac{d^2\beta}{dt^2} + \phi'\beta = \frac{\nu}{\lambda'} \left\{ \lambda' \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \phi'\alpha \right\} .$$

Sous cette forme on trouve immédiatement l'intégrale particulière $\beta = \frac{\nu}{\lambda'}\, \alpha$. Pour avoir l'intégrale complète, il faudra y joindre l'intégrale générale de l'équation sans second membre:

$$\lambda' \frac{d^2\beta}{dt^2} + \phi'\beta = 0 .$$

Posons pour abréger $q_3 = -\frac{\varphi'}{\lambda'}$: cette dernière équation aura pour intégrale générale, si $q_3 \lesseqgtr 0$

$$\beta = f_3 e^{\sqrt{q_3}\, t} + f_3' e^{-\sqrt{q_3}\, t} ,$$

ou si $q_3 = 0$

$$\beta = f_3 + f_3' t .$$

L'intégrale complète de l'équation (12) sera donc:

$$\beta = f_3 e^{\sqrt{q_3}\, t} + f_3' e^{-\sqrt{q_3}\, t} + \frac{\nu}{\lambda'}\, \alpha ,$$

ou si $q_3 = 0$

$$\beta = f_3 + f_3' t + \frac{\nu}{\lambda'}\, \alpha ,$$

Les constantes f_3, f_3' se détermineront aisément d'après l'état initial par les formules:

$$f_3 + f_3' + \frac{\nu}{\lambda'} [\alpha]_0 \quad = [\beta]_0 ,$$

$$\sqrt{q_3} \left(f_3 - f_3' \right) + \frac{\nu}{\lambda'} \left[\frac{d\alpha}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d\beta}{dt} \right]_0 ,$$

ou si $q_3 = 0$, par les formules:

$$f_3 + \frac{\nu}{\lambda'} [\alpha]_0 = [\beta]_0 ,$$

$$f_3' + \frac{\nu}{\lambda'} \left[\frac{d\alpha}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d\beta}{dt} \right]_0 .$$

Les valeurs de α, β, ζ_1 se trouvent ainsi complètememt déterminées, soit que l'on ait $\chi \lesseqgtr 0$ ou $\chi=0$: dans l'un et l'autre cas elles dépendent des six exponentielles $e^{\pm\sqrt{q_1}t}$, $e^{\pm\sqrt{q_2}t}$, $e^{\pm\sqrt{q_3}t}$, les quantités q_1, q_2 étant les racines de l'équation

$$-\{\psi\nu-\phi\lambda'+(\nu^2-\lambda\lambda')k^2\}(\phi''+Mk^2)-\chi^2\lambda'=0\,,$$

et q_3 la racine de l'équation

$$\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2=0\,.$$

(Dans le cas particulier où quelqu'une de ces quantités, q_1 par exemple, est égale à zéro, les termes $f_1 e^{\sqrt{q_1}t}+f_1' e^{-\sqrt{q_1}t}$ qui contiennent les exponentielles correspondantes sont remplacés par une fonction linéaire de t, $f_1+f_1'\,t$.)

Si les trois quantités q_1, q_2, q_3 sont négatives, les six exponentielles sont imaginaires et restent finies quel que soit t; α, β, ζ_1 resteront donc constamment infiniment petits, et l'équilibre sera stable. Au contraire si quelqu'une de ces quantités est positive ou nulle, l'un des deux termes qui lui correspondent dans les expressions de α, β, ζ_1 croît indéfiniment avec le temps: d'ailleurs ces termes ne pourront se détruire par compensation: car celui qui correspond à la plus grande des quantités q_1, q_2, q_3 croîtra beaucoup plus rapidement que les autres: les valeus de α, β, ζ_1 ne pourront donc rester finies que si ce terme disparaît par l'annulation de son coefficient.

Ainsi, si $q_1 \geqq 0$, il faudra que $f_1=0$. Si $q_2 \geqq 0$, il faudra que $f_2=0$; si $q_2=0$, il faudra que $f_3=0$. Mais f_1, f_2, f_3 sont des fonctions linéaires de $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]_0$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\xi_1}{dt}\right]_0$, qui ne s'annulent pas identiquement. L'équilibre sera donc instable et α, β, ζ_1 croîtront en général indéfiniment en valeur absolue. Ils ne resteront infiniment petits que si l'état initial est choisi de manière à annuler ceux des coefficients f_1, f_2, f_3 qui correspondent à des racines q_1, q_2, q_3 positives ou nulles. Le nombre des équations de condition à satisfaire pour cela sera encore précisément égal au nombre des quantités nulles ou positives de la série q_1, q_2, q_3.

Remarquons ici que q_1, q_2, q_3 sont les trois racines de l'équation

$$\Big\{[\psi\nu-\phi\lambda'+(\nu^2-\lambda\lambda')k^2](\phi''+Mk^2)+\chi^2\lambda'\Big\}\Big\{\frac{\varphi'}{\lambda'}+k^2\Big\}=0 \qquad (17')$$

Mais il est aisé de voir que cette dernière équation n'est autre que l'équation (17) modifiée au moyen de la relation $\psi - \frac{\nu\varphi'}{\lambda'} = 0$. En effet exécutons les multiplications indiquées dans le premier membre de l'équation (17'): on voit que tous les termes qui contiendront encore λ' au dénominateur sont divisibles au numérateur par $\nu\phi'$: si nous y remplaçons le facteur $\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$ par ψ, l'équation deviendra

$$\left.\begin{aligned} &-M(\nu^2-\lambda\lambda')\,k^6+\{M(2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda)+(\nu^2-\lambda\lambda')\phi''\}k^4 \\ &+\{M(\psi^2-\phi\phi')+\phi''(2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda)+\chi^2\lambda'\}k^2+\phi''(\psi^2-\phi\phi')+\chi^2\phi' \end{aligned}\right\}=0$$

équation identique à l'équation (17).

Il est donc établi d'une manière générale, et dans tous les cas:

1° Que l'équation (17) donne pour k^2 trois valeurs q_1, q_2, q_3, *toujours réelles.*

2° Que la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est que ces trois racines soient *négatives.*

Pour que cette condition soit satisfaite, il faut et il suffit que le premier membre de l'équation (17) développé et ordonné suivant les puissances de k^2 ne présente que des permanences: d'ailleurs nous avons vu que le coefficient du terme en k^6, savoir $-M(\lambda\lambda'-\nu^2)$, est essentiellement négatif: et il faudra donc que les autres coefficients soient négatifs, d'où l'on deduit le système d'inégalités:

$$M(2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda)+(\nu^2-\lambda\lambda')\phi''<0 \tag{30}$$

$$M(\psi^2-\phi\phi')+\phi''(2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda)+\chi^2\lambda'<0 \tag{31}$$

$$\phi''(\psi^2-\phi\phi')+\chi^2\phi'<0\,. \tag{32}$$

A ces inégalités on peut joindre la suivante

$$\phi'>0 \tag{33}$$

En effet, nous avons vu dans le cours de la discussion précédente, que l'équation (17) a dans tous les cas au moins une racine égale ou supérieure à $-\frac{\varphi'}{\lambda'}$; λ' étant positif, cette racine ne serait pas négative, si ϕ' n'était pas positif.

Cela posé, il est aisé de voir que les deux inégalités (30), (31) résultent nécessairement des inégalités (32) et (33), et par suite peuvent être négligées comme surérogatoires.

En effet, l'inégalité (32) peut s'écrire ainsi $\phi'\left\{\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right\}>\psi^2$, d'où

$\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}>\frac{\psi^2}{\varphi'}$, et à fortiori $\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}>0$; d'autre part, l'inégalité (32) étant supposée satisfaite, on aura à fortiori, en supprimant le terme positif $\chi^2\phi'$,

$$\psi^2-\phi\phi'<0\,. \tag{34}$$

On aura de plus:

$$\phi''\left\{2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda\right\}+\chi^2\lambda'=\phi''\left\{2\psi\nu-\left(\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right)\lambda'-\phi'\lambda\right\}$$

$$=-\phi''\left\{\sqrt{\left(\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right)\lambda'}-\sqrt{\phi'\lambda}\right\}^2-\phi''\left\{2\sqrt{\left(\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right)\phi'\cdot\lambda\lambda'}-2\psi\nu\right\}$$

quantité <0, car son premier terme est un carré négatif, et le second terme sera négatif aussi, en vertu des deux relations:

$$\phi'\left(\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right)>\psi^2, \qquad \lambda\lambda'>\nu^2,$$

d'où

$$\sqrt{\left(\phi-\frac{\chi^2}{\varphi''}\right)\phi'}>\psi, \qquad \sqrt{\lambda\lambda'}>\nu\,.$$

De la condition

$$\phi''\{2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda\}+\chi^2\lambda'<0 \tag{34}$$

on déduit à fortiori, en supprimant le terme positif $\chi^2\lambda'$,

$$2\psi\nu-\phi\lambda'-\phi'\lambda<0\,. \tag{36}$$

Enfin l'on a

$$\nu^2-\lambda\lambda'<0\,. \tag{37}$$

Les inégalités (34), (35), (36), (37) étant satisfaites, les inégalités (30) et (31) le seront également, chacun des termes de leurs premiers membres, pris isolément, étant négatif.

Considérons donc le système des deux inégalités (32) et (33).

Remplaçons les quantités qui entrent dans ces expressions par leurs valeurs:

$$\phi''=\delta S, \quad \chi=\delta bS, \quad \psi=\delta q,$$

$$\phi=\delta R+aP=\delta(R+aV), \quad \phi'=\delta R'+aP=\delta(R'+aV),$$

(en désignant par V le volume immergé dans l'état d'équilibre) et supprimons les facteurs communs: ces relations deviennent:

$$q^2-(R+aV)(R'+aV)+b^2S(R'+aV)<0\,, \tag{32'}$$

$$R'+aV>0\,, \tag{33'}$$

ou

$$a^2V^2+(R-b^2S+R')aV+(R-b^2S)R'-q^2>0\,, \tag{32''}$$

$$aV+R'>0\,. \tag{33''}$$

Il est aisé de voir que la relation $(32)''$ peut se mettre sous la forme:

$$(aV+\varepsilon)(aV+\varepsilon')>0\,,$$

en désignant par ε et ε' les deux moments d'inertie principaux de la flottaison par rapport à son centre de gravité.

En effet, les moments d'inertie pris par rapport à des droites parallèles aux axes et se coupant au centre de gravité sont respectivement

$$\int(x-b)^2d\sigma=R-b^2S \quad \text{et} \quad \int y^2d\sigma=R'\,,$$

et l'on sait que leur somme $R-b^2S+R'$ doit être égale à $\varepsilon+\varepsilon'$.

D'un autre côté, l'intégrale analogue à q, prise par rapport aux mêmes droites, $\int(x-b)yd\sigma$ se réduit à $\int xyd\sigma=q$.

Cette remarque permet de démontrer aisément que la quantité $(R-b^2S)R'-q^2$ est égale à $\varepsilon\varepsilon'$. En effet, changeons de coordonnées, en prenant pour origine le centre de gravité de la flottaison et pour axes de coordonnées les axes principaux d'inertie qui se coupent en ce point. Soit θ l'angle formé par l'ancien axe des x avec le nouveau. Les distances d'un point quelconque dont les coordonnées actuelles sont x_1, y_1, à des parallèles aux anciens axes menées par la nouvelle origine seront respectivement

$$-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta \quad \text{et} \quad x_1\cos\theta+y_1\sin\theta.$$

Les moments d'inertie $(R-b^2S)$ et R' relatifs à ces droites seront donc respectivement égaux à

$$\int(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)^2d\sigma=\cos^2\theta\int x_1^2d\sigma+\sin^2\theta\int y_1^2d\sigma=\varepsilon\cos^2\theta+\varepsilon'\sin^2\theta\,,$$

$$\int(-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)^2d\sigma=\sin^2\theta\int x_1^2d\sigma+\cos^2\theta\int y_1^2d\sigma=\varepsilon\sin^2\theta+\varepsilon'\cos^2\theta\,,$$

et l'intégrale q sera égale à

$$\int(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)(-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)d\sigma=-\sin\theta\cos\theta\int x_1^2d\sigma$$
$$+\sin\theta\cos\theta\int y_1^2d\sigma=\sin\theta\cos\theta(\varepsilon'-\varepsilon)\,.$$

On aura donc

$$(R-b^2S)R'-q^2=(\varepsilon\cos^2\theta+\varepsilon'\sin^2\theta)(\varepsilon\sin^2\theta+\varepsilon'\cos^2\theta)-\sin^2\theta\cos^2\theta(\varepsilon'-\varepsilon)^2=$$
$$=\varepsilon\varepsilon'(\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta)=\varepsilon\varepsilon'(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\varepsilon\varepsilon'.$$

La relation $(32)''$ peut donc s'écrire ainsi:

$$a^2V^2+(\varepsilon+\varepsilon')aV+\varepsilon\varepsilon'=(aV+\varepsilon)(aV+\varepsilon')>0.$$

Elle montre que $aV+\varepsilon$ et $aV+\varepsilon'$ sont de même signe: d'ailleurs ces deux quantités sont positives en vertu de la relation $(33)''$: car si l'on avait $aV+\varepsilon<0$, $aV+\varepsilon<0$, R' étant compris entre ε et ε', on aurait $aV+R'>0$.

Si donc ε désigne le plus petit des deux moments d'inertie principaux, on devra avoir

$$aV+\varepsilon>0,$$

et cette inégalité emportera les deux autres

$$aV+\varepsilon'>0, \quad aV+R'>0.$$

Les conditions de la stabilité de l'équilibre se reduisent donc à une seule, qui peut s'énoncer ainsi:

L'élévation du centre de gravité au dessus du centre de poussée, multipliée par le volume immergé, doit être moindre que le moment d'inertie minimum de la flottaison par rapport aux droites, menées dans son plan par le centre de gravité.

Le problème de la stabilité de l'équilibre est complètement resolu par ce qui précède: mais pour achever de déterminer la loi des petites oscillations du corps flottant considéré, il nous reste à intégrer l'équation

$$B'\frac{d^2\alpha}{dt^2}+B''\frac{d^2\beta}{dt^2}-A\frac{d^2\gamma}{dt^2}=0. \qquad (13)$$

Cette équation a pour intégrale

$$B'\alpha+B''\beta-A\gamma=ct+c',$$

c et c' étant des constantes, qu'on déterminera aisément au moyen des valeurs initiales de $\alpha, \beta, \gamma, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$. Si ces valeurs initiales n'annulent pas rigoureusement la quantité $B'\frac{d\alpha}{dt}+B''\frac{d\beta}{dt}-A\frac{d\gamma}{dt}$, c ne sera pas nul, et par suite la quantité $B'\alpha+B''\beta-A\gamma$ croîtra proportionnellement au temps. Le corps s'éloigne donc de plus en plus de sa position initiale, ainsi que nous l'avons annoncé au début de ce mémoire.

Si l'équilibre est stable, α et β restent toujours infiniment petits: c'est donc l'angle γ dont la valeur absolue croîtra progressivement avec le temps. Il tendra vers l'infini positif, si c est négatif, vers l'infini négatif, si c est positif. Ainsi le corps aura pendant la durée du mouvement une tendance à prendre un mouvement de rotation progressif, autour de l'axe des z, dans un sens déterminé d'avance: et si l'on considère un intervalle de temps suffisamment long, cette tendance finira par l'emporter sur les irrégularités accidentelles du mouvement.

Dans le cas particulier où la quantité c, ou $B'\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0+B''\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0-A\left[\frac{d\gamma}{dt}\right]_0$ est égale à zéro, le terme ct proportionnel au temps disparaît, et la quantité γ reste infiniment petite, ainsi que α et β, pendant toute la durée du mouvement. On a dans ce cas là, à un istant quelconque la relation:

$$B'\frac{d\alpha}{dt}+B''\frac{d\beta}{dt}-A\frac{d\gamma}{dt}=0.$$

Cette équation est susceptible d'une interprétation géométrique que nous allons exposer.

Considérons un point du corps dont les coordonnées soient primitivement x, y, z. Les coordonnées ξ, η, ζ à un instant quelconque sont données par les formules (1), (2) et (3). Ces formules différentiées donnent, en remarquant que $\alpha, \beta, \gamma, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ sont infiniment petits et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\xi}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\frac{d\xi}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=-z.\frac{d\alpha}{dt}+y\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\eta}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\eta}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\frac{d\eta}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=\quad z\frac{d\beta}{dt}-x\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{d\zeta}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\zeta}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt}+\frac{d\zeta}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=\quad x\frac{d\alpha}{dt}-y\frac{d\beta}{dt}.$$

On déterminera l'axe instantané de rotation en cherchant les points pour lesquels ces trois expressions sont nulles simultanément. Les coordonnées de ces points sont définies par les relations:

$$-z\frac{d\alpha}{dt}+y\frac{d\gamma}{dt}=0\,,\quad z\frac{d\beta}{dt}-x\frac{d\gamma}{dt}=0\,,\quad x\frac{d\alpha}{dt}-x\frac{d\beta}{dt}=0\,,$$

d'où

$$\frac{x}{\frac{d\beta}{dt}}=\frac{y}{\frac{d\alpha}{dt}}=\frac{z}{\frac{d\gamma}{dt}}.$$

De ces relations combinées avec celle-ci

$$B'\frac{d\alpha}{dt}+B''\frac{d\beta}{dt}-A\frac{d\gamma}{dt}=0\,,$$

on déduit la suivante:

$$B'y+B''x-Az=0\,,$$

équation à laquelle satisferont à chaque instant les points situés sur l'axe instantané de rotation. Cette équation est celle du plan diamétral de l'ellipsoïde d'inertie, conjugué à l'axe des z. On a donc ce théorème:

Théorème.

Un corps flottant en équilibre stable, déplacé infiniment peu de sa position d'équilibre, et abandonné à lui-même avec une vitesse initiale infiniment petite, tendra en général à s'éloigner de plus un plus de sa position primitive, par un mouvement progressif de rotation autour de la verticale.

Mais dans le cas particulier où à l'instant initial l'axe instantané de rotation est situé dans le plan diamétral conjugué à la verticale dans l'ellipsoïde d'inertie, cette propriété subsistera pendant tout le mouvement, et le solide restera toujours infiniment voisin de sa position primitive.

III. **Observations générales.**

Nous avons obtenu les résultats qui précèdent, en intégrant les équations approximatives, que l'on obtient en négligeant dans les équations différentielles du mouvement les quantités infiniment petites du second ordre. Mais on pourrait craindre que l'influence de ces termes négligés, quoique très-petite, devînt sensible avec le temps et modifiât les conditions trouvées: il importe donc de l'examiner de plus près.

Nous allons démontrer que l'équilibre sera instable, même en tenant compte de ces quantités négligées, si quelqu'une des racines q_1, q_2, q_3 de l'équation (17) est > 0.

Rétablissons en effet les termes négligés dans les équations (11), (12) et (10): elles deviendront:

$$-\lambda\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\nu\frac{d^2\beta}{dt}= \quad \phi\cdot\alpha-\psi\cdot\beta+\chi\cdot\zeta_1+\mu, \tag{38}$$

$$\nu\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\lambda'\frac{d^2\beta}{dt^2}=-\psi\cdot\alpha+\phi'\cdot\beta \qquad +\mu', \tag{39}$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\chi\cdot\alpha \qquad -\phi''\zeta_1+\mu'', \tag{40}$$

μ, μ', μ'' étant des quantités qui resteront infiniment petites du second ordre, tant que α, β, ζ_1 resteront infiniment petits du premier ordre.

Nous prendrons, pour y appliquer nos raisonnements, le cas où $\frac{\varphi''}{M}-\frac{\varphi'}{\lambda'}$, χ et $\psi-\frac{\nu\varphi'}{\lambda'}$ diffèrent de zéro. Nous supposerons en outre, pour examiner d'un seul coup toutes les circonstances qui peuvent se présenter, que des trois racines q_1, q_2, q_3 de l'équation (17), l'une q_1 est nulle, la seconde q_2 positive, et la troisième q_3 négative.

Si μ, μ', μ'' étaient nuls, les valeurs de α, β, ζ_1 seraient données par les formules:

$$\alpha= \qquad f_1+f_1'\,t \quad + \qquad f_2e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2e^{-\sqrt{q_2}t} \quad + \qquad f_3e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3e^{-\sqrt{q_3}t} \tag{41}$$

$$\beta=\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\left(f_1+f'_1t\right)+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\left\{f_2e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2e^{-\sqrt{q_2}t}\right\}+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\left\{f_3e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \tag{42}$$

$$\zeta=\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\left(f_1+f'_1t\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\left\{f_2e^{\sqrt{q_2}t}+f'_2e^{-\sqrt{q_2}t}\right\}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\left\{f_3e^{\sqrt{q_3}t}+f'_3e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \tag{43}$$

où f_1, f_1', f_2, f_2', f_3, f_3' sont des constantes qu'on peut déterminer aisément d'après l'état initial.

On pourra toujours substituer les mêmes valeurs pour α, β, ζ_1, en désignant par f_1, f_1', etc., non plus des constantes, mais des fonctions nouvelles, égales au moment initial aux constantes précédentes, et assujetties à vérifier les équations (38), (39), (40) après la substitution: ces fonctions étant au nombre de six, peuvent être assujetties à trois autres équations arbitraires; nous choisirons celles-ci:

$$\frac{df_1}{dt} + \frac{df_1'}{dt}\cdot t = 0\,, \tag{44}$$

$$\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t} + \frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t} = 0\,, \tag{45}$$

$$\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t} + \frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t} = 0\,. \tag{46}$$

Si nous différentions deux fois de suite les expressions de α, β, ζ_1, il viendra, en tenant compte de ces dernières relations:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left\{\begin{array}{l} q_2\left\{f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f_2' e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + q_3\left\{f_3 e^{\sqrt{q_3}t} + f_3' e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \\ + \frac{df_1'}{dt} + \sqrt{q_2}\left\{\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t} - \frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + \sqrt{q_3}\left\{\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t} - \frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right\}\end{array}\right. \tag{47}$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}q_2\cdot\left\{f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f'_2 e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + \frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\cdot q_3\cdot\left\{f_3 e^{\sqrt{q_3}t} + f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \\ + \frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\cdot\frac{df'_1}{dt} + \frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\cdot\sqrt{q_2}\left\{\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t} - \frac{df'_2}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + \frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\cdot\sqrt{q_3}\left\{\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t} + \frac{df'_3}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right\}\end{array}\right. \tag{48}$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\cdot q_2\cdot\left\{f_2 e^{\sqrt{q_2}t} + f'_1 e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\cdot q_3\cdot\left\{f_3 e^{\sqrt{q_3}t} + f'_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\right\} \\ + \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\cdot\frac{df'_1}{dt} + \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\cdot\sqrt{q_2}\left\{\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t} - \frac{df'_2}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} + \frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\cdot\sqrt{q_3}\left\{\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t} - \frac{df'_3}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right\}\end{array}\right. \tag{49}$$

D'autre part les équations (38), (39), (40) donnent:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{\nu^2 \lambda\lambda'}\left\{\lambda'(\phi\alpha-\psi\beta+\chi\zeta_1+\mu) + \nu(-\psi\alpha+\phi'\beta+\mu')\right\}, \tag{50}$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{\nu^2 \lambda\lambda'}\left\{\nu(\phi\alpha-\psi\beta+\chi\zeta_1+\mu) + \lambda(-\psi\alpha+\phi'\beta+\mu')\right\}, \tag{51}$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{1}{M}\left\{-\chi\alpha-\phi''\zeta_1+\mu''\right\} \tag{52}$$

Substituons pour α, β, ζ_1, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$ les valeurs (41), (42), (43), (47), (48), (49). Si l'on avait $\mu=\mu'=\mu''=0$ et f_1, f_1', etc., constantes, les équations (50), (51), (52) seraient identiquement satisfaites. Elles se réduiront donc dans le cas actuel, en supprimant les termes qui se détruisent, à:

$$\frac{df_1'}{dt}+\sqrt{q_2}\left(\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}-\frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right)+\sqrt{q_3}\left(\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}-\frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right)=\frac{\lambda'\mu+\nu\mu'}{\nu^2\lambda\lambda'}$$

$$\frac{\psi+\nu q_1}{\varphi'+\lambda' q_1}\cdot\frac{df_1'}{dt}+\frac{\psi+\nu q_2}{\varphi'+\lambda' q_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}-\frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right)+\frac{\psi+\nu q_3}{\varphi'+\lambda' q_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}-\frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right)=\frac{\nu'\mu+\lambda\mu'}{\nu^2\lambda\lambda'}$$

$$\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_1}\cdot\frac{df_1'}{dt}+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_2}\cdot\sqrt{q_2}\left(\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}-\frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right)+\frac{-\chi}{\varphi''+Mq_3}\cdot\sqrt{q_3}\left(\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}-\frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right)=\frac{\mu''}{M}.$$

Ces équations détermineront chacune des quantités :

$$\frac{df_1}{dt},\quad \sqrt{q_2}\left(\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}-\frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right),\quad \sqrt{q_3}\left(\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}-\frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right)$$

en fonction linéaire de μ, μ', μ''. Cette détermination ne peut souffrir aucune difficulté, car nous avons vu (page 193) que le déterminant D de ce système d'équations ne peut être nul.

Soit donc:

$$\frac{df_1'}{dt}=\rho_1,$$

$$\sqrt{q_2}\left(\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}-\frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}\right)=\rho_2,$$

$$\sqrt{q_3}\left(\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}-\frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}\right)=\rho_3,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant des fonctions linéaires de μ, μ', μ'', qui seront infiniment petites du second ordre, ainsi que ces quantités elles-mêmes.

Ces trois équations, jointes aux équations (44), (45), (46), donneront:

$$\frac{df_1}{dt}=-t\rho_1,\qquad \frac{df_1'}{dt}=\rho_1,$$

$$\frac{df_2}{dt}e^{\sqrt{q_2}t}=\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\rho_2,\qquad \frac{df_2'}{dt}e^{-\sqrt{q_2}t}=-\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\rho_2,$$

$$\frac{df_3}{dt}e^{\sqrt{q_3}t}=\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\rho_3,\qquad \frac{df_3'}{dt}e^{-\sqrt{q_3}t}=-\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\rho_3.$$

On aura donc, en désignant par $[f_1]$, $[f_1']$ etc. les valeurs initiales de f_1, f_1' etc.

$$f_1=[f_1]+\int_0^t -t\rho_1\,dt,\qquad f_1'=[f_1']+\int_0^t\rho_1\,dt,$$

$$f_2=[f_2]+\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t\rho_2 e^{-\sqrt{q_2}t}\,dt,\qquad f_2'=[f_2']-\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t\rho_2 e^{\sqrt{q_2}t}\,dt,$$

$$f_3=[f_3]+\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int_0^t\rho_3 e^{-\sqrt{q_3}t}\,dt,\qquad f_3'=[f_3']-\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int_0^t\rho_3 e^{\sqrt{q_3}t}\,dt;$$

d'où, en substituant ces valeurs dans la formule (41):

$$\alpha=\left\{\begin{aligned}&[f_1]+[f_1']+[f_2]\,e^{\sqrt{q_2}\,t}+[f_2']\,e^{-\sqrt{q_2}\,t}+[f_3]\,e^{\sqrt{q_3}\,t}+[f_3']\,e^{-\sqrt{q_3}\,t}\\ &-\int_0^t t\rho_1 dt\;+t\int_0^t\rho_1 dt+e^{\sqrt{q_2}\,t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t\rho_2 e^{-\sqrt{q_2}\,t}dt-e^{-\sqrt{q_2}\,t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t\rho_2 e^{\sqrt{q_2}\,t}dt\\ &\qquad+e^{\sqrt{q_3}\,t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int_0^t\rho_3 e^{-\sqrt{q_3}\,t}dt-e^{-\sqrt{q_3}\,t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int_0^t\rho_3 e^{\sqrt{q_3}\,t}dt.\end{aligned}\right.$$

Si l'équilibre était stable, les valeurs de α, β, ζ_1 seraient infiniment petites pendant toute la durée du mouvement, quelles que fussent les quantités $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$ qui déterminent l'état initial. Or nous allons démontrer que, si ces quantités ne sont pas choisies de manière à annuler la quantité $[f_2]$, ce qui établit entre elles une relation linéaire, les valeurs absolues de α, β, ζ_1 ne resteraient pas infiniment petites: nous verrons en effet que si cela était, la valeur de α deviendrait infinie, ce qui implique contradiction.

En effet, si α, β, ζ_1 restent infiniment petits du premier ordre pendant toute la durée du mouvement μ, μ', μ'' et par suite ρ_1, ρ_1, ρ_3 resteront infiniment petits du second ordre.

La quantité q_3 étant négative, l'expression de α, β, ζ_1 est compliquée d'imaginaires: mais d'aprés un théorème d'algèbre bien connu, le module de α est au moins égal au module du terme $[f_2]\,e^{\sqrt{q_2}\,t}$, diminué de la somme des modules des autres termes.

Le module de $[f_2]\,e^{\sqrt{q_2}\,t}$ est égal à $e^{\sqrt{q_2}\,t}$, multiplié par le module N_2 de $[f_2]$; il croît donc rapidement avec le temps, si $[f_2]$ n'est pas nul. Le terme f_1 a pour module une constante N_1. Le terme $[f_1']t$ a pour module t multiplié par le module N'_1 de $[f_1']$. Le terme $[f_2']\,e^{-\sqrt{q_2}\,t}$ a pour module $e^{-\sqrt{q_2}\,t}$ multiplié par le module N_2' de $[f_2']$, expression qui diminue indéfiniment lorsque t augmente. Le terme $[f_3]\,e^{\sqrt{q_3}\,t}$ a pour module une constante N_3, car l'exponentielle imaginaire $e^{\sqrt{q_3}\,t}$ a pour module l'unité. De même $[f_3']\,e^{-\sqrt{q_3}\,t}$ a pour module une constante N_3'.

Le module du terme $-\int_0^t t\rho_1 dt$ est au plus égal à la somme des modules des éléments $t\rho_1 dt$: la quantité ρ_1 varie avec le temps, mais reste infiniment petite du second ordre: soit M_1 la valeur maximum que son module atteint entre 0 et t. Le module de chaque élément $t\rho_1 dt$ sera au plus égal à $tM_1 dt$. Le module de $-\int_0^t t\rho_1 dt$ sera donc au plus égal à $\int_0^t tM_1 dt = M_1\frac{t^2}{2}$. Le module du terme $t\int_0^t \rho_1 dt$ a de même pour limite supérieure $t\int_0^t M_1 dt = M_1 t^2$.

Soit M_2 le maximum du module de la quantité ρ_2 entre 0 et t; on trouvera de même pour le module de $e^{\sqrt{q_2}t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int \rho_2 e^{-\sqrt{q_2}t}dt$ la limite supérieure

$$\frac{e^{\sqrt{q_2}t}}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t M_2\, e^{-\sqrt{q_2}t}dt = \frac{e^{\sqrt{q_2}t}}{2q_2}M_2\left\{1-e^{-\sqrt{q_2}t}\right\} = \frac{M_2}{2q_2}\left\{e^{\sqrt{q_2}t}-1\right\}.$$

On trouve de même pour le module du terme $e^{-\sqrt{q_2}t}\frac{1}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t \rho_2 e^{\sqrt{q_2}t}dt$ la limite supérieure

$$\frac{e^{-\sqrt{q_2}t}}{2\sqrt{q_2}}\int_0^t M_2 e^{\sqrt{q_2}t}dt = \frac{M_2}{2q_2}\left(1-e^{-\sqrt{q_2}t}\right).$$

Passons au terme $e^{\sqrt{q_3}t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int \rho_3 e^{-\sqrt{q_3}t}dt$. Le module de cette expression aura pour limite supérieure le module de $\frac{e^{\sqrt{q_3}t}}{2\sqrt{q_3}}$ multiplié par la somme des modules des éléments $\rho_3 e^{-\sqrt{q_3}t}dt$. La quantité q_3 étant négative, le module de $e^{\sqrt{q_3}t}$ sera égal à 1 et celui de $\frac{1}{2\sqrt{q_3}}$ à $\frac{1}{2\sqrt{-q_3}}$. Si M_3 est le maximum du module ρ_3 entre 0 et t, le module de $\rho_3 e^{-\sqrt{q_3}t}dt$ aura pour limite maximum $M_3 dt$, et le module total cherché aura pour limite supérieure

$$\frac{1}{2\sqrt{-q_3}}\int_0^t M_3 dt = \frac{M_3 t}{2\sqrt{-q_3}}.$$

On trouvera la même limite pour le module du dernier terme

$$-e^{-\sqrt{q_3}t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{q_3}}\int_0^t \rho\, e^{\sqrt{q_3}t}dt.$$

On a donc enfin pour le module de α la limite inférieure suivante:

$$N_2 e^{\sqrt{q_2}t} - \left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_1' t + N_2' e^{-\sqrt{q_2}t} + N_3 + N_3' + M_1 \frac{t^2}{2} + M_1 t^2 \\ + \frac{M_2}{2q_2}\left(e^{\sqrt{q_2}t} - 1\right) + \frac{M_2}{2q_2}\left(1 - e^{-\sqrt{q_2}t}\right) + \frac{M_3}{2\sqrt{-q_3}} t + \frac{M_3}{2\sqrt{-q_3}} t \end{array} \right\} =$$

$$= \left(N_2 - \frac{M_2}{2q_2}\right) e^{\sqrt{q_2}t} - \left(N_1 + N_3 + N_3'\right) - \left(N_1' + \frac{M_3}{\sqrt{-q_3}}\right) t - \tfrac{3}{2} M_1 t^2 - \left(N_2' - \frac{M_2}{2q_2}\right) e^{-\sqrt{q_2}t}. \quad (53)$$

Cela posé, si $[f_2]$ n'est pas nul, son module N_2 ne le sera pas, et sera comme $[f_2]$ lui même un infiniment petit du premier ordre. D'autre part M_2 est un infiniment petit du second ordre, comme la quantité ρ_2 dont elle limite les modules. La quantité $N_2 - \frac{M_2}{2q_2}$ sera donc nécessairement différente de zéro, et très voisine de N_2.

Faisons maintenant croître t indéfiniment. Parmi les termes de la formule (53) les uns décroîtront jusq'à zéro, d'autres resteront constants, d'autres enfin croîtront jusqu'à l'infini: mais le premier terme $\left(N_2 - \frac{M_2}{2q_2}\right) e^{\sqrt{q_2}t}$ croîtra beaucoup plus rapidement que tous les autres, et finira par les dominer. Le module de α croîtra donc indéfiniment: résultat qui contredit la supposition faite que α, β, ζ_1 restaient toujours infiniment petits du premier ordre. Cette supposition était donc inadmissible.

Il est donc rigoureusement démontré que, si l'une des racines q_1, q_2, q_3 est positive (ou ce qui revient au même, si $aV + \varepsilon < 0$), α, β, ζ_1 deviendront en général finies avec le temps, ou du moins croîtront au point de cesser d'être comparables aux quantités infiniment petites du premier ordre $[\alpha]_0$, $[\beta]_0$, $[\zeta_1]$, $\left[\frac{d\alpha}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0$, $\left[\frac{d\zeta_1}{dt}\right]_0$. L'équilibre est donc instable.

Au contraire, si $aV + \varepsilon > 0$ l'équilibre sera stable. Formons en effet l'équation des forces vives; et pour cela évaluons le travail des forces qui agissent sur le flotteur.

Soit c_0 le travail nécessaire pour amener le flotteur de la position d'équilibre à sa position initiale, c le travail nécessaire pour l'amener de la position d'équilibre à celle qu'il occupe à un instant donné; l'équation des forces vives donnera:

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2 - c_0 + c,$$

c_0 est une constante: quant à c il est facile de l'évaluer: en effet, ce travail s'obtient en ajoutant ensemble:

1° Le travail produit par les deux forces opposées $P = V\delta$ et $-P$; la distance verticale des points d'application de ces forces étant à l'origine a et à l'instant considéré $a + a(\cos\alpha\cos\beta - 1)$ (formule 4), le travail total produit par ces deux forces se réduit, en négligeant les quantités du troisième ordre, a $-\frac{aV\delta}{2}\left\{\alpha^2+\beta^2\right\}$.

2° Les travaux produits par les poussées relatives aux prismes élémentaires de la page 181. Supposons pour fixer les idées, que le prisme élémentaire considéré soit émergé par le mouvement. Décomposons-le en éléments de volume $dz\,d\sigma$ par des plans parallèles au plan horizontal. La poussée produite sur l'élément $dz\,d\sigma$ était égale a $\delta \cdot dz\,d\sigma = -d\mu$; elle cesse de se produire dès que l'élément sort du liquide, et s'il s'élève à la distance z au dessus du liquide, le travail relatif à cette force $-dp$ sera $-\delta . z\,dz\,d\sigma$.

Intégrant pour toute la hauteur du prisme, c'est-à-dire entre zéro et $\alpha x - \beta y + \zeta_1$; sommant ensuite les résultats rélatifs aux divers prismes, il vient pour le travail total:

$$-\delta \cdot \Sigma \frac{(\alpha x - \beta y + \zeta_1)^2}{2} d\sigma = -\frac{\delta}{2}\left\{R\alpha^2 + R'\beta^2 + S\zeta_1^2 - 2Q\alpha\beta + 2bS\alpha\zeta_2\right\}.$$

L'équation des forces vives devient donc:

$$\Sigma m v^2 = \text{const.} - \frac{\delta}{2}\left\{(R+aV)\alpha^2 + (R'+aV)\beta^2 + S\zeta_1^2 - 2Q\alpha\beta + 2bS\alpha\zeta_1\right\} + T$$

en désignant par T l'ensemble des termes du troisième ordre que nous avons négligés.

L'ensemble des termes du second ordre est nécessairement négatif: car ils peuvent s'écrire ainsi:

$$-\frac{\delta}{2}\left\{S(\zeta_1 + b\alpha)^2 + (R + aV - b^2 S)\alpha^2 + (R' + aV)\beta^2 - 2Q\alpha\beta\right\};$$

et S, $R' + aV$ étant toujours positifs, ainsi que le déterminant

$$Q^2 - (R' + aV)(R + aV - b^2 S) \ldots \quad (32' \text{ et } 33')$$

le facteur entre parenthèses sera toujours positif.

La fonction qui exprime la force vive est donc *maximum* pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\zeta_1 = 0$. On en déduit aisément la stabilité de l'équilibre, comme l'a démontré DIRICHLET (*).

Enfin, dans le cas limite où $aV + \varepsilon = 0$, l'équilibre peut être stable ou instable. Pour éclairer ce doute, il faut rétablir dans les équations différentielles du mouvement, les infiniments petits d'un ordre supérieur au premier qui ne sont plus négligeables.

(*) Journal de Crelle, t. 32.

La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado.

(*del Prof.* Francesco Brioschi, *a Milano*).

PARTE PRIMA.

1. Le ricerche moderne sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado hanno condotto a studiare in generale le equazioni del sesto grado di cui le radici z_∞, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 si esprimono per mezzo di tre indeterminate a_0, a_1, a_2 nel modo seguente:

$$\sqrt{z_\infty}=a_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_s}=a_0+\rho^s a_1+\rho^{4s}a_2; \qquad s=0,1,2,3,4$$

essendo ρ una radice quinta dell'unità; o, ciò che vale lo stesso, le equazioni di cui le radici sono legate dalle tre relazioni:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{z_0}+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}+\sqrt{z_4}=\sqrt{5z_\infty},\\
&\sqrt{z_0}+\rho^2\sqrt{z_1}+\rho^4\sqrt{z_2}+\rho\sqrt{z_3}+\rho^3\sqrt{z_4}=0,\\
&\sqrt{z_0}+\rho^3\sqrt{z_1}+\rho\sqrt{z_2}+\rho^4\sqrt{z_3}+\rho\sqrt{z_4}=0.
\end{aligned}$$

È noto e dimostrasi facilmente che i coefficienti di quelle equazioni sono funzioni razionali, intere di tre quantità a, b, c formate colle a_0, a_1, a_2; ossia che posto:

$$a=a_0^2+a_1a_2, \qquad b=8a_0^4a_1a_2-2a_0^2a_1^2a_2^2+a_1^3a_2^3-a_0(a_1^5+a_2^5),$$

$$c=80a_0^6a_1^2a_2^2-40a_0^4a_1^3a_2^3+5a_0^2a_1^4a_2^4+a_1^5a_2^5-a_0(32a_0^4-20a_0^2a_1a_2+5a_1^2a_2^2)(a_1^5+a_2^5)+\tfrac{1}{4}(a_1^5+a_2^5)^2,$$

la equazione del sesto grado di cui le radici sono le z_∞, z_0, $z_1 \ldots z_4$ è la (*):

$$z^6-10az^5+35a^2z^4-10(6a^3-b)z^3+5a(11a^3-6b)z^2-(26a^5-30a^2b+4c)z+5(a^3-b)^2=0 \quad (1).$$

alla quale può anche darsi la forma:

$$(z-a)^6-4a(z-a)^5+10b(z-a)^3-4c(z-a)+5b^2-4ac=0.$$

(*) *Annali di Matematica*, anno 1858.

Osserviamo che dividendo i termini del primo membro di questa equazione pel prodotto $(5b^2-4ac)(z-a)^6$, e ponendo:

$$\xi-\alpha=\frac{1}{z-a}\,,\ \alpha=\frac{c}{5b^2-4ac}\,,\ \beta=\frac{b}{5b^2-4ac}\,,\ \gamma=\frac{a}{5b^2-4ac}\,,$$

per cui $(5b^2-4ac)(5\beta^2-4\alpha\gamma)=1$, quella equazione si trasforma nella:

$$(\xi-\alpha)^6-4\alpha(\xi-\alpha)^5+10\beta(\xi-\alpha)^3-4\gamma(\xi-\alpha)+5\beta^2-4\alpha\gamma=0\,,$$

cioè in una equazione della stessa forma di quella d'onde siamo partiti. Ora essendo pel valore di z_s:

$$z_s-a=a_1a_2+2\rho^s a_0a_1+\rho^{2s}a_1^2+\rho^{3s}a_2^2+2\rho^{4s}a_0a_2\,,$$

se poniamo:

$$\xi_s-\alpha=h_0+\rho^s h_1+\rho^{2s}h_2+\rho^{3s}h_3+\rho^{4s}h_4$$

e moltiplichiamo queste equazioni, membro per membro, avremo per la $(z_s-a)(\xi_s-\alpha)=1$, cinque equazioni dalle quali dedurre i valori di h_0, $h_1\ldots h_4$. Questi valori, posto:

$$l_0=4a_0^2-a_1a_2\,,\qquad l_1=2a_0a_1^2-a_2^3,\qquad l_2=2a_0a_2^2-a_1^3\,,$$

ed:

$$H=-80a_0^4a_1^3a_2^3+40a_0^2a_1^4a_2^4-a_1^5a_2^5+2a_0(16a_0^4-5a_1^2a_2^2)(a_1^5+a_2^5)+(a_1^5+a_2^5)^2\,,$$

sono i seguenti:

$$Hh_0=l_0l_1l_2\,,\qquad Hh_1=l_0l_2^2,\qquad Hh_4=l_0l_1^2\,,$$

$$Hh_2=\frac{l_1}{a_0}(l_1l_2-b)\,,\qquad Hh_3=\frac{l_2}{a_0}(l_1l_2-b)\,,$$

i quali danno:

$$h_0^2=h_1h_4,\qquad h_0h_2=h_3h_4,\qquad h_0h_3=h_1h_2\,;$$

una qualunque di esse potendo considerarsi come conseguenza delle altre due.

Se ne deduce che indicando con α_0 una indeterminata, e ponendo $h_1=\alpha_2^2$, $h_4=\alpha_1^2$, si hanno le:

$$h_0=\alpha_1\alpha_2\,,\quad h_2=2\alpha_0\alpha_1\,,\quad h_3=2\alpha_0\alpha_2\,,$$

e sostituendo:

$$\xi_s-\alpha=(\alpha_0+\rho^{2s}\alpha_1+\rho^{3s}\alpha_2)^2-(\alpha_0^2+\alpha_1\alpha_2)\,.$$

Notiamo che essendo identicamente:

$$l_1 l_2 - b = b - a_1 a_2 l_0^2 , \qquad H = 4c - 5 l_0^2 l_1 l_2 ,$$

$$l_0 H = 5b^2 - 4ac , \qquad (l_1 l_2 - b)^2 = 4a_0^2 (c - l_0^2 l_1 l_2) ,$$

dalle espressioni superiori si deducono pei valori di α_0, α_1, α_2 le seguenti:

$$\alpha_0 = \frac{l_1 l_2 - b}{2a_0 \sqrt{5b^2-4ac}} = \frac{\sqrt{c - l_0^2 l_1 l_2}}{\sqrt{5b^2-4ac}} , \quad \alpha_1 = \frac{l_0 l_1}{\sqrt{5b^2-4ac}} , \quad \alpha_2 = \frac{l_0 l_2}{\sqrt{5b^2-4ac}} ;$$

e posto:

$$\lambda_0 = 4\alpha_0^2 - \alpha_1 \alpha_2 , \qquad \lambda_1 = 2\alpha_0 \alpha_1^2 - \alpha_2^3 , \qquad \lambda_2 = 2\alpha_0 \alpha_2^2 - \alpha_1^3$$

si ottengono facilmente le:

$$l_0 \lambda_0 = 1 , \quad a_0 = \frac{\beta - \lambda_1 \lambda_2}{2\alpha_0 \sqrt{5\beta^2 - 4\alpha\gamma}} , \quad a_1 = - \frac{\lambda_0 \lambda_2}{\sqrt{5\beta^2 - 4\alpha\gamma}} , \quad a_2 = - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\sqrt{5\beta^2 - 4\alpha\gamma}} .$$

Per queste relazioni risultano:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{\sqrt{5b^2 - 4ac}} = \alpha , \qquad (z_\infty - a)(\xi_\infty - \alpha) = 1 ,$$

ossia:

$$\sqrt{\xi_\infty} = -\alpha_0 \sqrt{5} , \qquad \sqrt{\xi_s} = \alpha_0 + \rho^{2s} \alpha_1 + \rho^{3s} \alpha_2 ;$$

od anche le:

$$\sqrt{\xi_0} + \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3} + \sqrt{\xi_4} = - \sqrt{5\xi_0} ,$$

$$\sqrt{\xi_0} + \rho \sqrt{\xi_1} + \rho^2 \sqrt{\xi_2} + \rho^3 \sqrt{\xi_3} + \rho^4 \sqrt{\xi_4} = 0 ,$$

$$\sqrt{\xi_0} + \rho^4 \sqrt{\xi_1} + \rho^3 \sqrt{\xi_2} + \rho^2 \sqrt{\xi_3} + \rho \sqrt{\xi_4} = 0 .$$

Inoltre pel valore di a_0 si ha:

$$2\sqrt{5b^2 - 4ac} \, . \, \sqrt{\xi_\infty} = \frac{5}{\sqrt{z_\infty}} (b - l_1 l_2) ;$$

ma essendo $a_1 a_2 = a - a_0^2$, si avrà sostituendo che:

$$5(b - l_1 l_2) = 5(a_1 a_2 l_0^2 - b) = - z_\infty^3 + 7 z_\infty^2 - 11 z_\infty + 5(a^3 - b) ,$$

per cui ponendo nella (1) z_∞ in luogo di z, poi dalla equazione identica che ne risulta deducendo il valore di $5(a^3 - b)^2$, si ottiene dopo alcune riduzioni:

$$2(a^3 - b)\sqrt{5b^2 - 4ac.} \; \sqrt{\xi_\infty} = (z_\infty^5 - 10 a z_\infty^4 + 35 a^2 z_\infty^3 - 59 a^3 z_\infty^2 + 9 b z_\infty^2 + 48 a^4 z_\infty -$$

$$- 23 ab z_\infty - 15 a^5 + 19 a^2 b - 4c) \sqrt{z_\infty} .$$

Questa relazione, trovata a priori, fra ξ_∞ e z_∞, verificasi facilmente, formando il quadrato, sussistere fra due qualsivogliano radici ξ, z corrispondenti; abbiamo così dimostrato il seguente:

Teorema I.

