

ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS

---

ÉLÉMENTS

DE

STATIQUE GRAPHIQUE

*Tous les exemplaires des Eléments de statique graphique  
devront être revêtus de la signature de l'auteur.*

*Eugène Roulet*

ENCYCLOPÉDIE

DÈS

TRAVAUX PUBLICS

Fondée par M.-C. LECHALAS, Insp<sup>r</sup> gén<sup>l</sup> des Ponts et Chaussées

---

ÉLÉMENTS

DE

STATIQUE GRAPHIQUE

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ

EXAMINATEUR DE SORTIR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

---

*POLYGONES ET COURBES FUNICULAIRES*  
*LIGNE ÉLASTIQUE*  
*CENTRES DE GRAVITÉ ET MOMENTS D'INERTIE*  
*POUTRE DROITE SUR DEUX APPUIS*  
*FORCES INTÉRIEURES DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS*  
~~*POUTRE CONTINUE*~~

---

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE  
BAUDRY ET C<sup>ie</sup>, LIBRAIRES-ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES

MÊME MAISON A LIÈGE

---

1889

TOUS DROITS RÉSERVÉS





# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE I.

### Introduction.

N <sup>os</sup>	Pages
1. Objet de la statique graphique.....	1
2. Segment représentatif d'une force.....	2
3. Propriétés des segments rectilignes: théorème des projections..	3
4. Définition du vecteur d'une force; nouvel énoncé de la règle du parallélogramme des forces.....	3
5. Définition du polygone des vecteurs d'un système quelconque de forces. — Ligne d'action d'une force appliquée à un corps rigide.....	5
6. Composition d'un système quelconque de forces concourantes; égalité entre la projection ou le moment de la résultante et la somme des projections ou des moments des composantes....	5
7. Convention relative aux signes des moments.....	6
8. Composition de deux forces quelconques appliquées à un corps rigide. — Cas d'une résultante; cas d'équilibre; cas du couple. — Rappel des propriétés des couples.....	8
9. Lemme de géométrie: si deux triangles sont tels que deux côtés du premier soient respectivement parallèles à deux côtés du second, et si par le sommet de chacun d'eux on mène une parallèle à la base de l'autre, les deux droites ainsi obtenues divisent les bases en parties inversement proportionnelles....	9
10. Discussion: situation relative des points de division.....	11
11. Corollaire: les bases de deux triangles restant fixes, et les deux autres côtés du premier triangle restant respectivement parallèles aux deux autres côtés du second, si le sommet du premier triangle décrit une droite parallèle à la base du second, le sommet du second décrira une droite parallèle à la base du premier.....	11
12. Théorème de Desargues: si les droites qui joignent les sommets homologues de deux triangles concourent en un même point, les points de concours des côtés homologues sont situés en ligne droite.....	12
13. Définition des figures homologiques. — Leur construction quand on connaît le centre et l'axe d'homologie ainsi qu'un couple de points homologues.....	13
14. Cas où l'on donne l'axe d'homologie et deux couples de points homologues; cas où l'on donne le centre d'homologie et trois couples de points homologues.....	14
15. Cas où le centre d'homologie est à l'infini.....	15

## CHAPITRE II.

**Propriétés géométriques des polygones funiculaires**

16. Définition des polygones funiculaires d'un système de forces situées dans un même plan.....	17
17. Cas où les forces sont parallèles.....	19
18. Si l'on considère deux polygones funiculaires d'un même système de forces, les points où les côtés du premier rencontrent respectivement les côtés homologues du second sont situés en ligne droite. — Axe commun à deux polygones funiculaires..	20
19. Problème : étant donné un polygone funiculaire d'un système de forces, construire pour ce même système un polygone funiculaire dont on donne le pôle ainsi qu'un point d'un côté de rang assigné.....	21
20. Si, dans chacun des polygones funiculaires d'un système de forces, on prend le point de rencontre du côté de rang $i$ et du côté de rang $k$ , le lieu de ces points est une droite.....	22
21. Si le polygone des vecteurs d'un système de forces est fermé (ou ouvert) et si un des polygones funiculaires du système est fermé (ou ouvert), tous les polygones funiculaires sont fermés (ou ouverts). — Dans le cas des forces concourantes, si le polygone des vecteurs est fermé, tous les polygones funiculaires sont fermés.....	23
22. Détails complémentaires sur le théorème du n° 20 ; cas singuliers.....	24
23. Si, parmi les polygones funiculaires d'un système de forces, on considère seulement ceux dont deux côtés de rangs assignés passent respectivement par deux points donnés, le lieu des pôles de ces polygones est une droite parallèle à celle qui joint les deux points donnés. — Corollaires.....	25
24. Deux polygones funiculaires d'un même système de forces concourantes sont deux figures homologues.....	27
25. Deux polygones funiculaires d'un même système de forces parallèles sont deux figures homologues, dont les rayons homologues sont parallèles aux forces, dont l'axe d'homologie est l'axe commun aux deux polygones et dont le rapport d'homologie est égal au rapport inverse des distances polaires.....	28
26. Problème : Construire, pour un système de forces, un polygone funiculaire dont trois côtés de rangs assignés passent respectivement par trois points donnés. — Solution générale. — Solution particulière pour un système de forces concourantes ou parallèles.....	30
27. Application des deux méthodes aux cas de deux forces.....	31

28. Simplification des tracés par un choix convenable du polygone d'essai.....	32
29. Problème : construire, pour un système de forces, un polygone funiculaire ayant une distance polaire donnée et dont deux côtés de rangs assignés passent respectivement par deux points donnés .....	33
30. Application de la solution fondée sur la théorie de l'homologie au cas des forces parallèles.....	34

CHAPITRE III.

**Propriétés mécaniques des polygones funiculaires.**

31. Théorème fondamental : — Tout système de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan peut, à l'aide d'un polygone funiculaire, être réduit à deux forces.....	36
32. La somme des projections des deux résultantes est égale à la somme des projections des composantes.....	37
33. Même énoncé pour les moments.....	38
34. Etant donnés deux groupes de forces équivalents, si l'on construit pour chacun des deux groupes le polygone des vecteurs et un polygone funiculaire, de telle sorte que les polygones des vecteurs aient la même origine et que les polygones funiculaires aient le même premier côté, les deux polygones des vecteurs auront la même extrémité et les deux polygones funiculaires auront le même dernier côté. — La règle du n° 31 fournit tous les systèmes de deux forces équivalentes au système proposé.....	39
35. Systèmes partiels. — Deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire sont les lignes d'action de deux forces pouvant remplacer celles des forces du système qui sont comprises entre les deux côtés considérés.....	39
36. Expression graphique des conditions pour qu'un système de forces soit en équilibre (polygone des vecteurs et polygone funiculaire fermés), se réduise à un couple (polygone des vecteurs fermé et polygone funiculaire ouvert), ou enfin ait une résultante (polygone des vecteurs ouvert).....	40
37. La résultante a pour vecteur la droite qui joint l'origine à l'extrémité du polygone des vecteurs ; tout polygone funiculaire du système donne, par la rencontre de ses côtés extrêmes, un point de la résultante.....	41
38. Deux côtés quelconques du polygone funiculaire se coupent sur la ligne d'action de la résultante des forces comprises entre ces côtés ; cette résultante a pour vecteur la ligne qui joint l'origine à l'extrémité de la partie du polygone des vecteurs correspondant aux forces en question.....	42

39. Dans le cas des forces concourantes, deux cas seulement peuvent se présenter : équilibre (polygone des vecteurs fermé), résultante unique (polygone des vecteurs ouvert).....	42
40. Comment on retrouve par la statique les propriétés géométriques des polygones funiculaires.....	42
41. Expression graphique des moments : Le moment d'une force par rapport à un point est égal au produit de la distance polaire par le segment intercepté, sur la parallèle à cette force menée par le centre des moments, entre les côtés du polygone funiculaire de la force.....	43
42. Extension de la règle à la somme des moments d'un système quelconque de forces situées dans le même plan.....	44
43. Cas des forces parallèles : Le produit de la distance polaire par l'ordonnée d'un point quelconque du polygone funiculaire comptée à partir de son premier côté, est égal à la somme des moments des forces situées à gauche de cette ordonnée par rapport à tout point de cette ordonnée pris pour centre des moments.....	47
44. Equivalence des conditions graphiques et des conditions analytiques de l'équilibre.....	49

## CHAPITRE IV.

**Problèmes usuels relatifs à la composition des forces. — Réactions des appuis d'un corps gêné.**

45. Résultante de deux forces dont le point de concours est inaccessible.....	50
46. Tracés relatifs à la composition de deux forces parallèles.....	50
47. Cas du couple.....	52
48. Problème général : Etant données un système de $n$ forces situées dans un même plan et appliquées à un corps rigide, équilibrer ce système à l'aide de $m$ forces situées dans le même plan et ayant des lignes d'action données.....	52
49. Cas d'une seule force inconnue. — Règle fondée sur l'emploi d'un polygone funiculaire quelconque.....	54
50. Règle plus simple fondée sur l'emploi d'un polygone funiculaire particulier.....	55
51. Cas de deux forces inconnues. — Règle fondée sur l'emploi d'un polygone funiculaire quelconque.....	55
52. Règle plus simple fondée sur l'emploi d'un polygone funiculaire particulier.....	56
53. Cas de trois forces inconnues.....	57
54. Indétermination qui peut se présenter dans ce dernier cas.....	59

TABLE DES MATIÈRES

IX

55. Cas où le nombre des forces inconnues surpasse trois.....	60
56. Equilibre d'un corps rigide non libre.....	60
57. Réactions simples et réactions composées.....	61
58. Sens des réactions.....	62
59. Cas où les réactions sont indéterminées.....	62
60. Remarque relative au cas de deux points fixes.....	62

CHAPITRE V

**Courbes funiculaires**

61. Définition d'un système de forces réparties.....	65
62. Ce que deviennent pour un tel système le polygone des vecteurs et les polygones funiculaires. — Tracé des courbes funiculaires.	66
63. Règle pour trouver la tangente à une courbe funiculaire.....	68
64. Cas où la directrice d'un système de forces réparties est décomposée en portions finies telles qu'on sache trouver les résultantes des forces infiniment petites qui s'exercent sur chaque portion. — Chaque côté du polygone funiculaire de ces résultantes touche la courbe funiculaire sur la droite menée, par le point de division correspondant de la directrice, parallèlement à la tangente correspondante de la courbe des vecteurs.....	68
65. Les propriétés des polygones funiculaires subsistent à la limite pour les courbes funiculaires.....	70
66. Cas des forces parallèles; tracé qui résulte du n° 62.....	70
67. Tracé qui résulte du n° 64.....	71
68. Equation de la courbe funiculaire.....	74
69. Equation différentielle du second ordre de la même courbe.....	75
70. Cas d'une charge uniforme. — Tracé de la parabole funiculaire; détermination de ses éléments principaux.....	75
71. Retour au cas général des forces parallèles; détermination des constantes. — Cas particuliers intéressants.....	78

CHAPITRE VI

**La ligne élastique**

72. Définitions et hypothèses.....	81
73. Expression du raccourcissement relatif d'une fibre.....	82
74. Coefficient d'élasticité.....	84
75. Cas où la section de la poutre est variable.....	84
76. Définition de la tension ou compression, de l'effort tranchant et du moment fléchissant.....	84
77. Relations entre ces quantités et les forces extérieures.....	85
78. Formules fondamentales; leur homogénéité.....	86

79. Equation différentielle de la ligne élastique ou fibre moyenne déformée.....	88
80. La ligne élastique est une courbe funiculaire pour des charges fictives dont le coefficient est $\frac{M\Delta}{EI}$ .....	89
81. Cas particuliers où E et I sont constants.....	89
82. Ligne homographique de la ligne élastique ; c'est une courbe funiculaire pour des charges fictives dont le coefficient est $\frac{M\Delta}{EI} \lambda^2 q$ .....	90
83. Equation d'équarrissage.....	91
84. L'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant, il est nul dans la section où le moment fléchissant est maximum....	92

## CHAPITRE VII

**Centres de gravité et moments d'inertie**

85. Objet de ce chapitre.....	94
86. Rappel des formules et des propriétés fondamentales des centres de gravité des aires planes.....	94
87. Formules relatives au cas où l'aire plane est décomposée en parties dont on connaît les aires et les centres de gravité.....	95
88. Si une aire plane est décomposée en plusieurs parties, son centre de gravité est sur la ligne d'action de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles proportionnelles aux aires partielles et appliquées aux centres de gravité de ces aires.....	96
89. Centre de gravité de l'aire du triangle.....	96
90. Centre de gravité de l'aire du quadrilatère.....	97
91. Cas particulier du trapèze.....	98
92. Aire et centre de gravité du segment parabolique.....	98
93. Détermination graphique du centre de gravité d'une aire polygonale.....	101
94. Exemples divers.....	101
95. Cas où le contour de l'aire est curviligne.....	104
96. Définition et détermination graphique des moments d'ordre supérieur.....	105
97. Définition et détermination graphique du moment d'inertie d'une aire plane .....	108
98. Rayon de gyration. — Si deux droites sont parallèles, la différence des carrés de leurs rayons de gyration est égale au carré de leur distance. — Utilité de ce théorème.....	110
99. Si, sur les droites issues du centre de gravité d'une aire plane,	

	on porte des longueurs inversement proportionnelles aux rayons de gyration relatifs à ces droites, le lieu des extrémités est une ellipse. — Utilité de ce théorème. — Données nécessaires pour déterminer l'ellipse d'inertie.....	111
100.	Il existe des instruments qui ramènent à de simples lectures la recherche des centres de gravité et celle des moments d'inertie.	114

## CHAPITRE VIII

**Poutre droite à deux appuis : Charges fixes**

101.	Objet de ce chapitre .....	115
102.	Poutre à deux appuis simples avec charges concentrées. — Détermination des réactions.....	116
103.	Diagramme des moments fléchissants.....	116
104.	Diagramme des efforts tranchants.....	118
105.	Comment on rend horizontale la ligne de clôture.....	119
106.	Emploi d'une échelle des longueurs et d'une échelle des forces..	119
107.	Détails sur la construction de l'épure .....	120
108.	Choix de la distance polaire pour obtenir sur l'épure les vraies valeurs des moments fléchissants .....	122
109.	Poutre à deux appuis simples avec charge continue.....	122
110.	Détails sur l'emploi des échelles et sur la construction de l'épure.	125
111.	Construction de la tangente à la ligne représentative des moments fléchissants.....	127
112.	Cas où la charge est uniforme. — Expression du moment fléchissant maximum.....	128
113.	Choix du pôle pour rendre la ligne de clôture horizontale.....	130
114.	Cas où la charge uniforme ne règne que sur une partie de la poutre .....	131
115.	Cas où deux portions de la poutre supportent des charges uniformes de coefficients différents.....	132
116.	Cas où la poutre supporte à la fois des charges concentrées et des charges réparties.....	133
117.	Poutre encastrée à une de ses extrémités et libre à l'autre. — Cas des charges concentrées.....	135
118.	Même problème en supposant la charge uniforme.....	137
119.	Poutre reposant sur deux appuis intermédiaires.....	138
120.	Comparaison avec la poutre appuyée à ses extrémités.....	140
121.	Construction de la courbe homographique de la ligne élastique.	140
122.	Digression sur la valeur du coefficient d'élasticité à introduire dans les formules.....	142
123.	Exemple numérique.....	142
124.	Autre manière de procéder.....	143
125.	Extension de de la dernière méthode au cas où la section de la poutre est variable.....	144

126. Construction de la ligne élastique pour une poutre encastree à un bout et libre à l'autre .....	145
127. Détermination de la flèche de la ligne élastique pour une poutre homogène et de section constante, appuyée à ses deux extrémités et soumise à une charge uniforme .....	145

## CHAPITRE IX

**Poutre droite sur deux appuis : Charge mobile.**

128. <i>Objet de cette étude.</i> .....	147
129. Rappel des propriétés du paraboloid hyperbolique .....	148
130. Problèmes sur le paraboloid ; plan tangent ; génératrices parallèles à un plan donné .....	148
131. Construction de la section du paraboloid par un plan parallèle à l'intersection de deux plans directeurs .....	150
132. Poutre à deux appuis parcourue par un convoi ; solution de M. Lehmann .....	152
133. Solide dont les sections horizontales sont les diagrammes des moments fléchissants pour les diverses positions du train .....	154
134. Diagramme des moments fléchissants maxima .....	157
135. Détermination précise des points communs aux diverses parties de ce diagramme .....	158
136. Efforts tranchants ; il suffit de déterminer ces efforts aux points d'application des charges .....	159
137. Etude des efforts tranchants qui se développent dans un essieu pendant que le train se déplace .....	159
138. Diagramme des efforts tranchants minima .....	161
139. Remarque sur la généralité de la méthode précédente. ....	161
140. Le moment fléchissant maximum, parmi ceux que le passage d'un train fait naître en un point désigné de la poutre, est le plus grand des moments fléchissants qui se produisent en ce point lorsque les divers-essieux y passent .....	162
141. Observation sur les charges roulantes continues .....	162
142. Expression remarquable du moment fléchissant produit par des charges concentrées .....	163
143. Nouvelle démonstration du théorème du n° 140 .....	164
144. Extension de la formule du n° 142 au cas où il y a, outre des charges concentrées, une charge permanente uniforme .....	166
145. Théorème de Culmann : le moment fléchissant maximum sous un essieu déterminé se produit lorsque cet essieu et le centre de gravité de la charge totale (charge roulante et charge permanente uniforme) sont équidistants du milieu de la travée .....	168
146. Limite supérieure du moment fléchissant maximum .....	169



147. Définition et rôle des entretoises. — Leur emploi diminue les moments fléchissants. ....	170
148. Position de la force qui rend nul l'effort tranchant dans le panneau considéré. ....	172
149. On peut le plus souvent faire abstraction de ces pièces secondaires. ....	172

## CHAPITRE X

**Détermination des forces intérieures dans les systèmes articulés.**

150. Définition des systèmes articulés considérés dans ce chapitre. ....	174
151. Question à résoudre. — Deux méthodes principales (méthode des sections et méthode des nœuds). ....	175
152. Principe de la méthode des sections. ....	175
153. Observation sur le sens du mot barre. ....	175
154. Distinction entre les tensions et les compressions. ....	176
155. Procédé de Culmann. ....	176
156. La méthode est en défaut si la section coupe, outre la barre considérée, plus de deux autres barres, à moins que ces dernières ne soient concourantes. ....	177
157. Procédé de Ritter ou des moments statiques. ....	178
158. La remarque du n° 156 s'y applique. ....	178
159. Le procédé de Ritter est en outre en défaut quand, la section ne coupant que trois barres, deux de ces barres sont parallèles. ....	179
160. Avantages qu'offre le procédé de Ritter dans les poutres à treillis simple. — Application à une poutre Warren. ....	179
161. Règle pour les barres de la membrure supérieure. ....	181
162. Règle pour les barres de la membrure inférieure. ....	182
163. Règle pour les barres de treillis. ....	183
164. Application à la poutre Howe et à la même poutre renversée. ....	184
165. Principe de la méthode des nœuds. ....	186
166. Observation sur le sens à attribuer à la force intérieure relative à une barre suivant que l'on considère l'un ou l'autre des deux nœuds qu'elle réunit. ....	187
167. Application de la poutre Warren. ....	187
168. Diagramme général des tensions et compressions formé par la réunion des diagrammes partiels. ....	189
169. Figures réciproques de Cremona. ....	191
170. Construction directe du diagramme général. — Règle relative aux lignes principales. — Règle relative aux lignes secondaires. ....	192
171. Résumé de la construction. ....	194
172. Définition des frames ; la méthode des nœuds ou des figures réciproques s'y applique sans entrave. ....	195

173. Exemple de la charpente Polonceau à une bielle.....	197
174. Combinaison des deux méthodes.....	198
175. Charpente Polonceau à trois bielles.....	199
176. Observation relative à un cas moins particulier.....	203
177. Théorème de M. Maurice Lévy : pour que la statique pure fournisse les tensions d'un système articulé, il faut et il suffit que le système soit librement dilatable.....	204
178. Distinction entre les figures déformables, les figures strictement indéformables et les figures à lignes surabondantes.....	205
179. Un système articulé à $s$ nœuds est déformable, strictement indéformable ou à lignes surabondantes suivant que le nombre de ses barres est inférieur, égal ou supérieur à $2s-3$ .....	206
180. Pour que la statique pure fournisse les tensions d'un système articulé, il faut et il suffit, en général, que, $m$ étant le nombre des barres et $s$ le nombre des sommets, on ait $m \leq 2s-3$ .	206
181. Systèmes anormaux faisant exception au théorème précédent....	206
182. Recherche des tensions des systèmes à lignes surabondantes. — Comment la théorie de l'élasticité fournit les équations complémentaires.....	207
183. Procédé de Mohr pour trouver les relations qui résultent de la figure du système articulé.....	209
184. Méthode approximative pour les poutres à treillis double.....	210
185. Extension aux poutres à treillis triple, quadruple, etc.....	211
186. Définition des systèmes érigés en solides d'égale résistance....	212
187. Tout système articulé sans lignes surabondantes pour être constitué en solide d'égale résistance.....	213
188. Un système à lignes surabondantes ne peut, en général, être constitué en solide d'égale résistance.....	213
189. Avantages des systèmes articulés sans lignes surabondantes ; conclusions.....	214

## CHAPITRE XI

**La poutre continue : Moments fléchissants et efforts tranchants pour une charge donnée.**

190. Objet du problème ; définitions.....	217
191. Réduction de la question à la recherche des moments sur piles..	217
192. Règle pour tracer le diagramme des moments fléchissants, connaissant les moments sur piles et le premier polygone funiculaire.....	220
193. Comment on peut ramener tous les cas à celui où les appuis sont simples.....	221
194. Définition des verticales trissectrices et des verticales principales	223
195. Définition du second polygone funiculaire.....	224

196. Règle pour déduire du second polygone funiculaire les valeurs des moments sur piles.....	226
197. Vérifications.....	227
198. Cas où il y a égalité soit entre les travées intermédiaires, soit entre toutes les travées.....	227
199. Définition des contreverticales.....	228
200. Définition des foyers. — Discussion.....	229
201. Foyers de droite. — Foyers de gauche.....	230
202. Définition des lignes croisées.....	231
203. Définition des points fixes de première et de seconde espèce.....	232
204. Les diagonales du quadrilatère formé par les quatre points fixes d'une travée sont les côtés moyens du second polygone funiculaire dans cette travée.....	233
205. Résumé de la construction du second polygone funiculaire ; vérifications.....	233
206. La position d'un foyer quelconque, de droite ou de gauche, et le moment fléchissant en ce point sont indépendants des dimensions et des charges des travées situées à droite ou à gauche de celle qui renferme le foyer considéré.....	236
207. Diagramme général des moments fléchissants. — Efforts tranchants. — Réactions des appuis.....	237
208. Remarques sur les lignes croisées ; segments qu'elles interceptent sur les verticales des appuis.....	239
209. Construction des lignes croisées dans le cas d'une charge uniforme, partielle ou totale.....	240
210. Formules et tableau numérique propres à faciliter la construction précédente.....	241
211. Cas où il y a égalité entre les travées intermédiaires ou entre toutes les travées.....	242
212. Lignes croisées dans une travée supportant une charge concentrée unique.....	243
213. Poutre continue encadrée à l'un des bouts.....	243
214. Poutre continue encadrée à chacune des deux extrémités.....	246
215. Même problème, en supposant la charge uniforme.....	247

## CHAPITRE XII

**La poutre continue : Charges défavorables ; dénivellation des appuis**

216. Ce qu'on entend par charges défavorables ; simplification du problème à l'aide du principe de superposition des effets des forces.....	248
217. Cas d'une poutre continue soumise à une charge concentrée unique.....	250

218. Loi de variation du moment fléchissant dans les travées vides...	251
219. Loi de variation du moment fléchissant dans la travée chargée ; points d'inflexion.....	253
220. Loi de variation de l'effort tranchant.....	255
221. La position des points d'inflexion est indépendante de l'intensité de la charge.....	256
222. Recherches géométriques: définition et détermination du point limite relatif à une section quelconque de la poutre.....	256
223. Distribution des charges uniformes produisant dans une section donnée d'une poutre continue le moment fléchissant maximum.	250
224. Même question pour l'effort tranchant.....	261
225. Courbe des moments fléchissants maximums ; courbe des efforts tranchants maximums.....	262
226. Modifications à introduire dans les tracés pour tenir compte de la dénivellation des appuis.....	263
227. Les changements des moments sur piles par suite de la dénivella- tion des appuis sont indépendants des charges.....	265
228. Conclusions relatives à l'influence des abaissements des appuis..	266
229. Autre solution du problème de la poutre continue ; méthode de M. de Fontvioland. — Observation préliminaire.....	267
230. Décomposition du mouvement fléchissant effectif en deux autres ; premier moment partiel et moment partiel complémentaire ...	267
231. Réduction de la question à la recherche des moments com- plémentaires et en particulier des moments sur piles.....	270
232. Réduction du problème à la construction d'un polygone auxi- liaire.....	272
233. Pivots de première et de seconde espèce.....	274
234. Tour coté de rang impair du polygone auxiliaire passe par les deux pivots de la travée correspondante.....	275
235. Signification nouvelle des premiers moments partiels. Résumé de la construction.....	277
236. Extension de la méthode au cas où les appuis ne sont pas de niveau.....	279
INDEX ALPHABÉTIQUE.....	280

## CHAPITRE I

# INTRODUCTION

---

### Objet de la statique graphique.

1. — La statique a pour objet la composition des forces et la recherche des conditions de leur équilibre.

La solution de ce problème peut s'exprimer, soit par des formules, soit par des tracés géométriques. De là la division de la *statique générale* en deux branches : la *statique analytique* et la *statique graphique*.

En réalité, du moins encore aujourd'hui, le domaine de la statique graphique est beaucoup plus restreint, et le rôle de cette branche récente <sup>1</sup> de la science consiste surtout dans la résolution graphique des problèmes les plus usuels concernant la stabilité des constructions et la résistance des matériaux. Les portions d'édifice, en bois ou en métal, que l'on y considère, sont soumises à des forces extérieures qui sont situées dans un même plan et qui font naître dans les diverses pièces des efforts de plusieurs sortes ; ces efforts, qui tendent à allonger ou à raccourcir ces barres, à les fléchir ou à les rompre, doivent être connus assez approximativement, puisqu'ils ne sauraient sans danger excéder certaines limites qui dépendent de la matière employée et que l'expérience assigne. C'est

1. Les deux premiers cours de statique graphique faits à Paris datent de 1884 ; ils ont été professés simultanément, l'un au Collège de France par mon savant ami M. Maurice Lévy, qui avait dès 1874 publié sur la matière un remarquable traité parvenu aujourd'hui à sa seconde édition, l'autre par moi-même au Conservatoire des arts et métiers ; j'ai repris le même sujet en 1886 et l'ouvrage actuel n'est au fond que la reproduction de mes leçons.

dans la détermination de ces efforts (tensions ou compressions, moments fléchissants et efforts tranchants) que la statique graphique intervient d'une manière utile, en substituant aux calculs longs et pénibles de la statique analytique des tracés expéditifs et élégants, qui comportent moins de chance d'erreur et qui donnent cependant les résultats avec un degré d'approximation plus que suffisant pour les besoins de la pratique.

Nous supposons à nos lecteurs la connaissance des principes de la mécanique, et particulièrement des lois de la composition des forces concourantes ou parallèles, ainsi que des propriétés élémentaires des centres de gravité et des moments d'inertie ; il serait assurément inutile et déplacé de refaire, à propos de statique graphique, un cours de mécanique générale. Toutefois, nous devons revenir sur quelques-unes de ces notions fondamentales et exposer en outre quelques propositions de géométrie qui sortent du domaine classique et dont nous aurons à faire usage ; tel est l'objet de cette introduction.

### **Segment représentatif d'une force. Propriétés des segments rectilignes.**

**2.** — Si, sur la ligne d'action d'une force, on porte, à partir du point où la force est appliquée et dans le sens suivant lequel elle s'exerce, une longueur ayant la même valeur numérique que la force, c'est-à-dire contenant autant d'unités de longueur que la force renferme d'unités de force, on obtient un segment rectiligne qu'on nomme *segment représentatif* de la force parce qu'il en fait connaître à la fois la grandeur, la position et le sens. Par exemple, si AB est une droite de l'épure égale à 0<sup>m</sup>,045 et si 0,<sup>m</sup>02 représente une tonne, c'est-à-dire 1.000 kilogrammes, le segment AB indiquera une force de 2.250 kilogrammes, appliquée au point A et dirigée suivant la droite AB, de A vers B.

**3.** — On sent par là combien la connaissance des propriétés des segments rectilignes est indispensable pour donner aux

théorèmes la précision et la généralité qui conviennent. Ces propriétés sont du domaine de la géométrie; voici, sans démonstration, l'énoncé des plus usuelles<sup>1</sup> :

1° *Lorsque plusieurs points  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  sont en ligne droite, quelle que soit leur disposition et quel que soit le sens positif sur cette droite, on  $a$ , en grandeur et en signe, la relation*

$$a_1 a_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n ;$$

2° *Deux segments égaux, parallèles et de même sens ont leurs projections sur un même axe égales et de même signe. On sait d'ailleurs qu'on nomme projection d'un segment, sur un axe dont le sens positif est fixé, le segment qui a respectivement pour origine et pour extrémité les projections de l'origine et de l'extrémité du segment considéré ;*

3° *Si l'on projette sur un axe quelconque plusieurs segments consécutifs formant un polygone fermé, la projection de l'un quelconque d'entre eux changé de sens est égale à la somme algébrique des projections de tous les autres. Cette importante proposition porte le nom de théorème des projections.*

### Vecteur d'une force. Polygone des vecteurs d'un système de forces.

4. — On sait que la résultante de deux forces appliquées à un même point  $O$  a pour segment représentatif la diagonale

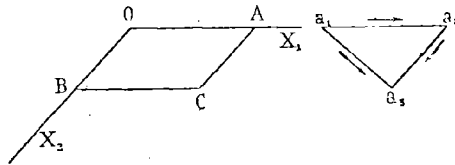


Fig. 1.

$OC$  du parallélogramme  $OACB$ , construit sur les segments  $OA$  et  $OB$  qui repré sentent les composantes (fig. 1). Cette *règle du parallélogramme des forces* est une conséquence immédiate

1. Voir le *Traité de géométrie* par MM. E. Rouché et de Comberousse, 5<sup>e</sup> édition, page 200.

de la proportionnalité des forces aux accélérations et de la composition des accélérations.

Mais, pour composer deux forces, on peut, au lieu de construire le parallélogramme OACB, se borner à construire le triangle OAC ou, mieux encore, un triangle  $a_1 a_2 a_3$  dont les côtés soient égaux et parallèles à ceux de OAC et qu'on place d'ailleurs où l'on veut sur la feuille de dessin.

Ainsi, à partir d'un point quelconque  $a_1$ , on portera bout à bout deux segments  $a_1 a_2$ ,  $a_2 a_3$  représentant respectivement en *grandeur, direction et sens* les forces considérées  $F_1$  et  $F_2$ , et le segment  $a_1 a_3$  représentera en *grandeur, direction et sens* la résultante  $R$ , dont la *position* sera dès lors pleinement déterminée puisqu'elle doit passer par le point O.

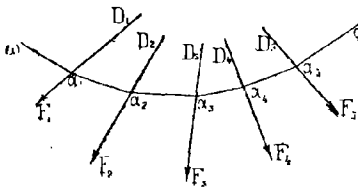
Nous appelons *vecteur* d'une force, tout segment ayant la même grandeur, la même direction et le même sens que le *segment représentatif* de la force. Tandis que ce segment représentatif a pour origine le point d'application de la force et qu'il détermine cette force en grandeur, *position* et sens, le vecteur, ayant une origine arbitraire, ne donne que la grandeur, la *direction* et le sens de cette force. Ainsi, dans la figure précédente,  $a_1 a_2$ ,  $a_2 a_3$  sont des vecteurs des forces  $F_1$  et  $F_2$ , et la ligne brisée  $a_1 a_2 a_3$ , dont l'origine est arbitraire, reçoit le nom de *polygone des vecteurs* des deux forces  $F_1$  et  $F_2$ . On peut donc énoncer de la manière suivante la règle de composition de deux forces concourantes :

*La résultante de deux forces, qui agissent sur un même point, passe par ce point et a pour vecteur le segment qui joint l'origine à l'extrémité du polygone des vecteurs des composantes.*

Cette règle se prête également bien à la *décomposition d'une force R en deux autres  $F_1$  et  $F_2$ , suivant deux droites données  $OX_1$ ,  $OX_2$  passant par son point d'application O*. Après avoir tracé le vecteur  $a_1 a_3$  de la force  $R$ , on mènera par  $a_1$  la parallèle à  $OX_1$  et par  $a_3$  la parallèle à  $OX_2$ ;  $a_2$  étant le point de rencontre de ces deux lignes, les segments  $a_1 a_2$ ,  $a_2 a_3$  seront les vecteurs des deux composantes demandées  $F_1$  et  $F_2$ , lesquelles seront déterminées par là même, puisque leur point d'application O est connu.



5. — La notion du *polygone des vecteurs* s'étend à un système de forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  situées d'une manière quelconque dans l'espace. Le polygone des vecteurs du système est la ligne brisée obtenue en menant bout à bout, à partir d'une origine arbitraire  $a_1$ , les vecteurs respectifs  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}$  des forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ; et il est clair que la connaissance des points d'application des forces et du polygone



$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  des vecteurs définit complètement le système (fig. 2).

Quand les forces considérées sont appliquées à un corps *rigide*, on peut prendre pour point d'application de chacune d'elles un point quelconque de sa ligne d'action. On définira donc alors le système en donnant, outre le polygone des vecteurs  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ , les lignes d'action  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  des forces, lignes d'action qui

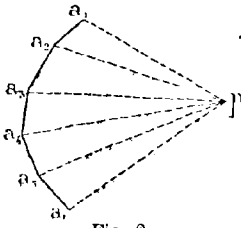


Fig. 2.

sont d'ailleurs respectivement parallèles aux côtés  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_5, a_5 a_6$  du polygone.

**Composition des forces concourantes.**

6. — La règle du n° 4 relative à la composition de deux forces offre l'avantage de subsister textuellement dans le cas où les forces appliquées à un même point sont en nombre quelconque.

*La résultante R d'un système quelconque de forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , appliquées à un même point O, passe par ce point et a pour vecteur le segment  $a_1 a_{n+1}$  qui joint l'origine à l'extrémité du polygone  $a_1 a_2, \dots, a_n a_{n+1}$  des vecteurs du système. — Il y a équilibre si la résultante est nulle, c'est-à-dire si le polygone des vecteurs est fermé.*

Pour compléter la théorie des forces concourantes, il faut joindre à ce théorème deux propositions qui en découlent aisément et que l'on démontre dans les traités élémentaires de mécanique :

1° La projection sur un axe quelconque de la résultante d'un système de forces concourantes est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe ;

2° Si on prend les moments de plusieurs forces concourantes et situées dans un même plan par rapport à un point quelconque de ce plan, le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Pour l'intelligence du premier théorème, il suffit de rappeler qu'on nomme *projection d'une force F* sur un axe, dont le sens positif est fixé, la force qui a pour segment représentatif la projection du segment représentatif de la force F. Mais le second théorème, qui est connu sous le nom de théorème de Varignon, exige quelques explications préalables sur le sens précis qu'il faut attribuer au mot *moment*.

7. — Nous appelons *moment d'une force F par rapport à un point O* le produit du

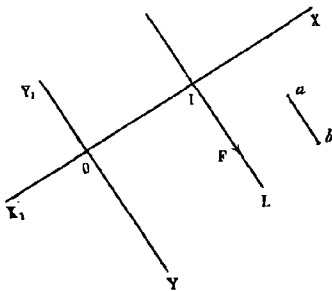


Fig. 3.

vecteur  $ab$  de la force par le segment  $OI$ , qui a pour origine le point  $O$  et pour extrémité la projection  $I$  de ce point sur la ligne d'action  $L$  de la force (fig. 3). On fixe d'ailleurs les signes des deux facteurs de la manière suivante : après avoir choisi à volonté le signe du segment  $OI$ , c'est-à-dire le sens positif

$OX$  sur la perpendiculaire à la ligne d'action  $L$ , on adopte pour sens positif du vecteur  $ab$  le sens de la demi-droite  $OY$  obtenue en faisant tourner  $OX$  de  $90^\circ$  autour de  $O$  dans le sens de la marche des aiguilles d'une montre.

Il est clair que le signe du moment ainsi défini est indépendant du choix, laissé arbitraire, du sens positif  $OX$  sur la droite  $OI$ . Car si  $OX$  devient  $OX_1$ ,  $OY$  devient  $OY_1$ , et les deux facteurs  $OI$  et  $ab$  changent de signe simultanément.

Le point  $O$  prend le nom de *centre des moments* ; on dési-

gne d'ailleurs le moment de la force  $F$  par rapport au point  $O$  par la notation  $M_0F$ .

Cette définition, qui se traduit par la formule

$$(1) \quad M_0F = ab \cdot OI$$

ne diffère pas au fond de celle qu'on donne habituellement

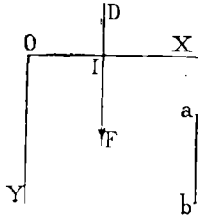


Fig. 4.

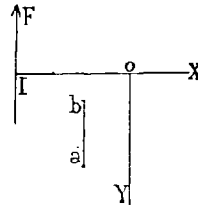


Fig. 4 bis.

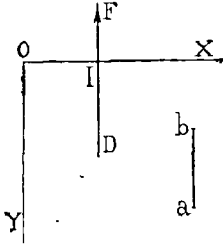


Fig. 5.

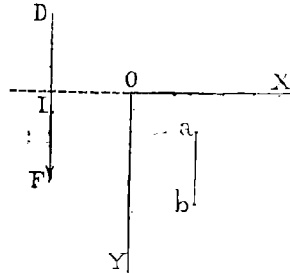


Fig. 5 bis.

dans les traités de mécanique ; mais elle est plus conforme aux usages de la géométrie moderne, le signe du moment résultant ainsi des signes des deux segments dont il est le produit. On voit que le moment est positif dans les figures 4 et 4 bis, mais qu'il est négatif dans les figures 5 et 5 bis ; en effet, les deux facteurs  $ab$  et  $OI$  sont positifs dans la figure 4, et ils sont négatifs dans la figure 4 bis ;  $OI$  est positif et  $ab$  négatif dans la figure 5, tandis que dans la figure 5 bis c'est  $OI$  qui est négatif et  $ab$  positif,

Supposons qu'on ait adopté le mètre pour unité de longueur et la tonne (1.000 kilogrammes) pour unité de force ; on donne alors le nom de *mètre-tonne* à l'unité de moment,

c'est-à-dire au moment d'une force égale à une tonne et distante de un mètre du centre des moments. Soient d'ailleurs respectivement  $\frac{1}{\lambda}$  et  $\frac{1}{\varphi}$  les échelles des longueurs et des forces, ce qui veut dire qu'une ligne égale à un mètre mesurée sur la feuille de dessin répond à  $\lambda$  mètres ou à  $\varphi$  tonnes suivant que cette ligne représente une longueur ou une force. Dès lors, si en mesurant  $OI$  et  $ab$  sur le dessin, on trouve  $l$  et  $f$  pour leurs valeurs en mètres et fraction de mètre, on aura :

$$(2) \quad OI = l\lambda, \quad ab = f\varphi;$$

et par suite pour la valeur du moment

$$M_0 = f\varphi.l\lambda \text{ mètres-tonnes.}$$

Cette formule peut s'écrire :

$$M_0 = f\lambda.l\varphi$$

on pourrait donc, au lieu des valeurs (2), prendre

$$OI = l\varphi, \quad ab = f\lambda.$$

En d'autres termes, dans la formule (1), l'un des facteurs, celui qu'on veut, peut être évalué à l'échelle des longueurs, pourvu qu'on évalue l'autre à l'échelle des forces.

### **Composition de deux forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan.**

**8.** — Il résulte de la théorie bien connue de la composition des forces concourantes ou parallèles que *deux forces  $F_1$  et  $F_2$  appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan ont toujours une résultante, excepté dans les deux cas suivants :*

1°  $F_1$  et  $F_2$  sont égales et agissent suivant la même droite, mais en sens contraire. Alors, mais alors seulement, il y a équilibre ; car pour que deux forces appliquées à un corps ri-

gide soient en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées ;

2°  $F_1$  et  $F_2$  sont égales parallèles et de sens contraire. On dit alors que ces forces forment un *couple*. Un couple est un élément irréductible. La somme algébrique des moments des deux forces  $F_1$  et  $F_2$  d'un couple reste la même, quel que soit le point  $O$  du plan que l'on choisisse pour centre des moments. Soit en effet  $ab$  le vecteur de la force  $F_1$ ;  $ba$  sera le vecteur de la force  $F_2$  et la somme des moments des deux forces sera (fig. 6) :

$$ab.OI_1 + ba.OI_2 = ab(OI_1 - OI_2) = ab.I_1 I_2 = ba.I_1 I_2.$$

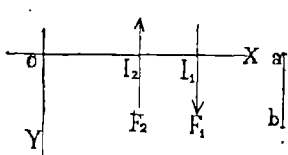


Fig. 6.

Ce moment qui, d'après cela, n'est autre que celui de l'une quelconque des forces du couple par rapport à un point quelconque de la ligne d'action de l'autre, prend le nom de *moment du couple*.

Rappelons enfin :

1° Qu'un couple appliqué à un corps rigide peut être remplacé par tout autre couple situé dans le même plan ou dans un plan parallèle pourvu que le nouveau couple ait le même moment que le premier ;

2° Qu'une force appliquée à un point d'un corps rigide peut être transportée parallèlement à elle-même en tout autre point du même corps, pourvu qu'on adjoigne à cette force ainsi déplacée le couple formé par la force égale et directement opposée à cette dernière et par la force primitive.

### Lemmes de géométrie.

9. — Soient  $ABC$ ,  $A'B'C'$  deux triangles tels que les côtés  $AB$  et  $AC$  de l'un soient respectivement parallèles aux côtés  $A'B'$  et  $A'C'$  de l'autre. Si, par le sommet  $A$  du premier, on mène la parallèle  $AD$  à la base  $B'C'$  du second, et que par le sommet  $A'$  du second on mène la parallèle  $A'D'$  à la base  $BC$  du premier, les points  $D$  et  $D'$  diviseront les bases  $BC$  et  $B'C'$  en

*parties inversement proportionnelles* ; en d'autres termes, on aura en grandeur et en signe la relation .

$$(1) \quad \frac{DB}{DC} = \frac{D'C'}{D'B'}$$

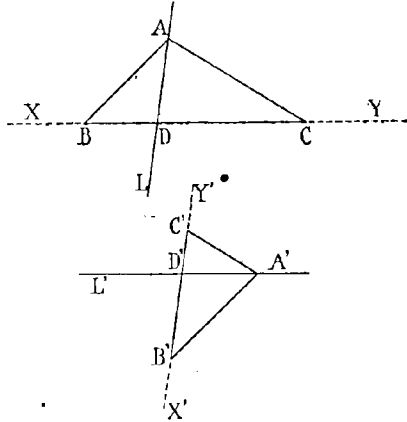


Fig. 7.

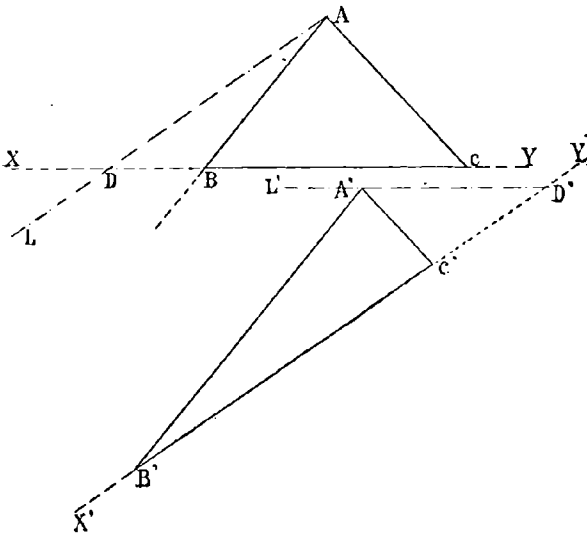


Fig. 7 bis.

En effet, les triangles  $ABD$ ,  $A'B'D'$ , ayant leurs côtés paral-

lèles, sont semblables et donnent en grandeur et en signe la proportion

$$\frac{DB}{DA} = \frac{D'A'}{D'B'};$$

on a de même, par les triangles semblables  $ADC, A'D'C'$ ,

$$\frac{DA}{DC} = \frac{D'C'}{D'A'},$$

et il suffit de multiplier ces deux égalités membre à membre pour obtenir la relation (1).

**10.** — Il importe de remarquer que :

1° Si  $D$  tombe entre  $B$  et  $C$ ,  $D'$  tombera entre  $B'$  et  $C'$  ; car le premier membre de la relation sera négatif et par suite aussi le second ;

2° Si  $D$  tombe sur le prolongement  $CY$  de  $BC$ ,  $D'$  tombera sur le prolongement  $B'X'$  de  $C'B'$  ; car le premier rapport sera alors plus grand que l'unité et par suite aussi le second rapport ;

3° Si  $D$  tombe sur le prolongement  $BX$  de  $CB$ ,  $D'$  tombera sur le prolongement  $C'Y'$  de  $B'C'$  ; car le premier rapport étant alors compris entre zéro et un, le second rapport devra être aussi positif et inférieur à l'unité.

**11.** — De la proposition qui précède résulte immédiatement la suivante :

*Les bases  $BC, B'C'$  de deux triangles variables  $ABC, A'B'C'$  restant fixes et les côtés  $AB$  et  $AC$  restant respectivement parallèles à  $A'B'$  et  $A'C'$ , si le sommet  $A$  du premier triangle décrit une droite  $L$  parallèle à la base  $B'C'$  du second, le sommet  $A'$  du second triangle décrira une droite  $L'$  parallèle à la base  $BC$  du premier.*

En effet, soit  $A$  une position quelconque, sur la droite  $L$ , du sommet du premier triangle ; si par la position correspondante  $A'$  du sommet du second, on mène la parallèle  $A'L'$  à  $BC$ , le point  $D'$  où cette parallèle coupera  $B'C'$  divisera,

d'après le théorème précédent, la base  $B'C'$  dans un rapport constant. Donc, ce point  $D'$  restera fixe quand le point  $A$  se mouvra sur la droite  $L$ ; par suite, le point  $A'$  restera sur la parallèle  $L'$  menée par le point fixe  $D'$  à la base fixe  $BC$ .

### Notions sur les figures homologiques.

**12.** — Si deux triangles  $abc$ ,  $a'b'c'$ , situés dans un même plan  $H$ , sont tels que les droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , concourent en un même point  $o$ , les côtés  $bc$ , et  $b'c'$ ,  $ca$ , et  $c'a'$ ,  $ab$  et  $a'b'$  se coupent respectivement en trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  situés en ligne droite (fig. 8).

Que l'on imagine, en effet, un point  $O$  situé sur la perpendiculaire au plan  $H$  menée par le point  $o$ ; la figure  $oa'b'c'$  sera la projection sur le plan  $H$ , de la pyramide ayant pour sommet le point  $O$  et pour base le triangle  $a'b'c'$ . Désignons par  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , les points qui, situés sur les arêtes  $Oa'$ ,  $Ob'$ ,  $Oc'$ ,

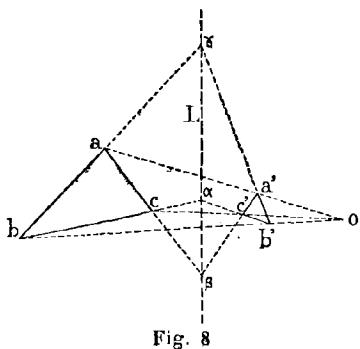


Fig. 8

se projettent en  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (ce serait compliquer inutilement la figure que d'y placer les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dont il est si aisé de se représenter les positions). Le triangle  $abc$  sera la projection de la section de la pyramide par le plan  $ABC$ , et la trace de la droite  $BC$  sur le plan  $H$ , devant appartenir à la projection  $bc$  de  $BC$  et à la trace  $b'c'$

de la face  $Ob'c'$ , sera le point  $\alpha$  commun à  $bc$  et  $b'c'$ . On verrait de même que les points  $\beta$  et  $\gamma$  sont comme  $\alpha$ , situés à la fois dans le plan  $H$  et dans le plan  $ABC$ ; les trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  appartiennent donc à l'intersection de ces deux plans et par suite sont en ligne droite.

Ce théorème, dû à Desargues, sert de fondement à la théorie des figures homologiques, qui a pris, sous la plume de Poncelet, un si merveilleux développement. La théorie de l'homologie appartient à la géométrie pure; nous nous bor-



nerons à donner sur ce sujet<sup>1</sup> quelques notions très simples, mais d'ailleurs suffisantes pour l'usage qu'on peut faire de l'homologie en statique graphique.

**13.** — On dit que deux figures situées dans un même plan sont *homologiques*, lorsqu'elles se correspondent point par point et droite par droite, de telle sorte que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe et que deux droites homologues quelconques se croisent sur une droite fixe.

Le point fixe reçoit le nom de *centre d'homologie* et la droite fixe celui d'*axe d'homologie*; toute droite passant par le centre d'homologie prend en outre le nom de *rayon*.

Il importe avant tout de montrer qu'il existe de telles figures.

A cet effet, soient donnés, dans le plan d'une figure quelconque  $\Sigma$ , le point  $O$  et la droite  $L$  qu'on veut prendre pour centre et pour axe d'homologie; choisissons en outre arbitrairement un point  $a$  de la figure  $\Sigma$ , puis un point  $a'$  sur le rayon  $Oa$ .

Cela posé,  $m$  étant un point quelconque de la figure  $\Sigma$ , prenons d'abord l'intersection  $\mu$  de  $ma$  et de l'axe  $L$ , puis l'intersection  $m'$  de  $\mu a'$  et du rayon  $om$ . La figure  $\Sigma'$ , que décrit le point  $m'$  lorsque le point  $m$  décrit la figure  $\Sigma$ , est homologue de  $\Sigma$  (fig. 9).

En effet, comme, d'après la construction même, deux points homologues quelconques  $m$  et  $m'$  sont en ligne droite avec le centre  $O$ , il reste seulement à prouver que, si  $m$  décrit une droite quelconque  $ts$ , le point  $m'$  décrira la droite  $m's$  qui passe par le point  $s$  où  $ts$  rencontre l'axe  $L$ . Or, supposons que  $m$  prenne une position quelconque  $n$  sur  $ms$ , l'homologue  $n'$  de

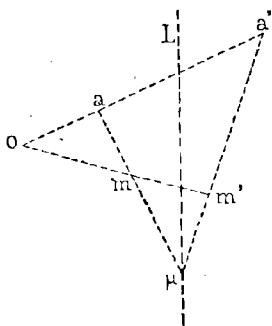


Fig. 9.

1. Pour une exposition plus complète, voir le *Traité de géométrie* de MM. E. Rouché et de Comberousse, nos 728 à 733, 938 à 943, 1167 à 1169 de la 5<sup>e</sup> édition.

$n$ , construit (fig. 10) comme il a été dit ci-dessus, c'est-à-dire en prenant successivement l'intersection  $v$  de  $an$  et de  $L$ , et l'in-

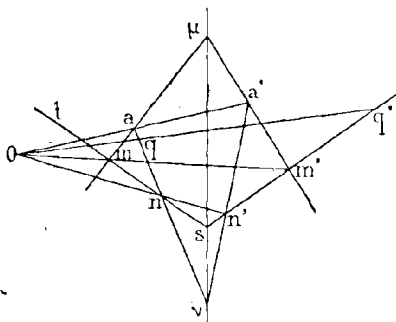


Fig. 10.

section  $n'$  de  $va'$  et de  $On$ , sera un point quelconque du lieu décrit par  $m'$ . Mais les triangles  $amn$ ,  $a'm'n'$  satisfont à l'hypothèse du théorème de Desargues ; donc  $mn$  et  $m'n'$  se croisent sur  $L$ ; en d'autres termes, tout point  $n'$  du lieu est sur  $m's$ . Il est clair d'ailleurs que, inversement tout point  $q'$  de cette droite appartient au lieu ; car, puis-

qu'il y a un point du lieu sur toute droite issue du point  $O$ , le point du lieu qui se trouve sur  $Oq$  devant être à la fois sur ce rayon  $oq'$  et sur  $m's$ , ne saurait être que  $q'$ .

**14.** — Nous venons d'indiquer le moyen de construire la figure  $\Sigma'$  homologique d'une figure donnée  $\Sigma$ , lorsqu'on connaît le centre et l'axe d'homologie ainsi qu'un couple  $(a, a')$  de points homologues,

Il importe de remarquer que tout point de l'axe d'homologie est son propre homologue et que toute droite passant par le centre d'homologie coïncide avec son homologue.

Souvent on s'interdit l'emploi simultané du centre et de l'axe d'homologie, l'un de ces éléments sortant, par exemple, des limites de l'épure. Voici comment on s'y prend alors :

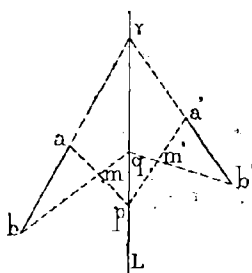


Fig. 11.

1° Soient donnés (fig. 11) deux couples  $(a, a')$   $(b, b')$  de points homologues ainsi que l'axe  $L$  d'homologie, qui doit passer par le point de concours  $\gamma$  des deux droites homologues  $ab, a'b'$ . Le point  $m'$  homologue d'un point quelconque  $m$  de la figure  $\Sigma$  sera alors donné par l'intersection des droites  $pa', qb'$  homologues de celles  $pa, qb$  qui joignent le point  $m$  aux points  $a$  et  $b$ .

2° Soient donnés (fig. 12) deux couples  $(ab, a'b')$   $(ac, a'c')$  de droites homologues, ainsi que le centre  $o$  d'homologie, lequel doit être sur la droite qui joint les deux points homologues  $a$  et  $a'$ . Le point  $m'$  homologue d'un point quelconque  $m$  de la figure  $\Sigma$  sera l'intersection du rayon  $om$  et de l'homologue  $p'd'$  d'une droite  $pd$  menée à volonté par  $m$ . On obtient

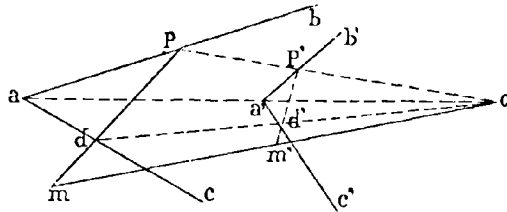


Fig. 12.

d'ailleurs  $p'd'$  en déterminant les points  $p$  et  $d$  où  $pmd$  rencontre les deux droites  $ab$  et  $ac$ , et cherchant les points  $p'$  et  $d'$  où les rayons  $op$  et  $od$  rencontrent respectivement  $a'b'$  et  $a'c'$ . Il importe de se familiariser avec ce dernier tracé qui est très usuel.

15. — Un cas important à signaler est celui où le centre d'homologie est à l'infini dans une direction donnée. Tous les tracés subsistent, la convergence des rayons d'homologie étant ici remplacée par leur parallélisme. La direction commune à tous les rayons d'homologie prend le nom de *direction homologique*; un couple quelconque  $(a, a')$  de points homologues suffit pour l'indiquer. L désignant toujours l'axe d'homologie, l'homologue  $m'$  d'un point quelconque  $m$  de la figure  $\Sigma$  sera l'intersection de la parallèle  $\mu m$  à  $aa'$  et de l'homologue  $sa'$  de la droite  $as$  qui joint le point  $m$  au point  $a$ . La proportion évidente (fig. 13).

$$\frac{\mu m'}{\mu m} = \frac{a'a}{aa}$$

prouve que le rapport

$$\frac{\mu m'}{\mu m}$$

est constant, en sorte qu'on obtient alors la seconde figure  $\Sigma'$  homologique de la première  $\Sigma$  en dilatant dans un rapport constant, qu'on nomme *rapport d'homologie*, les ordonnées  $sa, \mu m, \dots$ , qui sont comptées à partir de l'axe d'homologie  $L$  parallèlement à la direction homologique.

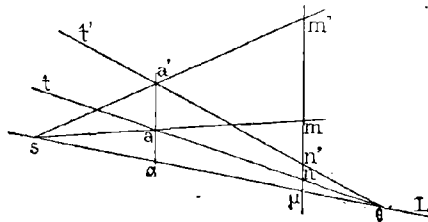


Fig. 13.

On peut même donner un peu plus d'extension à cette proposition en comptant les ordonnées parallèles à la direction homologique à partir d'une droite quelconque  $t\theta$  pour la première figure  $\Sigma$ , pourvu qu'on compte les ordonnées de la seconde  $\Sigma'$  à partir de la droite  $t'\theta$  homologue de  $t\theta$ . Car si  $n$  et  $n'$  désignent les points où  $t\theta$  et  $t'\theta$  rencontrent  $\mu m m'$ , les rapports

$$\frac{\mu m'}{\mu m}, \frac{\mu n'}{\mu n}$$

étant égaux l'un et l'autre au rapport  $\rho$  d'homologie, il en sera de même du rapport

$$\frac{\mu m' - \mu n'}{\mu m - \mu n} \quad \text{ou} \quad \frac{n' m'}{n m}$$

## CHAPITRE II

# PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES

## FUNICULAIRES

---

### Définition des polygones funiculaires

**16.** — Nous ne considérerons dorénavant, sauf avertissement contraire, que des systèmes de forces appliquées à un corps solide et toutes situées dans un même plan.

En statique graphique, un tel système est toujours défini par les lignes d'action  $D_1, D_2, \dots, D_n$  des forces considérées  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , et par le polygone de leurs vecteurs  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}$ , comme nous l'avons expliqué au n° 5. Ainsi, dans notre système de notation, la force  $F_k$  agit suivant la droite  $D_k$ , et elle a la même grandeur et le même sens que le segment  $a_k a_{k+1}$  qui est, d'ailleurs, parallèle à  $D_k$ .

Considérons un système défini de la sorte, et que, pour fixer les idées, nous supposerons composé de cinq forces seulement. Prenons à volonté dans le plan des forces un point  $p$ , auquel nous donnerons le nom de *pôle* du polygone des vecteurs, et joignons ce pôle aux divers sommets de ce polygone par des droites  $pa_1, pa_2, \dots, pa_n$  que nous nommerons *rayons polaires*.

Menons une parallèle quelconque  $\omega z_1$  au premier rayon  $pa_1$  jusqu'à sa rencontre  $z_1$  avec la ligne d'action  $D_1$  de la première force  $F_1$ ; puis, tirons par  $z_1$  une parallèle  $z_1 z_2$  au second

rayon  $pa_2$  jusqu'à sa rencontre  $\alpha_2$  avec la ligne d'action  $D_2$  de la seconde force  $F_2$ ; et ainsi de suite. Enfin par le point  $\alpha_5$ , où la parallèle  $\alpha_5\phi$  à l'avant dernier rayon  $pa_5$  rencontre la dernière ligne d'action  $D_5$ , menons  $\alpha_5\phi$  parallèle au dernier rayon  $pa_5$ .

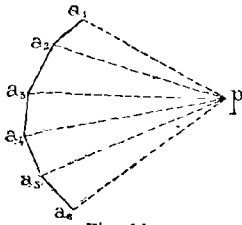
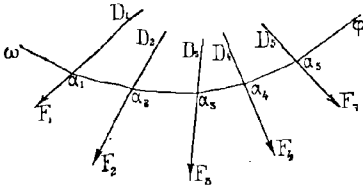


Fig. 14.

Nous obtiendrons de cette façon une ligne brisée  $\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\phi$  dont le premier et le dernier côtés  $\omega\alpha_1$  et  $\alpha_5\phi$  sont indéfinis, et à laquelle on donne le nom de *polygone funiculaire*, relatif au pôle  $p$ , du système

des forces considérées.

Pour que la construction réussisse, il faut que chacune des lignes  $\omega\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \dots$  coupe la ligne d'action de la force suivante, ce qui pourrait ne pas avoir lieu pour certaines positions exceptionnelles du point  $p$ . Mais la construction ne sera jamais en défaut, quel que soit le système de forces donné, si l'on choisit pour pôle  $p$  un point non situé sur les côtés du polygone des vecteurs ou sur leurs prolongements; car, les rayons polaires coupant alors les côtés de ce polygone, les parallèles à ces rayons couperont les lignes d'action correspondantes.

En résumé, un polygone funiculaire, relatif à un pôle  $p$ , d'un système de forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , est une ligne brisée dont les sommets sont sur les lignes d'action des forces et dont les côtés sont parallèles aux rayons polaires du polygone des vecteurs; le sommet  $\alpha_k$  de rang  $k$  se trouve sur la ligne d'action  $D_k$  de la force  $F_k$ , et le côté  $\alpha_{k-1}\alpha_k$  de rang  $k$  est parallèle au rayon polaire  $pa_k$  de même rang. Sauf le premier et le dernier côtés  $\omega\alpha_1, \alpha_{n+1}\phi$  qui sont illimités et respectivement parallèles au premier et au dernier rayon  $pa_1$  et  $pa_{n+1}$ , chacun des autres côtés est limité à deux lignes d'action, et le rayon polaire qui lui est parallèle aboutit précisément au point d'intersection des deux côtés du polygone des vecteurs auxquels ces lignes d'action sont parallèles.



**Axe commun à deux polygones funiculaires d'un même système de forces**

**18.** — Si l'on considère deux polygones funiculaires quelconques, relatifs à un même système de forces, les points où les côtés du premier rencontrent respectivement les côtés homologues du second sont situés sur une même droite.

Cette ligne, que nous nommerons l'axe commun aux deux polygones, est parallèle à la droite qui joint les deux pôles et est située à distance finie, si les deux polygones ont des pôles distincts ; elle est à l'infini si les deux polygones ont le même pôle.

Le théorème est évident dans le dernier cas ; car lorsque les deux polygones funiculaires ont le même pôle, deux côtés homologues quelconques sont parallèles entre eux.

Il suffit donc de s'occuper du premier cas. Désignons les deux polygones funiculaires par P et P' et leurs pôles respectifs par p et p' ; appelons en général S<sub>k</sub> l'intersection des deux côtés

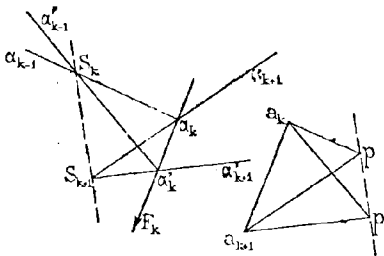


Fig. 17.

$\alpha_{k-1} \alpha_k, \alpha'_{k-1} \alpha'_k$  de rang  $k$ , lesquels sont respectivement parallèles aux rayons spoliaires  $pa_k, p'a_k$  ; d'ailleurs  $\alpha_k$  et  $\alpha'_k$  sont situés sur la ligne d'action de la force  $F_k$  dont le vecteur est  $\alpha^k a_{k+1}$ . Considérons les deux triangles

$a_k pp', S^k \alpha_k \alpha'_k$  ; le côté  $a_k p$  est parallèle à  $S_k a_k$  et le côté  $a_k p'$  est parallèle à  $S_k \alpha'_k$ . Si, les bases  $pp', \alpha_k \alpha'_k$  restant fixes, les sommets  $a_k$  et  $S_k$  se déplacent de manière que les côtés qui étaient d'abord parallèles conservent leur parallélisme,  $a_{k+1} pp'$  et  $S_{k+1} \alpha_k \alpha'_k$  seront deux autres positions correspondantes des triangles variables. Mais le déplacement  $a_k a_{k+1}$  du sommet du premier étant parallèle à la base  $\alpha_k \alpha'_k$  du second, il faut (n° 11) que le déplacement  $S_k S_{k+1}$  du sommet du second soit parallèle à la base  $pp'$  du premier. Ainsi tous les segments  $S_1 S_2, S_2 S_3, \dots, S^r S_{r+1}$  sont



parallèles à  $pp'$ , et, comme chacun d'eux a un point commun avec le suivant, tous ces segments sont sur une même droite parallèle à  $pp'$ . D'ailleurs, cette droite est à distance finie ; car, puisque les pôles  $p$  et  $p'$  ne sont pas situés sur les côtés (indéfiniment prolongés) du polygone des vecteurs, de deux sommets consécutifs  $a_k, a_{k+1}$  de ce polygone, l'un au moins,  $a_k$  par exemple, n'est pas en ligne droite avec  $pp'$  ; les rayons polaires  $pa_k, p'a_k$  sont dès lors distincts, et par suite les côtés  $\alpha_{k-1} \alpha_k, \alpha'_{k-1} \alpha'_k$  qui sont respectivement parallèles à ces rayons se rencontrent en un point  $S_k$  situé à distance finie.

**19.** — Ce théorème facilite le tracé des polygones funiculaires satisfaisant à certaines conditions. Voici un exemple :

*Etant donné un polygone funiculaire  $P(\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \varphi)$  de pôle  $p$ , pour un système de forces*

$$(F_1, F_2, F_3, F_4; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

*construire pour le même système de forces un second polygone funiculaire  $P'$ , de pôle donné  $p'$ , et dont un côté de rang assigné, le second par exemple, passe par un point donné  $I$ .*

On aura d'abord le second côté  $\alpha'_1 \alpha'_2$  du polygone  $P'$  en menant par  $I$  la parallèle au rayon polaire  $p'a_2$  ; on en déduira le

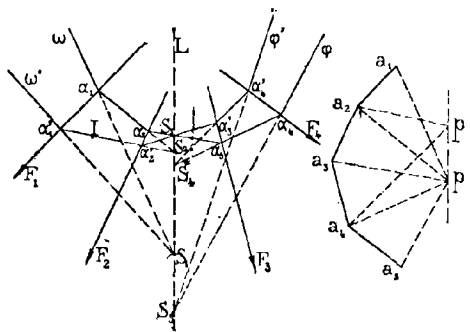


Fig. 18.

point  $S_2$  intersection des deux seconds côtés, et enfin l'axe  $L$  commun aux deux polygones  $P$  et  $P'$  en menant par  $S_2$  la parallèle à  $pp'$ .

Cela fait, au lieu de construire le polygone  $P'$  d'après la définition même (n° 16), on pourra employer l'axe  $L$  :

Soit, pour tracer immédiatement un côté de rang assigné ; on obtiendra, par exemple, le quatrième  $\alpha'_3 \alpha'_4$  en menant par le point  $S_4$ , où l'axe  $L$  rencontre  $\alpha_3 \alpha_4$ , une parallèle au rayon  $p'a_4$ .

Soit, pour tracer les côtés successifs du polygone  $P'$  sans faire intervenir le polygone des vecteurs ; en prenant, en effet, les points  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  où l'axe  $L$  rencontre les côtés  $\omega\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_4, \alpha_4 \varphi$  du polygone  $P$ , on aura de proche en proche les côtés correspondants  $\omega'\alpha'_1, \alpha'_2 \alpha'_3, \alpha'_3 \alpha'_4, \alpha'_4 \varphi'$  en menant successivement  $S_2 \alpha'_1, S_3 \alpha'_2, S_4 \alpha'_3, S_5 \alpha'_4$ .

### Lieu du point de rencontre de deux côtés de rangs assignés

**20.** — *Si, dans chacun des polygones funiculaires (en nombre infini) qui sont relatifs à un même système de forces, on prend le point de rencontre du côté de rang  $i$  et du côté de rang  $k$ , le lieu de ces points est une droite parallèle à la corde  $a_i a_k$  qui, dans le polygone des vecteurs, joint l'origine du côté de rang  $i$  à l'origine du côté de rang  $k$ .*

En effet, soient  $P$  et  $P'$  deux polygones funiculaires quelconques du système ;  $p$  et  $p'$  leurs pôles ;  $S_i$  l'intersection des deux côtés de rang  $i$ , et  $S_k$  l'intersection des deux côtés de rang  $k$  ; enfin  $m$  l'intersection des côtés de rangs  $i$  et  $k$  dans le polygone  $P$  et  $m'$  l'intersection des côtés de rangs  $i$  et  $k$  dans le polygone  $P'$  ;  $m$  et  $m'$  seront deux points quelconques du lieu ; et ils seront à distance finie, si,  $a_i$  et  $a_k$  étant distincts comme le suppose l'énoncé, la droite indéfinie  $pp'$  ne passe ni par  $a_i$  ni par  $a_k$ .

Considérons les triangles  $pa_i a_k, mS_i S_k$  ; le côté  $pa_i$  est parallèle à  $mS_i$  et le côté  $pa_k$  parallèle à  $mS_k$ . Si les bases  $a_i a_k, S_i S_k$  restant fixes, les sommets  $p$  et  $m$  se déplacent de manière que les côtés d'abord parallèles conservent leur parallélisme,  $p'a_i a_k$  et  $m'S_i S_k$  seront deux autres positions correspondantes

des triangles variables. Mais le déplacement  $pp'$  du sommet du premier étant parallèle à la base  $S_i S_k$  du second (n° 18), il faut (n° 14) que le déplacement  $mm'$  du sommet du second soit parallèle à la base  $a_i a_k$  du premier. Ainsi la droite qui joint deux points quelconques  $m$  et  $m'$  du lieu est parallèle à  $a_i a_k$ ; donc tout point  $m$  du lieu est

sur la droite  $\lambda$  menée par l'un d'eux  $m'$  parallèlement à  $a_i a_k$ . Inversement tout point  $\mu$  de cette droite  $\lambda$  appartient au lieu; car, si l'on désigne par  $D$  une droite quelconque passant par  $\mu$  et distincte de  $\lambda$ , et si l'on considère un polygone funiculaire du système ayant cette droite pour côté de rang  $i$  et un pôle  $\pi$  différent de  $a_i$ , le côté de rang  $k$  dans ce polygone coupera la droite  $D$  en un point appartenant au lieu et par conséquent situé sur  $\lambda$ ; or  $\mu$  est le seul point commun aux droites  $D$  et  $\lambda$ ; donc  $\mu$  appartient au lieu.