La equazione di cui le radici soddisfanno alle relazioni:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{z_0}+\quad\sqrt{z_1}+\quad\sqrt{z_2}+\quad\sqrt{z_3}+\quad\sqrt{z_4}=\sqrt{5z_0},\\
&\sqrt{z_0}+\rho^2\sqrt{z_1}+\rho^4\sqrt{z_2}+\rho\sqrt{z_3}+\rho^3\sqrt{z_4}=0\\
&\sqrt{z_0}+\rho^3\sqrt{z_1}+\rho\sqrt{z_2}+\rho^4\sqrt{z_3}+\rho^2\sqrt{z_4}=0
\end{aligned}$$

ha la forma:

$$(z-a)^6-6a(z-a)^5+10b(z-a)^3-4c(z-a)+5b^2-4ac=0,$$

e l'altra della stessa forma, che si ottiene evidentemente da essa dividendone i termini per $(5b^2-4ac)(z-a)^6$, *ha le radici legate dalle:*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_0}+\quad\sqrt{\xi_1}+\quad\sqrt{\xi_2}+\quad\sqrt{\xi_3}+\quad\sqrt{\xi_4}=-\sqrt{5\xi_0}\\
&\sqrt{\xi_0}+\rho\sqrt{\xi_1}+\rho^2\sqrt{\xi_2}+\rho^3\sqrt{\xi_3}+\rho^4\sqrt{\xi_4}=0\\
&\sqrt{\xi_0}+\rho^4\sqrt{\xi_1}+\rho^3\sqrt{\xi_2}+\rho^2\sqrt{\xi_3}+\rho\sqrt{\xi_4}=0.
\end{aligned}$$

Infine fra due coppie di radici corrispondenti ξ, z *sussistono le relazioni:*

$$s\sqrt{\xi}=(z^5-10az^4+35a^2z^3-59a^3z^2+9bz^2+48a^4z-23abz-15a^5+19a^2b-4c)\sqrt{z}\qquad(1)'$$

$$\sigma\sqrt{z}=-(\xi^5-10\alpha\xi^4+35\alpha^2\xi^3-59\alpha^3\xi^2+9\beta\xi^2+48\alpha^4\xi-23\alpha\beta\xi-15\alpha^5+19\alpha^2\beta-4\gamma)\sqrt{\xi}$$

essendo:

$$s=2(a^3-b)\sqrt{5b^2-4ac},\qquad \sigma=2(\alpha^3-\beta)\sqrt{5\beta^2-4\alpha\gamma}.$$

2.° Posto:

$$\frac{db}{da_0}=2b_0,\quad \frac{1}{5}\frac{dc}{da_0}=2c_0;\qquad \frac{db}{da_1}=b_2,\quad \frac{1}{5}\frac{dc}{da_1}=c_2;\qquad \frac{db}{da_2}=b_1,\quad \frac{1}{5}\frac{dc}{da_2}=c_1$$

e risultando pel valore di a:

$$\frac{da}{da_0}=2a_0,\qquad \frac{da}{da_1}=a_2,\qquad \frac{da}{da_2}=a_1$$

si hanno le relazioni seguenti:

$$\frac{d\sqrt{z_s}}{da_0}=2\left(a_0\frac{d\sqrt{z_s}}{da}+b_0\frac{d\sqrt{z_s}}{db}+5c_0\frac{d\sqrt{z_s}}{dc}\right)=1\ ,$$

$$\frac{d\sqrt{z_s}}{da_1}=\quad a_2\frac{d\sqrt{z_s}}{da}+b_2\frac{d\sqrt{z_s}}{db}+5c_2\frac{d\sqrt{z_s}}{dc}\ =\rho^s\ ,$$

$$\frac{d\sqrt{z_s}}{da_2}=\quad a_1\frac{d\sqrt{z_s}}{da}+b_1\frac{d\sqrt{z_s}}{db}+5c_1\frac{d\sqrt{z_s}}{dc}\ =\rho^{4s}\ ;$$

dalle quali ponendo:

$$\delta=\begin{vmatrix}2a_0 & 2b_0 & 2c_0\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{vmatrix}$$

si deducono le:

$$\delta\,\frac{d\sqrt{z_s}}{da}=\begin{vmatrix}1 & 2b_0 & 2c_0\\ s^s & b_2 & c_2\\ s^{4s} & b_1 & c_1\end{vmatrix};\quad \delta\,\frac{d\sqrt{z_s}}{db}=\begin{vmatrix}2a_0 & 1 & 2c_0\\ a_2 & \rho^s & c_2\\ a_1 & \rho^{4s} & c_1\end{vmatrix};\quad 5\delta\frac{d\sqrt{z_s}}{dc}=\begin{vmatrix}2a_0 & 2b_0 & 1\\ a_2 & b_2 & \rho^s\\ a_1 & b_1 & \rho^{4s}\end{vmatrix}$$

Ora scrivendo il determinante δ sotto la forma:

$$\delta=-2\begin{vmatrix}a_0 & b_0 & c_0\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

e moltiplicando i determinanti dei due membri delle equazioni superiori per quest'ultima forma di δ, posto:

$$\begin{aligned} a_0^2+a_1a_2&=a\ , & 2b_0c_0+b_1c_2+b_2c_1&=2l\ ,\\ b_0^2+b_1b_2&=a'\ , & 2c_0a_0+c_1a_2+c_2a_1&=2m\ ,\\ c_0^2+c_1c_2&=a''\ , & 2a_0b_0+a_1b_2+a_2b_1&=2n\ , \end{aligned}\tag{2}$$

si ottengono le equazioni seguenti:

$$\delta^2=-16h\ ,\qquad h=\begin{vmatrix}a & n & m\\ n & a' & l\\ m & l & a''\end{vmatrix},$$

$$2h\frac{d\sqrt{z_s}}{da}=\begin{vmatrix}\sqrt{z_s} & \sqrt{z'_s} & \sqrt{z''_s}\\ n & a' & l\\ m & l & a''\end{vmatrix};\ 2h\frac{d\sqrt{z_s}}{db}=\begin{vmatrix}a & n & m\\ \sqrt{z_s} & \sqrt{z'_s} & \sqrt{z''_s}\\ m & l & a''\end{vmatrix};\ 10h\frac{d\sqrt{z_s}}{dc}=\begin{vmatrix}a & n & m\\ n & a' & l\\ \sqrt{z_s} & \sqrt{z'_s} & \sqrt{z''_s}\end{vmatrix};$$

nelle quali:

$$\sqrt{z'_s}=b_0+\rho^s b_1+\rho^{4s}b_2;\qquad \sqrt{z''_s}=c_0+\rho^s c_1+\rho^{4s}c_2\,.$$

Notiamo dapprima che essendo:

$$\sqrt{z'_\infty}=b_0\sqrt{5}=\tfrac{1}{2}\frac{db}{da_0}\sqrt{5}=\frac{5}{2\sqrt{z_\infty}}\left[32a_0^4a_1a_2-4a_0^2a_1^2a_2^2-a_0(a_1^5+a_2^5)\right],$$

pei valori di a, b si giunge alla:

$$2\sqrt{z'_\infty}=\frac{1}{\sqrt{z_\infty}}\left[-z_\infty^3+5az_\infty^2+a^2z_\infty-5(a^3-b)\right],$$

la quale, pel valore di $5(a^3-b)^2$ dedotto dalla equazione (1), dà la relazione che lega le radici z'_∞ e z_∞ od in generale due radici corrispondenti z', z: ossia la:

$$2(a^3-b)\sqrt{z'}=(z^5-10az^4+35a^2z^3-61a^3z^2+11bz^2+60a^4z-35abz-25a^5+29a^2b-4c)\sqrt{z}\quad(2)'$$

ed analogamente:

$$2(a^3-b)\sqrt{z''}=(a^2z^5-9a^3z^4-bz^4+26a^4z^3+9abz^3-34a^5z^2-16a^2bz^2+21a^6z+\\+13a^3bz-9b^2z-5a^7-5a^4b+14ab^2-4a^2c)\sqrt{z}\,,$$

o più semplicemente:

$$2\sqrt{z''}=2a^2\sqrt{z'}+(z^4-9az^3+27a^2z^2-39a^3z+9bz+20a^4-14ab)\sqrt{z}\,.$$

Si ha dunque il

Teorema II.

Se le radici z_∞, z_0,.., z_4 di una equazione del sesto grado godono della proprietà indicata nel teorema 1.°, si hanno altri due sistemi di radici z'_∞, z'_0,.., ; z''_∞, z''_0,...., pei quali si verificano le identiche proprietà. Una qualsivoglia radice di un sistema si può esprimere in funzione razionale intera della corrispondente radice in un altro sistema e dei coefficienti a, b, c.

3.° Le equazioni (2) danno facilmente per a, a', a'',... i valori seguenti:

$$a'=8a^2b+c,\ a''=b(4ac-3b^2),\ l=a(4ac-b^2),\ m=c,\ n=3b, \qquad (3)$$

pei quali:

$$h=27b^5-c^3-25a^3b^4+40a^4b^2c+20a^2bc^2-45ab^3c-16a^5c^2 .$$

Inoltre si deducono le:

$$a'a''-l^2=e=40a^3b^2c+4abc^2-25a^2b^4-3b^3c-16a^4c^2,$$

$$a''a-m^2=ln-a'm=f=4a^2bc-3ab^3-c^2;\ aa'-n^2=g=8a^3b+ac-9b^2,$$

$$mn-al=\varepsilon=3bc-4a^3c+a^2b^2,\quad lm-a''n=\varphi=4a^2c^2-13ab^2c+9b^4;$$

perciò sviluppando i determinanti superiori si otterranno le relazioni:

$$\begin{aligned} 2h\frac{d\sqrt{z}}{da}&=e\sqrt{z}+\varphi\sqrt{z'}+f\sqrt{z''},\\ 2h\frac{d\sqrt{z}}{db}&=\varphi\sqrt{z}+f\sqrt{z'}+\varepsilon\sqrt{z''},\\ 10h\frac{d\sqrt{z}}{dc}&=f\sqrt{z}+\varepsilon\sqrt{z'}+g\sqrt{z''}, \end{aligned} \qquad (4)$$

e le reciproche:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sqrt{z}&=a\frac{d\sqrt{z}}{da}+n\frac{d\sqrt{z}}{db}+5m\frac{d\sqrt{z}}{dc},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{z'}&=n\frac{d\sqrt{z}}{da}+a'\frac{d\sqrt{z}}{db}+5l\frac{d\sqrt{z}}{dc},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{z''}&=m\frac{d\sqrt{z}}{da}+l\frac{d\sqrt{z}}{db}+5a''\frac{d\sqrt{z}}{dc}, \end{aligned} \qquad (5)$$

dalle quali si è levato l'indice s, perchè evidentemente sussistono anche per $s=\infty$. Queste relazioni dimostrano il seguente

Teorema III.

I tre sistemi di radici che si deducono dalle espressioni $\frac{d\sqrt{z}}{da}$, $\frac{d\sqrt{z}}{db}$, $\frac{d\sqrt{z}}{dc}$ *hanno le proprietà del sistema di radici del teorema 1.°*

4.° Posto analogamente alle (3):

$$\alpha_1=8\alpha^2\beta+\gamma,\ \alpha_2=\beta(4\alpha\gamma-3\beta^2),\ \lambda=\alpha(4\alpha\gamma-\beta^2),\ \mu=\gamma,\ \nu=3\beta,$$

ed:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sqrt{\xi}&=\alpha\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha}+\nu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta}+5\mu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\gamma},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\eta}&=\nu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha}+\alpha_1\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta}+5\lambda\frac{d\sqrt{\xi}}{d\gamma},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta}&=\mu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha}+\lambda\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta}+\alpha_2\frac{d\sqrt{\xi}}{d\gamma},\end{aligned}\tag{6}$$

i sistemi di radici η, ζ avranno le proprietà del sistema ξ. Ora se in queste relazioni si sostituiscono alle $\alpha, \alpha_1, \ldots$ i loro valori formati colle a, b, c ed osservasi che:

$$\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha}=\frac{d\sqrt{\xi}}{da}\frac{da}{d\alpha}+\frac{d\sqrt{\xi}}{db}\frac{db}{d\alpha}+\frac{d\sqrt{\xi}}{dc}\frac{dc}{d\alpha};\quad \text{ecc.}$$

ponendo per $\sqrt{\xi}$ il valore formato con $\sqrt{z}$ del teorema I.°, si ottengono dopo alcune riduzioni le seguenti:

$$s\sqrt{\xi}=\Phi(\sqrt{z}),\ s(5b^2-4ac)\sqrt{\eta}=-5ab\Phi(\sqrt{z})+5b(a^3-b)\Phi_1(\sqrt{z})+4c(a^3-b)\Phi_2(\sqrt{z}),$$
$$s(5b^2-4ac)\sqrt{\zeta}=2[-a^2\Phi(\sqrt{z})+a(a^3-b)\Phi_1(\sqrt{z})+b(a^3-b)\Phi_2(\sqrt{z})],$$

essendo $\Phi(\sqrt{z})$ il secondo membro della $(1)'$ e:

$$\Phi_1(\sqrt{z})=(z^3-7az^2+11a^2z-5a^3+7b)\sqrt{z},\quad \Phi_2(\sqrt{z})=(z-3a)\sqrt{z}.$$

Se quindi poniamo:

$$F_2(\sqrt{z})=(z^4-9az^3+27a^2z^2-39a^3z+9bz+20a^4-14ab)\sqrt{z}$$

ed indichiamo con $F_1(\sqrt{z})$ il secondo membro della $(2)'$, onde:

$$2(a^3-b)\sqrt{z'}=F_1(\sqrt{z}),\ 2(a^3-b)\sqrt{z''}=a^2F_1(\sqrt{z})+(a^3-b)F_2(\sqrt{z}),$$

si ha il

Teorema IV.

Se con $\sqrt{Z}$ si indica una qualsivoglia delle tre funzioni intere di $\sqrt{z}$ cioè: $\sqrt{z}$, $F_1(\sqrt{z})$, $F_2(\sqrt{z})$, essa soddisfà alle tre relazioni:

$$\sqrt{Z_0}+\ \sqrt{Z_1}+\ \sqrt{Z_2}+\ \sqrt{Z_3}+\ \sqrt{Z_4}=\sqrt{5Z_\infty}\ ,$$
$$\sqrt{Z_0}+\rho^2\sqrt{Z_1}+\rho^4\sqrt{Z_2}+\rho\sqrt{Z_3}+\rho^3\sqrt{Z_4}=0\ ,$$
$$\sqrt{Z_0}+\rho^3\sqrt{Z_1}+\rho\sqrt{Z_2}+\rho^4\sqrt{Z_3}+\rho^2\sqrt{z_4}=0\ .$$

e se con $\sqrt{Z}$ *si rappresenta una delle tre funzioni* $\Phi(\sqrt{z})$, $\Phi_1(\sqrt{z})$, $\Phi_2(\sqrt{z})$, *la medesima soddisfà alle tre relazioni che si ottengono dalle superiori mutando il segno del secondo membro della prima e sostituendo* ρ^2 *in luogo di* ρ *nelle altre. È poi evidente che qualunque altra funzione di* $\sqrt{z}$ *la quale soddisfaccia alle relazioni superiori si otterrà moltiplicando le* $\sqrt{z}$, $F_1(\sqrt{z})$, $F_2(\sqrt{z})$ *per opportuni coefficienti, costanti rispetto a* z, *ed analogamente nel secondo caso.*

5.° Dimostrato non esistere che tre funzioni intiere di $\sqrt{z}$, le quali soddisfacciano alle relazioni lineari del teorema 4°, e che tutte le altre sono funzioni lineari di quelle tre; sciegliamo per le medesime quelle che si sono indicate con $\sqrt{z}$, $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$. Se con esse formiamo l'espressione:

$$\sqrt{Z}=p\sqrt{z}+q\sqrt{z'}+r\sqrt{z''}\,,$$

nella quale p, q, r sono tre quantità indeterminate, l'equazione di cui le radici sono le Z_∞ , $Z_0, .., Z_4$ avrà la forma:

$$(Z-A)^6-4A(Z-A)^5+10B(z-A)^3-C(z-A)+5B^2-4AC=0\ ,$$

e le A, B, C saranno funzioni omogenee del secondo, sesto, decimo grado delle p, q, r. Ora ponendo per brevità:

$$Z-A=Y,\qquad z-a=y,\qquad z'-a'=y',\qquad z''-a''=y''\,,$$

ed introducendo le denominazioni:

$f_5=y^5-4ay^4+10by^2-4c$, $f_4=y^4-4ay^3+10by$, $f_3=y^3-4ay^2+10b$, $f_2=y^2-4ay$, $f_1=y-4a$; i valori delle $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ in funzione di $\sqrt{z}$, eseguendo il quadrato, danno pel valore di Y la espressione:

$$Y=t+t_0f_1+t_1f_2+t_2f_3+t_3f_4+t_4f_5\,,$$

nella quale le $t, t_0, ..,$ sono funzioni omogenee del secondo grado delle p, q, r. La formazione della equazione del sesto grado in Y è quindi ridotta ad un problema di trasformazione, e la formola di trasformazione è quella che il sig. Hermite ha opportunamente sostituita all'antica di Tschirnaus, nella quale però i coefficienti $t, t_0, ..,$ non sono indipendenti ma funzioni di tre sole indeterminate l, m, n.

i valori delle t, $t_0, \dots$ sono i seguenti:

$$t=4ap^2-8a^2bq^2-b(4ac-3b^2)r^2-2a(4ac-b^2)qr+2crp+9bpq\,,$$

$$t_0=p^2-10abq^2-2bcr^2-(4ac+5b^2)qr\,,\quad t_1=-5bq^2-2cqr-brp-2apq\,,$$

$$t_2=-4a^2q^2-b^2r^2-4abqr-pq\,,\quad t_3=aq^2+cr^2+3bqr\,,\quad t_4=pr-q^2\,;$$

ed osservando essere:

$$\sum f_1=-20a\,,\ \sum f_2=0\,,\ \sum f_3=30b\,,\ \sum f_4=0\,,\ \sum f_5=-4c\,,$$

si ottiene la:

$$\sum Y=4A=6t-20at_0+30bt_2-4ct_4\,,$$

ossia:

$$A=ap^2+a'q^2+a''r^2+2lqr+2mrp+2npq\,,$$

nella quale a', a'', l, m, n hanno i valori (3).

Se ora si considera che il prodotto di due funzioni qualsivogliano f è esprimibile evidentemente in funzione lineare delle funzioni stesse, si hanno cioè le:

$$f_1^2=f_2-4af_1\,;\quad f_2^2=f_4-4af_3-10bf_1\,;\quad f_3^2=-4af_5+10bf_3+4cf_1-c\,;$$

$$f_4^2=10bf_5+4cf_3-vf_2\,;\quad f_5^2=-4cf_5-vf_4\,;\quad f_1f_2=f_3-4af_2-10b\,;$$

$$f_1f_3=f_4-4af_3\,;\quad f_1f_4=f_5-4af_4+4c\,;\quad f_1f_5=-4af_5-v\,;\quad f_2f_3=f_5-4af_4+4c\,;$$

$$f_2f_4=-4af_5+4cf_1-v\,;\quad f_2f_5=-vf_1\,;\quad f_3f_4=10bf_4+4cf_2-vf_1\,;$$

$$f_3f_5=10bf_5-vf_2\,;\quad f_4f_5=-vf_3\,,$$

posto $v=5b^2-4ac$; si otterranno per Y^2, Y^3,... espressioni analoghe a quella di Y, dalle quali si potrebbero facilmente dedurre pei valori di B, C, espressioni simboliche di forma eguale a quella trovata più sopra pel valore di A.

(Continua).

Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati.

(*del prof.* L. Schläfli, *a Berna*).

Se nella equazione di Riccati, dopo averla ridotta alla forma:

$$du+t^{-a-1}u^2dt=t^a dt, \tag{1}$$

dove per le potenze t^{-a-1}, t^a si devono intendere $e^{-(a+1)\log t}$, $e^{a\log t}$, con uno stesso valore di $\log t$, si sostituisca $u=t^{a+1}\frac{\partial \log y}{\partial t}$, essa si cambierà in

$$t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+(a+1)\frac{\partial y}{\partial t}-y=0\,. \tag{2}$$

Integrando questa equazione per serie, si trova la funzione:

$$F(a,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{t^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}=\frac{1}{\Gamma(a+1)}\sum\frac{t^n}{1.2\ldots n\times(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\,,$$

la quale costituisce un caso particolare della serie ipergeometrica di Gauss e converge per ogni valore finito della t; ed allora, indicando con A, B due costanti arbitrarie,

$$y=AF(a,t)+Bt^{-a}F(-a,t)$$

è l'integrale completo della (2). Infatti, mettendo la (2) sotto la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{a+1}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right)=t^a y\,,$$

ed avvertendo che:

$$\frac{\partial}{\partial t}F(a,t)=F(a+1,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[t^{a+1}F(a+1,t)\right]=t^aF(a,t)\,,$$

si vedrà che la (2) è soddisfatta sì da $y=F(a,t)$, che da $y=t^{-a}F(-a,t)$. In conseguenza, l'integrale completo della equazione di Riccati (1) è

$$u = \frac{At^{a+1}F(a+1,t) + BF(-a-1,t)}{AF(a,t) + Bt^{-a}F(-a,t)}$$

ed ha $\frac{B}{A}$ per costante d'integrazione.

Applicando un noto metodo per ottenere un integrale definito che soddisfaccia alla (2), poniamo:

$$y = \int e^{-tm} \frac{M}{m^2}\, dm,$$

dove m dinota una variabile ausiliare ed M una funzione di essa. Ne segue la condizione:

$$-\int \frac{\partial}{\partial m}(e^{-tm}M) \cdot dm + \int \left(\frac{\partial \log M}{\partial m} - \frac{a+1}{m} - \frac{1}{m^2} \right) e^{-tm} M dm = 0 \cdot$$

Quindi facendo:

$$\frac{\partial \log M}{\partial m} - \frac{a+1}{m} - \frac{1}{m^2} = 0,$$

donde $M = m^{a+1} e^{-\frac{1}{m}}$, avremo:

$$e^{-tm} M = m^{a+1} e^{-(tm+\frac{1}{m})};$$

e perchè svanisca l'eccesso del valore finale di questa espressione sopra il valore iniziale, basta condurre l'argomento m nel piano rappresentativo (*) dalla parte orientale dello *zero* fino ad un punto dell'*orizzonte* dove la parte reale di tm sia positiva, per esempio a quel punto il quale possiede la fase di $\frac{1}{t}$. Se per maggior semplicità supponiamo la parte reale di t esser positiva, basterà condurre m sull'asse positivo dallo *zero* fino al *levante*, e sarà permesso di scrivere:

$$y = \int_0^\infty e^{-(tm+\frac{1}{m})} m^{a-1} dm \cdot$$

Sia $\sqrt{t} = x$ avente positiva la parte reale, $m = \frac{1}{x} e^\theta$; ne verrà:

$$y = x^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x\cosh\theta + a\theta} d\theta, \tag{A}$$

(*) Vedi pag. 109 di questo tomo.

dove per brevità poniamo:

$$e^{\theta}=\cosh\theta+\operatorname{senh}\theta, \quad e^{-\theta}=\cosh\theta-\operatorname{senh}\theta\cdot$$

La sostituzione $t=x^2$ cangia la (2) in:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(2a+1)\frac{\partial y}{\partial x}-4xy=0\cdot \tag{3}$$

Se però:

$$y=\int e^{xm}\frac{M}{m^2-4}dm,$$

ne seguirà:

$$\int\frac{\partial}{\partial x}(e^{xm}M)\cdot dx+\int\left(\frac{(2a+1)m}{m^2-4}-\frac{\partial\log M}{\partial m}\right)e^{xm}Mdm=0,$$

e poi $M=(m^2-4)^{a+1/2}$; dunque bisogna scegliere una via d'integrazione tale che $\int\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xm}(m^2-4)^{a+1/2}\right)\cdot dx$ si annulli. Non sono da considerarsi che tre punti, $m=\infty$ (l'orizzonte), $m=2$, $m=-2$. Perchè il cammino dell'integrazione incominci o finisca nel primo, quel punto dell'orizzonte deve avere la fase di $-\frac{1}{x}$, o distarne meno di un quadrante; e perchè esso cammino possa uscire dal secondo o terzo punto, bisogna che l'esponente $a+\frac{1}{2}$ abbia positiva la sua parte reale. Quando ha luogo quest' ultimo caso, vi sono tre vie d'integrazioni possibili $(2, \infty)$, $(-2, \infty)$, $(-2, 2)$; gli integrali y corrispondenti soddisfacendo ad una relazione lineare ed omogenea (giacchè un giro completo lungo i lati del triangolo $(-2, 2, \infty)$, il quale però non ne circondi i vertici, dà all'integrale y il valore nullo). Ma quando la parte reale di $a+\frac{1}{2}$ è nulla o negativa, è affatto necessario che nella regione opportuna dell'orizzonte cominci ad un tempo e finisca la via d'integrazione, la quale deve inoltre girare intorno all'uno o all'altro dei dei due punti 2 e -2. Solamente il caso che $a+\frac{1}{2}$ sia intero offre difficoltà ulteriori. – Per semplificare supponiamo x positivo, $a+\frac{1}{2}$ positivo, e consideriamo solamente la via da -2 a 2, e quella da -2 al ponente. Per la prima convien porre $m=2\cos\theta$, per la seconda $m=-2\cosh\theta$; avremo i due integrali particolari:

$$y=\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta\,.\,d\theta, \tag{B}$$

$$y=\int_0^{\infty}e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{2a}\theta\,.\,d\theta. \tag{C}$$

E poichè, se $F(a)$ soddisfà alla (3), vi soddisfà anche $x^{-2a}F(-a)$, gli integrali:

$$y=x^{-2a}\int_0^\pi e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{-2a}\theta\cdot d\theta, \tag{D}$$

$$y=x^{-2a}\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{-2a}\theta\cdot d\theta, \tag{E}$$

sussistenti nel caso di $a<\frac{1}{2}$, sono anch'essi soluzioni della (3). Pel caso di $x>0$, $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$, conosciamo adunque cinque integrali particolari della (3), mentre non più di due possono essere indipendenti tra loro. Per mettere le cose in piena luce, tentiamo di ridurre ciascuna di quelle cinque forme integrali $(A),..,(E)$ alla forma normale $AF(a,t)+Bt^{-a}F(-a,t)$.

I. La forma (A) si rappresenti così:

$$y=x^{-a}(V_a+V_{-a}), \qquad V_a=\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta+a\theta}d\theta.$$

Giovandosi dello sviluppo:

$$e^{a\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\Big(2\cosh\theta\Big)^{a-2n-1}.\,2\operatorname{senh}\theta, \tag{a}$$

donde segue per la differenziazione:

$$e^{a\theta}=\sum\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}\Big(2\cosh\theta\Big)^{a-2n}, \tag{b}$$

e ponendo $2x\cosh\theta=u$, si ottiene:

$$V_a=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}x^{2n-a}\int_{2x}^\infty e^{-u}u^{a-2n-1}du.$$

Indicando con S_n l'integrale nel secondo membro, si ha da integrare:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S_n}{\partial x}=-e^{-2x}(2x)^{a-2n-2}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\Pi m}(2x)^{m+a-2n-1}.$$

Per determinare la costante d'integrazione, possiamo far uso di una scala di recursione, nota dalla teoria delle funzioni *gamma*, e troveremo:

$$S_n=\Gamma(a-2n)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{(m+a-2n)\Pi m}(2x)^{m+a-2n}.$$

Ma:

$$\binom{2n-a}{n}\Gamma(a-2n)=(-1)^n\frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-a+1)},$$

epperò:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\Gamma(a-2n)x^{2n-a}=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}\cdot x^{-a}F(-a,x^2)\,.$$

Quindi, ponendo per brevità:

$$A_m=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\frac{2^{a+m-2n}}{a+m-2n}\left(\text{convergente come }\sum^{n=\infty}n^{-3/2}\right),$$

si ricava:

$$V_a=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}x^{-a}F(-a,x^2)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}A_m x^m\,.$$

La somma infinita A_m è un caso particolare di quest'altra:

$$f(a,m,\theta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\frac{1}{a+m-2n}(2\cosh\theta)^{a+m-2n},$$

cioè $A_m=f(a,m,0)$, mentre lo sviluppo (a) somministra:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(a,m,\theta)=e^{a\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^m=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}e^{(a+m-2\lambda)\theta}\,.$$

Dunque facendo:

$$S(a,m,\theta)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}e^{(a+m-2\lambda)\theta},$$

si ha:

$$f(a,m,\theta)=S(a,m,\theta)+cost.$$

Per determinare la costante d'integrazione, bisogna ricorrere ad una scala di relazione. Si trova (*)

(*) Potrei aggiungere anche queste relazioni:

$$f(a,m,\theta)=f(a+1,m-1,\theta)+f(a-1,m-1,\theta);$$

$$(m^2-a^2)f(a,m,\theta)-4m(m-1)f(a,m-2,\theta)=e^{a\theta}(2\cosh\theta)^m(m\tanh\theta-a)\,.$$

$$(a+m)f(a,m,\theta)-2mf(a-1,m-1,\theta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}(2\cosh\theta)^{a+m-2n},$$

ed in forza della (b):

$$=e^{a\theta}(2\cosh\theta)^m=(a+m)\,S(a,m,\theta)-2m\,S(a-1,m-1,\theta).$$

Dunque :

$$f(a,0,\theta)=S(a,0,\theta),\ \text{poi}\ f(a,1,\theta)=S(a,1,\theta),$$

e così di seguito; in generale, se m è intero positivo, e θ positivo, si ha $f(a,m,\theta)=S(a,m,\theta)$, cosicchè $cost.=0$. Quindi:

$$A_m=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{a}{a^2-(m-2\lambda)^2},$$

è funzione dispari di a. Sostituendo:

$$\frac{1}{a+m-2\lambda}=\frac{(-1)^m}{2\operatorname{sen}a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(a+m-2\lambda)\theta}\,d\theta,$$

nella prima espressione di A_m, troveremo:

$$A_m=\frac{(-2)^m}{\operatorname{sen}a\pi}\int_0^{\pi}\cos a\theta.\cos^m\theta.d\theta;$$

dunque finalmente:

$$V_a=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi}x^{-a}F(-a,x^2)-\frac{1}{\operatorname{sen}a\pi}\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\cos a\theta.d\theta. \qquad (c)$$

Perciò la prima forma integrale è:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x\cosh\theta+a\theta}d\theta=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi}\left(x^{-a}F(-a,x^2)-x^aF(a,x^2)\right). \qquad (A)$$

Prima di passare alla discussione delle altre forme, facciamo l'osservazione che, cambiando a in $-a$, dalla (c) si desume:

$$F(a,x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left(\int_0^{\pi}e^{2x\cos\theta}\cos a\theta.d\theta-\operatorname{sen}a\pi.\int_0^{\infty}e^{-2x\cosh\theta-a\theta}d\theta\right), \qquad (4)$$

espressione convergente per qualunque valore finito di a, purchè la parte reale di x sia positiva. Ma egli è facile il far sì che questa formola sussista per ogni valore finito di x. Supposto per esempio che la fase ϕ di

$x=r(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ decresca da 0 fino a $-\frac{\pi}{2}$, potremo assumere $\theta=K+i\beta$ per limite superiore del secondo integrale, allorquando sia $x=re^{-i\beta}$ (dinotando con K l'infinito positivo). Sarà:

$$-2x\cos\mathrm{h}\theta=-r(e^K+e^{-K-2i\beta}),$$

epperò l'integrale conserverà lo stesso grado di convergenza, mentre β va da 0 fino a $\frac{\pi}{2}$. Fissato finalmente il termine della via d'integrazione in $K+i\frac{\pi}{2}$, questa può essere condotta da 0 ad $i\frac{\pi}{2}$, poi da $i\frac{\pi}{2}$ a dirittura verso $K+\frac{i\pi}{2}$. Lungo il primo tratto di via l'integrale è (mutando θ in $i\theta$):

$$i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2ir\cos\theta-ia\theta}\,d\theta,$$

e lungo il secondo tratto, mutando θ in $\frac{i\pi}{2}+\theta$, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-2r\operatorname{sen}\mathrm{h}\theta-a\theta-\frac{ia\pi}{2}}\,d\theta.$$

Inoltre si ha $x^{-a}=r^{-a}e^{\frac{ia\pi}{2}}$. Prendendo nel primo integrale della espressione (4) due intervalli $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, per mutare nel secondo intervallo θ in $\pi-\theta$, avvertendo che:

$$e^{\frac{ia\pi}{2}}\cos(a\pi-a\theta)-i\operatorname{sen}a\pi.e^{\frac{ia\pi}{2}-ia\theta}=e^{-\frac{ia\pi}{2}}\cos a\theta,$$

e scrivendo finalmente x in luogo di r, troveremo:

$$F(a,-x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left(2\int_0^{\pi/2}\cos\left(2x\cos\theta-\frac{a\pi}{2}\right)\cos a\theta.d\theta-\operatorname{sen}a\pi\int_0^\infty e^{-2x\operatorname{senh}\theta-a\theta}d\theta\right), \quad (5)$$

formola sussistente finchè la fase di x è compresa fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Le formole (4) e (5) entrambe giovano in ogni caso ad esprimere $F(a,x^2)$ per mezzo di integrali assai convergenti.

Se per evitare l'uguaglianza dei fattori di $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$, avessimo scritto:

$$t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left(-\frac{1}{K}t+a+1\right)\frac{\partial y}{\partial t}-y=0 \quad (K=\text{infinito positivo}),$$

in luogo della (2), avremmo potuto sperimentare anche una seconda soluzione:

$$y=\int_{0\circlearrowleft 1} e^{\frac{t}{K}z} z^{K-1}(z-1)^{-K+a}dz\,,$$

la via d'integrazione partendo da 0 e ritornando a 0, dopo un giro attorno ad 1, ed assunte positive le potenze di z, $z-1$ nell'istante in cui z diventa positivo e maggiore di 1. Ma sviluppando la funzione esponenziale e giovandosi delle funzioni *gamma*, questa soluzione si riduce a $2i\pi K^a F(a,t)$, senza fornire una espressione integrale libera da K.

II. La formola (B) diventa:

$$y=\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta.\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta\,,$$

$$=\sum 2^{2n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)\Gamma(a+n+1)}x^{2n}=\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(a+\tfrac{1}{2})\sum\frac{x^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}\,,$$

cioè la formola notissima:

$$\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta.d\theta=\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(a+\tfrac{1}{2})F(a,x^2)\,, \qquad (B)$$

purchè sia $a>-\frac{1}{2}$.

III. Posto $2x\cosh\theta=u$, la terza forma (C) diventa:

$$y=(2x)^{-2a}\int_{2x}^{\infty} e^{-u}(u^2-4x^2)^{a-\frac{1}{2}}du=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{a-\frac{1}{2}}{n}(2x)^{2n-2a}\int_{2x}^{\infty} e^{-u}u^{2a-2n-1}du\,.$$

Poi dalla teoria delle funzioni *gamma* si desume:

$$\Gamma(2a-2n)-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{(2x)^{2a+m-2n}}{2a+m-2n}\,,$$

pel valore dell'ultimo integrale. La sostituzione di questa espressione contribuisce, pel suo primo termine, allo sviluppo della y il gruppo:

$$x^{-2a}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n 2^{2n-2a}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(2a-2n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a-n+\frac{1}{2})}x^{2n}\,;$$

in virtù della:

$$\Gamma(2a-2n)=2^{2a-2n-1}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(a-n)\Gamma(a-n+\tfrac{1}{2}),$$

il coefficiente di x^{2n} diventa:

$$(-1)^n\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a-n)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen} a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-a+1)};$$

e però il gruppo medesimo ha il valore:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen} a\pi}x^{-2a}F(-a,x^2)\,.$$

Quanto all'altro gruppo proveniente dal secondo termine (sommatorio) di quella espressione, esso procede secondo le potenze 1, x, x^2,...; il coefficiente di $-x^m$ è:

$$\frac{(-2)^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n-a-\frac{m}{2}}\binom{a-\frac{1}{2}}{n}$$

(convergente come $\sum n^{-a-3/2}$, cosicchè la condizione della convergenza richiede $a>-\frac{1}{2}$)

$$=\frac{(-2)^{m-1}}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma\left(-a-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}=\frac{(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(a+\frac{m}{2}+1\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{(m+1)\pi}{2}}{\operatorname{sen}\left(a\pi+\frac{(m+1)\pi}{2}\right)},$$

e si annulla per conseguenza ogniqualvolta m è positivo e dispari. Mettendo però $2n$ in luogo di m, abbiamo:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen} a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+a+1)}\,.$$

pel coefficiente di $-x^{2n}$; donde segue:

$$-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen} a\pi}F(a,x^2)\,,$$

pel valore del secondo gruppo. Finalmente si ha:

$$\int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta}\operatorname{senh}^{2a}\theta\cdot d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen} a\pi}[x^{-2a}F(-a,x^2)-F(a,x^2)]\,,\qquad (C)$$

purchè sia $a>-\frac{1}{2}$.

Il paragone delle (A) e (C) fornisce la uguaglianza:

$$x^a \int_0^\infty e^{-2x\cosh\theta} \operatorname{senh}^{2a}\theta \cdot d\theta = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x\cosh\theta + a\theta} d\theta ,$$

della quale non seppi scoprire una dimostrazione diretta, benchè sembri che un integrale doppio, opportunamente costituito, debba condurvi. Ma la formola (B) è una conseguenza immediata della (C); per convincersene bisogna far retrocedere la fase di x da 0 fino a $-\pi$, e ad un tempo il limite superiore dell'integrale (C) dal *levante* fino a *levante*$+i\pi$.

Per quanto concerne il metodo qui adoperato per trovar degli integrali definiti che soddisfacciano ad una equazione differenziale lineare ed omogenea con coefficienti lineari, alcuni scrittori, come Spitzer e Dienger, sembrano aver creduto ch'esso non sia applicabile a tutti i casi. Ecco un esempio di tale natura, tratto da Dienger, *Calcolo diff. ed int.* vol. II, pag. 105 (f):

Alla equazione differenziale lineare ed omogenea del second'ordine:

$$\begin{gathered}(x-a)(x-b)(x-c)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ +[(\beta+\gamma)(x-b)(x-c)+(\gamma+\alpha)(x-c)(x-a)+(\alpha+\beta)(x-a)(x-b)]\frac{\partial y}{\partial x} \\ +(\alpha+\beta+\gamma-1)[\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)]y=0 ,\end{gathered}$$

soddisfà l'integrale definito:

$$y=\int (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}(t-x)^{1-\alpha-\beta-\gamma} dt ,$$

ogni qual volta la via d'integrazione sia idonea ad annullar l'espressione:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}[(t-a)^\alpha(t-b)^\beta(t-c)^\gamma(t-x)^{-\alpha-\beta-\gamma}]\cdot dt$$

(inteso che la via d'integrazione sia la stessa in ambedue gli integrali), senza annullar ad un tempo il valore della y. Ma ciò è sempre possibile, poichè almeno uno dei quattro esponenti $\alpha, \beta, \gamma, -(\alpha+\beta+\gamma)$ sarà positivo (od avrà positiva la sua parte reale). Se fosse, per esempio, l'ultimo il solo positivo, potremmo tracciare la via d'integrazione dal punto x intorno ad uno de'tre altri a, b, c e ritornare all'x, purchè essa racchiuda quell'unico punto, ed avremmo in tal modo tre integrali y, legati però da una relazione lineare ed omogenea, giacchè l'integrale y corrispondente ad un cammino rientrante che racchiude tutti e quattro i punti a, b, c, x ha il valore zero. Che la stessa variabile x sia limite dell'integrale y, non fa ostacolo alla giustezza dei soliti ragionamenti, perchè $(t-x)^{-\alpha-\beta-\gamma}$ svanisce a questo limite nel caso supposto.

Il metodo è in difetto solamente quando uno degli esponenti è intero.

Indicando con f, g due funzioni intère, se è proposta la equazione differenziale:

$$xf\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y+g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y=0,$$

questa sarà soddisfatta dall' integrale definito:

$$y=\int e^{xt}\frac{T}{f(t)}dt, \qquad \text{ove } \log T=\int\frac{g(t)}{f(t)}dt,$$

ogni qual volta la via d' integrazione, partendo da od arrivando a $t=\infty$ o ad una radice della $f(t)=0$, annulli la $\int\frac{\partial}{\partial t}(e^{xt}T).dt$, senza annullare y. Supposto che la g non superi in grado la f, anche se T diventasse infinito per tutte le radici della $f(t)=0$, vi sarebbe però una regione opportuna dell'orizzonte per cominciare e terminar la via d'integrazione, la qual via dovrebbe allora racchiudere alcuna di dette radici.

Alcune osservazioni intorno alle funzioni di Laplace.

(*del prof.* L. SCHLÄFLI, *a Berna*).

Imaginiamo una funzione ϕ delle tre variabili indipendenti x, y, z, la quale soddisfaccia alla equazione:

$$\Box\phi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

I *punti* (*) (x, y, z), dove la funzione ϕ non ammette lo sviluppo di TAYLOR, se ve ne sono, o sono isolati, o costituiscono delle *linee nodali*, ovvero tutt' al più, delle *superficie nodali*, Dunque, se, per caso, nel punto $(0, 0, 0)$ la funzione non ammettesse tale sviluppo, potremmo assumere un altro punto (a, b, c), tale che in esso la ϕ comporti lo sviluppo di TAYLOR. Prendendo poi questo punto per origine, cioè mutando x, y, z in $a+x$, $b+y$, $c+z$, la equazione (1) non cambierebbe di forma. Perciò, in ogni caso è permesso di ammettere lo sviluppo:

$$\phi = \sum [\alpha, \beta, \gamma]\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1\, 2, 3, \ldots),$$

indicando con $[\alpha, \beta, \gamma]$ un coefficiente, purchè i valori assoluti di ciascuna variabile non oltrepassino certi limiti. I coefficienti poi vengono dalla (1) sottomessi alle condizioni:

$$(\alpha+2)(\alpha+1)[\alpha+2, \beta, \gamma] + (\beta+2)(\beta+1)[\alpha, \beta+2, \gamma] + (\gamma+2)(\gamma+1)[\alpha, \beta, \gamma+2] = 0.$$

Quindi si vede che i coefficienti, pei quali la somma degli indici è diversa, non potranno essere legati, ma invece ogni gruppo di termini dello stesso grado soddisfarà da sè alla (1). Indicato con n il grado di siffatto gruppo,

(*) Chiedo licenza di usare questa espressione per indicare un gruppo di valori di tutte le variabili indipendenti.

avremo $\alpha+\beta+\gamma=n-2$, condizione che ammette $\frac{1}{2}n(n-1)$ soluzioni; e però tale è il numero delle relazioni tra i coefficienti appartenenti al grado n; mentre il numero di questi è $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ e così avanza quello di $2n+1$. Vi sono adunque $2n+1$ coefficienti fra loro indipendenti, se però anche quelle relazioni sono tutte essenzialmente diverse. Che questo è appunto il nostro caso, è facile convincersene. Siccome in una relazione i primi indici (per esempio) differiscono fra loro di 2, tutti quei coefficienti il cui primo indice è 0 od 1 non sono mai legati da alcuna relazione. La prima serie di essi ($\alpha=0$) conta $n+1$ coefficienti, la seconda ($\alpha=1$) ne conta n. Dunque ve ne sono infatti $2n+1$ fra loro indipendenti. Ma non più, perchè ogni coefficiente col primo indice $\alpha+2$ (serie $\alpha+2$) è funzione lineare ed omogenea di due coefficienti dalla serie α, epperò finirà per presentarsi come funzione lineare ed omogenea dei termini della serie 0 o della serie 1, secondochè il suo primo indice è pari o dispari.

Quindi quel gruppo di grado n, cavato dallo sviluppo completo della ϕ, è un aggregato di $2n+1$ funzioni intere ed omogenee, ciascuna delle quali è moltiplicata per una costante, che rimane indeterminata finchè non vi si aggiungano condizioni ulteriori; ed è chiaro che ciascuna di tali singole funzioni soddisfà da sè sola alla (1).

Supposto che sia $\phi=(ax+by+cz)^n$, la (1) richiederà la $a^2+b^2+c^2=0$. Allora il notissimo metodo di esprimere razionalmente i lati di un triangolo rettangolo ne suggerisce la soluzione $a=2t$, $b=t^2-1$, $c=i(t^2+1)$, onde:

$$\phi=[(y+iz)t^2+2xt-(y-iz)]^n.$$

Sviluppata secondo le potenze della costante indeterminata t, la funzione conterrà $2n+1$ termini, ciascuno dei quali soddisfarà alla (1), giacchè il risultato della operazione $\square$ eseguita sulla ϕ deve annullarsi identicamente rispetto alla indeterminata t. Per effettuare lo sviluppo, facciamo $y+iz=p$, $y-iz=q$ $\left(\text{onde } \square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}\right)$, quindi:

$$\phi=\frac{1}{p^n}\Big((x+pt)^2-(x^2+pq)\Big)^n$$

Mutando poi ϕ, x, p, q rispettivamente in:

$$r^n V,\quad rx,\quad rp=r\sqrt{1-x^2}\,e^{i\theta},\quad rq=\sqrt{1-x^2}\,e^{-i\theta},$$

avremo:

$$V=\frac{1}{p^n}\Big((x+p\,t)^2-1\Big)^n=\sum_{m=0}^{m=2n} T_m t^m,$$

dove:

$$T_m=\frac{1}{\Pi m}p^{m-n}\frac{\partial^m}{\partial x^m}(x^2-1)^n.$$

Ma siccome $V=(pt^2+2xt-q)^n$, così anche:

$$V=(-1)^n t^{2n}\left[q\left(-\frac{1}{t}\right)^2+2x\left(-\frac{1}{t}\right)-p\right]^n,$$

epperò T_m sarà $(-1)^n.(-1)^{2n-m}\times$pel coefficiente di $\left(-\frac{1}{t}\right)^{2n-m}$ nello sviluppo di $\left[q\left(-\frac{1}{t}\right)^2+2x\left(-\frac{1}{t}\right)-p\right]^n$, il qual coefficiente si ricava dalla espressione di T_m mutando m, p, q in $2n-m$, q, p. Dunque si ha:

$$T_m=\frac{1}{\Pi m}p^{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m(x^2-1)^n=\frac{(-1)^{n-m}}{\Pi(2n-m)}q^{n-m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n-m}(x^2-1)^n; \tag{2}$$

il che, a causa di $pq=1-x^2$, porta seco la uguaglianza:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m(x^2-1)^n=\frac{\Pi m}{\Pi(2n-m)}(x^2-1)^{n-m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n-m}(x^2-1)^n. \tag{3}$$

Indicando con Z qualsivoglia funzione delle tre nuove variabili r, x, θ, si ha adesso:

$$\square Z=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial Z}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial\theta^2}\right\},$$

e la equazione $\square(r^n T_m)=0$ è soddisfatta identicamente; ossia, dividendo per r^{n-2} ed omettendo l'indice m, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+n(n+1)T=0,$$

che è la nota definizione delle funzioni di Laplace pel grado n.

Lo sviluppo della distanza inversa fra due punti, dati per le loro coordinate polari può ottenersi nel modo seguente. Sia:

$$\rho^2=1-2\alpha u+\alpha^2, \quad \frac{1}{\rho}=\sum_{n=1}^{n=\infty} U_n\alpha^n, \quad u=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\psi,$$

sarà U_n il coefficiente di h^n nello sviluppo di $\left(\frac{(u+h)^2-1}{2}\right)^n$, come si può dimostrare per mezzo della formola lagrangiana di riversione od altrimenti; epperò U_n è funzione intera di u del grado n. Ma per isviluppare U_n secondo le $2n+1$ funzioni di Laplace, poniamo:

$$\cos\theta=x, \quad \cos\theta'=x', \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'}e^{-i\psi}=\varepsilon,$$

onde:

$$u=\frac{1-x^2}{2\varepsilon}+xx'+\frac{1-x'^2}{2}\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}\left(1+\varepsilon^2-(x-\varepsilon x')^2\right).$$

Riguardando poi la ε come costante, la U_n si presenta qual funzione intera di grado $2n$ dell'argomento $x-\varepsilon x'$, epperò si annulla sotto la operazione $\frac{\partial}{\partial x'}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}=\mathrm{D}'+\varepsilon\mathrm{D}$. Dall'altro canto, sviluppando U_n come funzione di $\frac{1-x^2}{2}\varepsilon^{-1}+xx'+\frac{1-x'^2}{2}\varepsilon$, secondo le potenze delle ε, si abbia:

$$U_n=A_{-n}\varepsilon^{-n}+A_{-n+1}\varepsilon^{-n+1}+\cdots+A_n\varepsilon^n.$$

Supposta la ε infinitamente piccola, si trova:

$$A_{-n}=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^n\frac{\Pi(2n)}{\Pi n.\Pi n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{\Pi n.\Pi n}\mathrm{D}'^{2n}\left(\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{x'^2-1}{2}\right)^n.$$

Inoltre il supporre $x=1$ ci dà $u=x'-\frac{1}{2}(x'^2-1)\varepsilon$, perciò:

$$U_n=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\frac{(-1)^\lambda}{\Pi n.\Pi\lambda}\left(\frac{x'^2-1}{2}\right)^\lambda\mathrm{D}'^{n+\lambda}\left(\frac{x'^2-1}{2}\right)^n\cdot\varepsilon^\lambda;$$

il che, mediante la (3) ed avvertendo che $\frac{\Pi n}{\Pi\lambda.\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$ è il coefficiente di

$h^{n+\lambda}$ nello sviluppo di $h^n(1+\frac{1}{2}h)^n = (\frac{1}{2})^n[(1+h^2)-1]^n$, si trasforma in:

$$U_n = \frac{1}{\Pi n . \Pi n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \mathrm{D}^{n+\lambda} \mathrm{D}'^{n-\lambda} \left(\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{x'^2-1}{2}\right)^n \cdot \varepsilon^\lambda$$

(pel caso di $x=1$). Ora perchè l'operazione $\mathrm{D}'+\varepsilon\mathrm{D}$ eseguita sopra $U_n = \sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n} A_\lambda \varepsilon^\lambda$ ha zero per risultato, ne segue la serie di condizioni $\mathrm{D}'A_\lambda + \mathrm{D}A_{\lambda-1} = 0$ $(\lambda=-n, -n+1, .., n)$, alla prima delle quali, $\mathrm{D}'A_{-n}=0$, è già soddisfatto da:

$$A_{-n} = \frac{(-1)^n}{\Pi n . \Pi n} \mathrm{D}'^{2n} \left(\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{x'^2-1}{2}\right)^n .$$

La seconda, $\mathrm{D}'A_{-n+1} + \mathrm{D}A_{-n} = 0$ ci dà:

$$\mathrm{D}'A_{-n+1} = \mathrm{D}'\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\Pi n . \Pi n} \mathrm{D}\,\mathrm{D}'^{2n-1} \left(\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{x'^2-1}{2}\right)^n\right\},$$

equazione integrabile; e poichè per $x=1$ si ha $A_{-n+1}=0$, se ne ricava:

$$A_{-n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\Pi n . \Pi n} \mathrm{D}\,\mathrm{D}'^{2n-1} \left(\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{x'^2-1}{2}\right)^n ;$$

e così possiamo proseguire integrando successivamente tutte le equazioni di condizione e determinando ogni volta la costante d'integrazione, col porre $x=1$. Al risultato finale si può dare la forma:

$$U_n = \frac{(-1)^n}{\Pi n . \Pi n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \frac{\mathrm{D}'^{2n+1} + (\varepsilon\mathrm{D})^{2n+1}}{\mathrm{D}'+\varepsilon\mathrm{D}} \left(\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{x_1'^2-1}{2}\right)^n,$$

supposto che la frazione della forma $\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}$ rappresenti la funzione intera $a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + b^{2n}$. Del resto sarà facile ridurre questa espressione alla solita forma.

Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, e determinazione delle loro curve assintotiche.

(*del prof.* L. Cremona, *a Milano*).

---

1. Una superficie gobba sia rappresentata punto per punto sopra un piano. Le imagini delle generatrici rettilinee saranno linee di genere 0, formanti un fascio; quindi trasformando di nuovo, punto per punto, il piano in un altro piano, potremo sostituire a quel fascio di linee un fascio di rette.

Siano adunque le generatrici della superficie gobba rappresentate da rette del piano $(x\,y\,z)$, passanti per un' origine fissa o. Una sezione piana qualsivoglia della superficie, avendo un solo punto comune con ciascuna generatrice, sarà rappresentata da una curva segante in un punto unico ciascun raggio del fascio o. Dunque, se μ è l'ordine delle curve imagini delle sezioni piane della superficie, esse curve avranno in o un punto $(\mu-1)$-plo, e però saranno di genere 0. Viceversa, è evidente che, se le sezioni piane della superficie sono curve di genere 0, la superficie potrà essere rappresentata punto per punto sopra un fascio piano di rette. Dunque, affinchè una superficie gobba sia rappresentabile, punto per punto, sopra un piano, è necessario e sufficiente che la superficie sia di genere 0 (cioè che le generatrici siano individuate da funzioni razionali di un parametro variabile) (*).

2. Qui vogliamo occuparci delle superficie gobbe dotate di due direttrici rettilinee M, N, che dapprima supporremo distinte (**). Siano m, n i gradi di moltiplicità delle due direttrici; la superficie sarà del grado $m+n$ e (dovendo essere di genere 0) avrà $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie.

(*) Schwarz *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (G. di Borchardt t. 67).

(**) Cayley *A second memoir on skew surfaces, otherwise scrolls* (Philos. Transactions 1864, p. 561 e seg.). Vedi anche i miei *Preliminari di una teoria geom. delle superficie,* 57.

Rappresentiamo M in una retta G del piano $(x\,y\,z)$; ed N ne' punti infinitamente vicini all'origine o. Le m generatrici della superficie, uscenti da uno stesso punto di M (e contenute in uno stesso piano per N) avranno per imagini m rette del fascio o; queste incontreranno G in m punti, che tutti corrisponderanno al detto punto della retta multipla M. Tutti gli analoghi gruppi di m punti in G costituiranno un' involuzione di grado m, projettiva a quella che formano i gruppi di m piani tangenti alla superficie ne' vari punti di M. I $2(m-1)$ punti doppi dell' involuzione corrisponderanno ai punti cuspidali che la superficie possiede in M, cioè a quei punti di questa direttrice nei quali due generatrici coincidono. Lungo queste $2(m-1)$ generatrici singolari la superficie è toccata da altrettanti piani passanti per N.

Vi sarà poi un'altra involuzione di grado n, costituita dai raggi del fascio o, aggruppati ad n ad n in modo che un gruppo rappresenti le n generatrici uscenti da uno stesso punto di N (e contenute in un piano per M). I punti infinitamente vicini ad o, situati nei raggi del gruppo, corrisponderanno tutti insieme allo stesso punto di N. I $2(n-1)$ elementi doppi di questa involuzione danno i $2(n-1)$ punti cuspidali, che la superficie possiede sulla direttrice N; per essi passano altrettante generatrici singolari, lungo le quali la superficie è toccata da piani per M. Questa seconda involuzione è projettiva a quella che formano i gruppi di piani tangenti nei punti di N.

3. Considerando, in luogo dei raggi per o, i punti ch' essi determinano su G, le due involuzioni hanno $(m-1)(n-1)$ gruppi con due elementi comuni, cioè in G vi sono $(m-1)(n-1)$ coppie di punti tali, che i punti di ciascuna coppia appartengono simultaneamente ad un gruppo della prima e ad un gruppo della seconda involuzione. E però, i punti di siffatta coppia, uniti ad o, danno due raggi che rappresentano insieme una generatrice doppia della superficie.

Siccome un piano qualsivoglia sega M in un punto ed N in un altro punto, così la curva rappresentante una sezione piana segherà G negli m punti di uno stesso gruppo della prima involuzione, ed in o avrà n rami toccati dai raggi di uno stesso gruppo della seconda involuzione; e se μ è l'ordine della curva, questa avrà in o altre $\mu-1-n$ tangenti fisse e segherà G in altri $\mu-m$ punti fissi. Donde segue che, se $m>n$, il numero μ dev'essere almeno uguale ad m; e se $m=n$, il minimo valore di μ è $m+1$.

4. I punti del piano rappresentativo si riferiscano ad un triangolo fon-

damentale, un vertice del quale ($x=y=0$) sia in o ed il lato opposto ($z=0$) sia nella retta G. Siano u, v due forme (binarie) omogenee del grado m in x, y, projettive a due gruppi della prima involuzione; allora un gruppo qualunque della medesima involuzione sarà rappresentato da $cu+ev$ dove c, e sono coefficienti costanti (il cui rapporto è determinato da un punto della retta M). Similmente, un gruppo qualunque della seconda involuzione sarà rappresentato da $a\omega+b\theta$, dove a, b sono coefficienti costanti (il cui rapporto è determinato da un punto di N), ed ω, θ sono due forme omogenee del grado n in x, y, projettive a due gruppi della involuzione medesima.

Ritenuto $m>n$, potremo rappresentare le sezioni piane della superficie gobba mediante curve d'ordine m, aventi $m-1$ rami incrociati in o, de' quali $m-n-1$ siano toccati da altrettante rette fisse. Ciò equivale ad $\frac{m(m-1)}{2}+m-n-1$ condizioni lineari. Inoltre le altre tangenti in o ed i punti d'intersezione colla retta G devono essere dati da gruppi delle due involuzioni; il che equivale ad altre $(n-1)+(m-1)$ condizioni lineari. Le imagini delle sezioni piane saranno adunque curve d'ordine m, soggette ad $\frac{1}{2}m(m+3)-3$ condizioni lineari comuni; vale a dire, ciascuna di esse sarà determinata linearmente da tre punti, come accade appunto per un piano nello spazio. Due di quelle curve, avendo già in comune un punto $(m-1)$-plo con $m-n-1$ tangenti, si segheranno in altri $m^2-(m-1)^2-(m-n-1)=m+n$ punti, imagini di quelli in cui la superficie è incontrata da una retta nello spazio.

5. L'equazione generale di tali curve conterrà dunque tre parametri arbitrari, cioè sarà della forma:

$$z\phi(a\omega+b\theta)+cu+ev=0, \tag{1}$$

dove la forma omogenea ϕ, del grado $m-n-1$ in x, y, rappresenta le tangenti fisse comuni, in o.

Di qui risulta che le coordinate p, q, r, s di un punto qualunque nello spazio potranno essere riferite ad un tale tetraedro fondamentale, che la curva (1) sia l'imagine della sezione fatta nella superficie gobba dal piano:

$$ap+bq+cr+es=0. \tag{2}$$

Perciò la corrispondenza fra i punti della superficie e quelli del piano rappresentativo sarà espressa dalle formole:

$$p:q:r:s=z\phi\omega:z\phi\theta:u:v, \tag{3}$$

eliminando dalle quali i rapporti $x:y:z$, si otterrà l'equazione di grado $m+n$ in p, q, r, s, rappresentante la superficie nello spazio.

6. Se nella (1) si fa $a=b=0$, si ottengono m rette $cu+ev=0$, concorrenti in o e seganti la retta $z=0$ ne' punti di un gruppo della prima involuzione. Dunque il piano $cr+es=0$ sega la superficie secondo m generatrici appoggiate in uno stesso punto alla direttrice M; ossia il piano $cr+es=0$ passa per l'altra direttrice N, qualunque siano c, e.

Analogamente, se nella (1) si fa $c=e=0$, si ottiene una linea composta delle rette $z=0$, $\phi=0$ e delle n altre rette $a\omega+b\theta=0$, formanti un gruppo della seconda involuzione. Dunque il piano $ap+bq=0$ sega la superficie secondo n generatrici appoggiate in uno stesso punto alla direttrice N; ossia il detto piano passa per M, qualunque siano a, b.

Donde si riconosce, la scelta delle coordinate p, q, r, s consistere in ciò che le rette M, N sono due spigoli opposti del tetraedro di riferimento.

Mediante le formole (3) potremo studiare sul piano rappresentativo la geometria delle curve delineate sulla superficie gobba. Proponiamoci di determinare le curve assintotiche della medesima, cioè le curve le cui tangenti sono le rette osculatrici della superficie (*).

7. Se la curva

$$Z\Phi(a\Omega+b\Theta)+cU+eV=0 \tag{1}'$$

ha un punto doppio, altrove che in o, esso punto giacerà nelle prime polari relative alla curva medesima, e però le sue coordinate x, y, z annulleranno le derivate parziali del primo membro della (1)'. Si hanno così le tre equazioni:

$$\begin{aligned} z\phi(a\omega_1+b\theta_1)+cu_1+ev_1&=0\,, \\ z\phi(a\omega_2+b\theta_2)+cu_2+ev_2&=0\,, \\ a\omega+b\theta\qquad\qquad&=0\,, \end{aligned}$$

dove gli indici 1, 2, 3 esprimono le derivazioni parziali rispetto ad x, y, z. Da queste equazioni si ricavano i valori de' rapporti $a:b:c:e$

(*) Cfr. Clebsch *Ueber die Steinersche Fläche* (G. di Borchardt t. 67), e la mia nota sulla *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di* 3° *grado sopra un piano* (Rendiconti Ist. Lomb. 1867).

$$a \equiv n\ (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\theta\ ,$$
$$b \equiv n\ (u_2 v_1 - u_1 v_2)\,\omega\ ,$$
$$c \equiv m\,(\omega_2 \theta_1 - \omega_1 \theta_2)\, z \phi v\ ,$$
$$e \equiv m\,(\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)\, z \phi u\ ,$$

sostituendo i quali nella (1)′, si otterrà l'equazione di quella curva del sistema (1) che ha due rami incrociati nel punto ($x\ y\ z$). Ora, tale curva si decomporrà manifestamente nella retta $Xy - Yx = 0$ [imagine della generatrice contenuta nel piano (2) che, per l'ipotesi fatta, è tangente alla superficie nel punto corrispondente all'($x\ y\ z$)], ed in una curva d'ordine $m-1$, della quale dobbiamo determinare la direzione nel punto ($x\ y\ z$). L'equazione di questa curva sarà adunque:

$$\Gamma \equiv n\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)\, Z \Phi \frac{\theta \Omega - \omega \Theta}{Xy - Yx} + m z \phi\,(\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) \frac{uV - vU}{Xy - Xx} = 0\ ,$$

e la sua direzione nel punto ($x\ y\ z$) sarà espressa dall'equazione differenziale:

$$\gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz = 0\,. \tag{4}$$

Ora si ha facilmente:

$$\gamma_1 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1) z \Big[\phi_1 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) + \tfrac{1}{2} \phi (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)_1\Big] - \tfrac{1}{2} z \phi\,(\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)_1\ ,$$

$$\gamma_2 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1) z \Big[\phi_2 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) + \tfrac{1}{2} \phi (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)_2\Big] - \tfrac{1}{2} z \phi\,(\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)_2\ ,$$

$$\gamma_3 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1) \phi (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)\,.$$

Perciò l'equazione (4) diverrà:

$$2 \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{d(\omega_1 \theta_2' - \omega_2 \theta_1)}{\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1} + 2 \frac{dz}{z} - \frac{d(u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 v_2 - u_2 v_1} = 0\ ,$$

donde integrando si ottiene:

$$z^2 \phi^2 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) - k (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0\ , \tag{5}$$

essendo k una costante arbitraria.

Dunque le curve assintotiche della superficie gobba sono rappresentate sul piano ($x\ y\ z$) da un fascio di curve d'ordine $2(m-1)$, passanti pei $2(m-1)$

punti fissi ($z=0$, $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$), che sono gli elementi doppi della prima involuzione, ed aventi nell'origine $2(m-1)$ rami, de' quali $2(m-n-1)$ sono toccati a due a due dalle rette $\phi=0$, mentre gli altri $2(n-1)$ hanno per tangenti le rette $\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1=0$, cioè i raggi doppi della seconda involuzione.

8. Eliminando z fra le equazioni (1) e (5), la risultante, che è del grado $2(m+n-1)$, darà i punti del piano, corrispondenti a quelli ove una curva assintotica è incontrata dal piano (2). Dunque le curve assintotiche di una superficie gobba $[m, n]$, avente due direttrici rettilinee distinte, sono algebriche e dell'ordine $2(m+n-1)$, ed incontrano le direttrici ne' relativi punti cuspidali.

Un raggio qualunque del fascio o incontra la curva (5) in due altri punti, divisi armonicamente da o e da G; dunque ciascuna generatrice della superficie gobba incontra ciascuna curva assintotica in due punti, divisi armonicamente dalle due direttrici. Se la generatrice è singolare, i due punti d'incontro coincidono nel relativo punto cuspidale.

Un piano passante per la direttrice M e per la generatrice singolare appoggiata in uno de' punti cuspidali di M, sega una curva assintotica qualunque (oltre che nel detto punto cuspidale) negli altri $2m-3$ punti cuspidali di M ed in $2(n-1)$ punti situati nelle altre $n-1$ generatrici che giacciono in quel piano. Ora $2(m+n-1)-(2m-3)-2(n-1)=3$; dunque quel punto cuspidale tiene le veci di tre punti comuni alla curva assintotica ed al piano segante. Se ora si conduce un altro piano per la stessa generatrice singolare e per la direttrice N, questo piano sarà tangente alla superficie lungo la detta generatrice e segante secondo altre $m-2$ generatrici; quindi incontrerà la curva assintotica (oltre che nel punto cuspidale di M) nei $2(n-1)$ punti cuspidali di N ed in $2(m-2)$ altri punti distribuiti in quelle generatrici. Ma $2(m+n-1)-2(n-1)-2(m-2)=4$; dunque il punto cuspidale di M vale qui per quattro punti comuni alla curva assintotica ed al nuovo piano. Ciò torna a dire che in ciascun punto cuspidale di M, la curva assintotica ha un contatto tripunto colla relativa generatrice singolare ed un contatto quadripunto col piano passante per questa generatrice e per N. Analogamente, in ciascun punto cuspidale di N, la curva assintotica avrà un contatto tripunto colla relativa generatrice singolare ed un contatto quadripunto col piano passante per questa generatrice e per M. Cioè le curve assintotiche hanno in comune $2(m+n-2)$ tangenti stazionarie ed i relativi punti di contatto (i punti cuspidali della superficie) e piani osculatori.

9. Nella ricerca precedente si è supposto $m>n$, onde abbiamo potuto rap-

presentare le sezioni piane della superficie gobba con curve d'ordine m. Per abbracciare tutt'i casi possibili, basta assumere, in luogo della (1), l'equazione:

$$z\phi(a\omega+b\theta)+\psi(cu+ev)=0,$$

dove, come dianzi, ω, θ siano di grado n, ed u, v di grado m; ma ϕ sia di grado $\mu-n-1$, e ψ un'altra forma omogenea di grado $\mu-m$ in x, y, corrispondente ai punti fissi di G, comuni a tutte le curve che rappresentano le sezioni piane. In luogo della (5), si ottiene allora, per le imagini delle curve assintotiche, l'equazione:

$$z^2\phi^2(\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1)-k\psi^2(u_1v_2-u_2v_1)=0,$$

così che l'ordine delle curve assintotiche è ancora il medesimo. In particolare, se $m=n$, potremo porre $\mu=m+1$; ϕ si riduce ad una costante, e ψ risulta di primo grado.

10. Passiamo ora a considerare il caso che le due direttrici rettilinee, multiple secondo i numeri m, n, si avvicinino indefinitamente l'una all'altra sino a coincidere in una retta unica M.

Siano $p=0, q=0$ due piani passanti per M, ed $r-s=0$ un piano tangente alla superficie, il cui punto di contatto sia $r=s=0, p-q=0$. Questo piano segherà la superficie secondo la generatrice $p-q=0$ $(r-s=0)$, e secondo una curva d'ordine $m+n-1$ e di genere 0. Supposto m non $<n$, questa curva avrà $m-1$ rami incrociati nel punto $p=q=0$ $(r-s=0)$, e di questi $n-1$ toccati dalla generatrice, che nel detto punto avrà $m+n-2$ intersezioni riunite colla curva. Essendo la curva di genere 0, le sue coordinate si potranno esprimere razionalmente per mezzo di un parametro $x:y$; sia dunque per essa:

$$p-q : p+q : r+s : r-s = w\varepsilon^2x^2 : w\varepsilon\alpha y : xyt : 0,$$

dove w, ε, α, t, sono forme omogenee di x, y, de' gradi $m-n$, $n-1$, $n-1$, $m+n-3$. Si può anche scrivere:

$$p : q : r : s = u\omega : u\theta : v : v,$$

essendosi posto:

$$w\varepsilon=u,\ \alpha y+\varepsilon x=\omega,\ \alpha y-\varepsilon x=\theta,\ xyt=v, \tag{6}$$

donde:

$$2\varepsilon x=\omega-\theta,\quad 2\alpha y=\omega+\theta.$$

Ogni valore del rapporto $x:y$ dà un punto della curva; al punto $p=q=0$ $(r-s=0)$ corrispondono le $m-1$ radici dell'equazione $u=0$, ed al punto di contatto delle superficie col piano $r-s=0$ corrisponde $x:y=0$. Il piano $r+s=0$ è scelto in modo che passi pei punti corrispondenti ad $x:y=0$, $y:x=0$.

Le generatrici della superficie sono aggruppate (in involuzione) ad n ad n, in modo che quelle di uno stesso gruppo sono contenute in un piano passante per M e concorrono in un punto della direttrice medesima. Per tal modo i piani per M ed i punti di M costituiscono due figure projettive; al piano $p-q=0$ corrisponde il punto $p=q=0$, $r-s=0$; al piano $p+q=0$ corrisponda il punto $p=q=0$, $r+s=0$, e però al piano $p-\lambda q=0$ corrisponderà il punto:

$$p=q=0, \quad (h+\lambda)r-(1+h\lambda)s=0,$$

dove h è una costante, e λ un parametro variabile. Il piano $p-\lambda q=0$ incontra la curva nei punti dati dall'equazione:

$$u(\omega-\lambda\theta)=0,$$

cioè nel punto multiplo ed in altri n punti $\omega-\lambda\theta=0$; in guisa che al punto qualsivoglia:

$$p:q:r:s=u\omega:u\theta:v:v$$

della curva (6) corrisponderà il punto:

$$p:q:r:s:=0:0:h\omega+\theta:\omega+h\theta$$

della retta M.

La retta che unisce questi due punti corrispondenti è una generatrice della superficie. Indicando con z un altro parametro variabile, e con ϕ una forma (arbitraria) omogenea di grado $m-2$ in x, y, le coordinate di un punto qualsivoglia di quella retta, cioè di un punto qualsivoglia della superficie, saranno:

$$p:q:r:s=u\omega:u\theta:z\phi(h\omega+\theta)+v:z\phi(\omega+h\theta)+v,$$

ovvero:

$$p:q:\frac{hr-s}{h-1}:\frac{hs-r}{h-1}=u\omega:u\theta:(h+1)z\phi\omega+v:(h+1)z\phi\theta+v.$$

Cambiando $\frac{hr-s}{h-1}$, $\frac{hs-r}{h-1}$, $(h+1)\phi$ in r, s, ϕ, avremo finalmente:

$$p:q:r:s=u\omega:u\theta:z\phi\omega+v:z\phi\theta+v, \tag{7}$$

dove non è da dimenticarsi che le forme binarie u, v, ω, θ non sono affatto indipendenti fra loro, ma sodisfanno alle relazioni:

$$u=u'\varepsilon, \quad v=xyt, \quad \omega-\theta=2\varepsilon x, \quad \omega+\theta=2ay, \tag{8}$$

cioè u ed $\omega-\theta$ hanno un fattor comune di grado $n-1$, e v ha un fattor lineare comune con ciascuna delle forme $\omega-\theta$, $\omega+\theta$.

11. In virtù delle formole (7), la superficie gobba $[m, n]$ è rappresentata punto per punto sopra un piano, nel quale si considerino le x, y, z come coordinate. Alla sezione fatta nella superficie dal piano:

$$ar+bs+cp+eq=0 \tag{9}$$

corrisponde come imagine la curva d'ordine $m+n-1$:

$$z\phi(a\omega+b\theta)+(a+b)v+u(c\omega+e\theta)=0, \tag{10}$$

che passa pel punto $x=y=0$ con $m+n-2$ rami, de' quali $m-2$ toccano altrettante rette fisse, mentre le tangenti agli altri rami formano un gruppo di un'involuzione di grado n, projettiva a quella secondo cui le generatrici sono distribuite sulla superficie.

Le generatrici sono rappresentate dalle rette condotte pel punto $x=y=0$ nel piano rappresentativo. Queste rette sono, come or ora si è detto, aggruppate in un'involuzione di grado n; quelle di uno stesso gruppo, $c\omega+e\theta=0$, rappresentano n generatrici situate in uno stesso piano per M e concorrenti in uno stesso punto di M. L'involuzione ha $2(n-1)$ raggi doppi, dati dalla jacobiana $\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1$; essi rappresentano le generatrici singolari (ciascuna delle quali coincide con una generatrice infinitamente vicina), appoggiate alla direttrice M ne' punti cuspidali. La curva (6) ha $(m-1)(n-1)$ punti doppi (e la superficie altrettante generatrici doppie), a ciascun de' quali corrisponderanno due valori distinti del rapporto x, y; dunque ciascuna generatrice doppia sarà rappresentata da due rette distinte.

12. La curva:

$$Z\Phi(a\Omega+b\Theta)+(a+b)V+U(c\Omega+e\Theta)=0 \tag{10'}$$

avrà un nodo nel punto $(x\,y\,z)$, se saranno sodisfatte le tre equazioni:

$$\begin{aligned}
&z\phi(a\omega_1+b\theta_1)+(a+b)v_1+c(u\omega)_1+e(u\theta)_1=0,\\
&z\phi(a\omega_2+b\theta_2)+(a+b)v_2+c(u\omega)_2+e(u\theta)_2=0,\\
&a\omega\;+b\theta \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =0,
\end{aligned}$$

dalle quali, posto per brevità:

$$\begin{aligned} n\xi &= \omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1, \\ (m+n-1)\eta &= (u\theta)_1 v_2-(u\theta)_2 v_1, \\ (m+n-1)\zeta &= (u\omega)_2 v_1-(u\omega)_1 v_2, \end{aligned} \tag{11}$$

ed osservando essere:

$$(u\omega)_1(u\theta)_2-(u\omega)_2(u\theta)_1=(m+n-1)u^2\xi,$$

si ricavano i valori de' rapporti $a:b:c:e$

$$\begin{aligned} a &\equiv u^2\xi\theta, \\ b &\equiv -u^2\xi\omega, \\ c &\equiv -u\xi\theta z\phi-(\omega-\theta)\eta, \\ e &\equiv u\xi\omega z\phi-(\omega-\theta)\zeta. \end{aligned}$$

Sostituendoli nella (10)', e dividendo il risultato per $Xy-Yx$, si ottiene l'equazione della curva d'ordine $m+n-2$:

$$\Gamma\equiv u\xi(uZ\Phi-z\phi U)\frac{\theta\Omega-\omega\Theta}{Xy-Yx}-(\omega-\theta)\frac{u^2\xi V+U(\eta\Omega+\zeta\Theta)}{Xy-Yx}=0,$$

la direzione della quale nel punto $(x\ y\ z)$ è data dalla equazione differenziale:

$$\gamma_1 dx+\gamma_2 dy+\gamma_3 dz=0, \tag{12}$$

dove:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\equiv u\,\xi^2 z(u\phi_1-u_1\phi)+\frac{\omega-\theta}{m+n-1}\cdot\frac{\Delta}{2x}, \\ \gamma_2 &\equiv u\,\xi^2 z(u\phi_2-u_2\phi)-\frac{\omega-\theta}{m+n-1}\cdot\frac{\Delta}{2y}, \\ \gamma_3 &\equiv u^2\xi^2\phi; \end{aligned}$$

essendosi posto per brevità:

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_1 & (u\omega)_1 & (u\theta)_1 \\ v_2 & (u\omega)_2 & (u\theta)_2 \\ v_{12} & (u\omega)_{12} & (u\theta)_{12} \end{vmatrix}.$$

Ora si provano facilmente le identità:

$$\frac{\theta-\omega}{u^3\xi^2}\cdot\frac{\Delta}{x}=(m+n-1)\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_1,$$

$$\frac{\omega-\theta}{u^3\xi^2}\cdot\frac{\Delta}{y}=(m+n-1)\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_2;$$

per conseguenza avremo:

$$\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3=2z\left(\frac{\varphi}{u}\right)_1-\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_1:2z\left(\frac{\varphi}{u}\right)_2-\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_2:2\frac{\varphi}{u},$$

e la (12) diverrà:

$$2d\left(\frac{z\varphi}{u}\right)-d\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)=0;$$

ossia, avuto riguardo alle (8), (11):

$$d\left(\frac{z\varphi}{u}\right)-d\left\{\frac{\varepsilon(w_2v-wv_2)+2\varepsilon_2vw}{w^2\varepsilon\xi}\right\}=0.$$

Quindi integrando si ha:

$$z\varphi w\xi+\varepsilon(wv_2-w_2v)-2\varepsilon_2wv=kw^2\varepsilon\xi, \tag{13}$$

k costante arbitraria. Quest'equazione rappresenta un fascio di curve d'ordine $2m+n-3$ e di genere 0, aventi in $x=y=0$ un punto $(2m+n-4)$-plo colle tangenti comuni $\varphi w\xi=0$, fra le quali si trovano le $m-n$ rette $w=0$ rappresentanti quelle generatrici che coincidono nella direttrice multipla, e le $2(n-1)$ rette $\xi=0$ rappresentanti le generatrici singolari.

13. Eliminando z fra le (7) e la (13) si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned}
p &\equiv w^2\xi\omega,\\
q &\equiv w^2\xi\theta,\\
r &\equiv \omega(vw_2-wv_2)+2vw\omega_2+kw^2\xi\omega,\\
s &\equiv \theta(vw_2-wv_2)+2vw\theta_2+kw^2\xi\theta,
\end{aligned}$$

che danno le coordinate di una curva assintotica per ogni valore di k. Dunque le curve assintotiche di una superficie gobba $[m, n]$, avente le direttrici coincidenti, sono algebriche, di genere 0 e d'ordine $2m+n-2$. Esse hanno in comune i punti corrispondenti all'equazione $w^2\xi=0$, cioè toccano la direttrice negli $m-n$ punti ove una generatrice coincide colla direttrice medesima, e la segano nei $2(n-1)$ punti cuspidali. In tutti questi punti comuni hanno le stesse rette tangenti e gli stessi piani osculatori.

Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation.

(*par* H. SCHRAMM, *prof. à Wiener-Neustadt*).

MM. SYLVESTER et HERMITE discutèrent récemment la question, comment on pourrait employer les invariants comme critères pour juger la qualité des racines d'une équation du cinquième degré, et aussi ils en donnèrent la solution pour ce cas particulier.

Les résultats de ces géomètres diffèrent en quelque part; ainsi M. SYLVESTER trouve, p. e., que trois critères invariantifs suffisent pour reconnaître parfaitement la qualité des racines d'une équation du cinquième degré (*), pendant que M. HERMITE en indique quatre (**). Mais on voit pourtant que l'on peut employer les invariants mieux que toute autre fonction des coefficiens, pour trouver le nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique, puisque la transformation linéaire de l'équation n'altère ni la qualité de ses racines, ni le signe de ses invariants.

C'est précisément ce qui nous faisait étudier la question d'un point de vue plus général, en cherchant les moyens d'exprimer les critères des racines d'une équation de degré quelconque, par les invariants et les covariants de la forme qui, égalée à zéro, constitue l'équation même.

(*) *Philos. Transactions*, 1864, p. 641 et 643.

(**) *Cambridge and Dublin Journal*, t. 9, ou aussi dans le mémoire de M. SYLVESTER, p. 644.

I.

Les critères en forme de covariants.

On déduira les critères en question directement de la série de STURM. Etant donnée une équation algébrique homogène du $n^{\text{ième}}$ degré:

$$(a_0, a_1, \dots a_n \between x, y)^n = 0,$$

désignons par $p_1, p_2, \dots, p_n$ les termes constants de la dite série, que M. SYLVESTER a exprimés en fonction des différences des racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ de l'equation, savoir:

$$p_2 = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$
$$p_3 = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2, \text{ etc.}$$

on sait qu'il y aura autant de racines imaginaires dans l'équation, combien il y a de changements de signe dans la série $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. On supposera les deux termes $p_0 = a_0$, $p_1 = n a_0$ toujours positifs, et sous cette supposition nous ne nous occuperons que des autres termes de la série. Ces autres termes, excepté le dernier (le discriminant $p_n = D$), ne sont pas encore des invariants, et par conséquence on peut les transformer, en transformant l'équation par la substitution:

$$x = a x' + h y' \quad y = \eta x' - \xi y':$$

a, h, ξ, η désignant des quantités réelles quelconques. Cette substitution changera les valeurs de $p_2, p_3, \dots$, et leur argument $(\alpha_1 - \alpha_2)^2$ prendra la forme suivante:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2 = \frac{(h\eta + a\xi)^2 (y'_2 x'_2 - x'_1 y'_2)^2}{(\eta x'_1 - \xi y'_1)^2 (\eta x'_2 - \xi y'_2)^2}$$

ou, en désignant les racines de l'équation transformée par:

$$\frac{x'}{y'} = \beta_1, \quad = \beta_2, \quad = \beta_3, \dots$$

et nommant m le module de transformation:

$$\begin{vmatrix} a & h \\ \eta & -\xi \end{vmatrix} = m = h\eta + a\xi,$$

on aura: $$(\alpha_1-\alpha_2)^2=\frac{m^2(\beta_1-\beta_2)^2}{(\eta\beta_1-\xi)^2(\eta\beta_2-\xi)^2}.$$

De la même manière on transformera les autres différences, et les fonctions de M. Sylvester deviendront:

$$p_2=m^2\sum\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{(\eta\beta_1-\xi)^2(\eta\beta_2-\xi)^2},$$

$$p_3=m^6\sum\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{(\eta\beta_1-\xi)^2(\eta\beta_2-\xi)^2}\cdot\frac{(\beta_2-\beta_3)^2}{(\eta\beta_2-\xi)^2(\eta\beta_3-\xi)^2}\cdot\frac{(\beta_3-\beta_1)^2}{(\eta\beta_3-\xi)^2(\eta\beta_1-\xi)^2},\ \text{etc.}$$

En réduisant les termes de chaque somme $\sum$ au dénominateur commun, celui-ci sera toujours une puissance de:

$$M^2=(\eta\beta_1-\xi)^2(\eta\beta_2-\xi)^2\cdots(\eta\beta_n-\xi)^2,$$

et par conséquence toujours positif, ξ et η étant supposés réels. Mais puisque il ne s'agit que des signes des fonctions $p_2, p_3,..$, il nous sera permis d'omettre le facteur commun $m^{2s}: M^{2r}$ de tous les termes de la somme $\sum$, et prendre pour critères les fonctions suivantes:

$$C_2=\sum(\beta_1-\beta_2)^2(\eta\beta_3-\xi)^2(\eta\beta_4-\xi)^2\ldots(\eta\beta_n-\xi)^2,$$
$$C_3=\sum(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\eta\beta_4-\xi)^4\ldots(\eta\beta_n-\xi)^4,\ \text{etc.}$$

Maintenant il faut prouver que ces fonctions désignées ici par C_2, C_3.., en supposant ξ et η variables, sont autant de covariants de l'équation transformée, laquelle après la transformation contient les racines $\beta_1, \beta_2,..,\beta_n$.

Démonstration. En substituant pour $(\alpha_1-\alpha_2)^2$,... leurs valeurs transformées, dans les fonctions p_2, p_3,..., chacune de celles-ci formera une somme de fractions, et chaque fraction aura au numérateur et au dénominateur les mêmes racines, et au même nombre. En réduisant ensuite ces fractions au dénominateur commun M^{2r}, qui contient toutes les racines à la puissance $2r$, on multipliera chaque numérateur par les facteurs $(\eta\beta-\xi)$ de M^{2r}, exceptés ceux qui sont contenus dans le dénominateur de la fraction.

Ainsi on complètera le nombre de racines dans chaque numérateur; et les fonctions C, qui sont des sommes symétriques, auront dans chaque terme toutes les racines, et chacune au degré $2r$.

Mais on sait qu'une fonction de la forme C_2, C_3,.., douée de cette propriété, est en même temps un covariant d'une forme avec les racines $\beta_1, \beta_2,..,\beta_n$. C'est ce que nous avions à démontrer.

On voit de plus, qu'il est permis de substituer au lieu de ces covariants ceux de la forme primitive:

$$(a_0, \ a_1, \dots a_n \between x, y)^n,$$

en changeant dans les fonctions C les racines β en α, car la transformation réelle linéaire n'altère pas la qualité des racines d'une équation algébrique:

$$C_2 = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\eta \alpha_3 - \xi)^2 (\eta \alpha_4 - \xi)^2 \dots (\eta \alpha_n - \xi)^2,$$
$$C_3 = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\eta \alpha_4 - \xi)^4 \dots (\eta \alpha_n - \zeta)^4,$$
$$C_4 = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_4 - \alpha_1)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2 (\eta \alpha_5 - \xi)^6 \dots (\eta \alpha_n - \xi)^6, \text{ etc.}$$

Il faudra encore prouver que les quantités ξ et η, supposées variables, sont indépendantes l'une de l'autre, même si l'on admet les racines β égales aux racines α. Cela résulte sans difficulté de la substitution:

$$x = ax' + hy', \quad y = \eta x' - \xi y'.$$

Or, en admettant qu'on ait posé:

$$x = x', \quad y = y',$$

il en résulterait la condition:

$$\eta = \frac{1-a}{h}(1+\xi),$$

mais il est aisé de voir que, même dans ce cas particulier, ξ et η restent indépendantes l'une de l'autre, parceque a et h, n'ayant aucune influence sur les covariantes C, peuvent varier sans limites.

Il est donc prouvé que ξ et η sont des variables indépendantes, et que l'on peut substituer au lieu des covariants de la forme transformée, ceux de la primitive. C'est ce qui nous conduit au résultat suivant:

La série de Sturm *peut être remplacée par la suite des covariants:*

$$+, \ C_2, \ C_3, \dots, \ C_{n-1}, \ D,$$

en désignant par D le discriminant, et chaque changement de signe dans cette série correspondera à une paire de racines imaginaires dans l'équation.

Le premier terme C_2 est le covariant de M. Hesse; il faut donc ajouter aux propriétés nombreuses et remarquables de cette fonction encore la suivante:

Si le covariant Hessien d'une forme binaire du $n^{\text{ième}}$ degré a des racines réelles, la forme primitive aura au moins une ou deux paires de racines imaginaires, selon que le discriminant D de la même forme est négatif ou positif.

Cet énoncé, la vérité duquel découle sans peine de la propriété de la série de STURM, subsiste même pour les autres covariants $C_3, C_4, \ldots, C_{n-1}$.

Nous allons maintenant calculer les degrés de ces covariants en ξ et η et aussi leurs degrés dans les coefficiens de la forme primitive.

On y parvient de la manière suivante. Soit p. e.

$$C_r = c_0\xi^{2m} - 2mc_1\xi^{2m-1}\eta + \ldots - 2mc_{2m-1}\xi\eta^{2m-1} + c_{2m}\eta^{2m}$$

un de ces covariants, qu'on ait obtenu par la transformation linéaire du terme p_r; il est évident que son premier coefficient c_0 sera egal à p_r, parcequ'en faisant $\eta = 0$, on a:

$$C_r = \xi^{2m}\sum(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2\ldots = p_r\xi^{2m}.$$

M. CAYLEY a donné la valeur de p_r en forme de déterminant:

$$c_0 = p_r = -\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2r-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{2r-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \ldots & (n-2r+2)a_{2r-2} \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & (n-2r+1)a_{2r-1} \\ a_1 & 2a_2 & 3a_2 & \ldots & 2ra_{2r} \end{vmatrix}$$

(les coefficiens $a_0, a_1, \ldots$ étant supposés ici sans coefficiens binomiaux).

Le premier coefficient étant donné, on déduira de celui-ci les autres au moyen de l'opération indiquée par M. CAYLEY dans ses «*Memoirs upon quantics*» par le symbole:

$$c_1 = \left[na_1\frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1)\,a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}\right]c_0.$$

Par cette opération, la somme des indices de chaque coefficient successif c augmentera d'une unité, et nous n'aurons qu'à former la différence des sommes d'indices du premier et du dernier coefficient c_{2m}, pour avoir le degré des fonctions C_r en ξ et η.

Or dans le déterminant $p_r=c_0$ on trouve la somme des indices égale à $r(r-1)$. Le dernier coefficient c_{2m} se déduira du premier en y écrivant a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, .., a_0 au lieu de a_0, a_1, a_2, .., a_n, car ce changement des coefficiens de la forme originale produira un changement semblable dans les coefficiens du covariant, de manière que $c_{2m}=p_r'$ prendra la place de c_0. Il en résultera:

$$p_r'=c_{2m}=-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2r+1} \\ 0 & a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n a_n & (n-1)a_{n-1} & \cdot & \cdot & & & & (n-2r+1)a_{n-2r+1} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 2r a_{n-2r} \end{vmatrix}$$

En formant la part littérale d'un terme quelconque de ce déterminant, p. e. le produit des lettres de la diagonale, savoir:

$$k.(a_n)^{r-1} a_{n-2} . a_{n-4} \ldots a_{n-2r} ,$$

la somme des indices y sera:

$$n(r-1)+n(r-1)-r(r-1) = (2n-r)(r-1)$$

et par conséquence le degré $2m$ de la fonction C_r en ξ, η sera:

$$2m=(2n-r)(r-1)-r(r-1)=2(n-r)(r-1).$$

Ainsi on trouvera dans le même déterminant p_r le degré de C_r en a_0, a_1, a_2...

$$=2(r-1).$$

Tout cela nous permet de calculer le dit covariant pour un degré particulier de l'équation algébrique.

Les équations du troisième degré ont un seul critère covariantif, c'est leur covariant Hessien:

$$C_2=(a_1^2-a_0a_2)\xi^2+(a_1a_2-a_0a_3)\xi\eta+(a_2^2-a_1a_3)\eta^2 ,$$

et s'il y a des valeurs de ξ et η, pour lesquelles C_2 prend le signe négatif, il y aura en même temps deux racines imaginaires dans l'équation. C'est ce que l'on sait déjà d'ailleurs.

Les équations du quatrième degré:

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4=0$$

ont les critères suivants:

$$C_2=(a_1^2-a_0a_2)\xi^4+2(a_1a_2-a_0a_3)\xi^3\eta+(3a_2^2-2a_1a_3-a_0a_4)\xi^2\eta^2+2(a_2a_3-a_1a_4)\xi\eta^3$$
$$+(a_3^2-a_2a_4)\eta^4,$$

$$C_4=(a_0^2a_2a_4-a_0a_1^2a_4+6a_1^2a_2^2-9a_0a_2^3+14a_0a_1a_2a_3-8a_1^3a_3-3a_0^2a_3^2)\xi^4$$
$$+4(a_0a_1a_3^2+4a_0a_1a_2a_4-3a_0a_2^2a_3-a_0^2a_3a_4-3a_1^3a_4+2a_1^2a_2a_3)\xi^3\eta$$
$$+2(2a_0a_1a_3a_4+9a_0a_2^2a_4-9a_0a_2a_3^2-a_0^2a_4^2+8a_1^2a_3^2-9a_1^2a_2a_4)\xi^2\eta^2$$
$$+4(4a_0a_2a_3a_4-a_0a_1a_4^2-3a_0a_3^3+a_1^2a_3a_4-3a_1a_2^2a_4+2a_1a_2a_3^2)\xi\eta^3$$
$$+\ (a_0a_2a_4^2-a_0a_3^2a_4-3a_1^2a_4^2+14a_1a_2a_3a_4-8a_1a_3^3-9a_2^3a_4+6a_2^2a_3^2)\eta^4.$$

Pour la forme reduite:

$$x^4+6mx^2y^2+y^4=0,$$

on aura les mêmes covariants en forme canonique:

$$C_2=-m\xi^4+(3m^2-1)\xi^2\eta^2-m\eta^4,$$
$$(*)\quad C_3=(1-9m^2)(m\xi^4-2\eta^2\xi^2+m\eta^4).$$

Les équations du cinquième degré ont trois critères covariantifs; en les désignant par C_2, C_3, C_4, ils auront les degrés 6, 8, 6 en ξ et η et les degrés 2, 4, 6 en a_0, $a_1, \ldots, a_n$.

Nous ne présentons que les deux premiers en forme développée, parceque le troisième prend des dimensions trop considérables, sans offrir un intérêt particulier:

$$C_2=(a_1^2-a_0a_2)\xi^6+3(a_1a_2-a_0a_3)\xi^5\eta+3(2a_2^2-a_1a_3-a_0a_4)\xi^4\eta^2+(8a_2a_3-7a_1a_4-$$
$$-a_0a_5)\xi^3\eta^3+3(2a_3^2-a_2a_4-a_1a_5)\xi^2\eta^4+3(a_3a_4-a_2a_5)\xi\eta^5+(a_4^2-a_3a_5)\eta^6,$$
$$C_3=c_0\xi^8+4c_1\xi^7\eta+2c_2\xi^6\eta^2+4c_3\xi^5\eta^3+c_4\xi^4\eta^4+4c_5\xi^3\eta^5+2c_6\xi^2\eta^6+4c_7\xi\eta^7+c_8\eta^8.$$

(*) L'invariant du second degré de la fonction C_3 est $=\frac{1}{3}(1-9m^2)^2(1+3m^2)=\frac{1}{3}D.I_2$.
L'invariant du troisième degré » » $=\frac{1}{27}(1-9m^2)^2=\frac{1}{27}D$.

Les coefficiens c_0, $c_1, .., c_8$ ont les valeurs suivantes:

$$c_0 = 4a_0^2a_2a_4 - 9a_0a_3^2 + 38a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_1^2a_4 - 24a_0a_2^3 - 20a_1^3a_3 + 15a_1^2a_2^2,$$

$$c_1 = 21a_0a_1a_2a_4 + 6a_0a_1a_3^2 + 10a_1^2a_2a_3 - 15a_1^3a_4 - 16a_0a_2^2a_3 - 6a_0^2a_3a_4 + a_0^2a_2a_5 - a_0a_1^2a_5,$$

$$c_2 = 60a_1^2a_3^2 - 55a_1^2a_2a_4 + 27a_0a_1a_3a_4 + 23a_0a_1a_2a_5 - 20a_1^3a_5 + 52a_0a_2^2a_4 - 72a_0a_2a_3^2 -$$
$$- 3a_0^2a_3a_5 - 12a_0^2a_4^2,$$

$$c_3 = 35a_1^2a_3a_4 - 30a_1^2a_2a_5 - 30a_1a_2^2a_4 + 20a_1a_2a_3^2 + 11a_0a_1a_3a_5 - 11a_0a_1a_4^2 + 24a_0a_2^2a_5 +$$
$$+ 22a_0a_2a_3a_4 - 36a_0a_3^3 - 5a_0^2a_4a_5,$$

$$c_4 = 3a_1^2a_4^2 - 30a_1a_2^2a_5 + 58a_1a_2a_3a_4 - 24a_1a_3^3 - 10a_0a_1a_4a_5 - 24a_2^3a_4 + 16a_2^2a_3^2 +$$
$$+ 42a_0a_2a_3a_5 - 30a_0a_3^2a_4 - a_0^2a_5^2,$$

$$c_5 = 22a_1a_2a_3a_5 - 11a_1^2a_4a_5 - 30a_1a_3^2a_4 - 5a_0a_1a_5^2 + 35a_1a_2a_4^2 - 36a_2^3a_5 + 20a_2^2a_3a_4 +$$
$$+ 11a_0a_2a_4a_5 + 24a_0a_3^2a_5 - 30a_0a_3a_4^2,$$

$$c_6 = 60a_2^2a_4^2 - 55a_1a_3a_4^2 + 27a_1a_2a_4a_5 + 23a_0a_3a_4a_5 - 20a_0a_4^3 + 52a_1a_3^2a_5 - 72a_2^2a_3a_5 -$$
$$- 3a_0a_2a_5^2 - 12a_1^2a_5^2,$$

$$c_7 = 21a_1a_3a_4a_5 + 6a_2^2a_4a_5 + 10a_2a_3a_4^2 - 15a_1a_4^3 - 16a_2a_3^2a_5 - 6a_1a_2a_5^2 + a_0a_3a_5^2 - a_0a_4^2a_5,$$

$$c_8 = 4a_1a_3a_5^2 - 9a_2^2a_5^2 + 38a_2a_3a_4a_5 - 4a_1a_4^2a_5 - 24a_3^3a_5 - 20a_2a_4^3 + 15a_3^2a_4^2.$$

Les coefficiens de ce covariant C_3 ont été développés au moyen de l'opération

$$\left(5a_1\frac{\partial}{\partial a_0} + 4a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial}{\partial a_2} + 2a_4\frac{\partial}{\partial a_3} + a_5\frac{\partial}{\partial a_4}\right) c_0,$$

jusqu'au coefficient c_5 incl. Les autres c_6, c_7, c_8 ont été déduits des premiers c_2, c_1, c_0 par le changement des lettres $a_0, a_1, .., a_5$ en $a_5, a_4, .., a_0$. Le coefficient c_5, qui a été déduit de deux manières différentes, savoir directement du premier c_0, et aussi par le changement des lettres en c_3, donna une garantie pour l'exactitude du calcul.

II.

Les critères en forme d'invariants.