**21.** — On dit que le polygone des vecteurs d'un système de forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  est *fermé* lorsque son origine  $a_1$  et son extrémité  $a_{n+1}$  coïncident.

Un polygone funiculaire est dit *fermé* lorsque le premier côté  $\omega a_1$  et le dernier  $a_n \varphi$  coïncident avec la droite  $a_1 a_n$  qui joint le premier au dernier sommet.

Quand le polygone des vecteurs d'un système de forces est ouvert, on peut rencontrer parmi les polygones funiculaires du système les trois types: polygone fermé, ou polygone ouvert et ayant le premier et le dernier côtés soit parallèles, soit concourants. Un exemple suffit pour mettre le fait hors de doute. Que l'on considère deux forces concourantes  $F_1$  et  $F_2$ , si l'on prend le pôle hors de la droite  $a_1 a_2$  qui joint l'origine à l'extrémité du polygone  $a_1 a_2 a_3$  des vecteurs, on a évidemment un polygone funiculaire ouvert dont le premier et le dernier côtés sont concourants; si l'on place au contraire le pôle sur  $a_1 a_3$ , le premier et le dernier côtés du polygone funiculaire seront coïncidents ou parallèles suivant qu'on fera ou non passer le premier côté par le point de concours des deux forces.

Mais, quand le polygone des vecteurs d'un système de forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  est fermé, si un polygone funiculaire du système est fermé, tous les polygones funiculaires du système sont fermés.

En effet, si le polygone des vecteurs  $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  est fermé, c'est que  $a_{n+1}$  coïncide avec  $a_1$ ;  $a_1$  et  $a_n$  sont donc deux points distincts et  $a_1 a_n$  est parallèle à  $F_n$ . Or, le polygone des vecteurs étant fermé, dans tout polygone funiculaire du système le dernier côté  $\alpha_n \varphi$  aura la même direction que le premier  $\omega \alpha_1$ ; et pour qu'un tel polygone funiculaire soit fermé, il faut et il suffit que le premier côté  $\omega \alpha_1$  et l'avant-dernier  $\alpha_{n-1} \alpha_n$ , c'est-à-dire le  $n^{\text{ième}}$ , concourent sur  $F_n$ . Mais, si cela a lieu pour l'un des polygones funiculaires, la droite  $F_n$ , qui est, avons-nous dit, parallèle à  $a_1 a_n$  sera (n° 20) le lieu des points de rencontre du premier et du  $n^{\text{ième}}$  côtés des divers polygones funiculaires du système; tous ces polygones sont donc fermés.

Il suit de là que, si le polygone des vecteurs d'un système de forces est fermé et si l'un des polygones funiculaires du système est ouvert, tous les polygones funiculaires du système seront ouverts.

Observons encore que, dans le cas particulier d'un système de forces concourantes, si le polygone des vecteurs est fermé, tous les polygones funiculaires sont fermés. En effet, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que la chose a lieu pour un polygone funiculaire du système. Or, si l'on fait passer le premier côté d'un polygone funiculaire par le point de concours des forces, ce polygone se réduit évidemment à la droite menée par ce point de concours parallèlement au premier rayon polaire.

**22.** — Revenons maintenant au théorème du n° 20. Nous avons supposé  $a_i$  et  $a_k$  distincts; car, lorsque  $a_i$  et  $a_k$  se confondent, la direction  $a_i a_k$  n'est plus déterminée et l'énoncé n'a plus de sens. Mais quel est alors le lieu des points de rencontre des côtés de rangs  $i$  et  $k$  ?

Considérons le système partiel formé par les forces  $F_i, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}$ ; la ligne brisée  $a_i a_{i+1} \dots a_k$  est le polygone des vecteurs de ce système partiel, et, si  $\omega \alpha_1 \dots \alpha_n \varphi$  est un poly-

gone funiculaire du système total  $F_1 \dots F_n$ ,  $\alpha_{i-1} \alpha_i \dots \alpha_{k-1} \alpha_k$  sera un polygone funiculaire du système partiel  $F_i F_{i+1} \dots F_{k-1}$ . Dans notre hypothèse le polygone des vecteurs  $a_i a_{i+1} \dots a_k$  est fermé, puisque  $a_i$  et  $a_k$  se confondent ; donc, si l'on considère tous les polygones funiculaires du système, *les côtés  $\alpha_{i-1} \alpha_i$ , et  $\alpha_{k-1} \alpha_k$  seront soit toujours parallèles et distincts, soit toujours confondus*. Le tracé d'un polygone funiculaire d'essai montrera quel est celui des deux cas dans lequel on se trouve.

*Dans le premier cas, le lieu est évidemment la droite de l'infini du plan. Dans le second cas, tout point  $m$  du plan appartient au lieu ; car, si l'on construit un polygone funiculaire du système en faisant passer son côté  $\alpha_{i-1} \alpha_i$  de rang  $i$  par  $m$ , le côté  $\alpha_{k-1} \alpha_k$  de rang  $k$ , coïncidant avec  $\alpha_{i-1} \alpha_i$ , passera par  $m$ .*

### **Lieu des pôles des polygones funiculaires passant par deux points donnés**

**23.** — *Si, parmi les polygones funiculaires d'un système de forces, on considère seulement ceux dont deux côtés de rangs assignés  $i$  et  $k$  passent respectivement par deux points donnés  $I$  et  $K$ , le lieu des pôles de ces polygones est une ligne droite parallèle à  $IK$ .*

Cherchons un point  $a$  du lieu qui soit situé sur une droite déterminée  $a_k Y$  et menée d'ailleurs à volonté par le point  $a_k$ .

Supposons qu'on ait déjà tracé un polygone funiculaire quelconque  $P'$  du système de forces considéré

$$(F_1 \dots F_n ; a_1 \dots a_{n+1}) ;$$

et soit  $p'$  son pôle. Désignons par  $X$  une droite qui n'est autre que  $a_i a_k$  lorsque les points  $a_i$  et  $a_k$  sont distincts, mais qui, si  $a_i$  et  $a_k$  sont confondus, est une droite menée à volonté par  $a_i$ . Traçons des parallèles à  $X$  par les points  $I$  et  $K$  jusqu'à leurs rencontres respectives  $I'$  et  $K'$  avec les côtés  $\alpha'_{i-1} \alpha'_i$ ,  $\alpha'_{k-1} \alpha'_k$  de rangs  $i$  et  $k$  dans le polygone funiculaire  $P'$  ; enfin, par  $p'$ , menons la parallèle à  $I'K'$  et prenons son intersection  $a$  avec  $X$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux forces ayant, la première pour vecteur

$a_i a$  et pour ligne d'action  $II'$ , la seconde pour vecteur  $aa_k$  et pour ligne d'action  $KK'$ , et considérons le système des forces  $(f_1 F_1 F_{i-1} f_2; aa_i \dots a_k a)$ . Le polygone  $QT'a_i \dots a'_{k-1} K'Q'$  est un polygone funiculaire,

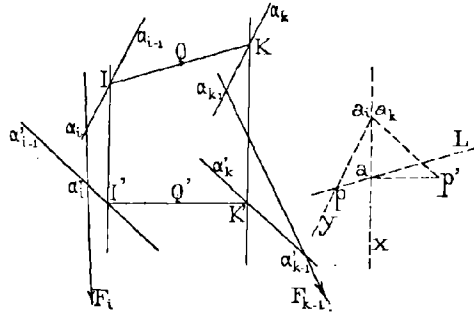


Fig. 20.

de pôle  $p'$ , pour ce système de forces, et comme il est fermé ainsi que le polygone des vecteurs, tout autre polygone funiculaire du même système de forces sera fermé; donc, en particulier, celui  $P'$  de ces polygones qui, ayant pour pôle  $p'$ , aurait son premier côté passant par I. Mais les côtés de ce poly-

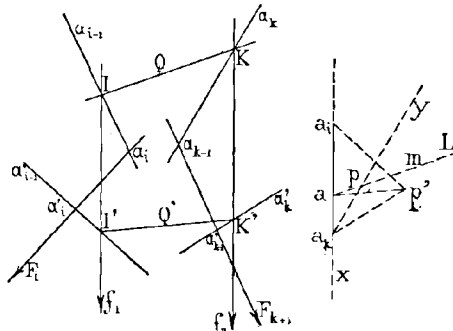


Fig. 21.

gone  $P'_i$ , autres que le premier et le dernier, seraient précisément les côtés  $\alpha_{i-1} \alpha_i, \dots, \alpha_{k-1} \alpha_k$  du polygone  $P$ ; donc, puisque  $P'_i$  doit être fermé, son premier et son dernier côté se confondent avec  $IK$ ; par suite,  $pa$  est parallèle à  $IK$ , en sorte

qu'on obtient le point  $p$  en menant par le point connu  $a$  une parallèle à  $IK$  et prenant l'intersection de cette droite avec  $a_k Y$ .

Ainsi tout point  $p$  du lieu se trouve sur la droite  $L$  menée par le point  $a$  parallèlement à  $IK$ .

D'ailleurs, tout point  $m$  de cette droite appartient au lieu ; car, puisque, en vertu du raisonnement ci-dessus, il y a, sur chaque droite issue de  $a_k$ , un point du lieu, le point du lieu qui est sur  $a_k m$ , devant en même temps appartenir à  $L$ , coïncide avec  $m$ .

En définitive, le lieu cherché est une droite parallèle à  $IK$  et passant par un point  $a$  qu'on détermine par la règle suivante :

*Tracez un polygone funiculaire quelconque  $P'$  du système de forces proposé (s'il s'en trouve un déjà tracé sur la figure, il convient évidemment d'en profiter) ; prenez les points  $I$  et  $K$  où les côtés de rangs  $i$  et  $k$  rencontrent respectivement les parallèles menées par  $I$  et par  $K$  à une droite  $X$ , qui est la droite  $a_i a_k$  si  $a_i$  et  $a_k$  sont distincts, ou une droite menée à volonté par  $a_i$  si  $a_i$  et  $a_k$  se confondent ; enfin, par le pôle du polygone auxiliaire  $p'$  menez la parallèle à  $IK'$  ; cette parallèle rencontrera la droite  $X$  au point cherché  $a$ .*

La *fig. 21* est relative au cas où les points  $a_i$  et  $a_k$  sont distincts ; la *fig. 20* se rapporte au cas où ces points sont confondus, alors les côtés  $\alpha'_{i-1} \alpha'_i$ ,  $\alpha_{k-1} \alpha_k$  de rangs  $i$  et  $k$  dans le polygone auxiliaire  $p'$  ont la même direction  $p'a_i$  ; nous avons supposé ces deux côtés distincts. S'ils se confondent, la droite  $IK'$  se confond avec eux, et la droite  $p'a$ , devenant  $p'a_i$ , le point  $a$  ne diffère pas de  $a_i$  ; dans ce cas, le lieu est donc la parallèle à  $IK$ , menée par les points confondus  $a_i$  et  $a_k$ .<sup>1</sup>

### **Propriétés spéciales des polygones funiculaires relatifs à un système de forces concourantes ou parallèles.**

**21.** — *Deux polygones funiculaires quelconques  $P$  et  $P'$  d'un même système de forces concourantes sont deux*

1. Des nos 18 et 23 résultent immédiatement les deux propriétés suivantes qui méritent d'être signalées :

*figures homologiques* ; en d'autres termes, si  $\Sigma$  est une figure quelconque dont le polygone  $P$  fait partie, et si l'on construit la figure  $\Sigma'$  homologique de  $\Sigma$  en prenant pour centre d'homologie le point de concours  $O$  des forces et pour axe d'homologie l'axe commun  $L$  (n° 18) aux deux polygones  $P$  et  $P'$ , le polygone  $P'$  sera la partie de  $\Sigma'$  qui est l'homologue de  $P$  (fig. 22).

En effet, prenons respectivement sur les deux premiers côtés  $\omega\alpha_1$  et  $\omega'\alpha'_1$  des polygones funiculaires  $P$  et  $P'$  deux points  $\omega$  et  $\omega'$  en ligne droite avec le point  $O$ . Puis avec le centre d'homologie  $O$ , l'axe d'homologie  $L$  et le couple  $(\omega, \omega')$  de points homologues, construisons la figure  $\Sigma'$  homologique de  $\Sigma$  ; l'homologue du premier côté  $\omega\alpha_1$  de  $P$  sera le premier côté  $\omega'\alpha'_1$  de

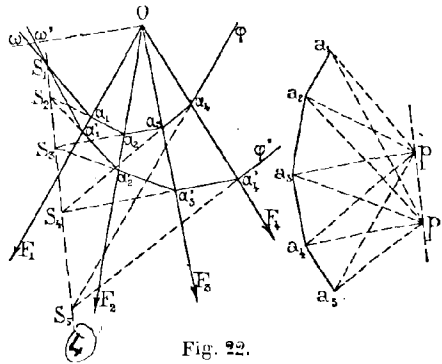


Fig. 22.

$P'$ , puisque  $\omega'\alpha'_1$  passe [par  $\omega'$  homologue de  $\omega$  et coupe l'axe  $L$  au même point  $S_1$  que  $\omega\alpha_1$ . D'ailleurs l'homologue du sommet  $\alpha_1$  de  $P$  devant être à la fois sur  $O\alpha_1$  et sur  $\omega'\alpha'_1$  sera précisément le sommet  $\alpha'_1$  de  $P'$ . Dès lors on voit de même que  $\alpha'_1\alpha'_2$  est l'homologue  $\alpha_1\alpha_2$  et que  $\alpha_2$  est l'homologue de  $\alpha'_2$ ; et ainsi de suite.

## 25. Lorsque les deux polygones funiculaires $P$ et $P'$ sont

1° Si deux côtés d'un polygone funiculaire pivotent respectivement autour de  $a$  et  $b$ , tout autre côté du même polygone pivote autour d'un point fixe situé sur la droite  $ab$ .

2° Si le pôle d'un polygone funiculaire décrit une droite  $L$  tandis que l'un des côtés pivote autour d'un point fixe  $a$ , tout autre côté du polygone pivote autour d'un point fixe situé sur la parallèle menée par  $a$  à la droite  $L$ .



relatifs à des forces parallèles, le centre d'homologie passe à l'infini dans la direction des forces. Il est d'ailleurs aisé de voir que le rapport d'homologie est alors égal en grandeur et en signe au rapport des distances polaires  $ep, e'p'$  (fig. 23).

En effet, soit  $m$  l'intersection de  $a_1 a_2$  et de  $pp'$ ,  $S_1$  l'intersection de  $\omega x_1$  et de  $\omega' x'_1$ , enfin  $\mu$  le point où  $\alpha_1 x'_1$  coupe l'axe commun aux

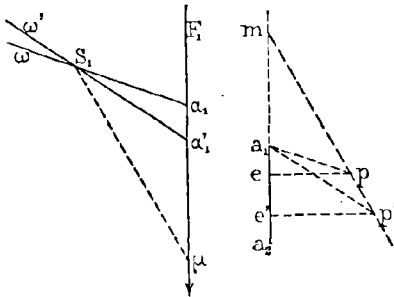


Fig. 23.

deux polygones, c'est-à-dire la parallèle menée par  $S_1$  à  $pp'$ ; les deux triangles  $pa_1 p'$ ,  $\alpha_1 S_1 \alpha'_1$  se trouvent dans les conditions du n° 9, les côtés  $a_1 p$  et  $S_1 \alpha_1$  sont parallèles, ainsi que les côtés  $a_1 p'$  et  $S_1 \alpha'_1$ , et la droite  $a_1 m$  est menée par le sommet du premier parallèlement à la base

$\alpha_1 x'_1$  du second, tandis que la droite  $S_1 \mu$  est menée par le sommet du second parallèlement à la base  $pp'$  du premier; on a donc, en grandeur et en signe :

$$\frac{\mu \alpha'_1}{\mu x_1} = \frac{mp}{mp'} = \frac{ep}{ep'}$$

ce qui démontre le fait énoncé, puisque la droite  $S_1 \mu$  étant l'axe d'homologie et  $(\alpha_1, \alpha'_1)$  étant un couple de points homologues, le premier des rapports ci-dessus exprime le rapport d'homologie. Ainsi :

*Deux polygones funiculaires quelconques P et P' d'un*

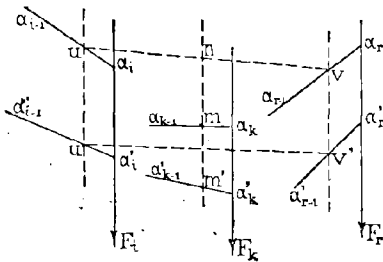


Fig. 24.

*même système de forces parallèles sont deux figures homologues, dont les rayons homologues sont parallèles aux lignes d'action des forces, dont l'axe d'homologie est l'axe commun aux deux polygones et dont le rapport d'ho-*

*mologie est égal au rapport inverse des distances polaires. Ce rapport est d'ailleurs égal à celui des ordonnées de*

deux points homologues quelconques  $m$  et  $m'$  des deux polygones, les ordonnées  $nm$ ,  $n'm'$  étant parallèles aux forces et comptées respectivement à partir de deux droites homologues quelconques  $uv$  et  $u'v'$  des deux figures (fig. 24).

**Polygone funiculaire passant par trois points donnés**

**26.** — Étant donnés trois points quelconques  $I, II, K$  dans le plan d'un système de forces.

$$(F_1 F_2 \dots F_n; a_1 a_2 \dots a_{n+1}),$$

on demande de tracer le polygone funiculaire  $P$  dont le côté de rang  $i$  passerait par  $I$ , le côté de rang  $h$  par  $II$  et le côté de rang  $k$  par  $K$ .

Il suffit évidemment de trouver le pôle  $p$  du polygone demandé  $P$ .

Or ce pôle  $p$  appartient au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang  $i$  passerait par  $I$  et le côté de rang  $h$  par  $II$ ; il appartient aussi au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang  $h$  passerait par  $II$  et le côté de rang  $k$  par  $K$ ; on sait (n° 23) construire ces deux lieux qui sont des droites respectivement parallèles à  $III$  et  $IIK$ ; l'intersection de ces deux droites sera le point cherché  $p$ .

On pourrait d'ailleurs à l'un de ces deux lieux substituer celui des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang  $i$  passe par  $I$  et le côté de rang  $k$  par  $K$ , et obtenir de la sorte une vérification.

Telle est la méthode générale. Mais si les forces sont concourantes ou parallèles, il vaut mieux recourir aux propriétés spéciales des n° 24 et 25. On a alors par le point de concours ou par la direction des forces le centre d'homologie ou la direction homologique des polygones funiculaires du système. Donc, en prenant les intersections respectives des rayons homologiques des points  $I, II, K$  et des côtés de rangs  $i, h, k$  dans un premier polygone d'essai  $P'$ , on aura immédiatement les homologues  $I', II', K'$  des points  $I, II, K$  du polygone demandé  $P$ ; on pourra alors trouver tous les côtés de ce polygone  $P$ , même indépendamment les uns des autres, à l'aide des tracés indiqués au n° 19.

27. — Tout cela est si facile qu'un exemple suffira. Nous choisirons à cet effet le système de deux forces concourantes ( $F_1, F_2; a_1a_2a_3$ ) auquel nous appliquerons successivement les deux méthodes; le premier côté devra passer par I, le deuxième par H et le troisième par K.

La fig. 25 est relative à la première méthode;  $\omega'a'_1\varphi'$  est un polygone d'essai dont  $p'$  est le pôle. En menant  $III'$  parallèle à  $a_1a_2$ , puis par  $p'$  la parallèle  $p'x$  à  $I'H'$  et enfin par  $x$  la parallèle à  $I'II'$ , on a (n° 23) le lieu  $\lambda_1$  des pôles des polygones funiculaires dont le premier côté passe par I et le second par H. De même en menant  $III'_1$  et  $KK'$  parallèles à  $a_2a_3$ , puis par  $p'$  la parallèle  $p'y$  à  $H'_1K'$  et enfin par  $y$  la parallèle à  $HK$ , on a le lieu  $\lambda_2$  des pôles des polygones funiculaires dont le deuxième côté passe par H et le troisième par K.

Le point  $p$  commun à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sera le pôle du polygone cher-

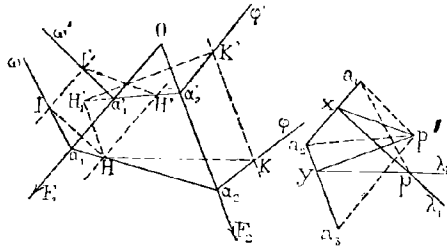
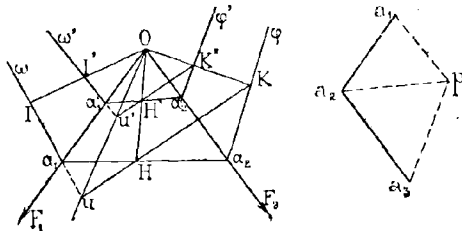


Fig. 25.

ché P; son premier côté sera la parallèle  $\omega a_1$  à  $pa_1$  menée par I; puis,  $\alpha_1 H$  et  $\alpha_2 K$  seront les côtés suivants; comme vérification, ces côtés doivent être respectivement parallèles aux rayons polaires  $pa_2$  et  $pa_3$  que nous n'avons pas tracés pour ne pas compliquer inutilement la figure.



La fig. 26 est relative à la seconde méthode ;  $\omega'x'_1x'_2\varphi'$  étant toujours un polygone d'essai dont le pôle  $\varphi'$  est arbitraire, on prendra les intersections  $I'$ ,  $II'$ ,  $K'$  de ses côtés successifs avec les rayons homologues  $OI$ ,  $OII$ ,  $OK$ , et il restera, pour avoir le polygone demandé  $P$ , à construire la figure homologique  $\omega'x'_1x'_2\varphi'$ .

L'homologue  $u$  du point  $u'$  où  $\omega'x'_1$  coupe  $II'K'$  sera sur  $Ou'$  et sur  $HK$  ; en le joignant au point  $I$ , on aura la droite homologue de  $I'u'$ , c'est-à-dire le premier côté  $\omega Ix_1$  du polygone  $P$  dont le deuxième côté sera  $x_1IIx_2$  et le troisième  $x_2K\varphi$ .

**28.** — L'une et l'autre constructions peuvent être notablement abrégées par un choix convenable du polygone d'essai  $P'$ , si un tel polygone ne se trouve pas tracé déjà pour d'autres besoins.

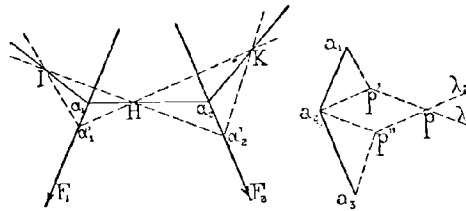


Fig. 27.

Reprenons à ce point de vue la première méthode. En prolongeant  $KH$  (fig. 27) jusqu'à sa rencontre  $\alpha'_1$  avec  $F_1$ , on peut considérer  $I\alpha'_1$  et  $\alpha'_1H$  comme le premier et le second côtés d'un polygone funiculaire dont le premier côté passerait par  $I$  et le second par  $H$  ; son pôle  $p'$  s'obtiendra en menant  $a_1p'$  et  $a_2p'$  respectivement parallèles à  $I\alpha'_1$  et à  $HK$ , et la parallèle  $\lambda_1$  menée par  $p'$  à  $III$  sera le lieu des pôles des polygones funiculaires ayant leur premier côté passant par  $I$  et leur second par  $II$ . De même, en prolongeant  $III$  jusqu'à sa rencontre  $\alpha'_2$  avec  $F_2$ , on peut considérer  $II\alpha'_2$  et  $\alpha'_2K$  comme le deuxième et le troisième côtés d'un polygone funiculaire dont le deuxième côté passerait par  $II$  et le troisième par  $K$  ; son pôle  $p''$  s'obtiendra en menant  $a_2p''$  et  $a_3p''$  respectivement parallèles

à III et à  $\alpha'_2 K$ , et la parallèle  $\lambda_2$  menée par  $p'$  à IIK sera le lieu des pôles des polyones funiculaires ayant leur deuxième côté passant par II et le troisième par K. Donc l'intersection de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$ , c'est-à-dire le sommet  $p$  opposé à  $\alpha_2$  dans le parallélogramme  $a_2 p' p p''$ , sera le pôle du polyone cherché P. On aura le deuxième côté  $\alpha_1 \alpha_2$  en menant par II une parallèle à  $p a_2$ ; puis  $I \alpha_1$  et  $\alpha_2 K$  seront le premier et le troisième.

Reprenons de même la seconde méthode : En prolongeant KH jusqu'à sa rencontre  $\alpha'_1$  avec  $F_1$ ,  $I \alpha'_1$  et  $\alpha'_1 H \alpha'_2$  seront les deux premiers côtés d'un polyone funiculaire dont le premier

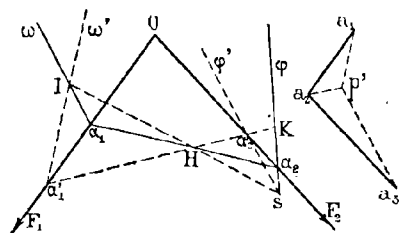


Fig. 28.

côté passe par I et le second par H; son pôle  $p'$  s'obtiendra en menant  $a_1 p$  et  $a_2 p$  respectivement parallèles à  $I \alpha'_1$  et à  $HK$ , et l'on aura le troisième côté  $\alpha'_2 p'$  en menant par  $\alpha'_2$  la parallèle à  $p' a_3$ ; mais le polyone  $\omega' \alpha'_1 \alpha'_2 p'$  et le polyone cherché P ont évidemment pour axe d'homologie la droite III qui est leur axe commun; donc, il suffira de prolonger  $\phi' \alpha'_2$  jusqu'à sa rencontre S avec III et de joindre SK pour avoir le dernier côté  $\alpha_2 p$  du polyone P; le second côté sera ensuite  $\alpha_2 H \alpha_1$  et le premier  $\alpha_1 I$  (fig. 28).

La construction que nous trouvons ainsi par la considération des figures homologiques, aussi bien que la précédente, sont remarquables par leur élégante simplicité.

### **Polyone funiculaire passant par deux points donnés et ayant une distance polaire donnée.**

29. — Après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, il suffira de quelques mots sur ce nouveau problème :

*Étant donnés deux points quelconques I et II dans le plan d'un système de forces*

$$(F_1 F_2 \dots F_n ; a_1 a_2 \dots a_{n+1} ,$$

*on demande de tracer un polygone funiculaire P dont le côté de rang  $i$  passe par I, le côté de rang  $h$  par II et dont le pôle  $p$  soit à une distance donnée  $\delta$  de la droite qui, dans le polygone des vecteurs, joint le point  $a_i$  au point  $a_h$ .*

Le pôle inconnu  $p$  doit être d'abord sur l'une des deux parallèles à  $a_i a_h$  situées de part et d'autre et à la distance  $\delta$  de cette droite. Il doit être en outre sur la droite, lieu des pôles des polygones funiculaires, dont les côtés de rangs  $i$  et  $h$  passent respectivement par I et II. Cette droite coupe les deux premières en deux points  $p$  et  $p_1$ . Il y a donc deux solutions : la solution serait unique si l'on donnait, outre la valeur absolue  $\delta$  de la distance polaire, le sens de cette distance.

Si les forces concourent en un même point O, on construira un polygone d'essai P' en prenant un pôle  $p'$  à la distance  $\delta$  de  $a_i a_h$ , portée d'ailleurs du côté convenable si le sens de la distance est donné. Les rayons homologues OI, OII fourniront par leurs rencontres respectives avec les côtés de rangs  $i$  et  $h$  du polygone P' les points I' et II' homologues de I et II ; l'axe d'homologie des polygones P et P' s'obtiendra en menant par le point de rencontre S de III et I'II' la parallèle SL à  $pp'$ , c'est-à-dire la parallèle à  $a_i a_h$  ; on aura donc plus de données qu'il n'en faut pour construire le polygone P homologue de P'.

**30.** — La solution par les figures homologues devient d'une extrême simplicité dans le cas où les forces sont parallèles. Soit, pour fixer les idées, le système de trois forces parallèles  $(F_1 F_2 F_3 ; a_1 a_2 a_3)$ , et supposons qu'on veuille que le premier côté du polygone funiculaire demandé P passe par I et le dernier côté par II. On construira un polygone funiculaire d'essai P' ou  $\omega' \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \varphi'$ , à l'aide d'un pôle  $p'$  qui soit à la distance donnée  $\delta$  de  $a_1 a_2$  et dans le sens voulu ; puis on mènera par I et II des parallèles aux forces jusqu'aux points d'inter-

section de ces rayons homologues avec le premier côté  $\omega'\alpha'_1$  et le dernier côté  $\alpha'_3\phi'$  du polygone  $P'$  ; ces points d'intersection  $I'$  et  $H'$  seront les homologues de  $I$  et  $H$ . Mais les polygones  $P$  et  $P'$  ayant leur rapport d'homologie égal à l'unité (n° 23), puisque leurs distances polaires sont égales et de même sens, les ordonnées correspondantes comptées respectivement à partir des droites homologues  $III$ ,  $III'$  seront égales et de même signe. Il suffira donc, pour avoir le polygone  $P$ , de prendre  $\beta_1\alpha_1$ ,  $\beta_2\alpha_2$ ,  $\beta_3\alpha_3$  respectivement égales à  $\beta'_1\alpha'_1$ ,  $\beta'_2\alpha'_2$ ,  $\beta'_3\alpha'_3$  et de même sens. Des vérifications simples peuvent d'ailleurs être

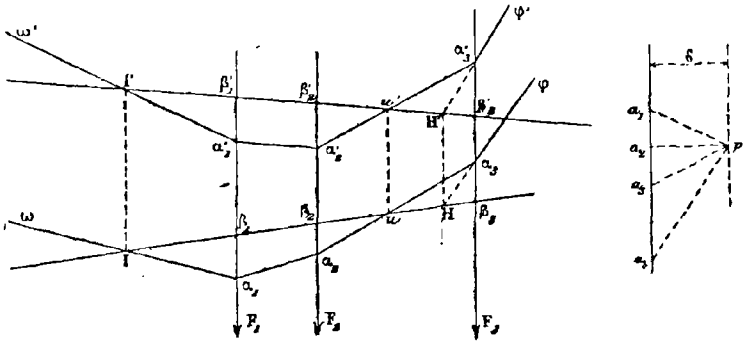


Fig. 29.

fournies par les rencontres, telles que  $u'$ , des côtés du polygone  $P'$  avec  $III'$  ; les côtés homologues du polygone  $P$  devront rencontrer  $III$  en des points homologues, c'est-à-dire situés avec les premiers sur une parallèle aux forces.

## CHAPITRE III

# PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES POLYGOUES FUNICULAIRES

---

### Réduction d'un système de forces situées dans un même plan.

**31.** — *Etant donné un système de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan, on peut toujours, à l'aide d'un polygone funiculaire quelconque du système, réduire ces forces à deux.*

*L'une a pour ligne d'action le premier côté du polygone funiculaire, et pour vecteur le premier rayon polaire compté de l'origine du polygone des vecteurs vers le pôle; l'autre a pour ligne d'action le dernier côté du polygone funiculaire, et pour vecteur le dernier rayon polaire compté du pôle vers l'extrémité du polygone des vecteurs.*

En effet, soit  $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$  le système de forces considéré,  $\omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \varphi$  un polygone funiculaire quelconque du système et  $p$  son pôle (fig. 30).

Décomposons la force  $F_1$  en deux, l'une  $\psi_1$  suivant la droite  $\omega\alpha_1$ , l'autre  $t_1$  suivant la droite  $\alpha_1\alpha_2$ ; le vecteur de la force  $F_1$  étant  $a_1a_2$ , et les rayons polaires  $a_1p$  et  $pa_2$  étant respectivement parallèles aux lignes d'action  $\omega\alpha_1$  et  $\alpha_1\alpha_2$ , la composante  $\psi_1$  aura (n° 4) pour vecteur  $a_1p$  et la composante  $t_1$  pour vecteur  $pa_2$ . Décomposons de même la force  $F_2$  en deux autres, l'une  $t'_1$  suivant  $\alpha_1\alpha_2$  et l'autre  $t_2$  suivant  $\alpha_2\alpha_3$ ; on voit de même, à l'aide du triangle  $a_2p a_3$ , que  $t'_1$  a pour vecteur



$a_2p$  et  $t_2$  pour vecteur  $pa_3$ , et ainsi de suite. Enfin si l'on décompose la dernière force  $F_3$  en deux, l'une  $t'_4$  suivant  $\alpha_4 \varphi$  et l'autre  $\psi_2$  suivant  $\alpha_5 \varphi$ , la composante  $t'_4$  aura pour vecteur  $a_5p$  et la composante  $\psi_2$  pour vecteur  $pa_6$ .

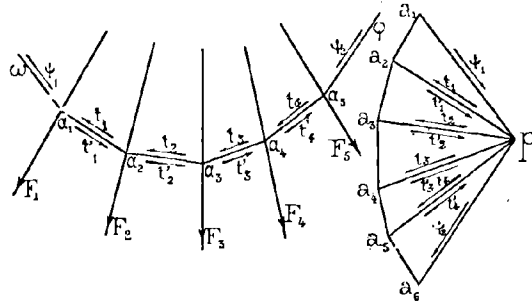


Fig. 30.

On aura de la sorte, au lieu des forces primitives, le système

$$\psi_1, t_1, t'_1, t_2, t'_2, \dots, t_i, t'_i, \psi_2$$

mais les forces  $t_1$  et  $t'_1$  étant égales et directement opposées se détruisent, il en est de même des paires de forces  $t_2$  et  $t'_2, t_3 \dots t_i$  et  $t'_i$ , qui agissent suivant les autres côtés intermédiaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  du polygone funiculaire. Il ne reste donc finalement que les deux forces  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , dont l'une  $\psi_1$  a pour ligne d'action  $\omega \alpha_1$  et pour vecteur  $a_1p$  et dont l'autre  $\psi_2$  a pour ligne d'action  $\alpha_5 \varphi$  et pour vecteur  $pa_6$ .

**32.** — *La somme des projections, sur un axe quelconque, des forces  $F_1, F_2, \dots, F_3$  du système est égale à la somme des projections, sur le même axe, des deux résultantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .*

On a, en effet (n° 6) :

$$\text{Proj. } F_1 = \text{Proj. } \psi_1 + \text{Proj. } t_1$$

$$\text{Proj. } F_2 = \text{Proj. } t'_1 + \text{Proj. } t_2$$

$$\dots$$

$$\text{Proj. } F_3 = \text{Proj. } t'_i + \text{Proj. } \psi_2$$

d'où, en ajoutant et observant que  $t_1$  et  $t'_1, t_2$  et  $t'_2 \dots t_i$  et  $t'_i$  ont (n° 3) des projections égales et de signes contraires,

$$\text{Proj. } F_1 + \text{Proj. } F_2 + \dots + \text{Proj. } F_3 = \text{Proj. } \psi_1 + \text{Proj. } \psi_2.$$

**33.** — Que, dans la démonstration précédente, on remplace le mot *projection* par le mot *moment*, l'on aura la proposition suivante :

*La somme des moments des forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  par rapport à un point quelconque du plan est égale à la somme des moments des deux résultantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  par rapport au même point.*

**34.** — La réduction qui fait l'objet du théorème fondamental du n° 34 est possible d'une infinité de manières, puisqu'on peut choisir arbitrairement le pôle  $p$ , ainsi que la *position* du premier côté  $\omega\alpha_1$  du polygone funiculaire, ce premier côté n'étant encore déterminé qu'en *direction* par le choix du pôle.

La position du pôle influe à la fois sur la grandeur et la direction des deux forces finales  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ; mais la position du premier côté n'influe, dès que le pôle est fixé, que sur les positions de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et nullement sur leurs grandeurs et leurs directions.

On peut, par ce procédé graphique, trouver tous les systèmes de deux forces équivalentes au système proposé. Cela résulte de la proposition suivante, qui a d'ailleurs son utilité propre :

Considérons deux groupes de forces  $(G)$  et  $(G')$  appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan; supposons ces groupes *équivalents*, c'est-à-dire tels que le groupe  $(G')$  fasse équilibre au groupe  $(-G)$  formé par des forces égales et directement opposées à celles qui constituent le groupe  $(G)$ . *Si l'on construit pour chacun des groupes  $(G)$  et  $(G')$  le polygone des vecteurs et un polygone funiculaire, de telle sorte que les deux polygones des vecteurs  $P$  et  $P'$  aient la même origine  $a$  et le même pôle  $p$ , et que les deux polygones funiculaires  $Q$  et  $Q'$  aient leur premier côté sur une même droite  $D$ ; les polygones  $P$  et  $P'$  auront la même extrémité  $b$ , et les polygones  $Q$  et  $Q'$  auront leur dernier côté sur une même droite  $L$ .*

En effet, soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  les deux forces auxquelles on réduit le groupe  $(G)$  à l'aide des polygones  $P$  et  $Q$ , et  $\psi'_1$  et

$\psi'_2$  les deux forces auxquelles on réduit le groupe (G') à l'aide des polygones P' et Q'. Les forces  $-\psi_1, -\psi_2, \psi'_1, \psi'_2$  se feront équilibre. Mais  $\psi_1$  et  $\psi'_1$  ayant la même ligne d'action D et le même vecteur  $ap$ ,  $-\psi_1$  et  $\psi'_1$  seront égales et directement opposées et par suite se détruiront. Les deux forces  $-\psi_2$  et  $\psi'_2$  devront donc s'équilibrer, c'est-à-dire être égales et directement opposées. Par suite,  $\psi_2$  et  $\psi'_2$  auront d'abord une même ligne d'action L; elles auront en outre la même grandeur et le même sens, ce qui prouve que leurs vecteurs qui ont déjà la même origine  $p$  coïncident, en sorte que P et P' ont la même extrémité.

### Systemes partiels.

**35.** — Étant donné un système de forces, on nomme *système partiel* tout système formé par plusieurs forces consécutives du système total.

Des qu'on a construit un polygone funiculaire du système total, on a par là même et sans nouveau tracé un polygone funiculaire d'un système partiel quelconque; c'est la partie du polygone funiculaire total qui est comprise entre les forces du système partiel et à laquelle on adjoint le côté qui précède et le côté qui suit. Soit, par exemple ( $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ ), le système total, et  $\omega a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  un de ses polygones funiculaires (fig. 30). Le système partiel formé par les forces  $F_2, F_3, F_4$  a pour polygone des vecteurs la ligne brisée  $a_2 a_3 a_4 a_5$  et  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  est un de ses polygones funiculaires. — Donc, d'après le théorème fondamental du n° 31, les forces  $F_2, F_3, F_4$  peuvent être remplacées par deux forces ayant l'une pour ligne d'action  $a_1 a_2$  et pour vecteur  $a_2 p$ , l'autre pour ligne d'action  $a_4 a_5$  et pour vecteur  $p a_5$ . Ainsi :

*Dans tout polygone funiculaire d'un système de forces appliquées à un corps solide, deux côtés quelconques sont les lignes d'action de deux forces pouvant remplacer le groupe des forces du système qui sont comprises entre les deux côtés considérés; celle qui agit suivant le premier de ces côtés a pour vecteur le segment qui joint l'origine du po-*

lygone des vecteurs partiel au pôle, et celle qui a pour ligne d'action le dernier des deux côtés a pour vecteur le segment qui joint le pôle à l'extrémité du polygone des vecteurs partiel. Enfin, la somme des projections ou la somme des moments de ces deux résultantes est égale à la somme des projections ou à la somme des moments des forces du système partiel.

**Expression graphique des conditions pour qu'un système soit en équilibre, ait une résultante ou se réduise à un couple.**

**36.** Soit (S) un système quelconque de forces  $F_1 F_2 \dots F_n$  appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan;  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$  le polygone des vecteurs que nous désignerons par P, et  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$  un polygone funiculaire quelconque du système; nous désignerons par Q ce dernier polygone et par p son pôle (fig. 30). Soient enfin  $\psi_1$  et  $\psi_2$  les deux forces auxquelles on réduit le système (S) à l'aide du polygone Q (n° 31).

D'après ce qui a été dit au n° 8 sur la composition de deux forces situées dans un même plan, il ne peut se présenter que trois cas : le système  $(\psi_1, \psi_2)$  et par suite le système équivalent (S) peut être en équilibre, se réduire à un couple, ou admettre une résultante (différente de zéro).

Dans le premier cas,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont égales et directement opposées; or, comme elles ont pour vecteurs  $a_1 p$  et  $p a_6$ , il faut que  $a_1$  et  $a_6$  coïncident, c'est-à-dire que le polygone P soit fermé. Le polygone Q doit aussi être fermé: ses côtés extrêmes  $\omega \alpha_1$  et  $\alpha_5 \alpha_6$  étant en effet les lignes d'action de  $\psi_1$  et de  $\psi_2$ , doivent être sur une même droite et par conséquent sur la droite  $\alpha_1 \alpha_6$  à laquelle on donne le nom de *ligne de clôture* du polygone funiculaire.

Dans le second cas,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  doivent former un couple, et l'on voit comme ci-dessus que le polygone P est fermé; mais le polygone funiculaire Q est ouvert, ses côtés extrêmes étant d'ailleurs parallèles.

Enfin dans le troisième cas, les forces  $\psi_1$  et  $\psi_2$  se coupent ou

bien ont leurs lignes d'action parallèles ou confondues sans être à la fois égales et de sens opposés. Par suite les points  $a_1$  et  $a_6$  sont distincts, en sorte que le polygone P est ouvert.

Ces résultats se trouvent résumés dans le tableau suivant :

Équilibre	P et Q fermés
Couple	P fermé, Q ouvert
Résultante	P ouvert <sup>1</sup> .

Les conclusions relatives aux trois cas étant distinctes, les réciproques sont vraies ; de là cette triple proposition :

*Étant donné un système quelconque de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan :*

1° *pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le polygone des vecteurs soit fermé et qu'un polygone funiculaire du système soit fermé ;* auquel cas tout polygone funiculaire du système sera aussi fermé.

2° *Pour qu'il y ait un couple résultant, il faut et il suffit que le polygone des vecteurs soit fermé et qu'un polygone funiculaire du système soit ouvert ;* auquel cas tous les polygones funiculaires du système seront aussi ouverts.

3° *Pour qu'il y ait une résultante, il faut et il suffit que le polygone des vecteurs soit ouvert.*

**37.** — Arrêtons-nous un moment sur ce dernier cas :

1° *La résultante a pour vecteur la droite qui joint l'origine à l'extrémité du polygone des vecteurs ;* cette droite est en effet (n° 4) le vecteur de la résultante des deux forces  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et par suite du système proposé (S).

2° *Tout polygone funiculaire du système (S) donne par la rencontre de ses côtés extrêmes un point de la ligne d'action de la résultante ;* car ce point de rencontre, étant le point de concours des forces de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , est situé sur la ligne d'action de leur résultante qui n'est autre que celle du système (S) ;

3° *La projection de la résultante, sur un axe quelconque du plan, est égale à la somme des projections sur le même*

1. Q peut alors être ouvert ou fermé ; il est aisé de trouver des exemples de l'une et de l'autre circonstances.

*axe de toutes les forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  du système (S). Le moment de la résultante, par rapport à un point quelconque du plan, est égal à la somme des moments, par rapport au même point, de toutes les forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  du système (S).* Ces dernières propriétés sont des conséquences immédiates des n<sup>os</sup> 32 et 33.

**38.** — Ces résultats s'appliquent aux systèmes partiels (n<sup>o</sup> 35). Ainsi, *dans tout polygone funiculaire d'un système de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan :*

1<sup>o</sup> *Deux côtés quelconques se coupent sur la résultante des forces comprises entre ces côtés ;*

2<sup>o</sup> *Cette résultante a pour vecteur la droite qui joint l'origine à l'extrémité de la partie du polygone des vecteurs relative aux forces en question.*

**39.** — Remarquons enfin, à propos des conclusions du n<sup>o</sup> 36, que *dans le cas des forces concourantes, le polygone funiculaire n'a pas à intervenir.* Nous savons en effet (n<sup>o</sup> 21) que, dans cette circonstance, si le polygone des vecteurs est fermé, tous les polygones funiculaires du système sont fermés. Le tableau du n<sup>o</sup> 36 se réduit donc alors au suivant :

Equilibre	P fermé
Résultante	P ouvert.

*Ainsi, quand il s'agit de forces concourantes, deux cas seulement peuvent se présenter : le système a une résultante ou est en équilibre, suivant que le polygone des vecteurs est ouvert ou fermé.*

#### **Comment on retrouve par la statique les propriétés géométriques des polygones funiculaires.**

**40.** — L'avantage qu'offre, au point de vue didactique, la séparation entre les propriétés géométriques et les propriétés mécaniques des polygones funiculaires, est trop évident pour que nous ayons à y insister. Toutefois on peut aussi établir les pro-

priétés géométriques par des considérations empruntées à la statique. C'est ce que nous allons montrer brièvement en nous bornant aux deux théorèmes fondamentaux (n<sup>os</sup> 18 et 20).

1<sup>o</sup> Si dans un polygone funiculaire quelconque d'un système de forces ( $F_1, \dots, F_n; a_1 \dots a_{n+1}$ ) on prend l'intersection  $m$  du côté de rang  $i$  et du côté de rang  $k$ , ce point  $m$  appartient à la ligne d'action de la résultante des forces comprises entre ces deux côtés. Cette droite qui est d'ailleurs parallèle à  $a_i a_k$  est donc le lieu de tous les points  $m$  relatifs aux divers polygones funiculaires du système de forces considéré. C'est le théorème du n<sup>o</sup> 20.

2<sup>o</sup> Soient P et P' deux polygones funiculaires d'un même système de forces; désignons par  $p$  et  $p'$  leurs pôles respectifs, et en général par  $S_k$  le point de rencontre du côté de rang  $k$  dans le polygone P et du côté de rang  $k$  dans le polygone P' (fig. 17). Considérons la force  $F_k$  et la force  $F'_k$  qui lui serait égale et directement opposée. On peut remplacer  $F_k$  par deux forces ayant respectivement pour lignes d'action  $\alpha_{k-1} \alpha_k$ ,  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  et pour vecteurs  $a_k p$ ,  $p a_{k+1}$ ; on peut de même remplacer  $F'_k$  par deux forces ayant pour ligne d'action  $\alpha'_{k-1} \alpha'_k$ ,  $\alpha'_k \alpha'_{k+1}$  et pour vecteurs  $p' a_k$ ,  $a_{k+1} p'$ . Les quatre forces ainsi obtenues s'équilibrent puisqu'elles tiennent lieu de deux forces  $F_k$  et  $F'_k$  égales et directement opposées. Mais les deux forces qui ont pour vecteurs  $p' a_k$  et  $a_k p$  concourent en  $S_k$ ; elles ont donc une résultante passant par  $S_k$  et ayant pour vecteur  $p' p$ . De même, les deux forces ayant pour vecteur  $p a_{k+1}$ ,  $a_{k+1} p'$  ont une résultante passant par  $S_{k+1}$  et ayant pour vecteur  $pp'$ . Ces deux résultantes doivent, pour s'équilibrer, être directement opposées; donc les points  $S_k$  et  $S_{k+1}$  sont sur une parallèle à  $pp'$ . Ainsi tous les segments  $S_1 S_2$ ,  $S_2 S_3$ ,  $S_3 S_4$  sont parallèles à  $pp'$ , et, comme chacun d'eux a un point commun avec le suivant, tous ces segments appartiennent à une même droite parallèle à  $pp'$ . C'est le théorème du n<sup>o</sup> 18.

### Expression graphique des moments.

41. — On vient de voir le rôle important que jouent les polygones funiculaires dans la composition des forces situées

dans un même plan. On tire encore un très-heureux parti de ces polygones pour la détermination graphique des moments.

Soit  $F$  une force donnée par sa ligne d'action et son vecteur  $a_1a_2$ , et  $C$  le centre des moments. A l'aide d'un pôle  $p$ , pris à volonté, construisons (fig. 31) un polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\varphi$  de la force  $F$ , et soient  $m$  et  $n$  les points où le premier et le second côtés de ce polygone coupent respectivement la parallèle au vecteur  $a_1a_2$  menée par le point  $C$ . Enfin désignons par  $k$  la projection du pôle  $p$  sur le vecteur  $a_1a_2$  et donnons au segment  $kp$  le nom de *distance polaire*.

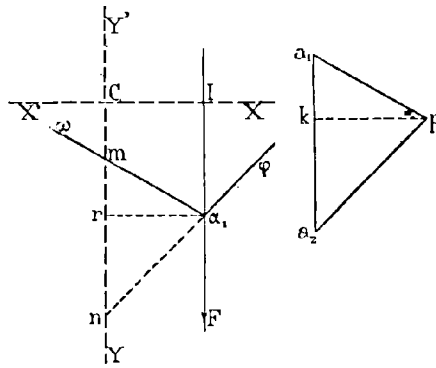


Fig. 31.

Les triangles  $a_1pa_2$ ,  $m\alpha_1n$  ayant les côtés parallèles sont semblables ; leurs bases sont donc proportionnelles à leurs hauteurs, et l'on a, en grandeur et en signe :

$$\frac{a_1a_2}{mn} = \frac{kp}{Cl} \quad \text{ou} \quad a_1a_2 \cdot Cl = kp \cdot mn$$

Donc, *le moment d'une force  $F$  par rapport à un point  $C$  est égal au produit de la distance polaire  $kp$  par le segment  $mn$  intercepté sur la parallèle menée par  $C$  à la force  $F$ , entre le premier et le dernier côtés d'un polygone funiculaire de cette force.*

**42.** — Cette règle s'étend à la somme des moments d'un système quelconque ( $F_1F_2F_3F_4$  ;  $a_1a_2a_3a_4$ ) de forces situés dans un même plan ;  $k$  désigne alors la projection du pôle  $p$  sur la ligne de clôture  $a_1a_3$  du polygone des vecteurs, et c'est



parallèlement à cette ligne  $a_1a_3$  que doit être menée, par le centre  $C$  des moments, la droite sur laquelle on compte le segment  $mn$  intercepté entre le premier et le dernier côtés du polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi$  (fig. 32).

Pour le démontrer nous distinguerons trois cas, suivant que le système de forces considéré a une résultante, est en équilibre ou se réduit à un couple.

1° Si le système a une résultante  $R$ , le polygone des vecteurs est ouvert (n° 36) ; en d'autres termes  $a_1$  et  $a_3$  sont distincts, la ligne de clôture  $a_1a_3$  est bien définie et l'énoncé n'offre aucune ambiguïté. La somme des moments des forces du système sera d'ailleurs égale (n° 37) au moment de la résultante  $R$  ; mais cette résultante est parallèle à  $a_1a_3$  et passe par le point de concours  $\alpha$  des côtés extrêmes  $\omega\alpha_1$ ,  $\alpha_4\varphi$  du polygone funiculaire ;  $\omega\alpha\varphi$  est donc un polygone funiculaire de pôle  $p$ , pour cette résultante ; par suite la somme des moments cherchée est égale au produit

$$hp \cdot mn$$

comme nous l'avions annoncé.

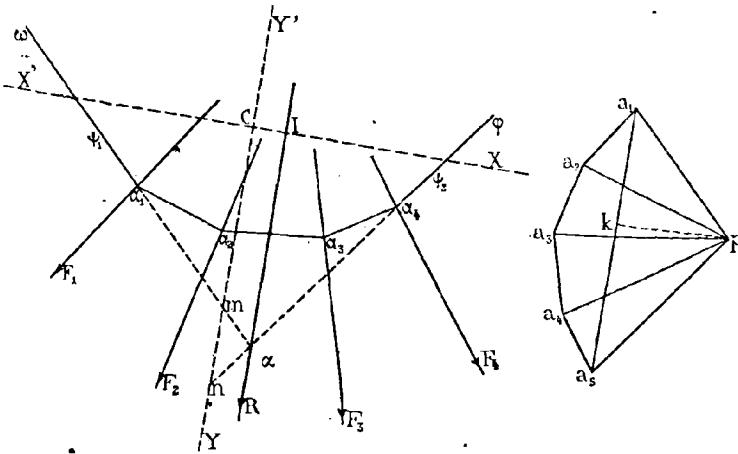


Fig. 32.

2° S'il y a équilibre,  $a_1$  et  $a_3$  coïncident (n° 36) ; la droite  $a_1a_3$  est alors indéterminée ; c'est une droite quelconque passant par  $a_1$  ; par suite le facteur  $hp$  peut prendre toutes les va-

leurs entre zéro et  $a_1p$ . Mais les côtés extrêmes  $\omega x_1$  et  $\alpha_1\varphi$  du polygone funiculaire coïncident aussi (n° 36); le segment qu'ils interceptent sur une droite quelconque est donc nul. Le facteur  $mn$  étant nul, tandis que le facteur  $kp$  reste fini, le produit  $kp.mn$  est égal à zéro. Le théorème sera démontré si nous prouvons que la somme des moments doit être égale à zéro dans le cas d'équilibre. Or, dans ce cas, les deux forces  $\psi_1$  et  $\psi_2$  auxquelles on réduit le système proposé à l'aide du polygone funiculaire ont pour ligne d'action commune la ligne de clôture  $\alpha_1\alpha_3$  de ce polygone et pour vecteurs  $a_1p$  et  $pa_1$ ; elles sont donc égales et directement opposées et par suite la somme de leurs moments, c'est-à-dire (n° 33) des moments des forces proposées, par rapport à un point quelconque du plan, est égale à zéro.

3° Supposons enfin que le système se réduise à un couple (fig. 33).

La somme des moments des forces proposées est alors égale au moment de ce couple (n° 33 et 8); mais les forces  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de ce couple ont respectivement pour vecteurs  $ap_1$  et  $pa_1$ , puisque  $a_1$  et  $a_3$  coïncident, et pour lignes d'action les côtés extrêmes  $\omega x_1$  et  $\alpha_1\varphi$  du polygone funiculaire qui sont distincts et parallèles à  $pa_1$ . La somme cherchée est donc égale au produit

$$a_1p. II$$

I et I' désignant les projections du point C sur  $\omega x_1$  et  $\alpha_1\varphi$ .

D'autre part, puisque  $a_1$  et  $a_3$  coïncident, la droite  $a_1a_3$  est indéterminée; c'est une droite quelconque L passant par  $a_1$ ; soient  $m$  et  $n$  les points où la parallèle à cette droite menée par C rencontre respectivement  $\omega x_1$  et  $\alpha_1\varphi$ , et soit  $t$  la projection de  $n$  sur  $\omega x_1$ ; les triangles semblables  $ka_1p$ ,  $mnt$  donnent la proportion :

$$\frac{a_1p}{mn} = \frac{kp}{nt}$$

d'où

$$kp.mn = a_1p.nt = a_1p.II.$$

La somme des moments a donc encore pour expression  $kp.mn$ .

Cette expression convient donc à tous les cas, et l'on peut dire d'une manière générale :

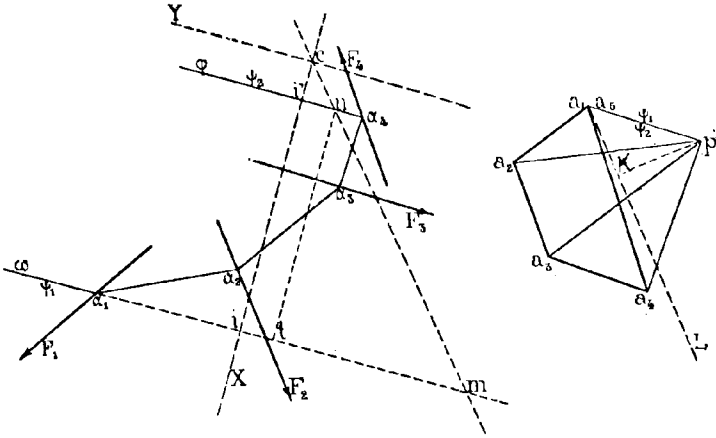


Fig. 33.

*Étant donné un système de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan, et étant construit un polygone funiculaire du système, la somme des moments de toutes ces forces par rapport à un point quelconque du plan est égale au produit de la distance polaire par le segment intercepté, sur la parallèle menée par le centre des moments à la ligne de clôture du polygone des vecteurs, entre le premier et le dernier côtés du polygone funiculaire.*

Il est d'ailleurs sous-entendu que lorsque le polygone des vecteurs est fermé, on substitue à la ligne de clôture une droite menée à volonté par l'origine du polygone des vecteurs.

**43.** — Il est évident que le théorème s'applique aux systèmes partiels, en substituant, bien entendu, au polygone des vecteurs et au polygone funiculaire du système total les parties de ces polygones qui répondent au système partiel considéré (n° 33).

Mais le cas particulièrement intéressant est celui des forces parallèles (fig. 34).

Soit  $(F_1, F_2, F_3, F_4; a_1 a_2 a_3 a_4, a_5)$  un système quelconque de forces parallèles, et  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$  un polygone funiculaire du système construit à l'aide d'un pôle  $p$  pris à volonté.

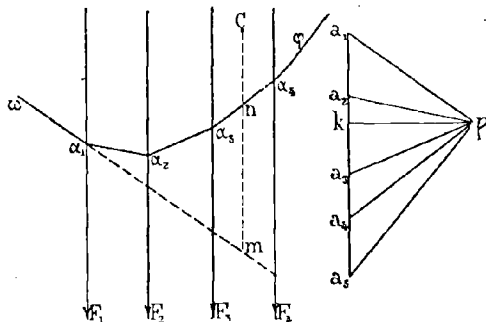


Fig. 34.

$n$  étant un point quelconque du polygone, menons par ce point une parallèle aux forces et soit  $m$  le point où cette parallèle rencontre le premier côté  $\omega \alpha_1$ , indéfiniment prolongé ; on donne au segment  $mn$  le nom d'*ordonnée* du point  $n$ . Cela posé, on a le théorème suivant :

*Si l'on considère un système de forces parallèles appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan, et un polygone funiculaire quelconque de ce système, le produit de la distance polaire par l'ordonnée d'un point quelconque du polygone est égal à la somme des moments des forces situées à gauche de cette ordonnée par rapport à tout centre des moments situé sur la droite indéfinie qui porte cette ordonnée.*

En effet, soit  $C$  un point quelconque pris sur  $nm$  ou sur ses prolongements ;  $a_1 a_2 a_3 a_4$  est le polygone des vecteurs et  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ , un polygone funiculaire de pôle  $p$  pour le système partiel formé par les forces  $F_1 F_2 F_3$ , situées à gauche de la droite  $Cnm$ . La somme des moments des forces de ce système partiel par rapport au point  $C$  a (n° 42) pour expression :

$$kp.mn$$

conformément à l'énoncé.

**Équivalence des conditions graphiques et des conditions analytiques de l'équilibre.**

**41.** -- Nous terminerons ce chapitre en montrant comment les conditions que fournit la statique analytique pour exprimer l'équilibre d'un système (S) de forces appliquées à un corps solide et situées dans un même plan résultent des conditions graphiques trouvées au n° 36, et *vice versa*.

Désignons, comme au n° 36, par P le polygone des vecteurs et par Q un polygone funiculaire du système (S); enfin soient Ox et Oy deux axes non parallèles situés dans le plan.

S'il y a équilibre, les polygones P et Q sont fermés. De ce que P est fermé, il suit que la somme des projections des forces du système sur une droite quelconque du plan et en particulier sur chacune des droites Ox et Oy, est nulle. De ce que Q est fermé, il suit que la somme des moments des forces par rapport au point O est égale à zéro, puisque le segment intercepté sur une droite quelconque entre les côtés extrêmes du polygone funiculaire est nul.

Inversement, si la somme des projections des forces sur chacun des deux axes Ox et Oy est nulle, le polygone P est fermé; car s'il était ouvert, il y aurait une résultante dont la direction unique ne pourrait coïncider à la fois avec celle des projetantes sur Ox et celles des projetantes sur Oy; la projection de cette résultante, et par conséquent la somme des projections des composantes, sur l'un au moins des axes Ox et Oy serait différente de zéro. D'autre part, si, P étant fermé, la somme des moments des forces par rapport au point O est nulle, les côtés extrêmes du polygone funiculaire devront intercepter un segment nul sur toute droite partant de O; le polygone Q sera donc fermé.

Donc, enfin, au lieu de dire, comme en statique graphique, que, pour l'équilibre, il faut et il suffit que *le polygone des vecteurs et un polygone funiculaire du système soient fermés*, on peut dire, comme en statique analytique, qu'il faut et il suffit que *les sommes des projections des forces du système sur deux axes (non parallèles) du plan soient nulles, ainsi que la somme des moments par rapport à un point quelconque du plan.*

## CHAPITRE IV

### PROBLÈMES USUELS RELATIFS A LA COMPOSITION DES FORCES. RÉACTIONS DES APPUIS D'UN CORPS GÉNÉ.

---

#### Quelques questions simples.

**45.** — La règle graphique pour la composition des forces concourantes et situées dans un même plan a déjà été donnée au n° 5. On construit le polygone des vecteurs des forces données ; la résultante  $\mathbf{a}$  pour vecteur la droite qui joint l'origine à l'extrémité de ce polygone, et pour ligne d'action la parallèle à ce vecteur menée par le point de concours des composantes.

La dernière partie de cette règle est en défaut lorsque le point de concours des forces données sort des limites de l'épure ; il faut alors se procurer d'autre manière un point de la ligne d'action de la résultante. On y parvient en construisant un polygone funiculaire du système proposé ; le point de rencontre des côtés extrêmes de ce polygone appartient à la ligne d'action cherchée.

**46.** Ce dernier tracé, où n'intervient plus le point de concours des forces, subsiste par là même dans le cas où les forces données sont parallèles.

La figure 35 est relative à deux forces  $F_1$  et  $F_2$  parallèles et de même sens, et la figure 36 a deux forces parallèles et de sens opposés mais inégales. Le polygone des vecteurs est  $a_1 a_2 a_3$ , et  $a_1 a_3$  est le vecteur de la résultante ;  $\omega a_1 a_2 p$  est un polygone funiculaire dont  $p$  est le pôle ; ses côtés extrêmes se

coupent en un point I, et la parallèle menée par ce point à  $a_1 a_3$  c'est-à-dire aux forces proposées est la ligne d'action de la résultante R.

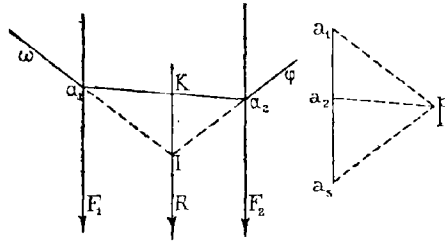


Figure 35.

Quoique nous n'ayons en vue ici que des constructions graphiques, nous ferons cependant remarquer la facilité avec laquelle le tracé qui précède conduirait à la règle analytique

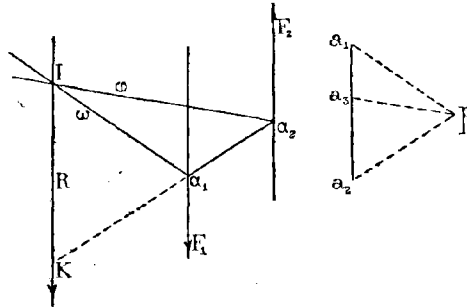


Figure 36.

connue pour la composition de deux forces parallèles. D'abord la relation

$$a_1 a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_3$$

montre que la résultante R est égale à la somme algébrique des composantes  $F_1$  et  $F_2$ . Puis, l'application du théorème du n° 9 aux triangles  $\alpha_1 I \alpha_2$ ,  $\alpha_1 p \alpha_3$  donne la proportion

$$\frac{K\alpha_1}{K\alpha_2} = \frac{a_2 a_1}{a_2 a_3}$$

qui définit la position de la résultante.

**47.** Remarquons enfin que si les forces  $F_1$  et  $F_2$  formaient un couple c'est-à-dire étaient parallèles égales et de sens opposés, le point  $a_3$  (fig. 36) coïnciderait avec  $a_1$  et les côtés extrêmes  $\omega a_1$ ,  $a_2 \varphi$  du polygone funiculaire seraient parallèles à  $pa_1$ . Les deux nouvelles forces auxquelles on serait ainsi conduit (n° 31) pour remplacer les proposées auraient leurs lignes d'action  $\omega a_1$  et  $a_2 \varphi$  parallèles et leurs vecteurs  $a_1 p$  et  $pa_2$  égaux et de signes contraires ; elles formeraient donc ainsi un couple, comme on devait d'ailleurs s'y attendre (n° 8).

Nous ne saurions insister davantage sur ces questions simples, et nous allons passer au problème général qui constitue le véritable objet de ce chapitre.

### Problème général

**48.** *Etant donné un système de  $n$  forces situées dans un même plan et appliquées à un corps rigide, on demande de leur faire équilibre à l'aide de  $m$  forces situées dans le même plan et ayant des lignes d'action données.*

Il est sous-entendu que les forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , ne sont pas elles-mêmes en équilibre, et que les lignes d'action données des forces inconnues  $F_{n+1}, F_{n+2}, \dots, F_{n+m}$  sont des droites distinctes.

Puisque les conditions d'équilibre ne fournissent que trois relations différentes (n° 44), on voit *a priori* qu'en général le problème doit être indéterminé lorsque  $m$  est supérieur à 3, et que, lorsque  $m$  est égal à 2 ou à 1, la possibilité du problème doit imposer aux données une ou deux conditions. Il y a lieu d'après cela de distinguer quatre cas, suivant que  $m$  est égal à 1, 2, 3 ou est plus grand que 3.

Nous allons traiter successivement ces quatre cas, mais en nous astreignant à suivre une voie uniforme.

Nous nommerons *système partiel*, le système formé par les forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , et *système total* le système formé par toutes les forces connues ou inconnues  $F_1, F_2, \dots, F_{n+m}$ .

Nous désignerons par  $P'_v$  le polygone des vecteurs de  $a_1 a_2, \dots, a_{n+m+1}$  du système total et par  $P'_f$  un polygone funicu-



laire quelconque  $\omega z_1, \dots, \alpha_{n+m}\varphi'$  de ce même système ;  $p$  est le pôle relatif à ce dernier polygone.

Nous représenterons enfin par  $P_v$  la partie  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  du polygone  $P'_v$  qui forme le polygone des vecteurs du système partiel, et par  $P_f$  la partie  $\omega z_1, \dots, \alpha_n\varphi$  du polygone  $P'_f$  qui constitue un polygone funiculaire de ce système partiel ;  $\alpha_n\varphi$  n'est autre que le côté  $\alpha_n z_{n+1}$  considéré comme droite indéfinie.

Le système partiel est donné ;  $P_v$  et  $P_f$  sont donc connus, et il s'agit d'exprimer que les polygones  $P'_v$  et  $P'_f$  sont l'un et l'autre fermés c'est-à-dire que  $a_{n+m+1}$  coïncide avec  $a_1$  et que  $\alpha_{n+m}\varphi'$  coïncide avec  $\omega z_1$  ou, ce qui revient au même, que  $\alpha_{n+m}$  est sur  $\omega z_1$ .

Toutes ces notations se trouvent résumées dans le tableau suivant qui, par la disposition des lettres, rappelle d'ailleurs la situation relative des divers éléments des polygones  $P_v, P_f, P'_v, P'_f$ .

$$(A) \begin{cases} F_1 & & F_n & F_{n+1} & & F_{n+m} \\ a_1 & a_2 & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+m} & a_{n+m+1} \text{ (ou } a_1) \\ \omega z_1 & & \alpha^n & \varphi & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+m} & \varphi' \text{ (ou } \omega z_1) \end{cases}$$

Dans le polygone  $P'_v$  on connaît les sommets  $a_1, \dots, a_{n+1}$ , ainsi que  $a_{n+m+1}$  qui coïncide avec  $a_1$  ; les sommets encore inconnus sont donc

$$(1) \quad a_{n+2}, \dots, a_{n+m} ;$$

Mais il faut que les droites

$$(2) \quad a_{n+1}a_{n+2}, \dots, a_{n+m}a_{n+m+1},$$

soient respectivement parallèles aux lignes d'actions données des forces

$$(2') \quad F_{n+1}, \dots, F_{n+m}.$$

Dans le polygone  $P'_f$  on connaît les sommets  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , ainsi que  $\alpha_{n+1}$  (intersection de  $F_{n+1}$  et de  $\alpha_n\varphi$ ) et  $\alpha_{n+m}$  (intersection de  $F_{n+m}$  et de  $\omega z_1$ ). Les sommets encore inconnus sont donc

$$(3) \quad \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m-1} ;$$

Mais, outre que ces sommets doivent être situés respectivement sur les lignes d'action de  $F_{n+2}, \dots, F_{n+m-1}$ , il faut que les droites

$$(4) \quad \alpha_{n+1} \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m-1} \alpha_{n+m}$$

soient respectivement parallèles aux vecteurs

$$(4') \quad pa_{n+2} \dots pa_{n+m}$$

Cela posé, étudions successivement chacun des quatre cas mentionnés.