Passons à la seconde partie du problème, en cherchant les invariants, qui peuvent indiquer par leurs signes le nombre de racines imaginaires d'une équation algébrique.

La première voie d'y parvenir nous est offerte par la discussion des discriminants des susdits covariants; en nommant ces discriminants:

$$\Delta_2, \quad \Delta_3, \ldots, \Delta_r,$$

on trouvera facilement qu'ils auront les degrés respectifs:

$$4.1\{2(n-2)-1\}, \quad 4.2\{2.2(n-3)-1\}, \ldots, 4(r-1)\{2(r-1)(n-r)-1\}.$$

Un théorème bien connu nous dit que l'invariant d'un covariant est en même temps un invariant de la forme primitive, et par conséquence les discriminants Δ, ou leurs facteurs, seront des invariants de l'équation donnée. On aura donc à consulter les signes de ces discriminants; et pour faciliter la discussion, nous prouverons d'abord les théorèmes suivants.

1.° Si le discriminant D de la forme primitive, est un facteur du discriminant Δ_2, il sera de même un facteur des autres discriminants $\Delta_3, \quad \Delta_4, \ldots, \Delta_{n-1}$.

Démonstration. Supposé qu'il y ait dans l'équation donnée toutes les racines réelles, la série:

$$+, \quad C_2, \quad C_3 \ldots, C_{n-1}, \quad D,$$

doit avoir tous les termes positifs, et afin que cela soit possible pour chaque valeur de ξ et η, il faut que les équations:

$$C_2=0, \quad C_3=0, \ldots, C_{n-1}=0$$

aient toutes les racines imaginaires.

Supposons ensuite dans l'équation primitive une seule paire de racines imaginaires; D changera de signe; et de même Δ_2, dont D est un facteur. Mais ce changement de signe de Δ_2 indique que:

$$C_2 = 0$$

n'a plus toutes les racines imaginaires, et par conséquence C_2 prendra pour certaines valeurs de ξ et η le signe négatif, et C_2 étant négatif, il faut nécessairement que les autres termes de la série: $C_3\ C_4, \ldots, C_{n-1}$ soient de même négatifs, parceque selon notre présupposition il n'y a qu'une seule paire de racines imaginaires dans l'équation donnée.

Cela mène à la conclusion que dans le même moment où le discriminant Δ_2 passe par zero, aussi les autres discriminants $\Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_{n-1}$ passeront par zéro, ce qui, en général, aura lieu lorsqu'il y a dans tous ces discriminants le facteur commun D.

2.° Si le discriminant Δ d'une fonction C a la forme:

$$\Delta = K^2 . D . I,$$

I désignant un invariant de la forme primitive, cet invariant indiquera par son signe négatif l'existence de $4t$ racines imaginaires dans l'équation donnée.

Démonstration. En effet, en supposant toutes les racines de celle-ci réelles, on aura $D = +$, $I = +$ et $\Delta = \pm$, et C ne peut pas changer le signe. Mais si l'on trouve dans un autre cas: $D = +$, $I = -$, on aura $\Delta = \mp$; Δ ayant changé le signe, C ne peut plus avoir toutes ses racines réelles et par conséquent elle peut prendre pour quelque valeur de ξ et η le signe négatif; mais D étant positif, le série des critères aura au moins deux changements de signe, ce qui nous indique deux paires (au moins) de racines imaginaires dans l'équation.

L'application de ces propositions à la discussion des équations de degré particulier nous offre les résultats suivants.

Les équations du troisième degré n'ont qu'un seul critère invariantif, c'est leur discriminant D, car le discriminant Δ du covariant Hessien, est $\Delta = -D$.

Ce cas particulier nous confirme ce que nous avons dit là haut des covariants Hessiens en general: si D est positif, Δ est négatif, et $C_2 = 0$ n'a que des racines imaginaires. Si D est négatif, Δ est positif, et C_2 peut changer le signe et devenir négatif. C'est ce qui nous montre la possibilité d'employer C_2 comme critère des racines d'une équation du troisième degré.

Les équations du quatrième degré donnent pour les discriminants de C_2, C_3, les valeurs suivantes:

$$\Delta_2 = \tfrac{1}{4} m^2 (1-m^2)^2 (1-9m^2)^2 = \tfrac{1}{4} D . I_3^2 ,$$

$$\Delta_3 = m^2 (1-m^2)^2 (1-9m^2)^6 = D^3 . I_3^2 .$$

Ces discriminants changeront leur signe avec celui du discriminant D.

Il est pourtant remarquable que ces discriminants Δ_2 et Δ_3 n'indiquent pas la présence de quatre racines imaginaires dans l'équation, et il est très probable que, le discriminant D excepté, il n'y ait pas de critères invariantifs pour la nature des racines d'une équation du quatrième degré. C'est ce que nous verrons confirmé plus tard, d'une manière plus évidente.

Les critères invariantifs d'une équation du cinquième degré ont des dimensions très grandes. Les discriminants Δ_2, Δ_3, et Δ_4 ont les degrés respectifs 20, 56, 60 dans les coefficients.

Le premier Δ_2 est de la forme:

$$\Delta_2 = -D I_{12} ,$$

I_{12} signifiant l'invariant élémentaire du 12ème degré. Nous avons réussi d'en calculer la valeur, en posant $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ dans le covariant C_2, comme dans les invariants de la forme du cinquième degré, qu'on trouve dans le «*second Memoir upon quantics*» de M. Cayley (Phil. Transactions 1856). Par rapport à ce qui a été énoncé dans la seconde proposition (page 268), on voit que D étant positif et I_{12} negatif, il y a quatre racines imaginaires dans l'équation. Car Δ_2 sera alors positif et l'équation $C_2 = 0$, étant du sixième degré et ayant le discriminant positif, aura 2 ou 6 racines réelles, et C_2 peut avoir pour certaines valeurs de ξ et η le signe négatif. Mais la série de critères covariantifs $+$, C_2, C_3, C_4, D
aura les signes: $+$ $-$ $\cdot$ $\cdot$ $+$
et les deux changements de signe indiquent deux paires de racines imaginaires. Nous n'irons pas à discuter les autres discriminants, parceque, même si l'on aurait la possibilité d'en déduir les valeurs pour une équation du cinquième degré, cela n'irait plus pour les degrés supérieurs.

On voit de plus que cette manière de discussion ne permet pas de constater si les invariants trouvés comme ça changent aussi leur signe dans le même moment, où l'équation donnée reçoit une certaine quantité de racines imaginaires. Il faudra donc prendre une autre voie pour arriver à des résultats précis et plus généraux, et nous verrons qu'il y a réellement une méthode plus simple pour calculer le degré et la forme des critères invariantifs pour une équation de degré quelconque. L'idée du procédé sera la suivante:

Un invariant, qui par son changement de signe indique l'existence de $2s$ racines imaginaires dans l'équation, doit passer par zéro dans le moment où ces racines, supposées réelles, sont deux à deux égales, et le même invariant doit prendre le signe négatif, quand ces $2s$ racines deviennent imaginaires.

En examinant un invariant, représenté en fonction des différences des racines:

$$I=\sum(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots,$$

il faut qu'on se propose le problème suivant:

Il est à déterminer la forme et le degré d'un invariant, qui contient dans chaque membre de la somme $\sum$ un nombre limité des différences $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_3-\alpha_4,..$, ou, ce qui revient au même, auquel manquent dans chaque membre de la somme $\sum$, $s-1$ différences des dites racines.

Un tel invariant se réduira à zéro pour:

$$\alpha_1-\alpha_2=0\,,\ \alpha_3-\alpha_4=0\,,\ldots,\alpha_{2s-1}-\alpha_{2s}=0\,,$$

parceque chaque terme de la somme $\sum$ aura alors au moins une de ces différences en facteur.

Parmi ces invariants on choisira pour critères ceux qui changent le signe aussitôt que ces $2s$ racines deviennent imaginaires.

On sait de plus qu'une fonction symétrique des différences des racines est un invariant, quand il y a dans chaque terme toutes les racines de l'équation et chacune d'elles au même degré.

Cela premis, cherchons la manière la plus simple à former, avec les n racines d'une équation, des produits de la forme:

$$A=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\,,$$

lesquels contiennent chaque racine au même nombre de fois. Mais il est évident que ces produits aurons pour n pair la forme:

$$A=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n),$$

et pour n impair la forme:

$$B=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)\dots(\alpha_n-\alpha_1),$$

A contenant chaque racine une fois, et B deux foix.

De même on trouvera le nombre N des combinaisons différentes, qu'on peut faire des n racines données:

pour $n=2m$ il y a $N_1=\frac{2m!}{2.^m m!}=\frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots(m+1)}{2^m}$ produits de la forme A, et pour $n=$ impair il y a $N_2=\frac{n!}{2n}=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\dots 2.1$ produits différents de la forme B. En considérant A ou B comme les éléments d'un invariant, celui-ci aura la forme:

$$I=\sum A_1A_2A_3\dots A_p,$$

et pour n pair il aura le degré p, pour n impair le degré $2p$.

Il faut maintenant que ces invariants correspondent à la condition, qu'il y manque dans chaque terme de la somme $\sum$ le même nombre $s-1$ de différences des racines.

Faisons $s-1=r$ et supposons d'abord $r=3$. Admis que dans un certain terme y manquent les différences des racines (en désignant $\alpha_1-\alpha_2$ par 12 etc...)

$$(12),\ (34),\ (56),$$

alors il n'y aura que:

(a) les différences formées des premières racines, 1, 2, ... 6, exceptées les trois susdites, savoir:

$$\left.\begin{matrix}13 & 14 & 15 & 16\\ 23 & 24 & 25 & 26\\ 35 & 36 & & \\ 45 & 46 & & \end{matrix}\right\}\ \begin{aligned}&\text{leur nombre sera}=\tbinom{6}{2}-3\,,\\ &\text{ou en général pour } r \text{ différences absentes}\\ &\qquad=\binom{2r}{2}-r=2r(r-1)\,;\end{aligned}$$

(b) des différences contenant une seule des racines 1, 2, 3,... 6

$$\left.\begin{matrix}17,\ 18,\ 19,\dots(1n)\\ 27,\ 28,\ \dots\ .(2n)\\ \dots\dots\dots\\ 67,\ 68,\ \dots\ .(6n)\end{matrix}\right\}\ \begin{aligned}&\text{en nombre de } 6(n-6)\\ &\text{ou en général} = 2r(n\text{-}2r) \text{ différences;}\end{aligned}$$

(c) des différences qui ne contiennent aucune des racines 1, 2,...6

$$\left.\begin{matrix} 78,\ 79,\ldots 7n \\ 89,\ \ldots\ldots 8n \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\}\text{leur nombre est en général}=\binom{n-2r}{2}=\frac{(n-2r)(n-2r-1)}{1\ .\ 2}$$

En supposant encore que chaque différence de (a) ait l'exposant x,

» » » » (b) » » y,

» » » » (c) » » z,

chaque racine doit se présenter p fois dans l'invariant, et prenant une des racines 1, 2, 3,..,(2r), p. e. la racine 1, on la trouvera

dans les différences $(a)\ldots 2(r-1)$ fois,

» » » $(b)\ldots(n-2r)$ fois,

» » » $(c),\ldots\ldots\ 0$ fois,

ce qui donne la condition:

$$2(r-1)x+(n-2r)y=p\ .$$

De même, on voit qu'une autre des racines $(2r+1),..,(n)$ se presente en $(b)\ldots 2r$ fois, en $(c)\ldots(n-2r-1)$ fois; ce qui donne la seconde condition:

$$2ry+(n-2r-1)z=p.$$

Il en résulte que les nombres entiers et positifs x, y, z et p, déterminés par les deux équations:

$$2(r-1)x+(n-2r\quad)y=p\ ,$$

$$2ry+(n-2r-1)z=p\ ,$$

nous indiquent la forme et le degré p des invariants dans les termes desquelles manquent chaque fois r différences des racines $\alpha_1\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Les valeurs de x, y, z, qui doivent être différentes de zéro, donnent les exposants des différences désignées en (a), (b) et (c), et l'invariant même aura la forme:

$$I_p^{(r)}=\sum(\alpha_1-\alpha_3)^x\ldots(\alpha_{2r-2}-\alpha_{2r})^x(\alpha_1-\alpha_{2r+1})^y\ldots(\alpha_{2r}-\alpha_n)^y(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r+2})^z\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^z.$$

Il faut encore chercher les conditions sous lesquelles les invariants $I_p^{(r)}$ changent le signe en passant par zéro, et il faut de plus qu'on s'assure si, étant positifs pour $2s<2r+2$ racines imaginaires, ils restent négatifs pour $2s \geqq 2r+2$ racines imaginaires de l'équation.

En supposant ces $2s$ racines de la forme:

$$\alpha_1=p_1+q_1\sqrt{-1}\,, \qquad \alpha_3=p_2+q_2\sqrt{-1}\,,\ldots$$
$$\alpha_2=p_1-q_1\sqrt{-1}\,, \qquad \alpha_4=p_2-q_2\sqrt{-1}\,,\ldots$$

il est évident que pour $2s \geqq 2r+2$ et faisant:

$$q_1=q_2=q_3=\ldots q_{r+1}=0\,.$$

ces racines deviennent deux à deux égales. ce qui donne:

$$\alpha_1-\alpha_2=0\,. \qquad \alpha_3-\alpha_4=0\,,\ldots,\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r+2}=0\,,$$

et l'invariant $I^{(r)}$, ayant dans chaque terme au moins une de ces différences, se réduira à zéro.

C'est ce qui aura lieu aussi pour un nombre $2s$ de racines, plus grand de $2(r+1)$, étant celles-ci deux à deux égales.

Ensuite, en admettant que les quantités imaginaires q augmentent indéfiniment, et posant:

$$q_1=q_2=\ldots q_s=\pm\infty\,,$$

l'invariant $I_p^{(r)}$ aura le signe de la plus haute puissance de $q\sqrt{-1}$ dans les produits développés des différences $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_3-\alpha_4,\ldots.$ Soit $(q\sqrt{-1})^{\mu}$ cette puissance plus élevée; il faudra calculer la valeur de μ pour un nombre donné $2s$ de racines imaginaires. Dans ce but, on cherchera d'abord le terme de la somme $\sum$, contenant cette puissance $(q\sqrt{-1})^{\mu}$. En considérant p. e. deux de ces différences de quatre racines imaginaires:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\,,$$

on voit que leur produit donne des puissances inférieures à celles qui résultent du produit:

$$(\alpha_1-\alpha_{2s+1})(\alpha_2-\alpha_{2s+2})(\alpha_3-\alpha_{2s+3})(\alpha_4-\alpha_{2s+4})\,,$$

où il y a les mêmes racines imaginaires, mais séparées et combinées avec des racines réelles $\alpha_{2s+1}\ldots$ Il faut donc qu'on cherche $(q\sqrt{-1})^{\mu}$ dans un terme de la somme $\sum$, où il y ait le plus petit nombre des racines imaginaires combinées deux à deux dans les mêmes différences, ce qui aura lieu en général dans le terme de l'invariant $I^{(r)}$, où manquent les différences:

$$\alpha_1-\alpha_2 \,.\, \alpha_3-\alpha_4 \,.\,.\,.\,.\, \alpha_{2s-1}-\alpha_{2s}\,,\,.\,.\,,\, \alpha_{2r-1}-\alpha_{2r}\,.$$

Cela prémis, passons à calculer la valeur de μ.

1. Pour $2s < 2r+2$ racines imaginaires.

Nous repartirons les différences des racines, comme auparavant, en trois classes, (a), (b), (c) (voir la page 271). Dans la première classe (a) il y aura $2r(r-1)-2(r-s)(r-s-1)=2s(2r-s-1)$ differences imaginaires, car on sait que les combinaisons des dernières $2r-2s$ racines seules sont réelles.

Dans la classe (b) on aura $2s(n-2r)$ différences imaginaires, savoir les combinaisons des premières $2s$ racines imaginaires avec les dernières $n-2r$ racines réelles.

Les différences en (c) sont toutes réelles.

Mais chaque différence en (a) ayant l'exposant x, et en (b) l'exposant y. on aura:

$$\mu_1 = 2s(2r-s-1)x + 2s(n-2r)y\;.$$

2. De la même manière on obtient la valeur de μ pour:

$$2s \gtreqqless 2r+2\,,$$

en posant $$2s = 2r + 2\sigma\,,$$

Les différences en (a) seront entièrement imaginaires et leur nombre $=2r(r-1)$. De même (b) donne un nombre $2r(n-2r)$ de différences imaginaires. Dans (c) il y aura autant de différences imaginaires, qu'il y aura de binomes formés de 2σ racines imaginaires seules, et de celles-ci avec les autres $n-2r-2\sigma$ racines réelles; en tout: $\sigma(2\sigma-1)+2\sigma(n-2r-2\sigma)=\sigma(2n-4r-2\sigma-1)$; et par conséquent la valeur de μ sera:

$$\mu_2 = 2r(r-1)x + 2r(n-2r)y + \sigma(2n-4r-2\sigma-1)z.$$

Ces deux équations pour μ_1 et μ_2 nous permettent de discuter les invariants $I^{(r)}$; et pour faciliter cette discussion, nous la dividerons en deux parties, savoir pour n pair, et pour n impair.

1^er^ cas: $n=2m$; si $2s<2r+2$, $\mu=\mu_1$. Pour une valeur quelconque de x et de y, l'exposant μ aura toujours la forme $\mu_1=4t$, et l'invariant $I^{(r)}$ aura pour $q_1 = q_2 \ldots q_s = \pm\infty$ le signe positif, étant $(q\sqrt{-1})^{4t} = +q^{4t}$, quel que soit le nombre $2s$ des racines imaginaires. De même, il n'est pas possible que $I^{(r)}$ s'évanouisse quand on admet

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \ldots q_{s_1} = 0,$$

étant $s_1 \leqq r$, parceque le terme contenant la puissance plus haute $(q\sqrt{-1})^{\mu}$ ne contient aucune des différences:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \ldots,$$

et par conséquent l'invariant $I^{(r)}$ reste positif pour $2s < 2r+2$ racines imaginaires dans l'équation.

S'il y a $2s \geqq 2r+2$, ou $2s = 2r+2\sigma$ racines imaginaires dans l'équation, l'exposant plus haut prend la valeur:

$$\mu_2 = 2r(r-1)x + 4r(m-r)y + \sigma(4m-4r-2\sigma-1)z.$$

Les deux premiers termes ont la forme $4t$, et le signe de $(q\sqrt{-1})^{\mu^2}$ dépendra seulement du troisième, et afin que l'invariant $I^{(r)}$ puisse prendre le signe negatif, il faut qu'on ait:

$$\sigma(4m-4r-2\sigma-1)z = 4t' + 2 .$$

Il faudra donc choisir parmi les invariants $I^{(r)}$, pour critères des racines, ceux qui ont en même temps:

$$z = 4t'' + 2.$$

Ceci admis, les invariants auront le signe négatif pour σ impair, c'est à dire quand il y a:

$$2(r+1), \quad 2(r+3), \quad 2(r+5), \ldots$$

racines imaginaires dans l'équation. Pour σ pair ils seront positifs, parceque μ prend alors la forme $4t$; toujours en supposant les quantités q très grandes.

2ème cas. En admettant n impair, et $2s < 2r+2$, on aura $\mu = \mu_1$. Le premier terme $2s(2r-s-1)$ dans la valeur de μ_1 a toujours la forme $4t$, et en faisant la supposition

$$y = 4t' + 2,$$

μ_1 aura la forme $4t$, et l'invariant $I^{(r)}$ restera positif pour toute valeur de r, et $2s < 2r+2$.

Pour $2s \geqq 2r+2$, en posant $2s=2r+2\sigma$, on aura les mêmes conséquences comme dans le 1^er cas, c'est-à-dire qu'en admettant $z=4t'+2$, l'exposant μ sera μ_2, et $(q\sqrt{-1})^{\mu_2}$ sera négatif pour σ impair, positif pour σ pair.

Le résumé de tout cela mène au théorème suivant:

Les invariants $I_p^{(r)}$ déterminés par les équations:

$$2(r-1)x+(n-2r-1)z=p\,,$$

$$2ry+(n-2r-1)z=p\,,$$

$$z=4t+2$$

fourniront les critères pour le nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique. En les désignant par:

$$I^{(0)}=D\,,\quad I^{(1)},\quad I^{(2)},\ldots,I^{(r)},\ldots,I^{(s)}\,,$$

si r est l'index le plus haut de l'invariant $I^{(r)}$ ayant le signe négatif, on en déduira qu'il y a $2(r+1)$ racines imaginaires dans l'équation. De même pour $I^{(r)}=0$, l'équation aura $2(r+1)$ paires de racines égales.

Ces invariants ressemblent en quelque part au discriminant D, en considérant qu'ils sont négatifs pour $2r+(4\sigma+2)$ et positifs pour $2r+4\sigma$ $\Big\}$ racines imaginaires.

La démonstration de la dernière partie de ce théorème n'est pas encore complète, car le changement de signe des invariants $I^{(r)}$, en y supposant $2s>2r+2$ racines imaginaires, n'est évident que pour des valeurs très grandes de q_1, q_2,.., mais pas pour une valeur quelconque de ces quantités imaginaires, et il n'en est pas constaté qu'elles ne changent plusieurs fois leur signe. Aussi faudrait-il encore chercher les indices invariantifs dans les cas, où les invariants $I^{(r)}$ s'évanouissent. C'est ce qui restera encore à préciser.

Pour montrer l'application de tout cela à la discussion des équations d'un degré particulier, il faudra résoudre les équations de condition:

$$2(r-1)x+(n-2r)y=p\,,$$

$$2ry+(n-2r-1)z=p\,,$$

$$z=4t+2\,.$$

On en trouve une solution générale pour $r=1$.

Dans ce cas, il est:

$$y=\frac{p}{n-2}, \qquad \frac{2p}{n-2}+(n-3)z=p,$$

et ensuite :

$$z=\frac{p(n-4)}{(n-2)(n-3)}.$$

Il faut que p soit un nombre entier et on posera:

$$p=(n-2)(n-3)K,$$

en désignant par K un nombre positif et entier. En substituant cela dans les équations précédentes, on aura:

$$y=(n-3)K, \quad z=(n-4)K, \quad p=(n-2)(n-3)K.$$

Il est naturel qu'on choisira pour K le plus petit nombre possible, savoir pour n pair $K=1$, pour n impair $K=2$, pour satisfaire ainsi à la condition $z=4t+2$.

Mais ici on fera l'observation surprenante, que pour $n=4m$ il n'y a pas d'invariant qui, par son changement de signe, puisse indiquer l'existence de 4 racines imaginaires dans l'équation, parceque z prend alors la forme $4t$ et l'exposant de la puissance $(q\sqrt{-1})^{\mu}$ étant:

$$\mu_2=4(2m-1)y+\sigma(8m-2\sigma-5)4t=4t',$$

l'invariant $I^{(r)}$ reste toujours positif pour des valeurs très grandes de q, quel que soit le nombre de racines imaginaires.

Ainsi les équations du quatrième degré n'ont pas des critères invariantifs, excepté le discriminant; elles ne possèdent pas même l'invariant $I^{(1)}$, auquel manquerait dans chaque terme de la somme $\sum$ toujours une des différences $\alpha_1-\alpha_2$.., comme on le sait déjà, et c'est ce qui résulte aussi des formules précédentes, car pour $n=4$ on a $z=0$.

En désignant, pour abréger, les produits des différences (a), (b), (c) par A, B, C, savoir:

$$A=(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_{2r})(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2r-2}-\alpha_{2r}),$$

$$B=(\alpha_1-\alpha_{2r+1})(\alpha_1-\alpha_{2r+2})\ldots(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_{2r+1})\ldots(\alpha_{2r}-\alpha_n).$$

$$C=(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r+2})(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r+3})\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n).$$

l'invariant $I^{(r)}$ aura en général la forme:

$$\overset{(1)}{I}_p = \sum B^{(n-3)k} C^{(n-4)k}.$$

Les équations du cinquième degré auront les critères invariantifs:

$$D, \qquad \overset{(1)}{I}_{12} = \sum B^4 C^2,$$

Si D est négatif, l'équation a 2 racines imaginaires;
» D » positif et $\overset{(1)}{I}_{12}$ négatif, 4 racines imaginaires.

Ce résultat correspond en général à celui trouvé par M. Sylvester (*), excepté que M. Sylvester applique encore l'invariant I du quatrième degré dans le cas ou $\overset{(1)}{I}_{12} = \Lambda = 0$, pour savoir si les deux paires des racines égales sont réelles ou imaginaires.

Les équations du sixième degré ont les critères invariantifs du plus petit degré p, qui ne sont plus réductibles:

$$\overset{(1)}{I}_{12} = \sum B^3 C^2, \quad \overset{(2)}{I}_6 = \sum A^2 B C^2.$$

Les index 12 et 6 indiquent les degrés de ces invariants dans les coefficients de l'équation donné, et on aura en tout les critères

$$D, \quad \overset{(1)}{I}_{12} \quad \overset{(2)}{I}_6,$$

et l'équation aura pour D négatif, $\overset{(1)}{I}_{12}$ et $\overset{(2)}{I}_6$ positifs, 2 racines imaginaires; pour $\overset{(1)}{I}_{12}$ négatif et les autres positifs, 4 racines imaginaires; pour $\overset{(2)}{I}_6$ négatif, 6 racines imaginaires.

De même il y aura pour $D=0$, 1 paire de racines égales;
» » » » $D=0$, $\overset{(1)}{I}_{12}=0$, 2 paires de racines égales;
» » » » $D=0$, $\overset{(1)}{I}_{12}=0$, $\overset{(2)}{I}_6=0$, 3 paires de racines égales.

(*) Voir le mémoire cité: *On the real and imaginary roots of equation* (Phil. Trans. 1864, p. 643).

Les équations du septième degré auront les critères:

$$D, \quad \overset{(1)}{I}_{40}=\sum B^8C^6, \quad \overset{(2)}{I}_{12}=\sum A^3B^2C^2,$$

et la discussion ressemble à celle des équations du sixième degré.

Les équations du huitième degré donnent les invariants:

$$D, \quad \overset{(1)}{I}_{30}=\sum B^5C^4, \quad \overset{(2)}{I}_{10}=\sum A^3BC^2, \quad \overset{(3)}{I}_{16}=\sum A^3B^2C^4.$$

Mais le deuxième et le quatrième ne sont pas acceptables pour critères de 4 et de 8 racines imaginaires dans l'équation, car ils ont $z=4$.

Il est bien probable que la même circonstance se repète dans toutes les équations du degré $4m$, et en effet, en ralliant les deux équations générales de condition, on obtient:

$$(n-2r-1)z=2(r-1)x+ny-4ry.$$

En admettant $n=4m$ et $r=2r_1+1$, on a:

$$(4m-4r_1-3)z=4(r_1x+my-2ry-y)$$

et z ayant un coefficient impair, il faut que z ait la forme $4t$ pour satisfaire à cette équation. On dira donc que les équations du degré $4m$ n'ont pas d'invariants, qui par leur changement de signe indiqueraient sûrement l'existence de $4t$ racines imaginaires dans les dites équations. C'est une excéption qu'on ne trouve pas dans les équations du degré $4m+2$, ou $2m+1$.

De la même manière on déterminera sans difficulté les critères invariantifs pour les autres degrés des équations algébriques.

Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche.

(*del prof.* Carlo Neumann, *a Tubinga*).

Se una data curva si concepisce come una linea materiale di sezione uniforme e di densità inversamente proporzionale al raggio di curvatura di ciascun punto, il baricentro di questa linea materiale diventa ciò che si chiama, come è noto, *baricentro di curvatura* della data curva (*). Stando agli usi adottati, si può eziandio chiamare *baricentro di un sistema di punti* quel punto che avrebbe questo stesso nome qualora tutti i punti del sistema fossero materiali e di massa eguale.

Se u è una qualsivoglia funzione razionale intera delle coordinate x, y, il baricentro di curvatura della curva:

$$u = \text{cost.}$$

possiede alcune proprietà, che mi propongo di indicare in questa Nota.

Teorema 1.° Se si conducono tutte le tangenti della curva u cost. parallele ad una direzione data ad arbitrio, il baricentro dei punti di contatto coincide sempre col baricentro di curvatura della curva.

Teorema 2.° Il baricentro dei punti comuni alle due curve $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ è identico col baricentro di curvatura della curva $u = \text{cost.}$

Teorema 3.° Qualunque sia il valore della costante a cui viene eguagliata la funzione u, tutte le curve u=cost. hanno un solo e medesimo baricentro di curvatura.

(*) Steiner G. di Crelle t. 21 p. 56; ovvero Giornale Arcadico t. 101 e 102 (Roma 1844-45), dove si trova la stessa memoria di Steiner tradotta in italiano dal prof. Schläfli.

Teorema 4.° Se la funzione u contiene termini della dimensione n al più, e se si pone $u \equiv v+w$, dove v è la somma dei termini delle dimensioni n ed $n-1$, mentre w comprende tutti gli altri termini, si può mutare ad arbitrio la composizione del polinomio w, senza che perciò il baricentro di curvatura della curva $u=$cost. venga minimamente a cambiare di posizione (*).

Dimostrazione. Siano x, y le coordinate di un elemento infinitesimo qualunque ds della curva data; r il corrispondente raggio di curvatura; ed A_0, B_0 le coordinate del baricentro di curvatura della curva. Sarà:

$$A_0 = \frac{\int \frac{xds}{r}}{\int \frac{ds}{r}}, \qquad B_0 = \frac{\int \frac{yds}{r}}{\int \frac{ds}{r}}, \tag{1}$$

estese le integrazioni a tutti gli elementi della curva. Se ora imaginiamo tirate le normali ai due termini dell'elemento ds, avremo un sottilissimo triangolo isoscele, la cui base è ds ed i cui lati rappresentano il corrispondente raggio di curvatura r. Designando adunque con $d\omega$ l'angolo al vertice, sarà $ds = rd\omega$, e però $\frac{ds}{r} = d.\omega$ Quindi le formule (1) si mutano nelle seguenti:

$$A_0 = \frac{\int xd\omega}{\int d\omega}, \qquad B_0 = \frac{\int yd\omega}{\int d\omega}. \tag{2}$$

Premesse queste considerazioni, veniamo al nostro proprio argomento. La data curva sia dell'ordine n e possegga per conseguenza $n(n-1)=m$ tangenti parallele. Questo sistema di tangenti parallele si trovi in una direzione qualsivoglia. L'angolo d'inclinazione di questa direzione ad un asse fisso (p. e. all'asse coordinato delle x) può essere indicato con ω; ed i punti di contatto si designino con (x_1, y_1), (x_2, y_2), .., (x_m, y_m). Il baricentro di questi punti di contatto avrà allora le coordinate:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}, \qquad B = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}. \tag{3}$$

(*) Chasles (*Aperçu hist.* pag. 624) aveva già trovato che i punti di contatto di un sistema di rette (piani) tangenti parallele della curva (superficie) posseggono un baricentro che è indipendente dalla direzione delle rette (piani) tangenti. Altri teoremi affini devonsi a Duhamel e Liouville (cfr. G. di Liouville 1841, t. 6 p. 364 e seg.) Ma il fatto che il baricentro dei punti di contatto coincida col baricentro di curvatura della curva (superficie) sembra che finora non sia stato conosciuto.

Se ora diamo al sistema delle tangenti, invece della direzione ω, successivamente le direzioni $\omega+d\omega$, $\omega+2d\omega$, $\omega+3d\omega, \ldots$, ove $d\omega$ rappresenta un angolo infinitesimo arbitrariamente scelto, e se indichiamo con (x_k', y_k'), (x_k'', y_k''), $(x_k''', y_k'''), \ldots$ i valori corrispondenti delle coordinate (x_k, y_k), noi otterremo formole completamente analoghe alle (3), e nelle quali le quantità A, B (in virtù del teorema di Chasles) hanno sempre i medesimi valori. Dunque sarà p. e.:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m},$$

$$A = \frac{x_1' + x_2' + \cdots + x_m'}{m},$$

$$A = \frac{x_1'' + x_2'' + \cdots + x_m''}{m}, \quad \text{ecc. ecc.}$$

Imaginiamo ora queste equazioni continuate finchè il sistema delle tangenti, pel successivo ingrandimento dall'angolo ω, riprenda la sua posizione iniziale, vale a dire finchè ciascuno degli m punti di contatto abbia percorso una volta l'intera curva. Ciascuna delle medesime equazioni sia moltiplicata per $d\omega$, e da ultimo tutte le equazioni si sommino insieme. Allora si otterrà:

$$A \int d\omega = \frac{\int x_1 d\omega + \int x_2 d\omega + \cdots + \int x_m d\omega}{m}. \tag{4}$$

Ma per le (2) è:

$$\frac{\int x_1 d\omega}{\int d\omega} = A_0, \quad \frac{\int x_2 d\omega}{\int d\omega} = A_0, \ldots, \quad \frac{\int x_m d\omega}{\int d\omega} = A_0;$$

onde la formola (4) diviene $A = A_0$. E nello stesso modo si troverà $B = B_0$.

Così il 1.° teorema è dimostrato. Gli altri tre si stabiliscono facilmente, adoperando quei metodi de' quali si è servito Liouville nella memoria già citata.

Tubinga, 29 marzo 1867.

Sul baricentro di curvatura delle superficie algebriche.

(*del prof.* Carlo Neumann *a Tubinga*)

Se una data superficie si concepisce come una superficie materiale di spessore uniforme e di densità inversamente proporzionale al prodotto dei raggi principali di curvatura in ciascun punto, il baricentro di questa superficie materiale si dirà brevemente *baricentro di curvatura della superficie.* Per questo punto ha luogo, se la superficie è algebrica, il seguente:

Teorema. Se si conducono tutti i piani tangenti alla superficie, paralleli ad un piano arbitrario, il baricentro dei punti di contatto coincide sempre col baricentro di curvatura della superficie.

Dimostrazione. La superficie data sia dell'ordine n, onde avrà $n(n-1)^2=m$ piani tangenti paralleli fra loro. Un così fatto sistema di piani tangenti paralleli ha m punti di contatto, il cui baricentro, in virtù del teorema di Chasles, è indipendente dalla direzione del sistema. Le coordinate di questo baricentro si indichino con A, B, C.

Oltre alla data superficie, imaginiamo (in un luogo qualunque dello spazio) descritta una mezza superficie sfera di raggio $=1$. Questa venga divisa mediante curve quali si vogliano in elementi superficiali infinitesimi, uno qualunque de' quali si rappresenti con $d\omega$.

A ciascun punto π dell'emisfero corrispondono m punti della superficie data, cioè quei punti $p_1, p_2, .., p_m$, nei quali il piano tangente alla superficie è parallelo al piano che tocca l'emisfero in π. Se al punto π si fa percorrere una volta il contorno dell'area $d\omega$, anche i corrispondenti punti $p_1, p_2, .., p_m$ descriveranno piccole curve chiuse sulla superficie data; onde si otterranno gli elementi $do_1, do_2, .., do_m$ della superficie, corrispondenti all'elemento sferico $d\omega$. Fra questi elementi hanno luogo le relazioni (*):

$$\frac{do_1}{R_1}=d\omega, \quad \frac{do_2}{R_2}=d\omega, \ldots, \quad \frac{do_m}{R_m}=d\omega, \tag{1}$$

(*) Gauss *Disq. gen. circa superficies curvas.*

dove $R_1, R_2, .., R_m$ indicano il prodotto dei raggi principali di curvatura per gli elementi $do_1, do_2, .., do_m$.

Se $x_1, x_2, .., x_m$ sono le coordinate x di m punti corrispondenti entro agli m elementi considerati, si avrà, per la definizione data di A, B, C:

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}, \tag{2}$$

ovvero, ciò che è la medesima cosa:

$$Am\,d\omega=x_1 d\omega+x_2 d\omega+\cdots+x_m d\omega, \tag{3}$$

e, ponendo per $d\omega$ il valore dato dalla (1):

$$A\left(\frac{do_1}{R_1}+\frac{do_2}{R}+\cdots+\frac{do_m}{R_m}\right)=\frac{x_1 do_1}{R_1}+\frac{x_2 do_2}{R_2}+\cdots+\frac{x_m do_m}{R_m}. \tag{4}$$

Se ora per $d\omega$ si assumono **tutti** gli elementi dell'emisfero, e ciascuna volta si formi la corrispondente equazione (4), la somma di tutte queste equazioni darà:

$$A\int\frac{do}{R}=\int\frac{x\,do}{R},$$

dove l'integrazione abbraccia tutti gli elementi do della superficie data (e ciascuno una sola volta). Formole analoghe si otterranno per B e C. Donde segue che il punto (A, B, C) è identico col baricentro di curvatura della superficie data.

Tubinga, 10 luglio 1867.

Correzioni.

A p. 28. l. 7	*salendo, invece di*	.... $i_{22}j_{22}$	*leggi*	..... $i_{22}j_{11}$
» 28. »	*ultima*	»	mettendo invece delle differenziali i coefficienti	»	moltiplicando i differenziali pei coefficienti
» 30. »	3. *salendo*	»	se invece delle differenziali si pongono i coefficienti	»	si moltiplicano i differenziali pei coefficienti
» 34. »	5. »	»	.... γ_{12}	»	.... Φ_{12}
» 36. »	8. »	»	...... $j_{12}\alpha_1\dot{\gamma}_1$	»	...... $j_{22}\alpha_1\gamma_1$
» 37. »	1. *discend.*	»	...... $\vartheta_{12}j_{11}$	»	...... $\vartheta_{22}j_{11}$
» 41. »	3. »	»	...... $\frac{2}{3}\}$	»	.... $\frac{2}{3}\{$
» 99. »	14. *salendo*	»	..... equazione	»	...... questione
» 161. »	7 e 8 *discend.*	»	...... n^2 .... n	»	.. $2n(n-1)$ .... $n(n-1)$

Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers.

(*par M.* Maximilien Curtze, *à Thorn sur la Vistule*).

La série

$$F(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{x^r}{1-x^r}=x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots$$

ordinairement dite série de Lambert, a la propriété singulière que le coefficient de x^n au second membre est égal au nombre des diviseurs de n. Ce nombre n sera donc un nombre premier ou non, selon que le coefficient correspondant est égal ou plus grand que 2. Lambert fut le premier qui, dans l'*Architektonik*, p. 507, appela l'attention des géomètres sur cette série et dès-lors l'on a fait beaucoup d'efforts pour en trouver la somme, parce que, cette somme ou série évaluée, la loi des nombres premiers serait donnée sur-le-champ à l'aide du théorème de Maclaurin. Puisque la série ne converge pas trop rapidement si la variable est très-petite ou presque égale à l'unité, M. Clausen (1) et M. Schlömilch (2) l'ont transformée dans les séries suivantes:

$$F(x)=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1+x^r}{1-x^r}\right)x^{r^2}\ ,$$

et:

$$F(x)=\frac{0,5772156649\cdots-\mathrm{l}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)}+\tfrac{1}{4}-\frac{(B_1)^2}{2!\,2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(B_3)^2}{4!\,4}\left[\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\cdots$$

$$-\frac{(B_{2n-1})^2}{(2n-1)!\,(2n-1)}\left[\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2n-1}-\rho\,\frac{B_{2n-1}\,B_{2n+1}(\mathrm{l}z)^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{(\mathrm{l}z)^2}{4\pi^2}\right),\ 0<\rho<1\ ,$$

(1) *Crelle's Journal* T. 3, p. 95.
(2) *Zeitschrift für Mathematik* T. 6, 1861, p. 407.

où 0,5772156649... est la constante du logarithme intégral, et B_1, B_3,... sont les nombres de Bernoulli. De plus, M. Schlömilch (1) a donné incidemment l'intégrale définie:

$$\int_0^1 F(x)\left[\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{n-1}\frac{dx}{x}=\Gamma(n)\phi_n^2, \qquad \phi_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

qui peut être évaluée sans connaître la somme de $F(x)$, somme qui a été jusqu'à present cherchée en vain par les géomètres.

C'est pourquoi je me permets de sousmettre au jugement des savants trois formules, dont chacune fournit la somme générale de cette série célèbre, par l'intermédiaire d'une intégrale définie. A cet effet nous mettons dans l'intégrale connue (2):

$$\int_0^\infty \frac{p\sin(qx)}{1-2p\cos(qx)+p^2}\cdot\frac{xdx}{r^2+x^2}-\tfrac{1}{2}\pi\frac{pe^{-rq}}{1-pe^{-rq}}, \quad p^2<1,$$

$q=\mathrm{l}\left(\frac{1}{p}\right)$; nous aurons:

$$-\int_0^\infty \frac{p\sin(x\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\mathrm{l}p)+p^2}\,\frac{xdx}{r^2+x^2}=\tfrac{1}{2}\pi\frac{p^{r+1}}{1-p^{r+1}}, \quad p^2<1. \qquad (1)$$

Posant successivement dans cette formule $r=1, 2, 3, \ldots, \infty$, et faisant la somme de tous les résultats, nous obtiendrons:

$$\tfrac{1}{2}\pi\sum_1^\infty\frac{p^{r+1}}{1-p^{r+1}}=-\int_0^\infty\frac{2p\sin(x\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\mathrm{l}p)+p^2}\,dx\sum_1^\infty\frac{x}{r^2+x^2}, \quad p^2<1.$$

Mais il est connu (3) que:

$$\sum_1^\infty\frac{x}{r^2+x^2}=-\frac{1}{2x}+\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}},$$

formule qui nous fournit l'équation:

$$\sum_1^\infty\frac{p^{r+1}}{1-p^{r+1}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{p\sin(x\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\mathrm{l}p)+p^2}\,\frac{dx}{x}-\int_0^\infty\frac{p\sin(x\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\mathrm{l}p)+p^2}\cdot\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx, \quad p^2<1$$

(1) *Zeitschrift*, T. 3, 1858, p. 248, note.
(2) Bierens de Haan, *Tables d'intégrales définies* p. 221, n.° 9.
(3) Schlömilch dans *Grunert's Archiv* T. 12, p. 130.

La première intégrale du second membre étant égale à $-\frac{1}{2}x\frac{p}{1-p}$, nous aurons, en ajoutant $\frac{p}{1-p}$ à chaque membre de l'équation précédente, la somme de la série de LAMBERT:

$$\sum_1^\infty \frac{p^r}{1-p^r} = \frac{1}{2}\frac{p}{1-p} - \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}dx, \quad p^2<1. \tag{2}$$

Cette même somme, mais dans une forme plus générale, on la trouve aussi à l'aide des deux théorèmes donnés par M. SCHLÖMILCH (1):

$$\frac{1}{2}\phi(0) + \sum_1^\infty \phi(n)\cos nz = \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-z)x}+e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{\phi(-xi)-\phi(+xi)}{2i}dx \tag{3}$$

$$\sum_1^\infty \phi(n)\sin nz = \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-z)x}-e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{\phi(-xi)+\phi(+xi)}{2}dx \tag{4}$$

qui subsistent respectivement pour $0 \overline{\gtrless} z \overline{\gtrless} \pi$, $0<z<\pi$.

En posant dans ces formules $\phi(n)=\frac{p^{n+1}}{1-p^{n+1}}$, on trouve, puisque l'on a:

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{p^{1-xi}}{1-p^{1-xi}}-\frac{p^{1+xi}}{1-p^{1+xi}}\right]=-\frac{p}{2i}\cdot\frac{p^{xi}-p^{-xi}}{1-p(p^{xi}+p^{-xi})+p^2}=-\frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2},$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p^{1-xi}}{1-p^{1-xi}}+\frac{p^{1+xi}}{1-p^{1+xi}}\right]=\frac{p}{2}\cdot\frac{p^{xi}+p^{-xi}-2p}{1-p(p^{xi}+p^{-xi})+p^2}=\frac{p[\cos(x\,lp)-p]}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2},$$

les deux équations:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{p}{1-p}+\sum_1^\infty\frac{p^{n+1}}{1-p^{n+1}}\cos nz=\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}-\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-z)x}+e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot\frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}dx,\\ \qquad 0 \overline{\gtrless} z \overline{\gtrless} \pi,\ p^2<1\end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^\infty\frac{p^{n+1}}{1-p^{n+1}}\sin nz=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-z)x}-e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi k}}\cdot\frac{p[\cos(x\,lp)-p]}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}dx,\\ \qquad 0<z<\pi,\ p^2<1\end{array}\right\} \tag{6}$$

---

(1) *Crelle's Journal* T. 42, p. 145.

La valeur $z=0$ dans la première de ces deux formules nous donne l'équation (2): mais pour $z=\pi$ on a:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{p^n}{1-p^n}=\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}-\int_0^\infty \frac{p\sin(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}\cdot\frac{2}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx,\ p^2<1, \tag{7}$$

c'est-à-dire la série de Lambert aux signes alternés.

En faisant $z=\frac{1}{2}\pi$ dans les équations (5) et (6) nous trouverons:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}}=\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}-\int_0^\infty \frac{p\sin(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}\cdot\frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}},\ p^2<1 \tag{8}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}=\int_0^\infty \frac{p[\cos(x\,\mathrm{l}p)-p]}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}\cdot\frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}},\ p^2<1 \tag{9}$$

La somme et la différence des équations (2) et (7) nous fournit encore:

$$\sum_1^\infty \frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}}=\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot\frac{p\sin(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}\,dx,\ p^2<1 \tag{10}$$

$$\sum_1^\infty \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot\frac{p\sin(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}\,dx,\ p^2<1 \tag{11}$$

En faisant dans la dernière formule $p^2=q$ et écrivant p pour q dans le résultat, on trouve la deuxième formule pour la somme de la série de Lambert:

$$\sum_1^\infty \frac{p^n}{1-p^n}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{1}{2}x\,\mathrm{l}p)}{1-2p^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{1}{2}x\,\mathrm{l}p)+p}\,dx,\ 0<p<1 \tag{12}$$

De l'équation (2) nous pouvons déduire une transformation de la série de Lambert, analogue à celle de Clausen. En effet, en développant $\frac{p\,\mathrm{sen}(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}$ suivant les sinus des multiples de $x\,\mathrm{l}p$, nous aurons:

$$\frac{p\sin(x\,\mathrm{l}p)}{1-2p\cos(x\,\mathrm{l}p)+p^2}=\sum_1^\infty p^r\sin[x\,\mathrm{l}(p^r)],$$

et substituant cette valeur dans (2), il vient:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \frac{p \operatorname{sen}(x l p)}{1-2p\cos(x l p)+p^2} = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} p^r \sin[x l(p^r)] \tag{13}$$

Mais il est connu (1) que:

$$\int_0^\infty \frac{e^{rx}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \sin(qx)dx = \tfrac{1}{2}\frac{e^q-e^{-q}}{e^q+e^{-q}+2\cos r};$$

en faisant $r=\pi$, $q=l(p^r)$ et multipliant les deux membres par p^r, nous trouverons:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} p^r \sin[x l(p^r)]dx = \tfrac{1}{2}\frac{p^{2r}-1}{(p^r-1)^2}p^{2r} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{2r}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation (13), il vient:

$$2\sum_1^\infty \frac{p^r}{1-p^r} = \frac{p}{1-p} + \sum_1^\infty \left\{\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{2r}\right\} \tag{14}$$

Cette formule est très convergente pour des valeurs très petites de p, quoique moins convergente que la transformation de M. Clausen citée plus haut. Mais faisant usage de cette transformation en posant:

$$F(p) = \sum_0^\infty \left\{\left(\frac{1+p^{r+1}}{1-p^{r+1}}\right)p^{(r+1)^2}\right\}$$

et faisant de nouveau:

$$\phi(n) = \left(\frac{1+p^{n+1}}{1-p^{n+1}}\right)p^{(n+1)^2}$$

on obtient:

$$-\frac{\phi(-xi)-\phi(xi)}{2i} = p^{1-x^2}\cdot\frac{(1-p^2)\sin[x l(p^2)]+2p\sin(x l p)\cos[x l(p^2)]}{1-2p\cos(x l p)+p^2}$$

$$\frac{\phi(-xi)+\phi(xi)}{2} = p^{1-x^2}\cdot\frac{(1-p^2)\cos[x l(p^2)]-2p\sin(x l p)\sin[x l(p^2)]}{1-2p\cos(x l p)+p^2}$$

(1) Bierens de Haan, *Tables d'intégrales définies*, p. 282, n. 10.