*Premier cas (m = 1)*

49. Pour  $m = 1$ , le tableau (A) devient

$F_1$	$F_n$	$F_{n+2}$	
$a_1 \ a_2$	$a_n \ a_{n+1}$	$a_{n+2}$	(ou $a_1$ )
$\omega z_1$	$\alpha_n \ \varphi$	$\alpha_{n+1} \ \varphi'$	(ou $\omega z_1$ )

Dans le polygone  $P'_v$  on connaît ici tous les sommets, et de plus  $a_{n+1} a_1$  doit être parallèle à la ligne d'action de  $F_{n+1}$  (fig. 37).

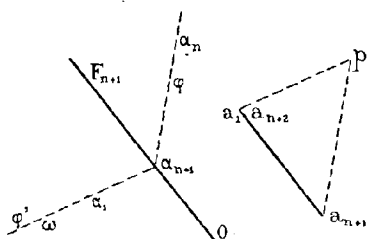


Figure 37

Dans le polygone  $P'_f$  on connaît aussi tous les sommets, même sans utiliser la condition imposée à  $\alpha_{n+1}$  d'être sur  $\omega z_1$ . Quant aux conditions (4 - 4'), elles ne

donnent rien dans le cas actuel.

On peut donc construire les polygones fermés  $P'$ ,  $P'_f$ , sous la double condition que  $F_{n+1}$  soit parallèle à  $a_{n+1} a_n$  et passe par le point de rencontre de  $\omega z_1$  et de  $\alpha_n \varphi$

De là ce théorème :

*Pour qu'on puisse équilibrer à l'aide d'une force  $F_{n+1}$  dont la ligne d'action est donnée, un système de forces appliquées à un corps rigide et situées dans un même plan, il faut et il suffit que la ligne d'action de la force inconnue*

soit parallèle à la droite  $a_1 a_{n+1}$  qui joint l'origine à l'extrémité du polygone des vecteurs du système donné et que cette ligne d'action passe par le point de rencontre des côtés extrêmes d'un polygone funiculaire du même système.

Ces conditions étant remplies, la force cherchée  $F_{n+1}$  a pour vecteur  $a_{n+1} a_1$ .

**50.** — Nous avons voulu donner les conditions de possibilité sous leur forme la plus générale, c'est-à-dire en faisant usage de l'un quelconque des polygones funiculaires du système. Mais on peut donner à ces conditions une forme plus simple en choisissant un polygone funiculaire  $Q$  ayant pour premier côté la ligne d'action donnée de la force inconnue  $F_{n+1}$ . La condition de possibilité du problème consiste alors simplement en ce que le polygone  $Q$  soit fermé.

Cette condition est évidemment nécessaire, et il suffit de prouver que si elle est remplie, les deux conditions du numéro précédent seront satisfaites. Mais si le polygone  $Q$  est fermé, la seconde des conditions du numéro qui précède se trouve remplie par là même, et il reste seulement à montrer que, si  $\omega \alpha_1$  et  $\alpha_{n+1} \varphi'$  coïncident avec la ligne d'action  $F_{n+1}$ , cette ligne sera parallèle à  $a_1 a_{n+1}$ . Or les rayons polaires  $p a_1$  et  $p a_{n+2}$ , qui sont respectivement parallèles à  $\omega \alpha_1$  et à  $\alpha_{n+1} \varphi'$ , seront alors parallèles à  $F_{n+1}$ ; les trois points  $p, a_1, a_{n+2}$  seront donc sur une même droite parallèle à  $F_{n+1}$ .

*Deuxième cas (m = 2).*

**51.** — Pour  $m = 2$ , le tableau (A) devient :

$F_1$	$F_n$	$F_{n+1}$	$F_{n+2}$	
$a_1 a_2$		$a_{n+1}$	$a_{n+2}$	$a_{n+3}$ (ou $a_1$ )
$\omega \alpha_1$	$\alpha_n \varphi$	$\alpha_{n+1}$	$\alpha_{n+2} \varphi'$	(ou $\omega \alpha_1$ )

Dans le polygone  $P_v'$ , le seul sommet inconnu est  $a_{n+2}$ ; mais il faut que  $\alpha_{n+1} a_{n+2}$  et  $a_1 a_{n+2}$  soient respectivement parallèles aux lignes d'action  $F_{n+1}, F_{n+2}$  (fig. 38).

Dans le polygone  $P_f'$ , tous les sommets sont connus, puisque  $\alpha_{n+1}$  est à la rencontre de  $\alpha_n \varphi$  et de  $F_{n+1}$ , et que  $\alpha_{n+2}$  est à la rencontre de  $\omega \alpha_1$  et de  $F_{n+2}$ . De plus, le rayon polaire  $pa_{n+2}$  doit être parallèle à la droite  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$  à laquelle on donne le nom de *ligne de clôture* du polygone  $P_f$ .

Il résulte de là que la condition de possibilité du problème consiste en ce que le rayon polaire  $pa_{n+2}$  parallèle à  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$  et les droites  $a_{n+1} a_{n+2}$ ,  $a_1 a_{n+2}$  menées par  $a_{n+1}$  et par  $a_1$  parallèlement à  $F_{n+1}$  et à  $F_{n+2}$ , doivent concourir en un même point  $a_{n+2}$  situé à distance finie.

Ainsi, pour qu'on puisse équilibrer, à l'aide de deux forces  $F_{n+1}$  et  $F_{n+2}$  dont les lignes d'action sont données dans un même plan, un système de forces situées dans

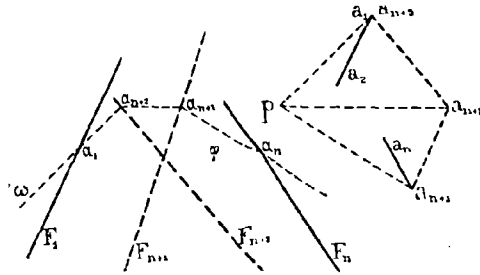


Figure 38

ce plan et appliquées à un corps rigide, il faut et il suffit que le rayon polaire parallèle à la ligne de clôture d'un polygone funiculaire du système donné, et les parallèles menées respectivement, par l'origine et par l'extrémité du polygone des vecteurs de ce système, aux lignes d'action de la seconde et de la première force inconnues soient trois droites qui concourent en un même point situé à distance finie.

Cette condition étant remplie, les forces demandées  $F_{n+1}$ ,  $F_{n+2}$  auront respectivement pour vecteurs  $a_{n+1} a_{n+2}$ ,  $a_{n+2} a_1$ .

**52.** — La proposition précédente se simplifie, quand, au lieu d'employer un polygone funiculaire quelconque, on fait usage d'un polygone particulier. Par exemple, si les lignes

d'action données des deux forces inconnues  $F_{n+1}, F_{n+2}$  se coupent en un point  $O$ , à moins que certaines raisons n'aient déjà imposé ou n'imposent ultérieurement un polygone funiculaire déterminé, il est naturel de faire passer par le point  $O$  le premier côté du polygone funiculaire à tracer ; la condition de possibilité du problème consiste alors en ce que le dernier côté de ce polygone funiculaire des forces données vienne aussi passer par le point  $O$ . C'est qu'en effet, le pôle  $p$  n'étant alors astreint qu'à se trouver sur une droite donnée passant par  $a_1, pa_{n+1}$  et  $a_{n+2} a_{n+2}$  ont des directions distinctes, et par suite aussi les droites  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$  et  $F_{n+1}$  qui sont respectivement parallèles aux précédentes. Mais  $\alpha_{n+2}$  coïncide ici avec  $O$  ; donc, la ligne de clôture  $\alpha_{n+2} \alpha_{n+1}$  devant passer par  $O$  et être distincte de  $F_{n+1}$ , il faut que  $\alpha_{n+1}$  soit aussi confondu avec  $O$ .

Troisième cas ( $m = 3$ ).

53. — Pour  $m = 3$ , le tableau (A) devient :

$F_1$	$F_n$	$F_{n+1}$	$F_{n+2}$	$F_{n+3}$
$a_1 a_2$	$a_{n+1}$	$a_{n+2}$	$a_{n+3}$	$a_{n+4}$ (ou $a_1$ )
$\omega \alpha_1$	$\alpha_n \varphi$	$\alpha_{n+1}$	$\alpha_{n+2}$	$\alpha_{n+3} \varphi'$ (ou $\omega \alpha_1$ ).

Dans le polygone  $P_v'$  (fig. 39 et 40), on connaît les sommets  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  et même  $a_{n+4}$  qui coïncide avec  $a_1$  ; il reste donc à connaître  $a_{n+2}$  et  $a_{n+3}$  ; mais on sait que les côtés

$$a_{n+1} a_{n+2}, \quad a_{n+2} a_{n+3}, \quad a_{n+3} a_1$$

doivent être respectivement parallèles aux lignes d'action

$$F_{n+1}, \quad F_{n+2}, \quad F_{n+3}.$$

Il résulte de là que pour achever le polygone  $P_v'$ , il serait nécessaire de connaître la *position* de la droite  $a_{n+1} a_{n+3}$  que nous désignerons par  $L$  et dont on ne connaît encore que la *direction* qui est celle de  $F_{n+2}$  ; cette droite  $L$  donnerait en effet  $a_{n+2}$  et  $a_{n+3}$  par ses intersections avec la parallèle  $a_{n+1} \alpha$  à  $F_{n+1}$  menée par  $a_{n+1}$  et avec la parallèle  $a_1 \alpha$  à  $F_{n+3}$  menée par  $a_1$ .

Dans le polygone  $P'_f$ , on a d'abord les sommets  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  et même  $\alpha_{n+1}$  (intersection de  $\alpha_n \varphi$  et de  $F_{n+1}$ ) et  $\alpha_{n+3}$  (intersection de  $\omega \alpha_1$  et de  $F_{n+3}$ ). Il ne reste donc à déterminer que le sommet  $\alpha_{n+2}$ . Mais ce sommet doit appartenir à la ligne d'action donnée de  $F_{n+2}$ , et il doit en outre être tel que les droites  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$ ,  $\alpha_{n+2} \alpha_{n+3}$  soient respectivement parallèles aux rayons polaires encore inconnus  $pa_{n+2}$ ,  $pa_{n+3}$ .

Le problème graphique à résoudre est donc le suivant : Insérer dans un angle donné  $\alpha_1 z \alpha_{n+1}$  une droite  $a_{n+1} a_{n+3}$ , ayant une direction donnée  $F_{n+2}$  et telle que, si l'on mène respectivement par  $\alpha_{n+1}$  et  $\alpha_{n+3}$  des parallèles à  $pa_{n+2}$ ,  $pa_{n+3}$ , ces parallèles se coupent par la droite  $F_{n+1}$ .

Or, si l'on mène  $pu$  parallèle à  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+3}$  et si l'on appelle  $K$  et  $I$  les points où  $pu$  et  $F_{n+2}$  coupent respectivement  $a_{n+2} a_{n+3}$  et  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+3}$ , on voit que les triangles  $pa_{n+2} a_{n+3}$ ,  $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3}$  satisfont aux conditions du n° 9 ; on a donc en grandeur et en signe la proportion

$$\frac{Ka_{n+2}}{Ka_{n+3}} = \frac{I\alpha_{n+3}}{I\alpha_{n+1}}$$

Or, comme le dernier rapport est connu, le problème revient au suivant : Insérer dans un angle donné  $\alpha_1 z \alpha_{n+1}$  une droite  $a_{n+2} a_{n+3}$  ayant une direction donnée  $F_{n+2}$  et telle

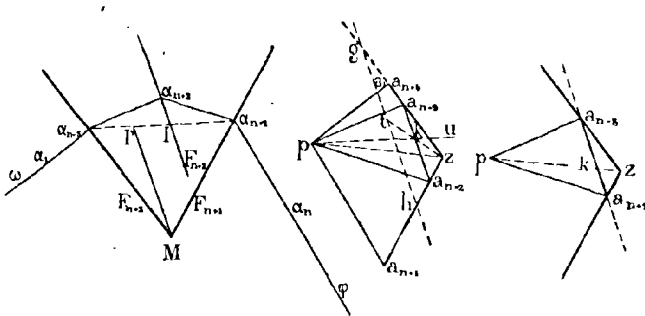


Figure 39

Figure 40

Figure 41

qu'une autre droite donnée  $pu$  la partage en deux segments  $Ka_{n+2}$ ,  $Ka_{n+3}$  dont le rapport  $\rho$  est donné (en grandeur et en signe).

Ce problème étant déterminé, on voit que les polygones  $P'$ ,  $P'$  peuvent être complètement tracés, sans imposer aux données aucune condition. Donc on peut, en général, faire équilibre aux forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$  quelles qu'elles soient, et les vecteurs des forces inconnues  $F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$  sont les segments  $a_{n+1} a_{n+2}, a_{n+2} a_{n+3}, a_{n+3} a_1$  que nous savons construire, ou plutôt dont nous avons ramené la construction à une question de géométrie fort simple que nous allons d'ailleurs examiner.

Il s'agit de trouver le point  $K$  où la droite cherchée  $L$  coupe la droite fixe  $pu$ . Or, si l'on mène  $Kz$  jusqu'à sa rencontre  $t$  avec une parallèle quelconque  $gh$  à la direction donnée de  $L$ , on aura :

$$\frac{th}{tg} = \frac{Ka_{n+2}}{Ka_{n+3}} = \rho.$$

Donc il suffit de mener dans l'angle  $Z$  une parallèle quelconque  $gh$  à la direction donnée  $F_{n+2}$ , de la partager dans le rapport donné  $\rho$ , puis de joindre le point de division  $t$  au point  $z$ ;  $tz$  coupera  $pu$  au point  $K$ , et la parallèle à  $F_{n+2}$  menée par  $K$  donnera les sommets  $a_{n+2}$  et  $a_{n+3}$ .

54. — Cependant, le problème peut être indéterminé, vu que  $tz$  et  $pu$  peuvent se confondre (fig. 41). Alors toutes les parallèles à  $F_{n+2}$  sont partagées par  $pu$  dans le même rapport, et  $a_{n+2}$  et  $a_{n+3}$  peuvent être pris arbitrairement sur  $a_1z$  et  $a_{n+1}z$ , pourvu que la droite qui les unit soit parallèle à  $F_{n+2}$ .

Quelles conditions doivent remplir les données pour que ce cas se présente ?

Faisons la figure dans l'hypothèse en question (fig. 39 et 41); soit  $M$  l'interjection de  $F_{n+1}$  et de  $F_{n+3}$ , et  $MI'$  la parallèle à  $F_{n+2}$  menée par  $M$ . Les triangles  $a_{n+2} z_{n+3}, a_{n+1} M a_{n+3}$  satisfont aux conditions du n° 9; on a donc :

$$\frac{I'a_{n+3}}{I'a_{n+2}} = \frac{Ka_{n+2}}{Ka_{n+3}} = \frac{Ia_{n+3}}{Ia_{n+1}}.$$

Donc  $I'$  coïncide avec  $I$ , et par suite la droite  $IM$  avec  $F_{n+2}$ ,

en sorte que les trois forces inconnues  $F_{n+1}$ ,  $F_{n+2}$ ,  $F_{n+3}$  doivent être concourantes.

Ainsi, en résumé : *Les vecteurs des trois forces inconnues sont déterminés, à moins que les lignes d'action données de ces trois forces ne concourent en un même point, auquel cas il y a indétermination.*

55. — Lorsque  $m$  est supérieur à 3, le problème est indéterminé ; car on rentre dans le cas précédent en se donnant arbitrairement les grandeurs de toutes les forces inconnues, sauf celles de trois d'entre elles.

### **Équilibre des corps rigides non libres ; réactions des obstacles.**

56. — Les principes qui précèdent trouvent une application immédiate dans l'équilibre des corps gênés.

Un solide qui possède des points fixes ou qui s'appuie sur des corps fixes, n'est plus libre de se mouvoir d'une manière arbitraire. On donne le nom de *réactions* des points fixes ou des appuis aux forces qui tiendraient lieu de ces obstacles en produisant les mêmes empêchements. Le solide exerce d'ailleurs, à son tour, sur les obstacles, des actions qui, égales et contraires aux précédentes, reçoivent le nom de *pressions*. Enfin on appelle *forces directement appliquées* les forces extérieures, autres que les réactions.

Le problème de l'équilibre des corps gênés se compose de deux parties :

1° *Trouver l'expression graphique des conditions que doivent remplir les forces directement appliquées au solide gêné pour qu'il y ait équilibre.*

2° *Déterminer graphiquement les réactions des points fixes ou des appuis.*

Il importe de connaître les réactions pour pouvoir donner aux corps et aux constructions qui les supportent des dimensions qui leur assurent une résistance suffisante.

Les solides que nous considérons ici seront supposés symétriques par rapport à un plan dans lequel sont situées toutes les forces directement appliquées ; de la sorte, les points du



corps situés dans le plan des forces ne sauraient sortir de ce plan. Quand il s'agit ici d'un point du corps, c'est toujours d'un point situé dans le plan des forces, et lorsque nous disons qu'un corps a un point d'appui A, nous entendons que sa section par le plan des forces s'appuie au point A sur la section faite par le même plan dans l'obstacle fixe.

**57.** — Un point fixe O peut anéantir par sa résistance tout système de forces ayant une résultante passant par ce point, et il ne peut d'ailleurs détruire que des forces remplissant ces conditions. On peut donc supposer le point fixe supprimé, à condition d'adjoindre aux forces directement appliquées au corps une force ou *réaction* convenable passant par ce point.

Lorsqu'un corps s'appuie sur un obstacle en un point A, toute force passant par ce point et pressant le corps sur l'obstacle peut être décomposée en deux, l'une normale, l'autre tangente à la surface de l'obstacle. La première est détruite par la résistance de l'appui, et la seconde a son plein effet, si comme nous le supposons, il n'y a pas de frottement. L'appui ne peut donc détruire que des forces ayant une résultante agissant suivant la normale en A, et l'on peut supposer l'appui supprimé, à condition d'adjoindre aux forces directement appliquées au corps une certaine force ou réaction agissant suivant la normale en A et dirigée de l'appui vers le corps.

Il y a donc, d'après cela, une différence essentielle entre la réaction d'un point fixe et celle d'un appui ; tandis que, pour la réaction d'un appui, on connaît la ligne d'action, pour la réaction d'un point fixe, on sait seulement qu'elle doit passer par ce point. Si donc on donne le nom de *réaction simple* à toute réaction dont la ligne d'action est donnée, on voit que la réaction d'un appui est une réaction simple, tandis que celle d'un point fixe équivaut à deux réactions simples, qui sont ses composantes suivant deux droites choisies à volonté parmi celles qui passent par le point fixe. La réaction de tout point fixe étant ainsi remplacée par ses composantes suivant deux droites assignées, le problème de l'équilibre du corps gêné se trouve immédiatement ramené au problème du n° 48 que nous avons étudié avec tous les développements

qu'il comporte. Ainsi le cas d'un appui unique rentre dans les n<sup>os</sup> 49 et 50, celui de deux appuis ou d'un point fixe se rapporte aux n<sup>os</sup> 51 et 52 ; le cas de trois appuis aux n<sup>os</sup> 53 et 54, etc., On peut donc considérer actuellement comme résolue la recherche des conditions d'équilibre d'un corps gêné et des réactions des obstacles, et il ne nous reste, pour épuiser ce sujet, qu'à ajouter quelques brèves observations.

**58.** — Et d'abord quand, dans le problème général du n<sup>o</sup> 48, les forces inconnues sont des réactions, on connaît non-seulement leurs lignes d'action (n<sup>o</sup> 57), mais encore leur sens ; la réaction doit être dirigée de l'appui vers le corps. Il faudra donc quand on aura trouvé, comme nous l'avons dit (n<sup>os</sup> 49 à 53), les vecteurs des réactions, vérifier si ces vecteurs ont le sens voulu.

**59.** — Il résulte du n<sup>o</sup> 54 que les réactions seront indéterminées :

1<sup>o</sup> Dans le cas où, le corps ayant un point fixe et un appui, la normale à l'appui passe par le point fixe.

2<sup>o</sup> Dans le cas où, le corps reposant sur trois appuis, les normales aux trois appuis concourent en un même point (ou sont parallèles)

Il est vrai que, dans la nature, les pressions exercées par les corps aux différents points de contact avec les obstacles sont nécessairement déterminées dans tous les cas ; mais il n'y a là rien de paradoxal. Nos raisonnements et par suite nos conclusions ne concernent pas les corps naturels qui sont tous plus ou moins élastiques ; ils se rapportent uniquement à des corps *rigides*, et par conséquent purement hypothétiques. Or pour ces corps fictifs, qu'on introduit dans la science à seule fin de faciliter la voie, les réactions dans les deux cas cités, sont réellement indéterminées. Ce qui serait vraiment paradoxal, ce serait qu'on pût, en général, trouver les réactions pour des corps élastiques et dilatables, sans faire intervenir les théories de la chaleur et de l'élasticité.

**60.** — Les réactions d'un corps rigide sont encore indéter-

minées lorsque le corps repose sur quatre appuis ou renferme deux points fixes, car alors le nombre des inconnues étant égal à 4 on rentre dans le cas du n° 55.

Toutefois le cas de deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$  doit nous arrêter un instant.

Soient  $H_1$  et  $V_1$  les composantes de la réaction du point  $O_1$  suivant la droite  $O_1O_2X$  et suivant la perpendiculaire élevée au point  $O_1$  sur cette droite ; soient de même  $H_2$  et  $V_2$  les composantes de la réaction du point  $O_2$  suivant  $O_1O_2X$  et suivant la perpendiculaire  $O_2Y$  ; soient enfin  $F_1F_2\dots F_n$  les autres forces directement appliquées au corps.  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont données et les inconnues sont  $H_2, H_1, V_1, V_2$  (fig. 42). Le tableau (A) devient ici

$F_1$	$F_n$	$H_2$	$H_1$	$V_1$	$V_2$
$a_1$	$a_2$	$a_n$	$a_{n+1}$	$a_{n+2}$	$a_{n+3}$
$\omega$	$\alpha_1$	$\alpha_n$	$\varphi$	$\alpha_{n+1}$	$\alpha_{n+2}$
					$\alpha_{n+3}$
					$\alpha_{n+4}$
					$\alpha_{n+5}$ (ou $a_1$ )
					$\omega \alpha_1$

Dans le polygone  $P'_v$  on connaît d'abord les sommets  $a_1\dots a_{n+1}$  et le sommet  $a_{n+5}$  qui coïncide avec  $a_1$  ; on sait de plus que  $a_{n+2}$  est sur la parallèle à  $o_1o_2$  menée par  $a_{n+1}$ , que  $a_{n+4}$  est sur la parallèle à  $o_2y$  menée par  $a_1$ , et enfin que  $a_{n+3}$  est le point commun à ces deux droites. Il n'y a donc d'inconnue que la position de  $a_{n+2}$  sur  $a_{n+1} a_{n+3}$  et celle de  $a_{n+4}$  sur  $a_{n+3} a_1$ .

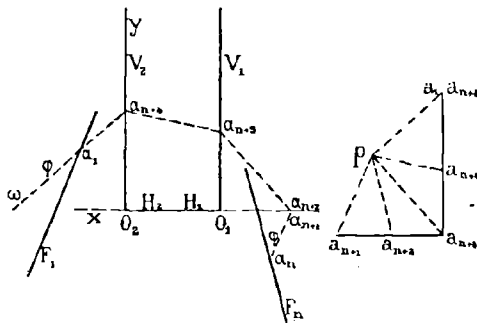


Fig. 42.

Dans le polygone  $P'_f$ , on peut avoir actuellement tous les sommets, mais  $\alpha_{n+1}$  et  $\alpha_{n+2}$  sont confondus en un même

point de  $O_1O_2X$  ; le rayon polaire  $pa_{n+4}$ , qui est parallèle à  $a_{n+3} a_{n+4}$ , est donc déterminé et par suite aussi le point  $a_{n+4}$  ; mais le rayon polaire  $pa_{n+2}$ , devant être parallèle à la droite  $a_{n+1} a_{n+2}$  qui joint deux points confondus, est indéterminé, et par suite aussi le point  $a_{n+2}$  sur  $a_{n+1} a_{n+3}$ . Donc enfin les vecteurs de  $V_1$  et  $V_2$  sont bien déterminés et égaux à  $a_{n+3} a_{n+4}$ ,  $a_{n+4} a_1$  ; quant aux vecteurs de  $H_1$  et  $H_2$  leur somme seule  $a_{n+1} a_{n+3}$  est déterminée, puisque rien ne fixe la position de  $a_{n+2}$  sur  $a_{n+1} a_{n+3}$ .

*Ainsi dans le cas de deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$ , l'indétermination des réactions ne porte pas sur les composantes perpendiculaires à  $O_1O_2$ , mais seulement sur les composantes suivant cette droite, composantes dont la somme seule est fixée.*



## CHAPITRE V

### COURBES FUNICULAIRES

---

#### **Courbes funiculaires d'un système de forces réparties.**

**61.** — Au lieu de forces finies et isolées, on a souvent à considérer des forces infiniment petites, situées dans un même plan, et se succédant d'une manière continue le long d'une ligne donnée de ce plan. Voici ce qu'il faut entendre par là :

Désignons par (A) une ligne plane rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$  (fig. 43).  $A_1$  étant un point choisi à volonté sur cette courbe, désignons par  $s$  l'*abscisse curviligne* d'un point quelconque  $A_m$  de la dite courbe, c'est-à-dire la valeur algébrique (positive ou négative) de l'arc  $A_1A_m$ . Supposons que sur chaque élément infiniment petit  $ds = A_mA_{m+1}$  de la ligne (A) s'exerce une force infiniment petite  $F$ , située dans le plan  $xoy$ , et dont les composantes parallèles à  $ox$  et à  $oy$  aient pour expression :

$$f(s) ds, \quad \varphi(s) ds,$$

$f(s)$  et  $\varphi(s)$  étant des fonctions données. Nous aurons ainsi un système (S) de forces infiniment petites et se succédant d'une manière continue le long de la courbe (A); c'est ce qu'on nomme *un système de forces réparties* ayant (A) pour directrice. Tel est par exemple le système formé par les actions de la pesanteur sur les éléments d'un fil attaché à ses deux extrémités.

**62.** — Que deviennent pour un tel système le polygone des vecteurs et les polygones funiculaires ?

Pour le voir, nous supposons d'abord que l'arc  $A_1 A_{n+1}$  soit divisé en parties linéaires, mais très petites,  $A_1 A_2, \dots, A_m A_{m+1}, \dots, A_n A_{n+1}$ , et qu'en un point de chacune de ces divisions, telle que  $A_m A_{m+1}$ , s'exerce une force  $F_m$  dont les composantes parallèles à  $ox$  et à  $oy$  aient respectivement pour expression :

$$f(A_1 A_m) A_m A_{m+1}, \quad \varphi(A_1 A_m) A_m A_{m+1}.$$

Le système des forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ainsi définies aura un polygone des vecteurs  $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  et un polygone funiculaire  $\omega a_1 \dots a_n \varphi$  qui seront bien déterminés dès qu'on se sera donné les points de départ  $a_1$  et  $\omega$  des deux polygones, ainsi que le pôle  $O$ . La question posée ci-dessus consiste à voir ce que deviennent ces deux polygones, lorsque, laissant fixes les points  $a_1, O$  et  $\omega$ , on augmente indéfiniment le nombre des divisions de la ligne (A), de telle sorte que chacune d'elles tende vers zéro.

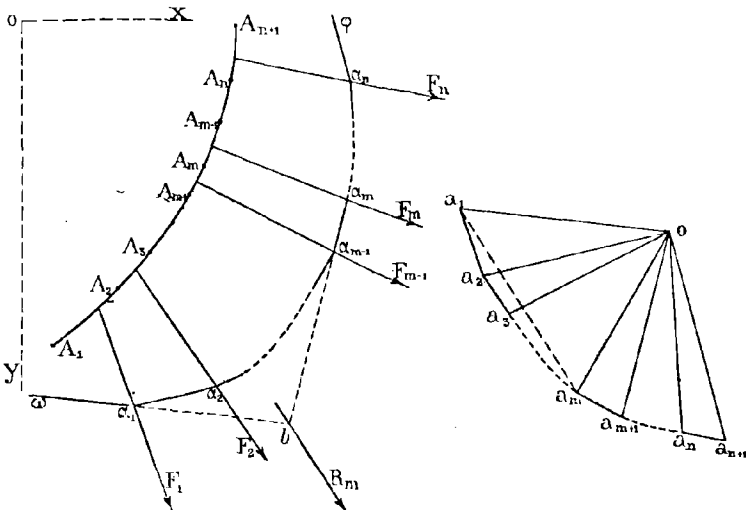


Figure 43

Considérons d'abord le polygone des vecteurs;  $a_m$  étant l'un

quelconque de ses sommets, la droite  $a_1 a_m$  est le vecteur de la résultante  $R_m$  des forces  $F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$  qui agissent sur l'arc  $A_1 A_m$ . Donc, si laissant fixe le point  $A_m$  que nous désignerons par  $M$  (fig. 44), on fait tendre vers zéro les divisions de la courbe (A), le point  $a_m$  aura pour limite l'extrémité  $m$  du vecteur  $a_1 m$  de la résultante  $\rho_s$  des forces infiniment petites qui s'exercent sur l'arc  $A_1 M = s$ . Le lieu des points  $m$  obtenus de la sorte, en faisant varier  $s$ , sera une ligne ( $\alpha$ ) bien

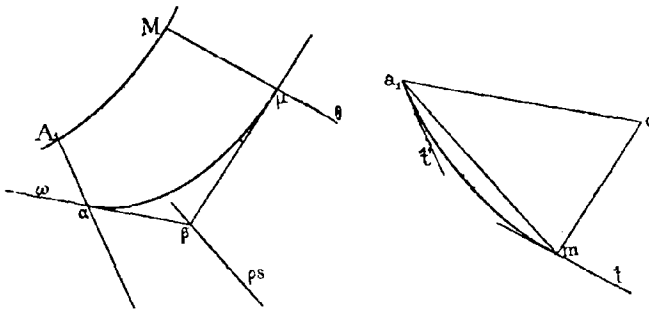


Figure 44.

déterminée vers laquelle tendra le polygone des vecteurs considéré ; nous lui donnerons le nom de *ligne des vecteurs* du système ( $s$ ) des forces réparties.

Passons au polygone funiculaire. Les côtés  $\omega a_1, a_{m-1} a_m$ , (fig. 43), qui sont respectivement parallèles aux rayons polaires  $Oa_1$  et  $Oa_m$  se croisent, comme on sait, sur la droite  $R_m$ ; le sommet  $\alpha_m$  est donc l'intersection de  $F_m$  et de la parallèle au rayon polaire  $Oa_m$  menée par le point  $b$  où  $R_m$  rencontre  $\omega a_1$ . Mais le côté  $a_{m-1} a_m$  du polygone des vecteurs ayant pour limite la tangente  $mt$  (fig. 44), la ligne d'action  $F_m$  a pour limite la parallèle  $M\theta$  menée par  $M$  à cette tangente  $mt$ . Donc, le sommet  $\alpha_m$  a pour limite le point  $\mu$  intersection de  $M\theta$  et de la parallèle  $\mu\beta$  au rayon polaire  $Om$  menée par le point  $\beta$  où  $\omega\alpha$  rencontre la résultante  $\rho_s$ . Le lieu des points  $\mu$  obtenus de la sorte, en faisant varier  $s$ , sera une ligne ( $\alpha$ ) bien déterminée vers laquelle tendra le polygone funiculaire considéré lorsque les divisions de la courbe (A) tendront vers zéro. On donne à cette ligne ( $\alpha$ ) le nom de *courbe funiculaire*

du système (s) des forces réparties; c'est, nous le répétons pour bien fixer les idées, le lieu du point  $\mu$  d'intersection de  $M\theta$  et de  $\beta\mu$ ,  $M\theta$  étant la parallèle à  $mt$  menée par l'extrémité  $M$  de l'arc  $A_1M = s$ , et  $\beta\mu$  étant la parallèle à  $Om$  menée par le point commun à  $\omega\alpha$  et à la résultante  $\rho_s$ .

**63.** — Il importe d'observer que la tangente en  $\mu$  à la courbe funiculaire ( $\alpha$ ) est la droite  $\beta\mu$ .

En effet, soit  $\mu'$  le point du lieu ( $\alpha$ ) qui répond à  $\alpha_{m+1}$ ; la tangente en  $\mu$ , c'est-à-dire la limite de  $\mu\mu'$ , lorsque, le point  $M$  restant fixe,  $M'$  tend vers  $M$  (fig. 44), sera aussi la limite de  $\alpha_m\alpha_{m+1}$ ; mais,  $\alpha_m\alpha_{m+1}$  étant constamment parallèle à  $Om$ , sa limite est parallèle à  $Om$ ; la tangente en  $\mu$  est donc la parallèle à  $Om$  menée par  $\mu$ , c'est-à-dire précisément la droite  $\beta\mu$ .

### Propriété fondamentale des courbes funiculaires.

**64.** — Voici un théorème qui facilite singulièrement le tracé des courbes funiculaires (fig. 45) :

*Si l'on décompose la directrice (A) d'un système (S) de forces réparties en portions  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$  finies et telles qu'on sache trouver les résultantes  $R_1, R_2, \dots$  des forces infiniment petites qui s'exercent sur chacune de ces parties; et, si l'on construit le polygone  $P_v$  ou  $a_1 a_2 \dots$  des vecteurs et un polygone funiculaire  $P_f$  ou  $\omega\alpha_1\alpha_2 \dots$  de ces résultantes  $R_1, R_2, \dots$ ;*

1° *La courbe des vecteurs (a) du système (s), qui a pour origine  $a_1$ , est circonscrite au polygone  $P_v$ ;*

2° *La courbe funiculaire ( $\alpha$ ) du système (s), qui part de  $\omega$  et a pour pôle le pôle  $O$  du polygone  $P_f$ , est inscrite dans ce polygone funiculaire  $P_f$ ;*

3° *Les points de contact de la courbe ( $\alpha$ ) et des côtés  $\omega\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots$  du polygone  $P_f$  sont situés respectivement sur les droites  $A_1\mu_1, A_2\mu_2, \dots$  menées par les points de division de la directrice (A) parallèlement aux tangentes de la courbe des vecteurs (a) aux points  $a_1, a_2, \dots$  de cette ligne qui sont les sommets du polygone  $P_v$ .*



Pour fixer les idées, supposons que l'on décompose l'arc de la directrice en quatre parties  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5$  (fig. 45).

Puisque les côtés  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_5$  sont les vecteurs des résultantes partielles  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , les droites  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_5$  seront les vecteurs des forces

$$R_1, \text{Res}(R_1, R_2), \text{Res}(R_1, R_2, R_3), \text{Res}(R_1, R_2, R_3, R_4)$$

c'est-à-dire des résultantes des forces infiniment petites qui s'exercent sur les arcs

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5$$

Donc, d'après la définition même de la courbe des vecteurs ( $\alpha$ ), les points  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  seront situés sur cette ligne; ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Pour prouver la seconde et la troisième parties, considérons,

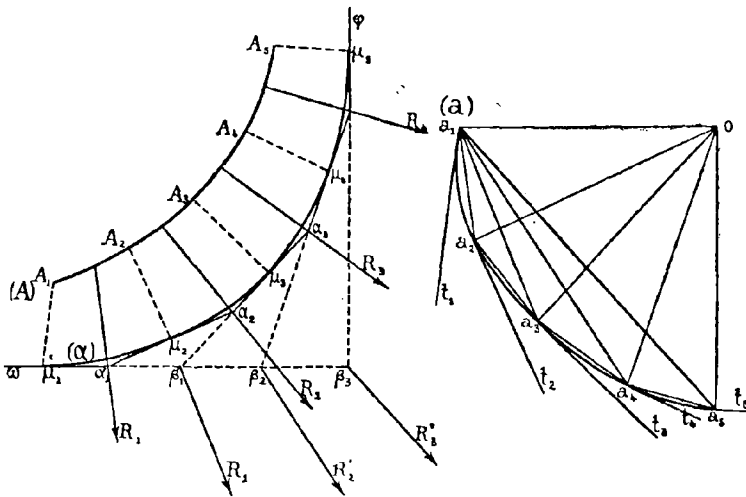


Fig. 45.

par exemple, le point  $\mu_3$  où le côté  $\alpha_2 \alpha_3$  est coupé par la parallèle  $A_3 \mu_3$  à la tangente  $a_3 t_3$ ; il faut faire voir que la courbe funiculaire ( $\alpha$ ) passe par  $\mu_3$  et y a pour tangente le côté  $\alpha_2 \alpha_3$ . Or, appelons  $\beta_1$  l'intersection de  $\omega \alpha_1$  et de  $\alpha_2 \alpha_3$ ; ce point  $\beta_1$

appartient à la résultante de  $R_1$  et de  $R_2$ , c'est-à-dire à la résultante de toutes les forces infiniment petites qui agissent sur l'arc  $A_1A_3$ . D'ailleurs  $\beta_1\alpha_2\alpha_3$  est parallèle au rayon polaire  $Oa_3$ ; donc (nos 62 et 63) le point  $\mu_3$  appartient à la ligne ( $\alpha$ ) et cette ligne a pour tangente en ce point la droite  $\alpha_2\alpha_3$ .

**65.** — Il est presque inutile de faire remarquer que toutes les propriétés des polygones funiculaires subsistent à la limite pour les courbes funiculaires; il suffit de substituer dans les énoncés aux *côtés* du polygone des vecteurs et des polygones funiculaires les *tangentes* à la courbe des vecteurs et aux courbes funiculaires.

### Cas des forces parallèles.

**66.** — Le cas usuel est celui où les forces réparties sont parallèles; pour faciliter le langage, nous les supposerons verticales, bien que ce que nous allons dire exige seulement que les forces aient une direction commune d'ailleurs quelconque.

Voici comment se pose alors le problème :

Prenons pour directrice (A) une horizontale quelconque AB du plan des forces (fig. 46).

Sur chaque élément  $MN = dx$  de la directrice AB s'exerce une force verticale et égale  $pdx$ ,  $p$  étant une fonction donnée de l'abscisse  $AM = x$  du point M.

Au point M, menons une verticale  $MM'$ , et, à partir du point  $M_1$  où cette ligne rencontre une droite fixe d'ailleurs quelconque  $A_1B_1$  du plan des forces, portons un segment  $M_1M'$  égal à  $p$ ; le lieu du point  $M'$ , extrémité de ce segment vertical, sera une ligne bien définie  $A'M'B'$  que l'on nomme *ligne des charges*. La force  $pdx$  qui agit sur l'élément MN ayant pour expression :

$$MN \cdot M_1M'$$

on voit que la charge sur cet élément est représentée par l'aire  $M_1M'N'M_1$ ; c'est une force verticale que nous supposons appliquée au centre de gravité de ce trapèze curviligne. Dès

lors, la charge sur une position finie AM de la directrice sera représentée par l'aire  $A_1A'MM_1$ , et appliquée au centre de gravité G de cette aire ; en particulier, la charge totale sera représentée par l'aire  $A_1A'B'B_1$ .

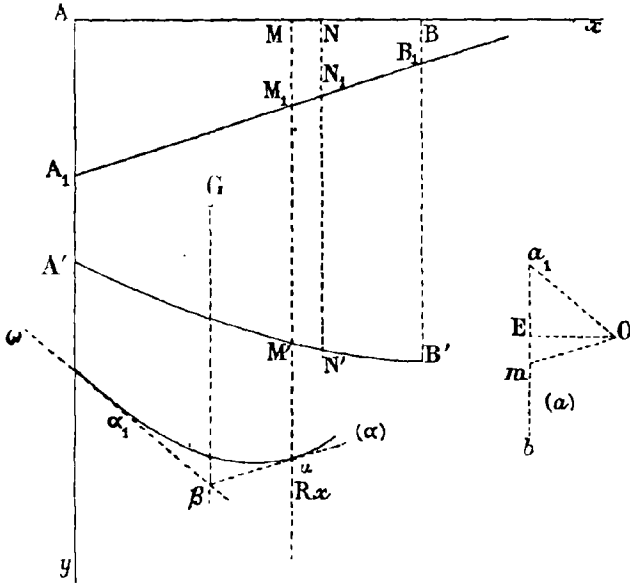


Fig. 46.

Cela posé, voyons comment on construira, d'après nos principes, la ligne des vecteurs  $(a)$  et une courbe funiculaire  $(x)$  de ce système de charges.

La ligne des vecteurs  $(a)$  est une droite verticale ;  $a_1$  étant un point pris à volonté pour origine, on aura le point  $m$  correspondant à un point quelconque M de la directrice AB, en portant sur la verticale du point  $a_1$  un segment  $a_1m$  représentant la charge sur AM, c'est-à-dire un segment contenant autant d'unités de longueur que la charge  $A_1A'MM_1$  contient d'unités d'aire.

Pour construire le point correspondant  $\mu$  de la courbe funiculaire  $(x)$ , on commencera par prendre arbitrairement un pôle O et une parallèle quelconque  $\omega\alpha_1$  au rayon polaire  $O\alpha_1$ . La résultante  $R_x$  des forces agissant sur  $AM = x$  sera égale à

$\alpha_1 m$  et dirigée suivant la verticale du centre de gravité de l'aire  $A_1 A' M' M_1$  ;  $\beta$  étant l'intersection des droites  $R_x$  et  $\omega \alpha_1$ , on mènera  $\beta \mu$  parallèle à  $Om$  jusqu'à sa rencontre  $\mu$  avec la verticale  $MM'$ , qui représente ici la parallèle à la tangente en  $m$  à la ligne des vecteurs. D'ailleurs, la tangente en  $\mu$  à la ligne ( $\alpha$ ) sera la droite  $\beta \mu$ .

**67.** — Le tracé qui précède est celui qui résulte immédiatement de la définition de la courbe funiculaire (n<sup>os</sup> 62 et 63). Mais le théorème du numéro 64 fournit un procédé plus commode au point de vue graphique. Voici en quoi il consiste (fig. 47) :

On divisera  $AB$  en plusieurs parties égales ou inégales, par exemple en quatre. Les ordonnées  $11'$ ,  $22'$ ,  $33'$  des points de

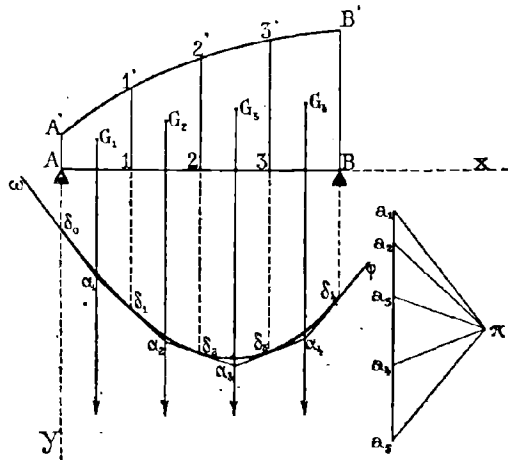


Fig. 47.

division 1, 2, 3, diviseront la surface des charges  $AA'B'B$  en quatre parties dont on déterminera les aires  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ , ainsi que les centres de gravité  $G_1, G_2, G_3, G_4$ . Dans la figure 47, nous avons pris pour base de la surface des charges non plus une droite quelconque  $A_1 B_1$  comme dans la fig. 46, mais la droite  $AB$  elle-même, et nous avons placé la surface des charges au-dessus de  $AB$  et non au-dessous. Cette disposition, d'ailleurs fort usuelle, n'influe en rien sur la généralité de la construc-

tion. On portera sur une verticale des segments successifs  $a^1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5$  mesurés par les mêmes nombres que les aires partielles  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ ;  $a_1a_5$  sera le polygone des vecteurs ( $a$ ).

Après avoir choisi un pôle  $\pi$  à volonté, on construira un polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi$  des forces qui ont respectivement pour vecteurs  $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5$  et pour lignes d'action les verticales des points  $G_1, G_2, G_3, G_4$ . On prolongera les verticales *séparatrices*  $AA', 11', 22', 33', BB'$  de la surface des charges jusqu'à leurs rencontres  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  avec les côtés  $\omega\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4, \alpha_4\varphi$ , du polygone funiculaire. Enfin on tracera une courbe touchant ces côtés aux points  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; cette courbe sera la réalisation d'autant plus exacte d'une courbe funiculaire qu'on aura divisé la directrice  $AB$  en un plus grand nombre de parties.

En faisant varier la position du pôle  $\pi$  et celle du point  $\delta_0$  où le premier côté  $\omega\alpha_1$  rencontre la verticale  $AA'$ , on peut obtenir de la sorte, pour une même surface des charges et pour un même mode de division de cette surface, une infinité de polygones funiculaires auxiliaires  $\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\varphi$ , et par suite une infinité de courbes funiculaires  $\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ .

Un problème usuel consiste à tracer celle de ces courbes qui répond à une distance polaire donnée  $\delta$  et qui coupe respectivement la verticale  $AA'$  et  $BB'$  en deux points donnés  $\delta_0$  et  $\delta_4$ . On construira d'après le procédé du n° 30, le polygone funiculaire qui remplit les trois conditions prescrites; la courbe demandée touchera les côtés de ce polygone aux points où ils sont rencontrés par les verticales séparatrices  $AA', 11', 22', 33', BB'$ .

On peut aussi, au lieu d'employer la théorie des figures homologues, appliquer au cas particulier qui nous occupe la solution générale du n° 29. Voici à quoi elle se réduit ici: après avoir tracé un polygone funiculaire d'essai, à l'aide d'un pôle placé à la distance donnée, on mènera par ce pôle la parallèle à la droite qui joint les points où le premier et le dernier côté du polygone d'essai rencontrent  $AA'$  et  $BB'$ ; par le point où cette parallèle rencontre  $a_1a_5$  on mènera la parallèle à la ligne qui joint les deux points donnés  $\delta_0, \delta_4$ , et enfin on

placera le pôle, sur cette parallèle, à la distance voulue de  $a_1 a_0$ .

Il n'y a plus rien à ajouter sur les courbes funiculaires au point de vue graphique ; mais il n'en est pas de même au point de vue analytique. Il est, en effet, indispensable de connaître l'équation des lignes funiculaires d'un système de forces parallèles réparties.

### Équation de la courbe funiculaire.

68. — Reportons-nous à la figure 46 ; prenons pour axe des  $x$  la directrice AB et pour axe des  $y$  la verticale du point A, le sens positif des abscisses étant d'ailleurs de gauche à droite, et le sens positif des ordonnées de haut en bas, conformément à nos conventions.

Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées courantes, c'est-à-dire celles d'un point quelconque  $\mu$  de la ligne funiculaire ( $\alpha$ ) ; on donne la fonction qui exprime le coefficient de charge  $p$ . Il est commode, et d'ailleurs toujours permis, de représenter cette fonction  $p$  par la dérivée seconde  $f''(x)$  d'une fonction qui s'annule, ainsi que sa dérivée première, pour  $x = 0$  ; de la sorte, la charge sur la partie  $AM = x$ , c'est-à-dire l'aire  $A_1 A' M' M_1$ , aura pour expression  $f'(x)$ .

Cela posé, désignons par  $\delta$  la distance polaire considérée en grandeur et en signe, c'est-à-dire le segment EO qui a pour extrémité le pôle et pour origine la projection E de ce pôle sur la ligne des vecteurs  $a_1 b$  ; la différence des abscisses des points O et  $m$  est  $\delta$ . Quant à la différence des ordonnées des mêmes points, elle est égale à

$$q - a_1 m \quad \text{ou} \quad q - f'(x)$$

$q$  désignant la différence  $a_1 E$  entre l'ordonnée de O et celle de  $a_1$ . Le coefficient angulaire de la droite Om est donc :

$$\frac{q - f'(x)}{\delta}$$

et, puisque la tangente  $\beta\mu$  à la ligne funiculaire  $(\alpha)$  au point  $\mu$  est parallèle à  $Om$ , l'équation différentielle de la ligne  $(\alpha)$  sera

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q - f'(x)}{\delta}.$$

On en déduit, par intégration, l'équation en termes finis :

$$(2) \quad y - y_0 = \frac{1}{\delta} [qx - f(x)].$$

où  $y_0$  représente l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point où la ligne funiculaire rencontre la verticale du point  $A$ . On voit que cette équation renferme, comme cela devait être, trois constantes arbitraires :

$$y_0, \delta, q$$

dont la signification géométrique est bien définie. On pourra disposer de ces constantes de manière à faire passer la courbe par trois points donnés.

**69.** — Au lieu de passer de l'équation (1) à l'équation en termes finis, on peut, par différentiation, en déduire l'équation différentielle du second ordre :

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{\delta}.$$

qui nous sera utile plus tard.

**70.** — Un cas particulièrement intéressant est celui où la charge est *uniforme*, c'est-à-dire où le coefficient  $p$ , au lieu d'être une fonction de  $x$ , est une constante.

La ligne des charges  $A'B'$  est alors une droite parallèle à la base  $A_1B_1$ .

Dans ce cas, on a  $f'(x) = px$  et par suite l'équation (2) devient :

$$(4) \quad y = y_0 + \frac{1}{\delta} \left( qx - \frac{1}{2} px^2 \right).$$

C'est une parabole dont les diamètres sont verticaux.

L'ordonnée du point  $\alpha$  où la courbe coupe la verticale du point A est  $y_0$  ; en désignant la longueur de AB par  $l$ , et faisant successivement  $x = l$  et  $x = \frac{l}{2}$ , on aura les ordonnées des points  $\beta$  et  $\gamma$  où la courbe rencontre la verticale du point B et celle du milieu de AB, c'est-à-dire le diamètre des cordes parallèles à  $\alpha\beta$ . Le problème sera donc ramené à *construire un arc de parabole  $\alpha\gamma\beta$ , connaissant deux points quelconques  $\alpha$  et  $\beta$  de la courbe et le point  $\gamma$  où cette ligne rencontre le diamètre conjugué de la corde  $\alpha\beta$*  (fig. 48).

Le moyen le plus simple d'obtenir autant de points qu'on voudra ainsi que les tangentes en ces points est fondé sur cette propriété bien connue de la parabole : *Le milieu de la*

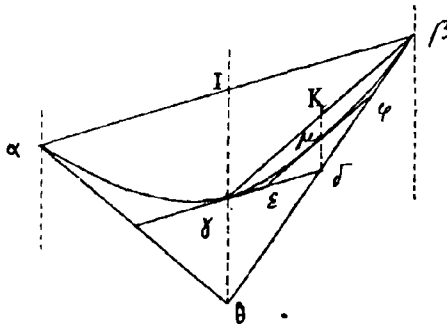


Figure 48

*parallèle à l'axe compris entre le point de concours de deux tangentes et la corde de contact est un point de la courbe, et la tangente en ce point est parallèle à la corde de contact.*

D'après cela, en prolongeant  $I\gamma$  d'une longueur  $\gamma\theta$  égale à elle-même, on aura les tangentes  $\theta\alpha$  et  $\theta\beta$  aux points  $\alpha$  et  $\beta$ , et la tangente en  $\gamma$  sera la parallèle  $\gamma\delta$  à la corde  $\alpha\beta$ . Puis, si par  $\delta$  on mène la parallèle à l'axe jusqu'à sa rencontre  $K$  avec  $\gamma\beta$ , le milieu  $\mu$  de  $\delta K$  sera un nouveau point de la parabole et la tangente en ce point sera la parallèle  $\epsilon\phi$  à la corde  $\gamma\beta$ . On continuera, en opérant aux points  $\epsilon$  et  $\phi$  comme on l'a fait au point  $\delta$  ; et ainsi de suite.



Un autre procédé également très recommandable consiste dans l'emploi d'un polygone funiculaire, comme nous l'avons expliqué au n° 67. Du reste, en y regardant de près, on voit que ces deux procédés ne diffèrent guère qu'en apparence ; on fait successivement dans le premier ce qu'on fait simultanément dans le second.

Comme cette parabole funiculaire relative à une charge uniforme intervient souvent en statique graphique, nous allons encore indiquer le moyen de déduire des données

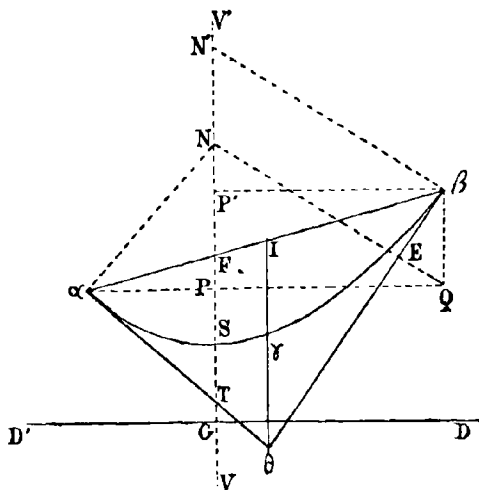


Figure 49

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les éléments fondamentaux (axe, paramètre, sommet, foyer, directrice, etc.) de cette parabole (fig. 49).

Soit  $VV$  l'axe inconnu,  $\alpha N$  et  $\beta N'$  les normales en  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $P$  et  $P'$  les projections de  $\alpha$  et de  $\beta$  sur l'axe, enfin  $Q$  la projection de  $\beta$  sur  $\alpha P$ . On aura, puisque la sous-normale est constante,  $PP' = NN'$  et par suite  $Q\beta = NN'$  ; la figure  $NN'\beta Q$  sera donc un parallélogramme ; par suite  $QN$  est parallèle à  $\beta N'$ , c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente  $\theta\beta$ . De là cette règle : après avoir pris  $\gamma\theta = I\gamma$ , et tiré les tangentes  $\theta\alpha$  et  $\theta\beta$ , menez en  $\alpha$  la normale et la perpendiculaire à la direction de l'axe ; projetez  $\beta$  sur cette perpendiculaire, et du point  $Q$  ainsi obtenu

abaissez le perpendiculaire sur  $\theta\beta$  ; le point N où cette perpendiculaire rencontre la normale en  $\alpha$  est un point de l'axe. Cet axe sera donc la parallèle à  $I\gamma$  menée par N, et la sous-normale PN donnera la valeur du paramètre. D'ailleurs, T étant le point où l'axe coupe la tangente  $\alpha\theta$ , TP sera la sous-tangente, et comme dans la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse, le milieu S de TP sera le sommet. Enfin, en prenant sur l'axe, de part et d'autre de S, des longueurs SF et SG égales à  $\frac{1}{2}$  PN, on aura le foyer F et le pied G de la directrice DD'.

On pourrait résoudre la question de bien d'autres manières ; mais le procédé que nous venons de proposer a l'avantage d'être à la fois simple et complet.

**71.** — Revenons au cas général des forces parallèles.

Il est commode dans la pratique de faire figurer dans l'équation (2), au lieu de la constante  $q$ , l'ordonnée de la courbe funiculaire qui répond à l'extrémité B de la directrice. En désignant cette ordonnée par  $y_1$  et l'abscisse correspondante AB par  $l$ , on a

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{\delta} [ql - f(l)] ;$$

et l'élimination de  $q$  entre cette relation et l'équation (2) donne

$$(5) \quad y = \left[ y_0 + \frac{y_1 - y_0}{l} x \right] + \frac{x}{\delta} [\varphi(l) - \varphi(x)]$$

en posant

$$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x).$$

Or, la première parenthèse dans l'équation (5), représente l'ordonnée de la *ligne de clôture*, c'est-à-dire de la droite qui joint les points où la courbe funiculaire rencontre les verticales des points A et B. Si donc on compte les ordonnées de la ligne funiculaire à partir de la ligne de clôture, on a, pour l'expression de cette ordonnée,

$$(6) \quad Y = \frac{x}{\delta} [\varphi(l) - \varphi(x)].$$

Dans le cas d'une charge uniforme, en a

$$f''(x) = p = \text{constante},$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} px,$$

et la formule (6) se réduit à

$$(7) \quad Y = \frac{p}{2\delta} x(l-x).$$

L'expression

$$x(l-x),$$

étant le produit de deux facteurs positifs dont la somme est constante, devient maximum, d'après un théorème bien connu, lorsque les deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire pour  $x = \frac{l}{2}$ . L'ordonnée maximum de la parabole, comptée à partir de la ligne de clôture, est donc située sur la verticale du milieu de AB, et a pour expression

$$(8) \quad \frac{pl^2}{8\delta}.$$

Un autre cas intéressant est celui où la charge, au lieu d'être uniforme, a pour coefficient

$$(9) \quad f''(x) = \frac{1}{K^2} x(l-x)$$

K étant une constante.

On a alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{12K^2} x^2(2l-x),$$

et la formule (6) devient

$$Y = \frac{1}{12\delta K^2} x(x^2 + l^2 - 2lx^2),$$

ou, en posant

$$x = X + \frac{1}{2}l,$$

c'est-à-dire en comptant les abscisses à partir du milieu de AB,

$$(10) \quad Y = \frac{1}{12 \cdot \partial K^2} \left( \frac{l^2}{4} - X^2 \right) \left( 5 \frac{l^2}{4} - X^2 \right)$$

Un coup d'œil jeté sur le second membre montre que lorsque  $X$  varie de  $-\frac{1}{2}l$  à  $+\frac{1}{2}l$ ,  $Y$  devient maximum pour  $X=0$ . Donc, l'ordonnée maximum de la ligne funiculaire répond au milieu de la directrice AB et a pour expression

$$(11) \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} \cdot \frac{l^4}{\partial K^2}.$$


---

## CHAPITRE VI

# LA LIGNE ÉLASTIQUE

### Définitions et hypothèses.

72. — On donne, en général, le nom de *poutre droite* à tout corps prismatique dont les dimensions transversales sont très petites par rapport à sa longueur.

Nous supposerons, en outre, que ce prisme ait un plan de symétrie parallèle à ses arêtes.

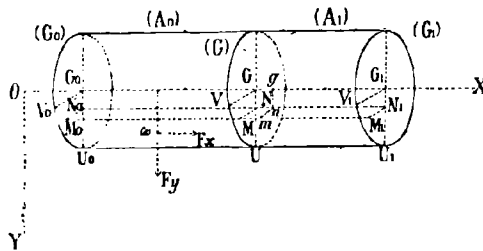


Fig. 30.

Ainsi, soient  $OX$  et  $OY$  deux axes rectangulaires,  $G_0$  et  $G_1$  deux points pris sur  $OX$ , et  $(G)$  une aire plane ayant un axe de symétrie  $GU$  et dont les dimensions sont très petites par rapport à la longueur  $G_0 G_1$ ; la poutre considérée sera le corps engendré par l'aire  $(G)$  se mouvant de telle sorte que son centre de gravité  $G$  décrive la droite  $G_0 G_1$ , que son plan reste normal à cette droite et que son axe de symétrie reste parallèle à  $OY$  (fig. 30).

La droite  $G_0 G G_1$  prend le nom de  *fibre moyenne*  et l'on donne en général le nom de fibre à la ligne matérielle  $M_0 M M_1$ , parallèle à  $OX$ , qu'engendre, dans le mouvement de l'aire  $(G)$ , un point quelconque  $M$  de cette surface ou plutôt un élément infiniment petit  $\sigma$  de cette aire décrit autour du point  $M$ . La position du point  $M$  dans le plan de la section  $(G)$  sera d'ailleurs définie par les coordonnées  $GN = u$ ,  $NM = v$ , par rapport à l'axe de symétrie  $GU$  et à la perpendiculaire  $GV$  au plan de symétrie  $XOY$ .

Si des forces,  *situées dans le plan XOY*  et n'excédant pas certaines limites, viennent à exercer leur action sur la poutre, ce corps subira une légère déformation; mais, à cause de la symétrie, la fibre moyenne ne sortira pas du plan  $XOY$ ; et l'on admet que, dans le passage de l'état primitif de la poutre à son état final,  *toute section transversale, c'est-à-dire toute section dont le plan était primitivement normal à la fibre moyenne, se déplace comme si elle était rigide et reste normale à la fibre moyenne déformée qui contient encore son centre de gravité.*

### **Raccourcissement relatif d'une fibre.**

**73.** — De cette hypothèse, que l'expérience confirme, résulte immédiatement une expression remarquable du raccourcissement relatif d'un élément de fibre quelconque. Nous attribuons d'ailleurs ici au mot raccourcissement, non son sens absolu, mais le sens de variation de longueur, en sorte qu'un raccourcissement négatif représente un véritable allongement.

Soient  $g, m, n$  les points où la section transversale  $(g)$  infiniment voisine de  $(G)$  rencontre respectivement, dans l'état naturel, la fibre moyenne  $G_0 G G_1$ , la fibre quelconque  $M_0 M M_1$ , et la projection  $N_0 N N_1$  de cette dernière sur le plan de symétrie (fig. 50).

Désignons par  $dX$  la valeur commune des trois éléments  $Gg, Mm, Nn$ , et convenons de représenter (fig. 51) la position qu'a prise, après la déformation, un point quelconque de la poutre, par la lettre même qui désignait la position primitive

de ce point, en affectant cette lettre d'un accent ; on aura dès lors en appelant  $\lambda$  et  $\lambda_u$  les raccourcissements *relatifs* des élé-

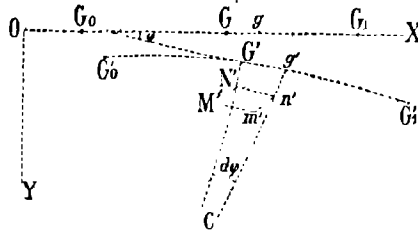


Fig. 51.

ments  $Gg$  et  $Mm$  de la fibre moyenne et de la fibre quelconque

$$\lambda = \frac{dX - G'g'}{dX} \quad \lambda_u = \frac{dX - M'm'}{dX}$$

d'où, en retranchant,

$$\lambda_u - \lambda = \frac{G'g' - M'm'}{dX}$$

Appelons  $C$  le point de rencontre de  $G'N'$  et de  $g'n'$ , et désignons par  $\varphi$  et  $\varphi + d\varphi$  les angles que font avec  $OX$  les tangentes en  $G'$  et  $g'$  à la fibre moyenne déformée. En vertu des hypothèses admises sur le mode de déformation, les droites  $G'N'$ ,  $g'n'$  seront normales à  $G_0G_1$  et égales à  $u$ , tandis que  $N'M'$  et  $n'm'$  seront perpendiculaires au plan  $XOY$  et égales à  $v$ . On a donc :

$$M'm' = N'n' = N'C \cdot d\varphi \quad , \quad G'g' = G'C \cdot d\varphi$$

d'où :

$$G'g' - M'm' = CN' d\varphi = u d\varphi$$

et par suite :

$$(1) \quad \lambda_u = \lambda + u \frac{d\varphi}{dX}.$$

C'est la formule que nous avons en vue et qui permet de trouver le raccourcissement relatif d'un élément de fibre quelconque lorsqu'on connaît la déformation de la fibre moyenne.

**74.** — Il convient de rapprocher de cette expression la formule expérimentale qui lie le raccourcissement relatif à l'intensité de la force capable de le produire.

L'expérience prouve que la pression (ou la tension) capable de produire le raccourcissement relatif  $\lambda_u$  d'une tige est proportionnelle à ce raccourcissement et à la section  $\sigma$  de la tige. Si donc on désigne par  $R$  cette pression (ou cette tension) rapportée à l'unité de surface, on a :

$$R\sigma = E \sigma \lambda_u$$

ou

$$(2) \quad R = E \lambda_u$$

$E$  étant un nombre qui dépend de la nature de la matière et qu'on nomme *coefficient d'élasticité*.

**75.** — Nous avons supposé jusqu'ici que la poutre considérée était de section constante. Mais les considérations qui précèdent, comme celles qui vont suivre, sont encore valables pour une poutre droite de section variable, c'est-à-dire pour une poutre dont l'aire génératrice ( $G$ ) varierait de forme et de grandeur, pourvu toutefois qu'en passant d'une position quelconque ( $G$ ) à la position infiniment voisine ( $g$ ) ces variations soient infiniment petites par rapport à l'arc correspondant  $Gg$  de la fibre moyenne. La matière dont la poutre est formée pourra même varier ; nous supposons toujours cependant que chaque section transversale est homogène, en sorte que le coefficient d'élasticité  $E$  pourra changer d'une section à l'autre, mais restera le même dans toute l'étendue d'une même section.

### **Compression ; effort tranchant ; moment fléchissant.**

**76.** — Avant de chercher à déterminer la forme que prendra la poutre sous l'action des forces qui lui sont appliquées, il importe d'opérer dans ce système de forces, une réduction que nous allons indiquer.



Le plan UGV d'une section transversale quelconque (G) divise la poutre en deux tronçons ( $A_0$ ) et ( $A_1$ ). Désignons par  $F, F', F'' \dots$  les forces extérieures (charges ou réactions d'appuis) qui agissent sur le tronçon de gauche ( $A_0$ ) et qui, il ne faut pas l'oublier, sont supposées toutes contenues dans le plan de symétrie XOY (fig. 50).

Ces forces peuvent être réduites à une force unique  $f$  appliquée en G et à un couple  $k$  situé comme  $f$  dans le plan XOY. La force  $f$  peut à son tour être décomposée en deux, l'une N suivant GX et l'autre T suivant GU.

La force N tend, suivant son sens, à raccourcir ou à allonger la fibre moyenne; nous lui donnerons le nom de *compression totale* au point G.

La force T tend à rompre la pièce, à la cisailer normalement aux fibres; on lui donne le nom d'*effort tranchant* dans la section (G).

Enfin le couple  $k$  tend à fléchir la pièce parallèlement au plan XOY; on donne au moment M de ce couple le nom de *moment fléchissant* relatif à la section (G).

Ainsi, compression (ou tension), cisaillement et flexion, tels sont les trois genres d'efforts auxquels la pièce est appelée à résister. Il y aurait, en outre, à considérer la torsion si les forces  $F, F', F'' \dots$  n'étaient pas situées dans le plan XOY ou du moins n'étaient pas réductibles à des forces contenues dans ce plan.

77. — Ces trois quantités N, T, M qui varient d'ailleurs avec la position de la section considérée (G), sont connues dès qu'on donne les forces extérieures  $F, F', F'' \dots$ . Il est évident, en effet, d'après les définitions du numéro précédent :

1° Que la compression N est égale à la somme des projections des forces  $F, F', F'' \dots$  sur GX;

2° Que l'effort tranchant T est égal à la somme des projections des forces  $F, F', F'' \dots$  sur GU;

3° Que le moment fléchissant M est égal à la somme des moments des forces  $F, F', F'' \dots$  par rapport au point G de la fibre moyenne.

### Formules fondamentales.

78. — Nous nous bornerons au cas, qui se présente ordinairement dans la pratique, où les forces  $F, F', F'' \dots$  sont normales à la fibre moyenne  $OX$ ; et, pour simplifier le langage, nous dirons qu'il s'agit d'une poutre horizontale soumise à des forces extérieures (charges ou réactions) verticales.

Alors la composante  $N$  disparaît et il ne reste plus que l'effort tranchant  $T$  et le moment fléchissant  $M$ .

Dans la position définitive de la poutre, il y a équilibre entre les forces extérieures qui agissent sur le tronçon  $(A_0)$  et les forces moléculaires qui constituent l'action de la partie  $(A_1)$  sur la partie  $(A_0)$ . Mais, au lieu de raisonner sur l'état final, on peut sans erreur sensible, à cause de la petitesse des déformations, raisonner sur l'état primitif. La force moléculaire qui, provenant de  $(A_1)$ , agit sur l'aire élémentaire  $\sigma$  peut être décomposée en trois autres  $R_\sigma, R_1\sigma, R_2\sigma$  respectivement parallèles à  $GX, GU$  et  $GV$ . Les composantes, telles que  $R_2\sigma$ , parallèles à  $GV$ , se détruisent deux à deux à cause de la symétrie par rapport au plan  $XOY$ , puisque la section transversale est considérée comme rigide. Les composantes, telles que  $R_1\sigma$ , parallèles à  $GU$ , doivent équilibrer l'effort tranchant  $T$ , et il ne reste, pour faire équilibre au couple  $k$ , que les composantes, telles que  $R_\sigma$ , parallèles à  $GX$ . La somme des projections de ces composantes sur  $OX$  doit donc être nulle, et la somme de leurs moments par rapport à l'axe  $GV$  doit être égale à  $-M$ ; en d'autres termes on a :

$$(3) \quad \Sigma R_\sigma = 0,$$

et

$$(4) \quad -M = \Sigma R_\sigma u,$$

le signe  $\Sigma$  s'étendant à toutes les aires élémentaires dans lesquelles les diverses fibres décomposent l'aire totale  $S$  de la section transversale considérée ( $G$ ).

Si l'on a égard aux formules (1) et (2) et si l'on fait sortir du

signe  $\Sigma$  les quantités  $\lambda, E, \frac{d\varphi}{dX}$  qui ne varient pas pour une même section, la relation (3) devient :

$$\lambda \Sigma \sigma + \frac{d\varphi}{dX} \cdot \Sigma u \sigma = 0.$$

Mais, d'après une propriété bien connue, la somme  $\Sigma u \sigma$  est nulle puisque GV passe par le centre de gravité de la section ; d'ailleurs  $\Sigma \sigma = S$  ; la relation précédente se réduit donc à  $\lambda = 0$ .

La fibre moyenne est donc ici une fibre *neutre*, c'est-à-dire une fibre qui pendant la déformation ne s'allonge ni ne se raccourcit <sup>1</sup>.

La relation (1) se réduit donc à

$$\lambda_u = u \frac{d\varphi}{dX}$$

et par suite (4) devient

$$-M = E \frac{d\varphi}{dX} \Sigma u^2 \sigma ;$$

et, comme  $\Sigma u^2 \sigma$  représente le moment d'inertie I de la section par rapport à la perpendiculaire menée sur l'axe de symétrie par le centre de gravité, on a :

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dX} = -\frac{M}{EI}$$

et par suite :

$$(6) \quad \lambda_u = -\frac{Mu}{EI} \quad , \quad R = -\frac{Mu}{I} \quad (7)$$

La formule (7) prend le nom d'*équation d'équarrissage* ; nous indiquerons dans un moment à quels usages elle se prête.

La formule (6) donne le raccourcissement relatif d'un élément de fibre quelconque. Enfin la relation (5) n'est au fond,

1. Nous disons *ici*, parce que, dans le cas général où les forces extérieures ne sont pas normales à la poutre, c'est-à-dire où N n'est pas nul, le second membre de la relation (3) est N au lieu de zéro ; et alors  $\lambda$  n'est plus nul ; en d'autres termes, la fibre moyenne n'est pas une fibre neutre.

comme nous allons l'expliquer immédiatement, que l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée.

Il n'est peut-être pas inutile de mettre en évidence l'homogénéité des formules que nous venons d'obtenir, par exemple de la formule (5). Le premier membre  $\frac{d\varphi}{dx}$  est l'inverse d'une longueur, et il suffit de montrer qu'il en est de même du second membre. Or,  $M$  est le produit d'une force par une longueur,  $E$  est une force rapportée à l'unité de surface, c'est-à-dire le rapport d'une force au carré d'une longueur; enfin  $I$  est un produit de quatre dimensions linéaires. Si donc on pose :

$$M = fl, \quad E = \frac{f'}{l'^2}, \quad I = l''^4$$

$f$  et  $f'$  désignant des forces et  $l, l', l''$  des longueurs, le second membre de la relation (5) devient :

$$\left(\frac{f}{f'}\right) \left(\frac{l}{l'}\right) \left(\frac{l''}{l''}\right)^4 \cdot \frac{1}{l''}$$

c'est-à-dire le produit de rapports numériques par l'inverse d'une longueur.

### La ligne élastique.

79. — On donne habituellement le nom de ligne élastique à la fibre moyenne déformée.

L'angle  $\varphi$  que sa tangente forme avec  $OX$ , étant toujours très petit, peut être remplacé par sa tangente trigonométrique c'est-à-dire par  $\frac{dY}{dX}$ ; l'équation (5) devient ainsi :

$$(8) \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{M}{EI}$$

C'est une équation différentielle du second ordre; comme son intégration introduit deux constantes arbitraires, on voit qu'elle détermine la ligne élastique dès qu'on connaît deux points de cette ligne ou un point et la tangente en ce point.

**80.** — En statique graphique, on remplace cette intégration par une construction géométrique. Nous allons montrer, en effet, à l'aide de l'équation (7), que la ligne élastique n'est autre qu'une ligne funiculaire d'un certain système de charges fictives.

Désignons par  $\varepsilon$  la ligne élastique de la poutre considérée et par P et Q deux points pris à volonté sur cette ligne  $\varepsilon$ . Imaginons qu'à chaque élément  $dX$  de la fibre moyenne  $G_0 G_1$  on applique une charge fictive  $p dX$  égale à

$$\frac{M dX}{\left(\frac{EI}{\Delta}\right)}$$

$\Delta$  étant un nombre choisi arbitrairement ; puis, qu'avec une distance polaire égale à  $\Delta$ , on construise celle des courbes funiculaire de ce système de charges qui passe par les points P et Q. Cette courbe funiculaire, qui est ainsi bien déterminée, aura (n° 69) pour équation différentielle

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = - \frac{p}{\Delta} = - \frac{M}{EI}$$

c'est-à-dire (n° 79) l'équation différentielle (8) de la ligne élastique  $\varepsilon$ . Mais deux courbes planes coïncident dès qu'elles ont deux points communs et la même équation différentielle du second ordre. Donc la ligne funiculaire considérée ne diffère pas de l'élastique  $\varepsilon$ . De là ce théorème fondamental :

*La ligne élastique est une courbe funiculaire, construite avec une distance polaire quelconque  $\Delta$ , pour un système de charges fictives égales à*

$$\frac{M dX}{\left(\frac{EI}{\Delta}\right)},$$

*et appliquées aux divers éléments  $dX$  de la fibre moyenne de la poutre.*

**81.** — L'énoncé qui précède convient à tous les cas. La poutre peut (n° 75) être de section constante ou variable ; elle

peut être homogène ou hétérogène, pourvu que la densité reste la même dans l'étendue d'une même section.

Si la poutre est homogène, sa section étant constante ou variable,  $E$  est constant ; on peut donc prendre pour distance polaire

$$\Delta = E$$

et la charge fictive sur chaque élément  $dX$  devient alors

$$\frac{MdX}{\mathbf{I}}$$

Si la poutre est à la fois homogène et de section constante,  $E$  et  $I$  ne varient point ; on peut prendre alors pour distance polaire

$$\Delta = EI$$

et la charge fictive sur chaque élément  $dX$  se réduit à

$$MdX$$

82. — Dans la pratique, comme on ne peut pas exécuter l'épure en vraie grandeur, on est obligé de diminuer les abscisses dans un rapport donné  $\frac{1}{\lambda}$ . D'autre part, comme les déformations de la fibre moyenne sont toujours très faibles, il importe, pour les rendre plus sensibles, d'amplifier dans un même rapport  $q$  les ordonnées de la ligne élastique  $\varepsilon$ . On est donc conduit à construire, au lieu de cette ligne élastique  $\varepsilon$ , une ligne  $\varepsilon_1$  telle que les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  de l'un quelconque de ses points soient liées aux coordonnées  $x$  et  $y$  du point correspondant de  $\varepsilon$  par les formules

$$(9) \quad X_1 = \frac{x}{\lambda} \quad Y_1 = q Y$$

nous donnerons à cette ligne  $\varepsilon_1$  le nom de ligne *homographique* de la ligne élastique  $\varepsilon$ .

Son équation différentielle résulte immédiatement des formules (8) et (9); on a, en effet, d'après les relations (9),

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{d\left(\frac{dY}{dX}\right)}{dX} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda} \frac{dY_1}{dX_1}\right)}{\lambda dX_1} = \frac{1}{\lambda^2 q} \frac{d\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)}{dX_1} = \frac{1}{\lambda^2 q} \frac{d^2 Y_1}{dX_1^2};$$

et, par suite, en vertu de l'équation (8),

$$(10) \quad \frac{d^2 Y_1}{dX_1^2} = -\lambda^2 q \frac{M}{EI}.$$

On voit par là, en raisonnant comme au n° 80, que *la ligne homographique  $\varepsilon_1$  de la ligne élastique  $\varepsilon$  est une courbe funiculaire construite avec une distance polaire quelconque  $\Delta$ , pour un système de charges fictives dont le coefficient est*

$$\frac{\lambda^2 q M}{\left(\frac{EI}{\Delta}\right)}$$

Dans le cas usuel où la poutre est homogène et de section constante, E et I sont invariables ; on peut alors prendre pour distance polaire

$$\Delta = \frac{EI}{\lambda q h}$$

$h$  étant un nombre arbitraire, et pour coefficient de charge fictive

$$\frac{\lambda M}{h}.$$

### Équation d'équarrissage.

**83.** — Revenons maintenant à la relation (7).

Désignons par  $\psi$  la force qui serait capable de rompre une tige ayant une section droite égale à l'unité, en agissant à l'extrémité de ce prisme dans le sens de sa longueur de manière à l'allonger ; la valeur de  $\psi$  varie avec la matière de la tige ; cette valeur est fournie par des expériences.

La force capable de rompre une fibre de section  $\sigma$  sera  $\psi\sigma$ , et pour que la poutre ne se rompe pas, il faut et il suffit que

l'on ait pour une fibre quelconque en valeur absolue

$$R\sigma < \psi\sigma,$$

ou, d'après la formule (17),

$$Mu < I\psi$$

Il suffit évidemment que cette condition soit satisfaite dans chaque section transversale pour la fibre correspondante à la plus grande valeur absolue de  $u$ , valeur que nous désignerons par  $u_1$ . La condition

$$Mu_1 < I\psi$$

sera d'ailleurs vérifiée si elle l'est pour la section dans laquelle le moment fléchissant  $M$  prend sa valeur maximum  $M_1$ . L'inégalité

$$\frac{M_1}{\psi} < \frac{I}{u_1}$$

est donc la condition définitive pour que la pièce ne se rompe pas, et comme le second membre est une fonction connue des dimensions transversales de la poutre, elle impose à ces dimensions, non des valeurs déterminées, mais des limites qui laissent au constructeur une certaine latitude dont il profite pour choisir parmi les échantillons que l'on trouve dans le commerce.

#### **Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant.**

**84.** — Nous terminerons ce chapitre en faisant connaître la relation remarquable qui existe entre l'effort tranchant  $T$  et le moment fléchissant  $M$  relatifs à une même section (G) d'une poutre droite.

Nous conservons la disposition de la figure 50. Soit  $x$  l'abscisse du point G,  $F_x$  et  $F_y$  les composantes parallèles à  $OX$  et à  $OY$  de l'une  $F$  des forces extérieures (charges ou réactions) qui s'exercent sur le tronçon ( $A_0$ ),  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées du



point d'application  $\omega$  de cette force. Le moment de la force  $F$  par rapport au point  $G$  est égal à la somme

$$-(x - \alpha) F_y - \beta F_x$$

des moments des composantes ; on a donc, pour le moment fléchissant dans la section  $(G)$ ,

$$M = - \Sigma [(x - \alpha) F_y + \beta F_x]$$

le signe  $\Sigma$  s'étendant à toutes les forces extérieures qui agissent sur le tronçon  $(A_0)$  et qui, comme nous le savons, sont situées dans le plan de symétrie  $XOY$ .

On déduit de là, en différentiant par rapport à  $x$

$$\frac{dM}{dx} = - \Sigma F_y = - T .$$

De là ce théorème :

*Si l'on prend pour axe des  $x$  la fibre moyenne d'une poutre droite, l'effort tranchant est égal et de signe contraire à la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section considérée.*

Cette proposition ne suppose pas, comme on le voit par la démonstration, que les forces extérieures soient normales à la poutre.

Signalons enfin ce corollaire : *l'effort tranchant est nul dans la section où le moment fléchissant est maximum ou minimum, et réciproquement.*

## CHAPITRE VII

# CENTRES DE GRAVITÉ ET MOMENTS D'INERTIE

---

### Principes relatifs aux centres de gravité.

**85.** — On a vu dans le chapitre qui précède, comment les centres de gravité et les moments d'inertie des aires planes et homogènes s'introduisent dans les questions relatives à la résistance des matériaux. Nous allons nous occuper de la détermination graphique de ces centres et de ces moments.

Nous rappellerons d'abord les principes fondamentaux sur les centres de gravité.

**86.** —  $S$  étant une aire plane et homogène,  $\omega$  un élément infiniment petit de cette aire, et  $\xi$  et  $\eta$  les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de  $\omega$ , les sommes

$$\Sigma \omega \xi, \quad \Sigma \omega \eta$$

étendues à tous les éléments de l'aire  $S$  ont des limites bien déterminées, et le point  $G$  dont les coordonnées sont

$$(1) \quad X = \frac{\lim \Sigma \omega \xi}{s}, \quad Y = \frac{\lim \Sigma \omega \eta}{s}$$

a reçu le nom de *centre de gravité* de l'aire  $S$ .

De là résultent immédiatement les deux conséquences suivantes :

1° Si l'aire plane  $S$  admet un diamètre, c'est-à-dire une

droite qui soit le lieu du milieu des cordes parallèles à une même direction, *le centre de gravité de l'aire est sur ce diamètre.*

Que l'on prenne, en effet, ce diamètre pour axe des  $x$  et la direction des cordes correspondantes pour axe des  $y$ , à chaque point  $(\xi, \eta)$  de l'aire répondra un point  $(\xi, -\eta)$  ayant la même abscisse et une ordonnée égale et de signe contraire; or, la somme  $\Sigma\omega\eta$ , se composant de parties égales deux à deux et de signes opposés, sera nulle. On aura donc  $Y = 0$ .

En particulier, *si l'aire possède un axe de symétrie, son centre de gravité sera sur cet axe.*

2° *Si l'aire  $S$  admet un centre de figure c'est-à-dire un point  $o$  qui soit le milieu de toutes les cordes qui y passent, le centre de gravité de l'aire coïncide avec son centre de figure.*

Qu'on prenne, en effet, le point  $o$  pour origine des coordonnées, à chaque point  $(\xi, \eta)$  de l'aire répondra un autre point  $(-\xi, -\eta)$  ayant des coordonnées égales à celles du premier mais de signes contraires; les sommes :

$$\Sigma\omega\xi, \quad \Sigma\omega\eta$$

seront donc nulles, et l'on aura  $X = 0$  et  $Y = 0$ .

Par exemple, le centre de gravité d'un parallélogramme est le point de rencontre de ses diagonales.

**87.** — *Si une aire plane  $S$  est décomposée en plusieurs parties  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de grandeur finie, et si  $(x_1y_1), (x_2y_2), \dots, (x_ny_n)$ , désignent les coordonnées des centres de gravité  $g_1, g_2, \dots, g_n$  des aires partielles  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , les coordonnées  $X$  et  $Y$  du centre de gravité  $G$  de l'aire totale  $S$  sont données par les formules :*

$$\begin{aligned} (2) \quad SX &= s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n \\ SY &= s_1 y_1 + s_2 y_2 + \dots + s_n y_n \\ S &= s_1 + s_2 + \dots + s_n \end{aligned}$$

En effet, en appliquant successivement les formules (1) aux aires partielles, on a

$$\begin{array}{ll}
 s_1 x_1 = \lim. \Sigma \omega_1 \xi_1 & s_1 y_1 = \lim. \Sigma \omega_1 \eta_1 \\
 s_2 x_2 = \lim. \Sigma \omega_2 \xi_2 & s_2 y_2 = \lim. \Sigma \omega_2 \eta_2 \\
 \dots & \dots \\
 s_n x_n = \lim. \Sigma \omega_n \xi_n & s_n y_n = \lim. \Sigma \omega_n \eta_n
 \end{array}$$

où les  $\Sigma$  s'étendent, dans la première ligne aux éléments de l'aire  $s_1$ , dans la seconde ligne aux éléments de  $s_2$ ,... dans la dernière ligne aux éléments de  $s_n$ . En ajoutant, on obtient

$$\begin{array}{l}
 s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n = \Sigma \omega \xi \\
 s_1 y_1 + s_2 y_2 + \dots + s_n y_n = \Sigma \omega \eta
 \end{array}$$

où les  $\Sigma$  s'étendent aux éléments de l'aire totale  $S$ . Par suite, en vertu des relations (1), ces deux dernières équations ne diffèrent pas des équations (2), qui sont ainsi démontrées.

**88.** — D'après les formules bien connues et relatives à la composition des forces parallèles, les valeurs de  $X$  et  $Y$  fournies par les relations (2) peuvent être considérées comme les coordonnées du point d'application de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles proportionnelles à  $s_1, s_2, \dots, s_n$  et appliquées en  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . On peut donc dire :

*Si une aire plane est décomposée en plusieurs autres, son centre de gravité est sur la ligne d'action de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux aires partielles et appliquées aux centres de gravité de ces aires.*

**Centres de gravité du triangle et du quadrilatère.**

**89.** — Chaque médiane d'un triangle étant un diamètre pour les cordes parallèles à la base correspondante, on voit (n° 86) que le *centre de gravité de l'aire d'un triangle est le point de concours des médianes*; il se trouve donc au tiers de la longueur de chacune d'elles à partir de la base correspondante.

Il résulte de là que, si l'on place au sommet d'un triangle trois poids égaux, le point d'application de la résultante de ces forces coïncide avec le centre de gravité du triangle.

90. — Considérons un quadrilatère ABCD ; soit O le point de rencontre des diagonales, et I et K les symétriques de O par rapport aux milieux M et N des diagonales (fig. 52). Les triangles ABD, CBD, ayant la même base BD, sont entre eux comme les longueurs  $OA = a$ ,  $CO = c$ .

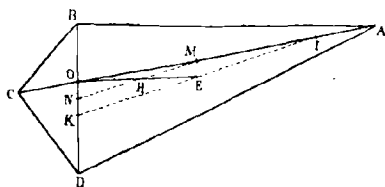


Fig. 52.

Par suite (n° 87) le centre de gravité G du quadrilatère est le point d'application de la résultante de deux poids, l'un égal à  $3a$  et placé au centre de gravité du triangle ABD, l'autre égal à  $3c$  et placé au centre de gravité du triangle CBD. D'après la remarque de l'alinéa précédent, on peut substituer à la première force trois poids égaux à  $a$  et appliqués aux sommets A, B, D, et à la seconde force trois poids égaux à  $c$  et appliqués aux sommets C, B, D. On a dès lors à composer en définitive quatre poids : l'un appliqué en A est égal à  $a$ , le second appliqué en C est égal à  $c$ , et les deux autres placés en B et D et égaux chacun à  $a + c$ . Or, d'après la composition des forces parallèles, on peut substituer aux deux derniers poids, deux autres poids de même grandeur  $a + c$  et appliqués en O et K ; tandis que les deux premiers peuvent être remplacés par un poids unique placé en I et égal à  $a + c$ . Le centre de gravité cherché G est donc le point d'application de la résultante de trois poids égaux et placés en O, I, K. Par suite il coïncide avec le centre de gravité du triangle OIK. Or si l'on nomme E et H les milieux de IK et de MN, on a :

$$OG = \frac{2}{3} OE = \frac{4}{3} OH = OH + \frac{1}{3} OH.$$

De là cette règle :

*Le centre de gravité d'un quadrilatère s'obtient en prolon-*



signons par  $S$  l'aire  $OMBA$  et par  $S'$  l'aire  $OIBMO$ . Comme la somme  $S + S'$  est égale au parallélogramme  $OHBA$  construit sur la flèche  $OA$  et la demi-corde  $AB$ , il suffit d'évaluer le rapport de  $S$  à  $S'$ . A cet effet, divisons l'arc  $OB$  en parties très petites, telles que  $MM'$ , et menons les deux coordonnées de chaque point de division, en prenant  $OA$  pour axe des  $x$  et  $OII$  pour axe des  $y$ . Nous décomposerons ainsi les deux segments  $OBA$ ,  $OIB$  en trapèzes curvilignes tels que  $PMM'P'$ ,  $QMM'Q'$ , qui, lorsque les divisions tendront vers zéro, pourront, dans les limites de somme, être remplacés respectivement par les parallélogrammes  $PMFP'$ ,  $QMEQ'$  que nous désignerons par  $a$  et  $a'$ . Nous aurons donc

$$S = \lim. \Sigma a$$

et

$$S' = \lim. \Sigma a'$$

Or

$$\frac{a}{a'} = \frac{PM.MF}{QM.ME} = \frac{PM}{OP} \cdot \frac{FM'}{MF'}$$

D'ailleurs le second rapport du deuxième membre est le coefficient angulaire de la corde  $MM'$ ; il a donc pour limite le coefficient angulaire de la tangente en  $M$  c'est-à-dire

$$\frac{PM}{PT} \quad \text{ou} \quad \frac{PM}{2OP},$$

puisque dans la parabole la sous-tangente  $TP$  est double de l'abscisse  $OP$  du point de contact.

On a donc:

$$\lim \frac{a}{a'} = 2,$$

d'où

$$(2) \quad \frac{S}{S'} = \lim \frac{\Sigma a}{\Sigma a'} = 2;$$

l'aire  $S$  est donc les deux tiers de l'aire  $S + S'$  c'est-à-dire du parallélogramme  $OHBA$ . Par suite l'aire du segment parabolique  $BOB'$  est les deux tiers de l'aire du parallélogramme qui a ses côtés égaux et parallèles à la corde et à la flèche du segment.

Désignons maintenant par  $x$  et  $x'$  les abscisses  $Ou$  et  $Ou'$  des centres de gravité  $g$  et  $g'$  des parallélogrammes  $PMFP'$ ,  $QMEQ'$ , et par  $X$  et  $X'$  les abscisses des centres de gravité des segments  $OBA$ ,  $OBI$ ; nous aurons (n° 87).

$$\begin{aligned} SX &= \lim \Sigma ax \\ S'X' &= \lim \Sigma a'x' \end{aligned}$$

or, le rapport  $\frac{x}{x'} = \frac{Ou}{Ou'}$  a pour limite  $\frac{OP}{Ou'} = 2$ ; par suite le rapport  $\frac{ax}{a'x'}$  a pour limite 4, et l'on a

$$\frac{SX}{S'X'} = \lim \frac{\Sigma ax}{\Sigma a'x'} = 4,$$

d'où

$$(3) \quad X = 2X'.$$

Mais l'abscisse du centre de gravité du parallélogramme  $OIIBA$  est  $\frac{1}{2}OA$ ; on a donc (n° 87)

$$SX + S'X' = (S + S') \frac{OA}{2},$$

c'est-à-dire, à cause des relations (2) et (3),

$$X' = \frac{3}{10} OA;$$

d'où

$$X = \frac{3}{5} OA.$$

Telle est l'abscisse du centre de gravité  $G_1$  de  $OBA$ . Celle du centre de gravité  $G_2$  de  $OB'A'$  est évidemment la même; on a donc aussi la même valeur pour l'abscisse  $OG$  du centre de gravité de l'aire totale  $BOB'$ , lequel est d'ailleurs situé (n° 85) sur le diamètre  $OA$ . Ainsi le centre de gravité  $G$  d'un segment parabolique  $BOB'$  est situé sur la flèche  $OA$  du segment, à une distance du point  $O$  égale aux trois cinquièmes de la flèche.



**Détermination graphique du centre de gravité  
d'une aire plane quelconque.**

**93.** — Supposons d'abord que l'aire proposée soit limitée par un contour rectiligne.

On pourra la décomposer en triangles ou quadrilatères c'est-à-dire en aires partielles  $S_1, S_2, \dots, S_n$  dont on aura les grandeurs et les centres de gravité  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . On mènera par ces points des parallèles ayant une direction quelconque et situées dans le plan de la figure, et l'on considérera ces parallèles comme les lignes d'action de forces respectivement proportionnelles aux aires  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Après avoir construit le polygone des vecteurs de ces forces et un polygone funiculaire ; on mènera, par le point de croisement des côtés extrêmes de ce dernier polygone, une droite  $L$  parallèle à la direction des forces ; cette droite sera la ligne d'action de la résultante ; elle passera donc (n° 87) par le centre de gravité  $G$ .

Si l'aire a un axe de symétrie ou un diamètre, l'intersection de ce diamètre et de la droite  $L$  sera le point  $G$ , et le problème sera résolu. Il faut cependant remarquer que, dans ce cas, parmi les directions en nombre infini que l'on peut attribuer aux forces, on doit exclure la direction du diamètre.

Si l'aire n'admet pas de diamètre, une seconde opération, analogue à la première et pour laquelle on conservera le même mode de partage en ne changeant que la direction attribuée aux forces, donnera un second lieu rectiligne  $L'$  du centre de gravité, qui se trouvera dès lors à la rencontre des deux droites  $L$  et  $L'$ .

Pour que ce point soit déterminé avec précision, il faut que l'angle des droites  $L$  et  $L'$  ne soit pas trop aigu ; mais on pourra toujours faire qu'il en soit ainsi, puisque on est maître du choix de cet angle qui n'est autre que celui des deux directions adoptées pour les deux séries de forces ; le plus souvent, on prendra ces directions, à peu près, sinon exactement, perpendiculaires l'une à l'autre.

**94.** — Voici des exemples :

La fig. 54 est relative à une aire ABCDEFGH offrant un axe de symétrie parallèle à AH et que l'on peut décomposer en trois rectangles IABKI, IIIGF, CDEK, qui ont une dimension commune et dont les deux derniers sont égaux. Aux centres de figure O, O', O'' de ces rectangles on a appliqué des forces M, N, N, N perpendiculaires à l'axe de symétrie et respectivement

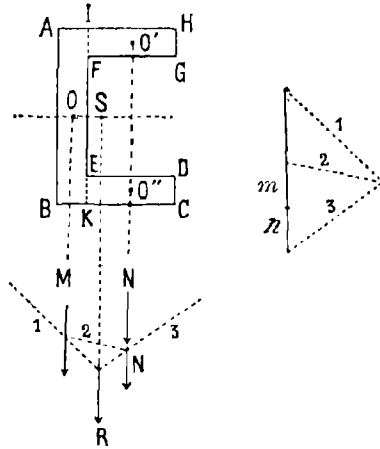


Fig. 54.

égales aux moitiés des dimensions non communes AB, GF et DE. On voit à droite le polygone des vecteurs dont les deux derniers segments sont égaux ; au-dessous est le polygone funiculaire 1, 2, 3, qui n'a ici que trois côtés, parce que les lignes d'action partant de O' et de O'' sont confondues. La droite R menée parallèlement aux forces par le point de croisement des côtés 1 et 3 rencontre l'axe de symétrie en un point S qui est le centre de gravité demandé.

La figure 55 est relative à une aire du même genre ABCDEFGH, mais dont les deux bras FGHI, CDEK n'ont plus la même longueur, ce qui détruit la symétrie ; aussi a-t-on fait deux opérations, en dirigeant d'abord les forces parallèlement à AB, puis parallèlement à BC. Le polygone des vecteurs et le polygone funiculaire de la première opération sont en dessous ; ceux de la seconde opération sont à droite ; le centre de gravité est en S.

Dans les deux exemples qui précèdent les aires partielles sont des rectangles. La figure 56 est relative à une décomposition en triangles. L'aire dont on demande le centre de gra-

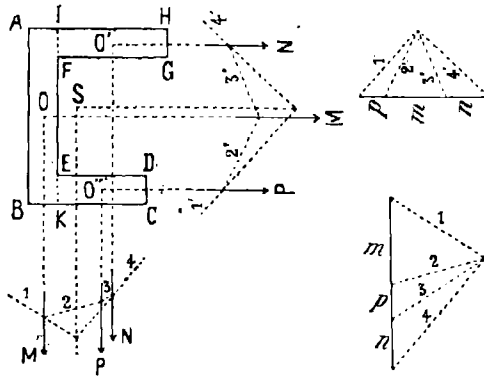


Fig. 55.

vité G est le pentagone ABCDE ; les triangles partiels sont ABC, ACE, ECD, dont les centres de gravité sont  $g_1, g_2, g_3$ .

Il faut commencer par se procurer des longueurs proportionnelles aux aires de ces triangles ; BH, EI, DM étant les hauteurs de ces triangles, les aires sont proportionnelles aux produits

$$AC \cdot BH, \quad AC \cdot EI, \quad CE \cdot DM$$

ou aux longueurs

$$BH, \quad EI, \quad \frac{CE \cdot DM}{AC},$$

dont la dernière s'obtient de la manière suivante : portons sur CA la longueur CN égale à DM, et menons par N la parallèle NK à AE ; on aura :

$$CK = \frac{CE \cdot NC}{AC} = \frac{CE \cdot DM}{AC},$$

CK est donc la troisième longueur cherchée.

Cela posé, on mènera par  $g_1, g_2, g_3$  deux séries de parallèles

$g_1\alpha_1, g_2\alpha_2, g_3\alpha_3$  et  $g_1\alpha'_1, g_2\alpha'_2, g_3\alpha'_3$ ; on considérera d'abord les premières comme les lignes d'action de forces proportionnelles à BH, EI, CK; on construira le polygone des vecteurs (figure à droite et au-dessus) et un polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\varphi$ , et par le point  $m$ , intersection de  $\omega\alpha_1$  et  $\alpha_2\varphi$ , on mènera la droite  $R_1$  parallèle à  $g_1\alpha_1$ . De même, ou considérant  $g_1\alpha'_1, g_2\alpha'_2, g_3\alpha'_3$  comme les lignes d'action de forces proportionnelles à BH, EI, CK, on construira le polygone des vecteurs et un polygone funiculaire

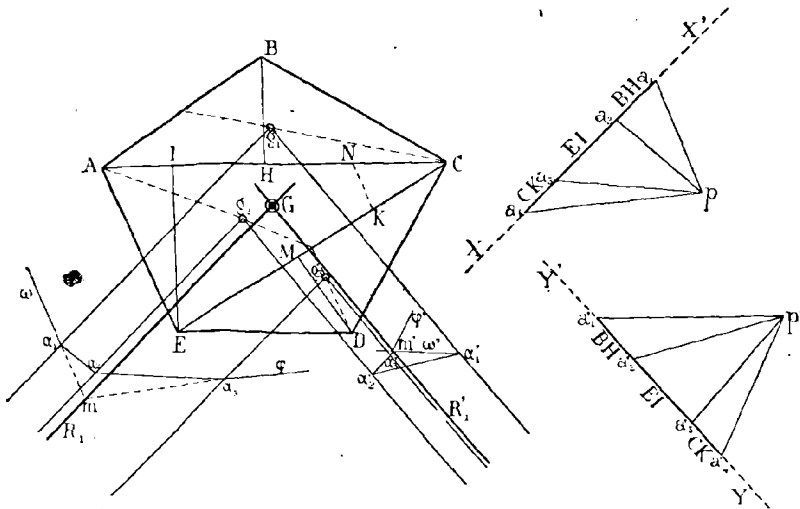


Fig. 56.

$\omega'\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\varphi'$ ; la parallèle  $R'_1$  à  $g_1\alpha'_1$  coupera  $R_1$  au centre de gravité G du pentagone proposé.

**95.** — Si le contour de l'aire est curviligne, on inscrira dans ce contour une figure polygonale à côtés assez petits pour que les segments compris entre les cordes et la courbe puissent être assimilés à des segments paraboliques. Ces segments, et les triangles ou quadrilatères dans lesquels on décomposera le polygone inscrit, seront les aires partielles dont on déterminera les grandeurs et les centres de gravité; de la sorte on retombera sur le cas précédent.

Le plus souvent on opère plus rapidement, et avec une exac-

titude bien suffisante, en découpant l'aire, par des sécantes parallèles, en trapèzes curvilignes limités par de petits arcs appartenant au contour donné. En rapprochant suffisamment les sécantes, on peut considérer l'aire de chaque trapèze comme égale au produit de l'ordonnée moyenne par la distance des deux côtés parallèles, et le centre de gravité de cette surface comme situé au milieu du diamètre du trapèze. Quant au segment qui précède la première sécante et à celui qui suit la dernière, on les assimilera à des triangles ou à des segments paraboliques.

Ce procédé est surtout expéditif quand toutes les sécantes parallèles sont tracées à égale distance les unes des autres. Il n'y a pas alors de quatrième proportionnelle à construire pour déterminer les longueurs qui doivent représenter les forces et qui sont proportionnelles aux aires partielles ; ces longueurs sont les ordonnées moyennes des trapèzes curvilignes.

Si l'on ne peut conserver dans toute l'étendue de l'épure l'équidistance des sécantes parallèles, on partagera ces sécantes en groupes ayant chacun une équidistance particulière  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... Alors si l'on prend les ordonnées moyennes des tranches du premier groupe pour représenter les aires de ces tranches, les aires des tranches du second groupe seront les ordonnées moyennes multipliées par  $\frac{b}{a}$ , celles du troisième groupe seront les ordonnées moyennes multipliées par  $\frac{c}{a}$ , et ainsi de suite. Il y aura donc intérêt, pour opérer rapidement, à prendre des équidistances  $b$ ,  $c$ , qui soient en rapport simple avec la première  $a$ .

### Moments d'ordre supérieur.

**96.** — Nous avons défini au numéro 7 le moment d'une force  $F$  par rapport à un point  $O$  ; c'est, en grandeur et en signe, le produit

$$(3) \quad vx$$

du vecteur  $v$  de la force par le segment  $x$  qui a pour origine le point  $O$  et pour extrémité la projection de ce point  $O$  sur la ligne d'action de la force ; le premier facteur  $v$  est évalué à l'échelle des forces et le second  $x$  à l'échelle des longueurs.

Le moment ainsi défini reçoit le nom de *moment statique* ou *moment du premier ordre* ; on appelle *moment* d'ordre  $p$  de la force considérée, le produit :

$$(4) \quad vx^p,$$

qu'on déduit de (3) en substituant au segment  $x$  sa  $p^{\text{e}}$  puissance.

On a vu au n° 43 comment, à l'aide d'un polygone funiculaire, on pouvait évaluer graphiquement la somme

$$(5) \quad v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n$$

des moments du premier ordre de  $n$  forces parallèles. Nous allons montrer que l'application répétée du même procédé permet de construire la somme :

$$(6) \quad v_1x_1^p + v_2x_2^p + \dots + v_nx_n^p$$

des moments d'ordre  $p$  des mêmes forces.

Supposons qu'on ait construit (fig. 34), d'abord le polygone  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des forces parallèles considérées, puis, avec une distance polaire arbitraire  $d$ , un polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\varphi$  des mêmes forces ; soient  $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$  les points où les côtés successifs  $\omega\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_n\varphi$  du polygone funiculaire rencontrent la droite  $L$  menée parallèlement aux forces par le centre  $C$  des moments. On sait que la somme (5) des moments du premier ordre est égale au produit :

$$m_1m_{n+1} \cdot d$$

D'ailleurs un terme quelconque  $v_kx_k$  de cette somme (5), est égal au produit :

$$m_k m_{k+1} \cdot d$$

Posons

$$m_k m_{k+1} = v_k',$$

et regardons les segments

$$v_1' \quad v_2' \quad \dots \quad v_n'$$

comme les vecteurs d'un système de forces parallèles ayant les mêmes lignes d'action que les premières. Le polygone de ces vecteurs est tout tracé ; c'est la figure rectiligne  $m_1 m_2 \dots m_{n+1}$ . A l'aide de la même distance polaire mesurée par  $d$ , construisons un polygone funiculaire  $\omega' \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n \varphi'$  des nouvelles forces. Appelons  $m'_1, m'_2, \dots, m'_{n+1}$  les intersections des côtés successifs de ce polygone avec la droite L ; la somme

$$v_1' x_1 + v_2' x_2 + \dots + v_n' x_n$$

sera représentée par le produit

$$m_1' m'_{n+1} \cdot d;$$

et, comme on a

$$v_k' = \frac{v_k x_k}{d},$$

on voit que la somme des moments du second ordre

$$(7) \quad v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots + v_n x_n^2$$

sera exprimée par le produit

$$m_1' m'_{n+1} d^2$$

On passera de même aux moments du troisième ordre. En effet, un terme quelconque  $v_k x_k$  de la somme (7) est égal au produit

$$m'_k m'_{k+1} \cdot d^2$$

Posons donc

$$m'_k m'_{k+1} = v_k'',$$

et regardons les segments

$$v_1'', \quad v_2'' \quad \dots \quad v_n''$$

comme les vecteurs d'un système de forces parallèles ayant les mêmes lignes d'action que les précédentes. A l'aide du polygone  $m'_1 m'_2 \dots m'_{n+1}$  de ces vecteurs et de la distance polaire  $d$ , traçons un polygone funiculaire  $\omega'' \alpha''_1 \alpha''_2 \dots \alpha''_n \varphi''$  des nouvelles forces ; puis, appelons  $m_1'', m_2'', \dots, m''_{n+1}$  les intersec-

tions des côtés successifs de ce polygone avec la droite L. La somme

$$v_1''x_1 + v_2''x_2 + \dots + v_n''x_n$$

sera représentée par le produit

$$m_1''m'_{n+1} \cdot d ;$$

et, comme on a

$$v''_{n+1} = \frac{v_k x_k^2}{d^2},$$

on voit que la somme

$$v_1 x_1^3 + v_2 x_2^3 + \dots + v_n x_n^3$$

des moments du troisième ordre sera exprimée par le produit

$$m_1'' m''_{n+1} d^3.$$

Et ainsi de suite.

Si la distance polaire  $d$  est prise égale à l'unité de longueur, les valeurs numériques des sommes des moments du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre, seront celles des segments

$$(8) \quad m_1 m_{k+1}, m_1' m'_{k+1}, m_1'' m''_{k+1}, \dots$$

mesurés à l'échelle des forces. En tout cas, si l'on ne trouve pas commode de prendre la distance polaire égale à l'unité de longueur, il convient de la prendre égale à un multiple ou à une partie aliquote simple de cette unité, afin que les facteurs numériques, par lesquels il faut multiplier les valeurs des segments (8), soient à leur tour des nombres simples.

### Moments d'inertie.

97. — S étant une aire plane et homogène,  $\omega$  un élément infiniment petit de cette aire,  $x$  la distance d'un point quelconque de  $\omega$  à une droite quelconque  $\Delta$  du plan, la somme

$$\Sigma \omega \cdot x^2,$$



étendue à tous les éléments de l'aire  $S$ , a une limite bien déterminée ; on donne à cette limite le nom de *moment d'inertie* de l'aire  $S$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

Il est clair que, si une aire plane  $S$  est décomposée en plusieurs parties  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie des aires partielles, par rapport à la même droite  $\Delta$ .

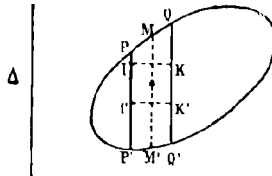


Fig. 57.

Décomposons l'aire  $S$  en bandes infiniment étroites à l'aide de parallèles à la droite  $\Delta$  (fig. 57).  $PQQ'P'$  étant l'une quelconque de ces bandes, partageons-la à son tour, à l'aide de perpendiculaires à  $\Delta$ , en rectangles infiniment petits tels que  $IKK'I'$  ; enfin, désignons par  $x$  la distance qui sépare la droite  $\Delta$  de l'ordonnée moyenne  $MM'$  de la bande  $PQQ'P'$ , par  $s$  l'aire de cette bande et par  $\omega$  l'aire du rectangle  $IKK'I'$ . On aura pour le moment d'inertie de l'aire  $S$

$$I = \lim \Sigma \omega x^2,$$

et par suite, en groupant ensemble tous les éléments  $\omega$  d'une même bande, pour lesquels  $x$  a évidemment la même valeur :

$$I = \lim \Sigma s x^2,$$

le signe  $\Sigma$  s'étendant alors à toutes les bandes.

Mais on n'altère pas la limite précédente en substituant à l'aire  $s$  de la bande le produit

$$v = y.h,$$

de son ordonnée moyenne  $MM' = y$  par sa largeur  $h$ , qui en diffère infiniment peu. Dès lors si l'on considère  $v$  comme le vecteur d'une force dont la ligne d'action serait l'ordonnée moyenne  $MM'$ , on voit que le moment d'inertie  $I$  est la

limite de la somme

$$\Sigma v \cdot x^2$$

des moments du second ordre des forces ( $v$ ) par rapport à un point quelconque de la droite  $\Delta$ .

Pour déterminer graphiquement, d'une manière approximative, le moment d'inertie  $I$  de l'aire  $S$ , on substituera, aux bandes *infinitement* étroites que nous venons de considérer, des bandes ayant des largeurs finies mais assez petites pour que l'on puisse, sans erreur sensible, prendre pour mesure des aires

$$s_1, s_2 \dots s_n,$$

de ces bandes qui seront en nombre fini, les produits

$$v_1 = y_1 h_1, v_2 = y_2 h_2, \dots \dots v_n = y_n h_n$$

des ordonnées moyennes par les largeurs. On sera ainsi ramené à l'évaluation de la somme des moments du second ordre

$$v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots \dots + v_n x_n^2,$$

problème déjà résolu au numéro précédent.

Il y aura d'ailleurs avantage, comme nous l'avons déjà dit au n° 95, à prendre les bandes de même largeur, afin d'éviter la construction de quatrièmes proportionnelles.

**98.** — Quand on doit évaluer le moment d'inertie d'une aire plane par rapport à diverses droites de son plan, au lieu d'opérer séparément pour chacune de ces droites comme nous venons de l'indiquer, on peut abrégé beaucoup le travail en utilisant deux théorèmes importants, qui montrent comment varie le moment d'inertie  $I$  lorsque la droite  $\Delta$  se déplace dans le plan de l'aire  $S$ .

Mais une définition préalable est nécessaire pour simplifier l'énoncé de ces deux propositions.

On appelle *rayon de giration* d'une aire  $S$ , par rapport à une droite  $\Delta$  de son plan, la racine carrée du rapport  $\frac{I}{S}$  obtenu en divisant par l'aire  $S$  le moment d'inertie  $I$  de cette aire par

rapport à  $\Delta$  ; de sorte qu'en désignant par  $\rho$  ce rayon de giration, on a

$$I = S\rho^2.$$

Cela posé, considérons la parallèle  $\Delta'$  à la droite  $\Delta$  menée par le centre de gravité  $G$  de l'aire  $S$ ; soit  $\omega$  un élément infiniment petit quelconque de cette aire,  $M$  un point de  $\omega$ ,  $P$  et  $P'$  ses projections sur  $\Delta$  et  $\Delta'$ , et  $a$ ,  $x$ ,  $x'$  les segments  $PP'$ ,  $PM$ ,  $MP'$  (fig. 58), On a :

$$S\rho^2 = I = \Sigma\omega x^2 = \Sigma\omega (a - x')^2$$

ou en développant le carré et observant que  $\Sigma\omega x'$  est nul (n° 86) puisque la droite  $\Delta'$  passe par le centre de gravité,

$$S\rho^2 = a^2\Sigma\omega + \Sigma\omega x'^2,$$

et enfin, en appelant  $\rho'$  le rayon de giration relatif à  $\Delta'$  :

$$\rho^2 = a^2 + \rho'^2$$

Donc : *le rayon de giration d'une aire plane, par rapport à une droite de son plan, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit, le rayon de giration relatif à la parallèle menée par le centre de gravité et la distance des deux parallèles.*

D'après ce théorème, tout se réduit à chercher les moments d'inertie autour des droites passant par le centre de gravité.

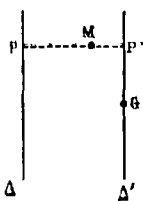


Fig. 58.

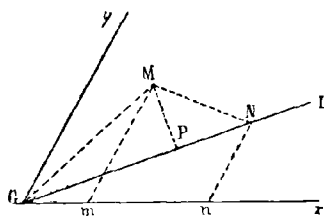


Fig. 59.

99. — Prenons maintenant deux axes de coordonnées rectilignes  $Gx$  et  $Gy$  passant par le centre de gravité  $G$  ; soit  $GL$  une droite quelconque passant par ce centre, et  $\rho$  le rayon de

giration de l'aire  $S$  par rapport à cette droite (fig. 59). Portons sur  $GL$  une longueur  $GN$  égale à

$$\frac{\lambda^2}{\rho},$$

$\lambda$  étant une longueur introduite pour l'homogénéité, et désignons par  $x$  et  $y$  les coordonnées du point  $N$ . Enfin,  $\omega$  étant un élément de l'aire  $S$ , désignons par  $x'$  et  $y'$  les coordonnées d'un point  $M$  de  $\omega$ . Nous aurons, en appelant  $P$  la projection de  $M$  sur  $OL$  :

$$S\rho^2 = \Sigma\omega \cdot \overline{MP}^2 = \frac{1}{GN^2} \Sigma\omega (MP \cdot GN)^2$$

Mais la parenthèse représente le double de l'aire du triangle  $GMN$ , aire qui a pour expression <sup>4</sup> :

$$(xy' - yx') \sin \theta$$

$\theta$  étant l'angle des axes coordonnés. On a donc

$$S = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} \Sigma\omega (xy' - yx')^2,$$

ou

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 = \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}$$

en posant :

$$\frac{\Sigma\omega y'^2}{S} = A, \quad \frac{\Sigma\omega x'y'}{S} = B, \quad \frac{\Sigma\omega x'^2}{S} = C,$$

Il résulte de là que le lieu des points  $N$  est une conique ayant l'origine pour centre, et par suite est une ellipse, puisque, d'après la définition de  $GN$ , tous les rayons de cette courbe sont finis lorsque l'aire  $S$  est, comme nous le supposons, limitée par un contour fermé.

On a donc ce théorème :

1. C'est un résultat bien connu ; en tout cas, on l'obtient immédiatement en observant que le triangle en question est égal à la somme du triangle  $GmN$  et du trapèze  $MmnN$  diminuée du triangle  $GNn$ , c'est-à-dire à

$$\frac{\sin \theta}{2} [x'y' + (x - x')(y + y') - xy] = \frac{1}{2} (xy' - yx') \sin \theta$$

*Si, sur les diverses droites issues du centre de gravité G d'une aire plane S, on porte des longueurs inversement proportionnelles aux rayons de giration relatifs à ces droites, le lieu des extrémités de ces longueurs est une ellipse.*

On donne à cette ellipse le nom d'*ellipse centrale d'inertie*.

Nous ne nous étendrons pas sur les propriétés de cette ellipse d'inertie ; le lecteur trouvera, sur ce sujet, tous les développements qu'il comporte dans le beau traité de *Statique graphique* (2<sup>e</sup> édition) de M. Maurice Lévy. Nous nous bornerons à indiquer brièvement le parti qu'on peut en tirer.

Une ellipse, dont le centre est connu, est déterminée par trois points. Il suffira donc de connaître ou de déterminer graphiquement les moments d'inertie d'une aire S, par rapport à *trois* droites passant par son centre de gravité G, pour pouvoir construire l'ellipse centrale correspondante et, par suite, pour obtenir simplement le moment d'inertie de l'aire, d'abord par rapport à une droite quelconque passant par G, puis (n<sup>o</sup> 98) par rapport à une droite quelconque du plan.

Il suffit même de connaître les moments d'inertie de l'aire S par rapport à *deux* droites passant par G, pourvu que ces deux droites soient dirigées suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse. Or, on connaît deux telles directions, dès que l'aire S admet un diamètre. Ce diamètre  $Gx'$  qui passe par G (n<sup>o</sup> 83), et la parallèle  $Gy'$  menée par G aux cordes que  $Gx'$  divise en deux parties égales, sont dirigés suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse centrale. En effet, si l'on rapporte l'ellipse aux deux axes de coordonnées  $Gx'$  et  $Gy'$ , et si  $x'$  et  $y'$  désignent les coordonnées d'un élément  $\omega$  de l'aire S, on a évidemment  $\Sigma \omega x'y' = 0$ , puisque à tout élément  $\omega$  en répond un autre ayant même abscisse  $x'$  que  $\omega$ , mais une ordonnée  $-y'$  égale et de signe contraire à celle de  $\omega$ . L'équation de l'ellipse d'inertie rapportée à  $Gx'$  et  $Gy'$  ne contient donc pas de terme en  $xy$ , et par conséquent les droites  $Gx'$  et  $Gy'$  forment un système de diamètres conjugués.

En particulier, si l'aire S admet un axe de symétrie, cet axe et sa perpendiculaire menée par le centre de gravité G, sont les axes de symétrie de l'ellipse centrale, et il suffit, pour construire l'ellipse, de déterminer les moments d'inertie relatifs à ces deux

droites, qu'on nomme *moments d'inertie principaux*. C'est ce qui arrive le plus souvent dans la pratique. Pour le rectangle, pour les fers à double T, etc., les formules ou les tables des usines donnent les deux moments d'inertie principaux ; l'ellipse centrale en résulte immédiatement et par suite les moments d'inertie relatifs aux diverses droites du plan.

**100.** — Ajoutons enfin que l'on peut remplacer les tracés graphiques, pour les centres de gravité et les moments d'inertie, par l'emploi des intégrateurs d'Amsler et de M. Marcel Deprez ; ces instruments, qui méritent d'être de plus en plus répandus dans les ateliers, font connaître à la fois, par de simples lectures, l'aire, le centre de gravité et le moment d'inertie.

## CHAPITRE VIII

# POUTRE DROITE A DEUX APPUIS : CHARGES FIXES

---

### Objet de ce chapitre.

**101.** — Nous avons dit au n° 71, ce qu'on entend par *poutre droite*. Nous supposons ici que la poutre, que nous représentons par sa fibre moyenne AB, repose par ses extrémités A et B sur deux appuis de niveau, et qu'elle soit soumise à des forces verticales situées, comme les points d'appui, dans le plan de symétrie que nous prendrons pour le plan de la figure.

Dans ces conditions, les forces extérieures étant normales à la fibre moyenne, les tensions ou compressions disparaissent (n° 78), et il ne reste plus que les moments fléchissants et les efforts tranchants. L'objet principal de ce chapitre est la détermination graphique des valeurs que prennent ce moment et cet effort dans les diverses sections transversales de la poutre c'est-à-dire dans les sections perpendiculaires à la fibre moyenne.

Il y a plusieurs cas à distinguer, suivant le mode de répartition des forces. Les charges peuvent être isolées ou continues, et, dans cette dernière hypothèse, réparties uniformément, ou suivant une loi quelconque, sur la totalité ou seulement sur une portion de la longueur de la pièce.

Nous traiterons aussi le cas où la pièce est encastrée par un bout et libre à l'autre extrémité.

Enfin, nous terminerons par la construction de la ligne élastique c'est-à-dire de la ligne moyenne déformée.

### Charges concentrées.

**102.** — Il convient de commencer par le cas où les charges verticales sont des forces isolées  $F_1, F_2, F_3, F_4$  (fig. 60). Nous faisons d'ailleurs abstraction du poids de la poutre.

La première chose à faire est la recherche des réactions des appuis.

Ces réactions  $R$  et  $R'$  sont verticales et appliquées aux points  $A$  et  $B$ ; elles doivent équilibrer les forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . Leur détermination est un problème connu (n° 51). Après avoir construit le polygone des vecteurs  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  des forces données  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , on trace, à l'aide d'un pôle  $\pi$ , un polygone funiculaire  $\omega' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \omega'$  des mêmes forces; on prend l'intersection  $a$  du premier côté avec la verticale de l'appui  $A$  et l'intersection  $b$  du dernier côté avec la verticale de l'appui  $B$ ; dès lors si l'on mène, par le pôle  $\pi$ , la parallèle  $\pi V$  à la ligne de fermeture  $ab$ , les segments  $Va_1$  et  $a_5 V$  sont respectivement les vecteurs des réactions  $R$  et  $R'$ , qui sont ainsi pleinement déterminées.

**103.** — Passons aux moments fléchissants.

Considérons une section transversale quelconque  $I$ ; le moment fléchissant correspondant est la somme des moments par rapport au point  $I$  des forces  $R, F_1, F_2, F_3$  situées à gauche de ce point, et cette somme s'exprime (n° 43) par le produit

$$k_{\pi} \cdot OM$$

de la distance polaire  $k_{\pi}$  par l'ordonnée  $OM$  du polygone funiculaire qui est sur la verticale du point  $I$ . Nous rappelons d'ailleurs que d'après nos conventions,  $Ax$  et  $Ay$  indiquent le sens positif des segments horizontaux et des segments verticaux. Les deux facteurs du moment fléchissant sont donc ici positifs, et par suite ce moment lui-même est positif.

On donne au polygone funiculaire  $a \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 b$  le nom de *diagramme des moments fléchissants*, parce que les ordonnées de



cette ligne, comptées à partir de la ligne de clôture  $ab$ , sont proportionnelles aux moments fléchissants des sections transversales passant par ces ordonnées ; le facteur  $k\pi$  reste en effet invariable quand on déplace la section.

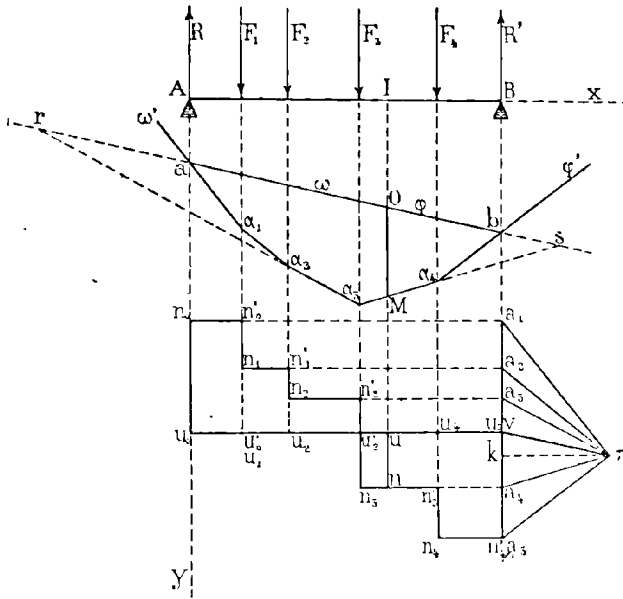


Fig. 60.

On voit que, lorsque le point  $M$  se déplace sur un côté quelconque du polygone funiculaire, dans le sens  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4b$ , l'ordonnée  $OM$  croît ou décroît suivant que le côté considéré est situé au-dessous ou au-dessus de la parallèle à  $ab$  menée par l'origine de ce côté. Il suit de là que le moment fléchissant est maximum lorsque  $M$  est en un sommet du polygone ; et ce sommet (ici  $\alpha_3$ ) est caractérisé par cette propriété que les deux côtés consécutifs dont il est l'intersection vont couper la ligne de clôture  $ab$ , l'un à droite, l'autre à gauche de l'ordonnée de ce point.

Ainsi le moment fléchissant, nul en  $A$ , augmente, devient maximum dans la section passant par  $F_3$ , puis diminue pour devenir égal à zéro au point  $B$ .

**104.** — Considérons enfin les efforts tranchants.

L'effort tranchant en I a pour ligne d'action la verticale de ce point ; il est d'ailleurs égal en grandeur et en signe à la somme des projections, sur cette verticale, des forces  $R, F_1, F_2, F_3$  qui agissent à gauche de I ; son vecteur est donc

$$Va_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4,$$

c'est-à-dire

$$Va_4 \text{ ou } un,$$

$u$  et  $n$  désignant la projection de  $V$  et de  $a_4$  sur la verticale du point I. On voit qu'il est ici positif pour la section considérée.

Il ne faut pas confondre cet effort tranchant avec la résultante des forces  $R, F_1, F_2, F_3$  ; cette résultante a bien pour vecteur  $Va_4$  ou  $un$  ; mais elle agit suivant la verticale du point S où le côté  $\alpha_3\alpha_4$  va rencontrer la ligne de clôture  $ab$  (n° 38).

Le lieu des points  $n$  est *le diagramme des efforts tranchants* ; c'est une ligne brisée  $n_0n'_0n_1n'_1n_2n'_2n_3n'_3n_4$ , à côtés alternativement horizontaux et verticaux ; ses ordonnées, telles que  $un$ , comptées à partir de l'horizontale du point V, donnent en grandeur, position et sens, les efforts tranchants relatifs aux sections transversales passant par ces coordonnées.

En A l'effort tranchant est égal à  $u_0n_0$  ou  $Va_1$ , il est négatif ; entre les verticales A et  $F_1$  il reste égal à  $u_0n_0$  ; entre les verticales  $F_1$  et  $F_2$ , il est égal à  $u_1n_1$  ou  $Va_2$ , en sorte que dans la section  $F_1$  il passe brusquement de la valeur  $u_0n_0$  à  $u_1n_1$  ; et ainsi de suite. On voit qu'ici, dans la section  $F_3$ , il passe de la valeur négative  $u_2n_2$  à la valeur positive  $u'_2n_2$  ; puis il reste positif et il prend sa valeur la plus grande dans la section B où il est égal à  $Va_3$ .

Il est aisé de voir que la section (ici  $F_3$ ) dans laquelle l'effort tranchant passe du négatif au positif et par suite s'anule, est précisément la section dans laquelle le moment fléchissant est maximum. En effet cet effort est représenté par  $Va_{k+1}$  lorsque la section tombe entre les verticales  $F_k$  et  $F_{k+1}$  c'est-à-dire lorsque cette section coupe le côté  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  du polygone funiculaire qui est parallèle au rayon  $\pi a_{k+1}$  ; il est négatif

tif quand  $\pi a_{k+1}$  est au-dessus de  $\pi V$  c'est-à-dire quand  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  va couper  $ab$  à gauche ; il est positif au contraire quand  $\pi a_{k+1}$  est au-dessous de  $\pi V$  c'est-à-dire quand  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  va couper  $ab$  à droite. Il est donc égal à zéro, lorsque la section passe par le sommet commun à deux côtés qui vont couper  $ab$  l'un à droite, l'autre à gauche ; or c'est précisément dans cette section, nous l'avons vu au numéro précédent, que le moment fléchissant est maximum.

C'est d'ailleurs là une proposition générale déjà démontrée au n° 84 ; mais il n'était pas sans intérêt de la retrouver, dans ce cas particulier, comme conséquence de nos tracés.

**105.** — On peut, si on le désire, faire en sorte que la ligne de clôture  $ab$  du polygone funiculaire soit horizontale ; il suffit de placer les points  $a$  et  $b$  à volonté sur les verticales des points  $A$  et  $B$ , pourvu qu'on leur donne le même niveau ; l'on tombe ainsi sur le problème connu (n° 29) : tracer avec une distance polaire donnée un polygone funiculaire  $\omega' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \varphi'$  d'un système de forces  $(F_1, F_2, F_3, F_4 ; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ , de façon que le premier côté  $\omega' \alpha_1$  passe par le point  $a$  et le dernier côté  $\alpha_4 \varphi'$  par le point  $b$ .

### Emploi des échelles.

**106.** — Nous n'aurions plus rien à ajouter sur la détermination des moments fléchissants et des efforts tranchants de la poutre considérée dans les n°s 102, 103, 104, si l'épure était exécutée en vraie grandeur, c'est-à-dire si une droite de l'épure, égale à 1 mètre, représentait un mètre ou une tonne suivant que cette droite désigne une longueur ou une force ; alors  $un$ ,  $k\pi$ , et  $OM$  étant mesurés sur l'épure et ayant été trouvés, par exemple, respectivement égaux à  $0^m,005$ ,  $0^m,013$ ,  $0^m,011$ , l'effort tranchant en  $I$  serait égal à

$$0^{\text{tonne}},005,$$

et le moment fléchissant à,

$$(0,013 \times 0,011) \text{ ou } 0,000143 \text{ mètres tonnes.}$$

Mais on ne peut évidemment opérer de la sorte, et on est obligé d'avoir recours à l'emploi de deux échelles, l'une pour les longueurs, l'autre pour les forces.

$\lambda$  étant un nombre donné, on dit que l'échelle des longueurs est  $\frac{1}{\lambda}$ , lorsque une longueur de 1 mètre est représentée sur l'épure par une fraction de mètre égale à  $\frac{1}{\lambda}$ ; alors une longueur de  $L$  mètres est représentée par une longueur égale à  $\frac{L}{\lambda}$ . Par exemple, si l'échelle est  $\frac{1}{200}$ , une longueur de 8 mètres sera représentée sur la feuille de dessin par 4 centimètres. Inversement, si une droite mesurée sur l'épure est égale à 4 centimètres, la vraie grandeur de cette droite ou, comme on dit souvent, cette droite *évaluée à l'échelle des longueurs* sera égale à  $0^m,04 \times 200 = 8$  mètres.

De même,  $\varphi$  étant un nombre donné, on dit que l'échelle des forces est  $\frac{1}{\varphi}$ , lorsqu'une tonne est représentée sur l'épure par une fraction de mètre égale à  $\frac{1}{\varphi}$ ; alors une force de  $F$  tonnes sera représentée par une droite ayant  $\frac{F}{\varphi}$  mètres de longueur. Par exemple, si l'échelle des forces est  $\frac{1}{100}$ , une charge de 4 tonnes sera figurée par une droite égale à  $0^m,04$ . Inversement, si le vecteur d'une force, mesuré sur la feuille de dessin, est égal à  $0^m,04$ , la grandeur de la force, ou, comme on dit souvent, le vecteur *évalué à l'échelle des forces* sera égal à  $0,04 \cdot 100 = 4$  tonnes.

**107.** — Ces définitions étant bien comprises, supposons que nous ayons à faire une épure analogue à la précédente. Les données sont : 1° les valeurs, en mètres,

$$L, X_1, X_2, X_3, X_4$$

de la longueur de la poutre et des distances qui séparent l'extrémité gauche des points d'application des forces directement

appliquées ; 2° les valeurs, en tonnes,

$$F_1, F_2, F_3, F_4$$

de ces forces.

Après avoir choisi les échelles  $\frac{1}{\lambda}$  et  $\frac{1}{\varphi}$  des longueurs et des forces, on tracera sur l'épure la droite AB qui représente la poutre et qu'on prendra égale à  $\frac{L}{\lambda}$ . On portera ensuite sur cette droite des longueurs égales à  $\frac{X_1}{\lambda}, \frac{X_2}{\lambda}, \frac{X_3}{\lambda}, \frac{X_4}{\lambda}$  de gauche à droite à partir du point A, et les verticales menées par les extrémités de ces segments représenteront les lignes d'action des forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ .

On prendra ensuite sur une verticale, par exemple sur celle du point B, des segments

$$a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_5$$

respectivement égaux à :

$$\frac{F_1}{\varphi}, \frac{F_2}{\varphi}, \frac{F_3}{\varphi}, \frac{F_4}{\varphi};$$

On aura ainsi le polygone des vecteurs, et après avoir choisi à volonté un pôle  $\pi$ , on tracera, comme il a été dit, le polygone funiculaire  $\omega' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \varphi'$ , sa ligne de clôture  $ab$ , la parallèle  $\pi V$  à  $ab$ , et enfin la ligne  $n_0 n'_0 n_1 \dots a_5$  représentative des efforts tranchants.

Cela fait, on évaluera en mètres, sur la feuille de dessin, les droites :

$$Va_1, a_5 V, un, k\pi, OM$$

et l'on aura :

Réaction  $R = (Va_1 \cdot \varphi)$  tonnes.

Réaction  $R' = (a_5 V \cdot \varphi)$  tonnes.

Effort tranchant en  $I = (un \cdot \varphi)$  tonnes.

Moment fléchissant en  $I = (k\pi \cdot \lambda \cdot OM \cdot \varphi)$  mètres tonnes.

En d'autres termes, et plus brièvement, les réactions et l'effort tranchant seront égaux aux droites  $Va_1, a_5 V, un$  évaluées à l'échelle des forces, et le moment fléchissant sera égal au pro-

duit  $k\pi$ . OM, le premier facteur étant évalué à l'échelle des longueurs et le second à l'échelle des forces.

**108.**— Au lieu de laisser arbitraire la distance polaire  $\delta = k\pi$ , on la choisit souvent de telle sorte qu'on obtienne, en mètres tonnes, la valeur des moments fléchissants en multipliant par un nombre simple  $\rho$ , fixé à l'avance, la valeur de l'ordonnée correspondante OM du polygone funiculaire mesurée en mètres sur l'épure.

Il suffit pour cela qu'on ait

$$\delta \lambda \rho = \rho$$

d'où :

$$\delta = \frac{\rho}{\lambda \rho}$$

On dit alors que l'ordonnée OM représente le moment fléchissant à l'échelle de  $\frac{1}{\rho}$ .

Par exemple, supposons qu'on ait :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{200}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1000}$$

en sorte que chaque millimètre de l'ordonnée OM représente un mètre tonne ; la distance polaire  $\delta$  devra être égale sur l'épure à

$$\frac{1000}{200 \cdot 100} = \frac{1}{20} = 0^m,05.$$

Nous nous sommes étendus longuement sur l'emploi des échelles, bien que la chose n'offre pas au fond de difficulté sérieuse ; mais les débutants s'y méprennent fréquemment, et nous avons voulu leur éviter tout embarras.

### Charge continue.

**109.** — Considérons maintenant le cas où la poutre AB est soumise à une charge continue.

Reportons-nous, pour un instant, au n° 67 et à la figure 47. Soit  $AA'B'B$  l'aire qui représente la charge et qui est d'ailleurs limitée par une ligne quelconque  $A'B'$ . Supposons enfin, qu'en suivant le procédé indiqué au n° 67, on ait construit la courbe funiculaire correspondante.

Cela posé, puisque (n° 65) les propriétés des polygones funiculaires subsistent pour les courbes qui en sont les limites,

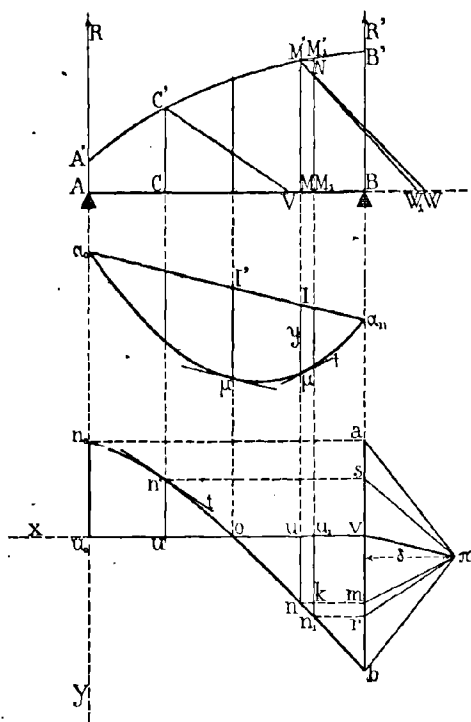


Fig. 61.

nous pourrons, d'après ce qui a été établi pour les charges isolées, énoncer les résultats suivants :

1° En menant par le pôle  $\pi$  la parallèle  $\pi V$  (fig. 61) à la ligne de clôture  $\alpha_0 \alpha_n$ , on aura les vecteurs  $Va$  et  $bV$  des réactions  $R$  et  $R'$  des points d'appui  $A$  et  $B$ .

Observons que, si on voulait déterminer seulement les réac-

tions des appuis, point ne serait besoin de construire la courbe funiculaire. Ces réactions devant faire équilibre aux forces infiniment petites dont l'ensemble constitue la charge continue, on peut remplacer ces forces infiniment petites par leur résultante, qui est proportionnelle à l'aire  $AA'B'B$  et a pour ligne d'action la verticale du centre de gravité de cette aire;  $ab$  étant le vecteur de cette résultante, on construirait un polygone funiculaire de cette force unique; ce polygone se composerait de deux côtés; on prendrait l'intersection du premier avec la verticale du point A et l'intersection du second avec la verticale de B. En joignant les deux points ainsi obtenus, on aurait la ligne de clôture, à laquelle on mènerait, par le pôle, une parallèle qui déterminerait sur  $ab$  les segments qui sont les vecteurs des réactions.

Il résulte d'ailleurs du n° 31 que, si pour construire ce polygone funiculaire à deux côtés, on adoptait le même pôle  $\pi$  que pour la courbe funiculaire, et si l'on faisait passer le premier côté par  $\alpha_0$ , les deux côtés seraient précisément les tangentes en  $\alpha_0$  et  $\alpha_n$  à la courbe; la ligne de clôture serait donc la même et par suite aussi sa parallèle  $\pi V$ .

2° Le moment fléchissant en une section quelconque M sera égal au produit de la distance polaire  $\delta$  par l'ordonnée  $y = I\mu$  de la courbe funiculaire, cette ordonnée étant comptée sur la verticale du point M et à partir de la clôture.

On voit ainsi que le moment fléchissant, nul en A, augmente jusqu'à un certain maximum, puis diminue pour redevenir nul au point B. On obtient d'ailleurs l'extrémité  $\mu'$  de l'ordonnée maximum en menant à la courbe funiculaire la tangente parallèle à la ligne de clôture.

3° Quant à l'effort tranchant dans la section M, il est représenté par le segment  $Vm$  dont l'extrémité  $m$  s'obtient en menant le rayon polaire  $\pi m$  parallèle à la tangente en  $\mu$  à la courbe funiculaire. Si l'on transporte ce segment en  $un$  sur la verticale du point M, à l'aide des horizontales  $Vu$ ,  $mn$ , on obtient le point  $n$  dont le lieu  $n_0ob$ , est le diagramme des efforts tranchants.

L'ordonnée de cette ligne comptée à partir de l'horizontale  $VX$ , c'est-à-dire l'effort tranchant, change de signe au point  $o$



qui est sur la verticale du point  $\mu'$ , attendu que le rayon polaire  $\pi V$ , étant parallèle à la ligne de clôture, est par là même parallèle à la tangente en  $\mu'$ . C'est une vérification de la propriété générale démontrée au n° 84.

**110.** — Nous devons, en vue de la pratique, ajouter encore quelques indications sur l'emploi des échelles.

Nous prenons ici, comme nous l'avons déjà fait et comme nous le ferons toujours dorénavant, le mètre pour unité de longueur et la tonne pour unité de charge.

Soit  $\frac{1}{\lambda}$  l'échelle des longueurs, en sorte que un mètre de l'épure représente  $\lambda$  mètres. La poutre de longueur  $L$ , sera représentée (fig. 60) par la droite  $AB = \frac{L}{\lambda}$ , et si  $M$  est le point de  $AB$  qui figure le point de la poutre dans l'abscisse vraie est  $X$ , on aura  $AM = \frac{X}{\lambda}$ .