En profitant de ces valeurs, les formules (3) et (4) nous fournissent:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty\left[\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{r^2}\cos(r-1)z\right]=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)p-\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-z)x}+e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot\\&\cdot\frac{(1-p^2)\sin[xl(p^2)]+2p\sin(xlp)\cos[xl(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}p^{1-x^2}.dx,\ \{0\gtreqless z\gtreqless\pi,\ p^2<1\}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty\left[\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{r^2}\sin(r-1)z\right]=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-z)x}-e^{-(\pi-z)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot\\&\cdot\frac{(1-p^2)\cos[xl(p^2)]-2p\sin(xlp)\sin[xl(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}p^{1-x^2}.dx,\ \{0<z<\pi,\ p^2<1\}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Pour $z=0$ nous aurons la troisième formule sommatoire de la série de Lambert:

$$F(p)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)p-\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cdot\frac{(1-p^2)\sin[xl(p^2)]+2p\sin(xlp)\cos[xl(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}p^{1-x^2}dx,\ p^2<1:\quad(17)$$

pour $z=\pi$ au contraire nous trouverons:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty(-1)^{r-1}\left\{\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{r^2}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)p-\int_0^\infty\frac{(1-p^2)\sin[xl(p^2)+2p\sin(xlp)\cos[xl(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}\cdot\\&\cdot\frac{2}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,p^{1-x^2}dx,\quad p^2<1,\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

En posant $z=\frac{1}{2}\pi$ dans (15) et (16) on a:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty(-1)^{r-1}\left\{\left(\frac{1+p^{2r-1}}{1-p^{2r-1}}\right)p^{(2r-1)^2}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)p-\int_0^\infty\frac{(1-p^2)\sin[xl(p^2)]+2p\sin(xlp)\cos[xl(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}\cdot\\&\cdot\frac{p^{1-x^2}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}dx,\quad p^2<1,\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty(-1)^{r-1}\left\{\left(\frac{1+p^{2r}}{1-p^{2r}}\right)p^{(2r)^2}\right\} &= \int_0^\infty \frac{(1-p^2)\cos[x\,l(p^2)]-2p\sin(x\,l\,p)\sin[x\,l(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}\cdot \\ &\cdot\frac{p^{1-x^2}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}dx,\quad p^2<1.\end{aligned}\right\}(20)$$

Or, en prenant la somme et la différence des équations (17) et (18), on obtient:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty\left\{\left(\frac{1+p^{2r-1}}{1-p^{2r-1}}\right)p^{(2r-1)^2}\right\} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)p-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot \\ &\cdot\frac{(1-p^2)\sin[x\,l(p^2)]+2p\sin(x\,l\,p)\cos[x\,l(p^2)]}{1-2p\cos(xlp)+p^2}\,p^{1-x^2}dx,\end{aligned}\right\}(21)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty\left\{\left(\frac{1+p^{2r}}{1-p^{2r}}\right)p^{(2r)^2}\right\} &= -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot \\ &\cdot\frac{(1-p^2)\sin[x\,l(p^2)]+2p\sin(x\,l\,p)\cos[x\,l(p^2)]}{1-2p\cos(x\,l\,p)+p^2}\,p^{1-x^2}dx\end{aligned}\right\}(22)$$

où toujours $p^2<1$. Si l'on fait en dernier lieu $p^2=q$ dans (22) et (20) et on écrit p pour q dans ce résultat, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty\left\{\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{2r^2}\right\} &= -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}-e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}\cdot \\ &\cdot\frac{(1-p)\sin(x\,l\,p)+2p^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{1}{2}x\,l\,p)\cos(x\,l\,p)}{1-2p^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{1}{2}x\,l\,p)+p}\,p^{\frac{1}{2}(1-x^2)}dx,\quad 0<p<1\end{aligned}\right\}(23)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty(-1)^{r-1}\left\{\left(\frac{1+p^r}{1-p^r}\right)p^{2r^2}\right\} &= \int_0^\infty\frac{(1-p)\cos(x\,l\,p)-2p^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{1}{2}x\,l\,p)\sin(x\,l\,p)}{1-2p^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{1}{2}x\,l\,p)+p}\cdot \\ &\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}(1-x^2)}}{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}dx,\quad 0<p>1\end{aligned}\right\}(24)$$

Des formules sommatoires pour la série de Lambert (2), (12), (17) on peut dériver, à l'aide du théorème de Maclaurin, la loi des nombres premiers. Le nombre n p. e. sera un nombre premier, si l'équation

$$F^n(0)=2 \tag{25}$$

est verifiée. En se servant de la formule (2), on trouve aisément:

$$F^n(0)=\tfrac{1}{2}D_p^n\left(\frac{p}{1-p}\right)_0-\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx.D_p^n\left(\frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}\right)_0,$$

mais on a $D_p^n\left(\frac{p}{1-p}\right)=\frac{n!}{(1-p)^{n+1}}$, et la loi des nombres premiers est donnée par la formule:

$$2=n!-\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx\,.\,D_p^n\left(\frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}\right)_0. \tag{26}$$

Pour la donner dans une forme tout-à-fait développée, il faut déterminer la fonction dérivée $D_p^n\left(\frac{p\sin(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}\right)_0$. Mais cette détermination est assez compliquée, et je me contents pour le moment d'avoir posé la formule (26). Cette formule contient en outre l'évaluation de l'intégrale du second membre; en effet, en désignant par N le nombre des diviseurs entiers de n, nous aurons:

$$\int_0^\infty\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx\,.\,D_p^n\left(\frac{p\,\mathrm{sen}(x\,lp)}{1-2p\cos(x\,lp)+p^2}\right)=n!-N. \tag{27}$$

Thorn, le 7 mai 1867.

Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio.

MEMORIA PRIMA.

(*del Prof.* DELFINO CODAZZI, *a Pavia*).

Le coordinate curvilinee adoperate fino ad ora per istudiare le grandezze poste nello spazio sono, per quanto io sappia, i parametri di tre sistemi di superficie, le quali s'incontrano sotto angolo non qualunque ma retto. La teorica di queste coordinate si trova esposta nelle eccellenti *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* del sig. LAMÉ. Ora, ho creduto che potesse tornar utile il possedere, unitamente alle formole relative a due sistemi di linee segantisi ad angolo qualunque in una superficie, anche le formole relative a tre sistemi di superficie segantisi ad angolo pure qualunque nello spazio. Infatti, nell'egual modo che lo studio di certe grandezze poste in una superficie può venire agevolato coll'assumere due sistemi di linee, le quali abbiano proprietà speciali incompatibili coll'ortogonalità, lo studio di certe grandezze poste nello spazio può trovarsi esso pure agevolato coll'assumere tre sistemi di superficie, le quali, non astrette al vincolo dell'ortogonalità, saranno suscettibili di soddisfare a qualunque condizione speciale richiesta per ogni caso. Ho creduto altresì che tornerebbe conveniente il trattare con uniformità le coordinate curvilinee d'una superficie e quelle dello spazio, perocchè parecchie formole relative alle seconde possono essere considerate come una estensione di quelle relative alle prime. Mi propongo quindi di stabilire, in alcune Memorie, le equazioni che mi sembreranno fondamentali sulla *Teorica delle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio,* risguardando le une come i parametri di due sistemi di linee segantisi ad angolo qualunque e le altre come i parametri di tre sistemi di superficie segantisi ad angolo pure qualunque; e mi propongo in pari tempo di presentare qualche applicazione delle medesime equazioni.

Divido questa prima Memoria in due parti; considero nella prima una trasformazione relativa alla teorica delle coordinate curvilinee nello spazio, e fo nella seconda l'applicazione delle formole risultanti ad un problema tratto dalla teoria del calorico.

PARTE PRIMA.

Siano x, y, z le coordinate rettilinee ortogonali d'un punto qualunque dello spazio; e siano λ, μ, ν i parametri variabili di tre sistemi di superficie, le quali determinano ogni punto mediante le loro intersezioni. Chiamando i ciascuna delle x, y, z e ponendo per brevità:

$$f_x+f_y+f_z=\sum f_i,$$

ove f è funzione qualunque, si considerino le sei seguenti espressioni alle derivate parziali del prim'ordine:

$$\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2,\ \sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)^2,\ \sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial i}\right)^2,\ \sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i},\ \sum\frac{\partial\mu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i},\ \sum\frac{\partial\nu}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i},$$

ed anche le tre seguenti alle derivate parziali del second'ordine:

$$\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2},\ \sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2},\ \sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}.$$

Oggetto di questa parte prima è quello di trasformare le nove espressioni nel caso in cui si assumano come variabili principali le λ, μ, ν invece delle i.

1.

Chiameremo per brevità (λ), (μ), (ν) le superficie i cui parametri sono rispettivamente λ, μ, ν; e chiameremo (λ,μ), (μ,ν), (ν,λ) le intersezioni delle superficie (λ) e (μ), (μ) e (ν), (ν) e (λ). Ciò posto, siano i_λ, i_μ, i_ν i coseni degli angoli compresi tra l'asse delle i e le intersezioni (μ,ν), (ν,λ), (λ,μ); e siano ε_λ, ε_μ, ε_ν gli angoli compresi tra le intersezioni (ν,λ) e (λ,μ), (λ,μ) e (μ,ν),

(μ, ν) e (ν, λ), i quali quindi saranno situati sulle superficie (λ), (μ), (ν). Avremo:

$$\sum i_\lambda^2 = 1,\ \sum i_\mu^2 = 1,\ \sum i_\nu^2 = 1,\ \sum i_\lambda i_\mu = \cos\varepsilon_\nu,\ \sum i_\mu i_\nu = \cos\varepsilon_\lambda,\ \sum i_\nu i_\lambda = \cos\varepsilon_\mu. \tag{1}$$

Siano l, m, n le derivate degli archi delle (μ,ν), (ν,λ), (λ,μ) prese rispetto ai parametri λ, μ, ν. Avremo pure:

$$\frac{\partial i}{\partial \lambda} = l i_\lambda,\quad \frac{\partial i}{\partial \mu} = m i_\mu,\quad \frac{\partial i}{\partial \nu} = n i_\nu. \tag{2}$$

Ora, prendiamo la derivata della i rispetto a sè medesima, risguardandola dapprima come variabile indipendente, di poi come funzione delle λ, μ, ν; risulterà:

$$1 = l i_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial i} + m i_\mu \frac{\partial \mu}{\partial i} + n i_\nu \frac{\partial \nu}{\partial i}. \tag{3}$$

Prendiamo la derivata della stessa i rispetto ad una qualunque delle altre due coordinate rettilinee, che dinoteremo con i', e prendiamo anche la derivata di una qualunque delle altre due rispetto ad i; risulteranno pei due casi:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= l i_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial i'} + m i_\mu \frac{\partial \mu}{\partial i'} + n i_\nu \frac{\partial \nu}{\partial i'}, \\ 0 &= l i'_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial i} + m i'_\mu \frac{\partial \mu}{\partial i} + n i'_\nu \frac{\partial \nu}{\partial i}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Chiameremo per brevità *permutazione semplice* d'una espressione il cambiamento delle quantità contenute in essa e relative alle λ, μ, ν nelle corrispondenti relative alle μ, ν, λ; e chiameremo *permutazione doppia* il cambiamento delle quantità relative alle λ, μ, ν nelle corrispondenti relative alle ν, λ, μ. Ciò premesso, moltiplichiamo per i_λ l'equazione (3), per i'_λ ciascuna delle due rappresentate dalla seconda (4) coll'attribuire ad i'_λ i due valori diversi da i_λ, e sommiamo; troveremo la prima tra le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} i_\lambda &= l \frac{\partial \lambda}{\partial i} + m \cos\varepsilon_\nu \frac{\partial \mu}{\partial i} + n \cos\varepsilon_\mu \frac{\partial \nu}{\partial i}, \\ i_\mu &= l \cos\varepsilon_\nu \frac{\partial \lambda}{\partial i} + m \frac{\partial \mu}{\partial i} + n \cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial \nu}{\partial i}, \\ i_\nu &= l \cos\varepsilon_\mu \frac{\partial \lambda}{\partial i} + m \cos\varepsilon_\lambda \frac{\partial \mu}{\partial i} + n \frac{\partial \nu}{\partial i}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Le altre due risultano effettuando sopra la prima due permutazioni, una semplice ed una doppia. Infine risolviamo le (5) rispetto a $\frac{\partial \lambda}{\partial i}$, ed avremo la prima tra le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta l \frac{\partial \lambda}{\partial i} &= i_\lambda \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\lambda - i_\mu(\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda \cos\varepsilon_\mu) - i_\nu(\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu \cos\varepsilon_\lambda)\,, \\
\Delta m \frac{\partial \mu}{\partial i} &= - i_\lambda(\cos\varepsilon_\nu - \cos\varepsilon_\lambda \cos\varepsilon_\mu) + i_\mu \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\mu - i_\nu(\cos\varepsilon_\lambda - \cos\varepsilon_\mu \cos\varepsilon_\nu)\,, \\
\Delta n \frac{\partial \nu}{\partial i} &= - i_\lambda(\cos\varepsilon_\mu - \cos\varepsilon_\nu \cos\varepsilon_\lambda) - i_\mu(\cos\varepsilon_\lambda - \cos\varepsilon_\mu \cos\varepsilon_\nu) + i_\nu \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu\,;
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ove s'è posto per brevità:

$$\Delta = 1 - (\cos^2\varepsilon_\lambda + \cos^2\varepsilon_\mu + \cos^2\varepsilon_\nu) + 2\cos\varepsilon_\lambda \cos\varepsilon_\mu \cos\varepsilon_\nu. \quad (7)$$

Le due altre s'ottengono coll'operare sopra la prima una permutazione semplice ed una doppia.

2.

Metteremo i valori delle $\frac{\partial \lambda}{\partial i}$, $\frac{\partial \mu}{\partial i}$, $\frac{\partial \nu}{\partial i}$ sotto un'altra forma.

A tal fine si chiamino η_λ, η_μ, η_ν gli angoli diedri compresi rispettivamente tra le superficie (μ) e (ν), (ν) e (λ), (λ) e (μ). Essi saranno, come è chiaro, gli angoli d'un triangolo sferico il quale avrà per lati rispettivamente opposti ε_λ, ε_μ, ε_ν; perciò sussisteranno tra gli angoli ed i lati le seguenti note equazioni:

$$\frac{\operatorname{sen}\eta_\lambda}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda} = \frac{\operatorname{sen}\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu} = \frac{\operatorname{sen}\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\,;$$

$$\begin{aligned}
\cos\varepsilon_\lambda &= \cos\varepsilon_\mu \cos\varepsilon_\nu + \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda\,, \\
\cos\varepsilon_\mu &= \cos\varepsilon_\nu \cos\varepsilon_\lambda + \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\eta_\mu\,, \\
\cos\varepsilon_\nu &= \cos\varepsilon_\lambda \cos\varepsilon_\mu + \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\nu\,; \\
\cos\eta_\lambda &= -\cos\eta_\mu \cos\eta_\nu + \operatorname{sen}\eta_\mu \operatorname{sen}\eta_\nu \cos\varepsilon_\lambda\,, \\
\cos\eta_\mu &= -\cos\eta_\nu \cos\eta_\lambda + \operatorname{sen}\eta_\nu \operatorname{sen}\eta_\lambda \cos\varepsilon_\mu\,, \\
\cos\eta_\nu &= -\cos\eta_\lambda \cos\eta_\mu + \operatorname{sen}\eta_\lambda \operatorname{sen}\eta_\mu \cos\varepsilon_\nu\,.
\end{aligned}$$

Ciò premesso, le (6) potranno scriversi come segue:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta\, l}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial i} &= i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda - i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\nu - i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\mu\,,\\
\frac{\Delta\, m}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\frac{\partial\mu}{\partial i} &= - i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\eta_\nu + i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu - i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda\,,\\
\frac{\Delta\, n}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\frac{\partial\nu}{\partial i} &= - i_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\eta_\mu - i_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\lambda + i_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu\,.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Siccome poi:

$$1-(\cos^2\varepsilon_\lambda+\cos^2\varepsilon_\mu+\cos^2\varepsilon_\nu)+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu =$$

$$\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu-(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)^2-\cos^2\varepsilon_\mu(1-\cos^2\varepsilon_\nu)=$$

$$\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\operatorname{sen}^2\eta_\lambda\,,$$

così la (7) potrà scriversi:

$$\Delta=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\operatorname{sen}^2\eta_\lambda=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\eta_\mu=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\eta_\nu.\tag{9}$$

3.

Cominciamo dal trasformare le tre prime espressioni alle derivate parziali del prim'ordine $\Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2$, $\Sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)^2$, $\Sigma\left(\frac{\partial\nu}{\partial i}\right)^2$.

Quadrando la prima (8) e prendendo sul risultato la somma Σ, si trova:

$$\frac{\Delta^2 l^2}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos^2\eta_\nu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\cos^2\eta_\mu$$

$$-2\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\cos\eta_\nu+2\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu\cos\eta_\nu-2\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\mu\,,$$

ovvero:

$$\frac{\Delta^2 l^2}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu)$$

$$+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu(\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda\cos\eta_\nu)$$

$$-2\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\cos\eta_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\mu)\,,$$

o anche:

$$\frac{\Delta^2 l^2}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu$$
$$-2(\cos^2\varepsilon_\mu+\cos^2\varepsilon_\nu-2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu),$$

oppure:

$$\frac{\Delta^2 l^2}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\cos\varepsilon_\nu(\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu)$$
$$+\cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu)-2(\cos^2\varepsilon_\mu+\cos^2\varepsilon_\nu)+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu,$$

o finalmente:

$$\frac{\Delta^2 l^2}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=1-\cos^2\varepsilon_\lambda-\cos^2\varepsilon_\mu-\cos^2\varepsilon_\nu+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu.$$

Perciò risulterà la prima tra le seguenti:

$$\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l^2},\quad \sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)^2=\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2},\quad \sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial i}\right)^2=\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\Delta n^2}. \tag{10}$$

Le due altre s'ottengono operando sulla prima una permutazione semplice ed una doppia.

Se i tre sistemi di superficie sono tra loro ortogonali, le (10) si riducono alle note:

$$\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2=\frac{1}{l^2},\quad \sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)^2=\frac{1}{m^2},\quad \sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial i}\right)^2=\frac{1}{n^2}.$$

4.

Passiamo a trasformare le tre altre espressioni alle derivate parziali del prim'ordine $\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i}$, $\sum\frac{\partial\mu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i}$, $\sum\frac{\partial\nu}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i}$.

Moltiplicando tra di loro le due prime (8) e prendendo sul risultato la somma $\sum$, si trova:

$$\frac{\Delta^2 lm}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i}=-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\cos\eta_\nu-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda\cos\eta_\mu$$
$$+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu(1+\cos^2\eta_\nu)+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda(\cos\eta_\nu\cos\eta_\lambda-\cos\eta_\mu)$$
$$+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu(\cos\eta_\mu\cos\eta_\nu-\cos\eta_\lambda),$$

ovvero:

$$\frac{\Delta^2 lm}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i}=-\cos\eta_\nu(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu)$$
$$+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu(1+\cos^2\eta_\nu)$$
$$+\cos\eta_\nu\left\{\cos\varepsilon_\lambda(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)+\cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\right\}$$
$$-\operatorname{sen}\varepsilon_\nu(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\lambda).$$

Ma:

$$\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda\operatorname{sen}\eta_\mu\cos\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\cos^2\eta_\nu=\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\,;$$

di più:

$$\operatorname{sen}\varepsilon_\nu(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\eta_\lambda)=$$
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\left\{(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu)\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\cos^2\varepsilon_\mu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos^2\varepsilon_\lambda)\right\}=$$
$$-(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu)\cos\eta_\nu+2\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\,.$$

Perciò:

$$\frac{\Delta^2 lm}{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i}=\cos\eta_\nu(\cos^2\varepsilon_\lambda+\cos^2\varepsilon_\mu+\cos^2\varepsilon_\nu-1-2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\,.$$

Avremo quindi la prima tra le seguenti:

$$\left.\begin{array}{c}\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i}=-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{\Delta lm}\,,\quad \sum\frac{\partial\mu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i}=-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda}{\Delta mn}\,,\\ \sum\frac{\partial\nu}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i}=-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu}{\Delta nl}\,.\end{array}\right\}\qquad(11)$$

S'ottengono le altre due coll'operare una permutazione semplice ed una doppia sulla prima.

Se i tre sistemi di superficie sono ortogonali tra loro, le (11) si riducono alle evidenti:

$$\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i}=0\,,\quad \sum\frac{\partial\mu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i}=0\,,\quad \sum\frac{\partial\nu}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i}=0.$$

5.

Stabiliremo alcune formole che serviranno per le riduzioni future.

Si deducono dalle (2), risguardando le λ, μ, ν come le tre variabili indipendenti:

$$\frac{\partial . l i_\lambda}{\partial \mu}=\frac{\partial . m i_\mu}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial . m i_\mu}{\partial \nu}=\frac{\partial . n i_\nu}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial . n i_\nu}{\partial \lambda}=\frac{\partial . l i_\lambda}{\partial \nu}. \tag{12}$$

Moltiplichiamo la prima di queste successivamente per i_λ, i_μ, i_ν e facciamo ad ogni volta l'operazione $\sum$ sul prodotto; avremo:

$$\left.\begin{array}{l} m\sum i_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \lambda}=\frac{\partial l}{\partial \mu}-\frac{\partial m}{\partial \lambda}\cos\varepsilon_\nu, \quad l\sum i_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}=\frac{\partial m}{\partial \lambda}-\frac{\partial l}{\partial \mu}\cos\varepsilon_\nu, \\ \frac{\partial l}{\partial \mu}\cos\varepsilon_\mu+l\sum i_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}=\frac{\partial m}{\partial \lambda}\cos\varepsilon_\lambda+m\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \lambda}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Concludiamo da queste mediante una permutazione semplice:

$$\left.\begin{array}{l} n\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}=\frac{\partial m}{\partial \nu}-\frac{\partial n}{\partial \mu}\cos\varepsilon_\lambda, \quad m\sum i_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}=\frac{\partial n}{\partial \mu}-\frac{\partial m}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\lambda, \\ \frac{\partial m}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\nu+m\sum i_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}=\frac{\partial n}{\partial \mu}\cos\varepsilon_\mu+n\sum i_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}; \end{array}\right\} \tag{14}$$

e concludiamo dalle stesse mediante una permutazione doppia:

$$\left.\begin{array}{l} l\sum i_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}=\frac{\partial n}{\partial \lambda}-\frac{\partial l}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\mu, \quad n\sum i_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \lambda}=\frac{\partial l}{\partial \nu}-\frac{\partial n}{\partial \lambda}\cos\varepsilon_\mu, \\ \frac{\partial n}{\partial \lambda}\cos\varepsilon_\lambda+n\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \lambda}=\frac{\partial l}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\nu+l\sum i_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Rendiamo anche espliciti i valori delle $\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \lambda}$, $\sum i_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}$, $\sum i_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$ contenuti nelle terze formole de' gruppi (13), (14), (15). Sottraendo dalla terza (15) moltiplicata per m la terza (14) moltiplicata per l, si trova:

$$m\frac{\partial n}{\partial \lambda}\cos\varepsilon_\lambda+mn\sum i_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial i}+l\frac{\partial n}{\partial \mu}\cos\varepsilon_\mu+nl\sum i_\lambda \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu}=$$

$$m\frac{\partial l}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\nu+lm\sum i_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}+l\frac{\partial m}{\partial \nu}\cos\varepsilon_\nu+lm\sum i_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu},$$

ovvero:

$$m\frac{\partial n}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda + mn\sum i_\mu\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda} + l\frac{\partial n}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\mu + nl\sum i_\lambda\frac{\partial i_\nu}{\partial\mu} = \frac{\partial.\, lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu}.$$

Sommando con questa la terza (13) moltiplicata per n, si ottiene:

$$m\frac{\partial n}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda + mn\sum i_\mu\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda} + l\frac{\partial n}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\mu + nl\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu} + n\frac{\partial l}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\mu =$$

$$\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} + n\frac{\partial m}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda + mn\sum i_\nu\frac{\partial i_\mu}{\partial\lambda},$$

ovvero:

$$m\frac{\partial n}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda + mn\sum i_\mu\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda} + \frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu} =$$

$$\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} + n\frac{\partial m}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda + mn\left(\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} - \sum i_\mu\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda}\right).$$

Se ne conclude la prima tra le:

$$\left.\begin{aligned}
2mn\sum i_\mu\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda} &= \frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} - \frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu} + n\frac{\partial.m\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} - m\frac{\partial n}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\lambda,\\
2\,nl\sum i_\nu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\mu} &= \frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} + l\frac{\partial.n\cos\varepsilon_\mu}{\partial\lambda} - n\frac{\partial l}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\mu,\\
2\,lm\sum i_\lambda\frac{\partial i_\mu}{\partial\nu} &= \frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu} - \frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} + m\frac{\partial.l\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} - l\frac{\partial m}{\partial\nu}\cos\varepsilon_\nu.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Le altre due si ottengono operando sulla prima una permutazione semplice ed una doppia.

6.

Metteremo le formole del numero precedente sotto un'altra forma. Abbiamo in causa della seconda (13),

$$\sum i_\lambda\frac{\partial.mi_\mu}{\partial\mu} = \frac{\partial m}{\partial\mu}\cos\varepsilon_\nu + m\left(\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu} - \frac{1}{l}\frac{\partial m}{\partial\lambda} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial\lambda}\cos\varepsilon_\nu\right),$$

ovvero:

$$\sum i_\lambda\frac{\partial.mi_\mu}{\partial\mu} = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu} - m\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right);\qquad(17)$$

dalla quale si potranno dedurre due altre formole mediante le due solite permutazioni. È chiaro che nella (17) potremo scambiare le quantità relative a μ nelle corrispondenti relative a ν, lasciando in pari luogo inalterate le quantità relative a λ. Quindi avremo pure la

$$\sum i_\lambda \frac{\partial . n i_\nu}{\partial \nu} = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial . n l \cos \varepsilon_\mu}{\partial \nu} - n \frac{\partial n}{\partial \lambda}\right); \tag{18}$$

dalla quale, mediante le due solite permutazioni, si potranno dedurre altre due formole.

Inoltre abbiamo, in causa della terza (16),

$$2l \sum i_\lambda \frac{\partial . m i_\mu}{\partial \nu} = l \frac{\partial m}{\partial \nu} \cos \varepsilon_\nu + \frac{\partial . n l \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} - \frac{\partial . m n \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} + m \frac{\partial . l \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu},$$

ovvero:

$$2l \sum i_\lambda \frac{\partial . m i_\mu}{\partial \nu} = \frac{\partial . l m \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial . n l \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} - \frac{\partial . m n \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}. \tag{19}$$

Scambiando in questa le quantità relative a μ nelle corrispondenti relative a ν, e lasciando in pari tempo inalterate le quantità relative a λ, concluderemo:

$$2l \sum i_\lambda \frac{\partial . n i_\nu}{\partial \mu} = \frac{\partial . n l \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} + \frac{\partial . l m \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} - \frac{\partial . m n \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}. \tag{20}$$

Mediante le due solite permutazioni potremo poi desumere sì dalla (19) che dalla (20) due nuove formole. Osserviamo però che le (19), (20) conducono alla

$$\sum i_\lambda \frac{\partial . m i_\mu}{\partial \nu} = \sum i_\lambda \frac{\partial . n i_\nu}{\partial \mu},$$

la quale è una equazione identica in causa della seconda (12); perciò le tre del gruppo (20) sono le stesse tre del gruppo (19).

7.

Ciò premesso, passiamo a formare tre equazioni fra le espressioni alle derivate parziali del second'ordine $\sum \frac{\partial^2 \lambda}{\partial i^2}$, $\sum \frac{\partial^2 \mu}{\partial i^2}$, $\sum \frac{\partial^2 \nu}{\partial i^2}$.

Prendiamo le i per variabili indipendenti, e risguardiamo le li_λ, mi_μ, ni_ν come funzioni delle λ, μ, ν. Derivando la (3) rispetto ad i e la prima (4) rispetto ad i' avremo:

$$\left.\begin{aligned} li_\lambda \frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2} + mi_\mu \frac{\partial^2\mu}{\partial i^2} + ni_\nu \frac{\partial^2\nu}{\partial i^2} + \frac{\partial.li_\lambda}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i} + \frac{\partial.mi_\mu}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i} + \frac{\partial.ni_\nu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i} = 0, \\ li_\lambda \frac{\partial^2\lambda}{\partial i'^2} + mi_\mu \frac{\partial^2\mu}{\partial i'^2} + ni_\nu \frac{\partial^2\nu}{\partial i'^2} + \frac{\partial.li_\lambda}{\partial i'}\frac{\partial\lambda}{\partial i'} + \frac{\partial.mi_\mu}{\partial i'}\frac{\partial\mu}{\partial i'} + \frac{\partial.ni_\nu}{\partial i'}\frac{\partial\nu}{\partial i'} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Sommiamo tra di loro queste equazioni, considerando la seconda come rappresentativa di due diverse corrispondenti ai due diversi valori della i'. Risulterà, tenendo conto delle (12),

$$li_\lambda \frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2} + mi_\mu \sum \frac{\partial^2\mu}{\partial i^2} + ni_\nu \sum \frac{\partial^2\nu}{\partial i^2} + \frac{\partial.li_\lambda}{\partial\lambda}\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)^2 + \frac{\partial.mi_\mu}{\partial\mu}\sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)^2 + \frac{\partial.ni_\nu}{\partial\nu}\sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial i}\right)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial.li_\lambda}{\partial\mu}\sum\frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{\partial\mu}{\partial i} + 2\frac{\partial.mi_\mu}{\partial\nu}\sum\frac{\partial\mu}{\partial i}\frac{\partial\nu}{\partial i} + 2\frac{\partial.li_\lambda}{\partial\nu}\sum\frac{\partial\nu}{\partial i}\frac{\partial\lambda}{\partial i} = 0.$$

Moltiplichiamo questa equazione per i_λ, prendiamo sul prodotto la somma $\sum$ e, rammentando le formole de' numeri 3, 4, 6, troveremo:

$$\left.\begin{aligned} & l\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2} + m\cos\varepsilon_\nu \sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2} + n\cos\varepsilon_\mu \sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2} \\ & + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l^2}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2 l}\left(\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu} - m\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right) + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\Delta n^2 l}\left(\frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\nu} - n\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right) \\ & - 2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\nu}{\Delta lm}\frac{\partial l}{\partial\mu} - 2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\eta_\mu}{\Delta nl}\frac{\partial l}{\partial\nu} \\ & - \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda}{\Delta mnl}\left(\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} + \frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu} - \frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Deduciamo da questa, mediante una permutazione semplice,

$$\left.\begin{aligned} & m\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2} + n\cos\varepsilon_\lambda \sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2} + l\cos\varepsilon_\nu \sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2} \\ & + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2}\frac{\partial m}{\partial\mu} + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\Delta n^2 m}\left(\frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\nu} - n\frac{\partial n}{\partial\mu}\right) + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l^2 m}\left(\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\lambda} - l\frac{\partial l}{\partial\mu}\right) \\ & - 2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda}{\Delta mn}\frac{\partial m}{\partial\nu} - 2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\nu}{\Delta lm}\frac{\partial m}{\partial\lambda} \\ & - \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \cos\eta_\mu}{\Delta nlm}\left(\frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu} - \frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Deduciamo altresì dalla stessa (a), mediante una permutazione doppia,

$$\left.\begin{aligned}
&n\sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}+l\cos\varepsilon_\mu\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}+m\cos\varepsilon_\lambda\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2}\\
&+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\Delta n^2}\frac{\partial n}{\partial\nu}+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l^2 n}\left(\frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}-l\frac{\partial l}{\partial\nu}\right)+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2 n}\left(\frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}-m\frac{\partial m}{\partial\nu}\right)\\
&-2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu}{\Delta nl}\frac{\partial n}{\partial\lambda}-2\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda}{\Delta mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}\\
&-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{\Delta lmn}\left(\frac{\partial.nl\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu}+\frac{\partial.mn\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{\partial.lm\cos\varepsilon_\nu}{\partial\nu}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\ (c)$$

8.

Risolviamo finalmente le (a), (b), (c) del numero precedente rispetto alle espressioni $\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}$, $\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2}$, $\sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}$.

Sommiamo le (a), (b), (c) dopo averle moltiplicate ordinatamente per

$$-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda,\quad \cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu,\quad \cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda\,.$$

Il complesso de' termini contenenti $\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}$ si riduce a

$$-l\Delta\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}\,;$$

ed i complessi dei termini contenenti $\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2}$, $\sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}$ si riducono ciascuno a zero.

Formiamo il complesso de' termini contenenti le derivate prese rispetto a λ. La parte che contiene $\frac{\partial l}{\partial\lambda}$ è

$$-\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l^2}\frac{\partial l}{\partial\lambda}\left\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\nu(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)-\cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\right\},$$

ovvero:

$$-\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\lambda}\,.$$

La parte che contiene $\frac{\partial m}{\partial \lambda}$ è

$$\frac{1}{\Delta lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\Big[\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu+(\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\lambda\Big\}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda$$
$$+\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\nu+2(\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu)+(\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu)\cos\varepsilon_\lambda\Big\}(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)$$
$$+(\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu)\cos\varepsilon_\lambda(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big],$$

ovvero:

$$\frac{1}{\Delta lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\Big[\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu+(\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\lambda\Big\}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda$$
$$+(\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu)\Big\{\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu+\cos\varepsilon_\lambda(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big\}\Big],$$

oppure:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu+(\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\lambda+(\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu)\cos\varepsilon_\nu\Big\},$$

o finalmente:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{lm}\frac{\partial m}{\partial \lambda}.$$

Siccome l'equazione, che farà conoscere il valore di $\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}$, dev'essere simmetrica rispetto alle μ, ν, così la parte che contiene $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ si otterrà dalla parte che contiene $\frac{\partial m}{\partial \lambda}$ collo scambiare in questa le quantità relative a μ nelle corrispondenti relative a ν, e sarà quindi:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{nl}\frac{\partial n}{\partial \lambda}.$$

La parte che contiene $\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}$ è

$$-\frac{1}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu.\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu$$
$$+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu.\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu),$$

ovvero:

$$-\frac{1}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu(\cos\eta_\lambda+2\cos\eta_\mu\cos\eta_\nu),$$

o anche:

$$-\frac{1}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu(2\operatorname{sen}\eta_\mu\operatorname{sen}\eta_\nu\cos\varepsilon_\lambda-\cos\eta_\lambda),$$

o finalmente:

$$\frac{1}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\left(\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda-2\,\frac{\Delta\cos\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}\right).$$

Da ultimo, le parti che contengono $\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}$ sono:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu,\quad \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta l}\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\nu.$$

Riunendo ora le sei parti contenenti tutte le derivate prese rispetto a λ, abbiamo il seguente complesso:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{l}\Bigg[-\frac{\partial\log l}{\partial\lambda}+\frac{\partial\log m}{\partial\lambda}+\frac{\partial\log n}{\partial\lambda}+2\frac{\partial\log\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}$$
$$+\frac{1}{\Delta}\left\{(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}+(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}+(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}\right\}\Bigg],$$

che può scriversi:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{l}\left(\frac{\partial\log\frac{mn}{l}}{\partial\lambda}+\frac{\partial\log\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial\log\Delta}{\partial\lambda}\right),$$

o anche:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{l}\frac{\partial\log\left(\frac{mn}{l}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\partial\lambda}.$$

Formiamo ora il complesso de' termini contenenti le derivate prese rispetto a μ. La parte che contiene $\frac{\partial l}{\partial\mu}$ è

$$\frac{1}{\Delta lm}\frac{\partial l}{\partial\mu}\Big\{-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+2\operatorname{sen}^3\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda\cos\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda$$
$$-(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda-\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu\cos\varepsilon_\mu)\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu$$
$$-\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu\cos\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\cos\eta_\mu\Big\},$$

ovvero:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta lm}\frac{\partial l}{\partial\mu}\left(-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu+\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda\cos\varepsilon_\mu\right),$$

o anche:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta lm}\frac{\partial l}{\partial\mu}\Big\{\cos\varepsilon_\nu\cos^2\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu+\cos\varepsilon_\mu(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\Big\},$$

o finalmente

$$0.$$

La parte che contiene $\frac{\partial m}{\partial\mu}$ è

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2}\frac{\partial m}{\partial\mu}\Big\{-\cos\varepsilon_\nu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu+\cos\varepsilon_\lambda(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big\},$$

oppure

$$0.$$

La parte che contiene $\frac{\partial n}{\partial\mu}$ è

$$\frac{1}{\Delta mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}\Big[(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\cos\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda-\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu-(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\cos\varepsilon_\mu\Big\}(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)$$

$$+\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda-2(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)-(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)\cos\varepsilon_\mu\Big\}(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big],$$

ovvero:

$$\frac{1}{\Delta mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}\Big[(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\cos\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)$$

$$+\Big\{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda-2(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\Big\}(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big],$$

o anche:

$$\frac{1}{\Delta mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}\Big\{\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu(\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu-2)$$

$$-\cos\varepsilon_\nu(\cos^2\varepsilon_\mu\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu+\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos^2\varepsilon_\lambda-2\cos^2\varepsilon_\lambda-2\cos^2\varepsilon_\mu+2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\Big\},$$

oppure:

$$\frac{1}{\Delta mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}\Big\{\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu(\Delta-2\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)-\cos\varepsilon_\nu(\Delta-2\cos^2\varepsilon_\lambda\cos^2\varepsilon_\mu)\Big\},$$

o finalmente:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{mn}\frac{\partial n}{\partial\mu}.$$

La parte che contiene $\frac{\partial \cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}$ è

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m}(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}.$$

La parte che contiene $\frac{\partial \cos\varepsilon_\mu}{\partial}$ è

$$\frac{1}{\Delta m}\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu}\Big\{(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda+(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)$$
$$-(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\Big\},$$

ovvero:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta m}(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu}.$$

Da ultimo, la parte che contiene $\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu}$ è

$$-\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu}.$$

Riunendo ora le sei parti contenenti tutte le derivate prese rispetto a μ, abbiamo il seguente complesso:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial\log n}{\partial\mu}+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m}(\cos\varepsilon_\mu-\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon_\lambda)\frac{\partial\cos\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}$$
$$+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\Delta m}(\cos\varepsilon_\lambda-\cos\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\nu)\frac{\partial\cos\varepsilon_\mu}{\partial\mu}-\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m}\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\frac{\partial\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu},$$

che può scriversi:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial\log n}{\partial\mu}$$
$$+\frac{1}{\Delta m}\Big\{\frac{\cos\varepsilon_\nu}{2}\frac{\partial.\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\partial\mu}-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\frac{\partial.\cos\varepsilon_\nu}{\partial\mu}-$$
$$-\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\left(\frac{\partial\log\operatorname{tang}\varepsilon_\lambda}{\partial\mu}+\frac{\partial\log\operatorname{tang}\varepsilon_\mu}{\partial\mu}\right)\Big\},$$

ovvero:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial\log n}{\partial\mu}$$
$$+\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m}\left(\cos\varepsilon_\nu\frac{\partial\log\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}{\cos\varepsilon_\nu}}{\partial\mu}-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu\frac{\partial\log.\operatorname{tang}\varepsilon_\lambda\operatorname{tang}\varepsilon_\mu}{\partial\mu}\right),$$

oppure:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial \log n}{\partial\mu}$$

$$+\frac{1}{m\operatorname{sen}^2\eta_\nu}\left\{(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)\frac{\partial\log.\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}{\partial\mu}-\frac{\partial(\cos\varepsilon_\nu-\cos\varepsilon_\lambda\cos\varepsilon_\mu)}{\partial\mu}\right\},$$

ossia:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\left\{\frac{\partial\log n}{\partial\mu}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\eta_\nu}\left(\frac{\partial\log.\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{\partial\mu}-\frac{\partial\log.\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}{\partial\mu}\right)\right\},$$

o anche:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\left(\frac{\partial\log n}{\partial\mu}-\frac{\partial\log.\operatorname{tang}\eta_\nu}{\partial\mu}\right),$$

o finalmente:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial\log.n\cot\eta_\nu}{\partial\mu}.$$

È chiaro che il complesso de' termini contenenti le derivate prese rispetto a ν s'otterrà dal complesso precedente collo scambiare in esso le quantità relative alle μ, ν nelle corrispondenti relative alle ν, μ, e sarà quindi:

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu}{n}\frac{\partial\log.m\cot\eta_\mu}{\partial\nu}.$$

Premesso tutto ciò, la somma delle (a), (b), (c), moltiplicate ciascuna come s'è detto, conduce all'equazione:

$$l\Delta\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{l}\frac{\partial\log\frac{mn}{l}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\lambda}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\cos\eta_\nu}{m}\frac{\partial\log.n\cot\eta_\nu}{\partial\mu}-\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\mu}{n}\frac{\partial\log.m\cot\eta_\mu}{\partial\nu};$$

la quale, moltiplicata alla sua volta per $\frac{mn}{\sqrt{\Delta}}$, si cambia nella prima delle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
lmn\sqrt{\Delta}\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}&=\frac{\partial.\frac{mn}{l}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\lambda}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\lambda}-\frac{\partial.n\cot\eta_\nu}{\partial\mu}-\frac{\partial.m\cot\eta_\mu}{\partial\nu},\\
lmn\sqrt{\Delta}\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2}&=\frac{\partial.\frac{nl}{m}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\mu}-\frac{\partial.l\cot\eta_\lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial.n\cot\eta_\nu}{\partial\lambda},\\
lmn\sqrt{\Delta}\sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}&=\frac{\partial.\frac{lm}{n}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\nu}-\frac{\partial.m\cot\eta_\mu}{\partial\lambda}-\frac{\partial.l\cot\eta_\lambda}{\partial\mu}.
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Le due altre si concludono dalla prima mediante una permutazione semplice ed una doppia. Le (22) somministrano le richieste trasformazioni delle tre espressioni alle derivate parziali del second'ordine.

Se i tre sistemi di superficie sono ortogonali tra di loro, le (22) si riducono alle note:

$$lmn\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial i^2}=\frac{\partial.\frac{mn}{l}}{\partial\lambda},\qquad lmn\sum\frac{\partial^2\mu}{\partial i^2}=\frac{\partial.\frac{nl}{m}}{\partial\mu},\qquad lmn\sum\frac{\partial^2\nu}{\partial i^2}=\frac{\partial.\frac{lm}{n}}{\partial\nu}.$$

PARTE SECONDA (*).

Abbiasi la questione: Trovare nell'interno d'un corpo solido omogeneo indefinito i sistemi di linee le quali, isotermiche in un istante dato, restano isotermiche dopo un tempo qualunque, dimodochè la temperatura d'un punto possa esprimersi in funzione del tempo e di due altre variabili indipendenti.

Divideremo la trattazione in due sezioni. Nella prima ricercheremo le proprietà geometriche comuni a tutti i sistemi di linee isotermiche; e nella seconda individueremo ciascun sistema possibile di queste linee. La sezione prima, per la quale basterà l'applicazione delle formole già stabilite, sarà trattata nella Memoria presente; e la seconda, per la quale occorrerà l'applicazione di formole ulteriori, sarà differita ad una Memoria successiva.

(*) Le formole di questa parte seconda saranno indicate, a differenza di quelle della prima, mediante numeri non racchiusi entro parentesi.

1.

Siano x, y, z le coordinate rettangolari d'un punto qualunque del corpo; t il tempo; T la temperatura del punto qualunque alla fine del tempo t; h il coefficiente della conducibilità; k il calorico specifico; 1 la densità. Il moto del calore nell'interno del corpo sarà regolato dalla nota equazione:

$$\sum \frac{\partial^2 T}{\partial i^2} = \frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad 1.$$

Ora, ammettiamo che nell'interno del corpo esista un sistema di linee, le quali restino isotermiche per tutto il tempo t e siano rappresentate dalle equazioni:

$$x = x^0 (z, \mu, \nu), \qquad y = y^0 (z, \mu, \nu);$$

ove μ, ν sono due parametri costanti per ciascuna linea e variabili dall'una all'altra. Risolvendo queste equazioni rispetto alle μ, ν, si otterranno due novelle equazioni dalla forma:

$$\mu = \mu^0 (x, y, z), \qquad \nu = \nu^0 (x, y, z);$$

ed evidentemente si potranno risguardare le μ, ν come i parametri di due sistemi di superficie, le quali determinano mediante le loro intersezioni le differenti linee isotermiche. D'ora in poi risguarderemo le μ, ν sotto quest'ultimo punto di vista; ed è chiaro che per non limitare la generalità della soluzione dovremo considerare i due sistemi di superficie come tali che s'incontrino sotto angolo qualunque.

Ciò posto, la temperatura d'un punto qualunque del corpo potrà essere espressa in funzione delle tre sole variabili μ, ν, t; e quindi l'equazione 1. potrà essere trasformata nella:

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial \mu^2} + 2B \frac{\partial^2 T}{\partial \mu \partial \nu} + C \frac{\partial^2 T}{\partial \nu^2} + D \frac{\partial T}{\partial \mu} + E \frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad 2.$$

ove si fecero per brevità:

$$A = \sum \left(\frac{\partial \mu}{\partial i}\right)^2, \quad B = \sum \frac{\partial \mu}{\partial i} \frac{\partial \nu}{\partial i}, \quad C = \sum \left(\frac{\partial \nu}{\partial i}\right)^2, \quad D = \sum \frac{\partial^2 \mu}{\partial i^2}, \quad E = \sum \frac{\partial^2 \nu}{\partial i^2}.$$

Ora, perchè questa equazione somministri un valore di T formato con le sole μ, ν, t, fa d'uopo in generale che le A, B, C, D, E possano esprimersi in funzioni de' due soli parametri μ, ν. Ecco cinque condizioni analitiche, le quali ci faranno scoprire le proprietà geometriche comuni a tutti i sistemi possibili di linee isotermiche.

2.

Affine d'interpretare geometricamente le condizioni or ora concluse, converrà che aggiungiamo a' due sistemi di superficie, i cui parametri sono μ, ν, un terzo sistema di parametro λ, il quale resterà qualunque pel momento. Allora, le tre prime condizioni analitiche conducono, in causa delle (10), (11), alle tre seguenti equazioni:

$$A = \frac{\mathrm{sen}^2\varepsilon_\mu}{\Delta m^2}, \qquad B = -\frac{\mathrm{sen}\varepsilon_\mu \mathrm{sen}\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda}{\Delta mn}, \qquad C = \frac{\mathrm{sen}^2\varepsilon_\nu}{\Delta n^2}, \tag{3.}$$

i primi membri delle quali sono indipendenti da λ. Se ne deduce:

$$AC - B^2 = \frac{\mathrm{sen}^2\varepsilon_\mu \mathrm{sen}^2\varepsilon_\nu \mathrm{sen}^2\eta_\lambda}{\Delta^2 m^2 n^2},$$

ovvero, in causa delle (9),

$$AC - B^2 = \frac{1}{\Delta m^2 n^2}.$$

Mediante questo valore la prima e la terza 3. diventano:

$$n^2 \mathrm{sen}^2\varepsilon_\mu = \frac{A}{AC - B^2}, \qquad m^2 \mathrm{sen}^2\varepsilon_\nu = \frac{C}{AC - B^2};$$

perciò, dinotando con M, N due funzioni de' soli parametri μ, ν, saranno dapprima:

$$m \,\mathrm{sen}\varepsilon_\nu = M, \qquad n \,\mathrm{sen}\varepsilon_\mu = N. \tag{4.}$$

In seguito, la seconda 3. può scriversi, in causa delle 4.:

$$\mathrm{sen}^2\varepsilon_\mu \mathrm{sen}^2\varepsilon_\nu \cos\eta_\lambda = -\Delta BMN;$$

e questa alla sua volta, in causa delle (9), si cangia in:

$$\cos\eta_\lambda = -BMN \mathrm{sen}^2\eta_\lambda;$$

la quale mostra che l'angolo η_λ compreso tra le superficie (μ), (ν) non dipende da λ. Abbiamo dunque tre proprietà geometriche, rappresentate da' due valori 4. e dalla costanza di η_λ rispetto a λ, le quali sono comuni a tutti i sistemi possibili di linee isotermiche.

3.