Soit  $p$  le coefficient de charge ; c'est une fonction de  $X$  dont la valeur numérique est connue pour chaque valeur de  $X$ . Elevons au point  $M$  une ordonnée  $MM'$  égale à  $\frac{p}{r}$ ,  $r$  étant un nombre choisi à volonté pour la commodité de l'épure. La ligne  $A'M'B'$ , lieu des points  $M'$  représente la *ligne des charges*, et l'aire  $AA'M'B'B$  représente la *surface de charge* ; il faut entendre par là que, si  $C$  et  $M$  sont deux points quelconques de  $AB$ , la charge, sur la partie de la poutre comprise entre les deux points correspondants, est

$$r \cdot \lambda \cdot \text{aire } CC'M'M ;$$

par exemple, si  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{50}$  et si, en mesurant l'aire  $CC'M'M$  sur l'épure on trouve  $0^{\text{m}3},0003$ , la charge considérée sera

$$0,0003 \times 100 \cdot 50 = 1^{\text{t}},5$$

c'est-à-dire une tonne et demie. Pour le prouver, il suffit évidemment de considérer un élément infiniment petit  $MM'M_1M_1$

de l'aire ; or la charge sur la partie  $dX$  de la poutre, qui répond à l'élément  $MM_1$  est  $p dX$ , qu'on peut écrire :

$$r\lambda \frac{p}{r} d\left(\frac{X}{\lambda}\right) = r\lambda \cdot \text{aire } MM_1'M_1$$

Cela posé, divisons l'aire totale  $AA' BB'$ , (fig. 47), par des ordonnées verticales  $11'$ ,  $22'$ ,  $33'$ ,  $44'$ , en plusieurs parties d'ailleurs quelconques ; (dans la pratique, on les prend assez petites pour qu'on puisse les assimiler à des trapèzes rectilignes). Soient  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , les aires de ces parties mesurées sur l'épure, et imaginons des forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , agissant de haut en bas suivant les verticales des centres de gravité  $G_1, G_2, G_3, G_4$  des aires partielles et ayant respectivement pour intensités

$$r\lambda S_1, \quad r\lambda S_2, \quad r\lambda S_3, \quad r\lambda S_4.$$

Construisons le polygone des vecteurs  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  de ces forces, en prenant

$$a_1 a_2 = \frac{F_1}{\varphi}, \quad a_2 a_3 = \frac{F_2}{\varphi}, \quad a_3 a_4 = \frac{F_3}{\varphi}, \quad a_4 a_5 = \frac{F_4}{\varphi},$$

l'échelle  $\frac{1}{\varphi}$  étant choisie à volonté. Puis, à l'aide d'un pôle  $\pi$ , construisons un polygone funiculaire  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \varphi$  des dites forces. En vertu du n° 64, la courbe funiculaire relative à la charge répartie sera tangente aux divers côtés de ce polygone aux points  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ , où ces côtés rencontrent les verticales séparatrices  $11', 22', 33', 44'$ .

Il importe d'observer que le choix du nombre  $r$ , c'est-à-dire de l'échelle  $\frac{1}{r}$  adoptée pour les ordonnées de la ligne des charges, n'influe en rien sur les valeurs des vecteurs  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots$ , attendu que lorsque  $r$  change,  $\lambda$  restant le même,  $S_1, S_2, \dots$  changent, de façon que les produits  $rS_1, rS_2, \dots$  restent constants.

La courbe funiculaire étant ainsi construite, on tracera la ligne de fermeture, et le moment fléchissant relatif à la section correspondante à un point quelconque  $M$  de  $AB$  (fig. 64), aura pour expression

$$\lambda \varphi \delta \cdot y \text{ mètres-tonnes,}$$

où  $y$  désigne l'ordonnée  $I_{\mu}$  mesurée sur l'épure et  $\delta$  la distance polaire mesurée aussi sur la feuille de dessin.

C'est ce qu'on exprime plus brièvement en disant que l'ordonnée  $y$  représente le moment fléchissant à l'échelle  $\frac{1}{\rho}$ ,  $\rho$  désignant le nombre  $\lambda\varphi\delta$ .

**111.** — On peut construire simplement la tangente en un point quelconque  $n$  de la ligne représentative des efforts tranchants (fig. 61).

C'est la limite de la sécante  $mm_1$ ,  $n_1$  désignant le point de la courbe qui est infiniment voisin de  $n$ . Menons les verticales des points  $n$  et  $n_1$  et appelons  $M$  et  $M_1$ ,  $M'$  et  $M'_1$  les points où ces verticales rencontrent la droite  $AB$  et la courbe  $A'B'$ ; puis, par  $M'$ , menons la parallèle  $M'W_1$  à  $mn_1$ . Si on désigne par  $k$  le point où  $Mn_1$  rencontre  $mm$ , on voit que les triangles  $MMW_1$  et  $nmn_1$  ont leurs côtés parallèles; de là, la proportion

$$\frac{MW_1}{MM'} = \frac{nk}{n_1k} = \frac{MM_1}{rm}$$

$r$  étant le point où l'horizontale du point  $n_1$  coupe la ligne des vecteurs. On en déduit

$$MW_1 = \frac{MM' \cdot MM_1}{rm}$$

Mais, la numérateur est l'aire du rectangle  $MMM_1N$ ; quant au dénominateur  $rm$ , d'après la manière dont on a construit le polygone des vecteurs (n° 110), on a

$$rm = \frac{\text{aire } MM'M_1M_1}{\varphi} \cdot r \cdot \lambda.$$

On a donc

$$MW_1 = \frac{\varphi}{r\lambda} \frac{\text{aire } M'MM_1N}{\text{aire } M'MM_1M'_1},$$

et, à la limite,

$$MW = \frac{\varphi}{r\lambda}.$$

De là cette règle : portez sur  $AB$ , à partir de la section  $M$

considérée, un segment MW égal à  $\frac{p}{r\lambda}$ ; la parallèle à MW, menée par  $n$ , sera la tangente, en ce point  $n$ , au diagramme des efforts tranchants.

Remarquons encore que dans le cas des charges isolées aussi bien que dans celui de la charge continue, les valeurs minima et maxima de l'effort tranchant ( $u_0 n_0$  et  $V a_s$  dans la figure 60,  $u_0 n_0$  et  $V b$  dans la figure 61) sont égales en valeur absolue aux réactions R et R' des appuis A et B.

### Charge uniformément répartie

**112.** — Le cas le plus intéressant de la charge continue est celui où cette charge est *uniforme*.

Alors la ligne des charges A'B' est une ligne droite parallèle à AB; la courbe funiculaire est une parabole à axe vertical (n° 70). Enfin la ligne représentative des efforts tranchants est une droite; ce dernier fait résulte de ce que la direction MW de la tangente à cette ligne (fig. 61) reste invariable, puisque les côtés de l'angle droit du triangle M' MW sont constants en grandeur et direction; on peut dire aussi que le diagramme des moments fléchissants étant une parabole, son ordonnée est du second degré par rapport à l'abscisse et par suite l'ordonnée du diagramme des efforts tranchants, qui est (n° 84) la dérivée de la première, est une fonction linéaire de l'abscisse.

Pratiquement, le tracé de la ligne des charges A'B' n'est ici d'aucune utilité. Les données se réduisent à la longueur L de la poutre et à la charge  $p$  par mètre courant; L est exprimé en mètres, et  $p$  en tonnes. Il est clair d'ailleurs que les réactions sont ici égales entre elles; leur valeur absolue est la moitié de la charge totale, c'est-à-dire égale à  $\frac{1}{2} pL$  tonnes.

Après avoir choisi l'échelle des longueurs  $\frac{1}{\lambda}$  et l'échelle des forces  $\frac{1}{\varphi}$ , on tracera une horizontale  $AB = \frac{L}{\lambda}$  que représentera

la fibre moyenne de la poutre (fig. 62). Puis, sur une verticale, par exemple sur la verticale du point B, on portera deux longueurs  $aV$ ,  $bV$  égales l'une et l'autre à  $\frac{pL}{2\varphi}$ , en sorte que  $ab$  sera le vecteur de la charge totale, et  $Va$ ,  $bV$  les vecteurs des réactions.

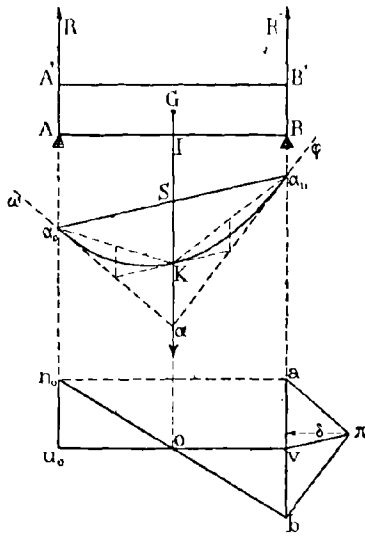


Fig. 62.

A l'aide d'un pôle  $\pi$  pris à volonté on construira le polygone funiculaire  $\omega\alpha\varphi$  d'une force égale à la charge totale et ayant pour ligne d'action la verticale menée par le milieu I de AB. La parabole qui représente la courbe funiculaire de la charge uniforme sera (n° 70) tangente aux côtés  $\omega\alpha$  et  $\alpha\varphi$  de ce polygone aux points  $\alpha_0$  et  $\alpha_u$  où ces deux côtés rencontrent respectivement les verticales des points d'appui.

Cette parabole dont les diamètres sont verticaux est donc bien déterminée ; on la tracera d'après les procédés indiqués au n° 70. Son équation est l'équation (7) de la page 79.

Une vérification s'offrira ici d'elle-même ; la ligne de clôture  $\alpha_0\alpha_u$  devra se trouver parallèle à  $\pi V$ , puisque  $Va$  et  $bV$  sont les valeurs des réactions.

Enfin si l'on mène les horizontales  $Vu_o$ ,  $an_o$ , la droite  $n_ob$  sera la ligne représentative des efforts tranchants. Cette droite devra d'ailleurs couper  $Vu_o$  en son milieu, c'est-à-dire sur la verticale du point I.

Il faudra multiplier par  $\varphi$  les ordonnées de la droite  $n_ob$ , mesurées sur l'épure et comptées à partir de  $Vu_o$ , pour avoir, en tonnes, les efforts tranchants. Pour avoir les moments fléchissants en mètre-tonnes, on multipliera par  $\lambda\varphi$  le produit  $y\delta$  de l'ordonnée de la parabole comptée à partir de  $\alpha_o\alpha_n$  par la distance polaire  $\delta$ ,  $y$  et  $\delta$  étant, bien entendu, mesurés sur l'épure.

Le moment fléchissant maximum sera

$$SK \cdot \delta \cdot \lambda\varphi,$$

SK étant l'ordonnée correspondant au milieu de la poutre.

On peut déduire de la figure la valeur algébrique de ce moment en fonction des données  $p$  et  $L$ .

En effet, on a d'abord

$$SK = \frac{1}{2} S\alpha;$$

puis, les triangles à côtés parallèles  $\alpha_o\alpha S$ ,  $a\pi V$  donnent

$$\frac{S\alpha}{aV} = \frac{\alpha_o S}{V\pi} = \frac{AI}{\delta},$$

d'où

$$\delta \cdot SK = \frac{1}{2} aV \cdot AI$$

et par suite

$$\lambda\varphi\delta \cdot SK = \frac{1}{2} (AI \cdot \lambda) (aV \cdot \varphi),$$

Le moment fléchissant maximum a donc pour valeur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{pL}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{8} pL^2.$$

Cette formule qu'il est utile de connaître résulterait d'ailleurs de l'expression (8) de la page 79.

**113.** — Nous avons choisi le pôle  $\pi$  arbitrairement. Si on

voulait que la ligne de clôture  $\alpha_0\alpha_n$  fut horizontale, il suffirait de prendre le pôle sur l'horizontale du point V.

C'est cette disposition qu'on adopte de préférence, lorsqu'on n'a pas de raison pour choisir le pôle d'une façon particulière.

114. — La figure 63 est relative au cas où la charge uniforme ne règne que sur une portion  $X_1X_2$ , de la poutre AB.

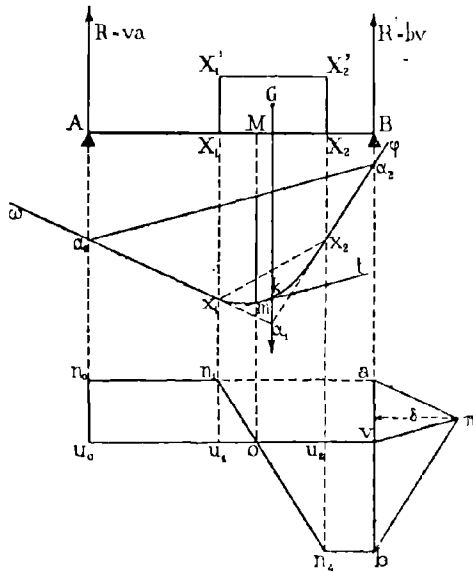


Fig. 63.

$ab$  étant le vecteur de cette charge supposée remplacée par une force unique agissant suivant la verticale du milieu de  $X_1X_2$ , on a construit à l'aide d'un pôle  $\pi$ , un polygone funiculaire  $\omega\alpha_1\phi$  de cette force ; la parallèle  $\pi V$  à la ligne de clôture  $\alpha_0\alpha_2$  détermine les vecteurs  $Va$  et  $bV$  des réactions  $R$  et  $R'$  des appuis A et B.

Le diagramme des moments fléchissants se compose de trois parties. La première et la dernière sont rectilignes ; ce sont les portions  $\alpha_0\alpha_1$  et  $\alpha_2\alpha_3$  des côtés  $\omega\alpha_1$  et  $\alpha_1\phi$ , interceptées respectivement entre les verticales de A et de  $X_1$  et entre les

verticales de  $X_2$  et de  $B$ . La partie intermédiaire qui répond à la partie chargée de la poutre, est un arc de parabole  $x_1 k x_2$  à axe vertical et dont les tangentes en  $x_1$  et  $x_2$  sont  $\omega x_1$  et  $\alpha_2 \varphi$  (n° 64). Les ordonnées de la ligne  $\alpha_0 x_1 k x_3 x_2$  comptées à partir de la ligne de clôture seront proportionnelles aux moments fléchissants, dont le maximum répondra au point de contact  $m$  de la tangente  $mt$  parallèle à  $\alpha_0 \alpha_2$  ou à  $\pi V$ .

Quant au diagramme des efforts tranchants, il se compose de trois parties rectilignes. Les deux extrêmes, celles qui répondent aux parties non chargées de la poutre, sont les horizontales  $n_0 n_1$  et  $n_2 b$ ; la partie intermédiaire  $n_1 n_2$  doit, comme vérification, passer par le point  $O$  où la verticale du point  $m$  rencontre l'horizontale  $Vu_0$ , puisque l'effort tranchant s'annule quand le moment fléchissant est maximum.

**115.** — La poutre représentée dans la figure 64 est soumise à deux charges continues uniformes et qui règnent, l'une sur une partie de la pièce, l'autre sur le reste de sa longueur.

Le rectangle  $AA'X_1'X_1$  représente la charge uniformément répartie sur  $AX$ , et le rectangle  $X_1X''_1B'B$  la charge uniformément répartie sur  $X_1B$ .

Désignons par  $F$  et  $F'$  deux forces proportionnelles aux aires de ces rectangles et respectivement appliquées suivant les verticales des centres de gravité  $G$  et  $G'$  de ces aires.

$ac$  et  $cb$  étant les vecteurs de  $F$  et de  $F'$ , et  $\pi$  un pôle arbitraire, construisons un polygone funiculaire  $\omega x_1 x_2 \varphi$  de ces deux forces et désignons par  $\alpha_0$  et  $\alpha_3$  les points de rencontre des côtés extrêmes avec les verticales des appuis  $A$  et  $B$ . La parallèle  $\pi V$  à la ligne de clôture  $\alpha_0 \alpha_3$  déterminera les vecteurs  $Va$  et  $bV$  des réactions  $R$  et  $R'$  de ces appuis.

La diagramme des moments fléchissants se composera ici de deux arcs de parabole à axe vertical; l'un  $\alpha_0 x$  est tangent en  $\alpha_0$  à  $\omega x_1$  et en  $x$  à  $\alpha_1 \alpha_2$ ; l'autre  $x \alpha_3$  touche en  $x$  le côté  $\alpha_1 \alpha_2$  et en  $\alpha_3$  le côté  $\alpha_3 \varphi$  (n° 64). Ces arcs se raccordent donc au point  $x$ , et on a tout ce qu'il faut pour les construire (n° 70).

Le diagramme des efforts tranchants se compose de deux parties rectilignes  $n_0 n_1$  et  $n_1 b$ , l'une relative à la portion  $AX_1$  de la poutre, l'autre à la portion  $X_1B$ ; leur point commun  $n_1$



est l'intersection de la verticale du point  $X_1$  et de l'horizontale du point  $c$ . Enfin le point  $O$  où cette ligne brisée  $n_0n_1b$  rencontre l'horizontale  $Vu_1$  donne la section  $Oml$  où l'effort tran-

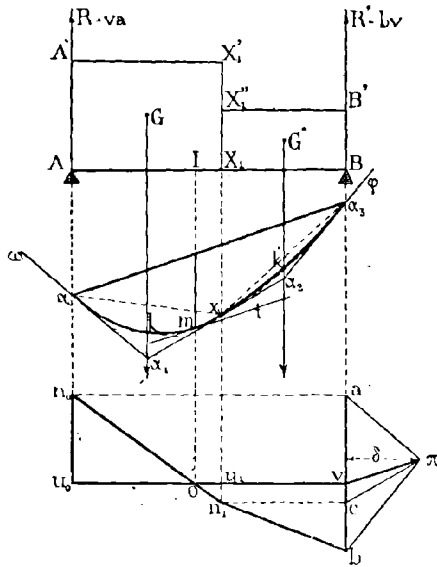


Fig. 64.

chant est nul et le moment fléchissant maximum; comme vérification la tangente  $mt$  de la ligne funiculaire doit être parallèle à la ligne de clôture  $\alpha_1\alpha_3$ .

**Charge mixte.**

**116.** — Nous disons que la charge est mixte lorsqu'elle se compose à la fois, comme dans la fig. 65, de charges concentrées et de charges réparties.

Soient  $F_2, F_3, F_5$  les charges concentrées aux points  $X_2, X_3, X_5$  de la poutre. Il y a en outre, sur la portion  $AX_1$ , comprise entre l'appui  $A$  et le point  $X_1$ , une charge uniformément répartie, représentée par l'aire du rectangle  $AA'X'_1X_1$ ; désignons par  $F_1$  une force égale à cette aire et appliquée à son centre de

gravité  $G$ . Enfin sur la partie  $X_3B$ , comprise entre  $X_3$  et l'appui  $B$ , s'exerce une charge uniformément répartie, représentée par l'aire  $X_3X'_3B'B$ ; décomposons cette aire en deux  $X_3X'_2X'_3X'_3$ ,  $X'_3X'_3B'B$ , et désignons par  $F_4$  et  $F_6$  des forces égales à ces deux aires et appliquées en leurs centres de gravité  $G'$  et  $G''$ .

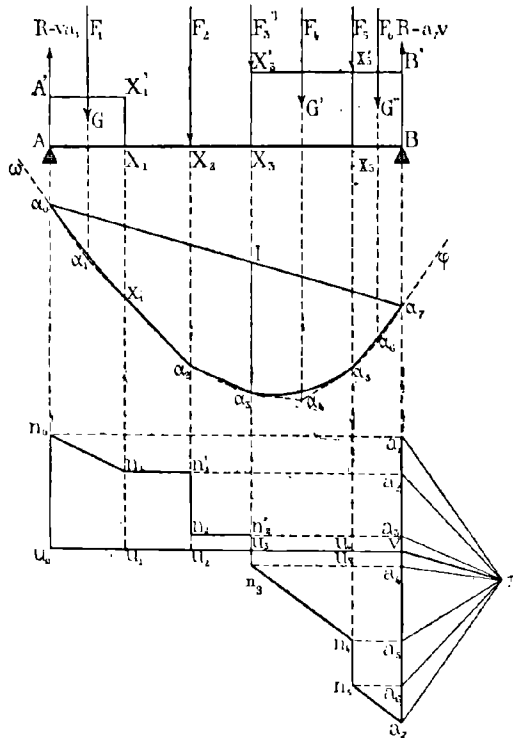


Fig. 65.

Cela posé, considérons le système des six forces  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ ; construisons le polygone des vecteurs  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ ; puis, à l'aide d'un pôle  $\pi$ , traçons un polygone funiculaire  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \phi$ , et désignons par  $\alpha_0$  et  $\alpha_7$  les points où les côtés extrêmes  $\omega \alpha_1$  et  $\alpha_6 \phi$  rencontrent respectivement les verticales des appuis; la parallèle  $\pi V$  à la ligne de clôture  $\alpha_0 \alpha_7$  déterminera les vecteurs  $V a_1$  et  $a_7 V$  des réactions  $R$  et  $R'$  des appuis  $A$  et  $B$ .

Le diagramme des moments se composera de diverses parties correspondantes aux segments dans laquelle la poutre AB se trouve décomposée par les points  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ . Ces parties sont : 1° un arc de parabole  $\alpha_0x_1$  tangente en  $\alpha_0$  à  $\alpha_0\alpha_1$  et en  $x_1$  à  $\alpha_1\alpha_2$ ; 2° une portion de droite  $x_1\alpha_2$ ; 3° une portion de droite  $\alpha_2\alpha_3$ ; 4° un arc de parabole  $\alpha_3\alpha_5$ , tangente en  $\alpha_3$  à  $\alpha_3\alpha_4$  et en  $\alpha_5$  à  $\alpha_5\alpha_6$ ; 5° un arc de parabole  $\alpha_5\alpha_7$ , tangente en  $\alpha_5$  à  $\alpha_5\alpha_6$  et en  $\alpha_7$  à  $\alpha_6\alpha_7$ . Chacune de ces trois paraboles a d'ailleurs son axe vertical. Il importe d'observer que les deux arcs paraboliques  $\alpha_3\alpha_5$ ,  $\alpha_5\alpha_7$  ne se raccordent pas; leurs tangentes  $\alpha_3\alpha_4$  et  $\alpha_5\alpha_6$ , au point commun  $\alpha_5$ , sont différentes; cette discontinuité tient à la présence de la charge concentrée  $F_5$ .

Le diagramme des efforts tranchants se compose de la droite inclinée  $n_0n_1$ , des horizontales  $n_1n'_1$ ,  $n_2n'_2$  et des deux droites inclinées  $n_3n_4$ ,  $n_5n_7$ . Les changements brusques correspondant aux parties verticales  $n'_1n_2$ ,  $n'_2n_3$ ,  $n_4n_5$  proviennent de la présence des forces concentrées  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_5$ ; les deux droites inclinées  $n_3n_4$ ,  $n_5n_7$  sont d'ailleurs parallèles, puisqu'elles correspondent à des charges réparties représentées par des rectangles de même hauteur.

**Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre.**

**117.** — On dit qu'une pièce est encastree à l'une de ses extrémités quand sa liaison avec l'appui tend à empêcher ou à réduire la déviation en ce point de la fibre moyenne. L'encastrement est dit *parfait* ou *imparfait*, suivant que la liaison rend cette déviation absolument nulle ou seulement très faible. Nous supposerons ici l'encastrement parfait.

Tandis qu'un appui simple ne donne lieu qu'à une réaction, un encastrement développe à la fois une réaction et un couple. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la cavité M dans laquelle est engagé l'about de la pièce (fig. 66). L'arc-boutement aux points  $\alpha$  et  $\beta$  fait naître deux forces verticales U et T de sens opposés; et, si l'on applique au point  $\beta$  deux forces verticales S et  $S_1$  égales et contraires et ayant la même

valeur que  $U$ , on voit que tout se réduit à une réaction égale à  $T - S$ , et à un couple  $(U, S)$  dont le moment reçoit le nom de *moment d'encastrement*.

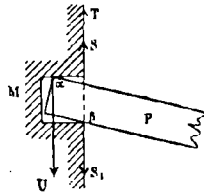


Fig. 66.

Cette réaction et ce couple font équilibre aux charges  $F_1, F_2, F_3$  (fig. 67). Il résulte de là que la réaction  $R$  est égale à la somme des forces  $F_1, F_2, F_3$  et dirigée de bas en haut, et que le moment d'encastrement changé de signe est égal à la somme des moments des forces  $F_1, F_2, F_3$  par rapport au point  $B$ ; en d'autres termes, ce moment changé de signe est égal au moment fléchissant au point  $B$ .

Dès lors, après avoir construit le polygone des vecteurs  $a_1 a_2 a_3 a_4$  des forces  $F_1, F_2, F_3$ , ce qui donne immédiatement la valeur  $a_4 a_1$  de la réaction  $R$ , on choisira arbitrairement un pôle  $\pi$ , et on construira un polygone funiculaire  $\omega \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \varphi$  des forces  $F_1, F_2, F_3$ ; le moment fléchissant dans une section quelconque  $I$  sera égal au produit

$$\delta. pm$$

de la distance polaire  $\delta$  (évaluée à l'échelle des longueurs) par l'ordonnée  $pm$  (évaluée à l'échelle des forces) du point correspondant  $m$  de la ligne funiculaire, cette ordonnée étant comptée à partir du premier côté  $\omega \alpha_1 q$ .

En particulier, le moment d'encastrement sera égal à

$$- \delta. qn.$$

Quant à l'effort tranchant, il a pour valeur l'ordonnée de la ligne brisée  $u_0 n_0 n'_1 n_1 n'_2 n_2 a_4$ , cette ordonnée étant comptée à partir de l'horizontale du point  $a_4$ . Egal à  $u_0 n_0$  à l'extrémité libre  $A$  où s'exerce la force  $F_1$ , il reste constant jusqu'au point

C où il passe brusquement de la valeur  $u_1 n'_1$  à  $u_1 n_1$ ; puis, il garde cette valeur jusqu'au point D où il passe brusquement de  $u_1 n_1$  à  $u_2 n_2$  pour conserver ensuite cette valeur jusqu'à B.

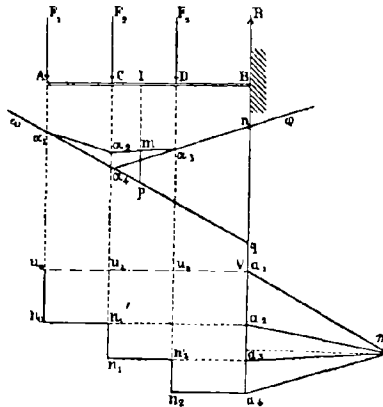


Fig. 67.

**118.** — La figure 68 est relative au cas où la poutre AB, libre en A et encastrée en B, supporte une charge uniforme représentée par le rectangle ABED.

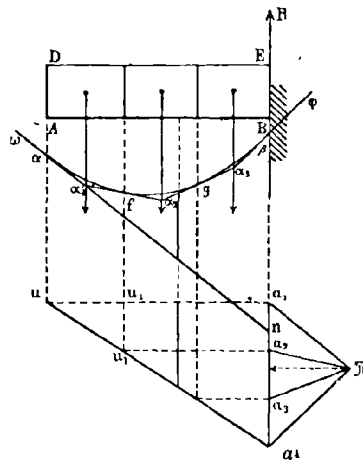


Fig. 68.

Le polygone des vecteurs sera ici un segment vertical  $a_1a_2$ , proportionnel à l'aire de ce rectangle, et  $a_1a_2$  représentera la valeur de la réaction.

Le polygone funiculaire sera remplacé par un arc  $\alpha f g \beta$  de parabole à axe vertical. On construira cet arc (n° 67), à l'aide d'un polygone funiculaire circonscrit  $\omega \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \varphi$  correspondant aux forces que l'on obtiendrait en divisant la surface de charge en diverses parties par des verticales et concentrant chaque charge partielle au centre de gravité de l'aire correspondante; ce polygone touche la parabole sur les verticales des points A et B et sur les verticales séparatrices.

Les ordonnées de cette parabole comptées à partir de la tangente  $\omega \alpha \alpha_1$  sont proportionnelles aux moments fléchissants. Quant aux efforts tranchants, leur diagramme est la droite  $ua_2$ ,  $u$  étant l'intersection de la verticale du point A et de l'horizontale du point  $\alpha_1$ . Enfin le moment d'encastrement est proportionnel à  $\beta n$ .

### **Poutre reposant sur deux appuis intermédiaires.**

**119.** — Considérons enfin le cas de deux appuis simples A et B, mais non situés aux extrémités M et N de la poutre.

Supposons d'ailleurs la charge uniforme sur toute l'étendue MN de la pièce, soit  $aa'$  le vecteur de la charge totale (fig. 69),  $\pi$  un pôle pris à volonté et  $\mu \epsilon \nu$  l'arc parabolique qui est, pour ce pôle, la courbe funiculaire des forces infiniment petites qui constituent la charge répartie.

Les réactions R et R' devant équilibrer la charge totale, la somme de leurs vecteurs doit être égale à  $a'a$ ; soit V le point (encore inconnu) de  $aa'$  qui détermine ces vecteurs  $Va$  et  $a'V$ . Le polygone funiculaire relatif au système total formé par la réaction R, les charges infiniment petites et la réaction R', se composera d'un premier côté  $\omega \alpha$  parallèle à  $\pi V$ , d'un second côté  $\alpha \mu$  parallèle à  $\pi a$ , de l'arc parabolique  $\mu \epsilon \nu$  qui est tangent en  $\mu$  à  $\alpha \mu$ , d'un côté  $\nu \beta$  parallèle à  $\pi a'$  et tangent en  $\nu$  à l'arc parabolique, et enfin d'un dernier côté  $\beta \varphi$  parallèle à  $\pi V$ . Comme ce polygone doit être fermé,  $\omega \alpha$  et  $\beta \varphi$  doivent coïnci-

der avec la ligne  $\beta\alpha$ . La ligne funiculaire complète est donc entièrement connue ; on l'obtient en joignant les points  $\alpha$  et  $\beta$  où les tangentes en  $\mu$  et en  $\nu$  à l'arc parabolique  $\mu\varepsilon\nu$  rencontrent respectivement les verticales des points d'appui A et B. Il suffit ensuite de mener  $\pi V$  parallèle à  $\alpha\beta$  pour avoir les vecteurs  $V\alpha$ ,  $\alpha'V$  des réactions R et R'.

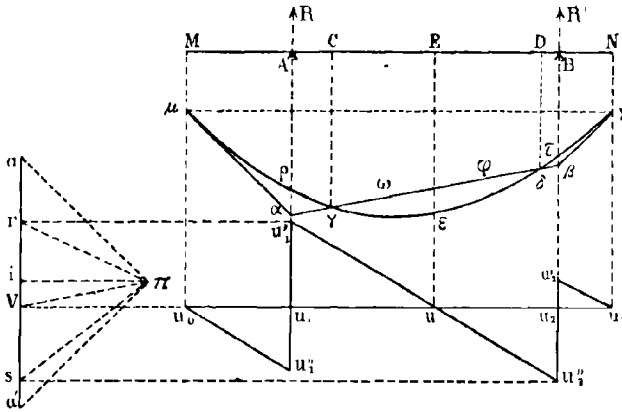


Fig. 69.

Le moment fléchissant en une section quelconque sera le produit de la distance polaire par le segment intercepté, entre la ligne brisée  $\mu\alpha\beta\nu$  et l'arc parabolique  $\mu\varepsilon\nu$ , sur la verticale relative à cette section. On voit par là que si, comme dans notre figure, la droite  $\alpha\beta$  coupe l'arc parabolique  $\mu\varepsilon\nu$ , le moment fléchissant sera positif entre C et D, et négatif entre M et C et entre D et N. La valeur absolue de ce moment offre trois maximums, l'un en  $\varepsilon$  où la tangente est parallèle à  $\alpha\beta$ , les deux autres en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Menons les rayons polaires  $\pi r$ ,  $\pi s$  respectivement parallèles aux tangentes à la parabole aux points  $\rho$  et  $\tau$  où cette courbe est rencontrée par les verticales des appuis A et B. L'effort tranchant nul au point M, augmente jusqu'à l'appui A où il passe brusquement de la valeur positive  $ar$  à la valeur négative  $ar + Va = Vr$ ; il augmente ensuite en restant négatif jusqu'au point E où il devient nul et change de signe; positif de E en B, il passe en ce point de la valeur  $Vs$  à la valeur négative

tive  $Vs + a'V = a's$ , puis il augmente en restant négatif pour devenir nul au point N. Tout cela résulte immédiatement de la définition même de l'effort tranchant. Le diagramme est le contour rectiligne  $u_0u''_1u'_1u''_2u'_2u_3$  que l'on obtient en portant au-dessus de l'horizontale  $Vu_0u_2$  les segments  $u_1u'_1 = Vr$ ,  $u_2u'_2 = a's$  et au-dessous de la même droite les segments  $u_1u''_1 = ar$ ,  $u_2u''_2 = Vs$ . Les trois parties  $u_0u''_1$ ,  $u'_1u''_2$ ,  $u'_2u_3$  sont des droites, puisque la charge est uniforme. Comme vérification, le point  $u$  où  $u'_1u''_2$  rencontre  $u_0u_3$  est sur la verticale  $E_\varepsilon$ .

**120.** — Si les appuis étaient aux extrémités de la poutre, le diagramme des moments fléchissants se réduirait à l'arc parabolique  $\mu_{\varepsilon\nu}$  (n° 112) ; d'où il suit que les moments fléchissants sont plus petits pour une poutre supportée en deux points intermédiaires que dans une poutre de même longueur supportée à ses deux extrémités.

C'est d'ailleurs une étude fort aisée que celle des variations successives de la figure, lorsque les appuis, supposés d'abord aux extrémités M et N se rapprochent graduellement l'un de l'autre. La parabole  $\mu_{\varepsilon\nu}$  reste fixe, et la droite  $\alpha\beta$  qui coïncide d'abord avec  $\mu_{\nu}$ , se déplace en laissant au-dessous d'elle un arc de parabole  $\gamma\varepsilon\delta$  de plus en plus petit ; elle devient tangente à cette courbe pour une certaine position des appuis, à partir de laquelle tous les moments fléchissants deviennent négatifs.

### Construction de la ligne élastique.

**121.** — Nous l'avons dit au n° 82 ; ce qu'il importe de construire, ce n'est pas la ligne élastique elle-même  $\varepsilon$ , mais sa ligne homographique  $\varepsilon_1$  (fig. 70).

Supposons la poutre homogène, de section constante et reposant sur deux appuis placés à ses extrémités : L'étant sa longueur en mètres et  $\frac{1}{\lambda}$  l'échelle des longueurs, soit  $AB = \frac{L}{\lambda}$  la ligne qui représente la poutre sur l'épure, et  $\alpha\mu\beta$  le dia-



gramme des moments fléchissants. Ce diagramme a été construit, comme nous l'avons expliqué aux n<sup>os</sup> 107 et 110, à l'aide d'une échelle des forces  $\frac{1}{\varphi}$  et d'une distance polaire prise sur l'épure égale à  $\delta$ , en sorte que si l'on pose  $\lambda\varphi\delta = \rho$  et si l'on désigne par  $y$  l'ordonnée du diagramme mesurée sur l'épure, on a pour le moment fléchissant  $M$  dans la section correspondante

$$M = \rho y .$$

D'après le n<sup>o</sup> 82, il s'agit de construire avec la distance polaire

$$(1) \quad \Delta = \frac{EI}{\lambda q h}$$

où  $h$  est arbitraire, la couche funiculaire  $\varepsilon_1$  qui passe par les points A et B et qui est relative à la charge fictive

$$\frac{\lambda}{h} M . dX_1 = \frac{\lambda\rho}{h} y dX_1$$

s'exerçant sur chaque élément  $dX_1$  de AB; la charge fictive sur AB sera alors

$$\frac{\lambda\rho}{h} \Sigma y dX_1 = \frac{\lambda\rho}{h} \sigma,$$

$\sigma$  désignant l'aire du diagramme  $\alpha\mu\beta$  mesurée sur l'épure.

On commence par construire un polygone funiculaire cir-

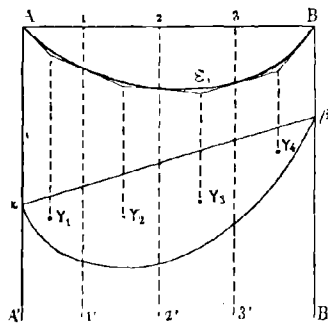


Fig. 70.

conscrit à la courbe cherchée  $\varepsilon_1$ . A cet effet (n<sup>o</sup> 64) on divise, par des verticales 11', 22', 33', l'aire du diagramme  $\alpha\mu\beta$  en

plusieurs parties dont on mesure les aires  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ , sur la feuille de dessin et dont on détermine aussi les centres de gravité  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ . Considérant alors des forces agissant de haut en bas suivant les verticales de ces centres et ayant respectivement pour vecteurs,

$$(2) \quad \frac{\lambda \rho}{h} \sigma_1, \quad \frac{\lambda \rho}{h} \sigma_2, \quad \frac{\lambda \rho}{h} \sigma_3, \quad \frac{\lambda \rho}{h} \sigma_4,$$

on construit le polygone de ces vecteurs, puis avec la distance polaire  $\Delta$ , on trace le polygone funiculaire qui passe par A et B.

La ligne cherchée  $\varepsilon_1$  sera inscrite dans ce polygone, dont elle touchera les côtés aux points où ils sont coupés par les verticales séparatrices  $A\alpha, 11', 22', 33', B\beta$ .

**122.** — Il importe, quand on fait une application, de ne pas se tromper sur la valeur numérique du coefficient d'élasticité E. Ce coefficient exprime un certain nombre d'unités de force par unité de section. Sa valeur pour chaque matière suppose donc qu'on ait fait choix d'une unité d'aire (carré construit sur l'unité de longueur) et d'une unité de force. Ainsi, pour le fer, le coefficient d'élasticité est égal environ à  $2.10^{10}$  lorsqu'on prend pour unité d'aire le mètre carré et pour unité de force le kilogramme ; si donc, suivant nos conventions, nous adoptons la tonne pour unité de force et le mètre carré pour unité de section, il faudra diviser le nombre précédent par 1000, valeur de la tonne en kilogrammes, et prendre  $E = 2.10^7$ .

**123.** — Dans la solution que nous venons d'exposer,  $h$  reste arbitraire ; on le choisit finalement de façon que la distance polaire (1) et les vecteurs (2) s'accommodent bien aux exigences de l'épure.

Ainsi, supposons qu'on ait pris

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{80}, \quad q = 2$$

$$E = 2.10^7, \quad I = 0,0000345,$$

et qu'en mesurant sur la feuille de dessin l'aire partielle  $\sigma$ , on ait obtenu

$$0^{\text{m}},000150,$$

on aura pour la distance polaire  $\Delta$  et pour le vecteur  $v_1$  de la portion de charge fictive concentrée en  $\gamma_1$ , les expressions

$$\Delta = \frac{EI}{\lambda q h} = \frac{6^{\text{m}},9}{h}, \quad v_1 = \frac{\lambda \rho \sigma_1}{h} = \frac{0^{\text{m}},6}{h}$$

On voit par là que si l'on prenait  $h$  égal à 1, on aurait des valeurs

$$\Delta = 6^{\text{m}},9, \quad v_1 = 0^{\text{m}},6$$

beaucoup trop grandes, eu égard aux dimensions de la feuille de dessin, tandis que si l'on prend  $h$  égal à 100, les valeurs

$$\Delta = 0^{\text{m}},069, \quad v_1 = 0^{\text{m}},006$$

qui résulteront de ce choix seront très convenables.

**121.** — On peut opérer autrement en appliquant le premier énoncé du n° 82 et non le second, comme nous venons de le faire.

On prend pour vecteurs des charges fictives concentrées en  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  les quantités

$$\frac{\sigma_1}{k}, \quad \frac{\sigma_2}{k}, \quad \frac{\sigma_3}{k}, \quad \frac{\sigma_4}{k}$$

où  $k$  désigne l'expression

$$\frac{11EI}{\Delta \lambda^3 q \rho}$$

On choisit  $k$  et  $\Delta$  de façon que ces vecteurs et cette distance polaire satisfassent aux exigences de l'épure ; enfin on construit, avec la distance  $\Delta$ , le polygone funiculaire qui passe par A et B, et l'on trace la courbe  $\epsilon_1$ , qui touche les côtés de ce polygone sur les verticales séparatrices ; les ordonnées mesurées sur l'épure seront égales aux ordonnées de la ligne

élastique multipliées par

$$(3) \quad q = \frac{EI}{\Delta} \cdot \frac{1}{\lambda^2 k^2}$$

En reprenant l'exemple numérique du numéro précédent, on aurait, dans cette manière d'opérer,

$$v_1 = \frac{0^m 9,000150}{k}, \quad q = \frac{0,69}{20 k \Delta}$$

et, par suite,

$$v_1 = 0^m,006, \quad q = 2$$

en adoptant

$$\Delta = 0^m,060, \quad k = 0^m,125.$$

**125.** — Ce second procédé s'applique d'ailleurs sans modification à tous les cas.

Supposons par exemple la poutre homogène, mais de section variable ; le coefficient d'élasticité  $E$  reste constant, mais le moment d'inertie  $I$  varie et prend respectivement les valeurs

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3$$

dans les parties de la poutre qui répondent aux portions AC, CD, DB de la droite AB. On opérera comme au numéro précédent, en ayant soin de placer une des verticales au point C et une autre au point D. De plus, on attribuera au moment d'inertie la valeur  $I_1$  dans les expressions (3) des vecteurs qui se rapportent aux divisions de la portion AC, la valeur  $I_2$  aux vecteurs relatifs à la portion CD, la valeur  $I_3$  aux vecteurs relatifs à la portion DB. En d'autres termes, ici on fixera d'avance la valeur qu'on veut prendre pour  $q$ , et la formule (3) donnera la valeur de  $k$  correspondantes aux valeurs de  $I$ .

Si le moment d'inertie, au lieu de changer brusquement en certains points, comme nous venons de le supposer et comme cela arrive le plus souvent, variait d'une manière continue, il faudrait prendre des verticales séparatrices assez voisines pour pouvoir, sans erreur sensible, considérer dans chaque intervalle le moment d'inertie constant et lui attribuer sa valeur moyenne dans l'intervalle.

**126.** — Lorsque la poutre est encastrée à un bout B et libre à l'autre extrémité A (n° 117), la marche est absolument la même. On peut employer, suivant les circonstances, l'un ou l'autre des deux procédés indiqués ci-dessus. Seulement, au lieu de tracer le polygone funiculaire, auquel la courbe  $\varepsilon$ , est inscrite, de façon qu'il passe par A et B, on le construit de façon qu'il passe par B et qu'il ait en ce point BA pour tangente; il suffit pour cela de placer le pôle de ce polygone funiculaire sur l'horizontale de l'extrémité du polygone des vecteurs des charges fictives.

**127.** — Un mot encore sur la poutre homogène et de section constante, reposant par ses extrémités sur deux appuis et soumise à une charge uniforme sur toute sa longueur (n° 112).

Ce qu'il importe ici de connaître, pour apprécier la déformation, c'est la flèche de la ligne élastique, c'est-à-dire l'ordonnée maximum de cette ligne, ordonnée qui répond d'ailleurs au milieu de la poutre. Le plus court est alors de calculer cette flèche  $f$ , ce qui est aisé à l'aide des formules du n° 71.

En effet, pour la poutre en question, l'ordonnée de la parabole funiculaire relative à la charge réelle a pour expression [n° 71, formule (7)]

$$Y = \frac{p}{2\delta} x (l - x)$$

$p$  étant la charge par mètre courant et  $\delta$  la distance polaire. On a donc pour le moment fléchissant

$$M = \delta \cdot Y = \frac{p}{2} x (l - x)$$

et par suite pour le coefficient de la charge fictive à laquelle se rapporte la ligne élastique (n° 80)

$$\frac{M\Delta}{EI} = \frac{p\Delta}{2EI} x (l - x)$$

Telle est l'expression qu'il faut substituer au second membre dans la formule (9) du n° 71; par suite, pour obtenir l'ordon-

née maximum  $f$  de la ligne élastique, il suffit de remplacer dans la formule (11) du même numéro  $\delta$  par  $\Delta$  et  $K^2$  par

$$\frac{2EI}{p\Delta}$$

ce qui donne

$$f = \frac{1.3.}{(1.2.3.4)^2} \frac{pl^4}{2EI}$$

$l$  étant la longueur de la poutre. La valeur à employer pour  $E$  est d'ailleurs, il ne faut pas l'oublier (n° 122), subordonnée au choix de l'unité de longueur et de l'unité de force.

Cette flèche n'est pas, en général, négligeable, même lorsque la poutre n'est soumise qu'à son propre poids. Si l'on veut que la poutre, mise en place, soit rectiligne, il faut, quand on la construit, lui donner une contreflèche, c'est-à-dire donner à son milieu un exhaussement égal à la flèche calculée par la formule qui précède.

## CHAPITRE IX

# POUTRE DROITE SUR DEUX APPUIS : CHARGE MOBILE

---

### Objet de cette étude

**128.** — Une poutre horizontale, appuyée à ses deux extrémités, est soumise à l'action de plusieurs charges verticales mobiles, mais dont les distances mutuelles restent invariables. On demande de déterminer graphiquement, pour chaque point de la pièce, le maximum des moments fléchissants et des efforts tranchants qui se développent, lorsque le *train* formé par ce système de charges se déplace le long de la poutre.

Tel est le problème qui fait l'objet principal de ce chapitre. Nous y ajouterons quelques théorèmes complémentaires qu'il est utile de connaître, et nous terminerons par des notions sur le rôle des entretoises.

Parmi les solutions qui ont été proposées pour le problème énoncé ci-dessus, nous accorderons la préférence à celle de M. G. Leman (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2<sup>e</sup> série, tome 9). Cette méthode qui n'a encore, à notre connaissance, été reproduite dans aucun livre, se distingue par son caractère purement géométrique et par son élégante simplicité. Mais afin de l'exposer avec clarté pour tous nos lecteurs, nous devons donner préalablement quelques explications sur certains tracés élémentaires relatifs au paraboloïde hyperbolique.

### Notions sur le parabolôide hyperbolique

**129.** — Le parabolôide hyperbolique est la surface engendrée par une droite qui reste parallèle à un plan donné  $\Pi$  et qui s'appuie constamment sur deux droites données non situées dans un même plan. Ces deux droites prennent le nom de *directrices* et le plan  $\Pi$  prend celui de *plan directeur*.

Désignons par  $V$  un plan parallèle aux deux directrices. On démontre que *tout plan parallèle à  $V$  coupe la surface suivant une droite*, d'où il suit que *la surface admet un second mode de génération rectiligne*. Par chaque point du parabolôide passent deux génératrices, l'une parallèle au plan  $\Pi$ , l'autre parallèle au plan  $V$  qui reçoit le nom de *second plan directeur*; le plan de ces deux droites est le plan tangent au point  $M$ . Enfin, *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours*, et *deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan*.

*Toute section par un plan parallèle à l'intersection  $\Delta$  des deux plans directeurs est une parabole dont l'axe est parallèle à cette droite  $\Delta$ <sup>1</sup>.*

**130.** — Cela posé, le parabolôide que nous aurons à considérer ici aura l'une de ses deux directrices perpendiculaire au plan directeur  $\Pi$ . Nous prendrons ce plan  $\Pi$  pour plan horizontal de projection, et pour plan vertical de projection le plan projetant de la seconde directrice; ce plan vertical sera alors le second plan directeur; les génératrices du premier système seront des horizontales, et celles du second système (dont font partie les deux directrices données) seront des lignes de front (c'est-à-dire des parallèles au plan vertical).

Nous désignerons la projection verticale d'un point par la même lettre que sa projection horizontale, mais en donnant à cette lettre l'indice supérieur  $\nu$ ; ainsi, la notation  $(U, U^\nu)$

1. Voir, pour la démonstration de ces propriétés, les *Traité de géométrie analytique*, ou le *Traité de géométrie* par MM. Rouché et de Comberousse.



indiquera le point qui a pour projection horizontale U et pour projection verticale U<sup>v</sup>.

Soient (fig. 71) (ZU, ZU<sup>v</sup>) la seconde directrice, dont la projection horizontale sert d'ailleurs de ligne de terre, et (A, A'A<sup>v</sup>) la directrice verticale.

La droite ZU<sup>v</sup> sera la trace verticale et AZ sera la trace horizontale du parabolôide.

Toute génératrice du premier système, s'appuyant sur la directrice verticale, passera en projection horizontale par le point A ; sa projection verticale sera, d'ailleurs, parallèle à la ligne de terre.

La perpendiculaire au plan vertical menée par le point A<sup>v</sup> commun à A'A<sup>v</sup> et à ZU<sup>v</sup> sera une génératrice du premier système, puisqu'elle est horizontale et qu'elle s'appuie sur les deux directrices données ; donc toutes les génératrices du second système la rencontreront ; et, par suite, toute génératrice du second système passera en projection verticale par le point A<sup>v</sup> ; d'ailleurs, sa projection horizontale sera parallèle à la ligne de terre.

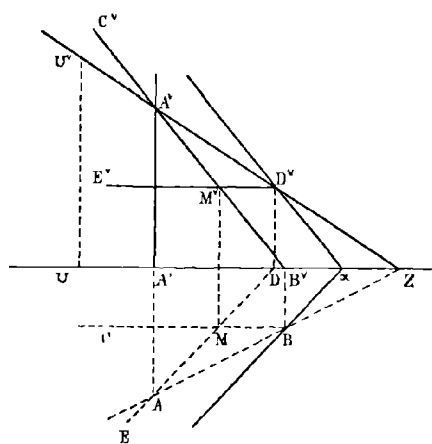


Fig. 71.

Il suit de là que si l'on donne l'une des projections d'un point ( $M, M^v$ ) du parabolôide, il sera aisé de trouver les deux génératrices qui y passent, l'autre projection du point et le plan tangent en ce point.

Supposons, par exemple, qu'on donne la projection horizontale  $M$ . La génératrice du premier système qui passe par ce point aura pour projection horizontale  $AM$ ; sa trace verticale sera donc  $(D, D^v)$  sur la trace  $ZA^v$  du parabolôide, et sa projection verticale sera la parallèle  $D^vE^v$  à la ligne de terre. Quant à la génératrice du second système, elle aura pour projection horizontale la parallèle  $MC$  à la ligne de terre; sa trace horizontale sera  $(B, B^v)$  sur  $AZ$ , et par suite sa projection verticale sera  $B^vA^v$ . Les deux droites  $D^vE^v, B^vA^v$  donneront par leur croisement la projection verticale  $M^v$  du point considéré, et, comme vérification,  $MM^v$  devra être perpendiculaire à la ligne de terre. Le plan tangent en  $(M, M^v)$  aura pour horizontale  $(ME, M^vE^v)$  et pour ligne de front  $(MC, M^vC^v)$ ; il est donc connu. Si l'on veut ses traces, il suffit de mener par  $B$  la parallèle  $B\alpha$  à  $ME$  et par  $D^v$  la parallèle  $D^v\alpha$  à  $M^vC^v$ ; comme vérification, ces deux droites devront rencontrer la ligne de terre au même point  $\alpha$ .

Si l'on voulait *trouver les génératrices parallèles à un plan donné*, on se procurerait une horizontale et une ligne de front de ce plan et les génératrices du premier et du second système respectivement parallèles à ces droites seraient les génératrices demandées. On les obtient immédiatement, puisque la première doit passer en projection horizontale par  $A$ , et que la seconde doit passer en projection verticale par  $A^v$ .

**131.** — Proposons-nous enfin la recherche de la projection horizontale de la *section du parabolôide par un plan  $Q$  parallèle à la ligne de terre*.

Pour nous placer dans les conditions même où nous nous trouverons dans la suite, nous supposons le plan sécant donné par une droite  $(YS, Y^vS^v)$  dont la trace horizontale est  $Y$ , en sorte que la trace horizontale du plan  $Q$  sera la parallèle  $YG$  menée à la ligne de terre  $ZU$  par le point  $Y$  (fig. 72).

On obtiendrait un point quelconque de la section, en cherchant la rencontre du plan  $Q$  et d'une génératrice quelconque du parabolôide, et la tangente en ce point serait l'intersection du plan tangent et du plan sécant. Mais ce n'est pas là notre but. Nous savons que la courbe est une parabole dont les

diamètres sont parallèles à la ligne de terre; il suffit, pour achever de déterminer cette courbe, d'en trouver trois points.

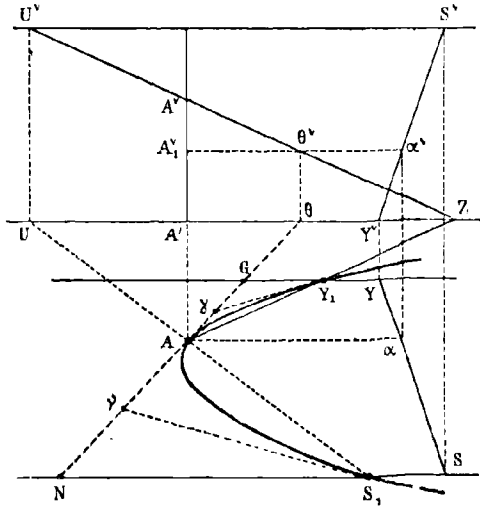


Fig. 72.

Le point  $Y_1$  où la trace horizontale  $AZ$  du parabolôide rencontre la trace horizontale  $YG$  du plan  $Q$  est un premier point de la parabole.

Le point  $S_1$ , qui est sur l'horizontale  $(SN, S'U^v)$ , se trouve à la rencontre de  $SN$  et de la génératrice  $UA$  du parabolôide qui a la même cote que cette horizontale.

Enfin, le point  $A$  appartient aussi à la parabole cherchée, car l'intersection du plan  $Q$  et de la génératrice verticale  $(A_1A'A^v)$  se projette en  $A$ .

On peut d'ailleurs déterminer aisément la tangente en  $A$ . L'horizontale du plan  $Q$  qui est projetée horizontalement sur  $A\alpha$  détermine, par sa projection verticale  $\alpha^vA_1^v$ , le point  $(A, A_1^v)$  de la section qui se projette en  $A$ . C'est l'intersection du plan  $Q$  et du plan tangent au parabolôide en  $(A, A_1^v)$  qui est la tangente cherchée. Or, ce plan tangent est vertical et a pour trace horizontale la projection horizontale  $A\theta$  de la génératrice du premier système qui passe par  $(A, A_1^v)$ . La tangente en ce point à la section se projette donc sur  $A\theta$ .

Ayant la tangente en A, il suffit (n° 70) puisque la ligne de terre donne la direction des diamètres, de joindre respectivement  $Y_1$  et  $S_1$  au milieu  $\gamma$  de AG et au milieu  $\nu$  de AN, pour avoir les tangentes à la parabole aux points  $Y_1$  et  $S_1$ .

Nous avons actuellement plus de données qu'il n'en faut, pour construire, comme nous l'avons expliqué au n° 70, la courbe par points et par tangentes, pour en déterminer tous les éléments et, par suite, pour résoudre toutes les questions qu'on peut se proposer sur elle, par exemple, pour lui mener des tangentes parallèles à des directions données.

### Diagramme des moments fléchissants maxima

**132.** — Abordons maintenant le problème énoncé en tête de ce chapitre.

Soit (fig. 73)  $M_0M_1$  la poutre horizontale, appuyée à ses extrémités et sur laquelle passe un train : nous pouvons, sans altérer la généralité du raisonnement, supposer le train composé de trois charges  $P_1, P_2, P_3$  appliquées aux points de contact des roues et de la poutre, c'est-à-dire aux projections des essieux sur la poutre.

Pour une position quelconque du train, c'est-à-dire des points d'application  $M_1, M_2, M_3$  des charges solidaires  $P_1, P_2, P_3$ , on sait (n° 103) construire le diagramme des moments fléchissants relatifs aux divers points de la poutre ;  $abcd$  étant le polygone des vecteurs des forces  $P_1, P_2, P_3$ , et O étant un pôle choisi à volonté, on tracera un polygone funiculaire ABCDE de ces forces. C'est ce polygone muni de sa ligne de clôture AE qui constitue le diagramme en question ; car, si l'on mène l'ordonnée MFG d'un point quelconque M de la poutre, le segment de cette ordonnée compris dans le polygone fermé ABCDE représente le moment fléchissant au point M, si, comme cela est toujours permis, on prend la distance polaire pour unité.

Nous désignerons respectivement par  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  les côtés successifs AB, BC, CD, DE, EA de ce diagramme.

Soit  $V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5$  ou  $AB'C'D'E'$  le diagramme relatif à une autre position  $M'_1, M'_2, M'_3$  des charges roulantes, ce

nouveau polygone ayant d'ailleurs le même pôle O et la même origine A que le premier,

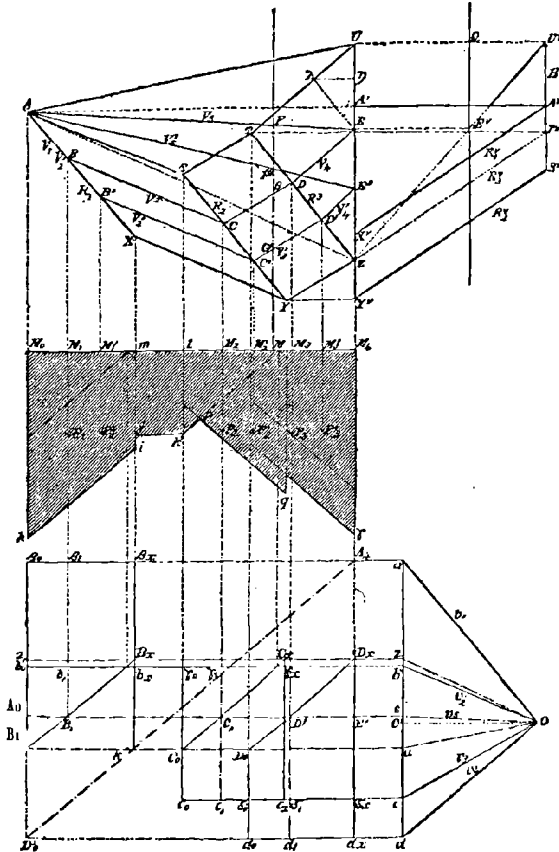


Fig. 73.

Les deux diagrammes ABCDE, AB'C'D'E' ont un sommet commun A ; leurs premiers côtés  $V_1$  et  $V'_1$  sont sur la même droite, menée par A parallèlement au premier rayon polaire  $v_1$  ; les deux derniers côtés  $V_5$  et  $V'_5$  diffèrent à la fois de direction et de grandeur, mais ils passent l'un et l'autre par le point A. Enfin, les côtés intermédiaires correspondants sont deux à deux égaux et parallèles ; en d'autres termes,  $V_2$  est

égal et parallèle à  $V'_2$ ,  $V_3$  égal et parallèle à  $V'_3$ ,  $V_4$  égal et parallèle à  $V'_4$ .

D'après cela, quand le train se déplace sur la poutre, le diagramme varie de telle sorte que le point A reste fixe, que le point E décrive la perpendiculaire  $M_1U$  à la poutre et que les autres sommets B, C, D décrivent des droites fixes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , parallèles au premier rayon polaire  $v_1$ .

Donc, connaissant le diagramme ABCDE relatif à une position  $M_1M_2M_3$  du train, on obtiendra le diagramme  $AB'C'D'E'$  relatif à toute autre position  $M_1'M_2'M_3'$ , par le procédé très simple que voici : on mènera par B, C, D des parallèles  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  au rayon polaire  $v_1$ ; on prendra l'intersection  $B'$  de  $R_1$  et de l'ordonnée du point  $M'_1$ , puis on tracera la ligne brisée  $B'C'D'E'$  de façon que ses côtés  $B'C'$ ,  $C'D'$ ,  $D'E'$  soient respectivement parallèles à BC, CD, DE et que les sommets  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$  tombent sur  $R_2$ ,  $R_3$  et  $M_1E$ .

Nous supposons que le train se meuve de  $M_0$  vers  $M_4$ , et nous désignerons par ASTU, AXYZ les diagrammes relatifs à la position initiale et à la position finale du train, c'est-à-dire au cas où l'essieu de queue  $P_1$  est en  $M_0$  et au cas où l'essieu de tête  $P_3$  est en  $M_4$ .

**133.** — Cela posé, considérons le plan de la figure comme le plan horizontal de projection et le plan perpendiculaire mené par  $M_1U$  comme le plan de projection verticale. Traçons à volonté dans ce plan vertical une droite  $ZU^v$  partant du point Z de la ligne de terre ZU.

Chaque diagramme ABCDE a un point E sur la ligne de terre. Menons la ligne de rappel de ce point E jusqu'à sa rencontre  $E^v$  avec  $ZU^v$ , et élevons verticalement le diagramme ABCDE, d'une hauteur égale à  $EE^v$ , en sorte que ce diagramme, au lieu d'être situé dans le plan horizontal de projection soit placé dans le plan horizontal qui passe par le point (E,  $E^v$ ). Les divers diagrammes relatifs aux positions successives du train se trouveront ainsi *étagés*, depuis le premier AXYZ qui reste dans le plan horizontal de projection, jusqu'au dernier ASTU qui sera le plus élevé et qui aura pour cote  $UU^v$ .

Ces diagrammes étagés sont les sections horizontales d'un

corps solide dont la figure 74 représente une perspective, et qui est limité :

A la partie inférieure, par une base polygonale  $A_0XYZ$  située dans le plan horizontal ;

A la partie supérieure, par une base polygonale  $A_1STU_1$  et horizontale ;

Antérieurement par une surface polyédrale dont les arêtes sont  $A_0A_1$ ,  $XA_1$ ,  $YS$ ,  $ZT$ ,  $ZU_1$ .

Postérieurement, par une portion de parabololoïde hyperbolique qui a ses génératrices horizontales et dont les directrices sont la verticale  $A_0A'AA_1$  et la droite  $ZE'EU_1$  ; le plan vertical de projection est évidemment le second plan directeur de cette surface.

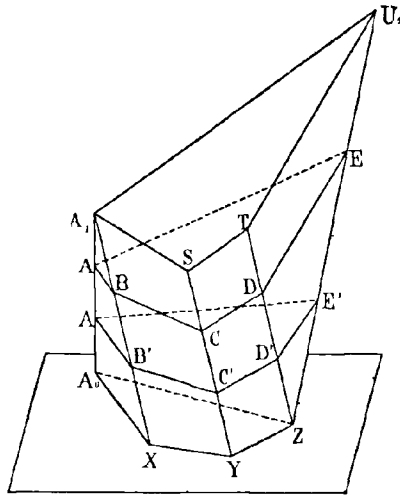


Fig. 74.

Ce solide peut être considéré comme le diagramme général de tous les moments fléchissants qui se produisent aux divers points de la poutre et pour toutes les positions du train. En effet, imaginons une parallèle quelconque  $\Delta$  à la ligne de terre ; le plan horizontal qui la contient coupe le solide suivant le diagramme relatif à une position bien définie du train ; le segment intercepté sur la droite  $\Delta$  par ce diagramme ou, ce qui revient au même, par le solide, est le moment fléchissant

que la position considérée du train détermine au point de la poutre situé sur la projection horizontale de la droite  $\Delta$ .

Il résulte de là que, si par un point quelconque M de la poutre on mène un plan parallèle au plan vertical, la section que ce plan de front découpera dans le solide sera le diagramme des moments fléchissants au point M pour toutes les positions du convoi. Mais ce plan de front étant parallèle au second plan directeur du paraboloïde, coupera cette surface suivant une droite ; la section faite dans le solide par le plan de front sera donc *polygonale*, et par suite, pour obtenir le moment fléchissant maximum au point M, c'est-à-dire pour obtenir la corde maximum qu'on puisse inscrire dans cette section parallèlement à la ligne de terre, il suffira de choisir la plus grande parmi celles de ces cordes qui passent par les *sommets* de la section, sans se préoccuper de celles qui ne passent par aucun sommet.

Cette assertion est à peu près évidente ; car, si une corde d'un polygone ne passe par aucun sommet, elle prend une valeur plus grande quand on la déplace parallèlement à elle-même dans un sens convenable ; à moins, toutefois, que les deux côtés sur lesquels glissent ses extrémités ne soient parallèles. Mais alors la grandeur de cette corde, se conservant jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet, se trouve parmi celles des cordes qui passent par un tel point.

De ce que le maximum pour chaque plan sécant parallèle au plan vertical est donné par une droite issue d'un des sommets de la section et de ce que ces sommets sont situés sur les arêtes du solide, on conclut que c'est uniquement, parmi les moments fléchissants représentés par des droites partant de ces arêtes, qu'il faudra choisir les maximums pour les divers points de la poutre. On obtiendra donc les seuls moments qu'il faille envisager, en menant par les arêtes du solide des plans parallèles à la ligne de terre et en cherchant les portions de ces plans comprises dans le solide.

Pour les arêtes des bases, les opérations sont toutes faites et les moments fléchissants sont fournis par les diagrammes ASTU, AXYZ (fig. 75). Pour les arêtes  $(R_1, R_1^v)$   $(R_2, R_2^v)$   $(R_3, R_3^v)$ , les plans à mener étant parallèles à l'intersection ZU



des deux plans directeurs, couperont le parabolôide suivant des paraboles dont nous avons appris à construire (n° 131)

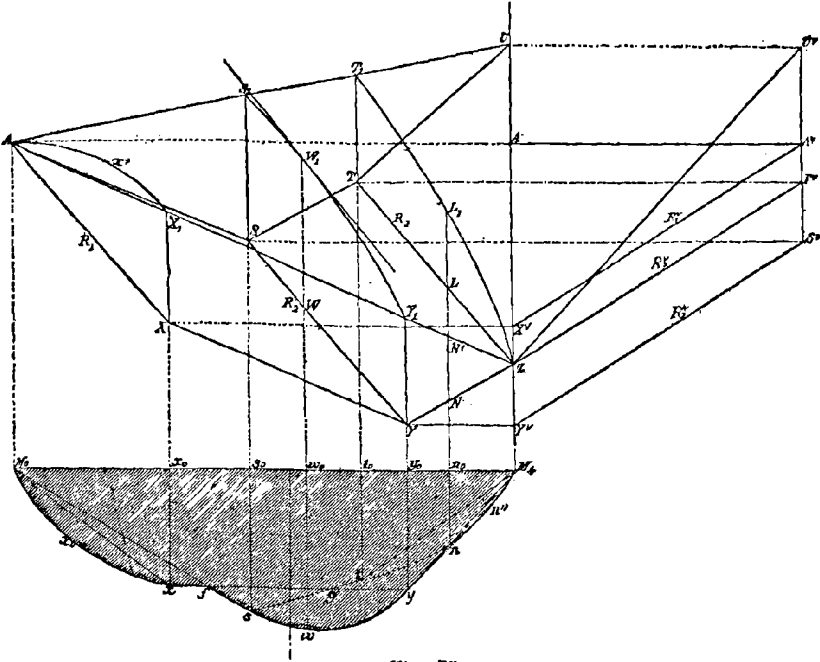


Fig. 75.

les projections horizontales  $Ax'X_1$ ,  $S_1W_1Y$  et  $T_1L_1Z$ ; les moments fléchissants correspondants forment les diagrammes  $AXX_1x'$ ,  $SYY_1W_1S_1$  et  $TZL_1T_1$ .

**131.** — Actuellement, il ne reste plus qu'à choisir, dans tout plan parallèle au plan vertical, quel est le plus grand des moments fléchissants donnés par les diagrammes  $ASTU$ ,  $AXYZ$ ,  $AXX_1x'$ ,  $SYY_1W_1S_1$  et  $TZL_1T_1$ .

Comme il ne faut considérer que les longueurs des droites parallèles à  $UZ$  qui sont comprises dans ces figures, on facilitera la comparaison en faisant glisser toutes ces droites suivant leurs propres directions jusqu'à ce que leurs extrémités supérieures viennent se placer sur l'horizontale  $M_0M_1$ . On obtiendra de cette façon deux nouveaux diagrammes *polygonaux*  $M_0xyM_1$ ,  $M_0stM_1$ , ayant  $M_0M_1$  pour base commune, et trois dia-

grammes *paraboliques*  $M_0x''xx_0$ ,  $s_0swyy_0$  et  $t_0tnn''M_1$ , ayant leurs bases sur la même horizontale. Les diagrammes primitifs se trouveront ainsi transformés en d'autres pouvant remplir le même office, puisqu'ils fournissent, par des ordonnées perpendiculaires à la poutre et pour les divers points de cette pièce, les mêmes moments fléchissants que les diagrammes primitifs.

A l'aide de diverses portions convenablement choisies sur les contours des nouveaux diagrammes, on composera sans peine une ligne fermée  $M_0x''xfswynn''M_1M_0$  qui les enveloppe tous et qui constituera le périmètre du diagramme des moments fléchissants maximums en tous les points de la poutre. Ce diagramme, que nous avons couvert de hachures (fig. 75), résout pleinement le problème proposé en ce qui concerne les moments fléchissants.

**135.** — Toutefois, pour construire ce diagramme final avec exactitude, il importe de savoir déterminer d'une manière précise les points d'intersection des diverses portions de contour qui le composent.

Il n'y a pas évidemment à s'occuper des intersections des parties rectilignes; il suffit de montrer comment on peut trouver les points provenant de l'intersection d'un contour parabolique avec un contour rectiligne ou avec un autre contour parabolique.

Considérons par exemple le point  $n$  intersection de la parabole  $tn''M_1$ , et de la droite  $yM_1$ . On doit avoir

$$n_0n = NN_1 = LL_1;$$

mais puisque  $NN_1$  et  $LL_1$  sont les projections de deux droites parallèles à la ligne de terre, ces droites elles-mêmes sont égales et parallèles et forment par conséquent les côtés opposés d'un parallélogramme; des deux autres côtés de ce parallélogramme, l'un, qui a pour projection horizontale  $L_1N_1$ , est une génératrice du parabolôïde, et l'autre, qui se projette horizontalement en  $LN$ , est une droite du plan déterminé par les arêtes  $(R_1, R_2^v)$   $(R_3, R_3^v)$ . Il suit de là que, pour obtenir la

position du point  $n$ , il suffira de chercher (n° 130) la génératrice  $L_1N_1$  du paraboléide qui est parallèle au plan des deux arêtes  $(R_2, R_2^V)$ ,  $(R_3, R_3^V)$ , puis de prendre la rencontre des deux droites  $L_1N_1$  et  $\gamma M_4$ .

On obtiendrait d'une manière analogue l'intersection de deux contours paraboliques.

### Diagramme des efforts tranchants maxima.

**136.** — Occupons-nous maintenant des efforts tranchants.

Nous avons montré au n° 104 (fig. 60) comment on pouvait, pour un système de charges fixes, c'est-à-dire pour une position donnée du train, construire le diagramme des efforts tranchants relatifs aux divers points de la poutre. Observons d'ailleurs que cette construction prouve qu'il suffit de déterminer les efforts tranchants aux points d'application des charges, pour avoir les valeurs de ces efforts en tous les autres points de la poutre.

Pour une position  $M_1M_2M_3$  des charges  $P_1, P_2, P_3$  (fig. 72) les efforts tranchants doivent être comptés à partir de l'horizontale  $A_1e$ , issue de l'extrémité  $e$  du rayon pôleaire  $Oe$  parallèle à la ligne de clôture  $AE$  du polygone funiculaire  $ABCDE$  correspondant à cette position. Ces efforts tranchants sont représentés par  $B_1\beta_1$  et  $B_1b_1$  au point  $M_1$ ,  $C_1\gamma_1$  et  $C_1c_1$  au point  $M_2$ ,  $D_1\delta_1$  et  $D_1d_1$  au point  $M_3$ .

**137.** — Cela posé, occupons-nous exclusivement des efforts tranchants qui se développent sous l'essieu  $P_1$ , lorsque le train se déplace. Dans la position initiale, l'essieu de queue  $P_1$  est en  $M_0$ , et si l'on mène le rayon polaire  $Ou$  parallèlement à  $AU$ , puis l'horizontale  $uB_0$  par le point  $u$ , les efforts tranchants au point  $M_0$  seront  $B_0\beta_0$  et  $B_0b_0$ . Pour la position finale, l'essieu de tête  $P_3$  étant en  $M_4$ , l'essieu de queue  $P_1$  sera en un point  $m$  tel que  $mM_4$  soit égale à la longueur invariable  $M_1M_3$  du convoi ; les efforts tranchants en  $m$  seront comptés à partir de l'horizontale  $Z_1z$  issue de l'extrémité  $z$  du rayon pôleaire  $Oz$  parallèle à  $AZ$  ; ils auront d'ailleurs pour valeurs  $B_x\beta_x$  et  $B_xb_x$ .

Nous allons démontrer que la droite  $B_0B_x$  est le lieu décrit par le point  $B_1$  dans le déplacement du train et que cette droite  $B_0B_x$  est parallèle à diagonale  $D'_0A_1$ , que la figure définit clairement. Il suffit de prouver l'égalité des rapports

$$\frac{A_1B_1}{A_1B_0}, \quad \frac{\xi_0A_1}{ad} \text{ ou } \frac{AA'}{ad}$$

Or, si l'on mène  $E\lambda$  parallèle à  $AX$ , et si l'on trace la hauteur  $\lambda\eta$  du triangle  $U\lambda E$ , les longueurs  $A_1B_1$ ,  $\eta\lambda$  seront égales puisque  $AB$  et  $E\lambda$  le sont; d'ailleurs  $A_1B_0$  est égal à  $eu$ . Le premier des rapports ci-dessus est donc égal à

$$\frac{\lambda\eta}{eu},$$

et il suffit de prouver l'égalité

$$\frac{\lambda\eta}{eu} = \frac{AA'}{ad}.$$

Or, en appelant  $OO'$  la hauteur du triangle  $aod$ , on a, par les triangles semblables  $U\lambda E$ ,  $aod$ ,

$$\frac{\lambda\eta}{U\lambda E} = \frac{OO'}{ad},$$

et, par les triangles semblables  $UAE$ ,  $uOe$ ,

$$\frac{UE}{eu} = \frac{AA'}{OO'};$$

il suffit de multiplier ces deux dernières relations membre à membre pour avoir celles qui les précède, ce qu'il s'agissait de démontrer.

Il résulte de cette proposition que les efforts tranchants qui se produisent aux diverses positions qu'occupe l'essieu de queue  $P_1$ , sont donnés par les deux diagrammes trapézoïdaux  $\beta_0\beta_x B_x B_0$ ,  $b_0b_x B_x B_0$ .

En considérant de même les essieux  $P_2$  et  $P_3$ , on trouvera pour  $P_2$  les diagrammes  $\gamma_0\gamma_x C_x C_0$  et  $c_0c_x C_x C_0$ , et pour  $P_3$  les diagrammes  $\delta_0\delta_x D_x D_0$  et  $d_0d_x D_x D_0$ ; ces diagrammes sont limités aussi par des parallèles  $C_0C_x$  et  $D_0D_x$  à la diagonale  $D'_0A_1$ .

Enfin, pour la partie  $ml$  de la poutre, comprise entre les

verticales  $\beta_x B_x$  et  $\gamma_0 C_0$ , l'effort tranchant maximum est constant, puisque dans le mouvement que nous examinons les charges ne passent jamais entre les points  $m$  et  $l$ ; cet effort équivaut pour chaque position du train à l'effort tranchant qui se développe au point d'application de  $P_2$ , et comme l'effort en ce point admet  $C_0 \gamma_0$  pour valeur maximum, on voit que le rectangle  $b_x \gamma_0 C_0 k$  est le diagramme qui convient à cette partie de la poutre.

**138.** — Pour rechercher finalement, entre les efforts tranchants fournis par ces diagrammes, quels sont les efforts maximums aux divers points de la poutre, nous transporterons ces diagrammes, comme nous l'avons fait pour les moments fléchissants, en faisant glisser suivant leurs propres directions toutes les droites qui représentent des efforts tranchants jusqu'à ce que leurs extrémités supérieures viennent sur l'horizontale  $M_0 M_1$ . Nous obtiendrons ainsi de nouveaux diagrammes polygonaux ayant tous un côté sur  $M_0 M_1$ . Le contour  $M_0 h i j k p q r \gamma M_1$ , formé de portions choisies sur les périmètres de ces polygones de façon à les envelopper tous, limitera le diagramme des efforts tranchants minima, que nous avons ici couvert de hachures.

D'ailleurs la détermination exacte de ce contour enveloppant ne demande aucun tracé nouveau, puisque ce contour résulte de la combinaison de lignes brisées dont les points de rencontre se marqueront sur l'épure avec toute la précision désirable.

#### **Remarques sur la méthode précédente.**

**139.** — Telle est la solution, que M. Leman a donnée, du problème de la charge roulante. La méthode a toute la généralité désirable. Elle s'appliquerait aussi bien au cas où l'on suivrait le mouvement du train depuis l'entrée sur le pont de l'essieu de tête jusqu'à la sortie de l'essieu de queue, au lieu de se borner, comme nous l'avons fait avec l'auteur, à ne considérer les choses que pendant le temps où le train est engagé tout entier sur la poutre.

**140.** — Du raisonnement fait dans le second alinéa de la page 156, résulte immédiatement la proposition suivante :

*Le moment fléchissant maximum, que le passage d'un train sur une poutre à deux appuis simples fait naître en un point donné de cette poutre, est le plus grand des moments fléchissants qui se produisent en ce point lorsque les divers essieux y passent.*

La démonstration analytique de ce théorème exige quelques précautions ; nous la donnerons au n° 143. Nous voulons seulement observer ici que la proposition subsiste lorsqu'on tient compte non-seulement de la charge mobile, mais encore de la charge permanente.

En général, le moment fléchissant total en un point quelconque M de la poutre se compose de deux parties, l'une qui ne dépend que de la position du point M et qui provient de la charge fixe, l'autre qui dépend à la fois de la position du point M et de celle du convoi et qui provient de la charge roulante. Donc, quand on cherche la position du train pour laquelle le moment fléchissant, en un point donné M de la poutre, est maximum, on peut faire abstraction de la charge fixe et ne considérer que la charge voyageuse. Seulement, quand on a trouvé cette position particulière du train et que l'on veut avoir la valeur du moment fléchissant au point considéré M, il faut ajouter au moment fléchissant provenant de la charge mobile, le moment constant que fait naître au même point la charge fixe.

**141.** — Ordinairement les charges roulantes sont transmises à la poutre par des roues et par suite sont, comme nous l'avons supposé, des charges isolées. Le problème relatif à une charge mobile qui serait uniformément répartie sur une partie de la longueur de la poutre est plutôt un exercice théorique qu'une question pratique. Nous dirons seulement que M. Kleitz a calculé les charges uniformément réparties qui produiraient sur une poutre le même moment fléchissant maximum que certaines charges concentrées bien définies ; le lecteur pourra se reporter au mémoire de cet ingénieur distingué (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1887), ou bien se contenter des indi-

cations données sur ce sujet, par M. Flamant, aux n° 212 et 213 de son excellent *Traité de la résistance des matériaux*, qui fait partie de l'Encyclopédie.

**Expression remarquable du moment fléchissant produit par des charges concentrées**

**142.** — Soit X une section quelconque de la poutre AB qui est appuyée à ses deux extrémités et qui est soumise à diverses charges verticales  $P_1, P_2, \dots P_n$ .

Portons de haut en bas sur la verticale du point B un segment  $BX'$  égal à  $XB$  ; joignons le point A au point  $X'$  et le point B au point C où  $AX'$  rencontre la verticale du point X (fig. 76).

Nous obtiendrons ainsi une ligne brisée ACB relative au point M de la poutre AB.

P désignant l'une quelconque des charges verticales  $P_1, P_2, \dots P_n$  ; M son point d'application, et  $p$  l'ordonnée correspondante MD de la ligne brisée ACB, on a, pour le moment fléchissant  $\mu$  relatif à la section X, l'expression simple

$$(1) \quad \mu = \Sigma Pp$$

Voici la démonstration de cette formule :

Désignons par  $\mu'$  la partie de  $\mu$  qui provient de la force P, et par  $\rho$  et  $\rho'$  les réactions que cette force fait naître sur les appuis A et B. Les forces P,  $\rho$ ,  $\rho'$  se font équilibre, et en

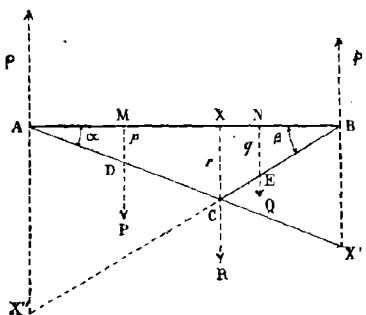


Fig. 76.

écrivait que la somme de leurs moments pris d'abord par rapport à A, puis par rapport à X, est nulle, on a

$$\begin{aligned} P \cdot AM &= \rho' \cdot AB \\ \mu' &= \rho' \cdot XB \end{aligned}$$

d'où, en éliminant  $\rho'$ ,

$$\mu' = P \cdot AM \cdot \frac{XB}{AB} = P \cdot AM \cdot \frac{BX'}{AB}$$

c'est-à-dire

$$\mu' = P\rho$$

D'après le principe de la superposition des effets des forces, le moment total  $\mu$  au point M, sous l'action de toutes les charges, est donc égal à  $\Sigma P\rho$ .

**143.** — De cette formule on peut tirer la démonstration analytique du théorème énoncé au n° 140 et déjà démontré géométriquement.

Considérons une position du train telle qu'il n'y ait aucun essieu au point X. Désignons par P la charge de l'un des essieux placés entre A et X et par Q la charge de l'un des essieux placés entre X et B.

On aura, d'après la formule précédente, pour le moment fléchissant au point X relatif à la position actuelle du train

$$\mu = \Sigma P\rho + \Sigma Qq$$

que nous écrirons

$$\mu = \Sigma P\rho + \Sigma Qq + P'\rho' + Q'q',$$

en supposant qu'il y ait un essieu P' en A et un essieu Q' en B ;  $\rho'$  et  $q'$  sont d'ailleurs nuls.

Désignons par  $\alpha$  et  $\beta$  les angles en A et B dans le triangle ACB, et donnons au train, dans un sens ou dans l'autre, un déplacement  $\varepsilon$  au plus égal à la plus petite distance entre chacun des points A, X, B et l'essieu le plus voisin.

Appelons  $\Delta\mu$  la variation du moment fléchissant quand le



déplacement se fait vers la droite, et  $\Delta'\mu$  la variation de ce même moment quand le déplacement se fait vers la gauche.

Dans le premier cas, l'essieu  $P'$  s'engage, les variations de  $p$  et de  $p'$  sont égales à  $\varepsilon \operatorname{tg} \alpha$  et celle de  $q$  est  $-\varepsilon \operatorname{tg} \beta$  ; on a donc

$$(2) \quad \Delta\mu = \varepsilon [(P' + \Sigma P) \operatorname{tg} \alpha - (\Sigma Q) \operatorname{tg} \beta]$$

Dans le second cas, c'est  $Q'$  qui s'engage, et l'on a

$$(3) \quad \Delta'\mu = \varepsilon [- (\Sigma P) \operatorname{tg} \alpha + (Q' + \Sigma Q) \operatorname{tg} \beta]$$

On déduit de là

$$(4) \quad \Delta\mu + \Delta'\mu = \varepsilon (P' \operatorname{tg} \alpha + Q' \operatorname{tg} \beta)$$

Cela posé, il y a deux cas à distinguer suivant que  $P'$  et  $Q'$  ne sont pas nuls à la fois ou sont nuls tous les deux, c'est-à-dire suivant que primitivement il y avait un essieu sur l'un au moins des deux appuis ou qu'il n'y avait d'essieu sur aucun des deux.

Dans le premier cas, le second membre de (4) est positif ; donc, la somme  $\Delta\mu + \Delta'\mu$  étant positive, l'une au moins des variations  $\Delta\mu$  et  $\Delta'\mu$  est positive, et par suite l'un au moins des deux déplacements accroît la valeur du moment fléchissant au point  $X$ .

Dans le second cas, on a

$$\Delta\mu + \Delta'\mu = 0$$

ce qui peut se produire de deux façons :

Ou bien,  $\Delta\mu$  et  $\Delta'\mu$  sont de signes contraires et alors on retombe sur la conclusion précédente.

Ou bien,  $\Delta\mu$  et  $\Delta'\mu$  sont nuls l'un et l'autre. Le moment fléchissant  $\mu$  conservera alors une valeur constante pendant le déplacement  $\varepsilon$  soit à droite soit à gauche. Cette valeur ne saurait être un maximum si le déplacement  $\varepsilon$  n'amène aucun essieu en  $X$ , attendu qu'on se trouverait alors dans l'un des cas déjà examinés et qu'un nouveau déplacement augmentant le moment  $\mu$  serait possible. Si au contraire le déplacement  $\varepsilon$  amène un essieu sur  $X$ , la valeur  $\mu$  peut être un maximum,

mais on la retrouve au moment où l'essieu en question passe sur la section X.

Cette discussion démontre le théorème énoncé au n° 140 ; mais on voit, comme nous l'avions dit, qu'elle exige une certaine attention.

**Extension de la formule précédente au cas où il y a, outre les charges concentrées, une charge permanente uniforme.**

**141.** — Pour faire cette extension, remarquons en premier lieu que, lorsque le point X que l'on considère se déplace sur la poutre (fig. 76), le sommet C du triangle correspondant ACB décrit un arc de parabole. Les triangles semblables AXC, ABX' donnent, en effet, les proportions

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XC}{BX'} = \frac{XC}{AB - AX} ;$$

d'où, en désignant par  $l$  la longueur AB de la poutre, par  $x$  l'abscisse AX et par  $r$  l'ordonnée XC du point C.

$$(5) \quad r = x \left( 1 - \frac{x}{l} \right) ;$$

c'est l'équation d'une parabole passant par A et B et symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB.

Or la parabole qui constitue le diagramme des moments fléchissants, pour une charge uniforme de coefficient  $\lambda$ , a pour ordonnée (n°s 112 et 71).

$$\frac{\lambda}{2\delta} r$$

Donc, la part du moment fléchissant au point X, due à la charge permanente et uniforme, est égale à

$$\frac{\lambda}{2} r$$

D'après cela, en supposant qu'il y ait au point X un essieu dont la charge soit R, et en désignant par P et p la charge et l'ordonnée correspondante de la ligne AC pour un essieu engagé à gauche de X, et par Q et q les quantités analogues pour un essieu engagé à droite de X, on aura

$$(6) \quad \mu = \Sigma Pp + \Sigma Qq + Rr + \frac{\lambda}{2} r$$

pour l'expression du moment fléchissant sous l'essieu R lorsque cet essieu est placé en X.

On peut encore transformer cette formule.

Dans les conditions ci-dessus,  $\Sigma P + \Sigma Q + R$  représente le poids de la partie engagée du train; nous désignerons par  $\pi$  ce poids augmenté de la demi-charge permanente, en sorte que

$$(7) \quad \pi = \Sigma P + \Sigma Q + R + \frac{R}{2}$$

Nous désignerons de plus respectivement par G et D les sommes des moments par rapport à l'essieu R, des poids de tous les essieux engagés à gauche de R et des poids de tous les essieux engagés à la droite de R; on aura, en appelant X'' le point où BC va rencontrer la verticale du point A et observant que AX'' = AX,

$$(8) \quad G = \Sigma P \cdot XM = -\frac{l}{BX} \Sigma P (r-p) = \frac{l}{l-x} (-\Sigma Pr + \Sigma Pp)$$

$$(9) \quad D = \Sigma Q \cdot XN = \frac{l}{AX''} \Sigma Q (r-q) = \frac{l}{x} (\Sigma Qr - \Sigma Qq)$$

et l'élimination de  $\Sigma Pp$  et de  $\Sigma Qq$  entre les relations (6), (8) et (9) donnera

$$(10) \quad \mu = \pi r - \left[ \frac{x-l}{l} G + \frac{x}{l} D \right]$$

C'est la formule que nous avons en vue. <sup>1</sup>

1. En partant de cette formule et profitant d'une heureuse interprétation de M. le capitaine Ventre, complétée par M. Eddy, M. Maurice Lévy a donné une méthode complète pour résoudre les problèmes relatifs aux mo-

### Théorème de Culmann.

**145.** — Culmann, l'éminent créateur de la statique graphique, a donné, sur la position du train à laquelle répond le moment fléchissant maximum sous un essieu donné, une proposition élégante que nous ne saurions passer sous silence.

*Quand une poutre à deux appuis simples et portant une charge permanente uniforme est parcourue par un train, le moment fléchissant maximum sous un essieu déterminé se produit lorsque cet essieu et le centre de gravité de la charge totale sont équidistants du milieu de la travée.*

Par charge totale, il faut entendre le poids de la partie engagée du convoi augmenté de la charge permanente.

La démonstration résulte immédiatement de la formule (10) qui, lorsqu'on y remplace  $r$  par sa valeur (5), prend la forme

$$\mu = \pi x \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{x-l}{l} G - \frac{x}{l} D$$

La valeur  $x_0$  de  $x$  qui répond au minimum de  $\mu$  est donnée par l'équation

$$\pi (l - 2x_0) = G + D$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée de  $\mu$ .

Désignons par  $\gamma$  l'abscisse du centre de gravité K de la charge totale  $\pi + \frac{\lambda l}{2}$ , au moment où  $x_0$  est l'abscisse de l'essieu considéré R. On aura, pour déterminer  $\gamma$ , la relation

$$\left(\pi + \frac{\lambda l}{2}\right) (\gamma - x) = l \lambda \left(\frac{l}{2} - x\right) + G + D,$$

qui exprime qu'il y a égalité, entre le moment de la charge to-

ments fléchissants dans le cas d'une charge roulante. Nous ne développerons pas cette méthode qui ferait double emploi avec celle que nous avons exposée aux nos 132, 133, 134, 135. Le lecteur curieux de la connaître trouvera, dans le tome I du savant *Traité de statique graphique* de M. M. Lévy, tous les renseignements désirables sur ce sujet.

tale appliquée en K, et la somme des moments des charges des essieux augmentée du moment de la charge permanente  $\Delta$  supposée concentrée au milieu de la poutre; tous ces moments étant pris par rapport à l'essieu R.

En retranchant l'une de l'autre les relations précédentes, on obtient la suivante :

$$\frac{\gamma + x_0}{2} = \frac{l}{2}$$

qui exprime que le milieu de la poutre est aussi le milieu de l'intervalle qui, lors du maximum du moment fléchissant sous l'essieu R, sépare cet essieu du centre de gravité K.

**Limite supérieure du moment fléchissant maximum.**

**146.** — Citons enfin une dernière conséquence de la formule (10).

Dans cette formule, G et D, dépendent seuls de l'essieu qui se trouve sur la section X. D'ailleurs,  $x$  étant inférieur à  $l$ , et G étant négatif, des trois termes qui composent le second membre de la formule (10), le premier est positif et les deux autres négatifs. On a donc, quel que soit l'essieu qui se trouve sur la section X,

$$\mu < \pi r$$

et à fortiori :

$$\mu < \pi' r$$

$\pi'$  désignant la partie du train la plus lourde qui puisse être engagée, augmentée de la demi-charge permanente.

D'ailleurs,  $r$  est maximum quand X est au milieu de la poutre, auquel cas, d'après la formule (5),  $r$  est égal à  $\frac{l}{4}$ ; on a donc à fortiori :

$$\mu < \frac{\pi' l}{4}$$

Ces deux inégalités, où l'on peut à fortiori remplacer  $\pi'$  par le poids total du train augmenté de la demi-charge perma-

nente, donnent la première une limite supérieure du moment fléchissant maximum dans une section déterminée, l'autre une limite supérieure du moment fléchissant *maximum maximum*.

### Entretoises.

117. — Nous avons supposé jusqu'ici que les surcharges agissaient directement sur la poutre. En général, cependant, les surcharges agissent par l'intermédiaire de poutrelles ou *longerons* sur des pièces transversales ou *entretoises* qui les transmettent à la poutre principale. Quelle est l'influence de ces pièces accessoires sur la valeur du moment fléchissant ou de l'effort tranchant dans une section donnée  $X$ , lorsque le train occupe une position déterminée? Telle est la question qui reste à examiner.

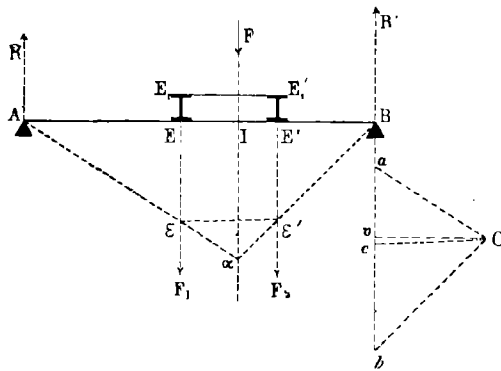


Fig. 77.

Considérons d'abord une seule charge  $F$  agissant *directement* sur la poutre  $AB$  (fig. 77) en un point  $I$ . Pour avoir le moment fléchissant et l'effort tranchant en une section quelconque de la poutre, on sait qu'il faudrait opérer comme il suit : on prendrait sur  $IF$  un point quelconque  $\alpha$  ;  $A\alpha B$  serait un polygone funiculaire de la force  $F$  ; le pôle correspondant  $O$  serait l'intersection des parallèles à  $A\alpha$  et à  $\alpha B$  menées respectivement par les extrémités  $a$  et  $b$  du vecteur  $ab$  de la force  $F$ .

AB serait la ligne de clôture et la parallèle  $Ov$  à AB déterminerait les réactions  $R = va$ ,  $R' = bv$ . Dès lors  $Y$  désignant l'ordonnée de la ligne brisée  $AxB$  qui répond à une abscisse quelconque  $x$ , le moment fléchissant dans la section dont  $x$  est l'abscisse aurait pour valeur  $\delta.Y$ ,  $\delta$  étant la distance polaire  $vO$ . Quant à l'effort tranchant, il serait égal à  $va$  de A en I, c'est-à-dire pour  $x < AI$ , puis égal à  $vb$  de I en B, c'est-à-dire pour  $x$  compris entre AI et AB.

Supposons maintenant que la force  $F$  s'exerce sur la poutre indirectement, c'est-à-dire par l'intermédiaire du longeron  $E_1E_1'$  et des entretoises  $E_1E_1$ ,  $E_1'E_1'$ . L'action de  $F$  sur la poutre équivaut alors à l'action des deux charges directes  $F_1$  et  $F_2$ , appliquées l'une en  $E_1$ , l'autre  $E_1'$  et que l'on obtiendrait en décomposant  $F$  en deux forces parallèles ayant les verticales  $EF_1$ ,  $E_1'F_2$  pour lignes d'action. Mais il n'est pas nécessaire d'effectuer cette décomposition, il suffit de la concevoir.

Désignons par  $c$  le point qui déterminerait sur  $ab$  les valeurs  $ac$  et  $cb$  des deux composantes  $F_1$  et  $F_2$ , et, cherchons à construire le polygone funiculaire des forces  $F_1$  et  $F_2$  en prenant pour pôle et pour premier côté le point  $O$  et la droite  $Ax$  déjà employées dans l'alinéa qui précède. On arrêterait ce premier côté à son point de rencontre  $\varepsilon$  avec  $EF_1$ ; on mènerait ensuite  $\varepsilon\varepsilon'$  parallèle à  $Oc$  et on conduirait enfin par  $\varepsilon'$  la parallèle à  $Ob$ . Mais puisque la force  $F$  équivaut au système des deux forces  $F_1$  et  $F_2$ , le dernier côté ainsi obtenu du polygone funiculaire devrait (n° 34) coïncider avec  $\alpha B$ . Donc, il n'est pas besoin de connaître  $c$  pour construire le polygone funiculaire  $A\varepsilon\varepsilon'B$  des forces  $F_1$  et  $F_2$ , il suffit de joindre les points  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  où les côtés  $Ax$ ,  $\alpha B$  du polygone funiculaire relatif à  $F$  rencontrent les verticales  $EF_1$ ,  $E_1'F_2$ ; c'est, au contraire, de la connaissance de ce polygone qu'on déduirait  $c$ , en menant  $Oc$  parallèle à  $\varepsilon\varepsilon'$ .

La ligne de clôture de ce polygone  $A\varepsilon\varepsilon'B$  est encore AB et, par suite, les réactions sur les appuis ont, comme dans le cas précédent, pour vecteurs  $va$  et  $bv$ .

Quant aux moments fléchissants, en désignant par  $y$  l'ordonnée de la ligne polygonale  $A\varepsilon\varepsilon'B$  qui répond à l'abscisse  $x$ , on a, pour le moment fléchissant dans la section dont  $x$  est l'abscisse, la valeur  $\delta.y$ .

Enfin, l'effort tranchant est égal à  $va$  pour  $x < AE$ , à  $vc$  pour  $x$  compris entre  $AE$  et  $AE'$ , et à  $vb$  pour  $x$  compris entre  $AE'$  et  $AB$ .

En comparant les résultats obtenus dans l'un et l'autre cas, on arrive aux conclusions suivantes.

L'emploi des deux entretoises  $E, E'$ ,  $E', E'$  ne change pas les réactions des appuis ; il ne modifie non plus ni les moments fléchissants ni les efforts tranchants, dans les sections situées hors du panneau  $EE'$ , soit à droite, soit à gauche. Mais, dans le panneau  $EE'$ , l'emploi des entretoises diminue toujours un peu les moments fléchissants ; et, quant aux efforts tranchants, il les augmente dans la première partie  $EI$  et les diminue dans la seconde partie  $IE'$  (il s'agit ici, bien entendu, des efforts tranchants considérés à la fois en grandeur et en signe, le sens positif étant celui de  $Oy$ ).

**148.** — Une question s'offre ici :

Où faut-il placer le point d'application  $I$  de la force  $F$ , pour que l'effort tranchant soit nul dans toute l'étendue du panneau  $EE'$  ?

L'effort tranchant dans le panneau restant égal à  $vc$ , il faut et il suffit que  $vc$  soit nul, c'est-à-dire que  $\epsilon\epsilon'$  soit parallèle à  $AB$ . Donc, on mènera par le point  $A$  la droite quelconque  $A\epsilon$  jusqu'à sa rencontre  $\epsilon$  avec la verticale du point  $E$ , puis on conduira  $\epsilon\epsilon'$  parallèle à  $AB$  jusqu'à sa rencontre  $\epsilon'$  avec la verticale du point  $E'$  ; enfin, on tirera  $B\epsilon'$  et le point cherché  $I$  sera la projection sur  $AB$  du point de rencontre  $\alpha$  de  $A\epsilon$  et de  $B\epsilon'$ . On donne à ce point le nom de *point limite* des efforts tranchants.

Avec cette disposition, l'effort tranchant sera positif et égal à  $va$  de  $A$  en  $E$ , puis nul dans le panneau  $EE'$ , enfin positif et égal à  $vb$  de  $E'$  en  $B$  ; tandis que, sous l'influence de la même charge directement appliquée en  $I$ , l'effort tranchant serait négatif et égal à  $va$  de  $A$  en  $I$ , puis positif et égal à  $vb$  de  $I$  en  $B$ .

**149.** — Nous ne nous étendrons pas plus longtemps sur le rôle des entretoises, Il nous suffit d'avoir montré que l'er-



reur commise en faisant abstraction de ces pièces secondaires n'a que peu d'importance ; d'autant que, ce que l'on tient surtout à connaître dans la pratique, c'est le maximum des moments fléchissants dans les diverses sections. A moins d'être exceptionnellement astreint à une économie excessive, on peut, dans l'établissement d'un projet, ne pas tenir compte des entretoises ; il en résulte seulement, pour les sections de la poutre, des dimensions un peu supérieures à celles qui seraient strictement nécessaires.

## CHAPITRE X

# DÉTERMINATION DES FORCES INTÉRIEURES DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS

---

### Objet du problème.

**150.** — Une *articulation* est un mode d'assemblage permettant, à chacune des pièces qu'il relie, de tourner librement autour de leur point d'attache.

Le plus souvent les pièces d'une charpente sont assemblées d'une manière rigide, et c'est pour faciliter l'étude que l'on substitue, par la pensée, à ces assemblages, des liaisons articulées qui permettraient aux angles de varier sans développer aucune résistance. Il est clair que, si l'équilibre a lieu dans l'hypothèse des articulations, il sera *à fortiori* assuré, lorsqu'on reviendra aux liaisons réelles, qui sont plus étroites que les liaisons fictives par lesquelles on les avait momentanément remplacées.

Les *systèmes articulés* que nous considérerons ici satisferont aux deux conditions suivantes :

1° Toutes les barres du système sont situées dans un même plan.

2° Les forces extérieures (charges et réactions) qui agissent sur le système sont situées dans ce plan et appliquées seulement aux *nœuds*, c'est-à-dire aux points d'articulation, et non en tout autre point des barres. D'ailleurs il n'est pas nécessaire qu'il y ait une force extérieure en chaque nœud.

**151.** — Cela posé, voici l'énoncé du problème à résoudre :

*Un système articulé étant en équilibre sous l'action de forces extérieures situées dans son plan et appliquées à ses nœuds, déterminer les forces intérieures, c'est-à-dire la tension ou la compression de chaque barre du système.*

La statique graphique fournit pour cet objet deux méthodes principales, la *méthode des sections* et la *méthode des nœuds*, que nous exposerons successivement, en donnant un nombre suffisant d'exemples à l'appui. Nous terminerons par l'indication des conditions que doit remplir un système articulé pour que le problème énoncé puisse être résolu par la statique seule, sans l'intervention de la théorie de l'élasticité.

### Principe de la méthode des sections.

**152.** — Imaginons, à travers la charpente, une section S d'ailleurs quelconque, rectiligne ou curviligne, mais qui ne passant par aucun nœud et ne coupant une même barre qu'une fois, décompose cette charpente en deux parties (U) et (V) n'ayant plus d'attaches l'une avec l'autre.

La partie (U), considérée toute seule, sera en équilibre sous l'influence : 1° des forces extérieures (charges et réactions)  $F, F', F'' \dots$  qui agissent sur ses nœuds ; 2° des actions que la partie (V) exerçait, avant d'être détachée, sur la partie (U), c'est-à-dire des tensions ou compressions  $f_1, f_2, f_3 \dots$  des barres coupées par la section S.

C'est en exprimant cet équilibre que l'on déterminera ces forces intérieures ou élastiques  $f_1, f_2, f_3 \dots$ .

Tel est le principe de la méthode des sections.

La mise en œuvre diffère suivant la manière d'exprimer cet équilibre ; de là deux procédés distincts, celui de Culmann et celui de Ritter, que nous allons développer.

Toutefois, nous ferons auparavant deux observations importantes.

**153.** — Nous laisserons toujours au mot *barre* son sens précis de *droite limitée*. Ainsi, quand nous disons qu'une sec-

tion S coupe une *barre* A, il faut entendre que la section passe entre les deux extrémités de cette barre, et non pas seulement qu'elle coupe la droite indéfinie dont la barre n'est qu'une portion ; c'est au contraire de cette droite indéfinie qu'il s'agira, quand nous dirons la *droite* A.

**154.** — La force intérieure  $f$  qui agit suivant une barre peut être une compression ou une tension. Dès qu'on aura déterminé le vecteur de cette force, on saura, par là même, si cette force, appliquée au tronçon qui fait partie de (U) et au point de section de la barre, pousse vers (U) ou tire vers (V) ; dans le premier cas, c'est une compression, et, dans le second, une tension.

### Procédé de Culmann.

**155.** — Supposons que la section S ne coupe pas plus de trois barres A, B, C (fig. 78), et soit R la résultante des forces extérieures F, F', F''... qui agissent sur la partie (U). Cette force R doit équilibrer les tensions ou compressions  $f_1, f_2, f_3$  des barres A, B, C ; on obtiendra donc  $f_1, f_2, f_3$ , en décomposant R en trois forces  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  suivant les côtés  $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$  du triangle formé par les trois droites A, B, C, et en prenant chacune de ces composantes en sens contraire.

Ainsi,  $\rho$  étant le point où la ligne d'action de R coupe l'un des côtés  $\alpha\beta$  du triangle  $\alpha\beta\gamma$ , on joindra  $\rho\gamma$ , puis on décomposera R en deux forces, l'une  $\varphi_3$  suivant  $\alpha\beta$ , l'autre  $\varphi$  suivant  $\rho\gamma$ . On décomposera à son tour la force  $\varphi$ , supposée appliquée au point  $\gamma$ , en deux autres, l'une  $\varphi_2$  suivant  $\gamma\alpha$  et l'autre  $\varphi_1$  suivant  $\beta\gamma$ . Les forces  $f_1, f_2, f_3$  respectivement égales et opposées à  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  seront les forces élastiques des barres A, B, C.

Dans notre figure, la force  $\varphi_3$  par exemple, dont la ligne d'action est C, tire vers (U) ; donc la force  $f_3$  qui est indiquée par la flèche tire vers (V) et par suite (n° 154) la barre C est tendue. Au contraire, les barres A et B sont comprimées.

Il serait superflu de s'étendre sur la détermination de la résultante R des forces F, F', F''... ; on sait (n° 37) comment le

polygone des vecteurs de ces forces donne la valeur de leur résultante, dont un point de la ligne d'action est ensuite fourni par un polygone funiculaire.

**156.** — La méthode est en défaut si la section  $S$  coupe plus de trois barres, car la décomposition d'une force  $R$  suivant plus de trois droites est un problème que la statique laisse indéterminé.

Ainsi, pour que ce procédé permette la détermination des forces intérieures de toutes les barres d'un système articulé, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chaque barre, une section découpant le système en deux parties, et ne rencontrant que deux barres autres que celle que l'on considère.

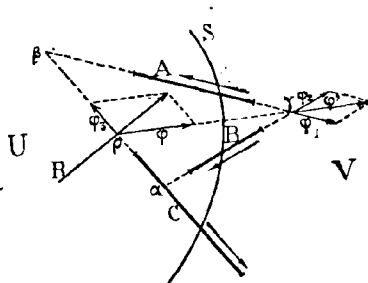


Fig. 78.

Toutefois, on peut *exceptionnellement* déterminer par le procédé ci-dessus la force élastique d'une barre  $C$ , lorsque la section  $S$  coupe, outre cette barre  $C$ , un nombre quelconque d'autres pièces  $A, B, D, \dots$ , pourvu que les droites  $A, B, D, \dots$  concourent en un même point  $\gamma$ . En désignant toujours par  $R$  la résultante des forces extérieures agissant sur la partie  $(U)$ , on décomposera  $R$  en deux forces  $\varphi_3$  et  $\varphi$  suivant la droite  $C$  et la droite qui joint au point  $\gamma$  l'intersection  $\rho$  de  $R$  et de  $C$ ; la composante  $\varphi_3$ , suivant  $C$ , sera égale et contraire à la force élastique  $f_3$  relative à la barre  $C$ .

### Procédé de Ritter.

**157.** — Le procédé de Ritter consiste à exprimer l'équilibre à l'aide du théorème des moments ; c'est pourquoi on le désigne souvent sous le nom de *méthode des moments statiques*.

Soit C la barre dont on veut trouver la tension ou la compression, et S une section découpant la charpente en deux parties (U) et (V) et ne rencontrant, outre C, que deux autres barres A et B. Les forces extérieures  $f_1, f_2, f_3$  relatives aux barres A, B, C, représentant les actions de la partie (V) sur la partie (U), doivent équilibrer les formes extérieures  $F', F'', F''' \dots$  (charges ou réactions) agissant sur les nœuds de la partie (U). La somme des moments de toutes les forces  $f_1, f_2, f_3, F, F', F'' \dots$  par rapport à un point quelconque du plan doit donc être nulle. Si l'on choisit, en particulier, pour centre des moments le point de concours  $\gamma$  des droites A et B, les moments de  $f_1$  et de  $f_2$  seront nuls, et l'on aura simplement

$$M'f_3 + \Sigma M^i F = 0$$

Par suite, si l'on désigne par  $p$  le segment qui a pour origine le point  $\gamma$  et pour extrémité la projection de  $\gamma$  sur la droite C, la formule

$$f_3 = -\frac{1}{p} \Sigma M^i F$$

donnera le vecteur de la force élastique relative à la barre C ; ce sera une tension ou une compression suivant que  $f_3$  tirera vers la région (V) ou vers la région (U).

**158.** — De même que le procédé de Culmann, celui de Ritter est en défaut lorsque la section S coupe, outre la barre C, plus de deux autres barres ; car, en choisissant pour centre des moments le point commun aux droites qui portent deux de ces autres barres, on ne fait disparaître de l'équation

des moments que les forces élastiques de ces deux barres ; il reste donc dans cette relation unique, avec la force élastique de la barre C, les forces élastiques inconnues d'une ou plusieurs barres.

Toutefois, ici encore, on peut *exceptionnellement* obtenir la force élastique de la barre C, lors même que la section S coupe plus de deux autres barres, à la condition que les droites qui portent ces barres en nombre quelconque aillent concourir en un même point  $\gamma$  ; en choisissant ce point  $\gamma$  pour centre des moments, toutes les forces élastiques disparaissent de l'équation des moments sauf la force élastique  $f_s$  de la barre C, qui se trouve dès lors déterminée.

**159.** — Mais le procédé de Ritter échappe aussi dans une autre circonstance.

La section S ne rencontrant, outre la barre C, que deux barres A et B, il peut arriver que les droites A et B soient parallèles ; alors le point  $\gamma$  par rapport auquel on prenait les moments disparaît à l'infini, et la méthode ne s'applique plus, quoique la force élastique relative à la barre C soit bien déterminée. On l'obtient en revenant au procédé Culmann, dont l'application ne rencontre aucune entrave. On opérera donc ici de la manière suivante :

En désignant toujours par  $\rho$  le point où la droite C rencontre la résultante R des forces extérieures appliquées aux nœuds de la partie (U), on décomposera R en deux forces, l'une suivant la droite C, l'autre suivant la parallèle menée par  $\rho$  aux droites A et B. La première composante, prise en sens contraire, sera la tension ou la compression de la barre C.

### Application aux poutres en treillis simple.

**160.** — La méthode des moments statiques est surtout avantageuse lorsque les charges et les réactions sont verticales, ce qui est le cas ordinaire de la pratique.

Nous allons l'appliquer à la poutre en treillis simple posée sur deux appuis A et B de même niveau (fig. 79, I).

Voici en quoi consiste cette poutre à laquelle on donne aussi le nom de *poutre Warren*.

Deux barres articulées (en général  $n$ ) forment la membrure supérieure  $S_1 S_2 S_3$  qui est horizontale. Trois barres articulées (en général  $n+1$ ) forment la membrure inférieure  $A I_1 I_2 B$  qui est aussi horizontale. Les articulations supérieures sont unies aux articulations inférieures par des barres de remplissage ou de treillis, alternativement inclinées dans un sens et dans l'autre. Dans notre figure, nous avons pris toutes les barres des membrures égales entre elles, et toutes les barres de remplissage inclinées à  $45^\circ$  sur l'horizon.

Les nœuds supérieurs  $S_1, S_2, S_3$  sont seuls chargés ; nous désignons par  $F_1, F_2, F_3$  ces charges, qui sont données et que nous supposons égales entre elles ; il y a en outre, comme forces extérieures, les réactions inconnues  $R$  et  $R'$  des appuis  $A$  et  $B$ .

Ici ces réactions sont évidemment égales entre elles, et chacune d'elles équivaut à la demi-somme des charges égales  $F_1, F_2, F_3$ . Mais, d'une manière générale, on les détermine à l'aide du polygone des vecteurs  $a x_1 x_2 x_3 b$  des forces  $F_1, F_2, F_3$  ; la parallèle  $\pi V$  menée par le pôle à la ligne de clôture  $ab$  donne les vecteurs  $V a_1$  et  $a_1 V$  des réactions.

Au lieu de nous donner le pôle  $\pi$ , nous avons placé immédiatement  $V$  au milieu de  $a_1 a_2$  et pris le pôle  $\pi$  sur l'horizontale du point  $V$ , à une distance polaire  $V\pi = h$  égale au double de la hauteur  $h'$  de la poutre.

Nous avons en outre tracé (n° 104) le diagramme  $N n_1 n'_1 n_2 n'_2 n_3 n'_3 a_1$  des efforts tranchants.

Cela posé, pour chercher les forces élastiques relatives aux diverses barres de la poutre, nous emploierons des sections rectilignes verticales  $Z_1, Z_2, \dots$ , sections qui ne rencontrent ici jamais plus de trois barres.

Les barres portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 ; nous allons considérer successivement :

1° les barres de la membrure supérieure ; elles portent des numéros doublement pairs 4, 8 ;

2° les barres de la membrure inférieure ; elles portent des numéros simplement pairs, 2, 6, 10 ;

3° les barres de treillis : elles sont désignées par les numéros impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11.



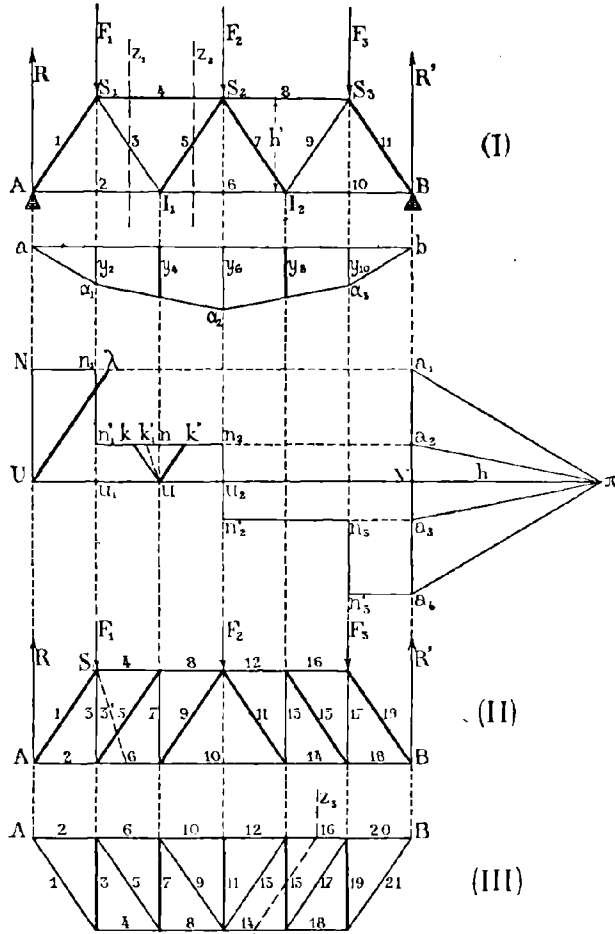


Fig. 79.

161. — Considérons la barre 4 ; pour cela, faisons une section verticale  $Z_1$  qui rencontre les barres 4, 3 et 2 et prenons les moments par rapport au point  $I_1$  où concourent 2 et 3. Nous aurons (n° 157) pour la force élastique  $f_4$  :

$$f_4 = - \frac{M^R + M^F F_1}{(-k)}$$

Or, le numérateur du second membre est le moment fléchissant de la poutre au point  $I_1$ ; il a donc pour expression, en grandeur et en signe, le produit  $h.y_1$  de la distance polaire par l'ordonnée au point  $I_1$  du polygone funiculaire. On a donc

$$f_1 = \frac{h}{k'} y_1 = 2y_1.$$

D'ailleurs toutes les ordonnées du polygone funiculaire, et en particulier  $y_1$ , sont positives;  $f_1$  est donc positive, c'est-à-dire dirigée de droite à gauche d'après nos conventions (n° 7); comme ici la région (U) est la région à gauche de la section, on voit que  $f_1$  pousse vers (U); la barre 4 est donc comprimée (n° 154).

On trouverait la même compression pour la barre 8; cela résulte d'ailleurs de la symétrie de tout le système (poutre et charges) par rapport à la *verticale médiane*  $F_2 S_2$ .

Ainsi, *chaque barre de la membrure supérieure est comprimée, et sa compression est représentée par le double de l'ordonnée du polygone funiculaire qui passe par le nœud opposé de la membrure inférieure*. Cette force élastique est donc minima aux bords et maxima au milieu de la poutre.

**162.** Considérons maintenant la barre 2. La même section  $Z_1$  servira; seulement nous prendrons pour centre des moments le point  $S_1$  où concourent les barres 3 et 4. Nous aurons ainsi (n° 157) pour la force élastique  $f_2$

$$f_2 = - \frac{M_1 R}{k'} ;$$

or, le numérateur est le moment fléchissant de la poutre au point 2; ce moment est  $h y_2$  et la relation devient

$$f_2 = - \frac{h}{k'} y_2 = - 2y_2.$$

Le second membre étant négatif, la force  $f_2$  tire vers (V); c'est donc une tension.

On obtiendrait le même résultat pour la barre 10 symétrique de la précédente.

Pour la barre 6, qui est seule de son espèce, nous ferons une section verticale  $Z_2$  coupant les trois barres 6, 3, 4, et nous prendrons pour centre des moments le point  $S_2$  où concourent 3 et 4. Nous aurons ainsi

$$f_6 = - \frac{M'R + M'F_1}{h}$$

ou

$$f_6 = - \frac{h}{h'} y_6 = - 2y_6 ;$$

c'est encore une tension.

Ainsi, *chaque barre de la membrure inférieure est tendue, et sa tension est représentée par le double de l'ordonnée du polygone funiculaire qui passe par le nœud opposé de la membrure supérieure.* Cette force élastique est donc minima près des appuis et maxima au milieu de la poutre.

**163.** — Arrivons enfin aux barres de treillis, soit d'abord la barre 3 ; nous emploierons la section  $Z_1$  ; elle coupe, outre la barre 3, les deux barres parallèles 2 et 4. On est donc ici dans le cas d'exception signalé au n° 159, et il faut employer le procédé de Culmann, c'est-à-dire prendre la résultante de la réaction  $R$  et de  $F_1$ , la décomposer suivant la direction du côté 3 et suivant la direction horizontale des côtés 2 et 4 ; la première de ces composantes, changée de sens, sera la force intérieure demandée.

Or, la résultante des forces  $R$  et  $F_1$  qui s'exercent sur la partie (U), c'est-à-dire à gauche de la section  $Z_1$ , a le même vecteur que l'effort tranchant correspondant à  $Z_1$  ; ce vecteur est l'ordonnée de l'horizontale  $n'_1 n_2$  et, par conséquent, en particulier l'ordonnée  $un$  dont le prolongement passerait par le nœud  $I_1$ . Menons  $uk$  parallèle à la barre considérée 3 ; le triangle  $unk$  a pour côtés le vecteur  $un$  de la résultante et des parallèles aux directions des composantes ; ces composantes ont donc pour vecteurs  $uk$  et  $kn$ , et c'est  $uk$  qui représente la composante suivant la barre 3 ; par suite,  $ku$  est le vecteur de la force élastique relative à cette barre, et comme cette force tire vers la région (V), c'est une *tension*.

Pour la barre 5, on prendrait la section  $Z_3$  et l'on raisonnait d'une manière analogue ; la composante parallèle à 5 est  $uk'$  et, par suite,  $k'u$  est la valeur de la force élastique relative à la barre 5 ; cette force pousse vers (U) ; c'est une *compression*.

Par symétrie, on voit que la barre 7 subit la même compression que la barre 5 et que la barre 9 subit la même tension que la barre 3.

Il ne reste à considérer que les barres extrêmes 1 et 11, et même que la barre 1, puisque, en vertu de la symétrie, ces deux barres subissent les mêmes efforts. Or, pour la barre 1, il suffit de décomposer la réaction R, dont le vecteur est UN, en deux forces, l'une suivant la droite 1, l'autre suivant l'horizontale ; la première composante a pour vecteur  $U\lambda$ , et, par suite,  $\lambda U$  est le vecteur de la force élastique relative à la barre 1 ; cette force pousse vers (U), c'est donc une *compression*.

En résumé, *pour les barres de treillis, une barre quelconque et sa symétrique par rapport à la verticale médiane  $F_2 S_2$ , sont comprimées (ou tendues) suivant que les deux droites dont ces barres font partie vont se croiser au-dessus (ou au-dessous) de la poutre*. De plus, en appelant  *pied*  d'une barre de treillis le point où elle rencontre la membrure inférieure, on voit que la *force élastique relative à une barre quelconque est représentée en valeur absolue par la longueur de la parallèle à cette barre, limitée au diagramme des efforts tranchants, et menée par le pied de l'ordonnée de ce diagramme située sur la verticale du pied de la barre*. Ainsi, pour les barres 3 et 5 dont les pieds sont en  $I_1$ , il faut prendre la longueur des parallèles  $uk$  et  $uk'$  à 3 et à 5 menées par le pied  $u$  de l'ordonnée  $un$  du diagramme des efforts tranchants qui est située sur la verticale du point  $I_1$ . Enfin, ces forces élastiques sont maxima près des culées et minima au milieu de la poutre.

Pour permettre au lecteur d'embrasser, par un simple coup d'œil sur la figure, le sens de ces résultats, nous avons marqué les barres comprimées d'un trait plus fort que les barres tendues.

**164.** — La poutre II de la figure 79, dite *poutre Howe*, est

aussi en treillis simple ; elle a même hauteur que la précédente ; mais les barres de treillis sont alternativement verticales et inclinées à  $45^\circ$ . Celles qui sont verticales reçoivent le nom de *poinçons* et celles qui sont inclinées sont appelées *contrefiches*.

La poutre III n'est en quelque sorte que la poutre II renversée.

Nous avons supposé que les poutres II et III portaient les mêmes charges  $F_1, F_2, F_3$ , que la poutre I, afin de nous servir du même polygone des vecteurs et des mêmes diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants. Seulement comme ici les panneaux sont deux fois plus nombreux que dans la poutre I, les articulations de la membrure supérieure ne se trouvent chargées que de deux en deux.

La marche est absolument la même qu'aux n<sup>os</sup> 161, 162 et 163, et, après les détails dans lesquels nous sommes entrés, la recherche des forces élastiques relatives aux barres des membrures et aux contrefiches ne saurait arrêter le lecteur. Les poinçons exigent seuls quelques mots d'explication.

Considérons, par exemple, le poinçon 3 de la poutre II. On peut imaginer que la barre correspondante 3 de la poutre I ait tourné peu à peu autour de  $S_1$  de manière à prendre la position verticale ; dans ses positions successives cette barre reste toujours tendue, et sa tension, d'abord représentée par le vecteur  $ku$ , prend pour vecteur  $k_1'u$  quand la barre devient 3' (poutre II), et enfin  $a$  pour vecteur  $nu$  lorsque la barre est devenu verticale.

Ainsi, dans la poutre II, le poinçon 3 est tendu et sa tension est égale en valeur absolue à l'effort tranchant correspondant à la même verticale.

On peut, au lieu de recourir à la méthode des limites, traiter la question des poinçons directement.

Considérons, par exemple, le poinçon 15 de la poutre III, et faisons une section  $Z_3$  ayant la forme d'une ligne brisée dont les côtés extrêmes soient verticaux et dont le côté intermédiaire soit parallèle aux contrefiches 13 et 17. Cette section coupe les trois barres 14, 15 et 16. Les forces extérieures agissant sur la partie gauche (U) de la charpente sont  $R, F_1$  et  $F_2$  ; leur résultante  $a$  pour vecteur  $Va_3$ , et il faut la décomposer en deux

forces, l'une suivant la droite 15, l'autre suivant la direction horizontale; comme cette résultante est verticale, sa composante horizontale est nulle, et sa composante suivant le poinçon 15 est cette résultante elle-même; en la prenant en sens contraire, on a la force élastique relative au poinçon considéré; le vecteur de cette force est  $a_3V$ ; il est dirigé vers (U); c'est donc ici une *compression*.

En résumé *dans les poutres II et III, comme dans la poutre I, la membrure supérieure est comprimée et la membrure inférieure est tendue. Dans la poutre II, les poinçons sont tendus et les contrefiches comprimées; c'est l'inverse dans la poutre III. Dans les deux cas les forces élastiques relatives aux poinçons, sont égales en valeur absolue aux efforts tranchants correspondants.*

### Principe de la méthode des nœuds

**165.** — Remarquons d'abord que, si plusieurs forces concourantes  $F_1, \dots, F_{n-2}, F_{n-1}, F_n$  se font équilibre et si l'on connaît les lignes d'action et les vecteurs des forces  $F_1, \dots, F_{n-2}$ , ainsi que les lignes d'action de  $F_{n-1}$  et de  $F_n$ , on peut trouver les vecteurs de ces deux dernières forces.

Il suffit, en effet, d'exprimer que le polygone des vecteurs de toutes les forces est fermé. On construira donc le polygone des vecteurs  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  des forces entièrement connues  $F_1, \dots, F_{n-2}$ ; puis on mènera par  $a_{n-1}$  une parallèle à la ligne d'action de  $F_{n-1}$  et par  $a_1$  une parallèle à la ligne d'action de  $F_n$ ;  $a_n$  étant le point de rencontre de ces deux droites, les vecteurs demandés seront  $a_{n-1} a_n$  et  $a_n a_1$ .

Or, dans le système articulé, on connaît les forces extérieures (charges ou réactions) qui agissent sur un nœud quelconque; si, en outre, on connaît les tensions ou compressions pour toutes les barres qui aboutissent à ce nœud, excepté pour deux d'entre elles, on pourra, d'après ce qui vient d'être dit, déterminer les forces élastiques de ces deux dernières barres;  $f$  étant l'une d'elles et MN étant la barre correspondante qui aboutit au nœud considéré M, on imaginera

sur cette barre une flèche ayant le sens du vecteur de  $f$ ; si cette flèche est dirigée vers le nœud M, la force élastique  $f$  est une *compression*; si la flèche est dirigée en sens inverse,  $f$  est une *tension*.

Tel est le principe de la méthode des nœuds.

Pour l'appliquer à un système articulé, on part d'un premier nœud où il n'y ait que deux forces élastiques inconnues; on détermine ces forces comme on vient de le dire; puis on passe à celui des nœuds voisins qui, grâce aux nouvelles données que l'on vient d'acquérir par l'opération précédente, n'a plus que deux barres dont les forces élastiques soient alors inconnues; on détermine ces forces, ce qui permet de passer à l'un des nœuds suivants, et ainsi de suite.

La méthode sera en défaut dès qu'on ne pourra plus trouver de nœuds où il y ait moins de trois forces élastiques inconnues.

**166.** — Voici une observation très importante: soit MN une barre réunissant le nœud M au nœud N; et, soit  $f$  la force élastique de cette barre, tension ou compression, que l'on vient de trouver en considérant le nœud M. Quand on passe au nœud suivant N, cette force élastique, qui figure alors comme force connue parmi celles appliquées au point N, doit être changée de sens.

En effet, si la barre MN est, par exemple, comprimée, c'est que la force élastique  $f$  considérée comme appartenant au nœud M a le sens d'une flèche placée sur la barre et dirigée vers M; tandis que, considérée comme appartenant au nœud N, cette force élastique  $f$ , devant toujours représenter une compression, doit avoir le sens d'une flèche posée sur la barre et dirigée vers N.

De même, si la barre est tendue, la force  $f$ , représentant toujours une tension, doit être dirigée vers M quand on la considère comme appartenant au nœud N.

**167.** — Appliquons cette méthode à la poutre I de la figure 79, et qui est reproduite figure 80. Nous supposons qu'on ait préalablement déterminé les réactions comme il a été dit au n° 160.

Il faut commencer par le nœud A ou par le nœud B, ces deux nœuds étant les seuls auxquels n'aboutissent que deux barres.

Au nœud A, on connaît la réaction R, et les forces élastiques inconnues seront celles  $f_1$  et  $f_2$  des barres 1 et 2 ; on pourra donc les déterminer.

Dès lors au nœud S<sub>1</sub> on connaîtra  $f_1$  et F<sub>1</sub> et on pourra déterminer  $f_3$  et  $f_4$ . Puis au nœud I<sub>1</sub>, on connaîtra  $f_3$  et  $f_4$ , et on pourra trouver  $f_5$  et  $f_6$ . On passera de là successivement aux nœuds S<sub>2</sub>, I<sub>2</sub>, S<sub>3</sub> où l'on n'aura jamais, quand on y arrivera, que deux forces élastiques inconnues. Le nœud B fournira enfin une vérification, puisque, quand on y parviendra, toutes les forces  $f_{10}$ ,  $f_{11}$  et R' qui agissent en ce point seront déjà trouvées.

On voit que la méthode réussit jusqu'au bout. D'ailleurs ici, à cause de la symétrie, on pourrait s'arrêter au nœud S<sub>2</sub> ; mais, comme c'est surtout une application de la méthode que nous avons en vue, nous ne profiterons pas de cette circonstance particulière.

Entrons dans les détails :

1<sup>o</sup> Nœud A (fig. A)

Force connue  $R = Va_1$

Forces inconnues  $f_1, f_2$

Polygone  $Va_1\alpha V$

Résultats : compression  $f_1 = a_1\alpha$ , tension  $f_2 = \alpha V$ .

2<sup>o</sup> Nœud S<sub>1</sub> (fig. S<sub>1</sub>)

Forces connues  $f_1 = \alpha a_1, F_1 = a_1 a_2$

Forces inconnues  $f_3, f_4$

Polygone  $\alpha a_1 a_2 \beta \alpha$

Résultats : compression  $f_3 = a_2 \beta, f_4 = \beta \alpha$ .

3<sup>o</sup> Nœud I<sub>1</sub> (fig. I<sub>1</sub>)

Forces connues  $f_3 = Va, f_4 = \alpha \beta$

Forces inconnues  $f_5, f_6$

Polygone  $V\alpha\gamma\beta V$

Résultats :  $f_5 = \beta\gamma, f_6 = \gamma V$



4<sup>o</sup> Nœud  $S_1$  (fig.  $S_1$ )

Forces connues  $f_5 = \gamma\beta$ ,  $f_6 = \beta a_2$ ,  $F_2 = a_2 a_3$

Forces inconnues  $f_8$ ,  $f_7$

Polygone  $\gamma\beta a_2 a_3 \varepsilon \gamma$

Résultats :  $f_8 = a_3 \varepsilon$ ,  $f_7 = \varepsilon \gamma$

5<sup>o</sup> Nœud  $I_1$  (fig.  $I_1$ )

Forces connues  $f_6 = V\gamma$ ,  $f_7 = \gamma\varepsilon$

Forces inconnues  $f_9$ ,  $f_{10}$

Polygone  $V\gamma\varepsilon\alpha V$

Résultats :  $f_9 = \varepsilon\alpha$ ,  $f_{10} = \alpha V$

6<sup>o</sup> Nœud  $S_3$  (fig.  $S_3$ )

Forces connues  $f_8 = \alpha\varepsilon$ ,  $f_9 = \varepsilon a_3$ ,  $F_3 = a_3 a_4$

Force inconnue  $f_{11}$

Polygone  $\alpha\varepsilon a_3 a_4 \alpha$

Résultat :  $f_{11} = a_4 \alpha$ .

7<sup>o</sup> Nœud B (fig. B)

Forces connues  $f_{10} = V\alpha$ ,  $f_{11} = \alpha a_4$ ,  $R' = a_4 V$

Force inconnue — néant

Polygone  $V\alpha a_4 V$  qui, comme vérification, doit se fermer.

**Diagramme général des forces élastiques.  
Figures réciproques.**

168. — En opérant comme on vient de le faire, on est conduit à construire un polygone des vecteurs pour chaque nœud.

Or, d'une part, on n'utilise pas de la sorte le polygone des vecteurs  $a_1 a_2 a_3 a_4$  des forces extérieures, qu'on a dû cependant construire préalablement pour la recherche des vecteurs  $V a_1$ ,  $a_4 V$  des réactions. D'autre part, comme chaque barre fait partie de deux nœuds, les lignes représentatives des forces élastiques se trouvent tracées deux fois sur l'ensemble des figures (A), ( $S_1$ ), ( $I_1$ ), ( $S_2$ ), ( $I_2$ ), ( $S_3$ ), (B).

On éviterait ces doubles emplois si, laissant fixe la figure ( $S_2$ ), on abaissait verticalement les figures ( $A_1$ ), ( $S_1$ ), ( $I_1$ ), et

si on remontait verticalement les figures  $(I_3)$ ,  $(S_3)$ ,  $(B)$ , de telle sorte que les points  $V$  des figures  $(A)$ ,  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(B)$  viennent coïncider avec le point  $V$  de la figure  $(S_2)$  et que le point  $a_3$  de la figure  $(S_1)$  et le point  $a_3$  de la figure  $(S_3)$  viennent se placer respectivement sur les points  $a_2$  et  $a_3$  de la figure  $(S_2)$ .

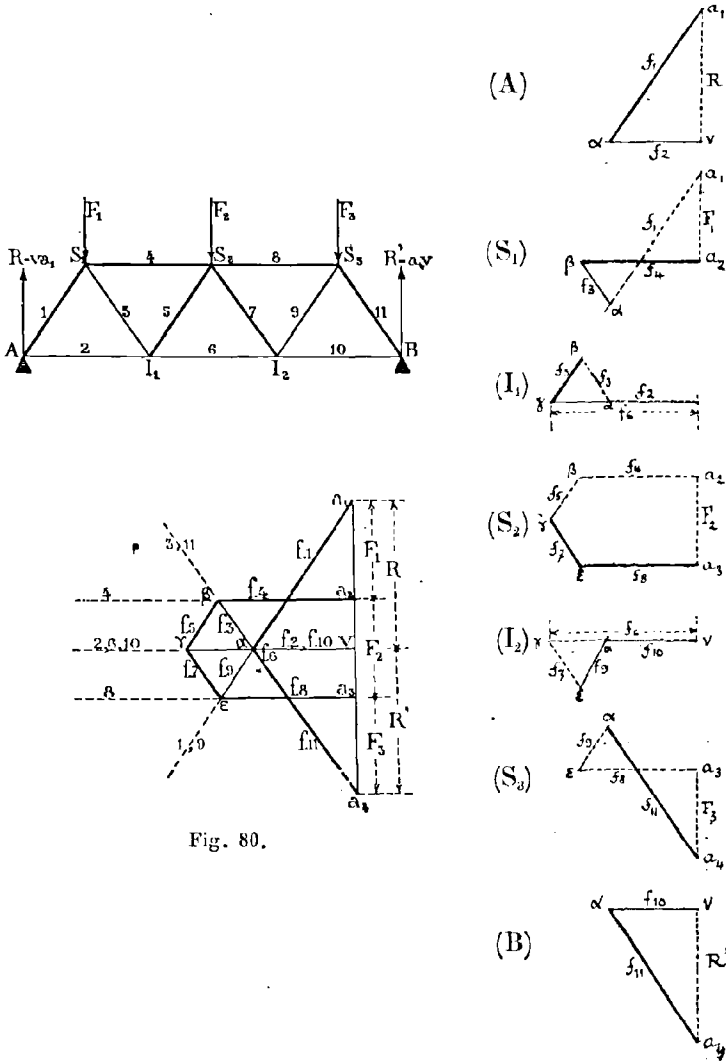


Fig. 80.

On obtiendrait ainsi la figure 80 où il n'y a plus de double emploi, et où le côté vertical  $a_1a_2Va_3a_1$ , n'est autre que le polygone des vecteurs et des réactions, qu'on avait déjà tracé antérieurement et qui se trouve ainsi utilisé.

La recherche des forces intérieures du système articulé se réduit donc à la construction directe de ce diagramme total, dans lequel se trouvent condensés en quelque sorte les diagrammes partiels (A), (S<sub>1</sub>), (I<sub>1</sub>), (S<sub>2</sub>), (I<sub>2</sub>), (S<sub>3</sub>), (B).

On donne à ce diagramme des forces élastiques le nom de *figure réciproque* de celle que forme le système articulé.

**169.** — L'étude des considérations qui ont réellement conduit Maxwell et M. Cremona à la conception de ces figures réciproques et à leur emploi pour la détermination des forces intérieures des systèmes articulés, est assurément fort intéressante et très instructive. Mais ce serait sortir de notre cadre que de nous arrêter à cette question purement théorique et certainement en dehors du domaine proprement dit de la statique graphique. On pourra consulter sur ce sujet le chapitre 23 et la note 5 du *Traité de statique graphique* de M. Maurice Lévy, aussi bien que l'opuscule de M. Cremona (*le figure réciproche nella statica grafica*) complété par MM. Jung et Saviotti et traduit en français par M. le capitaine du génie Louis Bossut.

Toujours est-il que la marche que nous avons suivie est à la fois bien simple et fort naturelle.

Nous ajouterons encore un mot sur les figures réciproques.

Imaginons qu'on ait adjoint à la figure formée par le système articulé, un polygone funiculaire des forces extérieures ainsi que les tronçons des lignes d'action de ces forces qui relient le système articulé et le polygone funiculaire enveloppant. La figure du système articulé ainsi complétée et le diagramme des forces élastiques satisfont aux deux conditions suivantes :

1° A chaque droite de l'une répond dans l'autre une droite parallèle ;

2° A chaque nœud de l'une répond dans l'autre un polygone fermé.

C'est en cela que consiste la *réciprocité*.

Une figure prise au hasard ne comporte pas de figure réciproque, et ce n'est pas un problème simple que la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une figure admette une réciproque. Voici une condition nécessaire, mais non suffisante :

A chacun des nœuds doivent aboutir au moins trois droites.

Cela résulte immédiatement de ce que à tout nœud doit répondre dans la figure réciproque un polygone fermé et qu'un polygone fermé a toujours au moins trois côtés.

On voit par là que, à moins d'être complété comme nous l'avons dit, le système articulé considéré ci-dessus (poutre Warren) n'admet pas de figure réciproque, puisque chacun des deux nœuds A et B n'est formé que de deux barres.

**170.** — Au fond ce qui importe, c'est d'apprendre à construire directement et rapidement le diagramme général des forces élastiques du système articulé, en juxtaposant ce diagramme à la ligne verticale  $Va_1a_2a_3a_4$ , qui constitue le polygone des vecteurs des forces extérieures.

Voici comment il convient de procéder :

On trouve dans le diagramme (fig. 80), outre le polygone des vecteurs des forces extérieures, deux sortes de lignes :

1° Celles qui correspondent aux barres de pourtour du système articulé et que nous appellerons *lignes principales* du diagramme.

2° Celles qui correspondent aux barres de remplissage et que nous nommerons *lignes secondaires* du diagramme.

Chaque ligne, d'ailleurs principale ou secondaire, du diagramme est parallèle à la barre correspondante du système articulé.

Supposons que, pour chercher les réactions R et R', on ait construit le polygone des vecteurs  $a_1a_2a_3a_4$  des charges, en prenant les forces  $F_1, F_2, F_3$ , dans l'ordre où on les rencontre quand on suit le contour du système articulé, en partant de l'appui A, dans le sens de la marche des aiguilles d'une montre. Une fois les réactions trouvées, le système complet des forces ex-

térieures sera, en partant du point A et suivant l'ordre indiqué,

$$R, F_1, F_2, F_3, R',$$

et l'on aura pour le polygone des vecteurs correspondant

$$Va_1a_2a_3a_4V.$$

Cela posé, considérons d'abord une ligne principale du diagramme, celle qui correspond à la barre 4 par exemple; cette barre reliant les deux nœuds  $S_1$  et  $S_2$ , le vecteur de sa force élastique se trouvera en  $a_2\beta$  dans les diagrammes partiels ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) relatifs à ces nœuds; dans le diagramme général, il partira donc du sommet  $a_2$  du polygone des vecteurs, qui est commun aux vecteurs  $a_1a_2, a_2a_3$  des deux forces  $F_1$  et  $F_2$ , *limitrophes* de la barre 4. On raisonnerait de même pour les lignes principales qui répondent aux barres 1, 8, 11, lesquelles sont comprises chacune entre deux forces extérieures. Voyons ce qui arrive pour les barres 2, 6, 10, pour lesquelles il n'y a pas de force extérieure aux extrémités ou du moins à chacune des deux extrémités. La barre 2 faisant partie des nœuds A et  $I_1$ , le vecteur de sa force élastique se trouve en  $V\alpha$  dans les diagrammes partiels (A) et ( $I_1$ ); dans le diagramme général, il part donc de V, et l'on verrait de même que les lignes principales correspondantes aux barres 6 et 10 partent également de V. Or, le point V est le sommet du polygone des vecteurs qui est commun aux vecteurs  $a_4V, Va_1$  des forces extérieures R et R' entre lesquelles sont comprises chacune des barres 2, 6, 10. On peut donc énoncer cette règle générale :

*Toute ligne principale du diagramme s'obtient en menant la parallèle à la barre de pourtour correspondante, par le sommet du polygone des vecteurs qui est commun aux vecteurs des deux forces limitrophes de cette barre.*

Occupons-nous maintenant des lignes secondaires.