Le due ultime condizioni analitiche conducono, in causa delle (22), alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} lmn\sqrt{\Delta}.D &= \frac{\partial.\frac{nl}{m}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\mu} - \frac{\partial.l\cot\eta_\lambda}{\partial\nu} - \frac{\partial.n\cot\eta_\nu}{\partial\lambda}, \\ lmn\sqrt{\Delta}.E &= \frac{\partial.\frac{lm}{n}\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{\sqrt{\Delta}}}{\partial\nu} - \frac{\partial.m\cot\eta_\mu}{\partial\lambda} - \frac{\partial.l\cot\eta_\lambda}{\partial\mu}; \end{aligned}\right\} \qquad 5.$$

nelle quali le D, E sono funzioni indipendenti da λ. Si tratta ora di presentare queste due equazioni sotto una forma opportuna per l'interpretazione geometrica. A tal fine, osserviamo che sono, in causa delle (9) e delle 4.:

$$mn\sqrt{\Delta} = m\operatorname{sen}\varepsilon_\nu.\ n\operatorname{sen}\varepsilon_\mu.\ \operatorname{sen}\eta_\lambda = MN\operatorname{sen}\eta_\lambda,$$

$$\frac{nl\operatorname{sen}^2\varepsilon_\mu}{m\sqrt{\Delta}} = \frac{l}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}\,\frac{n\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}{m\operatorname{sen}\varepsilon_\nu} = l\,\frac{N}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda},$$

$$\frac{lm\operatorname{sen}^2\varepsilon_\nu}{n\sqrt{\Delta}} = \frac{l}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}\,\frac{m\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}{n\operatorname{sen}\varepsilon_\mu} = l\,\frac{M}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda},$$

perciò le 5., raccogliendo ne' primi membri tutti i termini moltiplicati da l, potranno scriversi:

$$l\left(DMN\operatorname{sen}\eta_\lambda - \frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{N}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{\partial\cot\eta_\lambda}{\partial\nu}\right) = \frac{N}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda}\frac{\partial l}{\partial\mu} - \cot\eta_\lambda\frac{\partial l}{\partial\nu} - \frac{\partial.n\cot\eta_\nu}{\partial\lambda},$$

$$l\left(EMN\operatorname{sen}\eta_\lambda - \frac{\partial}{\partial\nu}\cdot\frac{M}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{\partial\cot\eta_\lambda}{\partial\mu}\right) = \frac{M}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda}\frac{\partial l}{\partial\nu} - \cot\eta_\lambda\frac{\partial l}{\partial\mu} - \frac{\partial.m\cot\eta_\mu}{\partial\lambda}.$$

Ora risolvendo queste equazioni rispetto a $\frac{\partial l}{\partial\mu}$, $\frac{\partial l}{\partial\nu}$, e ponendo per brevità:

$$DMN\operatorname{sen}\eta_\lambda - \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{N}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{\partial\cot\eta_\lambda}{\partial\nu} = D^0,$$

$$EMN\operatorname{sen}\eta_\lambda - \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{M}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{\partial\cot\eta_\lambda}{\partial\mu} = E^0,$$

ove D^0, E^0 sono due funzioni delle sole μ, ν, si troveranno:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = l\left(\frac{MD^0}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + E^0\cot\eta_\lambda\right) + \frac{M}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda}\frac{\partial . n\cot\eta_\nu}{\partial \lambda} + \cot\eta_\lambda \frac{\partial . m\cot\eta_\mu}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial l}{\partial \nu} = l\left(\frac{NE^0}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + D^0\cot\eta_\lambda\right) + \frac{N}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda}\frac{\partial . m\cot\eta_\mu}{\partial \lambda} + \cot\eta_\lambda \frac{\partial . n\cot\eta_\nu}{\partial\lambda},$$

le quali, ponendo ancora per brevità:

$$\frac{MD^0}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + E^0\cot\eta_\lambda = D'M, \qquad \frac{NE^0}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + D^0\cot\eta_\lambda = E'N,$$

ove D', E' sono due novelle funzioni delle sole μ, ν, potranno scriversi:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = MD'l + M\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{n\cot\eta_\nu}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{m\cot\eta_\lambda\cot\eta_\mu}{M}\right),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \nu} = NE'l + N\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{m\cot\eta_\mu}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{n\cot\eta_\nu\cot\eta_\lambda}{N}\right).$$

Ma:

$$\frac{n\cot\eta_\nu}{N\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{m\cot\eta_\lambda\cot\eta_\mu}{M} = \frac{\cos\eta_\nu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu\operatorname{sen}\eta_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{\cos\eta_\lambda\cos\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda\operatorname{sen}\eta_\mu} =$$

$$\frac{\cos\eta_\nu + \cos\eta_\lambda\cos\eta_\mu}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda\operatorname{sen}\eta_\mu} = \cot\varepsilon_\nu;$$

ed analogamente:

$$\frac{m\cot\eta_\mu}{M\operatorname{sen}\eta_\lambda} + \frac{n\cot\eta_\nu\cot\eta_\lambda}{N} = \cot\varepsilon_\mu.$$

Avremo dunque finalmente le equazioni:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = M\left(D'l + \frac{\partial\cot\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}\right), \qquad \frac{\partial l}{\partial\nu} = N\left(E'l + \frac{\partial\cot\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}\right), \qquad 6.$$

le quali si prestano facilmente all'interpretazione geometrica, come or ora vedremo.

4.

Cominciamo dall'osservare che la prima (13) e la seconda (15), mediante i valori 4., somministrano:

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=-M\cot^2\varepsilon_\nu\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}+\frac{M}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\sum i_\lambda\frac{\partial i_\mu}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial l}{\partial\nu}=-N\cot^2\varepsilon_\mu\frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}+\frac{N}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum i_\lambda\frac{\partial i_\nu}{\partial\lambda};$$

ovvero:

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=M\left(\frac{\partial\cot\varepsilon_\nu}{\partial\lambda}-\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\sum i_\mu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}\right),$$

$$\frac{\partial l}{\partial\nu}=N\left(\frac{\partial\cot\varepsilon_\mu}{\partial\lambda}-\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum i_\nu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}\right).$$

Ora, i valori 6. riducono queste equazioni a:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}\sum i_\mu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}=-D'l,\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}\sum i_\nu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}=-E'l. \tag{7.}$$

Ciò posto, si chiami l' la derivata, presa rispetto a λ, dell'angolo di contingenza d'una linea isotermica qualunque (μ,ν); e si consideri l'angolo triedro i cui spigoli sono la tangente e la normale principale di questa linea unitamente alla tangente della intersezione (ν,λ). È chiaro che l'espressione:

$$\frac{1}{l'}\sum i_\mu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda},$$

la quale dinota il coseno dell'angolo compreso tra gli spigoli secondo e terzo, ha per valore, in causa delle formole della trigonometria sferica, il prodotto di $\operatorname{sen}\varepsilon_\nu$ pel coseno dell'angolo compreso tra il piano degli spigoli primo e secondo ed il piano degli spigoli terzo e primo; e quindi ha per valore il prodotto di $\operatorname{sen}\varepsilon_\nu$ pel coseno dell'angolo compreso tra il piano osculatore della linea (μ,ν) ed il piano tangente della superficie (ν). Per conseguenza, avvertendo che la normale principale di questa linea e la perpendicolare al piano del suo circolo osculatore unitamente alla normale di questa superficie (ν) si trovano in uno stesso piano perpendicolare alla (μ,ν), e chiamando ω'_λ l'angolo formato dalla prima di queste rette con la terza, avremo:

$$\frac{1}{l'}\sum i_\mu\frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}=\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\omega'_\lambda.$$

Così, chiamando ω_λ l'angolo compreso tra la normale principale della linea isotermica e la normale della superficie (μ), avremo pure:

$$\frac{1}{l'}\sum i_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial\lambda}=\operatorname{sen}\varepsilon_\mu \operatorname{sen}\omega_\lambda.$$

In causa di questi valori, le equazioni 7. assumono la forma:

$$l'\operatorname{sen}\omega'_\lambda=-D'l, \qquad l'\operatorname{sen}\omega_\lambda=-E'l. \tag{8.}$$

Ora, siccome abbiamo manifestamente:

$$\eta_\lambda=\omega\lambda+\omega'_\lambda.$$

e siccome η_λ è funzione delle sole μ, ν, così le 8. ci portano a concludere che le tre quantità:

$$\frac{l'}{l}, \quad \omega_\lambda, \quad \omega'_\lambda$$

sono indipendenti da λ. Adunque, le superficie (μ), (ν) sono tali che queste tre quantità rimangono costanti in tutta la lunghezza d'una linea isotermica e variano soltanto col passare dall'una linea all'altra.

Queste ultime proprietà geometriche, unite a quelle trovate al n. 2, sono le proprietà comuni a tutti i sistemi possibili di linee isotermiche del corpo solido.

Pavia, 27 agosto 1867.

Sulle normali all' ellissoide.

(*del sig.* C. F. GEISER, *a Zurigo*).

Il presente lavoro ha per iscopo di dedurre per via sintetica i teoremi sulle normali di una superficie di secondo grado, che STEINER ha enunciati nella sua memoria *Ueber algebraische Curven und Oberflächen* (*), e di aggiungervi una serie d'altri risultati. Alcuni di questi sono già contenuti nelle memorie di JOACHIMSTHAL (**) e di CLEBSCH (***), nelle quali però il problema delle normali è trattato analiticamente. Per giustificare la pubblicazione di questo scritto, basti osservare che non esiste ancora una trattazione sintetica completa dell'argomento. Nell'esposizione ci parve conveniente di riferire le considerazioni all'ellissoide, perchè questa limitazione rischiara moltissimo l'intuizione, e d'altronde il passaggio alle altre superficie di secondo grado non offre alcuna difficoltà essenziale.

I.

Se in un punto arbitrario dell'ellissoide F_2 si innalza la perpendicolare al relativo piano tangente, essa è la normale alla superficie nel punto prescelto. Da un punto dell'ellissoide si può sempre condurre una ed una sola retta, che nel punto stesso sia normale alla superficie; ma non è esclusa la possibilità che da esso partano altre rette le quali siano normali alla superficie nella loro seconda intersezione colla medesima. Una facile conside-

(*) G. di Crelle, t. 49.
(**) Ibid. t. 59.
(***) Ibid. t. 62. Annali di Matematica (1ª serie) t. 4 p. 195. Cfr. CHASLES *Aperçu historique* note 31.ᵉ—DESBOVES *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du* 2ᵈ *ordre*. Paris 1862.

razione geometrica mostra che per un punto qualsivoglia p, non situato sull'ellissoide, passano sempre almeno due normali della superficie. Infatti se c'immaginiamo il fascio di tutte le sfere di centro p, esso si decompone in tre serie costituite dalle sfere che includono o intersecano o escludono F_2. Queste tre serie sono separate, la prima dalla seconda e questa dalla terza, mediante due sfere che toccano l'ellissoide, e delle quali l'una include e l'altra esclude F_2. È poi indifferente se p sia dentro o fuori dell'ellissoide, o anche infinitamente distante; ed anche nel caso limite, che p si trovi sulla superficie F_2, si può facilmente stabilire il medesimo risultato. Per decidere se, oltre alle rette che vanno da p ai punti di contatto delle due sfere nominate, si possano condurre dallo stesso punto altre normali all'ellissoide, stabiliamo alcuni teoremi che seguono.

Se n è una normale di F_2, essa fa un angolo retto colla sua polare, relativa alla superficie. Infatti la polare è situata nel piano tangente in quel punto dal quale si eleva la normale, cioè in un piano perpendicolare ad n; donde segue la proprietà enunciata. Ora, se una retta g passante pel punto p, dato arbitrariamente nello spazio, dev'essere normale all'ellissoide F_2, la sua polare g' dovrà giacere nel piano P, polare di p rispetto ad F_2, ed inoltre l'angolo delle rette g, g' dev'essere retto. Quest'ultima condizione si può anche esprimere altrimenti, ricorrendo al cerchio imaginario all'infinito k_∞: cioè i punti all'infinito di g e g' devono essere conjugati armonici rispetto a questo cerchio. Ma gli stessi punti sono anche coniugati armonici rispetto alla conica K_∞, che l'ellissoide ha in comune col piano all'infinito. Dunque, se è dato il punto all'infinito p'_∞ di g', si troverà il punto all'infinito p_∞ di g, determinando l'intersezione delle due polari di p'_∞ rispetto a k_∞ e K_∞. Ma p'_∞ appartiene necessariamente alla retta all'infinito di P; e se quel punto percorre questa retta, il punto p_∞ (in virtù di un noto teorema) descriverà una conica circoscritta al triangolo coniugato comune a k_∞ e K_∞, i cui vertici sono i punti all'infinito degli assi di F_2.

Dunque se una retta deve passare per un punto p e fare angolo retto colla sua polare relativa all'ellissoide F_2, essa sarà una delle generatrici di un cono di secondo grado, avente il vertice in p e contenente tre rette parallele agli assi di K_2. Una di tali generatrici è evidentemente la perpendicolare abbassata dal punto p sul suo piano polare P. Questo cono passa inoltre pel centro M di F_2, perchè la polare di Mp rispetto a K_∞ giace per intero nel piano all'infinito, e necessariamente è incontrata dalla polare del punto all'infinito di Mp rispetto a k_∞, così che, secondo la precedente notazione, un punto infinitamente lontano p'_∞ di g' ed il punto all'infinito p_∞ di $g \equiv Mp$ sono coniugati armonici rispetto a k_∞ ed e K_∞.

In generale, una normale è perpendicolare all' ellissoide in uno solo de' punti ove incontra la superficie. Se essa fosse, per entrambi i punti d'intersezione, perpendicolare ai rispettivi piani tangenti, questi dovrebbero essere paralleli, cioè la normale passerebbe pel centro dell'ellissoide. Ma le normali passanti pel centro si determinano facilmente, perchè i loro punti all' infinito dovranno avere la stessa polare rispetto a k_∞ e K_∞; cioè queste normali sono gli assi dell' ellissoide. Ciascuno di essi è normale all' ellissoide in ambedue i punti d'intersezione, epperò l' ellissoide ha tre normali doppie passanti pel centro. Una semplice considerazione geometrica mostra che anche le tre rette all'infinito, le quali congiungono i punti all' infinito degli assi, sono normali doppie di F_2; cioè l'ellissoide ha per normali doppie i sei spigoli del tetraedro coniugato che esso ha in comune con una qualsivoglia sfera concentrica, ovvero con k_∞, considerato come superficie di seconda classe (il tetraedro degli assi). Se ora esistesse un'altra normale doppia, k_∞ e K_∞ avrebbe più di un triangolo coniugato comune, epperò coinciderebbero, e l' elissoide sarebbe allora una sfera: superficie nella quale tutte le normali sono infatti normali doppie.

In generale adunque una normale all' elissoide F_2 è perpendicolare alla superficie in uno solo dei due punti d'intersezione; questo punto dicesi piede della normale.

II.

Acciocchè due normali dell' ellissoide si incontrino, dev' essere sodisfatta la condizione che la retta congiungente i due piedi sia perpendicolare alla propria polare rispetto ad F_2. Infatti, se p_1 e p_2 sono i piedi di due normali segantisi in p, i loro piani polari, cioè i piani tangenti in p_1 e p_2, si incontrano lungo una retta, che è perpendicolare al piano $p p_1 p_2$, epperò anche alla retta $p_1 p_2$ contenuta in questo piano. Viceversa, se la retta che congiunge due punti p_1, p_2 dell' ellissoide è perpendicolare alla propria polare, le normali in p_1, p_2 giacciono in un medesimo piano. Ma (I) tutte le rette passanti per p_1 e perpendicolari alle rispettive polari sono situate in un cono quadrico K_1, che ha il vertice in p_1 e passa pei vertici del tetraedro degli assi, e per la retta pp_1 normale in p_1. Sia p un punto di questa normale; il cono K_1 conterrà i piedi di tutte le normali abbassate da p. Le medesime normali sono poi anche generatrici di un altro cono quadrico K, di vertice p, circoscritto anch'esso al tetraedro degli assi. I due coni si segano secondo la retta pp_1, ed inoltre secondo una cubica gobba C_3 passante per p e p_1, ed è su queste linee che devono trovarsi i piedi delle normali abbassate da p. L'ellissoide e la retta pp_1 hanno due punti comuni, de' quali uno solo, p_1, è piede di una normale passante per p; perchè pp_1 è normale nel solo punto p_1. La cubica C_3 incontra l'ellissoide in sei punti, uno de' quali è p_1, e ciascuno di essi sarà il piede di una normale abbassata da p. Siccome K e K_1 passano insieme pei quattro vertici del tetraedro degli assi, nessuno de' quali è situato in pp_1, così si ha il teorema: Da un punto dato si possono in generale condurre sei normali all'ellissoide, delle quali almeno due sono reali; i sei piedi insieme coi quattro vertici del tetraedro degli assi (cioè col centro e coi punti all'infinito dei tre assi dell'ellissoide) sono situati in una cubica gobba, la quale è per conseguenza un'iperbole gobba equilatera (*).

Al medesimo risultato si può arrivare anche nella seguente maniera. Si sa già che da p partono due normali pp_1, pp_2; se per p passano altre normali, che naturalmente incontrano pp_1, i loro piedi dovranno trovarsi sul cono K_1 di secondo grado, cioè sulla curva C_4', intersezione di questo cono coll'ellissoide: per la quale curva il punto p' (come vertice del cono) è un punto doppio. Similmente, le richieste normali devono incontrare anche pp_2, epperò i loro piedi si troveranno anche nella curva C_4'', che un certo cono K_2 di vertice p_2 ha in comune coll'ellissoide. Dunque i piedi delle normali sono i punti comuni alle curve C_4' e C_4''. Queste curve gobbe di quart'ordine, essendo situate sopra una medesima superficie di secondo grado, hanno otto punti comuni; ma due di essi sono riuniti in p_1 e due altri in p_2; cioè oltre a pp_1, pp_2 passano per p altre quattro normali dell'ellissoide.

(*) Tutte le superficie di 2° grado passanti per queste cubiche gobbe sono iperboloidi equilateri. Ne segue che tutti gl'iperboloidi equilateri, i quali passano pei piedi delle sei normali abbassate da un punto dato sopra un ellissoide, contengono la cubica gobba che passa pei nominati sei punti.

III.

Il numero delle normali che si possono condurre da un punto dato ad un ellissoide, si può anche determinare con un altro metodo, che si fonda sopra considerazioni più generali.

Tre superficie quadriche F', F'', F''' determinano una rete geometrica (*), costituita da tutte le superficie di secondo grado, passanti pei punti comuni alle tre date. Il luogo dei vertici dei coni della rete, ossia il luogo dei punti di contatto fra superficie della rete, è una curva gobba di sesto ordine, Jacobiana delle tre superficie date (o di altre tre qualsivogliano superficie della rete, che però non formino un fascio) (**).

Ma questa proposizione generale si modifica essenzialmente, se le tre superficie date hanno fra loro speciali relazioni di posizione. Pel nostro intento, supporremo che F'' ed F''' si tocchino lungo una conica, il cui piano E avrà per conseguenza lo stesso polo e rispetto ad entrambe le superficie. Allora, nella determinazione della Jacobiana, possiamo sostituire alla superficie F''' il piano E; onde il luogo dei vertici dei coni della rete (F', F'', F''') risulta identico al luogo dei poli del piano E rispetto alle superficie quadriche passanti per la curva comune a F' e ad una qualunque delle superficie del fascio (F'', F'''); il quale ultimo luogo è una cubica gobba (***), che passerà pel punto e, pel polo di E relativo ad F', e pei vertici del triangolo coniugato comune alle coniche, sezioni di F', F'' con E. Gli ultimi quattro punti sono i vertici del tetraedro coniugato comune ad F' ed alla conica comune alle F'', F'''.

Per applicare queste considerazioni al problema delle normali, supponiamo che F'', F''' siano due sfere concentriche, il cui centro comune sia un punto p dello spazio, onde il piano E sarà il piano all'infinito; ed assumiamo in luogo di F' l'ellissoide F_2. Allora la cubica gobba, luogo dei centri delle superficie della rete, ovvero luogo dei punti di contatto fra le superficie medesime, conterrà il punto p, il centro M dell'ellissoide, ed i punti all'infinito sugli assi del medesimo. Ciascun punto p_1, comune a questa cubica

(*) Cremona *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie,* 42.

(**) Hesse (G. di Crelle t. 49) — Geiser (Vierteljahrsschrift der Zürch. Naturf. Gesellschaft, t. 10, 1865). — *Preliminari* 106, 113.

(***) *Preliminari,* 99, 113.

ed all'ellissoide, sarà dunque un punto di contatto fra l'ellissoide ed una sfera di centro p, donde segue che pp_1 è una normale dell'ellissoide. Viceversa, se pp_1 è normale in p_1 all'ellissoide, questo sarà toccato in p_1 dalla sfera di centro p e raggio pp_1, epperò p_1 sarà un punto della cubica gobba suaccennata.

È noto che i coni i quali projettano una cubica gobba da un punto di essa sono di secondo grado; perciò le rette che, a cagion d'esempio, vanno dal centro ai piedi delle sei normali calate da p, insieme coi tre assi e colla retta Mp, sono situate in un cono quadrico. E similmente le rette che passano rispettivamente per i sei piedi e per p, e sono parallele ad un asse, giacciono in un cilindro (iperbolico-equilatero) che contiene anche l'asse nominato e le rette all'infinito de' piani principali pel detto asse.

Una cubica gobba, analoga a quella dianzi trovata, ossia passante pei quattro vertici del tetraedro degli assi, passi per un dato punto q. Allora sarà q il centro di una superficie quadrica Σ, segante l'ellissoide F_2 secondo una curva situata in una sfera S. I piani polari di q rispetto alle tre superficie F_2, Σ, S passano per una stessa retta; cioè il piano polare di p rispetto ad F_1 è parallelo al piano polare relativo ad S. Ne segue che il centro della sfera S, (che è il punto a cui corrisponde la cubica gobba, cioè il punto dal quale partono le normali dell'ellissoide, aventi i piedi nella cubica gobba) è nella retta calata da q perpendicolarmente al piano polare di questo punto, relativo all'ellissoide. Cioè tutte le cubiche gobbe analoghe passanti per q corrispondono ai punti di questa retta; e fra esse quella che corrisponde al punto q è ivi toccata dalla retta medesima.

Il luogo dei centri delle superficie di un fascio (F', F'') contiene anche i centri delle superficie della rete (F', F'', F''') ove F''' sia concentrica ed omotetica ad F', cioè F''' e F' si tocchino lungo una conica nel piano all'infinito. Perciò la cubica gobba, sopra determinata come corrispondente al punto p, è anche il luogo dei centri delle superficie nella rete (F_2, F_2', S), dove F_2 è l'ellissoide dato, F_2' un altro ellissoide concentrico ed omotetico al dato, ed S una sfera di centro p. Se poi S' è un'altra sfera di centro p, lo stesso luogo conterrà anche i centri delle quadriche del sistema lineare determinato dalle quattro superficie F_2, F_2', S, S', ossia la cubica gobba sarà il luogo dei punti di contatto fra le superficie del fascio (F_2, F_2'), e quelle del fascio (S, S'). Ne risulta che i piedi delle normali abbassate dal punto p sull'ellissoide dato e su tutti gli ellissoidi concentrici ed omotetici ad esso sono situati nella medesima cubica gobba (corrispondente al punto

p) passante pel punto p e pei vertici del tetraedro degli assi; epperò le normali medesime sono le generatrici di un cono quadrico passante pei vertici nominati.

IV.

Assai più facile è la ricerca del numero delle normali contenute in un piano dato. Se e è un piano che seghi l'ellissoide, e p il suo polo, tutt'i piani tangenti all'ellissoide lungo la sezione K, fatta dal piano e, passano per p. Se poi n è una normale contenuta nel piano e, ed il cui piede sia p_1, il piano tangente in p_1 sarà perpendicolare ad e, epperò passerà per la retta abbassata da p perpendicolarmente sopra e. Per questa retta passano in generale due piani tangenti all'ellissoide; i loro punti di contatto sono i piedi delle normali contenute nel piano e; cioè in un piano vi sono in generale due normali dell'ellissoide. Queste normali si costruiscono facilmente conducendo alla conica K le tangenti pel piede della perpendicolare abbassata sul piano e dal polo p; i punti di contatto saranno i piedi delle normali cercate. Da questa costruzione risulta che le due normali saranno reali distinte, o coincidenti, o imaginarie secondo che il piede della perpendicolare abbassata da p sia fuori della conica K o su di essa o entro la medesima.

Che in un piano non si trovino in generale più di due normali dell'ellissoide, risulta del resto anche da ciò che, come si può dimostrare facilmente, se un piano reale e contiene tre (epperò infinite) normali, esso è una delle facce del tetraedro degli assi. Infatti, in questo caso tre, epperò tutt'i piani tangenti passanti pel polo p sono perpendicolari al piano e; onde p sarà o il centro dell'ellissoide o uno dei punti all'infinito sugli assi.

Merita ancora d'essere notato che, se il piano e passa per uno spigolo del tetraedro degli assi, le due normali contenute nel piano coincidono nello spigolo medesimo; e se il piano e passa pel centro dell'ellissoide, le due normali sono parallele ed equidistanti dal centro.

Analoghe considerazioni speciali si possono facilmente istituire pei teoremi che abbiamo dimostrati circa le normali passanti per un punto dato. Noi ci limiteremo a ciò che segue. Delle sei normali che si possono abbassare da un punto p, se questo giace in una faccia del tetraedro degli assi, quattro sono situate in questo piano. La cubica gobba, che interseca l'ellissoide nei piedi delle normali, ed a un tempo passa pei vertici del tetraedro degli assi e per p, si decompone in un'iperbole equilatera, situata nella faccia accennata del tetraedro, ed in una retta perpendicolare a questa faccia e segante l'iperbole nel punto p (*). Se il punto p è preso in uno spigolo del tetraedro, due delle sei normali coincidono in questo spigolo, e le altre giacciono a due a due nelle due facce passanti per lo spigolo. La cubica gobba è in questo caso costituita dallo spigolo predetto, il quale contiene cinque degli undici punti suaccennati, e da due rette segantisi ad angolo retto, nelle quali sono situati gli altri sei punti, a tre a tre.

V.

I piedi di tutte quelle normali dell'ellissoide F_2, che incontrano una data normale, il cui piede sia p, sono situati in una curva gobba del quart'ordine C_4, per la quale p è un punto doppio (II). Dunque se partendo da p, si cammina su F_2, in tutte le direzioni possibili, descrivendo archi infinitamente piccoli, e se nel termine di ciascuno di questi s'innalza la normale, questa in generale non segherà la normale in p; ma ciò accadrà solamente in due speciali direzioni, determinate dalle tangenti di C_4 in p. Queste tangenti possono essere facilmente determinate; infatti esse sono l'intersezione di un certo cono quadrico K, di vertice p, col piano e che tocca F_2 in p. Il cono K è il luogo di tutte le rette passanti per p e perpendicolari alle rispettive polari relative a F_2. Se una retta così fatta g è situata in e, anche la sua polare g' giace nello stesso piano, epperò le due rette g, g_1 non sono altro che l'intersezione del cono K col piano e: esse sono le sole rette situate in K, che giacciano colle loro polari nel piano e: ciascuna di esse corrisponde all'altra. Perciò l'angolo gg' è retto, cioè le tangenti della curva gobba C_4 in p sono ortogonali fra loro. Si ha così il teorema: Ogni normale dell'ellissoide è incontrata da due normali infinitamente vicine, ed i due piani, che quella determina rispettivamente con queste, sono fra loro perpendicolari.

(*) Di qui si ricava facilmente il teorema planimetrico: Da un punto dato nel piano di una ellisse, si possono in generale condurre a questa quattro normali; i piedi si trovano, insieme col centro dell'ellisse e col punto dato, in un'iperbole equilatera i cui assintoti sono paralleli agli assi dell'ellisse. Cfr. the Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics 1865, p. 88.

Questo teorema conduce facilmente alla teoria delle linee di curvatura dell'ellissoide, se alle cose fin qui dedotte si associno gli sviluppi, che appoggiandosi alla teoria, dovuta a Poncelet (*), del tetraedro coniugato comune a due superficie di secondo grado, il sig. Chasles ha fatti conoscere intorno alle superficie omofocali (**). Siccome i relativi risultati sono in generale già noti, e la loro esposizione sintetica è affatto ovvia, così non ci arresteremo più oltre su quest'argomento.

I due punti s, s_1, nei quali la normale in p è incontrata da due normali infinitamente vicine, diconsi i centri di curvatura di p. Il luogo dei centri di curvatura per tutti i punti di F_2 dicesi superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide; essa è costituita da due falde, l'una delle quali può concepirsi generata dal continuo variare di s (insieme con p), e l'altra dal continuo variare di s_1. Questa superficie può essere definita o come luogo di un punto pel quale due delle sei normali coincidano, o anche come inviluppo di un piano nel quale le due normali coincidano. L'ultima definizione è quella che meglio conviene alle nostre investigazioni.

Affinchè le due normali contenute in un piano e coincidano, è necessario (IV) che la perpendicolare abbassata dal polo p di e sopra questo piano incontri la conica comune al piano medesimo e all'ellissoide, o con altre parole, questa perpendicolare dev'essere una tangente di F_2 (qui si osservi potersi supporre in generale che p non si trovi su F_2, perchè in tal caso la ricerca dovrebb'essere alquanto modificata). Allora noi possiamo facilmente trovare il numero di quei punti p di una data retta g, pei quali si verifica la condizione ora stabilita. I punti p formano in g una punteggiata projettiva al fascio dei piani polari dei punti medesimi, rispetto a F_2. Perciò tutte le perpendicolari abbassate dai punti p sui rispettivi piani polari sono (per un noto teorema) le generatrici di un'iperboloide I_2, che contiene g come direttrice. Il problema è ora ridotto alla ricerca del numero di generatrici di un'iperboloide che toccano un ellissoide; e si risolve come segue.

Una generatrice di I_2, che tocchi F_2, è evidentemente una tangente della curva C_4, intersezione di I_2 e F_2. La sviluppabile formata dalle tangenti di C_4 è dell'ottavo ordine; epperò, la retta g (o qualunque altra direttrice dell'iperboloide) avendo due punti comuni con C_4, incontrerà la sviluppabile in altri quattro punti. Ciascuna delle quattro tangenti di C_4, passanti per

(*) *Traité des propriétés projectives* t. 1, supplément.

(**) Compte rendu 11 juin 1860.

questi punti, è una generatrice di I_2, perchè tocca questa superficie in un punto (situato su C_4) e la incontra in un altro punto (situato su g). Sono adunque quattro i punti p in g che sodisfanno alla condizione proposta: e conseguentemente per la retta g_1, polare di g rispetto all'ellissoide, passano quattro piani in ciascun de' quali le due normali coincidono. Allo stesso risultato si arriverebbe anche colla diretta deduzione del teorema: il luogo di quelle tangenti di una superficie quadrica che incontrano due rette fisse (non situate in uno stesso piano) è una superficie di quarto grado.

Così è provato che l'inviluppo del piano e, ossia la superficie dei centri di curvatura di un' ellissoide è della quarta classe. La ricerca e la discussione dei suoi piani tangenti singolari conducono per via sintetica alla determinazione dell'ordine della superficie, e nominatamente mettono in evidenza le curve che essa ha in comune colle facce del tetraedro degli assi (*).

VI.

Siccome in generale un piano contiene due normali dell'ellissoide, e per un punto passano sei normali della medesima superficie, così le normali dell'ellissoide nella loro totalità formano un sistema di raggi di seconda classe e sesto ordine. A questo sistema si possono applicare a dirittura tutti i teoremi che, colla reciprocità polare, si deducono da quelli stabiliti dal sig. KUMMER nella sua memoria *Die algebraischen Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung* (**). La superficie focale di questo sistema è, come abbiamo sopra dimostrato indipendentemente dal concetto di sistema di raggi, della quarta classe, poichè essa coincide colla superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide. Oltre alle quattro facce del tetraedro degli assi, essa possiede altri otto piani tangenti singolari (imaginari), ciascuno de' quali contiene infiniti raggi del sistema, e l'inviluppo di questi è una conica. Questi otto piani singolari si ottengono come segue. I raggi contenuti in una qualunque delle quattro facce del tetraedro inviluppano una curva di quarta classe (con tre tangenti doppie) ed una conica: le quattro coniche analoghe hanno otto piani tangenti comuni, che sono gli otto piani singolari cercati. Sia i uno

(*) CLEBSCH l. c. Cfr. KUMMER nel Monatsb. Akad. Berl., 1862, p. 426.
(**) Abhandl. der Berl. Akad., 1866; veggasi specialmente il § 11.

de' quattro punti ne' quali la sezione all' infinito della quadrica data incontra il circolo imaginario k_∞ ; h, h' le generatrici rettilinee della quadrica, passanti per i; t la tangente a k_∞ in i: saranno th, th' due degli otto piani di cui si tratta. Gli altri sei piani si ricavano nello stesso modo dagli altri tre punti analoghi ad i. Siccome l'ordine della superficie focale di quarta classe, che appartiene ad un sistema di raggi di seconda classe, è sempre il doppio dell'ordine del sistema, così la superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide è del dodicesimo ordine. Essa ha in comune con ciascuna faccia del tetraedro una curva di sesto ordine (e quarta classe, con tre tangenti doppie), ed una conica, che è da contarsi tre volte.

Tutte le normali dell'ellissoide, che incontrano una data normale n, formano una superficie F_9 del nono grado, come si ricava dalla memoria del sig. Kummer; per questa superficie gobba, la normale data è una retta ottupla, perchè ogni piano passante per essa sega la superficie secondo una sola generatrice. La medesima superficie contiene la curva gobba di quart'ordine, secondo la quale l'ellissoide F_2 è intersecata dal cono K_1 già considerato (II); questa curva gobba ha sopra n un punto doppio ed un punto semplice. La curva piana, comune intersezione della superficie gobba con una faccia del tetraedro è composta di una curva di quint'ordine e di quattro rette, le quali sono le normali che dalla traccia di n si possono condurre alla sezione dell'ellissoide colla suddetta faccia. Si dimostra facilmente che la curva piana di quint'ordine non ha alcun punto comune colla curva gobba del quart'ordine, ma ha bensì un punto doppio sopra n.

Si può senza difficoltà determinare l'ordine della superficie formata dalle normali, i cui piedi sono i punti di una sezione piana E dell'ellissoide. In virtù di un teorema enunciato da Steiner (*), le normali lungo una sezione piana di una superficie quadrica sono ordinatamente parallele alle generatrici di un cono di secondo grado, cioè quelle normali incontrano il piano all'infinito in punti di una conica. Questa conica e la conica E sono incontrate dalle normali, che si considerano, in punti formanti due serie projettive; perciò il luogo cercato è una superficie di quarto grado (**). Il piano E e ciascuna delle facce del tetraedro degli assi contengono due generatrici di questa superficie.

In modo consimile si possono trattare sinteticamente anche alcuni altri

(*) *Systematische Entwickelung u. s. w.* p. 304.
(**) Chasles, Compte rendu 3 juin 1861.

problemi sulle normali dell' ellissoide, p. e., quello che conduce al teorema: se i piedi di tutte le normali ugualmente inclinate ad uno de' piani principali si projettano sul piano principale medesimo, il luogo delle projezioni è una conica. Noi non entreremo in queste quistioni; soltanto concluderemo col fare osservare, che se non si vuol ricorrere (come qui si è fatto) alla considerazione di elementi imaginari, si può servirsi della teoria dell' angolo retto, data da Steiner e poi da Staudt. Di tali principii, abbastanza noti, affatto scevri da imaginari, si sono serviti fra gli altri i sig[i]. Zech (*) e Reye (**) per dedurre alcuni teoremi relativi ai fuochi ed alle normali.

Zurigo, 9 luglio 1867.

(*) *Die höhere Geometrie,* Stuttgart 1857.
(**) *Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten.* (Zeitschrift f. Math. u. Ph. t. 10).

Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.

(*del prof.* Eugenio Beltrami, *a Bologna*).

I.

Rappresentiamo con

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie S che dobbiamo considerare.

Non sarà inutile il rammentare fin dal principio che quando si riguarda una superficie come definita dalla sola espressione del suo elemento lineare, bisogna prescindere da ogni concetto od imagine che implichi una concreta determinazione della sua forma in relazione ad oggetti esterni, p. es. rispetto ad un sistema d'assi rettangolari. Ogni concetto di questo genere conduce facilmente ad equivoci. Ciò solo che si deve tenere per fermo è che ogni coppia distinta di valori delle variabili u, v individua un punto (o più punti discreti) della superficie, il quale (o ciascuno dei quali) rimane, per sè stesso, essenzialmente distinto da quello (o da ciascuno di quelli) cui corrisponde un'altra coppia di valori, non identica alla prima. La possibilità della coincidenza, in un medesimo luogo dello spazio, di due punti non aventi le stesse coordinate curvilinee, non interviene propriamente che quando si considera, o si sottintende, una determinata configurazione della superficie.

La natura delle linee $u = cost.$, $v = cost.$ rimane sostanzialmente indeterminata; ma, per la precisione degli enunciati, noi non considereremo della superficie S che una porzione Ω, continua e finita, entro la quale si trovino adempiute le seguenti condizioni: 1° che le funzioni E, F, G sieno in ogni punto di Ω reali, monodrome, continue e finite; 2° che le funzioni E, G,

$EG-F^2$ $(=H^2)$ ricevano in ogni punto di Ω valori positivi e diversi da zero, talchè anche i radicali $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$, $\sqrt{EG-F^2}$ $(=H)$, che prenderemo sempre positivamente, si conservino reali e monodromi entro l'area considerata.

Di queste condizioni alcune sono necessarie perchè i punti di Ω sieno tutti reali; le altre impongono certe restrizioni alla natura del doppio sistema di curve coordinate, entro i limiti di Ω. Infatti, avendosi in generale:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{H}{\sqrt{EG}},$$

dove θ è l'angolo delle due curve intersecantisi nel punto (u, v), l'ipotesi che $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ ed H sieno quantità positive e maggiori di zero esclude il caso che l'angolo θ diventi $=0^0$ oppure $=180^0$, cioè che due curve di diverso sistema si tocchino, entro l'area Ω. Conseguentemente la distanza normale di due curve infinitamente vicine del sistema $u=cost.$ (oppure $v=cost.$) ha un rapporto finito coll'elemento $dv\sqrt{G}$ (oppure $du\sqrt{E}$) che esse intercettano sulla curva dell'altro sistema passante pel punto considerato, e poichè questo elemento è (per le ipotesi) infinitesimo dello stess'ordine di dv (oppure di du), ne emerge che ad incrementi infinitesimi del parametro u (oppure v) corrispondono curve che sono fra loro infinitamente vicine, ma che non hanno alcun punto comune, nell'interno di Ω.

Inoltre, poichè $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ ed H sono funzioni monodrome in tutti i punti di Ω, lo stesso ha luogo per le espressioni di $cos\theta$ e $sen\theta$: quindi è impossibile che ad una medesima coppia di valori delle u, v corrispondano due valori dell'angolo θ (*), e conseguentemente che una linea dell'un sistema tagli quelle dell'altro in più di un punto interno ad Ω, oppure che una curva di qualsivoglia sistema si intersechi con sè stessa in un tal punto.

Ammesse queste proprietà, conseguenze delle ipotesi stabilite, ne risulta evidentemente che ciascuna piccola regione della superficie, circostante ad un punto situato nell'interno di Ω, è coperta da un reticolo di curve coordinate il quale, salvo deviazioni minime, è in tutto simile a quello formato sopra un piano da due sistemi di rette parallele. Una tal regione si può chiamare *ordinaria*. Così, l'area Ω è tutta formata di regioni ordinarie,

(*) Quand'anche si volessero supporre eguali questi due valori, non cesserebbe di sussistere la stessa impossibilità, perchè variando infinitamente poco la disposizione delle curve (senza alterare le loro condizioni generali) si renderebbero disuguali i due angoli, senza togliere la monodromia delle funzioni $sen\theta$ e $cos\theta$.

mentre invece il reticolo formato sopra un piano da un sistema di rette divergenti dal centro comune di un sistema di circonferenze concentriche, non presenta dovunque questo carattere, benchè lo riacquisti coll'escludere semplicemente la regione immediatamente circostante al polo.

Per brevità di linguaggio chiameremo curva u (oppure curva v) relativa ad un punto dato (u_0, v_0) della superficie, quella lungo la quale si ha $v = v_0$ (oppure $u = u_0$), mentre u (oppure v) è variabile lungo la medesima. La direzione *positiva* della curva u (oppure della curva v) è quella dello spostamento prodotto da un incremento positivo dato al valore di u (oppure di v), e quindi quella stessa nella quale cresce il suo arco, il cui incremento è $ds_u = du\sqrt{E}$ (oppure $ds_v = dv\sqrt{G}$). La direzione positiva di una curva u (oppure v), nei varii suoi punti interni ad Ω, non può mai cambiare di senso dall'uno all'altro, perchè E (oppure G) non può mai, per ipotesi, diventare $= 0$. Ne risulta che, se in un punto qualunque interno ad Ω, si conducono le tangenti alle due curve coordinate, nelle rispettive direzioni positive, e si fa poscia muovere il punto entro Ω in modo continuo (del resto arbitrario) insieme colle due tangenti *positive*, mobili intorno ad esso come due aste riunite a cerniera, ha luogo la proprietà che queste due tangenti conservano sempre la medesima disposizione relativa, cioè che il senso della rotazione atta a condurre la tangente della curva u su quella della curva v attraverso l'angolo θ $(<180^0)$ interposto è sempre il medesimo. Infatti esso non potrebbe mutare che o con continuità, o per salto: ma non può mutare con continuità perchè l'angolo θ non può mai raggiungere nè 0^0 nè 180^0, come si è già veduto; e neppure può mutare per salto, perchè la direzione positiva della tangente si mantiene costante lungo ciascuna curva u o v, come si è pure osservato or ora. Conseguentemente se si conduce una normale alla superficie, dalla parte conveniente acciò essa si trovi disposta rispetto alle tangenti delle curve u v come l'asse delle z lo è rispetto a quelli delle x e delle y, si vede che questa normale *positiva* non può mai mutare di senso, nell'interno di Ω, epperò, assumendo come faccia *positiva* della superficie quella sulla quale è eretta la normale positiva, un punto il quale sia mobile comunque con continuità, entro i limiti di Ω non deve mai attraversare la superficie per mantenersi sulla sua faccia positiva. Solamente fa d'uopo notare che se l'area Ω è composta di più pezzi distinti (circostanza che non è esclusa dalle ipotesi fatte) può accadere che la faccia positiva di uno di questi pezzi non sia nel prolungamento di quella d'un altro: ma in questo caso il punto mobile non potrebbe passare dall'un pezzo all'altro con continuità, e le conclusioni precedenti varrebbero per ciascun pezzo in particolare.

Queste considerazioni, alle quali converrebbe dare una maggiore estensione, se non fossero qui subordinate ad uno scopo speciale, sono assai utili per togliere di mezzo le difficoltà che potrebbero altrimenti insorgere in certe circostanze.

Completiamo questi preliminari col richiamare alcune formole ed espressioni note.

Abbiansi due elementi lineari ds, δs uscenti dal punto (u, v), al primo dei quali corrispondano le variazioni du, dv, al secondo le δu, δv, e sia ε l'angolo che formano, contato, nel senso positivo, da ds verso δs. Qualunque sia il valore di ε, si hanno le seguenti formole, facilmente dimostrabili:

$$\left.\begin{aligned} ds\,\delta s \cos\varepsilon &= E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v\,, \\ ds\,\delta s\,\mathrm{sen}\,\varepsilon &= H(du\,\delta v - dv\,\delta u). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Chiamando $\Delta\omega$ il valore assoluto dell'area del parallelogrammo formato sui due elementi ds, δs, ed osservando che $\Delta\omega = \pm\, ds\,\delta s\, sen\,\varepsilon$ secondo che ε è minore o maggiore di 180°, si ha, dalla seconda delle precedenti formole,

$$\Delta\omega = \pm H(du\,\delta v - dv\,\delta u)\,,$$

formola nella quale si deve scegliere il segno superiore o l'inferiore secondo che la rotazione da ds verso δs, attraverso l'area del parallelogrammo, avviene nel senso positivo o in senso inverso.

Finalmente rammentiamo le espressioni generali di certe quantità che abbiamo chiamate altrove (*) parametri differenziali di 1° e di 2° ordine. Se ϕ e ψ sono due funzioni di u e di v, queste quantità sono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\phi &= \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{H^2}\,, \\ \Delta_1\phi\psi &= \frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{H^2}\,, \\ \Delta_2\phi &= \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{H}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, nel Giornale di Matematiche di Napoli. Qui abbiamo leggermente mutate le segnature e le definizioni.

$\Delta_1\phi$ e $\Delta_2\phi$ sono rispettivamente i *parametri differenziali di* 1° e *di* 2° *ordine* della funzione ϕ; $\Delta_1\phi\psi$ è il *parametro intermedio* delle due funzioni ϕ e ψ, che si riduce ad un parametro di 1° ordine quando le due funzioni sono eguali. Fra le proprietà di questi parametri, oltre quella comune della loro *invariabilità* (vedi le citate *Ricerche*), ricorderemo le seguenti: 1° Che chiamando δn la distanza normale delle due curve ϕ e $\phi+\delta\phi$ nel punto (u, v) si ha

$$\Delta_1 \phi = \frac{\delta\varphi^2}{\delta n^2}.$$

2° Che ponendo $=0$ il parametro intermedio $\Delta_1\phi\psi$ si ha la condizione di ortogonalità dei due sistemi di curve $\phi = cost.$, $\psi = cost.$ 3° Che ponendo $=0$ il parametro di 2° ordine $\Delta_2\phi$ si ha la condizione di *isometria* del sistema di curve $\phi = cost.$, cioè la condizione perchè le varie curve di esso, corrispondenti ad incrementi infinitesimi ed eguali di ϕ, associate colle curve ortogonali (opportunamente distribuite), dividano la superficie in quadrati infinitamente piccoli.

II.

Siano

$$Udu + Vdv, \qquad Udu + V'dv,$$

i due fattori imaginari conjugati del secondo membro della (1), dove

$$U = \sqrt{E}, \qquad V = \frac{F+iH}{U}, \qquad V' = \frac{F-iH}{U} \tag{4}$$

e quindi $VV' = G$. Conserviamo alle caratteristiche d, δ i significati in cui furono adoperati nel precedente articolo, e formiamo il rapporto

$$\frac{U\delta u + V\delta v}{Udu + Vdv},$$

al quale si può dare la forma $\rho e^{i\lambda}$, talchè

$$\frac{E\delta u + F\delta v + iH\delta v}{Edu + Fdv + iH dv} = \rho e^{i\lambda},$$

Eguagliando fra loro le parti reali ed imaginarie di questa equazione, e ponendo mente alle (2), si trova

$$\rho\cos\lambda=\frac{\delta s}{ds}\cos\varepsilon\,,\qquad\qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\lambda=\frac{\delta s}{ds}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,,$$

donde

$$\rho=\frac{\delta s}{ds}\,,\qquad\qquad \lambda=\varepsilon\,,$$

e quindi

$$\frac{U\delta u+V\delta v}{\delta s}=\frac{Udu+Vdv}{ds}\,e^{i\varepsilon}. \tag{5}$$

Se supponiamo che le lunghezze ds, δs sieno eguali fra loro, il secondo elemento δs può considerarsi come ottenuto mediante una rotazione $=\varepsilon$ del primo, nel senso positivo. La formola precedente ci insegna pertanto che il binomio differenziale complesso $U\delta u+V\delta v$, relativo all'elemento ruotato, si ottiene dall'analogo binomio $Udu+Vdv$ relativo all'elemento primitivo, moltiplicando quest'ultimo pel fattore $e^{i\varepsilon}$ dove ε è la grandezza della rotazione: proprietà analoga a quella che ha luogo nel piano pel binomio finito $x+iy$, considerato come rappresentante un raggio vettore uscente dall'origine delle coordinate. La medesima proprietà ha luogo naturalmente anche se il binomio $Udu+Vdv$ si moltiplica per una funzione qualunque delle u, v, e quindi in particolare essa sussiste per il binomio

$$\varkappa(Udu+Vdv)=dp+idq=dw$$

che si ottiene moltiplicando il binomio primitivo per uno qualunque, $\varkappa$, dei fattori che lo rendono differenziale esatto (fattore generalmente imaginario).

É bene notare che, stante la forma non simmetrica delle quantità U, V, alle precedenti relazioni si potrebbe dare un altro aspetto: così la (5) può scriversi nei due modi seguenti:

$$\frac{E\delta u+F\delta v+iH\delta v}{Edu+Fdv+iHdv}=\frac{F\delta u+G\delta v-iH\delta u}{Fdu+Gdv-iHdu}=\frac{\delta s}{ds}\,e^{i\varepsilon}, \tag{6}$$

che è utile di tener presenti, per evitare delle trasformazioni.

Dalle precedenti osservazioni è facile rilevare che, quando si voglia applicare vantaggiosamente la teoria delle variabili complesse e delle loro funzioni allo studio delle superficie, non è in generale $u+iv$ la variabile complessa che conviene scegliere, ma bensì quella che si ottiene dall'integrazione del binomio

$Udu+Vdv$ previamente moltiplicato per un suo fattore integrante $\varkappa$. Ora, benchè la determinazione di una tale variabile complessa dipenda da una integrazione, eseguibile solamente in certi casi particolari, le funzioni di essa, considerate per rapporto alle primitive variabili u e v, posseggono dei caratteri speciali, sufficienti a definirle, ed assegnabili in generale *a priori*.

Sia infatti $f(u, v)$ una funzione della variabile complessa w concepita nel senso testè dichiarato e riferita alla superficie S. Consideriamo la derivata di questa funzione rispetto a quella variabile, derivata che si può rappresentare così:

$$\frac{df}{dw}=\frac{\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv}{\varkappa\,(Udu+Vdv)}\,,$$

ossia:

$$\frac{df}{dw}=\frac{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du}}{\varkappa U+\varkappa V\frac{dv}{du}}\,.$$

Se assumiamo, con Riemann, come carattere distintivo delle nuove funzioni, quello di avere una derivata unica, indipendente dalla direzione $\frac{dv}{du}$, dovremo porre:

$$\frac{\partial f}{\partial u}:\frac{\partial f}{\partial v}=\varkappa U:\varkappa V\,,$$

ossia:

$$U\frac{\partial f}{\partial v}-V\frac{\partial f}{\partial u}=0\,.$$

La proprietà caratteristica delle funzioni f di w è tutta contenuta in questa equazione, la quale può scriversi nei due modi seguenti:

$$E\frac{\partial f}{\partial v}-F\frac{\partial f}{\partial u}=iH\frac{\partial f}{\partial u},\qquad G\frac{\partial f}{\partial u}-F\frac{\partial f}{\partial v}=-iH\frac{\partial f}{\partial v}\,. \tag{7}$$

Elevando al quadrato ambedue i membri di una di queste equazioni, si trova:

$$E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}+G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2=0\,,$$

ossia, per le (3),

$$\Delta_1 f = 0 \,, \tag{8}$$

equazione che sussiste anche per quella funzione che si deduce da f mutando i in $-i$. Dunque: *le funzioni* f *di* w, *espresse per* u *e* v, *hanno il parametro differenziale di* 1° *ordine eguale a zero, e sono le sole che godano di questa proprietà.*

Supponiamo decomposta la funzione f nelle sue due parti, reale ed imaginaria, e sia $f = \varphi + i\psi$. Sostituendo questo valore nella (8) si trova facilmente:

$$\Delta_1 \varphi - \Delta_1 \psi + i \Delta_1 \varphi\psi = 0 \,,$$

donde, poichè φ e ψ sono funzioni reali, si trae:

$$\Delta_1 \varphi\psi = 0 \,, \qquad \Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi .$$

La prima di queste due equazioni esprime (art. I) che: *le due famiglie di curve* $\varphi =$cost. $\psi =$ cost. *sono fra loro ortogonali.* La seconda può scriversi (ibid.)

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta\psi}\right)^2 = \left(\frac{\delta n_\varphi}{\delta n_\psi}\right)^2 ,$$

δn_φ, δn_ψ essendo le distanze normali, nello stesso punto (u, v), di due curve contigue del sistema $\varphi = cost.$, e di due del sistema $\psi = cost.$ Se ne conclude che: *prendendo gli incrementi* $\delta\varphi$, $\delta\psi$ *eguali fra loro, le curve* $\varphi =$cost., $\psi =$cost. *dividono la superficie in quadrati infinitamente piccoli,* cioè sono curve *isometriche.*

Sostituendo nelle (7) il valore $f = \varphi + i\psi$ si trovano le seguenti quattro equazioni reali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{H} = -\frac{\partial\psi}{\partial u} \,, \qquad \frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{H} = \frac{\partial\psi}{\partial v} \,, \\
&\frac{E\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{H} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \,, \qquad \frac{G\dfrac{\partial\psi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{H} = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \,,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

delle quali due qualunque sono una conseguenza delle rimanenti. *Queste formole contengono le relazioni necessarie e sufficienti a caratterizzare le due parti, reale ed imaginaria, di una funzione* f, *della specie qui considerata.*

Eliminando la funzione ψ si trova:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{H}\right)=0\,;$$

ed un' equazione della medesima forma ottiensi eliminando ϕ. Questi due risultati possono scriversi [art. I, eq. (3)]:

$$\Delta_2\phi=0\,,\qquad \Delta_2\psi=0\,, \tag{10}$$

e conseguentemente si ha del pari:

$$\Delta_2 f=0\,,$$

come direttamente si deduce anche dalle (7). Dunque: *le funzioni* f *hanno la proprietà di avere ambedue i parametri differenziali eguali a zero; e le loro due componenti reali* ϕ *e* ψ *hanno il parametro di* 2.° *ordine eguale a zero.*

Una funzione reale ϕ, *soddisfacente all' equazione* $\Delta_2\phi=0$, *può sempre considerarsi come la parte reale di una funzione* f. Infatti, qualunque sia la funzione reale ϕ, l' equazione $\phi=cost.$ rappresenterà un sistema di curve, che saranno tagliate ortogonalmente dalle curve di un certo altro sistema $\Psi=cost.$, talchè si avrà:

$$\Delta_1\phi\Psi=0\,,$$

ossia:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial u}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=0.$$

Esisterà dunque un fattore K, funzione in generale di u, v, che renderà:

$$E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-K\frac{\partial\Psi}{\partial u}\,,\qquad G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}=K\frac{\partial\Psi}{\partial v}\cdot \tag{$\dagger$}$$

Sostituendo questi valori nella $\Delta_2\phi=0$, si ottiene:

$$\frac{\partial\frac{K}{H}}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}-\frac{\partial\frac{K}{H}}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial u}=0\,,$$

equazione dalla quale si deduce, come è noto,

$$\frac{K}{H}=F(\Psi)\,,$$

dove F rappresenta una funzione arbitraria. Se quindi si pone:

$$F(\Psi)\,d\Psi = d\psi,$$

ciò che equivale a mutare il parametro delle curve ortogonali alle date, si ha:

$$F(\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad F(\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial v} = \frac{\partial\psi}{\partial v},$$

e le equazioni (†) ricadono nelle (9).

III.

Affinchè le funzioni complesse f rientrino nelle ordinarie funzioni del binomio $u+iv$, bisogna, come è noto, che sussistano le due relazioni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Eliminando con queste la funzione ψ dalle (9) si trova:

$$(H-E)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + F\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0, \qquad F\frac{\partial\varphi}{\partial u} + (H-G)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

equazioni che non possono essere soddisfatte simultaneamente da una medesima funzione delle u, v se non ha luogo l'identità:

$$(H-E)(H-G) - F^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad (E-G)^2 + 4F^2 = 0,$$

la quale, ritenuta reale la superficie, si decompone nelle due condizioni:

$$E = G, \qquad F = 0,$$

che caratterizzano le coordinate isometriche. Dunque solamente pei varii sistemi di coordinate isometriche hanno luogo, rispetto ad una superficie qualunque, quelle proprietà che si verificano nel piano, riferito a coordinate rettangole x ed y, per le funzioni dell'ordinaria variabile complessa $x+iy$.

Tratteniamoci alquanto su questo caso, il quale, benchè già molto conosciuto, porge nondimeno occasione ad alcune nuove considerazioni di qualche interesse.

Ritenuta per l'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{k^2},$$

imaginiamo che sulla superficie sia tracciata una linea chiusa, rappresentata dalle equazioni:

$$p = p_0(u), \qquad q = q_0(u),$$

dove u è un parametro che ne individua i successivi punti. Poichè la linea si suppone chiusa, è chiaro che la scelta di questo parametro si potrà sempre fare in modo che le due funzioni $p_0(u)$, $q_0(u)$ sieno periodiche e che il loro periodo sia 2π, talchè per mezzo del teorema di Fourier si potranno esprimere nel modo seguente:

$$p_0(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} p_0(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha, \qquad q_0(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} q_0(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha. \quad (11)$$

Ciò premesso, supponiamo diviso l'intero periodo 2π della variabile u in un gran numero di parti eguali che denoteremo con Δu, corrispondenti ad altrettanti elementi in cui si troverà divisa la curva e che riguarderemo come rettilinei. Poscia facciamo ruotare ciascun elemento di un angolo λ (costante) contato verso l'interno della curva e indichiamo con ∇p, ∇q le variazioni di p, q corrispondenti al termine dell'elemento così spostato, conservando la caratteristica Δ per le variazioni lungo la curva primitiva. Per la proprietà stabilita al principio dell'articolo precedente avremo:

$$\nabla(p + iq) = e^{i\lambda} \,.\, \Delta(p_0 + iq_0).$$

Facendo quest'operazione per tutti gli elementi, avremo, nei termini degli elementi stessi dopo la rotazione, i punti di una linea contigua alla primitiva, e indicatene con p_1, q_1 le coordinate, potremo scrivere:

$$p_1 + iq_1 = p_0 + iq_0 + e^{i\lambda}\Delta(p_0 + iq_0),$$

ovvero, usando una notissima segnatura simbolica,

$$p_1 + iq_1 = (1 + e^{i\lambda}\Delta)\ (p_0 + iq_0).$$

Operando su questa seconda curva come si è fatto sulla prima, si trova una terza curva, ed indicandone con p_2, q_2 le coordinate, si ha, pure simbolicamente,

$$p_2 + iq_2 = (1 + e^{i\lambda}\Delta)^2\ (p_0 + iq_0),$$

poscia:

$$p_3 + iq_3 = (1 + e^{i\lambda}\Delta)^3 \,(p_0 + iq_0),$$

e dopo n simili operazioni:

$$p_n + iq_n = (1 + e^{i\lambda}\Delta)^n \,(p_0 + iq_0). \tag{12}$$

Ora, se per brevità si pone:

$$p_0(u) + iq_0(u) = F(u),$$

dalle due formole (11) si deduce:

$$p_0 + iq_0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha,$$

e da questa, continuando ad usare la precedente segnatura simbolica,

$$(1 + e^{i\lambda}\Delta)^n\,(p_0 + iq_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}(1 + mie^{i\lambda}\Delta u)^n \int_0^{2\pi} F(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha. \tag{13}$$

Il luogo dei punti (p_n, q_n) corrispondenti ai successivi valori di n e ad uno stesso valore di u, è una curva di cui chiameremo v il parametro, ed è chiaro che potremo porre $v = n.\Delta u$, talchè la curva primitiva sarà rappresentata da $v=0$. Per tal guisa, chiamando p, q le coordinate del punto (u, v) e raffrontando le due equazioni (12) (13), potremo scrivere:

$$p + iq = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi} F(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha\right\} . \, lim\,(1 + mie^{i\lambda}\Delta u)^{\frac{v}{\Delta u}} \quad \text{per } \Delta u = 0.$$

Ma è noto che:

$$lim\,(1 + mie^{i\lambda}\Delta u)^{\frac{v}{\Delta u}}_{\Delta u = 0} = e^{mive^{i\lambda}},$$

quindi:

$$p + iq = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\, e^{im(u + ve^{i\lambda} - \alpha)}\, d\alpha,$$

ovvero, pel teorema di Fourier,

$$p + iq = F(u + ve^{i\lambda}), \tag{14}$$

cioè:

$$p+iq=p_0(u+ve^{i\lambda})+iq_0(u+ve^{i\lambda}).$$

Quest'equazione complessa, decomposta in due reali, determina completamente i due sistemi di curve $u=cost.$, $v=cost.$, in coordinate p e q, sistemi la cui natura dipende da quella della curva primitiva e del suo parametro u: questa stessa curva appartiene al sistema $v=cost.$ e corrisponde al valore $v=0$.

Dalla costruzione infinitesimale che abbiamo effettuata emerge chiaramente che i due sistemi $u=cost.$, $v=cost.$ si tagliano dovunque sotto l'angolo costante λ. Ciò è confermato dall'osservare che l'equazione (14) dà:

$$dp^2+dq^2=(\mathrm{mod}\,F')^2\,(du^2+2\,du\,dv\cos\lambda+dv^2),$$

e quindi:

$$ds^2=\left(\frac{\mathrm{mod}\,F'}{k}\right)^2(du^2+2\,du\,dv\cos\lambda+dv^2),$$

espressione che, paragonata alla (1), mostra essere appunto λ l'angolo delle curve $u=cost.$, $v=cost.$ Anzi se si pon mente alla immediata deduzione di questo risultato dalla sola equazione (14), si vede che ha luogo il seguente teorema: *Se* p *e* q *sono coordinate isometriche di una superficie, eguagliando il binomio* p+iq *ad una qualunque funzione di* u+ve$^{i\lambda}$ (*dove* u, v *sono parametri variabili e* λ *una costante reale*), *si ottengono due sistemi di curve* u=cost., v=cost. *che si tagliano dovunque sotto l'angolo* λ. Da questo teorema, nel caso particolare in cui $\lambda=\frac{\pi}{2}$, si ottiene una notissima proposizione di Gauss. La restrizione introdotta nella precedente analisi, col supporre che la primitiva curva $v=0$ fosse chiusa, non è essenziale al teorema precedente, come appare dall' ultima sua dimostrazione.

Il qual teorema dev'essere completato coll'osservazione che *le curve del sistema* v=cost. *sono, per una stessa funzione* F *di* u+ve$^{i\lambda}$, *indipendenti dall'angolo* λ, cosicchè da una medesima funzione si deduce un sistema di curve, accompagnato dai sistemi delle sue trajettorie sotto tutti gli angoli possibili. Ci dispensiamo dal dimostrare questa proprietà, la quale risulta con evidenza dalla costruzione infinitesimale effettuata. Così non è necessario dimostrare che le curve $v=cost.$ sono isometriche, e che lo sono parimenti tutti i sistemi $u=cost.$ corrispondenti ai diversi valori di λ. Vi è però un ravvicinamento che merita di essere fatto, ed è il seguente:

Dietro quanto precede è chiaro che ogni volta che le coordinate (p e q)

di una linea tracciata sulla superficie sono date in funzione di un parametro u, viene ad essere determinato un sistema di linee isoterme, del quale essa fa parte, ed il quale alla sua volta determina infiniti altri sistemi, formati dalle trajettorie di esso sotto tutti gli angoli costanti. Ne risulta che per ogni punto della curva primitiva passano infinite curve, le quali fanno colla curva stessa tutti gli angoli possibili e che si possono chiamare per un momento le isoterme di quel punto. Ciò posto, se, sulla curva primitiva, si danno ad u n incrementi consecutivi $=\Delta u$, è ovvio che le coordinate (isometriche) p_n, q_n del punto finale, sono legate alle coordinate p_0, q_0 del punto iniziale dalla formola simbolica:

$$p_n + iq_n = (1 + \Delta)^n (p_0 + iq_0), \tag{15}$$

conseguenza della notissima:

$$p_n = (1 + \Delta)^n p_0,$$

riportata in tutti i Trattati. Ora noi invece abbiamo trovato che un analogo spostamento sulla curva isoterma che parte dal punto (p_0, q_0) sotto l'angolo λ dà luogo alla formola (12), la quale, nel caso particolare dell'angolo retto, diventa:

$$p_n + iq_n = (1 + i\Delta)^n (p_0 + iq_0). \tag{16}$$

I secondi membri delle equazioni simboliche (15) (16) (12) differiscono pei fattori rispettivi:

$$1 + \Delta, \qquad 1 + i\Delta, \qquad 1 + e^{i\lambda}\Delta,$$

e la forma dei medesimi conduce naturalmente all'osservazione che, nello stesso modo che il simbolo Δ nel primo di essi accenna notoriamente ad una differenziazione nel senso della curva primitiva, cioè ad una differenziazione *diretta* o *reale,* così il simbolo $i\Delta$ del secondo accenna ad una differenziazione *ortogonale* od *imaginaria*, ed il simbolo $e^{i\lambda}\Delta$ del terzo ad una differenziazione *obliqua* o *complessa.* E, mentre la differenziazione diretta (Δ) che è l'ordinaria, corrisponde allo spostamento del punto sulla curva primitiva, così la seconda $(i\Delta)$ corrisponde allo spostamento lungo l'isoterma ortogonale e la terza $(e^{i\lambda}\Delta)$ allo spostamento lungo l'isoterma inclinata dell'angolo indicato dal simbolo di differenziazione complessa. Per tal guisa la differenziazione ordinaria si presenterebbe quì come caso particolare di una operazione più generale, la quale troverebbe nelle precedenti considerazioni geometriche una definizione ed un'imagine altrettanto semplici e chiare quanto quelle della prima.

IV.

Le funzioni $p_0(u)$, $q_0(u)$ usate nelle considerazioni dell'articolo precedente possono assumere moltissime forme diverse, senza che la curva da esse individuata cambi sostanzialmente di natura. A ciascuna delle forme conciliabili con questa condizione corrisponde uno speciale sistema isometrico, di cui essa fa parte, precedentemente designato con $v = cost.$ Si può determinare la forma di quelle funzioni introducendo opportune condizioni. Ne daremo un esempio, supponendo che, insieme alla curva anzidetta, sia data la curva isometrica che deve succederle a distanza infinitesima nel sistema suindicato: ovvero, in altri termini, supponendo che si tratti di determinare un sistema isometrico, del quale facciano parte due curve infinitamente vicine, date ad arbitrio.

Le due curve contigue siano definite dalle equazioni:

$$\left.\begin{cases} p = p_0(u), \\ q = q_0(u), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = p_0(u) + \gamma \mathrm{P}(u), \\ q_1 = q_0(u) + \gamma \mathrm{Q}(u), \end{cases}\right\} \tag{17}$$

dove γ è una costante infinitamente piccola. Gli incrementi delle coordinate p, q corrispondenti all'estremità dell'elemento ds della prima curva sono $du . p'_0(u)$, $du . q'_0(u)$; all'incontro gli incrementi corrispondenti all'estremità dell'elemento δs compreso fra il punto (u) della prima curva e il punto (u) della seconda sono $p_1 - p_0$, $q_1 - q_0$ ossia $\gamma \mathrm{P}(u)$, $\gamma \mathrm{Q}(u)$. Quindi si ha:

$$ds = \frac{du \sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}}{k}, \qquad \delta s = \frac{\gamma \sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}}{k},$$

ed il seno dell'angolo λ compreso dai due elementi ds, δs [eq. (2)] è dato da:

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{(p_0' \mathrm{Q} - q_0' \mathrm{P}) \gamma \, du}{k^2 \, ds \, \delta s};$$

se dunque si chiama δn la distanza normale delle due curve nel punto (u), si ha:

$$\delta n = \delta s \operatorname{sen} \lambda = \frac{(p_0' \mathrm{Q} - q_0' \mathrm{P}) \gamma}{k \sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}}.$$

Ora, se si vuole che la nuova variabile indipendente, che diremo w, determini, coi suoi incrementi eguali, i lati dei quadratelli compresi fra le due curve e gli elementi normali ad esse, bisogna manifestamente che per essa risulti $ds = \delta n$ cioè:

$$\frac{du\sqrt{p_0'^2+q_0'^2}}{k} = \frac{(p_0'\mathrm{Q} - q_0'\mathrm{P})\gamma}{k\sqrt{p_0'^2+q_0'^2}};$$

e, poichè l'infinitesimo γ è costante, come dev' esserlo dw, si può porre:

$$\gamma = C dw$$

C essendo una costante finita. Sostituendo questo valore nella precedente equazione ed integrando si trova:

$$Cw = \int \frac{p_0'^2+q_0'^2}{p_0'\mathrm{Q} - q_0'\mathrm{P}}\, du, \tag{18}$$

quadratura che serve alla determinazione della variabile w, la quale non è altro che il parametro isometrico del sistema ortogonale a quello definito dalle due curve prossime date. La costante C rimane essenzialmente arbitraria, ma nei singoli casi si può determinare dietro considerazioni di speciale opportunità.

Facciamo due esempi semplicissimi, relativi ad un piano.

Le coordinate isometriche p, q sieno le ordinarie coordinate rettangole x, y e la prima curva sia l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che rappresenteremo colle due equazioni equivalenti

$$x = a\cos u, \qquad y = b \operatorname{sen} u. \tag{19}$$

La curva infinitamente vicina sia un'ellisse omofocale. Indicando i semiassi di questa con $a-\alpha$, $b-\beta$ (α, β infinitesimi) si dovrà avere

$$(a-\alpha)^2 - (b-\beta)^2 = a^2 - b^2,$$

quindi

$$a\alpha = b\beta.$$

Rappresentando con $c\gamma$ il valor comune di questi due prodotti, dove γ è un infinitesimo e c una costante finita, si può dunque porre

$$\alpha = \frac{c}{a}\gamma, \qquad \beta = \frac{c}{b}\gamma,$$

e l'ellisse contigua alla precedente è rappresentabile colle formole

$$x_1 = \left(a - \frac{c}{a} \gamma \right) \cos u , \qquad y_1 = \left(b - \frac{c}{b} \right) \operatorname{sen} u.$$

Paragonando le equazioni attuali alle (17) si trova

$$p_0 = a \cos u , \qquad \mathrm{P} = - \frac{c}{a} \cos u$$

$$q_0 = a \operatorname{sen} u , \qquad \mathrm{Q} = - \frac{c}{b} \operatorname{sen} u ,$$

e conseguentemente dalla (18) si trae

$$w = \frac{Cc}{ab} u ,$$

o, più semplicemente $w = u$, se si determina C in modo che le due variabili u e w vadano contemporaneamente da 0 a 2π. Per tal modo si vede che le formole atte a rappresentare la prima ellisse dietro la condizione prescritta sono le stesse (19), col semplice cambiamento di u in w.

Ciò premesso, se si vuole ottenere il doppio sistema ortogonale $u = cost.$, $v = cost.$ di cui fanno parte le due ellissi omofocali contigue, basterà fare:

$$x + iy = a \cos (u + iv) + ib \operatorname{sen} (u + iv) ,$$

ovvero, ponendo

$$a = \sqrt{a^2 - b^2} . \cosh v_0 , \qquad b = \sqrt{a^2 - b^2} . \operatorname{senh} v_0$$

e scrivendo poscia, ciò che è evidentemente lecito, v in luogo di $v_0 - v$,

$$x + iy = \sqrt{a^2 - b^2} . \cos (u + iv) ,$$

formola donde si ricava, come è notissimo, il doppio sistema ortogonale delle coniche omofocali. Se invece si ponesse

$$x + iy = \sqrt{a^2 - b^2} . \cos (u + ve^{i\lambda}) ,$$

si avrebbe il doppio sistema formato dalle stesse ellissi omofocali del sistema precedente e dalle curve (trascendenti) che le tagliano sotto l'angolo costante λ.

Il secondo esempio sarà quello di due circonferenze infinitamente vicine, l'una interna all'altra. Ponendo i loro centri sull'asse delle y, sia:

$$x^2 + (y - a)^2 = c^2$$

l'equazione della circonferenza esterna, alla quale sostituiremo le formole:

$$x = c\cos u, \qquad y = a + c\,\mathrm{sen}\,u. \tag{20}$$

Indicando con $c-\delta c$, $a-\delta a$ il raggio e l'ordinata del centro della circonferenza interna, e supponendo δa positivo, si deve avere $\delta a < \delta c$, quindi si può porre:

$$\delta c = \gamma c\,, \qquad \delta a = \gamma c\cos\mu, \qquad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}\,,$$

e l'equazione della seconda circonferenza risulta, per γ infinitesimo,

$$x^2 + (y-a)^2 + 2\gamma c\,(y-a)\cos\mu = c^2 - 2c^2\gamma\,,$$

cosicchè l'asse radicale delle due circonferenze è la retta

$$(y-a)\cos\mu + c = 0.$$

È lecito prendere questa retta per asse delle x ed in questa ipotesi, essendo $y=0$, si trova fra a e c la relazione $c = a\cos\mu$, la quale determina quel punto dell'asse delle y nel quale si deve collocare il centro della prima circonferenza. Se ne conclude che μ è l'angolo fatto coll'asse delle x dalla tangente condotta a questa dall'origine.

Avuto riguardo ai precedenti risultati, si trova che nel caso attuale si ha:

$$p_0 = c\cos u, \qquad \mathrm{P} = -c\cos u\,,$$

$$q_0 = c\,\mathrm{sen}\,u + \frac{c}{\cos\mu}\,, \qquad \mathrm{Q} = -c\left(\mathrm{sen}\,u + \frac{1}{\cos\mu}\right),$$

talchè la formola (18) diventa:

$$Cw = \int \frac{du}{1 + \cos\mu . \mathrm{sen}\,u}\,.$$

Eseguendo l'integrazione ed aggiungendo la condizione che u e w vadano contemporaneamente da 0 a 2π, si trova:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\mu}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{w}{2}\,.$$

A questa formola si può dare la forma:

$$\frac{e^{iu} + i}{e^{iu} - i} = i\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}\,,$$

e siccome le (20) danno $e^{iu}=\frac{x+iy}{c}-\frac{i}{\cos\mu}$, così si ha pure:

$$\frac{x+iy-il\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{x+iy-il\operatorname{cotg}\frac{\mu}{2}}=i\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2},$$

chiamando l la lunghezza della tangente condotta dall'origine alla circonferenza data, cioè ponendo $l=c\operatorname{tg}\mu$.

Per avere il doppio sistema isometrico ortogonale, bisogna ora porre $u+iv$ in luogo di w. Si riduce l'equazione risultante a maggior semplicità cambiando l'origine delle v col porre $w=u+i(v-v_0)$, ossia col cambiare w in $w-iv_0$ (se $w=u+iv$). Infatti si trova così:

$$\frac{x+iy-il\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{x+iy-il\operatorname{cotg}\frac{\mu}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\cdot\coth\frac{v_0}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{w}{2}-i\operatorname{tgh}\frac{v_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{w}{2}-i\operatorname{cotgh}\frac{v_0}{2}},$$

ossia, determinando v_0 in modo che $\operatorname{tgh}\frac{v_0}{2}=\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}$,

$$\frac{x+iy-il\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{x+iy-il\operatorname{cotg}\frac{\mu}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{w}{2}-i\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{w}{2}-i\operatorname{cotg}\frac{\mu}{2}},$$

donde si trae manifestamente:

$$x+iy=l\operatorname{tg}\frac{u+iv}{2}.$$

Ecco dunque come si risolve la questione proposta: Data la circonferenza primitiva di raggio c, si faccia passare pel centro di essa e della contigua l'asse delle y, e si prenda per asse delle x l'asse radicale delle due circonferenze; indi si determini la lunghezza l della tangente condotta dall'origine, e finalmente si ponga $x+iy=l\operatorname{tg}\frac{u+iv}{2}$. In virtù di tale relazione le variabili u, v diventano i parametri di due sistemi isometrici ortogonali: le due circonferenze primitive appartengono al sistema $v=$cost., e propriamente l'eq. (20) si ottiene ponendo $v=v_0$, dove $\operatorname{tgh}\frac{v_0}{2}=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}=\frac{a-c}{l}$.

Il doppio sistema ortogonale così ottenuto è formato di due famiglie di circonferenze, ed è tanto noto che è inutile sviluppare ulteriormente la soluzione che vi ci ha condotti, bastando accennare le espressioni delle coordinate ortogonali x, y in funzione delle u, v, che sono:

$$x = \frac{l \operatorname{sen} u}{\cos u + \cosh v}, \qquad y = \frac{l \operatorname{senh} v}{\cos u + \cosh v},$$

e quella dell'elemento lineare, che è:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{l^2 (du^2 + dv^2)}{(\cos u + \cosh v)^2}.$$

Se invece si ponesse:

$$x + iy = l \operatorname{tg} \frac{u + ve^{i\lambda}}{2},$$

si otterrebbero due sistemi di curve, l'uno dei quali, cioè $v = cost.$, sarebbe formato di tutte le circonferenze d'eguale equazione nell'esempio precedente, e l'altro dalle curve che tagliano queste circonferenze sotto l'angolo costante λ.

V.

Passiamo ora ad un altro genere di considerazioni, che ci serviranno poscia a stabilire le proprietà del fattore integrante $\varkappa$.

Nell'interno dell'area Ω immaginiamo tracciata una linea chiusa, costituente il contorno *completo* di un pezzo di superficie appartenente alla regione ordinaria considerata; sia Ω' l'area di questo pezzo.

Se il contorno di Ω' non è per sè stesso tale da essere intersecato in due soli punti da ciascuna delle curve $u = cost.$, $v = cost.$ che lo incontrano, è chiaro che si potrà sempre suddividere l'area Ω' abbracciata da esso, mediante linee Λ' opportunamente tracciate, in modo che tale condizione sia soddisfatta.

Ciò posto consideriamo l'area ω di uno dei pezzi risultanti da questa suddivisione, e chiamiamo $d\omega$ il suo elemento, dato da $d\omega = H du dv$, formola nella quale gli incrementi du, dv devono essere supposti positivi. Sieno Φ, Ψ due funzioni di u e v, monodrome, finite e continue, insieme colle loro derivate prime, in tutti i punti di Ω', e pongasi:

$$\Pi = \int \Delta_1 (\phi\,\psi).\, d\omega\,,$$

integrale esteso a tutta l'area ω.

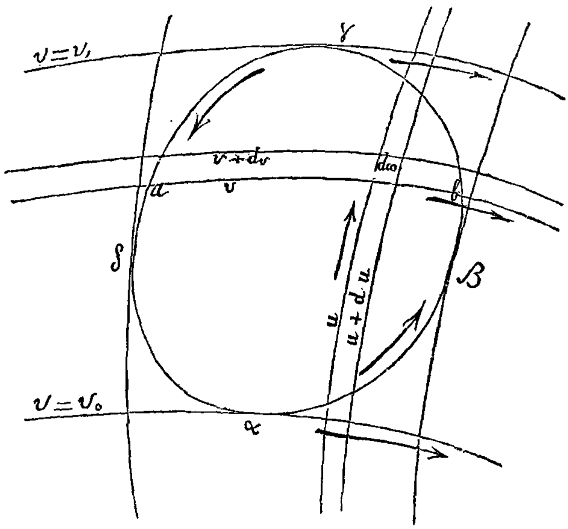
Per trasformare agevolmente questo integrale duplicato si ponga, per brevità,

$$M_\psi = \frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{H}\,, \qquad N_\psi = \frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{H}\,,$$

e si avrà:

$$\Pi = \iint\left(M_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial u} + N_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du\,dv = \iint M_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, du\,dv + \iint N_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial v}\, du\,dv.$$

Consideriamo un valore determinato di v, e quindi una linea particolare del sistema $v{=}cost$, e siano $u{=}a$, $u{=}b$ i valori di u corrispondenti ai due punti ai quali il contorno dell'area ω è incontrato da questa linea ($b>a$). Per formare l'integrale $\iint M_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, du\,dv$ esteso ai limiti noti, bisognerà integrar dapprima rispetto ad u, supposto $v{=}$ al valore fissato, ed estendere questa integrazione fra $u{=}a$ ed $u{=}b$. Per l'ammessa continuità delle derivate della funzione ϕ si avrà così, integrando per parti,



$$\int_a^b M_\psi \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, du = \left(M_\psi \phi\right)_{u=b} - \left(M_\psi \phi\right)_{u=a} - \int_a^b \frac{\partial M_\psi}{\partial u}\, \phi\, du.$$

Le coordinate u, v di un punto qualunque del contorno si possono evidentemente riguardare come funzioni monodrome, finite e continue dell'arco s del suo perimetro, contato da un punto determinato nel senso che si adotta abitualmente come positivo, cioè tale che la normale *interna* sia disposta rispetto alla tangente *positiva* come la tangente positiva di una curva v

lo è rispetto a quella di una curva u. Poichè dv è quantità che nell'integrazione si dee riguardare come positiva, si avrà dunque:

$$\text{nel punto } a: \qquad dv = -\left(\frac{dv}{ds}\right) ds,$$

$$\text{nel punto } b: \qquad du = +\left(\frac{du}{ds}\right) ds,$$

ds essendo sempre quantità positiva: quindi dall'ultima formola ottenuta si potrà ricavare:

$$\iint M_\psi \frac{\partial \psi}{\partial u} du\, dv = \int\left(M_\psi \varphi \frac{dv}{ds}\right)_a ds_a + \int\left(M_\psi \varphi \frac{dv}{ds}\right)_b ds_b - \iint \frac{\partial M_\psi}{\partial u} \varphi\, du\, dv.$$

Il primo integrale del secondo membro deve manifestamente essere esteso alla serie dei punti analoghi ad a, cioè a tutto l'arco $\gamma\delta\alpha$; il secondo, alla serie dei punti analoghi a b, cioè a tutto l'arco $\alpha\beta\gamma$: conseguentemente la loro somma equivale all'integrale unico:

$$\int M_\psi \varphi \frac{dv}{ds} ds,$$

esteso lungo tutto il perimetro, percorso nel senso positivo. Dunque si ha la formola:

$$\iint M_\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} du\, dv = \int M_\psi \varphi \left(\frac{dv}{ds}\right) ds - \iint \frac{\partial M_\psi}{\partial u} \varphi\, du\, dv,$$

nella quale i due integrali duplicati sono estesi a tutta l'area ω e l'integrale semplice a tutto il contorno, percorso nel senso positivo.

Procedendo analogamente per l'altra parte dell'integrale Π si trova:

$$\iint N_\psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} du\, dv = -\int N_\psi \varphi \left(\frac{du}{ds}\right) ds - \iint \frac{\partial N_\psi}{\partial v} \varphi\, du\, dv,$$

e quindi, sommando membro a membro,

$$\Pi = \int \left\{ M_\psi \left(\frac{dv}{ds}\right) - N_\psi \left(\frac{du}{ds}\right) \right\} \varphi\, ds - \iint \left(\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v}\right) \varphi\, du\, dv.$$

Ma si ha:

$$\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v} = H \,.\, \Delta_2 \psi, \qquad H\, du\, dv = d\omega,$$

quindi:

$$\Pi = \int \left\{ M_\psi \left(\frac{dv}{ds}\right) - N_\psi \left(\frac{du}{ds}\right) \right\} \phi \, ds - \iint \phi \, . \, \Delta_2 \psi \, . \, d\omega \, .$$

L'integrale semplice può assumere una forma più comoda. Infatti, pei valori di M_ψ, N_ψ si ha:

$$M_\psi \frac{dv}{ds} - N_\psi \frac{du}{ds} = \frac{1}{H} \left\{ \left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} - \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\} .$$

Ora se s'indicano con δu, δv gli incrementi che ricevono u e v passando dal punto (u, v) del contorno ad un punto infinitamente vicino nella direzione normale interna all'area, e con δn la distanza di questi due punti, si ha (Art. II)

$$\frac{E du + F dv + i H dv}{ds} = -i \frac{E \delta u + F \delta v + i H \delta v}{\delta n} ,$$

$$\frac{F du + G dv + i H du}{ds} = i \frac{F \delta u + G \delta v + i H \delta v}{\delta n} ,$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} &= H\frac{\delta v}{\delta n}, & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} &= -H\frac{\delta u}{\delta n}, \\ E\frac{\delta u}{\delta n} + F\frac{\delta v}{\delta n} &= -H\frac{dv}{ds}, & F\frac{\delta u}{\delta n} + G\frac{\delta v}{\delta n} &= H\frac{du}{ds} . \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Di qui si trae:

$$M_\psi \frac{dv}{ds} - N_\psi \frac{du}{ds} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\delta u}{\delta n} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\delta v}{\delta n} \right) = -\frac{\delta \psi}{\delta n} ,$$

e quindi finalmente:

$$-\Pi = \int \phi \frac{\delta \psi}{\delta n} \, . \, ds + \iint \phi \, . \, \Delta_2 \psi \, . \, d\omega \, , \tag{22}$$

formola in cui l'integrale duplicato è esteso a tutta l'area ω e l'integrale semplice a tutto il contorno (il quale ora non è più vincolato a dover essere percorso in un senso determinato, perchè nella funzione da integrare non figura più l'arco s finito).

Se si fosse considerata la funzione ψ al posto della ϕ e reciprocamente, si sarebbe trovato, in modo analogo,

$$-\Pi = \int \psi \frac{\delta \psi}{\delta n} ds + \iint \psi \, . \, \Delta_2 \phi \, . \, d\omega ; \tag{22'}$$

confrontando i due risultati si ottiene quindi:

$$\iint(\phi\,.\,\Delta_2\psi-\psi\,.\,\Delta_2\phi)\,d\omega+\int\left(\phi\,\frac{\delta\psi}{\delta n}-\psi\,\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds=0\,, \tag{23}$$

formola molto importante, la quale esprime, rispetto alle superficie riferite a coordinate curvilinee qualunque, il teorema correlativo di uno notissimo rispetto allo spazio di tre dimensioni riferito a coordinate ordinarie.

Questa formola rimane così dimostrata per un'area ω soggetta alle restrizioni suenunciate. Ma se si immagina che una formola analoga venga scritta per ciascuna delle aree ω in cui fu suddivisa l'area Ω' col mezzo delle trasversali Λ', facendo la somma di tutti i risultati, spariscono gli integrali lineari relativi alle trasversali, poichè ciascun d'essi figura due volte, con segno contrario in causa dell'opposta direzione della normale n. Si ottiene dunque una formola di eguale aspetto, relativa all'intiera area Ω'. Anche la formola (22) è evidentemente suscettibile di un'eguale estensione.

All'equazione (23) si può pervenire altresì nel modo seguente.

Consideriamo una delle aree elementari ω, ed una funzione w, monodroma finita e continua in tutti i punti di essa. Nelle ipotesi già fatte precedentemente si ha:

$$\int\frac{\partial w}{\partial u}\,du = w_b-w_a\,,$$

$$\iint\frac{\partial w}{\partial u}\,du\,dv = \int w_b dv_b-\int w_a dv_a=\int w\left(\frac{dv}{ds}\right)ds\,;$$

ed analogamente:

$$\iint\frac{\partial w}{\partial v}\,du\,dv=-\int w\left(\frac{du}{ds}\right)ds\,,$$

formole nelle quali gli integrali duplicati sono estesi a tutta l'area ω, gli integrali semplici al suo contorno, percorso nel senso positivo. In luogo di queste formole si possono, per le (21), scrivere le seguenti:

$$\iint\frac{\partial w}{\partial u}\,du dv=-\int\left(E\frac{\delta u}{\delta n}+F\,\frac{\delta v}{\delta n}\right)\frac{w}{H}\,ds\,,$$

$$\iint\frac{\partial w}{\partial v}\,du dv=-\int\left(F\,\frac{\delta u}{\delta n}+G\,\frac{\delta v}{\delta n}\right)\frac{w}{H}\,ds\,,$$

più simmetriche, benchè meno semplici, e nelle quali gli integrali lineari sono indipendenti dal modo in cui viene percorso il contorno. Si ponga ora:

nella prima formola $\qquad w = \varphi M_\psi - \psi M_\varphi$,

nella seconda $\qquad w = \varphi N_\psi - \psi N_\varphi$,

valori i quali suppongono monodrome finite e continue non solo le funzioni φ e ψ, ma anche le loro derivate prime, che entrano nelle M, N. Sommando i risultati ed osservando che si ha:

$$\frac{\partial(\varphi M_\psi - \psi M_\varphi)}{\partial u} + \frac{\partial(\varphi N_\psi - \psi N_\varphi)}{\partial v} = \left(\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v}\right)\varphi - \left(\frac{\partial M_\varphi}{\partial u} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial v}\right)\psi$$
$$= H(\varphi . \Delta_2 \psi - \psi . \Delta_2 \varphi),$$

ed inoltre che:

$$E M_\varphi + F N_\varphi = H \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad F M_\varphi + G N_\varphi = H \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

si ritrova immediatamente l'equazione (23).

Questo processo non conduce, come il già usato, alla formola (22) che è interessante a conoscersi. È però facile ricavare questa formola dalla (23). Infatti scriviamo dapprima quest' ultima come segue:

$$\iint \varphi . \Delta_2 \psi . d\omega + \varphi \int \frac{\delta \psi}{\delta n} ds = \iint \psi . \Delta_2 \varphi . d\omega + \psi \int \frac{\delta \varphi}{\delta n} ds. \tag{24}$$

Poi osserviamo che dalla stessa (23), per $\varphi = 1$, $\psi = w$, si deduce:

$$\iint \Delta_2 w . d\omega + \int \frac{\delta w}{\delta n} ds = 0. \tag{24'}$$

È lecito porre in questa formola $w = \varphi . \psi$, onde s' ottiene:

$$\iint \left\{ \varphi . \Delta_2 \psi + \psi . \Delta_2 \varphi + 2 \Delta_1 \varphi \psi \right\} d\omega + \int \left\{ \varphi \frac{\delta \psi}{\delta n} + \psi \frac{\delta \varphi}{\delta n} \right\} ds = 0,$$

ossia:

$$- \iint \Delta_1 \varphi \psi . d\omega = \tfrac{1}{2} \left\{ \iint \varphi . \Delta_2 \psi . d\omega + \int \varphi \frac{\delta \psi}{\delta n} ds \right\} + \tfrac{1}{2} \left\{ \iint \psi . \Delta_2 \varphi . d\omega + \int \psi \frac{\delta \varphi}{\delta n} ds \right\}.$$

Ma in virtù della (24) le due espressioni componenti il secondo membro sono eguali fra loro; quindi si può, in luogo della loro somma, scrivere il doppio dell' una o dell' altra. In tal modo si ricade appunto sulla formola (22) o sulla (22').

Quando $\phi = \psi$ dalla (22) si ha:

$$-\iint \Delta_1\phi . d\omega = \iint \phi . \Delta_2\phi . d\omega + \int \phi \frac{\delta\varphi}{\delta n} ds , \tag{25}$$

equazione nella quale è importante il notare che gli elementi $\Delta_1\phi . d\omega$ del primo integrale duplicato sono tutti essenzialmente positivi, in forza del significato che ha il primo parametro differenziale della funzione ϕ (Art. I). Su questa proprietà si appoggia la dimostrazione delle note proprietà delle funzioni ϕ che rendono $\Delta_2\phi = 0$, mediante l'uso del principio di Dirichlet, come si suol fare per il piano.

VI.

Supponiamo che la funzione ψ dell'art. prec. diventi, in un certo punto O, infinita come $\log \frac{1}{r}$, r essendo la distanza geodetica di questo punto da un punto qualunque della superficie; e propriamente ammettiamo che, per distanze geodetiche sufficientemente piccole, si abbia:

$$\psi = \log \frac{1}{r} + r^\nu Q , \tag{26}$$

dove ν è un esponente maggiore di zero e Q una quantità che, per $r = 0$, non diventa nè nulla nè infinita (a meno che non sia sempre $= 0$), e che in generale dipende dalle coordinate del punto a cui corrisponde il valore di ψ che si considera.

Se il punto O è interno all'area Ω', il teorema (23) non può più essere applicato a quest'area; ma diventa applicabile all'area che si ottiene togliendo ad Ω' una porzione, piccola quanto si vuole, circostante al punto O. Riterremo che questa porzione sia limitata da una circonferenza geodetica di raggio r piccolissimo, col centro nel punto O. In tale ipotesi la formola (23) continuerà a sussistere, purchè si aggiungano al suo primo membro i termini seguenti:

$$-\iint (\phi . \Delta_2\psi - \psi . \Delta_2\phi)\, d\omega' + \int \left(\phi \frac{\delta\psi}{\delta n'} - \psi \frac{\delta\varphi}{\delta n'} \right) ds' ,$$

dove $d\omega'$, dn', ds' fanno l'ufficio di $d\omega$, dn, ds relativamente all'area ed al contorno del piccolo cerchio geodetico.

Per calcolare il valore della precedente espressione conviene ricorrere ad una forma dell'elemento lineare appropriata al caso attuale, cioè alla forma

$$ds^2 = dr^2 + R^2\, d\varepsilon^2, \tag{27}$$

che risulta dall'assumere come curve coordinate le linee geodetiche divergenti dal punto O e le circonferenze geodetiche che hanno il centro nel medesimo punto: r è la lunghezza di un arco di geodetica contato da O, ε è l'angolo che una delle geodetiche, presa come origine, fa con una qualunque delle altre. In queste condizioni è facile vedere che R è generalmente della forma:

$$R = r(1 + r^\mu P),$$

dove μ è un esponente maggiore di zero e P una funzione di r e di ε che per $r=0$ non diventa nè nulla nè infinita (*). Si ha poi:

$$d\omega' = R\, dr\, d\varepsilon, \qquad dn' = dr, \qquad ds' = R\, d\varepsilon,$$

epperò l'espressione da calcolarsi, ritenuta continua la funzione φ e le sue derivate, diventa:

$$-\overline{\varphi}\iint R.\Delta_2\psi.\, dr\, d\varepsilon + \overline{\Delta_2\varphi}\iint R\psi\, dr\, d\varepsilon + \overline{\varphi}\int R\frac{\partial\psi}{\partial r}\, d\varepsilon - \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\int R\psi\, d\varepsilon,$$

dove $\overline{\varphi}$, $\overline{\Delta_2\varphi}, \ldots$ sono certi valori medii delle funzioni φ, $\Delta_2\varphi, \ldots$ convenientemente scelti fra quelli che queste funzioni prendono entro i limiti degli integrali donde sono levate fuori.

Ora osserviamo che:

1°) Avendosi, per la forma (27) dell'elemento lineare,

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)\right\},$$

e ψ avendo la forma (26), se si pone per brevità:

$$\left(1 + r^\mu P\right)\left(-1 + \nu r^\nu Q + r^{\nu+1}\frac{\partial Q}{\partial r}\right) + 1 = K, \quad \frac{1}{1 + r^\mu P}\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = K_1,$$

si trova:

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial K}{\partial r} + r^{\nu-1}\frac{\partial K_1}{\partial\varepsilon}\right\}.$$

(*) Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Art. XIX.—Il caso di $P=0$, cioè di $R=r$, non si verifica che per le superficie applicabili sopra un piano.

Di qui, moltiplicando per $R dr d\varepsilon$ ed integrando fra i limiti 0 ed r, 0 ed ε, si deduce:

$$\iint R.\Delta_2\psi.\,d\omega' = \int_0^\varepsilon K d\varepsilon + \frac{1}{\nu}\int_0^r K_1\, d(r^\nu) - \frac{1}{\nu}\int_0^r K_1^0\, d(r^\nu)\,,$$

dove K_1^0 è il valore di K_1 per $\varepsilon = 0$. Ora, in virtù del valore di K, è evidente che l'integrale relativo ad ε può essere decomposto in più integrali simili, ciascuno dei quali è moltiplicato per una potenza *positiva* di r. — Quanto ai due integrali relativi ad r^ν, è chiaro che chiamando c e c^0 i valori numericamente più grandi che le quantità K_1, K_1^0 assumono fra i limiti 0 ed r, gli integrali stessi rimangono numericamente minori delle due quantità $\frac{cr^\nu}{\nu}$ e $\frac{c^0 r^\nu}{\nu}$ rispettivamente. — Di qui si conclude che l'integrale:

$$\iint R.\Delta_2\psi.\,d\omega'\,,$$

converge verso zero per $r = 0$, e ciò qualunque sia il limite superiore ε della integrazione relativa ad ε. Lo stesso ha luogo quando Q è sempre $= 0$, cioè quando $\psi = \log \frac{1}{r}$.

2°) La quantità:

$$R\psi = (1 + r^\mu P).\; r \log \frac{1}{r} + r^{\nu+1}(1 + r^\mu P)\; Q\,,$$

converge a zero quando r diventa evanescente; quindi, per tutti i valori di r inferiori ad un certo limite, essa si mantiene numericamente minore di una quantità ρ, la quale si annulla con r. Dunque il valor numerico degli integrali:

$$\iint R\psi\, dr\, d\varepsilon\,, \qquad \int R\psi\, dr\,,$$

estesi fra 0 ed r, 0 ed ε, è rispettivamente minore di:

$$\rho r \varepsilon\,, \qquad \rho\varepsilon\,,$$

epperò ambedue gli integrali si annullano con r.