Considérons l'un quelconque des triangles du système articulé, le second, par exemple, qui est formé par les barres 3, 4, 5. Les vecteurs des forces élastiques correspondantes figurent, le premier  $f_3 = \beta\alpha$  dans les diagrammes partiels ( $S_1$ ) et

( $I_1$ ), le second  $f_i = a_2\beta$  dans les diagrammes partiels ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), le troisième  $f_i = \beta\gamma$  dans les diagrammes partiels ( $I_1$ ) et ( $S_2$ ). Or, les points désignés par la lettre  $\beta$  dans ces divers diagrammes se réunissent en un seul et même point  $\beta$ , quand on combine, comme il a été dit, ces diagrammes partiels pour former le diagramme général. On en dirait autant des autres triangles. Donc : *à tout triangle du système articulé répond, dans le diagramme général, un nœud où se croisent les lignes qui correspondent (et qui sont parallèles) aux barres formant les côtés du triangle considéré.*

Cette règle permet de tracer successivement les lignes secondaires, dès que les lignes principales sont en place. En effet, le nœud relatif au premier triangle  $AS_1I_1$  est connu, puisqu'il est à la rencontre des lignes principales correspondant aux barres 1 et 2 ; on pourra donc tracer la ligne secondaire correspondant à la barre 3. Dès lors, le nœud relatif au second triangle  $S_1I_1S_2$  sera déterminé par la rencontre des lignes qui répondent aux barres 3 et 4 ; on pourra donc tracer la ligne secondaire relative à la barre 5, et ainsi de suite.

**171.** — En résumé, voici la marche à suivre pour tracer le diagramme de la figure 80.

On considérera les forces extérieures dans l'ordre  $R, F_1, F_2, F_3, R'$  où on les rencontre en partant de l'appui  $A$  et suivant le contour de la charpente dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.  $Va_1a_2a_3a_4V$  étant le polygone des vecteurs des forces extérieures prises dans cet ordre, on mènera, conformément à la première règle, les lignes principales successives  $a_11, a_24, a_38, a_411, V_210, V_26, V_22$ , dont les trois dernières coïncident avec l'horizontale du point  $V$ . Puis, en appliquant la seconde règle aux triangles successifs  $AS_1I_1, I_1S_1S_2, S_2I_1I_2, I_2S_2S_3, S_3I_2B$ , on obtiendra de proche en proche : 1° le nœud  $\alpha$  relatif au premier triangle et la ligne secondaire  $\alpha 3$  qui, étant parallèle à la barre 3, est ici le prolongement de  $a_3\alpha$  ; 2° le nœud  $\beta$  relatif au second triangle et la ligne secondaire  $\beta 5$  qui est parallèle à la barre 5 ; 3° le nœud  $\gamma$  relatif au troisième triangle et la ligne secondaire  $\gamma 7$  qui est parallèle à la barre 7 ; 4° le nœud  $\epsilon$  relatif au quatrième triangle et la

ligne secondaire  $\epsilon 9$  qui est parallèle à la barre 9 ; 5° le nœud relatif au dernier triangle qui devra être à la fois sur  $\epsilon 9$ ,  $\alpha 11$ ,  $\nu 10$ , c'est-à-dire au point  $\alpha$  déjà trouvé.

Ce diagramme général une fois construit, rien n'est plus aisé que d'y démêler les vecteurs des forces élastiques relatives aux diverses barres.

Dans le cas qui nous occupe, on aurait pu, à cause de la symétrie, se borner à tracer la moitié du diagramme ; c'est ce qu'il ne faudrait pas manquer de faire dans la pratique.

**Des Frames.**

**172.** — Le système articulé que nous avons pris pour exemple n'est qu'un cas particulier d'un type plus général auquel nous donnerons le nom de *frame*. Les Anglais disent *framework*, les Allemands *fachwerck*, les Italiens *travure reticulaire* ; mais toutes ces dénominations ont été parfois employées dans des sens assez divers et même un peu confus. Nous adopterons le nom de *frame*, qui est le plus court, en lui attribuant la signification précise que voici :

Un *frame* est une figure composée de triangles juxtaposés extérieurement les uns aux autres, de manière que chacun d'eux ait un côté commun avec le triangle qui le précède et un autre côté commun avec le triangle qui le suit ; chacun

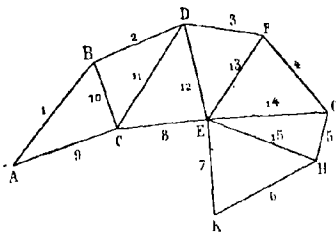


Fig. 81.

des deux triangles extrêmes a d'ailleurs deux côtés sur le contour de la figure, et tout triangle intermédiaire a un côté sur ce contour.

Cette définition détermine pleinement les systèmes articulés de ce genre (fig. 81). Il n'y a de nœuds que sur le pourtour, lequel est divisé en deux parties ou membrures ABDFGHIK, ACEK, par les nœuds A et K qui appartiennent aux deux triangles extrêmes et en chacun desquels n'aboutissent que deux barres.

En supposant, comme toujours, qu'il n'y ait de forces extérieures qu'aux nœuds et qu'il y en ait une au point A, il est aisé de prouver d'une manière générale que la méthode des nœuds s'applique à un tel système et permet d'obtenir les forces intérieures des diverses barres.

En effet, convenons, pour abrégier le langage, de désigner par  $f_i$  la force élastique relative à la barre qui porte le numéro  $i$ . Puisqu'il y a au point A une force extérieure (charge ou réaction), l'équilibre du nœud A donnera d'abord  $f_1$  et  $f_2$ . Dans le triangle suivant BCD, l'un des côtés, BD, par exemple, sera sur le pourtour; le nœud B n'aura alors que trois barres 1, 10 et 2, et comme  $f_1$  est connue, l'équilibre de ce nœud déterminera  $f_{10}$  et  $f_2$ . Le triangle suivant sera nécessairement sur CD, puisque BD est sur le pourtour, et dans ce triangle DCE l'un des côtés appartiendra au pourtour. Supposons que ce soit le côté CE; alors le nœud C aura quatre barres 8, 9, 10 et 11, et comme on connaît déjà  $f_9$  et  $f_{10}$ , l'équilibre de ce nœud donnera  $f_{11}$  et  $f_8$ . Le raisonnement peut être continué de la même manière. Puisque CE est sur le pourtour, le triangle suivant sera établi sur le côté DE; dans ce triangle DEF, l'un des côtés, DF par exemple, appartiendra au pourtour; donc le nœud D aura quatre barres: 2, 11, 12 et 3, et comme  $f_2$  et  $f_{11}$  sont déjà connues, l'équilibre de ce nœud déterminera  $f_{12}$  et  $f_3$ ; et ainsi de suite.

Ainsi, à chaque fois, avant l'introduction d'un nouveau triangle, il ne reste qu'une barre dont la force élastique soit encore inconnue; mais en revanche, il y a deux nœuds, ceux que relie cette barre, dont on n'a pas encore exprimé l'équilibre. Il en sera de même à la fin; il restera à connaître  $f_7$ ; mais l'équilibre du nœud E, où les forces élastiques  $f_8, f_{12}, f_{13}, f_{11}, f_{13}$  des autres barres seront déjà connues, donnera  $f_7$ . L'équilibre du dernier nœud K fournira une vérification.



**173.** — Un des frames les plus remarquables est la *ferme Polonceau à une seule bielle* qui est représentée dans la fig. 82.

Les nœuds extrêmes A et B reposent sur deux appuis ; les nœuds  $S_1, S_2, S_3$ , de la membrure supérieure sont seuls chargés et leurs charges  $F_1, F_2, F_3$  sont supposées égales entre elles.

La *bielle*  $I_1S_1$  est perpendiculaire au milieu de  $AS_2$ , et tout est symétrique par rapport à la verticale du point  $S_2$  ; en sorte qu'il suffit en définitive de déterminer les forces élastiques relatives aux barres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Les réactions  $R$  et  $R'$  sont évidemment égales l'une et l'autre à la moitié de la somme des charges  $F_1 + F_2 + F_3$  ; elles ont pour valeurs  $V a_1$  et  $a_1 V$ ,  $V$  étant le milieu du polygone des charges  $a_1 a_2 a_3 a_4$ .

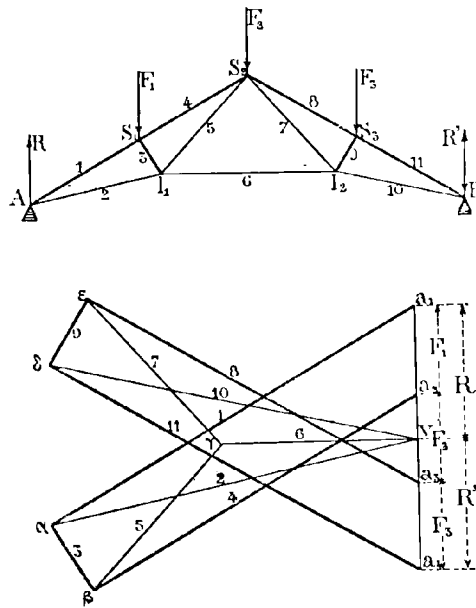


Fig. 82.

Conformément à nos prescriptions, nous traçons d'abord les lignes principales. Ce sont les parallèles  $a_1x, a_2\beta$  aux barres 1 et 4, et les parallèles  $Vx$  et  $Vy$  aux barres 2 et 6.

Dès lors, le point  $x$ , intersection de  $a_1x$  et de  $Vx$ , est le nœud

de diagramme relatif au premier triangle  $AS_1I_1$ , et la parallèle  $\alpha\beta$  à la barre 3 est la ligne secondaire relative à cette barre. Le point  $\beta$ , intersection de  $\alpha\beta$  et de  $a_2\beta$ , est le nœud correspondant au second triangle  $S_1 I_1 S_2$ , et la parallèle  $\beta\gamma$  à la barre 5 est la ligne secondaire relative à cette barre. Enfin, le point  $\gamma$ , intersection de  $\beta\gamma$  et de  $V\gamma$ , est le nœud relatif au triangle  $I_1 S_2 I_2$ . Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin.

On obtient donc les résultats suivants :

Nœud A : polygone  $Va_1\alpha V$  ;  $f_1 = a_1\alpha$  (compression) ;  
 $f_2 = \alpha V$  (tension).

Nœud  $S_1$  ; polygone  $a_1a_2\beta\alpha a_1$  ;  $f_4 = \alpha\beta$  (compression) ;  
 $f_3 = \beta\alpha$  (compression).

Nœud  $I_1$  ; polygone  $V\alpha\beta\gamma V$  ;  $f_5 = \beta\gamma$  (tension) ;  $f_6 = \gamma V$  (tension),

On peut, si l'on veut, compléter le diagramme par symétrie.

En résumé, les pièces comprimées sont celles de la membrure supérieure et les deux bielles ; les autres barres sont tendues.

On est convenu d'appeler ce système articulé ferme Polonceau à *une* bielle, bien qu'en réalité il y ait *deux* bielles ; c'est, qu'en adoptant cette dénomination, on n'a considéré que la demi-ferme en faisant abstraction de la partie symétrique.

### **Combinaison des deux méthodes. Ferme Polonceau à trois bielles.**

**174.** — La méthode des nœuds ou des figures réciproques se recommande par son élégance et sa rapidité. Mais elle ne donne les tensions ou les compressions des barres que de proche en proche. Il y a même des cas où elle exige plus de travail que la méthode des sections, par exemple dans la poutre Warren quand on a fait préalablement l'épure des moments fléchissants et des efforts tranchants. Nous avons vu, en effet, au n° 160 que, dans ce cas, le procédé de Ritter n'exige que le tracé de quelques lignes. Enfin, la méthode des nœuds, si

commode dans le cas des frames, devient parfois insuffisante, lorsque le système articulé est plus complexe tout en restant

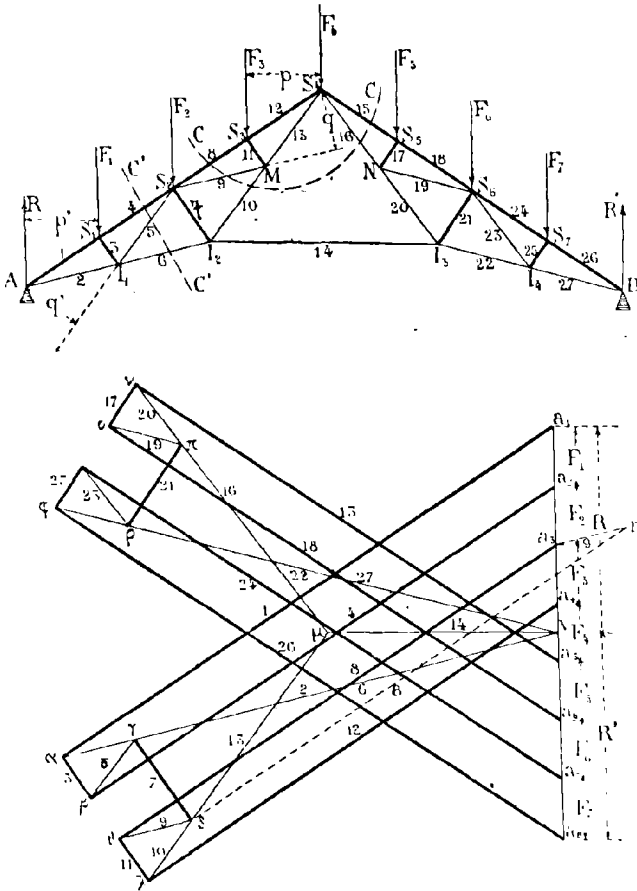


Fig. 83.

susceptible d'être traité par la statique. On combine alors les deux méthodes en appelant à l'aide, pour certains détails, la méthode des sections.

**175.** — La *ferme Polonceau à trois bielles* (fig. 83) offre un exemple intéressant de l'emploi de ce procédé mixte.

Tout est symétrique par rapport à la verticale du som-

met  $S_4$  ; les charges  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  sur les nœuds de la membrure supérieure sont supposées égales entre elles ; les barres  $AS_1, S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4$  sont égales, et les trois bielles  $I_1S_1, I_2S_2, MS_3$ , dont la troisième est égale à la première, sont perpendiculaires sur la droite  $AS_4$ .

Les réactions  $R$  et  $R'$  des appuis  $A$  et  $B$  sont égales l'une et l'autre à la moitié de la somme des charges  $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$  ; elles ont pour vecteurs  $Va_1$  et  $a_8V$ ,  $V$  étant le milieu de la portion de droite  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$  qui représente le polygone des charges.

Il est bien clair qu'on pourra sans difficulté traiter les nœuds  $A, S_1$  et  $I_1$  et déterminer successivement  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ . Mais l'on est arrêté soit pour le nœud  $S_2$ , soit pour le nœud  $I_2$ , puisque en chacun de ces nœuds il reste encore trois barres dont les forces élastiques sont inconnues.

Nous aurons donc recours pour continuer à la méthode des sections.

Imaginons une section curviligne  $C$  coupant les barres 8, 9, 10, 16 et 15 qui, sauf la barre 9, sont sur des droites concourant au point  $S_4$ , et prenons les moments par rapport à ce point ; nous aurons

$$M^i F_3 = M^i f_9$$

ou

$$(1) \quad F_3 \cdot p = f_9 \cdot q,$$

$p$  et  $q$  désignant les distances du point  $S_4$  à la ligne d'action de  $F_3$  et à la barre 9. Mais, si l'on imagine une section rectiligne  $C'$  coupant les barres 4, 5 et 6, et si l'on prend les moments par rapport au point  $A$  où vont concourir les droites 4 et 6, on a

$$M^i F_1 = M^i f_5$$

ou

$$(2) \quad F_1 p' = f_5 \cdot q',$$

$p'$  et  $q'$  désignant les distances du point  $A$  à la ligne d'action de  $F_1$  et à la barre 5. On a, d'ailleurs,

$$p = p', \quad q = q', \quad F_1 = F_3.$$

Donc, la comparaison des relations (1) et (2) donne

$$f_9 = f_3$$

Comme  $f_6$  est connue quand on arrive au nœud  $S_2$ , on voit qu'il ne restera plus en ce nœud que deux forces élastiques inconnues  $f_7$  et  $f_8$  et qu'on pourra dès lors, par la méthode des nœuds, aller jusqu'au bout sans nouvelle entrave.

Les lignes principales du diagramme sont : les droites  $a_1\alpha$ ,  $a_2\beta$ ,  $a_3\gamma$ ,  $a_4\delta$  parallèles à la direction commune des barres 1, 4, 8, 12 ; les droites  $V_x$ ,  $V_y$  qui coïncident, puisqu'elles sont parallèles à la direction commune des barres 2 et 6 ; enfin, l'horizontale  $V_\mu$  relative à la barre 14.

Le point  $\alpha$  intersection de  $a_1\alpha$  et de  $V_x$  est le nœud du diagramme relatif à ce premier triangle  $AS_1I_1$  ; le polygone du nœud A est donc  $Va_1\alpha V$ , et l'on a

$$f_1 = a_1\alpha \text{ (compression), } f_2 = \alpha V \text{ (tension).}$$

De plus, la ligne secondaire relative à la barre 3 est la parallèle  $\alpha\beta$  à cette barre, en sorte que le nœud du diagramme relatif au second triangle  $S_1I_1S_2$  est le point  $\beta$ , intersection de  $\alpha\beta$  et de  $a_2\beta$ .

Le polygone du nœud  $S_1$  est donc  $a_1a_2\beta\alpha a_1$  et l'on a

$$f_3 = \beta\alpha \text{ (compression), } f_4 = a_2\beta \text{ (compression).}$$

De plus, la ligne secondaire relative à la barre 5 est la parallèle  $\beta\gamma$  à cette barre, en sorte que le nœud du diagramme relatif au troisième triangle  $I_1S_2I_3$  est le point  $\gamma$  intersection de  $\beta\gamma$  et de  $V_y$ . (Remarquons que le point  $\gamma$  est sur la droite  $V_x$ , puisque, comme nous l'avons fait observer plus haut, les droites  $V_x$  et  $V_y$  coïncident).

Le polygone du nœud  $I_1$  est donc  $V\alpha\beta\gamma V$  et l'on a

$$f_5 = \beta\gamma \text{ (tension), } f_6 = \gamma V \text{ (tension).}$$

De plus, la ligne secondaire relative à la bielle  $S_2I_2$  est la parallèle  $\gamma\delta$  à cette bielle 7. Ici, c'est grâce à la relation

$$f_7 = f_5 = \beta\gamma$$

que nous pouvons construire le polygone du nœud  $S_2$ ;  $\gamma\beta a_2 a_3 \theta \delta \gamma$  est ce polygone; la partie  $\gamma\beta a_2 a_3$  en est déjà connue, ainsi que les droites indéfinies  $\gamma\delta$  et  $a_3\theta$ , et il s'agit, pour l'achever, d'insérer entre ces deux droites un segment  $\theta\delta$  de grandeur donnée  $\beta\gamma$  et parallèle à la barre 9; il suffit pour cela de mener  $a_3 n$  égal à  $\beta\gamma$  et parallèle à la barre 9, puis de mener  $n\delta$  parallèle à  $a_3\theta$  jusqu'à sa rencontre  $\delta$  avec la droite  $\gamma\delta$ . Le sens dans lequel il faut porter  $a_3 n$  est d'ailleurs connu; c'est celui de S vers M, puisque  $f_9$  doit être, comme  $f_5$ , une tension. Le polygone  $\gamma\beta a_2 a_3 \theta \delta \gamma$  relatif au nœud  $S_2$  étant ainsi tracé, on en déduit

$$f_7 = \delta\gamma \text{ (compression)}, \quad f_8 = a_3\theta \text{ (compression)}.$$

On continue alors sans difficulté. Le nœud du diagramme relatif au triangle  $I_2 S_2 M$  étant le point  $\delta$  intersection de  $\gamma\delta$  et  $\theta\delta$ , la ligne secondaire relative à la barre 10 est la parallèle  $\delta\mu$  à cette barre, et le polygone du nœud  $I_2$  est  $V\gamma\delta\mu V$ ; il en résulte

$$f_{10} = \delta\mu \text{ (tension)}, \quad f_{11} = \mu V \text{ (tension)}.$$

De plus, le nœud relatif au triangle suivant  $S_2 M S_3$  est le point  $\theta$ , intersection de  $\theta\delta$  et de  $a_3\theta$ , et la ligne secondaire relative à la barre 11 est la parallèle  $\theta\lambda$  à cette barre. Le polygone du nœud  $S_3$  est donc  $\theta a_3 a_4 \lambda \theta$ , et l'on a

$$f_{11} = \lambda\theta \text{ (compression)}, \quad f_{12} = a_4\lambda \text{ (compression)}.$$

Le nœud du diagramme relatif à ce triangle  $S_3 M S_4$  est le point  $\lambda$ , intersection de  $\theta\lambda$  et  $a_4\lambda$ , et la ligne secondaire relative à la barre 13 est la parallèle  $\lambda\mu$  à cette barre 13; comme  $\mu\delta$  était déjà parallèle à cette même direction  $I_2 S_2$ , on voit que le point  $\lambda$  est situé sur  $\mu\delta$ .

Enfin le polygone du nœud M est  $\mu\delta\theta\lambda\mu$ ; il donne

$$f_{13} = \lambda\mu \text{ (tension)}.$$

Il est inutile d'aller plus loin, les forces intérieures relatives à toutes les barres du système sont actuellement connues à

cause de la symétrie par rapport à la verticale médiane. On peut, si l'on y tient, construire en s'aidant de cette symétrie le diagramme complet du système. C'est ce qui a été fait sur la figure 83.

En résumé, les barres de la membrure supérieure et les six hielles sont comprimées; toutes les autres barres sont tendues.

**176.** — Il convient d'observer que c'est par suite de circonstances particulières (égal espacement des nœuds sur l'arbalétrier  $AS_1$ , égalité des charges sur ces nœuds) qu'on a la relation

$$f_9 = f_5.$$

Mais, dans le cas où, les données étant moins particulières, la relation précédente n'existerait plus, le procédé de Ritter n'en subsisterait pas moins; on calculerait ou on construirait  $f_9$  à l'aide de la formule (1) où  $F_3$ ,  $p$  et  $q$  sont connus.

**Conditions pour que la statique seule fournisse les tensions d'un système de barres.**

**177.** — La recherche des tensions des barres d'un système articulé, qui est en équilibre sous l'action de forces extérieures (charges ou réactions) agissant seulement sur les nœuds, est un problème dont la solution échappe le plus souvent à la statique pure et exige l'intervention des lois de l'élasticité.

Quelles conditions doit remplir le système articulé pour que la statique suffise à la détermination des tensions? et, lorsque la statique pure est impuissante, comment la théorie de l'élasticité permet-elle d'achever la solution du problème?

Telles sont les deux questions qui s'offrent à l'esprit et auxquelles nous allons répondre brièvement.

C'est M. Maurice Lévy qui le premier a fait connaître les conditions exactes de la possibilité de la solution par la statique seule. Les deux problèmes que nous venons d'énoncer et les

questions qui s'y rattachent sont traités d'une façon magistrale dans le beau mémoire que notre savant ami a présenté à l'Académie des Sciences en 1872, et qu'il a complété depuis, dans une note placée à la fin de la deuxième édition de sa *Statique graphique*, en utilisant avec une rare habileté notre théorème fondamental sur la résolution des équations linéaires (*Journal de l'Ecole polytechnique*, 1880).

Nous ne saurions, sans franchir les limites imposées à ces *Éléments*, entrer dans tous les détails que le sujet comporte. Nous nous bornerons aux traits fondamentaux, en renvoyant au livre de M. Maurice Lévy le lecteur désireux de compléter l'étude de ces questions intéressantes.

La statique étant renfermée tout entière dans le principe des vitesses virtuelles, tout se réduit à chercher les conditions que doit remplir un système articulé  $S$  pour que l'application du théorème du travail virtuel fournisse la tension  $t$  d'une barre quelconque  $AB$  du système. Or, le système  $S$  étant en équilibre sous l'action des forces extérieures ( $F$ ) qui agissent sur les nœuds, il en est de même du système  $S_1$ , qu'on déduirait de  $S$  en supprimant la barre  $AB$  et appliquant aux nœuds  $A$  et  $B$  deux forces égales à  $t$  et dirigées l'une suivant  $AB$ , l'autre suivant  $BA$ . Mais les seuls déplacements virtuels du système  $S_1$  qui fournissent des équations renfermant la tension  $t$  sont ceux dans lesquels la distance  $AB$  varie. Par suite, pour qu'on puisse, par la statique seule, déterminer la tension  $t$  d'une barre  $AB$  du système  $S$ , il faut et il suffit que la figure de ce système permette au côté  $AB$  de recevoir un allongement (ou un raccourcissement) virtuel infiniment petit, tandis que les autres côtés conservent leurs longueurs respectives. Donc enfin, *pour que la statique seule puisse fournir les tensions de toutes les barres d'un système articulé, il faut et il suffit que les conditions auxquelles la figure est astreinte permettent à chaque côté de recevoir tour à tour un allongement virtuel infiniment petit, les autres côtés conservant des longueurs invariables.*

C'est ce qu'on exprime brièvement en disant que *le système doit être librement dilatable.*



Mais comment reconnaître dans tous les cas et d'une manière sûre si un système est ou non librement dilatable ? C'est ici que la question devient réellement épineuse ; hâtons-nous d'ajouter que M. Lévy a donné le moyen de la résoudre pleinement. Au lieu de nous engager dans cette voie difficile, nous nous bornerons à faire connaître un criterium qui, n'offrant que des exceptions fort rares, suffit aux besoins de la pratique.

Mais nous devons donner préalablement quelques définitions.

**Figures rectilignes déformables, strictement indéformables ou à lignes surabondantes.**

**178.** — On dit qu'une figure rectiligne à  $s$  sommets est *indéformable*, lorsque ses angles ont des grandeurs déterminées dès que les longueurs des côtés sont fixées. Elle est au contraire, *déformable*, si les angles peuvent varier sans que les côtés changent de longueur.

Ainsi, le triangle est une figure indéformable ; le quadrangle simple est au contraire déformable ; mais si à un quadrangle simple on adjoint l'une des diagonales ou les deux diagonales, on obtient des figures indéformables.

Cet exemple du quadrangle conduit à une distinction nouvelle.

Les figures indéformables sont de deux sortes : les unes, comme le quadrangle muni d'une seule diagonale ne renferment que le nombre minimum de barres propre à assurer l'invariabilité de la forme ; les autres, comme le quadrangle muni de ses deux diagonales, renferment plus de barres qu'il n'en faut pour rendre la forme invariable. On donne aux premières le nom de *figures strictement indéformables* et aux autres le nom de *figures indéformables à lignes surabondantes*. Ainsi, dès que le nombre  $s$  surpasse 3, la figure à  $s$  sommets offre trois variétés suivant le nombre de ses côtés : elle peut être déformable, strictement indéformable ou à lignes surabondantes.

**179.** — Une question surgit alors : quel doit être le nombre  $m$  des côtés d'une figure rectiligne à  $s$  sommets, pour que cette figure soit strictement indéformable ? La réponse est aisée et d'ailleurs connue depuis longtemps :  $m$  doit être égal à  $2s - 3$ .

D'après ce que nous venons de dire relativement au quadrangle, la proposition est évidente pour  $s = 4$ , et il suffit de montrer que, si on l'admet dans le cas où le nombre des sommets est égal à  $s$ , elle subsistera lorsque le nombre des sommets sera  $s + 1$ . Or, pour passer d'une figure strictement indéformable à  $s$  sommets à une figure strictement indéformable ayant un sommet de plus, il est nécessaire et suffisant de relier par deux côtés le nouveau sommet à deux des sommets primitifs ; la nouvelle figure a donc  $s + 1$  sommets et un nombre de côtés égal à

$$(2s - 3) + 2,$$

c'est-à-dire à

$$(2s + 1) - 3 ;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Il résulte de là que *un système articulé à  $s$  nœuds est déformable, strictement indéformable ou à lignes surabondantes suivant que le nombre des barres qui le composent est inférieur, égal ou supérieur à  $2s - 3$ .*

**180.** — Revenons maintenant au théorème du n° 177.

Pour qu'un système articulé soit tel que chacun des côtés puisse recevoir une dilatation (ou contraction) virtuelle infiniment petite, tandis que les autres côtés conservent leurs longueurs, il est *en général* nécessaire et suffisant qu'il n'existe aucune relation entre les longueurs de divers côtés c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de lignes surabondantes. Donc, *pour que la statique seule fournisse les tensions d'un système articulé, il faut et il suffit, en général, que ce système ne contienne pas de barres surabondantes, c'est-à-dire, que, si  $s$  désigne le nombre des nœuds, le nombre des barres ne surpasse pas  $2s - 3$ .*

**181.** — Nous avons dit « en général » parce qu'il existe cer-

tains systèmes *anormaux* pour lesquels les dilatations des côtés ne sont pas indépendantes, même en l'absence de toute égalité algébrique entre les longueurs de ces côtés. Un exemple va le montrer clairement.

Supposons qu'après avoir construit un premier triangle  $a'b'c'$  (fig. 5), on porte dans une direction quelconque une longueur donnée  $a'a$ , et que l'on construise ensuite successivement un point  $b$  situé à des distances données de  $a$  et de  $b'$ , et un point  $c$  situé à des distances données de  $a$  et de  $b$ . Lorsque la direction  $a'a$  varie, le point  $c$  décrit un certain lieu géométrique; désignons par  $c_1$  le point de ce lieu qui est le plus rapproché de  $c'$  et par  $a_1$  et  $b_1$  les positions que prennent  $a$  et  $b$  lorsque  $c$  est en  $c_1$ . Le système articulé  $a'b'c'a_1b_1c_1$  ainsi défini a 6 sommets et se compose de 9 tiges  $a'b'$ ,  $b'c'$ ,  $c'a'$ ,  $a_1b_1$ ,  $b_1c_1$ ,  $c_1a_1$ ,  $a'a_1$ ,  $b'b_1$ ,  $c'c_1$ ; la condition  $m = 2s - 3$  se trouve donc ici satisfaite et la figure est strictement indéformable, comme le montre d'ailleurs sa construction même. Cependant ce système n'est pas librement dilatable, car; en vertu de sa définition, on ne saurait contracter le côté  $c'c_1$  sans que la figure cesse d'exister.

Mais, il faut bien le dire, les exemples de ce genre, sont de ceux qu'on ne rencontre que quand on les cherche; aussi le critérium que nous venons d'indiquer est-il, malgré ces exceptions, très suffisant dans la pratique.

**Recherche des tensions dans un système à barres surabondantes.**

182. — Considérons un système composé de  $m$  barres, dont  $k$  surabondantes.

Il existera, entre les longueurs  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , des barres,  $k$  relations distinctes.

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & a_1 = \psi_1 (a_{k+1}, \dots, a_m) \\
 & a_2 = \psi_2 (a_{k+1}, \dots, a_m) \\
 & \vdots \\
 & a_k = \psi_k (a_{k+1}, \dots, a_m)
 \end{aligned}$$

permettant d'exprimer

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

en fonction de

$$a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m$$

La statique ne fournira alors, pour déterminer les tensions  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , que  $m - k$  relations

$$\begin{aligned} (B) \quad \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m) &= 0 \\ \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_{m-k}(t_1, t_2, \dots, t_m) &= 0. \end{aligned}$$

On obtiendra d'ailleurs ces relations (B), à l'aide du principe des vitesses virtuelles, en attribuant aux côtés de la figure tous les allongements virtuels compatibles avec les liaisons. Les réactions des appuis ne figureront pas dans ces équations (B), mais seulement les tensions  $t_1, t_2, \dots, t_m$  et les forces directement appliquées.

La théorie de l'élasticité devra donc intervenir pour donner, entre les tensions,  $k$  équations complémentaires. Voici comment on établit ces équations :

Désignons par  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  les dilatations très petites que prennent les barres sous l'influence des forces appliquées aux nœuds. On aura, en désignant par  $i$  l'un quelconque des nombres  $1, 2, \dots, k$ ,

$$\alpha_i + \hat{\alpha}_i = \psi_i(a_{k+1} + \alpha_{k+1}, \dots, a_m + \alpha_m);$$

ou, en ayant égard aux relations (A) et observant que les carrés et les produits des allongements  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sont négligeables,

$$(A') \quad \alpha_i = \hat{\alpha}_{k+1} \frac{d\psi_i}{da_{k+1}} + \dots + \alpha_m \frac{d\psi_i}{da_m}$$

Mais si l'on appelle  $S_1$  et  $E_1, S_2$  et  $E_2, \dots, S_m$  et  $E_m$ , les sections et les coefficients d'élasticité des diverses barres, on a, d'après une loi déjà citée (n° 74).

$$\alpha_1 = \frac{a_1 t_1}{E_1 S_1}, \dots, \alpha_m = \frac{a_m t_m}{E_m S_m},$$

de sorte que la relation (A') devient

$$(C) \quad \frac{a_i t_i}{E_i S_i} = \frac{a_{k+1} t_{k+1}}{E_{k+1} S_{k+1}} \cdot \frac{d\psi_i}{da_{k+1}} + \dots + \frac{a_m t_m}{E_m S_m} \frac{d\psi_i}{da_m}.$$

En faisant  $i = 1, 2, \dots, k$ , on aura ainsi les  $k$  équations qu'il faut joindre aux  $m - k$  relations (B) pour déterminer toutes les tensions.

**183.** — Quelques explications sont encore nécessaires sur la manière d'obtenir les relations (A), ou plutôt les relations (A'), qui résultent de la figure du système articulé.

Ce n'est là, il est vrai, qu'un problème d'algèbre appliqué à la géométrie, qu'on résoudrait dans chaque cas. Mais Mohr a indiqué, pour obtenir les relations (A'), un procédé commode, qui, fondé sur une application ingénieuse du principe des vitesses virtuelles, donne à la solution complète du problème une homogénéité très satisfaisante pour l'esprit.

Supposons qu'on supprime toutes les forces extérieures (charges et réactions) ainsi que toutes les barres surabondantes  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Désignons par  $a_i$  l'une quelconque de ces barres supprimées, et appliquons aux deux points où aboutissait cette barre, suivant la droite qui joignait ces deux points, deux forces  $P_1$  et  $P_2$ , de sens opposé, répulsives et égales à l'unité de force. Dans le système ainsi privé de barres surabondantes et soumis aux deux seules forces  $P_1$  et  $P_2$ , les barres prendront des tensions que la statique seule permettra de déterminer (n° 180) et que nous pouvons dès lors considérer comme connues : nous les représenterons respectivement par

$$\theta_{k+1}^{(i)}, \theta_{k+2}^{(i)}, \dots, \theta_m^{(i)}.$$

Mais, d'une part, le théorème du travail virtuel donne

$$\delta a_i = \theta_{k+1}^{(i)} \delta a_{k+1} + \dots + \theta_m^{(i)} \delta a_m;$$

et, d'autre part, en remplaçant dans (A') les allongements élastiques par les dilatations virtuelles, on a

$$\delta a_i = \frac{d\psi_i}{da_{k+1}} \delta a_{k+1} + \dots + \frac{d\psi_i}{da_m} \delta a_m.$$

La comparaison de ces deux équations, qui doivent avoir lieu quelles que soient les dilatations virtuelles, donne :

$$\frac{d\psi_i}{da_{k+1}} = \theta_{k+1}^{(i)}, \dots, \frac{d\psi_i}{da_m} = \theta_m^{(i)},$$

et, par suite, l'équation (A') devient

$$\alpha_i = \alpha_{k+1} \theta_{k+1}^{(i)} + \dots + \alpha_m \theta_m^{(i)}$$

C'est l'une des équations cherchées. On les aura toutes en faisant  $i = 1, 2, \dots, k$ , c'est-à-dire en faisant sur chaque barre surabondante l'opération indiquée.

M. Maurice Lévy et le général de Ménabrea ont donné d'autres procédés fort élégants, pour parvenir aux relations (A). Mais la méthode de Mohr joint, aux avantages que nous avons déjà signalés, celui de mieux ressortir à la statique graphique, car les quantités

$$\theta_{k+1}^{(i)}, \dots, \theta_m^{(i)},$$

s'obtiennent par la méthode des sections ou par celle des nœuds, dans le cas très usuel où le système proposé devient un frame dès qu'on l'a privé de ses lignes surabondantes.

### Remarques sur les poutres à treillis multiple.

**181.** — Parmi les systèmes qui échappent à la statique seule, il convient de citer la poutre à treillis double. On entend par là celle qui résulterait de la juxtaposition d'une suite de rectangles de même hauteur et munis de leurs deux diagonales, suppression faite des côtés verticaux communs. On peut dire aussi que cette poutre s'obtiendrait en superposant à une poutre Warren (fig. 99, I) la même poutre retournée sens dessous dessus. Toute section verticale rencontre alors quatre barres, deux horizontales et appartenant l'une à la membrure ou semelle supérieure l'autre à la membrure ou semelle inférieure, et deux barres également inclinées sur l'horizon ; la méthode des sections échappe donc ici aussi bien que celle des nœuds.

On résout approximativement le problème en admettant, ce qui arrive sensiblement dans les poutres à treillis bien construites, que les deux barres inclinées que rencontre une même section verticale travaillent également, et qu'il en est de même pour les deux barres horizontales coupées par cette section. De la sorte, si T est l'effort tranchant dans la section considérée et  $\alpha$  l'inclinaison sur l'horizontale des deux barres de treillis, l'effort  $f$  de chacune de ces deux barres dont l'une est tendue et l'autre comprimée, a pour expression

$$f = \frac{T}{2 \sin \alpha} ;$$

et, quant à la tension ou à la compression des deux barres situées sur les semelles, elle est égale au moment fléchissant dans la section, divisé par la hauteur de la poutre. Les règles données aux n<sup>os</sup> 161, 162, 163 pour la distinction entre les tensions et les compressions subsistent d'ailleurs ici.

**185.** — La poutre à treillis double s'obtient en définitive d'une poutre à treillis simple, en divisant en deux parties égales chacun des intervalles formés sur les semelles par les nœuds consécutifs et joignant deux à deux les points de division. Plus généralement, on aura une poutre à treillis triple, quadruple, etc..., en divisant les intervalles des nœuds sur les semelles, dans une poutre à treillis simple, en trois, quatre, ... parties égales et joignant deux à deux les points de division correspondants. Une section verticale quelconque rencontrera alors, outre les deux semelles, trois, quatre, ... barres inclinées.

On procédera comme au numéro précédent en acceptant les mêmes hypothèses ; la formule ci-dessus devra être remplacée par

$$f = \frac{T}{n \sin \alpha} ,$$

$n$  désignant le nombre des pièces inclinées que rencontre la section verticale.

Pour plus de détail sur ce sujet, nous renverrons le lecteur au *Traité de résistance* de M. Flamant ou à celui de M. Collignon.

### Avantages des systèmes sans lignes surabondantes.

**186.** — Nous avons vu que les systèmes articulés qui ne renferment pas de ligne surabondante sont, en définitive, les seuls que la statique pure puisse traiter. Mais là n'est pas l'unique cause de leur supériorité. Les systèmes sans lignes surabondantes jouissent d'une propriété plus importante encore et qui consiste en ce qu'ils sont, en général, les seuls qui puissent être constitués en *solides d'égale résistance*.

Voici ce qu'on entend par là :

Considérons une barre tendue d'un système articulé, et soient  $t_i$ ,  $S_i$ ,  $E_i$  sa tension, sa section et le coefficient d'élasticité de la matière qui la compose. L'expérience assigne, pour la matière employée, une valeur limite  $R$  que ne doit pas excéder la *tension relative*

$$\frac{t_i}{E_i S_i}$$

c'est-à-dire la tension par unité de surface et par unité de coefficient d'élasticité. La plus petite valeur de  $S_i$  est donc

$$\frac{1}{R} \frac{t_i}{E_i},$$

et pour réaliser la plus grande économie, il faudra déterminer les sections  $S_i$  de toutes les barres tendues à l'aide de la formule

$$(1) \quad \frac{t_i}{E_i S_i} = R .$$

On verrait de même, en considérant les compressions comme des tensions négatives, qu'il faut déterminer les sections  $S_i$  des barres comprimées à l'aide de la formule

$$(1') \quad \frac{-t_i}{E_i S_i} = R' ,$$

le nombre  $R'$  étant aussi fourni par l'expérience et pouvant d'ailleurs différer plus ou moins de  $R$ .



Dans ces conditions, toutes les pièces tendues supporteront la même tension relative, et toutes les barres comprimées la même compression relative. On dit d'un tel système qu'il est constitué en *solide d'égale résistance*.

Constituer un système d'égale résistance, telle est la question qui s'impose quand on fait le projet d'une charpente de grandes dimensions.

Si  $m$  est le nombre des barres, le problème comporte  $2m$  inconnues ; ce sont les  $m$  tensions (positives ou négatives)  $t_i$ , et les  $m$  sections  $S_i$ .

Il y a deux cas à distinguer suivant que le système renferme ou non des lignes surabondantes.

**187.** — Supposons d'abord que le système n'offre aucune ligne surabondante. Les  $m$  tensions ou compressions  $t_i$  seront alors fournies sans ambiguïté par la statique pure, et il suffira de porter leurs valeurs dans les relations (1) et (1') pour obtenir les sections  $S_i$  des diverses barres.

*Un système articulé sans lignes surabondantes peut donc toujours être constitué en solide d'égale résistance.*

**188.** — Il n'en est plus de même, lorsqu'il y a des lignes surabondantes.

Soit  $k$  le nombre de ces lignes dont nous désignerons, comme au n° 182, les longueurs par

$$a_1, a_2 \dots a_k,$$

en conservant d'ailleurs toutes les notations employées dans ce numéro. Nous aurons pour déterminer les  $2m$  inconnues  $t_1, t_2, \dots, t_m, S_1, S_2, \dots, S_m$ .

1° les  $m - k$  équations (B), qui sont fournies par la statique pure ;

2° les  $k$  équations (C), que donne la théorie de l'élasticité ;

3° les équations (1) et (1'), qui sont au nombre de  $m$ , puisque une seule de ces deux formules convient à chaque barre.

Mais ces  $m$  dernières équations, aussi bien que les  $k$  équations

tions (C), ne renferment pas précisément les inconnues  $t^i$  et  $S_i$ ; ces inconnues n'y figurent que par les rapports

$$\frac{t_i}{S_i}$$

On aura donc, pour déterminer ces  $m$  rapports,  $m + k$  équations ; d'où résulte en général, l'impossibilité du problème.

Ainsi, *un système à lignes surabondantes ne peut pas, en général, être constitué en solide d'égale résistance.*

Il est vrai que les  $m + k$  équations qui donnent les rapports

$$\frac{t_i}{S_i}$$

pourraient être exceptionnellement compatibles, et alors le système pourrait être érigé d'une infinité de manières en solide d'égale résistance. Mais on peut démontrer, comme l'a fait M. Lévy dans le beau mémoire déjà cité, qu'étant donné un tel système à lignes surabondantes, on peut toujours trouver un système sans lignes surabondantes qui soit autant ou plus économique que lui.

**189.** — De là résultent les conclusions suivantes que nous empruntons textuellement à M. Maurice Lévy :

« Si l'on remarque qu'étant donné un système à lignes surabondantes, on peut toujours trouver un système sans lignes surabondantes qui soit au moins aussi économique que lui ;  
 « si l'on ajoute à cela que les systèmes sans lignes surabondantes sont les seuls dont les tensions puissent être calculées à l'aide des principes de la statique élémentaire dont les calculs, plus sûrs et plus simples que ceux de la résistance des matériaux, peuvent d'ailleurs être remplacés par les tracés si commodes et si expéditifs de la statique graphique ; si  
 « l'on ajoute enfin que les systèmes sans lignes surabondantes, par cela seul qu'ils renferment un nombre moindre de pièces, comportent des pièces plus robustes, plus faciles à assembler, moins sujettes à être affaiblies par l'oxydation ou la pourriture, moins sensibles aux trépidations, moins expo-

« sées à être faussées lors de la pose ou à être affamées par  
« les pièces d'assemblage ; on reconnaîtra qu'il y a un véritable  
« intérêt, en cette matière, à se conformer aux préceptes de la  
« théorie :

« Le fond d'une ossature en bois ou en métal doit être une  
« figure sans lignes surabondantes.

« Nous ne prétendons pas qu'il faille bannir ces lignes  
« d'une manière absolue. Si, parmi les pièces d'une telle  
« ossature, surtout parmi celles qui sont comprimées, il  
« en est qui soient trop longues et qui pourraient fléchir  
« sous l'action de leur propre poids ou de la compression  
« qu'elles subissent, il faut nécessairement les soutenir  
« par d'autres pièces ; mais ces pièces qui peuvent être,  
« elles, des lignes surabondantes, doivent avoir des sections  
« très faibles de façon à indiquer qu'elles sont là, non pour  
« concourir à la résistance générale, mais comme simples sou-  
« tiens des pièces qui y concourent. Et il faudrait bien se gar-  
« der de donner à ces pièces secondaires des dimensions con-  
« sidérables ; car, par là, outre qu'on gaspillerait la matière,  
« on se tromperait dans beaucoup de cas si l'on croyait obtenir  
« un surcroît de solidité ; on pourrait, au contraire, produire  
« au point de vue de la résistance un effet plus nuisible  
« qu'utile, en modifiant complètement la répartition théorique  
« des forces d'après lesquelles les pièces ont été calculées. »

Ces conseils si judicieux ont-ils encore reçu, dans notre pays, l'accueil favorable qu'ils méritent ? Il serait au moins téméraire de l'affirmer.

---

## CHAPITRE XI

# LA POUTRE CONTINUE : MOMENTS FLÉCHISSANTS ET EFFORTS TRANCHANTS POUR UNE CHARGE DONNÉE

---

### Objet du problème ; sa réduction à la recherche des moments sur piles

**190.** — Une poutre est dite *continue* quand elle a plus de deux appuis, d'ailleurs simples ou encastrés.

Chaque partie de la poutre comprise entre deux appuis consécutifs reçoit le nom de *travée*. Nous désignerons les appuis par  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ;  $A_1$  sera l'appui situé à l'extrémité gauche,  $A_n$  sera l'appui placé à l'autre bout ; le nombre des appuis étant  $n$ , celui des travées est  $n-1$ .

La poutre est supposée *droite* dans son état naturel et de section constante. En outre, nous admettrons d'abord que les appuis sont de niveau, sauf à examiner dans le chapitre suivant l'influence de la dénivellation des appuis.

Dans notre hypothèse, la poutre, dès sa mise en place et avant tout chargement, porte sur tous ses appuis ; elle se déformera ensuite sous l'influence des charges verticales auxquelles elle est soumise, mais sans que les points situés sur les appuis puissent s'élever ni s'abaisser. Nous admettrons ici d'ailleurs que les points d'appuis et les charges verticales

sont contenues dans le plan de symétrie, c'est-à-dire dans le plan vertical passant par la fibre moyenne ; et, le problème à résoudre consistera dans la détermination des moments fléchissants, des efforts tranchants et des réactions.

Mais, tandis que dans la poutre à deux appuis simples, les lois de la statique pure permettent de déterminer les réactions et par suite les moments fléchissants et les efforts tranchants (chapitre IX), il faut, pour la poutre continue, faire intervenir la théorie de l'élasticité.

**191.** — Il convient, avant tout, de ramener la question aux termes les plus simples.

A cet effet, nous allons montrer que la recherche des moments fléchissants aux divers points de la poutre continue peut être réduite à celle des moments fléchissants sur les appuis. On donne à ces derniers moments le nom de *moments sur piles* ; nous les désignerons par  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ; et, nous ferons observer, qu'en vertu de la définition même des moments fléchissants,  $M_1$  et  $M_n$  sont nuls lorsque les appuis extrêmes  $A_1$  et  $A_n$  sont simples, c'est-à-dire non encastrés.

Soit  $A_i A_{i+1}$  (fig. 84) la droite qui sur l'épure représente une travée quelconque, et  $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\varphi}$  les échelles des longueurs et des forces. Supposons que, avec une distance polaire  $\delta$  prise

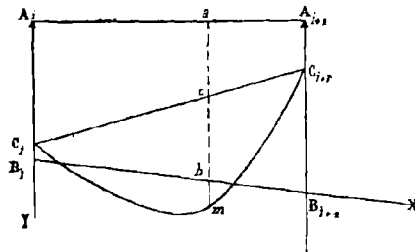


Fig. 84.

à volonté sur l'épure, ou ait construit le polygone (ou la courbe) funiculaire  $C_i m C_{i+1}$  qui se rapporte aux charges agissant sur la travée et qui passe par deux points  $C_i, C_{i+1}$

donnés arbitrairement sur les verticales des points d'appui. Nous désignerons d'ailleurs, suivant nos habitudes, le produit  $\delta\lambda\varphi$  par  $\rho$ .

Cela posé, on peut énoncer le théorème suivant :

*Il existe dans le plan de la figure une droite telle que, si on la prend pour axe des  $x$  et la verticale  $A_i Y$  pour axe des  $y$ , on ait*

$$M = \rho \cdot y,$$

*$y$  étant l'ordonnée d'un point quelconque  $m$  de la ligne funiculaire  $C_i m_i C_{i+1}$  et  $M$  le moment fléchissant dans la section qui passe par cette ordonnée.*

Pour démontrer cette proposition, nous observerons d'abord que le moment fléchissant  $M$  de la poutre continue, au point figuré par  $a$ , se compose : 1° de la somme  $m_1$  des moments par rapport à  $a$  des charges qui agissent *entre*  $A_i$  et  $a$  ; 2° de la somme  $m_2$  des moments par rapport à  $a$  des forces extérieures (charges et réactions) qui agissent sur  $A_i$  et sur toute la partie de la poutre située à gauche de  $A_i$ . Or, chacune des forces de cette seconde catégorie peut être remplacée par cette même force transportée parallèlement à elle-même au point  $A_i$  et par un couple dont le moment est, comme on sait, indépendant du choix du centre des moments. Si donc on désigne par  $T$  la résultante des forces ainsi transportées et par  $M'$  la somme des moments des couples, on a

$$m_2 = M' + \mathfrak{M}'_a T$$

et par suite

$$M = m_1 + M' + \mathfrak{M}'_a T$$

Mais  $M'$  est évidemment le moment fléchissant  $M_i$  de la poutre continue au point  $A_i$ . D'ailleurs, lorsque  $a$  se déplace sur la travée  $A_i A_{i+1}$ , le dernier terme de la formule précédente varie proportionnellement au segment  $A_i a$ , ou, ce qui revient au même, au segment correspondant  $B_i b$ , intercepté par les verticales des points  $A_i$  et  $a$  sur une droite fixe quelconque  $B_i B_{i+1}$  du plan. On peut donc écrire

$$M - M_i = m_1 + h \cdot B_i b$$

$h$  désignant un facteur constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point  $a$  sur la travée  $A_i A_{i+1}$ .

Considérons maintenant le tronçon représenté par  $A_i A_{i+1}$  comme s'il existait seul et s'il reposait par ses extrémités  $A_i$  et  $A_{i+1}$  sur deux appuis simples, tout en restant soumis aux mêmes charges qu'avant d'être séparé des autres parties de la poutre. En désignant par  $\mu$  le moment fléchissant du tronçon au point  $a$  et observant que ce moment est nul au point  $A_i$ , nous aurons, par un raisonnement semblable au précédent,

$$\mu = m_1 + h' \cdot B_i b$$

$h'$  étant une nouvelle constante.

En retranchant cette égalité de la précédente on obtient la relation

$$M - M_i - \mu = (h - h') B_i b$$

qui, lorsque  $a$  est en  $A_{i+1}$  devient, puisque  $\mu$  est alors nul,

$$M_{i+1} - M_i = (h - h') B_i B_{i+1}.$$

Le facteur  $h - h'$  s'élimine immédiatement et l'on a de la sorte

$$(1) \quad M = \left( M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{B_i B_{i+1}} B_i b \right) + m_1.$$

Jusqu'ici nous avons laissé à la droite  $B_i B_{i+1}$  une position quelconque. Choisissons là de façon que

$$(2) \quad C_i B_i = -\frac{M_i}{\rho}, \quad C_{i+1} B_{i+1} = -\frac{M_{i+1}}{\rho}$$

et prenons la pour axe des  $x$ , l'axe des  $y$  étant la verticale  $B_i Y$ ; l'équation de la droite  $C_i C_{i+1}$  sera, dans ce système d'axes coordonnés,

$$y = \frac{M_i}{\rho} + \frac{\frac{M_{i+1}}{\rho} - \frac{M_i}{\rho}}{B_i B_{i+1}} x,$$

d'où il suit que la parenthèse qui figure dans la formule (1) a pour valeur

$$\rho \cdot bc.$$

Mais on a

$$m_1 = \rho \cdot cm.$$

La formule (1) devient donc

$$M = \rho (bc + cm)$$

ou

$$M = \rho \cdot bm;$$

ce qui démontre le théorème énoncé, tandis que les relations (2) déterminent la position de la droite cherchée.

**192.** — La construction de la droite  $B_i B_{i+1}$  résultant immédiatement des valeurs des moments sur piles  $M_i$  et  $M_{i+1}$ , on voit que la connaissance de ces deux moments particuliers entraîne celle des moments fléchissants de la poutre en tous les points de la travée. Donc enfin, il suffira de connaître tous les moments sur piles  $M_1, M_2, \dots, M_n$  pour obtenir par une construction simple les moments fléchissants en tous les points de la poutre continue.

Comme on est maître du choix des points  $C_i$  et  $C_{i+1}$  sur les verticales des appuis  $A_i$  et  $A_{i+1}$ , on pourra prendre pour ces points les appuis eux-mêmes. La figure devient alors la suivante (fig. 85), et, la règle pour déduire de la connaissance des moments sur piles  $M_1, M_2, \dots, M_n$  les valeurs des moments fléchissants aux divers points de la poutre continue s'énonce ainsi :

*Avec une même distance polaire  $\delta$  choisie d'ailleurs à volonté sur l'épure, construisez pour chaque travée  $A_i A_{i+1}$  la ligne funiculaire  $A_i m_i A_{i+1}$  qui passant par les appuis  $A_i$  et  $A_{i+1}$ , est relative aux charges qui agissent sur cette travée considérée comme isolée. Portez sur la verticale de chaque appui un segment*

$$(3) \quad A_i B_i = - \frac{M_i}{\rho},$$

*et joignez par des droites les points  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ainsi obtenus. Les ordonnées de la ligne funiculaire totale*

$$A_1 m_1 A_2 \dots A_n,$$



comptées à partir de la ligne brisée

$$B_1 B_2 \dots B_n$$

et mesurées sur l'épure, donneront en grandeur et en signe, après qu'on les aura multipliées par  $\rho$ , les valeurs des moments fléchissants relatifs aux sections correspondantes.

Dans la figure 85 nous avons pris  $n = 5$  et nous avons supposé  $M_1$  et  $M_5$  nuls, ce qui arrive quand les appuis extrêmes sont simples ; c'est pourquoi  $B_1$  coïncide ici avec  $A_1$  et  $B_5$  avec  $A_5$ .

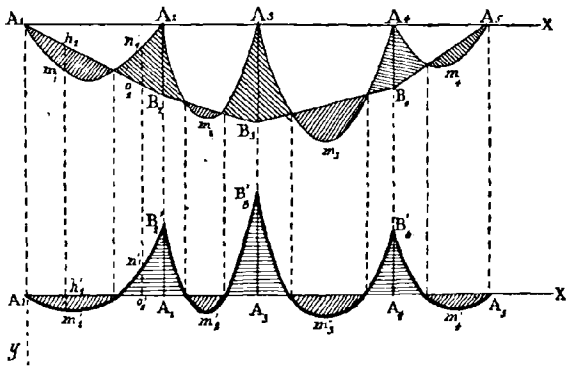


Fig. 85.

Les ordonnées positives, c'est-à-dire dirigées de haut en bas à partir de la ligne brisée  $B_1 B_2 \dots B_5$ , donnent des moments positifs.

Les moments négatifs répondent aux ordonnées dirigées de bas en haut ; telles sont les ordonnées  $B_2 A_2, B_3 A_3, B_4 A_4$  relatives aux moments sur piles  $M_2, M_3, M_4$ , qui sont négatifs.

**193.** — Il est toujours permis de supposer que *tous les appuis intermédiaires  $A_2 A_3 \dots A_{n-1}$  sont simples*. Si l'un d'eux  $A_i$  était encastré, il suffirait d'étudier séparément les parties  $A_1 A_i, A_i A_n$  considérées comme deux poutres distinctes et indépendantes, puisque, en vertu de l'encastrement la section,  $A_i$  serait rigoureusement fixe.

Quant aux appuis extrêmes  $A_1$  et  $A_n$  ils peuvent être tous

les deux simples, ou tous les deux encastés, ou enfin l'un simple et l'autre encasté. De là trois cas à distinguer. Mais on peut, si l'on veut, ramener ces trois cas à un seul, celui où tous les appuis sont simples, à la condition, si  $A_1$  est encasté, d'ajouter, par la pensée, une travée fictive infiniment petite  $A_0 A_1$  et placée à gauche de la poutre ; un encastement équivaut en effet à deux appuis simples infiniment voisins. On remplacerait de même l'appui  $A_n$ , s'il était encasté, par une travée infiniment petite  $A_n A_{n+1}$  placée à droite de  $A_n$ .

Nous supposons donc dans ce qui va suivre que tous les appuis sont simples, sauf à donner à la fin de ce chapitre quelques développements complémentaires sur le cas où la poutre est encastée à l'un de ses bouts ou à ses deux extrémités.

#### Définition du second polygone funiculaire.

**194.** — On ramène la recherche des moments sur piles à la construction d'un certain polygone, auquel on a donné le nom de *second polygone funiculaire* pour le distinguer du contour  $A_1 m_1 A_2 m_2 A_3 m_3 A_4 m_4 A_5$  que l'on nomme *premier polygone funiculaire* et qui est formé par l'ensemble des lignes funiculaires (courbes ou polygonales)  $A_i m_i A_{i+1}$  relatives aux charges agissant sur chaque travée.

Il faut définir avant tout ce second funiculaire.

Considérons une travée quelconque  $A_i A_{i+1}$  (fig. 86) ; divisons-la en trois parties égales aux points  $g_i$  et  $g'_i$ , et désignons par  $(g_i)$  et  $(g'_i)$  les verticales de ces points de division ; ces verticales, qu'on nomme *trissectrices*, passent respectivement par les centres de gravité des deux triangles  $A_i B_i B_{i+1}$ ,  $A_i B_{i+1} A_{i+1}$  dans lesquels on décompose le trapèze  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$  en menant l'une de ses diagonales (celle que l'on veut). Désignons par  $(G_i)$  la verticale qui passe par le centre de gravité de la surface  $A_i m_i B_i$  limitée par la partie du premier funiculaire qui est relative à la travée comparée ; nous donnerons à cette verticale le nom de verticale *principale*. Enfin, soient  $\theta_i$  et  $\theta'_i$  les aires des deux triangles  $A_i B_i B_{i+1}$ ,  $A_i B_{i+1} A_{i+1}$ , et  $\sigma_i$  l'aire  $A_i m_i B_i$ , ces trois aires étant mesurées sur l'épure.

Cela posé,  $k$  et  $\Delta$  étant deux constantes choisies à volonté,

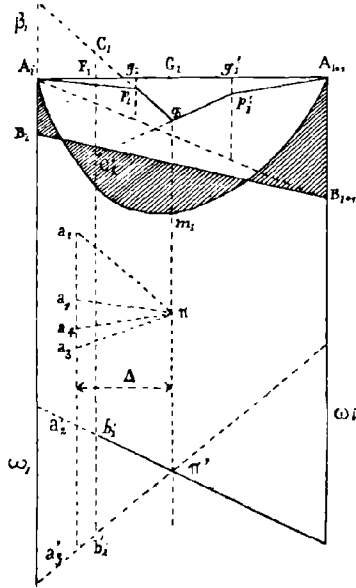


Fig. 86.

mais les mêmes pour toutes les travées, imaginons les trois forces  $U_i, V_i, U_i'$  qui, ayant pour vecteurs

$$u_i = -\frac{\theta_i}{k}, \quad v_i = \frac{\sigma_i}{k}, \quad u_i' = -\frac{\theta_i'}{k},$$

auraient respectivement pour lignes d'action les droites

$$g_i, \quad G_i, \quad g_i'$$

c'est-à-dire la verticale trissectrice de gauche, la verticale principale et la verticale trissectrice de droite. Soit  $A_i p_i q_i p_i' A_{i+1}$  le polygone funiculaire de ces trois forces, qui aurait  $\Delta$  pour distance polaire mesurée sur la feuille de dessin et dont les côtés extrêmes passeraient par les appuis  $A_i$  et  $A_{i+1}$ .

A chaque travée répond un polygone analogue. Toutefois, pour les travées de rive  $A_1 A_2$  et  $A_{n-1} A_n$ , le polygone n'a que trois côtés au lieu de quatre, vu que le trapèze  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$

se réduit, pour chacune de ces deux travées, à un triangle. Ainsi, pour la première travée  $A_1A_2$ , on n'a que les deux forces  $V_1, U_1'$  ayant pour vecteurs

$$v_1 = \frac{\sigma_1}{k}, \quad u_1' = -\frac{\theta_1'}{k}$$

et pour lignes d'action la verticale principale et la verticale trissectrice de droite. Pour la dernière travée  $A_{n-1}A_n$ , on n'a aussi que deux forces  $U_{n-1}, V_{n-1}$  ayant pour vecteurs

$$u_{n-1} = -\frac{\theta_{n-1}}{k} \quad v_{n-1} = \frac{\sigma_{n-1}}{k}$$

et agissant respectivement suivant la verticale trissectrice de gauche et suivant la verticale principale; le polygone est  $A_1q_1p'_1A_2$  pour la première et  $A_{n-1}p_{n-1}q_{n-1}A_n$  pour la dernière (fig. 86).

**195.** — Ces polygones se succèdent de telle sorte que chaque appui intermédiaire soit l'extrémité du polygone relatif à la travée précédente et l'origine du polygone relatif à la travée suivante. L'ensemble de ces polygones constitue une ligne brisée qui, si  $n$  est le nombre des appuis, a en apparence

$$3 + 4(n-3) + 3 = 4n-6$$

côtés. En réalité cette ligne brisée n'a que

$$4n-6 - (n-2) = 3n-4$$

côtés, attendu que le dernier côté de chacun des polygones partiels coïncide avec le premier côté du suivant.

Pour le démontrer, remarquons que la ligne élastique  $\epsilon$  passe par tous les appuis, et n'a en chacun d'eux, à cause de sa continuité, qu'une seule tangente; il en est de même, par suite, de sa ligne homographique  $\epsilon_1$ , quel que soit le coefficient  $q$  d'amplification des ordonnées qui spécifie cette ligne. Prenons  $q$ , de telle sorte qu'on ait (n° 124)

$$(4) \quad \frac{1}{k} = \lambda^2 q \rho \frac{\Delta}{EI}$$

$\Delta$  et  $k$  étant les deux quantités employées au numéro précédent et  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  ayant la signification déjà expliquée plusieurs fois. La ligne  $\varepsilon_i$  sera (n° 124) une courbe funiculaire, de distance polaire  $\Delta$ , pour une charge fictive égale à l'aire ombrée sur la figure 85, cette aire étant mesurée sur l'épure et divisée par  $k$ . Désignons par  $t_i$  la tangente au point  $A_i$  à cette courbe funiculaire  $\varepsilon_i$ , et considérons la partie de cette ligne qui est relative à une travée quelconque  $A_i A_{i+1}$ . On sait (n° 64) que si l'on partageait l'aire ombrée de cette travée en plusieurs parties par des verticales, et si, avec le pôle relatif à la courbe  $\varepsilon_i$ , on construisait un polygone funiculaire, passant par  $A_i$  et  $A_{i+1}$ , des forces qui auraient pour lignes d'action les verticales des centres de gravité de ces parties et pour vecteurs les aires de ces parties divisées par  $k$ , ce polygone funiculaire aurait tous ses côtés tangents à la courbe  $\varepsilon_i$ . Il n'en est plus ainsi quand on divise l'aire ombrée en parties quelconques ; mais, quel que soit le mode de décomposition de cette aire ombrée, les côtés extrêmes du polygone funiculaire correspondant ne changent pas (n° 34) et par suite coïncident avec les tangentes  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Donc, le polygone partiel  $A_i p_i q_i p'_i A_{i+1}$ , défini au numéro précédent, et qui est relatif au mode de décomposition de l'aire ombrée exprimé par la relation (fig. 86)

$$\text{aire ombrée} = A M_i A_{i+1} - A_i B_i B_{i+1} - A_i B_{i+1} A_{i+1},$$

a ses côtés extrêmes  $A_i p_i$ ,  $p'_i A_{i+1}$  respectivement confondus avec les tangentes  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Le même raisonnement appliqué à la travée précédente prouverait que le côté  $p'_{i-1} A_i$  se confond avec  $t_i$ . Donc enfin, les deux côtés consécutifs  $p'_{i-1} A_i$ ,  $A_i p_i$  sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Ainsi, la ligne brisée formée par la succession des polygones partiels  $A_i p_i q_i p'_i A_{i+1}$  constitue un polygone funiculaire de  $3n - 4$  côtés, passant par tous les appuis, ayant pour distance polaire  $\Delta$  et relatif aux

$$2 + 3(n-3) + 2 = 3n - 5$$

forces fictives  $V_1, U'_1, U_2, V_2, U'_2, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}$ .

C'est ce polygone qui a reçu le nom de *second polygone funiculaire*.

On nomme *côtés moyens* ceux des côtés de ce polygone qui ne passent pas par les appuis ; dans chaque travée  $A_i A_{i+1}$  il y a un côté moyen de gauche  $p_i q_i$  et un côté moyen de droite  $q_i p'_i$ . Dans les travées de rive l'un de ces côtés moyens se confond avec l'un des côtés sur appuis ; dans la première, c'est le côté moyen de gauche qui coïncide avec le côté sur appui de gauche ; dans la dernière, c'est le côté moyen de droite qui se confond avec le côté sur appui de droite.

### Réduction de la recherche des moments sur piles à la construction du second funiculaire.

**196.** — Supposons que l'on ait construit le second funiculaire et voyons comment on peut en déduire les moments sur piles.

Prolongeons  $q_i p_i$  jusqu'à sa rencontre  $\beta_i$  (fig. 86) avec la verticale  $A_i B_i$ . Imaginons que par un point  $\pi$  pris à volonté sur la verticale principale ( $G_i$ ), on ait mené des parallèles aux côtés du polygone funiculaire  $A_i p_i q_i p'_i A_{i+1}$ , et soient  $a_1, a_2, a_3, a_4$  les points où ces parallèles rencontrent une verticale dont la distance au point  $\pi$  soit égale à  $\Delta$  ;  $a_1 a_2 a_3 a_4$  sera le polygone des vecteurs des forces fictives  $U_i, V_i, U'_i$  ; et, en exprimant la proportionnalité des bases et des hauteurs dans les triangles semblables  $A_i p_i \beta_i, a_1 \pi a_2$ , on a la relation

$$\frac{a_1 a_2}{A_i \beta_i} = \frac{\Delta}{A_i q_i} = \frac{\Delta}{\frac{1}{3} A_i A_{i+1}} .$$

En remplaçant le vecteur  $a_1 a_2$  par sa valeur

$$a_1 a_2 = u_i = - \frac{\theta_i}{k} = - \frac{1}{k} \frac{A_i A_{i+1} \cdot A_i B_i}{2}$$

et résolvant par rapport à  $A_i B_i$ , on obtient la formule

$$(8) \quad A_i B_i \text{ ou } - \frac{M_i}{\rho} = - A_i \beta_i \frac{6k\Delta}{(A_i A_{i+1})^2}$$

qui donne le moment fléchissant sur l'appui  $A_i$ , ou mieux, le segment  $A_iB_i$  qui est plus utile (n° 192) que le moment  $M_i$  lui-même.

Il est à remarquer que le tracé effectif du polygone des vecteurs  $(\pi, a_1, a_2, a_3, a_4)$  est inutile, ce polygone n'intervenant que pour la démonstration.