3°) Rammentando l'espressione poc'anzi indicata con K, si ha:

$$R\frac{\partial\psi}{\partial r} = K - 1\,,$$

e quindi;

$$\int_0^\varepsilon R\frac{\partial\psi}{\partial r}\,d\varepsilon=\int_0^\varepsilon K d\varepsilon-\varepsilon\,;$$

poichè dunque si è veduto già che $\int_0^\varepsilon K d\varepsilon$ converge verso zero per $r=0$, si riconosce immediatamente che, per lo stesso valore di r, si ha:

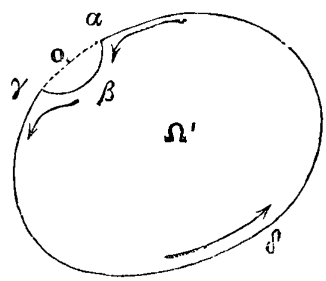
$$\int_0^\varepsilon R\frac{\partial\psi}{\partial r}\,d\varepsilon=-\varepsilon\,.$$

Se si raccolgono le proprietà qui notate dei varii integrali che compongono l'espressione di cui si cercava il valore, nella quale le integrazioni relative ad ε andavano estese fra 0 e 2π, si vede subito che, per r evanescente, quell'espressione converge verso il valore $-2\pi\phi_0$, ϕ_0 essendo il valore che riceve la funzione ϕ nel punto O. In conseguenza si ha la formola:

$$2\pi\phi_0=\iint\left(\phi\,.\,\Delta_2\psi-\psi\,.\,\Delta_2\phi\right)d\omega+\int\left(\phi\frac{\delta\psi}{\delta n}-\psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds\,, \tag{28}$$

purchè la funzione ψ abbia il carattere suindicato in un punto O dell'area Ω' alla quale si estendono le integrazioni, e quindi in particolare quando $\psi=\log\frac{1}{r}$.

Se il contorno dell'area Ω' passasse pel punto O, singolare per la funzione ψ, converrebbe scansarlo descrivendo intorno ad esso come centro un arco di cerchio geodetico, di raggio piccolissimo, $\alpha\,\beta\,\gamma$, e sostituendo questo arco alla porzione $\alpha\,\gamma$ di contorno che comprende il punto O. L'arco anzidetto avrà l'ampiezza di 180° quando O sarà un punto ordinario del contorno, ed avrà un'ampiezza ε differente da 180° se O sarà un punto angoloso del contorno stesso. In quest'ultimo caso si trova immediatamente, colla scorta delle precedenti osservazioni, che al posto della (28) si ha la formula:



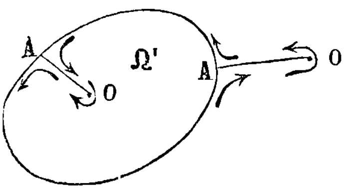
$$\varepsilon\phi_0=\iint\left(\phi\,.\,\Delta_2\psi-\psi\,.\,\Delta_2\phi\right)d\omega+\int\left(\phi\frac{\delta\psi}{\delta n}-\psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds\,, \tag{29}$$

dove l'integrale duplicato si riferisce all'area contenuta entro il contorno $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$, e l'integrale semplice al contorno medesimo, ommesso l'elemento nel quale si trova il punto O. Si troverebbe un eguale risultato descrivendo un piccolo arco esteriormente all'area, e prendendo quindi le mosse dall'equazione (28) anzichè dalla (23).

Per $\phi=1$ le (28), (29) danno:

$$\iint \Delta_2 \psi . d\omega + \int \frac{\delta\psi}{\delta n} ds = 2\pi, \quad \text{oppure } = \varepsilon, \tag{30}$$

secondo che il punto O, dove la funzione ψ diventa infinita, è interno all'area Ω', ovvero situato in un punto del contorno in cui due elementi contigui fanno l'angolo ε. È facile vedere che questo ultimo caso è il generale, ed abbraccia quello del punto interno e del punto esterno. Infatti, in queste due ultime ipotesi, si può aggiungere al primitivo contorno una linea che vada da un punto A del contorno stesso al punto O e che ritorni poscia sopra sè stessa a raggiungere nel punto A il contorno: con ciò non si alterano nè gli integrali d'area, nè quelli di contorno. Ma considerando questa linea doppia come facente parte del contorno, è chiaro che l'angolo, *interno* all'area, dei due elementi sovrapposti che terminano in O, è $=0$ quando O è esterno all'area, ed $=2\pi$ quando O è interno. — Ciò vale anche per la (29).



È utile fare la seguente osservazione circa il valore dell'esponente positivo μ, che figura nel valore di R. Il prodotto reciproco dei due raggi di curvatura principali è dato, come si sa, dalla formola:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = -\frac{r^{\mu-2}}{1+r^\mu P}\left\{\mu(\mu+1)P + 2(\mu+1)r\frac{\partial P}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right\},$$

quindi il suo valore per $r=0$, cioè nel punto O, è *nullo, finito od infinito* secondo che μ è >2, $=2$, oppure <2. Quando dunque l'esponente μ, positivo, è minore di 2, la superficie non ha nel punto O una curvatura ordinaria.

La formola (28) esprime, rispetto alle superficie, un teorema analogo a quello di Green per lo spazio di tre dimensioni.

VII.

Poichè il binomio $\varkappa(Udu+Vdv)$ dev'essere un differenziale esatto, si deve avere:

$$\frac{\partial(\varkappa U)}{\partial v}=\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial u},$$

ossia:

$$U\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}-V\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}=\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial v}. \tag{31}$$

Ponendo in questa equazione, ed in quella che se ne ottiene moltiplicandola per V', i valori (4) di U, V, V', si trovano le due formole equivalenti:

$$E\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}-(F+iH)\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}=\quad WU,$$

$$G\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}-(F-iH)\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}=-WV',$$

dove per brevità si è posto:

$$W=\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial v}.$$

Le precedenti due equazioni si possono scrivere come segue.

$$\frac{G\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}-F\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}}{H}=-i\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}-\frac{WV'}{H},$$

$$\frac{E\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v}-F\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}}{H}=\quad i\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u}+\frac{WU}{H},$$

donde si deduce, rammentando l'espressione della funzione $\Delta_2\log\varkappa$ (Art. I),

$$\Delta_2\log\varkappa=\frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{H}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{WV'}{H}\right)\right\}, \tag{32}$$

equazione notevolissima, in quanto manifesta che il valore della funzione $\Delta_2\log\varkappa$ può essere ottenuto mediante le sole quantità E, F, G, che caratterizzano l'elemento lineare della superficie, insieme colle loro derivate.

Chiamando k il modulo della funzione $\varkappa$, si deduce dalla precedente equazione, calcolando la parte reale del secondo membro,

$$\Delta_2 \log k = -\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]\right\}, \quad (33)$$

formola nella quale si riconosce l'espressione data da Liouville per la misura della curvatura. Abbiamo già mostrata altrove la ragione d'essere di questo risultato (*).

Consideriamo un'area Ω' nella quale k si mantenga finita e maggiore di zero: applicando ad essa la formola (24'), dopo avervi posto $w = \log k$, si trova:

$$\iint d\omega \,.\, \Delta_2 \log k = -\int ds \frac{\delta \log k}{\delta n}\,.$$

Il primo membro non è che la *curvatura integra* o *totale* della porzione Ω' di superficie: denominandola Γ', si ha quindi:

$$\Gamma' = -\int ds \frac{\delta \log k}{\delta n}, \quad (34)$$

formola nella quale l'integrale del secondo membro è esteso a tutto il contorno dell'area considerata.

Bisogna osservare che, mercè questa formola, le aree sferiche Γ', che secondo la teoria di Gauss servono a misurare la curvatura totale, ricevono un segno determinato. Infatti l'elemento dell'integrale doppio Γ' è $\frac{d\omega}{R_1 R_2}$, R_1 ed R_2 essendo i due raggi principali di curvatura della superficie, e quindi l'elemento stesso è positivo o negativo secondo che i due raggi anzidetti hanno la stessa direzione o direzioni contrarie: quindi l'area sferica Γ' risulta generalmente formata dalla somma algebrica di più parti aventi segni diversi. Ne consegue che più porzioni contigue di superficie possono avere, separatamente considerate, una curvatura finita, mentre il loro complesso potrà avere una curvatura totale nulla.

La quantità $\frac{\delta \log k}{\delta n}$ è suscettibile di una trasformazione notevole. Chiamando $\frac{1}{\rho}$ la curvatura geodetica di una linea qualunque s tracciata sulla superficie

(*) *Ricerche d'analisi applicata alla geometria*, nel Giornale matematico di Napoli.

il cui elemento lineare è della forma:

$$\frac{dp^2+dq^2}{k^2},$$

(forma che conviene appunto, pel significato di k, alla superficie da noi considerata), si ha da formole note (*):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2}-\frac{dq}{ds}\frac{d^2p}{ds^2}\right)+\frac{\partial \log k}{\partial q}\frac{dp}{ds}-\frac{\partial \log k}{\partial p}\frac{dq}{ds}.$$

Ma (21)

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\delta q}{\delta n},\qquad \frac{dq}{ds}=-\frac{\delta p}{\delta n},$$

quindi:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2}-\frac{dq}{ds}\frac{d^2p}{ds^2}\right)+\frac{\delta \log k}{\delta n}.$$

Chiamiamo η l'angolo che l'arco s fa colla curva u, ed avremo evidentemente:

$$\frac{dp}{ds}=k\cos\eta,\qquad \frac{dq}{ds}=k\operatorname{sen}\eta,$$

donde:

$$\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2}-\frac{dq}{ds}\frac{d^2p}{ds^2}=k^2\frac{d\eta}{ds}:$$

dunque:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\eta}{ds}+\frac{\delta \log k}{\delta n}. \tag{35}$$

Questa formola dà a ρ il segno positivo od il negativo, secondo che ρ è diretto nel senso di δn od in senso contrario.

Chiamando $d\tau$ l'angolo di contingenza geodetica, cioè ponendo:

$$d\tau=\frac{ds}{\rho},$$

si deduce dalla precedente questa relazione:

$$-\frac{\delta \log k}{\delta n}=d\eta-d\tau,$$

dunque, sostituendo nella (34),

$$\Gamma'=E-T, \tag{36}$$

(*) Citate *Ricerche*.

dove E e T sono le somme, relative a tutto il contorno s, degli angoli $d\eta$ e $d\tau$ corrispondenti a questo contorno stesso.

Per determinare con sicurezza queste somme in tutti i casi, conviene far in modo che in nessun punto del contorno gli angoli $d\eta$, $d\tau$ sieno finiti; cioè conviene togliere i punti angolosi del contorno, se ve ne sono, sostituendovi delle piccole curve d'*accordo*, che tolgano le discontinuità dell'angolo η e impediscano al raggio ρ di essere nullo in qualche punto. Quanto all'angolo τ è bene osservare che, in virtù della convenzione circa il segno di ρ, i suoi elementi infinitesimi $d\tau$ sono positivi o negativi, secondo che le due geodetiche, tangenti consecutive al contorno, dalle quali sono formati, si incontrano esternamente od internamente all'area Ω'. Supporremo anche, in quel che segue, che quest'area sia semplicemente connessa.

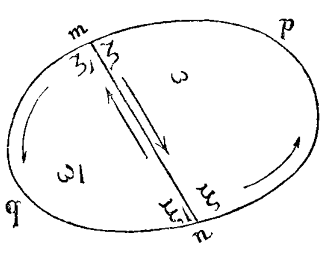
La somma $\int d\eta = E$ si eseguisce agevolmente. Infatti dividiamo dapprima l'area Ω', come nell'art. V, in un certo numero di pezzi ω, ciascuno dei quali abbia il proprio contorno attraversato in due soli punti dalle curve u. Sieno $v = v_0$, $v = v_1$, le due curve u entro le quali è racchiuso uno di questi pezzi (vedi la figura dell'art. V). Nel punto di contatto α colla prima curva l'angolo η è nullo, e da questo punto, variando uniformemente, va ad acquistare il valore π nel punto di contatto γ colla seconda; poscia cresce da π a 2π, quando si ritorna per δ al primitivo punto α. Dunque per questo pezzo la somma in discorso è 2π, epperò, chiamando T_ω la somma algebrica degli angoli di contingenza geodetica, si ha per esso:

$$\Gamma'_\omega = 2\pi - T_\omega .$$

Per un secondo pezzo si avrà analogamente:

$$\Gamma'_{\omega_1} = 2\pi - T_{\omega_1} ;$$

e così di seguito. Ora torniamo a ricongiungere i varii pezzi ω, ω_1, ecc., per il che basterà considerare il risultato della congiunzione di due pezzi ω, ω_1 aventi in comune una parte mn del loro contorno. Chiamiamo T'_ω, T'_{ω_1} le parti di T_ω, T_{ω_1} relative alle curve npm, mqn rispettivamente, e t quella relativa alla trasversale mn, parte che è comune ai due contorni, ma con segno contrario. Si avrà:



$$T_\omega = T'_\omega + t + \xi_1 + \zeta_1 , \quad T_{\omega_1} = T'_{\omega_1} - t + \xi + \zeta ,$$

quindi:

$$T_\omega + T_{\omega_1} = T'_\omega + T'_{\omega_1} + 2\pi = T_{\omega+\omega_1} + 2\pi.$$

Ne risulta che, sommando le due formole precedentemente ottenute, si ha:

$$\Gamma'_{\omega+\omega_1} = 2\pi - T_{\omega+\omega_1},$$

formola analoga alle anzidette, ma relativa al complesso delle due parti ω ed ω_1. Così continuando si trova finalmente:

$$\Gamma' = 2\pi - T, \tag{37}$$

dove T è la somma di tutti gli angoli di contingenza geodetica relativi al contorno dell'area Ω'. (Donde si conclude eziandio che, nelle condizioni ammesse circa alla disposizione delle curve coordinate, si ha in ogni caso, per un contorno chiuso, $E = 2\pi$.)

La proprietà espressa dalla equazione precedente è stata indicata, sotto forma un po' diversa, dal sig. Bonnet. (*)

Se il contorno è un poligono geodetico, sono nulle, nella somma T, tutte le parti relative ai lati successivi di esso, e non rimangono che quelle dovute alle piccole curve d'accordo che abbiam detto doversi sostituire agli angoli del poligono, cioè non rimane che la somma delle deviazioni di ciascun lato sul precedente. Chiamando dunque Δ queste deviazioni, si ha:

$$\Gamma' = 2\pi - \sum\Delta,$$

formola che esprime un celebre teorema di Gauss (**).

Se la superficie è riferita ad un sistema di coordinate geodetiche r ed ε, come si suppose nell'art. precedente, in prossimità del punto O dal quale divergono le geodetiche l'espressione dell'elemento lineare si può scambiare colla seguente:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varepsilon^2,$$

per la quale il modulo k del fattore d'integrazione $\varkappa$ può porsi $= \dfrac{1}{r}$.
Ne risulta che la funzione $\log k$ diventa, in questo caso, infinita in O come

(*) *Journal de l'Ecole Polytéchnique,* cahier 41.
(**) *Disquisitiones generales* etc. art. XX.

$\log \frac{1}{r}$. Se dunque si suppone che il punto O sia nell'interno dell' area Ω', bisogna sostituire la formola:

$$\Gamma' = \iint d\omega\, \Delta_2 \log k = 2\pi - \int ds \frac{\delta \log k}{\delta n}$$

[dedotta dalla (30)] a quella da cui siamo partiti per istabilire la (37). Si trova così:

$$\int ds \frac{\delta \log k}{\delta n} = T,$$

mentre, nelle ipotesi ammesse precedentemente, si aveva:

$$\int ds \frac{\delta \log k}{\delta n} = T - 2\pi.$$

Di qui si conclude l'interessante proprietà che: l'integrale $\int ds \frac{\delta \log k}{\delta n}$, esteso ad un contorno chiuso, è eguale a $T-2\pi$, oppure a T, secondo che il punto in cui la funzione k diventa infinita come $\frac{1}{r}$, è interno od esterno all' area chiusa da quel contorno.

Nel piano, riferito a coordinate polari ordinarie, si ha $k=\frac{1}{r}$, $T=2\pi$, quindi la proprietà precedente fornisce, come caso particolare, il teorema, facilissimo a verificarsi, che: se r è la distanza di un punto fisso del piano da un punto variabile lungo un contorno chiuso, l'integrale $\int \frac{\delta \log r}{\delta n} ds$ esteso a questo contorno, è $=0$ oppure $=2\pi$, secondo che il punto fisso è esterno od interno all' area limitata dal contorno.

Un caso particolare interessante della formola (37) si ottiene supponendo che la curva s sia una di quelle dotate della proprietà di contenere, sotto un dato perimetro, la massima area, o di avere, per una data area racchiusa, il minimo perimetro. È noto infatti che per queste curve la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ è dovunque costante, e che quindi $T=\frac{s}{\rho}$, s essendo il perimetro totale: dunque si ha, per la curvatura totale dell' area racchiusa,

$$\Gamma' = 2\pi - \frac{s}{\rho}. \tag{38}$$

Il valore della curvatura totale può anche essere espresso facilmente per un integrale lineare, dipendente dalle sole E, F, G e loro derivate. Si ponga infatti, per brevità,

$$\frac{1}{2H}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)=Q\,,\qquad \frac{1}{2H}\left(\frac{\partial E}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{E}\,\frac{\partial E}{\partial u}\right)=P\,,$$

e la (33) diverrà:

$$\Delta_2 \log k=\frac{1}{H}\left\{\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right\}.$$

Quindi, moltiplicando per $d\omega = H du\, dv$, ed integrando al modo che si è fatto verso la fine dell'Art. V, si troverà:

$$\Gamma'=\int(P du+Q dv)\,, \tag{39}$$

dove l'integrale del secondo membro è esteso alla curva chiusa che limita la porzione di superficie di cui Γ' è la curvatura totale.

Si connette con questa espressione di Γ' una trasformazione notevole che può essere effettuata sulla quantità $\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}$. Si ha infatti.

$$\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}=\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\,\frac{\delta u}{\delta n}+\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}\,\frac{\delta v}{\delta n}\,,$$

ossia, per le (21),

$$H\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}=\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}-\left(F\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\,.$$

Ma essendo, per le (4),

$$E=U^2\,,\qquad F=\frac{U(V+V')}{2}\,,\qquad G=VV'\,,\qquad \frac{iH}{U}=\frac{V-V'}{2}\,,$$

a questa equazione si può dare la forma seguente:

$$H\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}=\left(U\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}-V\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\right)\left(U\frac{du}{ds}+V'\frac{dv}{ds}\right)+iH\frac{d \log \varkappa}{ds}\,,$$

quindi (31):

$$\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}ds=\frac{W(U du+V' dv)}{H}+i.d\log\varkappa. \tag{40}$$

formola che contiene la trasformazione alla quale alludevamo. (La caratteristica d serve sempre a designare spostamenti nel senso dell'arco s, mentre la δ indica spostamenti normali).

Da essa si deduce, integrando lungo una curva chiusa qualunque,

$$\int \frac{\delta \log z}{\delta n} ds = \int \frac{W(Udu + V'dv)}{H} + i \int d \log z.$$

Ma se questa curva è il contorno già considerato nella formola (34), nell'interno del quale abbiamo supposto che $k = \mathrm{mod}\, z$ non diventasse mai $=0$, è chiaro che neppure z diventerà zero in esso, epperò si avrà $\int d \log z = 0$, e quindi:

$$\int \frac{\delta \log z}{\delta n} ds = \int \frac{W(Udu + V'dv)}{H}.$$

Eguagliando le parti reali dei due membri di questa equazione, si ricade, per la (34), sulla (39).

Bologna, dicembre 1867.

Applicazione della Memoria(*)
« Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie »
all'equazione modulare della trasformazione di quinto ordine.

(*del prof.* P. Gordan, *a Giessen*).

Nella Memoria suddetta si è data la rappresentazione tipica di una forma binaria di 6° grado, come anche la sostituzione quadratica da adoperarsi per ridurla ad un'equazione cubica, quando è nullo l'invariante del 15° ordine.

Qui io voglio applicare lo stesso metodo e la stessa notazione all'equazione modulare per la trasformazione di quinto ordine delle funzioni ellittiche.

Siccome i coefficienti nell'equazione modulare sono funzioni di una sola variabile u, anche gli invarianti hanno la stessa proprietà, ed invero essi possono essere formati coi quattro fattori:

$$u, \qquad 1-u^8, \qquad 1+u^8, \qquad 1+u^{16}-6u^8.$$

Siccome poi le forme binarie di 6° grado non hanno alcun covariante lineare, così esse non si possono in generale rappresentare con un'espressione tipica, fra le cui variabili non sussista alcuna relazione. Invece le equazioni modulari posseggono dei covarianti quadratici, che hanno un fattor lineare comune: e assumendo questi covarianti quadratici come nuove variabili, l'equazione data diviene una forma tipica.

L'equazione modulare data nei *Fundamenta* di Jacobi è la seguente:

$$v^6-4u^5v^5+5u^2v^4-5u^4v^2+4uv-u^6=0,$$

(*) Pag. 23 del tomo presente di questi Annali.

dove u e v sono le radici quarte del modulo primitivo e del trasformato. Ponendo $v = x : y$, si ottiene la forma binaria del 6° grado:

$$x^6 - 4u^5x^5y + 5u^2x^4y^2 - 5u^4x^2y^4 + 4uxy^5 - u^6y^6 \equiv f,$$

alla quale si possono applicare tutte le operazioni di cui tratta la Memoria citata.

Allora si ottengono i covarianti:

$k = 2u\,(1-u^8)\,(4x^3y - 4u^2xy^3)$	del 4° grado
$\Delta = -8u^2(1-u^8)\,(x^2+u^2y^2)^2$	» 4° »
$l = -\frac{16}{3}u^2(1-u^8)\,(xu^3-y)^2$	» 2° »
$m = -\frac{2^6}{3}u^3(1-u^8)^2\,[u^3x^2+(1-u^8)xy-u^5y^2]$	» 2° »
$n = -\frac{2^7}{3}u^4(1-u^8)^3\,[(1-u^8)x^2+4u^5xy-u^2(1-u^8)y^2]$	» 2° »

e gli invarianti:

$A = 0$ (*)	del 2° ordine (nei coefficienti).
$B = 16u^4(1-u^8)^2$ (*)	» 4° »
$C = 0$ (*)	» 6° »
$D = -\frac{2^{10}}{9}u^6(1-u^8)^4(1+u^8)^2$	» 10° »
$R = -\frac{2^{15}}{27}u^9(1-u^8)^6(1+u^8)(1+u^{16}-6u^8)$	» 15° »

fra i quali ha luogo la relazione:

$$R^2 = -D\left(D^2 - \tfrac{16}{81}B^5\right),$$

dove:

$$D^2 - \tfrac{16}{81}B^5 = \frac{2^{20}}{81}u^{12}(1-u^8)^8(1+u^{16}-6u^8)^2.$$

Questi invarianti fondamentali servono ad esprimere razionalmente gli altri che seguono; e si ha:

(*) Cfr. Joubert, *Sur l'équation du 6e degré* (Comptes rendus 20 et 27 mai, 17 juin 1867).

$$A_{ll}=0\,,\quad A_{lm}=\tfrac{4}{9}B^2,\quad A_{ln}=A_{mm}=D\,,\quad A_{mn}=\tfrac{4}{9}B^3,\quad A_{nn}=BD\,,$$

$$B_{ll}=B(D^2-\tfrac{16}{81}B^5),\quad B_{lm}=0,\quad B_{mm}=-D^2,\quad B_{ln}=-(D^2-\tfrac{16}{81}B^5),$$

$$B_{mn}=\tfrac{4}{9}B^2D,\quad B_{nn}=-\tfrac{16}{81}B^4$$

$$E=\tfrac{2}{3}D,\quad F=-\tfrac{16}{81}B^3=\frac{B_{nn}}{B}\,.$$

Introducendo questi valori nella forma tipica, otteniamo la formola:

$$R^2.f=\tfrac{2}{3}BDm^2(n-2Bl)+m\{-\tfrac{16}{27}B^3n^2+\tfrac{32}{27}B^4ln+3l^2(D^2-\tfrac{16}{81}B^5)\}+\tfrac{2}{3}Dn^2-\tfrac{4}{3}BDln^2,$$

mentre i covarianti l, m, n sono legati dalla relazione:

$$-D^2m^2+\tfrac{8}{9}B^2Dmn-\tfrac{16}{81}B^4n^2+(D^2-\tfrac{16}{81}B^5)(Bl^2-2ln)=0.$$

Queste due equazioni si possono semplificare d'assai.

Eliminando fra esse m^2 e dividendo per $D^2-\frac{16}{81}B^5$, si avrà:

$$\tfrac{3}{2}D^2f=-\tfrac{9}{2}Dl^2m-n^3+4Bln^2-5B^2l^2n+2B^3l^3\,. \tag{1}$$

La relazione fra i covarianti l, m, n, posta sotto la forma:

$$(Dm-\tfrac{4}{3}B^2n)^2=(D^2-\tfrac{16}{81}B^5)\,l(Bl-2n)\,,$$

mostra che i covarianti

$$l \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad -Dm+\tfrac{4}{9}B^2n$$

hanno un fattor comune, e che il covariante

$$2n-Bl$$

è un quadrato completo. Effettivamente si ha:

$$\tfrac{4}{9}B^2n-Dm=\frac{2^{16}}{27}u^9(1-u^8)^6(1+u^{16}-6u^8)(xu^3-y)(x+yu^5)\,,$$

$$l=-\frac{2^4}{3}u^2(1-u^8)(xu^3-y)^2,$$

$$2n-Bl=\frac{2^8}{3}u^4(1-u^8)^3(x+yu^5)^2,$$

mediante i quali valori la relazione sopradetta è identicamente sodisfatta.

Siccome i due covarianti quadratici l e $\frac{4}{9}Bn^2-Dm$ hanno il fattor comune

xu^3-y, così una relazione fra i medesimi ha tutte le proprietà di una forma tipica. Pongasi:

$$\frac{Dm-\frac{4}{9}B^2n}{l\sqrt{B(D^2-\frac{16}{81}B^5)}}=\frac{x+u^5y}{u^4x-uy}=z;$$

ne verrà:

$$\frac{Bl\cdot 2n}{Bl}=z^2,$$

epperò:

$$n=\frac{Bl}{2}(1-z^2),$$

$$Dm=\tfrac{2}{9}B^3l(1-z^2)+lz\sqrt{B(D^2-\tfrac{16}{81}B^5)},$$

e introducendo questi valori di m ed n nella (1):

$$\tfrac{3}{2}D^2f=\frac{B^3l^3}{8}\left\{z^6+5z^4+15z^2-5-36z\sqrt{\frac{D^2}{B^5}-\frac{16}{81}}\right\}.$$

Dividendo questa equazione per $\frac{3}{2}\cdot\frac{2^{20}}{81}u^{12}(1-u^8)^8$, si ottiene:

$$(1+u^8)^4f=(u^3x-y)^6\{16zu^2(1+u^{16}-6u^8)-4u^6(1-u^8)(z^6+5z^4+15z^2-5)\}. \quad (2)$$

Da questa equazione si apprende che per mezzo della trasformazione:

$$\frac{v+u^5}{vu^4-u}=z,$$

equazione modulare si muta nella forma:

$$z^6+5z^4+15z^2-5=36z\sqrt{\frac{D^2}{B^5}-\frac{16}{81}}=4z\frac{1+u^{16}-6u^8}{u^6(1-u^8)},$$

nella quale mancano i coefficienti di z^5 e z^3, e i coefficienti sono numerici ad eccezione di quello di z, il quale dipende soltanto dall' invariante assoluto; si apprende inoltre che questa trasformazione diviene impossibile solamente quando $u=0$ oppure $1+u^8=0$.

Passiamo ora al caso in cui le radici dell' equazione modulare siano in involuzione, cioè in cui è nullo l'invariante di 15° ordine:

$$R=-\frac{2^{15}}{27}u^9(1+u^8)(1-u^8)^6(1+u^{16}-6u^8).$$

La questione offre quattro casi, potendo annullarsi ciascuno dei quattro fattori di R. Siccome per $u=0$, si annullano del pari le diverse radici della equazione modulare, così prendiamo a dirittura il secondo caso, in cui

$$1+u^8=0. \tag{II.}$$

In questo caso l'equazione (2) non può essere adoperata; perciò dobbiamo far uso delle formole del § 11 della nostra Memoria. Ne risultano le formole:

$$\begin{aligned}
l &= -\frac{2^5}{3} u^2 (u^3 x - y)^2, \\
m &= -\frac{2^8}{3} \quad (u^3 x + y)^2, \\
n &= -\frac{2^{11}}{3} u^6 (u^3 x - y)^2 = Bl, \\
\vartheta &= \frac{2^{14}}{9} u^5 (u^3 x + y)(u^3 x - y), \\
\vartheta^2 &= 2 A_{lm} l m = \tfrac{8}{9} B^2 lm ;
\end{aligned}$$

ed inoltre:

$$A = C = D = E = 0, \qquad B = 64u^4, \qquad F = \frac{B_{nn}}{B}$$

$$A_{\vartheta\vartheta} = B_{nn} = -\tfrac{16}{81} B^4, \qquad A_{lm} = \tfrac{4}{9} B^2.$$

L'ultima equazione (*) a pag. 65 della Memoria, dividendo per B_{nn}, diviene:

$$\begin{aligned}
A_{\vartheta\vartheta} f &= 4\vartheta^2 \left(-\frac{m}{B}\right) - \tfrac{2}{3} n \left(m^2 + \frac{B}{3} l^2\right) - \tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{4}{3} Blm^2 + \tfrac{2}{3} B^2 l^3\right) \\
\tfrac{8}{9} B^3 f &= 16 lm^2 + 3lm^2 + Bl^3 - 4lm^2 + 2Bl^3 \\
&= 15 lm^2 + 3Bl^3,
\end{aligned}$$

onde l'equazione modulare assume la forma:

$$l(Bl^2 + 5m^2) = 0,$$

$$(u^3 x - y)^2 \{ 5(u^3 x + y)^4 - (u^3 x - y)^4 \} = 0$$

(*) La quale deve leggersi così:

$$\begin{aligned}
A^2_{\vartheta\vartheta} u = 4\vartheta^2 (\tfrac{2}{3} BEl - Fm - En) - (\tfrac{2}{3} n A_{\vartheta\vartheta} + \tfrac{4}{3} R\vartheta)(m^2 - 2A_{lm} + \tfrac{1}{3} Bl^2) \\
- \tfrac{2}{3} A_{\vartheta\vartheta} \{ (8AC + \tfrac{2}{3} B^2) l^3 - 5Cl^2 m - \tfrac{4}{3} Blm^2 + Am^3 \}.
\end{aligned}$$

epperò ha le radici:

$$u^3 v_1 = u^3 v_2 = 1\,;$$

$$u^3 v_3 = \frac{1-\sqrt[4]{5}}{1+\sqrt[4]{5}}\,;\quad u^3 v_4 = \frac{1+\sqrt[4]{5}}{1-\sqrt[4]{5}}\,;\quad u^3 v_5 = \frac{1+i\sqrt[4]{5}}{1-i\sqrt[4]{5}}\,;\quad u^3 u_6 = \frac{1-i\sqrt[4]{5}}{1+i\sqrt[4]{5}}\,.$$

Se:

$$u^8 - 1 = 0, \qquad \text{III.}$$

la (2) mostra che per $z = \dfrac{x+u^5 y}{u(u^3 x - y)}$, si ha $(u^3 x - y)^6 z = 0$, epperò in questo caso l'equazione modulare assume la forma:

$$(vu^3 - 1)^5 (v + u^5) = 1,$$

e le sue radici sono:

$$u^3 v_1 = u^3 v_2 = u^3 v_3 = u^3 v_4 = u^3 v_5 = 1, \qquad u^3 v_6 = -1 \text{ (*)}.$$

Passiamo finalmente al caso in cui si annulli il quarto fattore di R:

$$u^{16} - 6u^8 + 1 = 0\,; \qquad \text{IV.}$$

allora, per la sostituzione:

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = z,$$

l'equazione modulare diviene:

$$z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 5 = 0.$$

Questa equazione si riduce di nuovo all'equazione modulare (astrazion fatta da un fattore superfluo), se si ponga per z il suo valore, indi si moltiplichi pel denominatore e si abbassino le potenze di u fin quando è possibile, adoperando la uguaglianza IV.

(*) Cfr. Sohnke, G. di Crelle, t. 16, p. 112.

Sopra la determinazione delle temperature variabili di una lastra terminata.

(*del prof.* ENRICO BETTI, *a Pisa*).

1.

Sia data una lastra di grossezza trascurabile rispetto all'altre dimensioni, e che abbia la superficie piana, terminata e connessa. Il contorno sia composto di una o di più linee chiuse, e quindi l'ordine della sua connessione possa essere anche moltiplice.

Denotiamo con v le temperature dei punti della lastra in un tempo t. Siano date comunque le temperature dei vari punti della lastra quando $t=0$, e indichiamole con v_0; e siano date anche in modo affatto arbitrario le temperature dei punti delle linee $c_1, c_2, \ldots c_s$ che formano il contorno, in tutto il tempo trascorso da $t=0$ a un tempo qualunque t'. Queste temperature le dinoteremo rispettivamente con $V_1, V_2, \ldots, V_s$, e saranno in generale variabili da punto a punto del contorno e col tempo. Le funzioni $V_1, V_2, \ldots V_s$ potranno essere anche discontinue in alcuni punti separati, e v_0 lungo linee separate, ma sì le une che le altre non potranno essere mai infinite.

Per determinare v avremo le seguenti condizioni:

1.° La funzione v sarà finita e continua insieme colle sue derivate prime rapporto alle coordinate, in tutta la superficie della lastra e in tutto il tempo, e sodisfarà tra questi limiti alla equazione a derivate parziali:

$$\frac{dv}{dt} + hv - k\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}\right) = 0, \tag{1}$$

dove:

$$h = \frac{2H}{c\rho\sigma}, \qquad k = \frac{K}{c\rho},$$

essendo H la conducibilità esterna, K la interna, c il calorico specifico, ρ la densità del corpo, e σ la grossezza della lastra.

2.° Quando è $t=0$, sarà:

$$v=v_0,$$

essendo v_0 una funzione dei punti della superficie della lastra affatto arbitraria.

3.° Sopra le linee $c_1, c_2, c_3, .., c_s$ sarà:

$$v=V_1, \ v=V_2, .., v=V_s,$$

rispettivamente, e le funzioni V saranno funzioni dei punti delle linee c e del tempo, affatto arbitrarie.

Queste condizioni determinano compiutamente il valore di v in un punto qualunque (x', y') della superficie della lastra, dopo un tempo t' qualunque.

2.

Sia u una funzione dei punti della superficie della lastra e del tempo, finita e continua insieme colle sue derivate prime rapporto alle coordinate, in tutta questa superficie e in tutto il tempo da $t=0$ a $t=t'-\varepsilon$, essendo ε una quantità piccola quanto si vuole. Moltiplichiamo per $udt\, dx\, dy$ il primo membro della equazione (1), ed integriamo estendendo l'integrale triplo a tutto il tempo da 0 a $t'-\varepsilon$, e a tutta la superficie della lastra. Avremo:

$$\iiint u\left[\frac{dv}{dt}+hv-k\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy}\right)\right]dt\,dx\,dy=0.$$

Integrando per parti e applicando un teorema noto si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}&\iint(uv)_{t'-\varepsilon}dx\,dy-\iint(uv)_0\,dx\,dy+k\int_0^{t'-\varepsilon}dt\sum\nolimits_m\int_{c_m}\left(u\frac{dv}{dp_m}-V_m\frac{du}{dp_m}\right)ds_m\\&\qquad-\iiint v\left[\frac{du}{dt}-hu+k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)\right]dt\,dx\,dy=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

dove i primi integrali doppi sono estesi a tutta la superficie della lastra,

p_m denota la normale alla parte di contorno c_m contata andando dalla linea c_m verso l'interno della superficie della lastra, ed s_m l'arco della linea c_m contato da un suo punto fisso preso comunque, e movendosi in modo che l'interno della superficie resti a sinistra. L'integrale triplo è esteso a tutta la superficie della lastra e a tutto il tempo da 0 a $t'-\varepsilon$.

Per ottenere il valore di v nel punto (x', y') nel tempo t', bisognerà che passando al limite per $\varepsilon=0$, dalla equazione (2) spariscano tutti i valori di v fuori che questo, e i valori dati, cioè quelli che corrispondono a $t=0$, e quelli che si hanno in tutto il tempo sopra i punti del contorno. Si tratta dunque di determinare il moltiplicatore u in modo da produrre questo effetto. Dovrà quindi u essere tale da render nullo l'integrale triplo, da render nullo l'integrale doppio che contiene $\frac{dv}{dp}$, e da fare sparire dal primo integrale doppio tutti i valori di v corrispondenti a $t=t'$, fuori che quello corrispondente al punto (x', y'). Dovrà dunque la funzione u sodisfare alle seguenti condizioni:

1.° Dovrà essere finita e continua insieme colle sue derivate prime, in tutta la superficie della lastra, e da $t=0$ a $t=t'-\varepsilon$, essendo ε piccolo quanto si vuole, e tra questi limiti dovrà sodisfare alla equazione:

$$\frac{du}{dt}-hu+k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0. \tag{3}$$

2.° Dovrà essere:

$$u=0$$

in tutti i punti del contorno e in tutto il tempo da zero a $t'-\varepsilon$.

3.° Dovrà convergere indefinitamente a zero in tutti i punti della lastra fuori che nel punto (x', y'), quando ε converge a zero, e deve convergere all'infinito coll'avvicinarsi al punto (x', y') e col convergere di ε a zero.

Quando la u sodisfarà a queste tre condizioni, la equazione (2) passando al limite per $\varepsilon=0$, darà:

$$v'=\frac{\iint(uv)_0\,dx\,dy+k\int_0^{t'}dt\sum\int_{c_m}V_m\frac{du}{dp_m}\,ds_m}{\lim\limits_{\varepsilon=0}\int_O u_{t'-\varepsilon}\,d\omega}, \tag{4}$$

essendo O una curva chiusa qualunque descritta intorno al punto (x', y') e $d\omega$ il suo elemento.

3.

La prima e la terza condizione poste per la funzione u sono sodisfatte prendendo una serie convergente in tutta la superficie della lastra e in tutto il tempo da zero a $t'-\varepsilon$, della forma:

$$u=\frac{\sum A_n e^{-\frac{(x-\xi_n)^2+(y-\eta_n)^2}{4k(t'-t)}+ht}}{t'-t}, \tag{5}$$

dove (ξ_n, η_n) sono coordinate di punti esterni alla lastra, tutti, fuori che uno solo, il quale deve essere il punto (x', y').

Infatti, ciascun termine della serie (5) sodisfà alla equazione (3), e quando t converge a t' tutti i termini convergono a zero, fuori che quello in cui $\xi=x'$, e $\eta=y'$, il quale converge a zero in tutti i punti a distanza finita dal punto (x', y'), e converge all'infinito, nei punti infinitamente vicini a (x', y').

Pertanto, quando saranno determinati i punti (ξ_n, η_n) esterni alla superficie della lastra, e i coefficienti A_n in modo che sia sodisfatta la seconda condizione posta per la u, la formula (5) darà la funzione cercata.

Prendendo il coefficiente A del termine in cui $\xi=x'$, $\eta=y'$, uguale all'unità avremo:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{O}u_{t'-\varepsilon}\,d\omega=e^{ht'}\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{e^{-\frac{r^2}{4k\varepsilon}}rdr}{r}=e^{ht'}\lim_{\varepsilon=0}4k\pi\left(1-e^{-\frac{R^2}{4k\varepsilon}}\right)=4k\pi e^{ht'};$$

dove per O abbiamo preso un cerchio di raggio finito R, e abbiamo trascurato tutti gli altri termini di u, perchè al limite sono tutti nulli. Sostituendo questo valore nella formula (4), abbiamo per il valore di v nel punto (x', y') nel tempo t':

$$v'=\frac{e^{-ht'}}{4k\pi}\iint(uv)_0\,dx\,dy+\frac{e^{-ht'}}{4\pi}\int_0^{t'}dt\sum\int_{c_m}V_m\frac{du}{dp_m}ds_m \tag{6}$$

4.

Determiniamo ora A_n, ξ_n, η_n nella serie (5), in modo che sia $u=0$ sopra il contorno, e che la serie stessa si conservi convergente in tutta la superficie della lastra e in tutto il tempo. La difficoltà di questo problema dipende unicamente dalla forma del contorno. Diamone la soluzione nel caso che la superficie della lastra sia un rettangolo.

Siano $2a$, $2b$ le lunghezze dei due lati del rettangolo. Poniamo l'origine delle coordinate nel punto d'intersezione delle due diagonali, e prendiamo per asse delle x una retta parallela al lato di lunghezza $2a$, e per asse delle y una retta parallela al lato di lunghezza $2b$. Tiriamo per il punto (x', y') una retta parallela all'asse delle y, e prolunghiamola indefinitamente da ambedue le parti. Siano: m il punto (x', y'): p il punto in cui questa retta incontra il lato del rettangolo che rimane dalla parte positiva dell'asse delle x; e q il punto dove incontra il lato del rettangolo che rimane dalla parte negativa dello stesso asse. Prendiamo ora nella parte di questa retta, che rimane fuori del rettangolo dalla parte positiva, i punti:

$$m_1, m_2, m_3, .., m_n, \ldots$$

e fuori del rettangolo dalla parte negativa, i punti:

$$m'_1, m'_2, m'_3, .., m'_n, \ldots$$

in modo che sia:

$$\begin{array}{ll} pm_1 = pm \;; & qm'_1 = qm \\ pm_2 = pm'_1; & qm'_2 = qm_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ pm_n = pm'_{n-1}; & qm'_n = qm_{n-1}. \end{array}$$

Denotando con η_n la ordinata di m_n e con η'_n la ordinata di m'_n, avremo:

$$\eta_n + \eta'_{n-1} = 2b, \quad \eta'_n + \eta_{n-1} = -2b;$$

onde:

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_{2n} \;\; = 4nb + y' \;\;\; ; & \eta'_{2n} \;\; = -4nb + y' \;\;\; , \\ \eta_{2n+1} = 2(2n+1)b - y'; & \eta'_{2n+1} = -2(2n+1)b - y'. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Tiriamo ora per il punto m una retta parallela all' asse delle x e sopra di essa prendiamo analogamente i punti esterni al rettangolo dalle due parti, che abbiano le ascisse ξ_n, ξ'_n date dalle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_{2n} = 4na + x' \quad ; & \xi'_{2n} = -4na + x' \quad ; \\ \xi_{2n+1} = 2(2n+1)a - x'; & \xi'_{2n+1} = -2(2n+1)a - x'. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Tiriamo ora per ciascuno di questi punti una parallela all' asse delle y, e per ciascuno dei punti m_n, m'_n una parallela all' asse delle x. Questi due sistemi di rette parallele colle loro intersezioni determineranno un sistema di punti doppiamente infinito, i quali saranno tutti esterni alla superficie del rettangolo, e le loro coordinate corrisponderanno ai quattro tipi seguenti:

$$(\xi_n, \eta_m), \ (\xi_n, \eta'_m), \ (\xi'_n, \eta_m), \ (\xi'_n, \eta'_m).$$

Poniamo:

$$\tau = 4k(t' - t),$$

e prendiamo le serie convergenti:

$$\Omega(x, x', a) = e^{-\frac{(x-x')^2}{\tau}} + \sum_1^\infty (-1)^n \left(e^{-\frac{(x-\xi_n)^2}{\tau}} + e^{-\frac{(x-\xi'_n)^2}{\tau}} \right),$$

$$\Omega(y, y', b) = e^{-\frac{(y-y')^2}{\tau}} + \sum_1^\infty (-1)^n \left(e^{-\frac{(y-\eta_n)^2}{\tau}} + e^{-\frac{(y-\eta'_n)^2}{\tau}} \right).$$

Avremo, come è facile a verificarsi:

$$\Omega(a, x', a) = 0, \quad \Omega(-a, x', a) = 0,$$

$$\Omega(b, y', b) = 0, \quad \Omega(-b, y', b) = 0.$$

Quindi la funzione:

$$u = \frac{e^{ht}}{t'-t} \Omega(x, x', a) \, \Omega(y, y', b), \tag{9}$$

la quale è della forma (5), sodisfarà anche alla seconda condizione posta per la u, cioè si annullerà, qualunque sia t, sopra tutto il contorno della lastra rettangolare.

5.

Determiniamo la funzione $\Omega\ (x, x', a)$; e perciò sostituiamo in essa a ξ_n e ξ'_n i loro valori dati dalle formule (8). Avremo:

$$\Omega(x, x', a) = e^{-\frac{(x-x')^2}{\tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4^2 n^2 i^2}{\tau} + 2.4na\frac{(x-x')}{\tau}}$$

$$- e^{-\frac{(x+x')^2}{\tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4^2\frac{(2n+1)^2}{4}\frac{a^2}{\tau} + 4(2n+1)a\frac{(x+x')}{\tau}}.$$

Le due serie sono funzioni *Jacobiane*. Infatti essendo:

$$\Theta_{0,0}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left(4n^2\frac{\omega}{4} + 2nz\right)}$$

$$\Theta_{1,0}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left((2n+1)^2\frac{\omega}{4} + (2n+1)z\right)},$$

se poniamo:

$$\omega = \frac{4^2 a^2 i}{\pi\tau}, \tag{10}$$

avremo:

$$\Omega(x, x', a) = e^{-\frac{(x-x')^2}{\tau}} \Theta_{0,0}\left(\frac{4ai(x-x')}{\pi\tau}, \frac{4^2a^2i}{\pi\tau}\right) - e^{-\frac{(x+x')^2}{\tau}} \Theta_{1,0}\left(\frac{4ai(x+x')}{\pi\tau}, \frac{4^2a^2i}{\pi\tau}\right). \tag{11}$$

Ora prendiamo le formule seguenti, che sono casi particolari di una formula dimostrata dal sig. Hermite nel vol. III della serie 2.ª del Giornale di *Liouville:*

$$e^{\pi i\omega z^2}\,\Theta_{0,0}(\omega z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{-i\omega}}\,\Theta_{0,0}\left(z, -\frac{1}{\omega}\right),$$

$$e^{\pi i\omega z'^2}\Theta_{1,0}(\omega z', \omega) = \frac{1}{\sqrt{-i\omega}}\,\Theta_{0,1}\left(z', -\frac{1}{\omega}\right),$$

dove:

$$\Theta_{0,1}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i\left(4n^2\frac{\omega}{4} + 2nz\right)},$$

e poniamo:

$$z = \frac{x-x'}{4a}, \qquad z' = \frac{x+x'}{4a}.$$

Avremo:

$$e^{-\frac{(x-x')^2}{\tau}} \Theta_{0,0}\left(\frac{4ai(x-x')}{\pi\tau}, \frac{4^2a^2i}{\pi\tau}\right) = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{4a} \Theta_{0,0}\left(\frac{x-x'}{4a}, \frac{\pi\tau i}{4^2a^2}\right),$$

$$e^{-\frac{(x+x')^2}{\tau}} \Theta_{1,0}\left(\frac{4ai(x+x')}{\pi\tau}; \frac{4^2a^2i}{\pi\tau}\right) = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{4a} \Theta_{0,1}\left(\frac{x+x'}{4a}, \frac{\pi\tau i}{4^2a^2}\right).$$

Sostituendo nella formula (11) si ottiene;

$$\Omega(x, x', a) = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{4a}\left[\Theta_{0,0}\left(\frac{x-x'}{4a}, \frac{\pi\tau i}{4^2a^2}\right) - \Theta_{0,1}\left(\frac{x+x'}{4a}, \frac{\pi\tau i}{4^2a^2}\right)\right],$$

ed analogamente:

$$\Omega(y, y', b) = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{4b}\left[\Theta_{0,0}\left(\frac{x-x'}{4b}, \frac{\pi\tau i}{4^2b^2}\right) - \Theta_{0,1}\left(\frac{x+x'}{4b}, \frac{\pi\tau i}{4^2b^2}\right)\right].$$

Ponendo questi valori nella formula (9), dopo aver sostituito a τ il suo valore $4k(t'-t)$, abbiamo:

$$u = \frac{\pi k e^{ht}}{4ab}\left[\Theta_{0,0}\left(\frac{x-x'}{4a}, \frac{\pi ki(t'-t)}{4a^2}\right) - \Theta_{0,1}\left(\frac{x+x'}{4a}, \frac{\pi ki(t'-t)}{4a^2}\right)\right]\left[\Theta_{0,0}\left(\frac{y-y'}{4b}, \frac{\pi ki(t'-t)}{4b^2}\right) - \Theta_{0,1}\left(\frac{x+x'}{4b}, \frac{\pi ki(t'-t)}{4b^2}\right)\right]. \quad (12)$$

Dedotti da questa i valori di u per $t=0$, e di $\frac{du}{dy}$ per $y=\pm b$, e di $\frac{du}{dx}$ per $x=\pm a$ dovremo sostituirli nella formula (6) che in questo caso diviene:

$$v' = \frac{e^{-ht'}}{4k\pi}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} u_0 v_0\, dx\, dy + \frac{e^{-ht'}}{4\pi}\int_0^{t'} dt \int\left\{\int_{-a}^{a}\left[V_1\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=b} + V_3\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=-b}\right]dx - \int_{-b}^{b}\left[V_2\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} + V_4\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=-a}\right]dy\right\}.$$

Pisa, 9 gennajo 1868.

Fine del Tomo I.° (Serie II.ª).