On pourrait, au lieu du côté moyen de droite  $q_i p_i$  de la travée  $A_i A_{i+1}$ , employer le côté moyen de gauche  $q_{i-1} p'_{i-1}$  de la travée précédente. En désignant par  $\beta'_i$  le point où ce côté rencontre la verticale  $A_i B_i$ , on trouverait par un raisonnement semblable au précédent

$$(6) \quad A_i B_i \text{ ou } -\frac{M_i}{\rho} = -A_i \beta'_i \frac{6k\Delta}{(A_{i-1} A_i)^2}$$

Les formules (5) et (6) équivalent à la règle suivante :

*Prolongez, jusqu'à sa rencontre  $\beta_i$  (ou  $\beta'_i$ ) avec la verticale de l'appui  $A_i$ , l'un quelconque des deux côtés moyens limitrophes du côté qui passe par  $A_i$ . Le moment fléchissant sur cet appui, évalué à l'échelle  $\frac{1}{\rho}$ , est égal au produit du segment  $A_i \beta_i$  (ou  $A_i \beta'_i$ ) par le facteur*

$$\frac{6k\Delta}{l^2},$$

*l désignant la longueur, mesurée sur l'épure, de la travée à laquelle appartient le côté moyen employé.*

**197.** — Signalons, en passant, la relation

$$\frac{A_i \beta_i}{A_i \beta'_i} = \left( \frac{A_i A_{i+1}}{A_{i-1} A_i} \right)^2$$

qui résulte de la comparaison des formules (5) et (6).

**198.** — L'opérateur disposera des arbitraires  $k$  et  $\Delta$ , comme des quantités  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $\delta$ , pour la commodité de l'épure. Mais ces quantités doivent rester les mêmes pour toutes les travées d'une même poutre. Si l'on veut ensuite connaître  $q$ , on l'aura par la formule (4) du numéro 195.

Un cas fréquent est celui où toutes les travées intermédiaires sont égales. On prend alors habituellement

$$k\Delta = \frac{1}{6} l^2,$$

$l$  désignant la longueur commune, mesurée sur l'épure, des travées autres que les travées de rive. De la sorte, les facteurs

$$\frac{6k\Delta}{(\Delta_i\Delta_{i+1})^2} \quad \frac{6k\Delta}{(\Delta_{i-1}\Delta_i)^2}$$

sont égaux à l'unité, le premier pour  $i = 2, 3, \dots, n - 2$  et le second pour  $i = 3, 4, \dots, n - 1$ ; on a alors

$$(7) \quad A_2B_2 = -A_2\beta_2, \quad A_{n-1}B_{n-1} = -A_{n-1}\beta'_{n-1}.$$

Or, pour toutes les valeurs de  $i$  comprises entre 2 et  $n - 1$ ,

$$(8) \quad A_iB_i = -A_i\beta_i = -A_i\beta'_i;$$

ce qui prouve que la verticale de chacun des appuis  $A_2, A_3, \dots, A_{n-2}$  est coupée au même point par le côté moyen de gauche et par le côté moyen de droite.

Si toutes les travées sont égales, la relation (8) s'applique à tous les appuis intermédiaires sans exception.

### Construction du second funiculaire.

**199.** — Actuellement toute la recherche est réduite à la construction du second polygone funiculaire, et même, à vrai dire, à la détermination des seuls côtés moyens de droite ou de gauche. C'est le problème que nous allons traiter, après avoir donné deux nouvelles définitions :

Soient  $A_{i-1}A_i$  et  $A_iA_{i+1}$  deux travées consécutives quelconques (fig. 87).

Portons, de droite à gauche, à partir du pied  $g'_{i-1}$  de la verticale trissectrice de droite de la travée  $A_{i-1}A_i$ , une longueur  $g'_{i-1}\gamma_i$  égale au tiers de la travée suivante. La verticale du point  $\gamma_i$  reçoit le nom de *contreverticale* relative à l'appui  $A_i$ .



La formule évidente :

$$A_i \gamma_i = \frac{1}{3} (A_i A_{i+1} - A_{i-1} A_i)$$

montre que la contre-verticale ( $\gamma_i$ ) tombe à gauche ou à droite de l'appui correspondant  $A_i$  suivant que la travée  $A_{i-1} A_i$  est plus longue ou plus courte que la travée suivante.

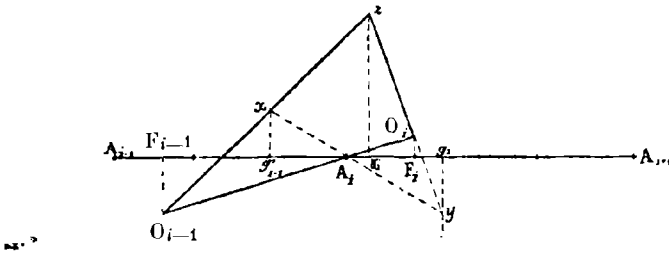


Fig. 87.

**200.** — Désignons par  $F_{i-1}$  un point quelconque de la travée  $A_{i-1} A_i$ , prenons à volonté un point  $O_{i-1}$  sur la verticale de  $F_{i-1}$ , et par ce point  $O_{i-1}$  menons une droite quelconque qui rencontre la verticale trissectrice ( $g'_{i-1}$ ) et la contreverticale ( $\gamma_i$ ) respectivement en deux points que nous désignerons par  $x$  et  $z$ . Menons  $x A_i$  et joignons le point  $z$  au point  $y$  où  $x A_i$  coupe la verticale trissectrice ( $g_i$ ). La droite  $z y$  rencontrera  $O_{i-1} A_i$  en un point  $O_i$  dont nous désignerons la projection sur la travée  $A_i A_{i-1}$  par  $F_i$ .

La position du point  $F_i$  ainsi obtenu ne dépend que de celle de  $F_{i-1}$  et nullement du choix du point  $O_{i-1}$  sur la verticale ( $F_{i-1}$ ) ni de la direction donnée à la droite  $O_{i-1} z$ . En effet, l'application du théorème de Ménélaüs<sup>1</sup> au triangle  $O_{i-1} z O_i$  coupé par la transversale  $x A_i y$  donne :

$$\frac{x O_{i-1}}{x z} \cdot \frac{y z}{y O_i} \cdot \frac{A_i O_i}{A_i O_{i-1}} = 1$$

1. Voir le *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et de Comberousse ; 5<sup>e</sup> édition, page 207.

ou :

$$\frac{g'_{i-1}F_{i-1}}{g'_{i-1}\gamma_i} - \frac{g_i\gamma_i}{g_iF_i} - \frac{A_iF_i}{A_iF_{i-1}} = 1$$

Or, si l'on désigne par  $3a$  et  $3a'$  les longueurs mesurées sur l'épure, des travées  $A_{i-1} A_i$ ,  $A_i A_{i+1}$ , et par  $\alpha$  et  $\alpha'$  les segments  $A_{i-1}F_{i-1}$ ,  $A_iF_i$ , la relation précédente devient :

$$\frac{\alpha - 2a}{a'} - \frac{-a}{\alpha' - a'} - \frac{\alpha'}{\alpha - 3a} = 1$$

que l'on peut écrire :

$$(9) \quad \frac{a'^2}{\alpha'} + \frac{a^2}{3a - \alpha} = a + a'$$

Cette formule montre d'abord que la position du point  $F_i$ , c'est-à-dire la valeur de  $\alpha'$  est indépendante de la position du point  $O_{i-1}$  sur la verticale du point  $F_i$  et de la direction  $O_{i-1}z$ ; elle ne dépend que de  $\alpha$ ,  $a$  et  $a'$ , c'est-à-dire de la position du point  $F_{i-1}$  et des longueurs des deux travées.

Il ressort encore de la formule (9) que si  $\alpha$  reste compris entre  $o$  et  $a$ ,  $\alpha'$  reste compris entre  $o$  et  $a'$ ; en d'autres termes si le point  $F_{i-1}$  appartient au tiers de gauche de la travée  $A_{i-1} A_i$ , son correspondant  $F_i$  sera aussi dans le tiers de gauche de la travée suivante  $A_i A_{i+1}$ .

Dans la pratique, pour construire  $F_i$  connaissant  $F_{i-1}$ , on pourra par exemple prendre pour  $O_{i-1}$  le point  $F_{i-1}$  lui-même.

**201.** — Cela posé, partons de la première travée; et, après avoir placé  $F_1$  en  $A_1$ , déterminons successivement le point  $F_2$  de la deuxième travée qui correspond au point  $F_1$  de la première, puis le point  $F_3$  de la troisième travée qui correspond au point  $F_2$  de la deuxième, et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi  $n-1$  points

$$A_1 \text{ ou } F_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \dots \quad F_{n-1}$$

qu'on nomme *foyers de gauche* de la poutre.

En partant au contraire du dernier appui  $A_n$ , puis opérant de droite à gauche absolument comme nous venons de le faire

de gauche à droite à partir de  $A_1$ , nous obtiendrons une seconde série de  $n - 1$  points :

$$A_n \text{ ou } E_n, E_{n-1}, E_{n-2}, \dots \dots \dots E_2$$

qu'on nomme *foyers de droite*.

Tous les foyers de gauche sont situés dans les tiers de gauche des travées ; tous les foyers de droite dans les tiers de droite.

Observons encore que dans le cas où les travées  $A_{i-1} A_i, A_i, A_{i+1}$  sont égales, la formule (9) revêt la forme

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{3a - a'}$$

qui se prête à une élégante interprétation géométrique, non encore remarquée, que je sache : le point  $F_i$ , correspondant de  $F_{i-1}$ , est le conjugué harmonique par rapport à  $A_i g_i$  du symétrique du point  $F_{i-1}$  par rapport à l'appui  $A_{i-1}$ .

**202.** — On appelle *lignes croisées* relatives à une travée quelconque  $A_i A_{i+1}$ , le système de deux droites indéfinies  $\pi' a'_2, \pi' a'_3$  qui, se coupant sur la verticale principale  $(G_i)$ , interceptent, sur une verticale située à la distance  $\Delta$  de  $(G_i)$ , un segment égal au vecteur

$$v_i = \frac{\sigma_i}{k}$$

de la force fictive  $V_i$  (fig. 86).

D'après cette définition, le point  $\pi'$  peut être pris à volonté sur  $(G_i)$  et on peut donner une direction quelconque à la première ligne  $\pi' a'_2$  ; la seconde ligne  $a'_3 \pi'$  s'obtient ensuite en portant verticalement le segment  $a'_2 a'_3 = v_i$  et joignant le point  $a'_3$  au point  $\pi'$ .

Il est clair d'ailleurs que le segment intercepté par les lignes croisées sur une verticale quelconque est indépendant de la position de  $\pi'$  sur  $(G_i)$  et de la direction  $\pi' a'_2$ , attendu que le rapport de ce segment à  $v_i$  est toujours égal au rapport de sa distance à  $(G_i)$  à la longueur  $\Delta$ .

Remarquons enfin que les *lignes croisées*  $a'_2 \pi' a'_3$  constituent un polygone funiculaire de distance polaire  $\Delta$  pour la force

unique  $V_1$  ; car, puisque  $a'_2 a'_3$  est le vecteur de  $V_1$ , si l'on construit, pour cette force, le polygone funiculaire ayant  $\pi'$  pour pôle et  $a'_2 \pi'$  pour premier côté, le second côté de ce polygone sera précisément  $a'_3 \pi'$ .

**203.** — Soient  $A_1, F_2, F_3, F_4$  (fig. 88) les foyers de gauche de la poutre que, pour fixer les idées, nous supposons à 5 appuis  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , et par suite à 4 travées.

Sur la verticale du premier foyer  $A_1$  portons un segment  $A_1 J'_1$  égal à celui qu'interceptent sur cette verticale les lignes croisées de la première travée (on n'a pas dessiné ici ces lignes croisées pour ne pas compliquer la figure). Joignons le point  $J'_1$  au second appui  $A_2$  et soit  $J_2$  l'intersection de  $J'_1 A_2$  et de la

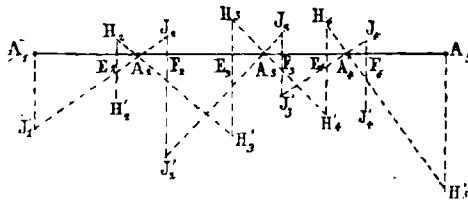


Fig. 88.

verticale du foyer  $F_2$ . Portons sur cette verticale le segment  $J_2 J'_2$  égal à celui qu'interceptent sur cette verticale les lignes croisées de la deuxième travée ; menons  $J'_2 A_3$  jusqu'à sa rencontre  $J_3$  avec la verticale du foyer  $F_3$ , et prenons le segment vertical  $J_3 J'_3$  égal à celui qu'interceptent sur cette verticale les lignes croisées de la troisième travée. Enfin menons  $J'_3 A_4$  jusqu'à sa rencontre  $J_4$  avec la verticale du foyer  $F_4$ , et prenons le segment vertical  $J_4 J'_4$  égal à celui qu'interceptent sur cette verticale les lignes croisées de la quatrième et dernière travée.

Les points ainsi obtenus :

$$(A_1, J'_1), \quad (J_2, J'_2), \quad (J_3, J'_3) \quad (J_4, J'_4)$$

ont reçu le nom de *points fixes*. Il y en a deux sur la verticale de chaque foyer de gauche.

En partant de  $A_i$  et opérant de la même manière sur les foyers de droite ( $A_i, E_i, E_3, E_2$ ), on obtient une autre série de points fixes.

$$(\Pi_2, \Pi'_2), (\Pi_3, \Pi'_3) (\Pi_i, \Pi'_i) (A_i, \Pi'_i).$$

Nous distinguerons ces deux séries, en appelant les points  $J$  *points fixes de première espèce* et les points  $\Pi$  *points fixes de seconde espèce*.

**201.** Ces définitions étant établies, voici le théorème qui clôt en quelque sorte la partie fondamentale de cette étude :

*Les diagonales  $J_i \Pi'_{i+1}, J_i \Pi_{i+1}$  du quadrilatère formé par les quatre points fixes d'une même travée  $A_i A_{i+1}$ , sont les côtés moyens du second polygone funiculaire dans cette travée.*

Nous fonderons la démonstration sur deux remarques :

1° Les côtés moyens limitrophes d'un même côté sur appui vont se couper sur la contreverticale de cet appui. En effet, les deux côtés  $g_{i-1}p'_{i-1}, p_i g_i$  du second polygone funiculaire doivent (n° 38) se croiser sur la ligne d'action de la résultante des forces  $V_{i-1}$  et  $V_i$  qui sont comprises entre ces

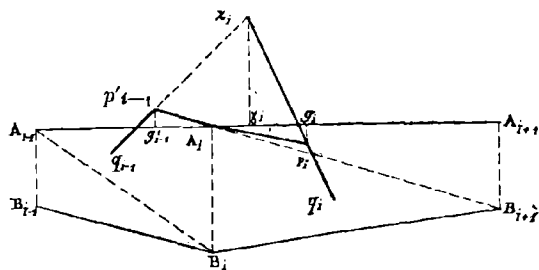


Fig. 89.

deux côtés (fig. 89). Or ces forces agissent suivant les verticales ( $g'_{i-1}$ ) et ( $g_i$ ) ; leur résultante a pour ligne d'action la verticale qui divise  $g'_{i-1} g_i$  en deux parties inversement proportionnelles à leurs intensités c'est-à-dire aux aires des triangles  $A_{i-1} B_i A_i, A_i B_i B_{i+1}$  ; mais ces deux triangles de même base  $A_i B_i$  sont proportionnels à leurs hauteurs c'est-à-dire aux lon-

guez des deux travées, ou encore aux segments  $g'_{i-1}A_i$  et  $A_iq_i$ ; la ligne d'action de la résultante en question doit donc être la verticale qui partage  $g'_{i-1}q_i$  en deux parties directement proportionnelles à  $g'_{i-1}\gamma_i$  et  $\gamma_i q_i$ ; c'est précisément la contre-verticale ( $\gamma_i$ ).

2° Le segment  $J_i J'_i$  compris entre les deux points fixes situés sur la verticale d'un foyer quelconque  $F_i$ , est égal au segment  $C_i C'_i$  qu'interceptent sur cette verticale les côtés moyens du second funiculaire relatifs à la travée qui contient le foyer. En effet le système des lignes croisées  $a'_2\pi'a'_3$ , aussi bien que le système formé par les côtés moyens  $p_iq_i, q_i p'_i$  (fig. 86) du second funiculaire  $A_{i-1} p_i q_i p'_i A_{i+1}$ , constituent l'un et l'autre un polygone funiculaire de même distance polaire  $\Delta$  pour la force unique  $V_i$ ; par suite (n° 44) les segments  $b_i b'_i, C_i C'_i$  représentent à la même échelle le moment statique de la force  $V_i$  par rapport à  $F_i$ . Ces segments sont donc égaux, et comme on a par définition (n° 203)  $J_i J'_i = b_i b'_i$ , on doit avoir  $J_i J'_i = C_i C'_i$ .

Cela posé, considérons le second polygone funiculaire  $A_1 q_1 p'_1 A_2 p_2 q_2 p'_2 A_3 p_3 \dots$  (fig. 90) et rappelons que  $p_1, F_1, J_1$ , sont confondus avec  $A_1$ . Puisque les deux côtés moyens  $A_1 q_1$  et  $q_1 p'_1$ , dans la travée de rive  $A_1 A_2$ , doivent (2°) intercepter sur la verticale de  $F_1$  c'est-à-dire de  $A_1$  un segment égal à  $J_1 J'_1$ , et que  $J_1$  est en  $A_1$ , il faut que le second côté moyen  $q_1 p'_1$  passe par  $J'_1$ . Soit  $z_2$  le point où ce second côté  $q_1 p'_1$  va ren-

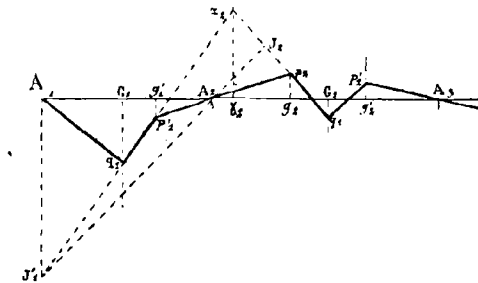


Fig. 90.

contrer la contreverticale ( $\gamma_2$ ), et  $p_2$  le point où  $p'_1 A_2$  va couper la verticale trissectrice ( $g_2$ ); le premier côté moyen  $p_2 q_2$  dans

la deuxième travée sera (1°) le prolongement de  $z_2 p_2$ . Mais d'après la construction des points fixes (n° 203) le point où la droite  $J'_1 A_2$  rencontre  $z_2 p_2$  est précisément le point fixe  $J_2$ ; donc le premier côté moyen  $p_2 q_2$  dans la deuxième travée passe par  $J_2$ ; de plus, comme les deux côtés  $p_2 q_2$ ,  $q_2 p'_2$  doivent intercepter sur la verticale de  $F_2$  un segment égal à  $J_2 J'_2$  et que  $p_2 q_2$  passe par  $J_2$ , il faut que le second côté moyen  $q_2 p'_2$  de la deuxième travée passe par  $J'_2$ .

En raisonnant à partir de  $J'_2$  comme on vient de le faire à partir de  $J'_1$ , on verra de même que  $p_3 q_3$  passe par  $J_3$  et  $q_3 p'_3$  par  $J'_3$ ; puis, que  $p_4 q_4$  passe par  $J_4$  et  $q_4 p'_4$  par  $J'_4$ ; et ainsi de suite.

Il est donc établi que les premiers côtés moyens  $A_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_{n-1} q_{n-1}$  passent respectivement par les points fixes  $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$  et que les seconds côtés moyens  $q_1 p'_1, q_2 p'_2, \dots, q_{n-1} p'_{n-1}$  passent respectivement par  $J'_1, J'_2, \dots, J'_{n-1}$ .

On prouverait de même, en partant de l'autre travée de rive, que les seconds côtés moyens dans les diverses travées contiennent respectivement  $H_2, H_3, \dots, H_n$ , tandis que les premiers côtés moyens renferment respectivement  $H'_2, H'_3, \dots, H'_n$ .

Donc, enfin le côté moyen  $p_i q_i$  passe par  $J_i$  et  $H'_{i+1}$ , et le côté moyen  $q_i p'_i$  passe par  $J'_i$  et  $H_{i+1}$ ; ce qui démontre le théorème énoncé.

### Résumé et vérifications.

**205.** — Telle est, sauf le mode d'exposition, la solution graphique de Mohr pour le problème de la poutre continue de section constante reposant librement sur des appuis de niveau.

L'analyse attentive de cette méthode nous a conduit à décomposer la démonstration en trois théorèmes principaux. Le premier (n° 194) réduit la recherche de tous les moments fléchissants à celle des moments sur piles. Le second (n° 196) ramène la recherche des moments sur piles à la construction des côtés moyens d'un certain polygone dit second polygone funiculaire.

Le dernier (n° 204) fournit deux points de chacun de ces côtés moyens.

En résumé, on commencera par construire les éléments qui ne dépendent pas des charges, mais de la seule distribution des travées ; ce sont les verticales trissectrices, les contreverticales et les foyers. On construira en second lieu les éléments qui dépendent des charges ; ce sont le premier polygone funiculaire, les verticales principales, les lignes croisées et les points fixes. Cela fait, on obtiendra successivement les côtés moyens du second funiculaire, les moments sur piles et enfin les moments fléchissants pour tous les points de la poutre.

Il y a plusieurs vérifications qui permettent d'éviter l'accumulation des erreurs.

1° Le point commun aux deux côtés moyens, dans chaque travée, doit se trouver sur la verticale principale correspondante.

2° Le second côté moyen dans une travée quelconque et le premier côté moyen dans la travée suivante doivent concourir sur la contreverticale relative à l'appui commun aux deux travées.

3° La droite qui joint l'extrémité du second côté moyen dans une travée à l'origine du premier côté moyen dans la travée suivante doit passer par l'appui commun aux deux travées.

**206.** — Remarquons qu'un triangle est déterminé de grandeur et de position quand on connaît trois droites sur lesquelles doivent être placés respectivement ses trois sommets et trois points par lesquels doivent respectivement passer ses trois côtés. Tel est le triangle  $z_2 p'_1 p'_2$  de la fig. 90. Il suit de là que si, dans la poutre continue, on considère les  $i$  premières travées à gauche, la partie  $A_1 g_1 p'_1 A_2 \dots p'_i A_{i+1}$  du second polygone funiculaire comprise dans ces travées, pourrait être construite sans faire intervenir aucun des éléments (foyers de droite E, points fixes de droite H..., etc.) qui dépendent des longueurs et des charges des travées suivantes.

On peut donc énoncer cette proposition importante :

*La position d'un foyer de gauche quelconque et le moment fléchissant en ce point, ne changent pas quand on modifie*



*d'une manière quelconque les longueurs et les charges des travées situées à droite de celle qui renferme le foyer considéré.*

Et de même :

*La position d'un foyer de droite quelconque et le moment fléchissant en ce point, sont indépendants des dimensions et des charges des travées situées à gauche de celle qui contient le foyer considéré.*

**Diagramme général des moment fléchissants. —  
Efforts tranchants et réactions des appuis.**

**207.** — La partie supérieure de la fig. 85 donne, comme nous l'avons vu, les moments fléchissants pour tous les points de la poutre ; ils sont proportionnels aux ordonnées de la ligne  $A_1m_1A_2m_2A_3m_3A_4m_4A_5$ , ces ordonnées étant comptées à partir de la ligne brisée  $A_1B_2B_3B_4A_5$ .

Mais cette manière de compter les ordonnées, à partir de droites qui diffèrent d'une travée à l'autre, ne permet pas de saisir les variations des moment fléchissants aussi aisément que le ferait un diagramme dans lequel les ordonnées auraient leurs pieds sur une même droite, sur l'axe  $A_1A_5$  de la poutre par exemple. Un tel diagramme, que nous nommerons *diagramme général des moments fléchissants* est aisé à construire ; c'est celui que l'on voit à la partie inférieure de la figure 85 ; on l'obtient en déplaçant chaque ordonnée sur sa verticale de façon que son pied vienne sur  $A_1A_5$ . Ainsi on a pris

$$h'_1m'_1 = h_1m_1, \quad o'_1n'_1 = o_1n_1, \quad \dots$$

De la sorte,  $y$  étant une ordonnée quelconque de la ligne  $A_1m'_1B'_2m'_2B'_3m'_3B'_4m'_4A_5$  rapportée aux axes rectangulaires  $x'A_1y$ , et  $M$  étant le moment fléchissant dans la section qui contient celle ordonnée, on a, en grandeur et en signe.

$$M = - \rho y.$$

La recherche des moments fléchissants est la partie essen-

tielle du problème de la poutre continue. La détermination des efforts tranchants et des réactions des appuis en résulte ensuite aisément. Quelques mots suffiront pour l'expliquer :

La ligne  $A_1 m'_1 B'_2 m'_2 B'_3 m'_3 B'_4 m'_4 A_5$ , dont nous venons d'indiquer la construction, n'est au fond qu'une ligne funiculaire de distance polaire  $\delta$  pour l'ensemble des charges auxquelles la poutre est soumise et des réactions des appuis ; la ligne de clôture est  $A_1 A_5$ . Donc, pour déterminer l'effort tranchant en un point quelconque  $o'_1$ , on mènera la tangente  $t_1$  au point correspondant  $n'_1$  du diagramme ; puis, par un pôle quelconque on mènera les parallèles aux droites  $A_1 A_5$  et  $t_1$  jusqu'à leurs rencontres  $\alpha$  et  $\theta$  avec une verticale située à une distance  $\delta$  du pôle choisi ; le segment  $\alpha\theta$ , multiplié par  $\varphi$ , donnera l'effort tranchant dans la section  $o'_1$ .

Quant aux réactions des appuis, il est clair que si l'on désigne par  $T_i$  et  $T'_i$  les efforts tranchants dans la section qui précède et dans celle qui suit infiniment peu l'appui  $A_i$ , et par  $R_i$  la réaction de cet appui, on a :

$$T'_i = T_i + R_i.$$

d'où :

$$R_i = T'_i - T_i.$$

Lorsque chaque travée  $A_i A_{i+1}$  supporte une charge uniforme, la partie  $B'_i m'_i B'_{i+1}$  du diagramme général des moments fléchissants est (fig. 91) une parabole à axe vertical et l'effort tran-

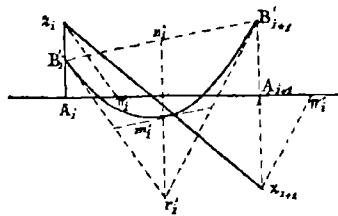


Fig. 91.

chant varie dans la travée comme l'ordonnée d'une droite (n° 112) ; il suffit donc de déterminer les efforts tranchants  $T_i$  et  $T_{i+1}$  sur les appuis. Pour cela, on prolongera le diamètre  $n'_i m'_i$  rela-

tif à la corde  $B'_i, B'_{i+1}$  d'une quantité  $m'_i r'_i$  égale à  $n'_i m'_i$ , ce qui donnera les tangentes  $r'_i B'_i, r'_i B'_{i+1}$  à la parabole; puis, après avoir pris sur la ligne des appuis des segments  $A_i \pi_i, A_{i+1} \pi'_i$  égaux à  $\delta$ , on mènera par le premier pôle  $\pi_i$  la parallèle  $\pi_i z_i$  à la tangente  $r_i B'_i$  et par le second pôle la parallèle  $\pi'_i z_{i+1}$  à la tangente  $r'_i B'_{i+1}$ ; on aura alors :

$$T_i = \varphi \cdot A_i z_i, \quad T_{i+1} = \varphi \cdot A_{i+1} z_{i+1}$$

### Remarques sur les lignes croisées.

**208.** — Au lieu de construire les lignes croisées comme nous l'avons indiqué au n° 202, il est préférable de calculer les longueurs des segments  $\omega_i, \omega'_i$  qu'elles interceptent sur les verticales des appuis  $A_i$  et  $A_{i+1}$  de la travée à laquelle elles appartiennent. On portera ces segments sur les verticales en question et on joindra en croix leurs extrémités (fig. 86); le point de croisement donnera alors un point  $\omega'$  de la verticale principale ( $C_i$ ) qui se trouvera ainsi non plus une donnée, mais un résultat de la construction. On évitera d'ailleurs de la sorte le tracé de la verticale auxiliaire  $a'_i a'_s$  située à la distance  $\Delta$  de la verticale principale. Ce procédé donne des résultats plus précis et évite la confusion.

Les valeurs de  $\omega_i$  et  $\omega'_i$  résultent immédiatement de l'inspection de la fig. 86; ce sont :

$$(10) \quad \omega_i = \left(\frac{\sigma_i}{k}\right) \frac{c_i}{\Delta}, \quad \omega'_i = \left(\frac{\sigma_i}{k}\right) \frac{d_i}{\Delta};$$

$c_i$  et  $d_i$  désignent les distances du centre de gravité de l'aire  $\sigma_i$  aux verticales des appuis  $A_i$  et  $A_{i+1}$ , en sorte que la somme  $c_i + d_i$  est égale à la longueur  $l_i$  de la travée mesurée sur l'épure.

A proprement parler c'est surtout dans le cas d'ailleurs fort usuel, où la charge sur la travée est uniforme, que ce nouveau procédé est avantageux, vu qu'on peut alors, comme nous allons le montrer, trouver les valeurs explicites de  $\omega_i$  et  $\omega'_i$  en fonction des données.

**209.** — La charge uniforme peut occuper la longueur de la travée en tout ou en partie. La seconde hypothèse contient la première comme cas particulier.

Soit  $a_i$  (fig. 92) la longueur  $A_i C_i$ , qui représente sur l'épure la partie occupée par la charge uniforme. La ligne funiculaire  $A_i m_i A_{i+1}$  relative à cette charge, se compose (n° 114) d'un arc de parabole  $A_i m_i$  raccordée par une droite  $m_i A_{i+1}$ . Désignons par  $n_i$  le point où cette tangente va rencontrer la verticale de l'appui  $A_i$ , et par  $b_i$  la longueur  $A_i n_i$ . On sait que le produit  $\rho b_i$  représente la valeur absolue du moment, par rapport à  $A_i$ , de la réaction que l'appui  $A_{i+1}$  exercerait si la travée était isolée ; ce produit est donc égal au moment de la charge par rapport à  $A_i$ , en sorte qu'on a :

$$b_i = \frac{1}{\rho} \frac{p}{2} (\lambda a_i)^2.$$

L'aire mixtiligne  $A_i m_i A_{i+1}$  que nous appelons  $\sigma_i$  est la différence entre le triangle rectiligne  $A_i m_i A_{i+1}$  et le triangle parabolique  $A_i m_i m_i$ , lequel est les  $\frac{2}{3}$  du triangle rectiligne  $A_i n_i m_i$ .

On a donc

$$\sigma_i = \frac{1}{2} b_i l_i - \frac{1}{3} b_i a_i ;$$

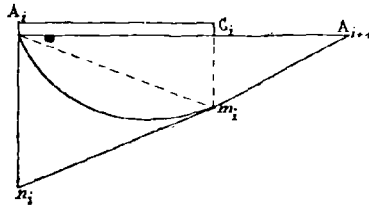


Fig. 92.

et, comme les centres de gravité du triangle rectiligne  $A_i m_i A_{i+1}$  et du triangle parabolique  $A_i m_i m_i$  ont respectivement pour abscisses  $\frac{l_i}{3}$  et  $\frac{a_i}{4}$ , on a

$$c_i = \frac{1}{\sigma_i} \left[ \frac{1}{2} b_i l_i \cdot \frac{l_i}{3} - \frac{1}{3} b_i a_i \cdot \frac{a_i}{4} \right].$$

Eu égard à ces trois dernières relations, les formules (10) deviennent

$$(11) \quad \omega_i = h \cdot a_i^3 (2l_i^3 - a_i^3)$$

$$(12) \quad \omega'_i = h \cdot a_i^3 (2l_i - a_i)^3,$$

en posant

$$(13) \quad h = \frac{p\lambda^3}{24 k p \Delta}.$$

**210.** — Les relations (11), (12), (13) résolvent pleinement le problème proposé. Voici comment on s'en sert :

Désignons par  $\Omega_i$  la valeur commune que prennent  $\omega_i$  et  $\omega'_i$  lorsque  $a_i = l_i$ , c'est-à-dire lorsque la charge uniformèrègne sur toute l'étendue de la travée. Nous aurons

$$(14) \quad \Omega_i = h l_i^4,$$

et par suite

$$(15) \quad \omega_i = \Omega_i r^3 (2 - r^3)$$

$$(16) \quad \omega'_i = \Omega_i r^3 (2 - r)^3,$$

en désignant par  $r$  le rapport  $\frac{a_i}{l_i}$  de la partie chargée à la longueur totale de la travée.

Ce sont ces dernières formules que l'on emploie dans la pratique. Que la travée soit chargée uniformément en tout ou en partie, on commence toujours par calculer  $\Omega_i$  à l'aide des relations (13) et (14). Là se borne le calcul si la charge est totale. Si la charge n'est que partielle, il faut en outre multiplier la valeur ainsi obtenue de  $\Omega_i$  par les valeurs numériques des coefficients

$$r^3 (2 - r^3) \quad \text{et} \quad r^3 (2 - r)^3,$$

dont le premier se rapporte au segment situé du côté de la charge, et le second au segment situé du côté opposé à la charge.

Le tableau suivant donne les valeurs numériques de ces coefficients pour les valeurs usuelles  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$  du rapport  $r$ .

$r$	$r^2 (2 - r^2)$	$r^3 (2 - r)^2$
$\frac{1}{5}$ . . . . .	0,0784 . . . . .	0,1296
$\frac{2}{5}$ . . . . .	0,2944 . . . . .	0,4096
$\frac{3}{5}$ . . . . .	0,5904 . . . . .	0,7056
$\frac{4}{5}$ . . . . .	0,8704 . . . . .	0,9216

Il est à peine nécessaire d'observer que, dans la pratique, il faut tenir compte à la fois du poids de la poutre qui est une charge régnant sur la travée entière et de la surcharge qui peut n'occuper qu'une partie de la travée ; les segments interceptés par les lignes croisées sur les verticales des appuis se composent alors de deux parties.

**211.** — Signalons encore à ce sujet un rapprochement intéressant :

On sait (n° 142) que si  $f_i$  désigne la longueur, mesurée sur l'épure, de la flèche de la parabole funiculaire relative à la charge uniforme de la travée de rang  $i$ , on a :

$$f_i = \frac{p(l_i)^2}{8\rho}$$

La comparaison de cette expression et des relations (13) et (14), donne immédiatement :

$$(17) \quad \Omega_i = \frac{l_i^2}{6k\Delta} \cdot 2f_i$$

De là résulte, pour une poutre continue uniformément chargée sur toute sa longueur, les deux propositions suivantes :

1° Si toutes les travées intermédiaires ont une même longueur  $l$  et si les deux travées de rive ont une même longueur  $l'$ , et si l'on pose

$$k\Delta = \frac{1}{6} l^2$$

les lignes croisées intercepteront sur les verticales correspon-

dantes, des segments égaux à  $2f$  pour les travées intermédiaires, et à

$$2f' \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

pour les travées de rive ;  $f$  désigne la flèche de l'une des paraboles intermédiaires et  $f'$  la flèche de l'une des paraboles de rive.

2° Si toutes les travées ont une même longueur  $l$ , auquel cas toutes les paraboles ont la flèche  $f$ , et si l'on pose toujours

$$k\Delta = \frac{1}{6} l^2,$$

les lignes croisées intercepteront sur les verticales correspondantes des segments qui seront tous égaux au double de la flèche  $f$ .

212. — Outre le cas usuel de la charge uniforme, il importe d'étudier, quant à la construction des lignes croisées, le cas où la travée supporte une charge concentrée unique  $\psi$  ; ce cas, quoique purement théorique, nous sera fort utile dans le chapitre suivant :

Soit  $A_i m A_{i+1}$  le polygone funiculaire de la force unique  $\psi$ , qui, étant construit avec la distance polaire  $\delta$ , passe par les

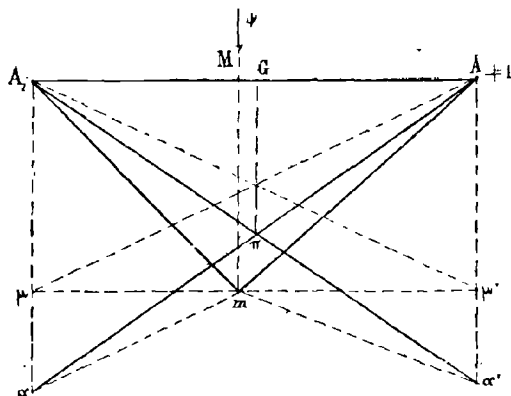


Fig. 99.

appuis  $A_i, A_{i+1}$  (fig. 93) ; désignons par  $l$  la longueur  $A_i A_{i+1}$

qui, sur l'épure, représente la travée et par  $h$  la hauteur  $Mm$  du triangle  $\Lambda_i m \Lambda_{i+1}$ ; l'aire de ce triangle sera

$$\sigma_i = \frac{1}{2} l h;$$

d'ailleurs l'abscisse  $\Lambda_i G$  de son centre de gravité sera la moyenne des abscisses de ses trois sommets, c'est-à-dire

$$\frac{1}{3} (l + \mu m),$$

$\mu m \mu'$  désignant l'horizontale du point  $m$ .

Le segment  $\omega_i$ , que les lignes croisées intercepteront sur la verticale de l'appui  $\Lambda_i$ , aura donc (n° 208) pour expression

$$\omega_i = \frac{1}{2} \frac{lh}{k} \cdot \frac{1}{3} \frac{l + \mu m}{\Delta}$$

c'est-à-dire

$$\omega_i = h + \frac{h}{l} \mu m$$

en posant

$$k \Delta = \frac{1}{6} l^2.$$

Or, si l'on mène par le point  $m$  la parallèle  $m\alpha$  à la diagonale  $\mu \Lambda_{i+1}$  du rectangle  $\Lambda_i \mu \mu' \Lambda_{i+1}$ , on voit, par les triangles semblables  $\alpha \mu m$ ,  $\mu \Lambda_i \Lambda_{i+1}$ , que  $\mu \alpha$  est égal à  $\frac{h}{l} \mu m$ ; on a donc

$$\omega_i = \Lambda_i \alpha.$$

On verrait de même que le segment  $\omega'_i$ , que les mêmes lignes croisées interceptent sur la verticale de l'appui  $\Lambda_{i+1}$ , est égal à  $\Lambda_{i+1} \alpha'$ ,  $\alpha'$  étant le point que l'on obtient en menant  $m\alpha'$  parallèle à l'autre diagonale  $\Lambda_i \mu'$  du même rectangle  $\Lambda_i \mu \mu' \Lambda_{i+1}$ .

Ces lignes croisées  $\Lambda_i \alpha'$ ,  $\Lambda_{i+1} \alpha$  s'obtiennent ainsi sans déterminer préalablement la verticale du centre de gravité du triangle  $\Lambda_i m \Lambda_{i+1}$ ; cette verticale serait donnée au contraire, si on la voulait, par l'intersection  $\pi$  des lignes croisées.



**Poutre continue encastrée à l'un des bouts ou aux deux extrémités.**

**213.** — Supposons d'abord que le premier appui  $A_1$  soit seul encastré.

Nous pouvons (n° 193) considérer la poutre actuelle à  $n$  appuis  $A_1, \dots, A_n$  comme la limite d'une poutre à  $n + 1$  appuis  $A_0, A_1, \dots, A_n$  qui seraient tous simples et dont le premier  $A_0$  serait infiniment voisin de  $A_1$ , la travée additionnelle  $A_0A_1$  étant d'ailleurs *vide*, c'est-à-dire ne portant aucune charge.

Or l'influence de cette travée additionnelle  $A_0A_1$  sur le second funiculaire  $A_1p_1q_1p'_1, \dots$ , est facile à démêler.

D'abord, la travée  $A_0A_1$  étant vide, ses lignes croisées coïncident, et par suite le segment  $J_0J'_0$  est nul ; donc  $J'_0$  coïncide, comme  $J_0$ , avec le point  $A_0$  et la droite  $J'_0A_1J_1$  se confond avec l'horizontale  $A_1A_n$  des appuis ; le point fixe  $J_1$  est par conséquent situé sur cette horizontale, c'est-à-dire se confond avec  $F_1$ . Quant à la position de ce dernier point, elle résulte de la formule (9) qui, pour  $a = 0$ , donne  $\alpha' = \alpha$ , c'est-à-dire  $A_1F_1 = A_1g_1$  ; le point  $F_1$  est donc au pied  $g_1$  de la première verticale trissectrice. Enfin, remarquons que la fibre moyenne, passant par les appuis infiniment voisins représentés par  $A_0$  et  $A_1$ , sa ligne homographique est tangente en  $A_1$  à l'horizontale des appuis, et par suite le premier côté  $A_1p_1$  du second funiculaire est dirigé suivant cette horizontale (fig. 94).

Ainsi, en résumé, lorsque le premier appui  $A_1$  d'une poutre continue  $A_1A_n$  est encastré, le foyer  $F_1$  et le point fixe  $J_1$  coïncident, non plus avec  $A_1$ , mais avec le pied  $g_1$  de la première

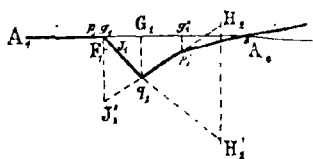


Fig. 94.

*verticale trissectrice.* La suite du tracé ne subit aucune modification.

De même, si la poutre est encastrée à son autre bout  $A_n$ , le foyer  $E_n$  et le point fixe  $H_n$  coïncident, non plus avec  $A_n$ , mais avec le pied  $g'_{n-1}$  de la dernière verticale trissectrice.

214. — La figure 95 représente l'épure d'une poutre à une seule travée  $A_1A_2$  et encastrée à ses deux bouts.

Après avoir choisi, conformément aux exigences du dessin, les échelles  $\frac{1}{\lambda}$  et  $\frac{1}{\varphi}$  des longueurs et des forces, ainsi que la distance polaire  $\delta$ , on tracera la droite  $A_1A_2$  qui figure la poutre

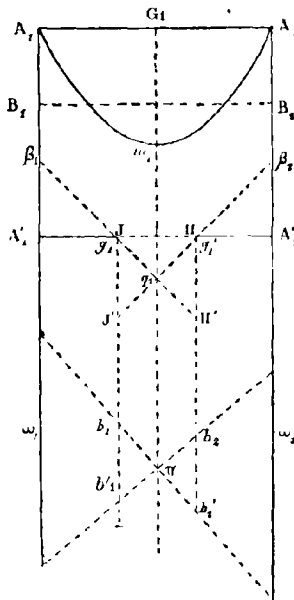


Fig. 95.

et la ligne funiculaire  $A_1m_1A_2$  des charges données. Puis, pour éviter la confusion, on transportera  $A_1A_2$  parallèlement à elle-même en  $A'1A'2$ . La division de cette droite en trois parties égales donnera les verticales trissectrices ( $g_1$ ) et ( $g'_1$ ). Les segments  $A'1g_1$  et  $g'_1A'2$  seront les côtés extrêmes du second funiculaire; d'ailleurs  $g_1$  et  $g'_1$  seront ici les points fixes supérieurs J et H de gauche et de droite.

On déterminera la verticale ( $G_1$ ) du centre de gravité de l'aire  $A_1m_1A_2$ , et après avoir mesuré sur l'épure cette aire  $\sigma$ , on portera sur les verticales des appuis des segments  $\omega_1$  et  $\omega'_1$  donnés par les formules (10) du n° 208, et ayant soin de prendre

$$6 k \Delta = l^2,$$

ce qui donnera

$$\omega_1 = \frac{\sigma}{l^2} \cdot A_1G_1, \quad \omega'_1 = \frac{\sigma}{l^2} \cdot G_1A_2,$$

$l$  étant la longueur  $A_1A_2$  qui représente la travée. En joignant en croix les extrémités de ces segments, puis portant en  $JJ'$ ,  $III'$  les longueurs  $b_1b'_1$ ,  $b_2b'_2$ , interceptées par les lignes croisées sur les verticales ( $g_1$ ), ( $g'_1$ ), on aura les points fixes inférieurs  $J'$  et  $II'$  de gauche et de droite.  $JH'$  et  $J'II$  donneront alors les côtés moyens  $g_1q_1$ ,  $g'_1q'_1$  du second funiculaire. Comme vérification, les points  $\pi$  et  $q_1$  devront se trouver sur la verticale principale ( $G_1$ ).

Enfin, on prolongera les côtés moyens  $g_1q_1$ ,  $g'_1q'_1$  jusqu'à leurs rencontres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  avec les verticales des appuis; et, en portant sur ces verticales, à partir de  $A_1$  et  $A_2$ , des segments  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  respectivement égaux à  $\beta_1A'_1$ ,  $\beta_2A'_2$ , on aura la droite  $B_1B_2$ , à partir de laquelle il faut compter les ordonnées de la ligne  $A_1m_1A_2$ , pour avoir, à l'échelle  $\frac{1}{\rho}$  ou  $\frac{1}{\lambda^2 \rho}$ , les moments fléchissants aux divers points de la poutre.

**215.** — L'épure précédente devient presque entièrement inutile lorsque la charge est uniforme.

Dans ce cas, la courbe  $A_1m_1A_2$  est une parabole dont la flèche  $f = G_1m_1$  est (n° 112) donnée par la formule

$$(18) \quad f = p \frac{(l\lambda)^2}{8\rho},$$

$p$  désignant le coefficient de charge. D'ailleurs toute la figure devient symétrique par rapport à la verticale ( $G_1$ ) du milieu de la travée, et l'on a : d'abord (n° 211)

$$\omega_1 = \omega'_1 = 2f,$$

puis

$$A_1 B_1 = \beta_1 A'_1 = JJ' = b_1 b'_1 = \frac{4}{3} \omega_1 = \frac{2}{3} f.$$

Donc, il suffira :

1° De calculer la flèche  $f$  à l'aide de la formule (18) et de porter cette flèche de haut en bas à partir du milieu de la poutre sur la verticale de ce point milieu, ce qui permettra de construire immédiatement (n° 70) la parabole  $A_1 m_1 A_2$  ;

2° De porter de haut en bas sur les verticales des appuis, des longueurs  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  égales au  $\frac{2}{3}$  de la flèche, ce qui donnera la droite  $B_1 B_2$  à partir de laquelle on devra compter les ordonnées de la parabole.

On voit que la seule partie utile de la figure se réduit à celle qui est située au-dessus de  $m_1$ , c'est-à-dire à la partie strictement indispensable pour exprimer graphiquement les résultats.



## CHAPITRE XII

# LA POUTRE CONTINUE : CHARGES DÉFAVORABLES ; DÉNIVELLATION DES APPUIS

---

### Questions à traiter.

**216.** — Nous avons appris, dans le chapitre qui précède, à déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants aux divers points d'une poutre continue, pour une charge donnée d'ailleurs quelconque, et dans l'hypothèse où tous les appuis ont la même hauteur. Il nous reste encore à étudier les charges défavorables, ainsi que l'influence des abaissements des appuis.

On nomme *charges défavorables* les combinaisons de charges qui donnent dans les différentes sections de la poutre les moments fléchissants, ou les efforts tranchants, maxima. Cette recherche dont l'utilité est manifeste paraît, au premier abord, un problème très complexe ; mais elle est singulièrement simplifiée par l'application du principe de superposition des effets des forces. En effet, d'une part, pour avoir l'effet total, sur un point donné, des charges qui sollicitent plusieurs travées, il suffit de chercher successivement les effets que produisent sur ce point les charges qui agissent dans chacune de ces travées, les autres restant vides, puis d'ajouter les résultats. D'autre part, pour avoir l'effet total, sur point donné, des charges qui sollicitent une même travée, il suffit de chercher séparément l'effet de chacune de ces charges, puis d'ajouter les résultats. On voit que le problème primitif se trouve par là ramené à l'étude des effets produits sur un point donné par

une force unique appliquée à un point quelconque de la poutre. Cette conclusion subsiste d'ailleurs dans le cas où les charges sont continues, car une charge continue peut toujours être décomposée en une infinité de forces infiniment petites.

Nous commencerons donc par résoudre le problème simple que nous venons d'énoncer ; nous en développerons ensuite les conséquences relativement à la question générale des charges défavorables. Enfin nous étudierons l'influence de la dérivellation des appuis.

### Poutre continue soumise à une charge concentrée unique.

**217.** — Considérons donc une poutre continue supposée sans poids et sollicitée par une force unique (fig. 96).

Pour fixer les idées, nous prendrons une poutre à 6 travées, et nous supposons que la force soit appliquée en un point de la troisième travée.

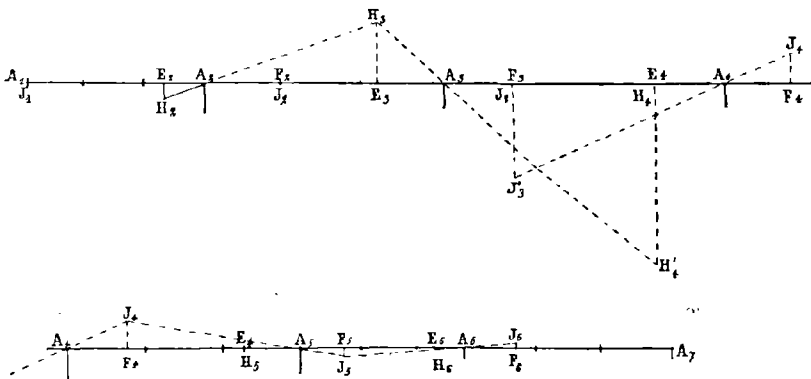


Fig. 96.

Il faut, avant tout, voir comment sont situés les points fixes. Observons à cet effet que dans toute travée vide les deux points fixes de gauche se confondent en un seul et qu'il en est de même des deux points fixes de droite ; cela tient à ce que dans une telle tra-

vée les lignes croisées forment deux droites confondues, qui, par conséquent, interceptent des segments nuls sur les verticales des deux foyers. D'après cela comme  $J_1$  est en  $A_1$ ,  $J'_1$  sera aussi en  $A_1$ ; la droite  $J'_1A_2$ , sur laquelle doit se trouver  $J_2$ , sera donc couchée sur l'horizontale  $A_1A_7$  et par suite  $J_2$  sera en  $F_2$ ;  $J'_2$  sera aussi en ce point, puisque la deuxième travée est vide; la droite  $J'_2A_3$  sera donc couchée sur  $A_1A_7$ , et le point  $J_3$  sera en  $F_3$ . Mais ici la travée étant chargée,  $J'_3$  sera distinct de  $J_3$ ; le segment  $J_3J'_3$  sera fourni par les lignes croisées de cette travée. La droite  $J'_3A_4$ , par sa rencontre avec la verticale de  $F_4$ , donnera le point  $J_4$ , avec lequel  $J'_4$  sera d'ailleurs confondu, puisque la quatrième travée est vide; puis  $J'_4A_5$  donnera  $J_5$  (ou  $J'_5$ ) sur la verticale du foyer  $F_5$  et enfin  $J_5A_6$  donnera  $J_6$  (ou  $J'_6$ ) sur la verticale du foyer  $F_6$ .

On voit de la sorte que chaque travée non chargée n'a qu'un point fixe de gauche  $J$ , et que ce point fixe est situé sur l'horizontale des appuis pour toutes les travées qui précèdent la travée chargée; il est au contraire alternativement au-dessus et au-dessous de l'horizontale  $A_1A_7$  dans les travées qui suivent la travée chargée.

En partant de  $A_7$  et raisonnant de même, on verrait qu'il n'y a dans chaque travée vide qu'un seul point fixe de droite  $H$ , et que ce point est sur  $A_1A_7$  pour les travées qui suivent la travée chargée et alternativement au-dessus et au-dessous de  $A_1A_7$  pour les travées qui précèdent celle qui est chargée.

Quant aux points fixes de la travée chargée  $A_3A_4$ , ils sont au nombre de quatre,  $J_3$  et  $J'_3$ ,  $H_4$  et  $H'_4$ ; les deux supérieurs  $J_3$ ,  $H_4$  sont sur l'horizontale des appuis.

**218.** — Cela posé, on se rend compte bien aisément des variations du moment fléchissant que développe, dans les diverses sections de la poutre, la force fixe et unique  $\psi$ ; il suffit d'avoir présentes à l'esprit les règles des nos 192 et 196 et d'observer que, d'après la règle même du n° 192, dans toute travée vide le moment fléchissant varie comme les ordonnées d'une droite.

Considérons d'abord les travées vides (fig. 97). Le second polygone funiculaire se réduit dans chacune d'elles à trois cô-

tés, qui sont ici marqués en traits pleins, et le côté moyen passe par le foyer le plus éloigné de la travée chargée ; ainsi dans la travée  $A_4 A_5$  il passe par  $H_5$  (ou  $E_5$ ) et, dans la travée suivante  $A_5 A_6$ , par  $H_6$  (ou  $E_6$ ). Ce côté moyen et l'horizontale des appuis interceptent sur les verticales des appuis de la travée des segments proportionnels aux moments fléchissants sur ces piles ; tels sont les segments  $\Lambda_4 \beta_4$ ,  $A_5 \beta'_5$  pour la travée  $A_4 A_5$ , et les segments  $A_5 \beta_5$  et  $A_6 \beta'_6$  pour la travée suivante  $A_5 A_6$ . Ces moments sur piles sont négatifs sur les appuis de la travée chargée ; puis, à mesure qu'on s'éloigne de cette travée, d'un côté ou de l'autre, ils deviennent alternativement positifs et négatifs, et leurs valeurs absolues décroissent, de telle sorte que chacun d'eux soit inférieur à la moitié de celui qui le précède ; ainsi le rapport

$$\frac{A_5 \beta'_5}{\beta_4 \Lambda_4}$$

est, en valeur absolue, inférieur à  $\frac{1}{2}$ , car il est égal à

$$\frac{H_5 \Lambda_5}{\Lambda_4 \Lambda_5},$$

lequel est moindre que

$$\frac{g'_4 \Lambda_5}{\Lambda_4 g'_4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}.$$

Les moments fléchissants aux divers points d'une même tra-

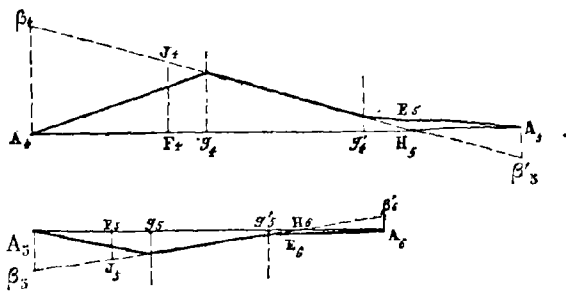


Fig. 97.

vée vide sont proportionnels aux ordonnées d'une droite ; c'est la droite  $\beta_4 \beta'_5$  pour la travée  $A_4 A_5$ , la droite  $\beta_5 \beta'_6$  pour la tra-



vée suivante. Le moment fléchissant s'annule donc une fois et une seule dans chaque travée vide ; il est nul à celui des deux foyers de la travée vide qui est le plus éloigné de la travée chargée ; dans la travée  $A_1 A_3$  il est nul en  $E_3$ , dans la travée suivante il est nul en  $E_6$ , etc. La ligne élastique offre un changement de courbure aux points correspondants.

**219.** — Il reste à examiner ce qui se passe dans la travée chargée  $A_3 A_4$ .

Nous avons donné au n° 212 la construction des lignes croisées pour une travée soumise à une force unique. Considérons maintenant cette travée comme étant celle  $A_3 A_4$ , qui fait partie de la poutre continue  $A_1 A_7$ , dont les autres travées sont vides. Nous savons (n° 217) que les points fixes supérieurs  $J_3$  et  $H_4$  (fig. 98) sont l'un au foyer de gauche  $F_3$ , l'autre au foyer de droite  $E_4$ .

Reproduisons ici la figure 93, mais, pour éviter la confusion, plaçons-la en dessous de façon que les points  $A_3$  et  $a_3$ , qui représentent le même appui dans la figure supérieure et dans la figure inférieure soient sur une même verticale, et qu'il en soit de même pour les points correspondants  $A_4$  et  $a_4$ .

Soient  $ff'$ ,  $ee'$  les segments interceptés par les lignes croisées sur les verticales des foyers  $F_3$  et  $E_4$  ; en les portant en  $F_3 J'_3$ ,  $E_4 H'_4$ , on obtient les points fixes inférieurs  $J'_3$ ,  $H'_4$  ; les droites  $F_3 H'_4$ ,  $F'_3 H_4$ , qui sont dirigées suivant les côtés moyens du second funiculaire, détermineront sur les verticales des appuis les segments  $A_3 A'_3$ ,  $A_4 A'_4$ , représentatifs des moments sur ces deux piles.

Mais il est aisé de voir que l'on peut éviter la construction de toute cette partie supérieure de la figure et obtenir le diagramme des moments d'une façon beaucoup plus simple.

Remarquons que si l'on construisait, pour la force  $\psi$ , le polygone funiculaire  $A_3' m' A_4'$  de distance polaire  $\delta$  qui passe par  $A_3'$  et  $A_4'$ , la figure  $A_3' m' A_4'$  et la figure  $a_3 m a_4$  qui représente aussi (n° 212) un polygone funiculaire de la même force  $\psi$  avec la même distance polaire  $\delta$ , seraient homologues (n° 25), le rapport d'homologie étant égal à l'unité. L'homologue du point  $\alpha''$  sera le point  $\alpha'$ , car on a  $A_4' \alpha'' = a_4 \alpha'$ , vu que  $E_4 H'_4 = ee'$  et que

les deux systèmes de lignes croisées  $(F_3 \hat{H}'_i, J'_3 E_i)$ ,  $(f'e', fe)$  ont leurs points de croisement sur la verticale du centre de gravité du .

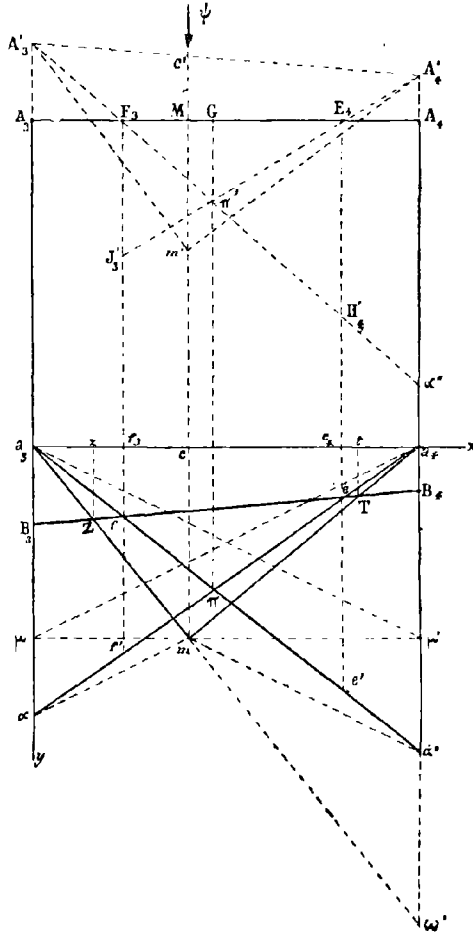


Fig. 98.

triangle  $a_3 m a_4$ , c'est-à-dire à la même distance de la droite  $A'_4 a_4$ . Donc le point  $F_3$ , qui est commun à la verticale  $F_3 J'_3 ff'$  et à la droite  $A'_3 \alpha$ , aura pour homologue le point  $f$  qui est commun à la même verticale et à la droite  $a_3 \alpha'$ , homologue de  $A'_3 \alpha''$ . On verrait de même que  $E_4$  a pour homologue  $e$ ; donc

les points  $B_3$  et  $B_1$ , où la droite  $fe$  rencontre les verticales des appuis sont les homologues de  $A_3$  et  $A_1$ ; par suite, on a  $a_3 B_3 = A'_3 A_3$  et  $a_1 B_1 = A'_1 A_1$ .

Ainsi donc, il suffit de mener dans la partie inférieure de la figure la droite  $fe$  pour avoir en  $a_3 B_3$ ,  $a_1 B_1$ , les moments sur piles changés de signe et à l'échelle  $\frac{1}{\rho}$ . La droite  $B_3 B_1$  et le premier polygone funiculaire  $a_3 m a_1$ , forment le diagramme des moments fléchissants dans la travée; en d'autres termes, les moments fléchissants sont, à l'échelle  $\frac{1}{\rho}$ , les ordonnées de la ligne brisée  $a_3 m a_1$ , comptées à partir de  $B_3 B_1$ .

Comme  $m\alpha'$  est moindre que  $a_3 \mu'$ ,  $\omega' \alpha'$  est moindre que  $\omega' \mu'$ ; en d'autres termes,  $\alpha'$  est compris entre  $\omega'$  et  $\mu'$ , et la droite  $a_3 m$  est au-dessous de  $a_3 \alpha'$ ; de même  $a_1 m$  est au-dessous de  $a_1 \alpha$ . Par conséquent, le point  $m$  est au-dessous de la droite  $ef$  et les points  $Z$  et  $T$  où cette droite est coupée par les côtés  $a_3 m$  et  $a_1 m$  du triangle  $a_3 m a_1$ , sont situés l'un entre  $f$  et  $B_3$ , l'autre entre  $e$  et  $B_1$ . Le moment fléchissant est donc positif entre  $z$  et  $t$ , et négatif de  $a_3$  en  $z$  et de  $t$  en  $a_1$ ,  $z$  et  $t$  désignant les projections de  $Z$  et  $T$  sur l'axe  $a_3 a_1$  de la poutre.

Ainsi, dans la travée chargée le moment fléchissant est négatif sur les deux appuis; il change de signe en s'annulant entre chacun de ses appuis et le foyer voisin; puis, il devient positif et conserve le signe + aux deux foyers et dans l'intervalle qui les sépare.

On donne le nom de points d'inflexion aux points  $z$  et  $t$  où le moment fléchissant change de signe en s'annulant.

**220.**— Pour apercevoir les variations que subit l'effort tranchant quand on considère les différentes sections de la poutre continue soumise à l'action de la force unique  $\psi$ , il suffit d'invoquer le théorème du n° 84 : l'effort tranchant est égal à la dérivée, changée de signe, du moment fléchissant; il résulte de ce théorème que l'effort tranchant est positif (de bas en haut) quand le moment fléchissant décroît, et négatif quand le moment augmente.

Or, si l'on distingue sur la poutre  $A_1 A_7$  les sept intervalles :

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 M, M A_4, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 A_7$$

déterminés par les appuis et par le point d'application  $M$  de la force  $\psi$ , l'étude précédente des variations du moment fléchissant montre que dans chacune de ces intervalles ce moment croît ou décroît toujours ; il croît dans l'intervalle  $A_3M$  et dans ceux  $A_1A_2$ ,  $A_4A_5$ ,  $A_6A_7$  qui le précèdent ou qui le suivent de deux en deux rangs ; il décroît dans l'intervalle  $MA_4$  et dans ceux  $A_2A_3$ ,  $A_5A_6$  qui le précèdent ou qui le suivent de deux en deux rangs. Donc :

*L'effort tranchant conserve sa grandeur et son signe dans chacun des intervalles dans lesquels la poutre est décomposée par les appuis et le point d'application de la force  $\psi$ . Il change de signe en passant d'un intervalle à l'autre ; et, en particulier, il est positif dans la portion de la travée chargée qui est à droite de la charge.*

**221.** — Il importe de remarquer que *la position des points d'inflexion  $x$  et  $t$  est indépendante de l'intensité de la charge* ; elle ne dépend que de la position de cette charge. Cela tient à ce que si la charge  $\psi$  change de valeur, sa ligne d'action restant fixe, on peut toujours, dans la construction du polygone funiculaire  $a_3ma_4$  de cette force  $\psi$ , changer la distance polaire ou l'échelle des forces de façon que le segment  $cm$  conserve la même grandeur (fig. 98).

On voit par là que, lorsqu'on voudra étudier la manière dont les points d'inflexion se déplacent par suite du déplacement de la charge  $\psi$  dans la travée, on pourra supposer le segment  $cm$  constant, c'est-à-dire se borner à déplacer le point  $m$  sur l'horizontale  $\mu\mu'$ , ce qui simplifiera les tracés.

**222.** — La figure 98 donne lieu à quelques développements géométriques intéressants que nous utiliserons d'ailleurs à bref délai.

Prenons l'horizontale  $a_3a_4$  pour axe des  $x$ , la verticale  $a_3\mu$  pour axe des  $y$ , et donnons-nous les segments

$$a_3f_3 = a, \quad a_3a_4 = l, \quad e_2a_4 = a'$$

qui définissent la travée et ses foyers ; désignons en outre par  $u$  et  $h$  les coordonnées  $a_3c$  et  $cm$  du point  $m$ .

Il est d'abord fort aisé de calculer les ordonnées des points  $f$  et  $e$  : on a, en effet,

$$f_3 f = \frac{a}{l} \cdot A_{i+1} \alpha' = \frac{a}{l} (h + \mu x') = \frac{h}{l} [h + \frac{h}{l} (l - u)]$$

ou

$$(1) \quad f_3 f = \frac{uh}{l} \left( 2 - \frac{u}{l} \right);$$

et, l'on en déduit, en changeant  $a$  en  $-a'$ ,  $l$  en  $-l$ ,  $u$  en  $-(l - u)$  :

$$(2) \quad e_3 e = -\frac{a'h}{l} \left( 1 + \frac{u}{l} \right)$$

On peut dès lors former l'équation de la droite  $ef$ . Cette équation

$$(3) \quad l(l - a - a') \frac{y}{h} + (2a - a')x - 2a(l - \frac{3}{2}a') + \frac{u}{l} [al - (a + a')x] = 0$$

montre que quand  $u$  varie, c'est-à-dire quand le point  $m$  se déplace horizontalement, la droite  $fe$  passe par le point fixe  $\omega$  dont les coordonnées sont

$$(4) \quad x_0 = \frac{al}{a + a'} \quad y_0 = \frac{h}{l} \frac{3aa'}{a + a'}$$

La construction de ce point est facile ; le moyen qui se relie le mieux aux constructions ultérieures consiste, non à se servir

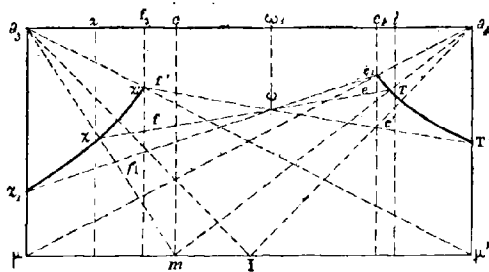


Fig. 99.

des formules (4), mais à construire, par le tracé qui a servi (n° 119) à définir la droite  $fe$ , les deux positions particulières  $f_1 e_1$ ,  $f' e'$  de cette droite qui répondent aux positions extrêmes  $\mu$  et  $\mu'$

du point  $m$ . C'est ce qu'on a fait dans la figure 99. I désignant le milieu de  $\mu\mu'$ , les points  $f_1$  et  $f'$  sont ceux où la verticale ( $f_3$ ) rencontre respectivement les droites  $a_3 I, a_3\mu'$ , et les points  $e_1$  et  $e'$  sont les intersections de la verticale ( $e_1$ ) avec les droites  $a_1\mu$  et  $a_1 I$ .

Les deux droites particulières  $e_1f_1, e'f'$  étant ainsi connues ainsi que leur point de croisement  $\omega$ , il est très aisé d'obtenir la droite  $ef$  qui répond à une position quelconque de  $m$  sur  $\mu\mu'$ ; il suffit de remarquer que, d'après la formule (1), la variation de l'ordonnée du point  $f$  est proportionnelle à la variation correspondante de l'abscisse  $u$  de  $m$ . Dès lors, si l'on divise la droite  $\mu\mu'$  en  $n$  parties égales, il suffira de diviser aussi  $f_1f'$  en  $n$  parties égales; on aura ainsi les divers points  $f$  et, par suite, en joignant ces points au point  $\omega$ , on obtiendra les points  $e$  correspondants sur  $e_1e'$ ; ces points divisent d'ailleurs aussi  $e_1e'$  en  $n$  parties égales.

En prenant l'intersection de chacune des lignes de clôture  $ef$  ainsi obtenue avec les droites correspondantes  $a_3m$  qui joignent le point  $a_3$  aux points de division de  $\mu\mu'$ , on aura autant de points qu'on voudra du lieu  $Z_1ZZ'$  du point  $Z$ , qui détermine pour chaque position de la charge la verticale du point d'inflexion de gauche. L'équation de cette courbe ( $Z$ ), lieu des points  $Z$ , résulte de l'élimination de  $u$  entre l'équation (3) de la droite  $ef$  et l'équation

$$y = \frac{h}{u} x$$

de la droite  $a_3m$ . Cette élimination est immédiate; elle donne :

$$(5) \quad (l-a-a') \left(\frac{y}{h}\right)^2 + (2a-a') \frac{x}{l} \cdot \frac{y}{h} - (a+a') \left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ - 2a \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a'}{l}\right) \frac{y}{h} + a \cdot \frac{x}{l} = 0$$

La courbe est une hyperbole, dont deux points particuliers  $Z_1$  et  $Z'$  (ou  $f'$ ) sont déjà connus; ils ont été fournis par la construction qui a servi à trouver le point  $\omega$ . On constate aisément, d'après l'équation (5), que cette courbe passe par l'origine  $a_3$ , par le point  $\omega$  et par la projection de ce point sur la poutre, et

enfin que la tangente en  $f'$  est verticale. Nous n'avons tracé que l'arc utile  $Z_1ZZ'$ .

On verrait de même que le lieu des points T est aussi un arc d'hyperbole.

On pourrait démontrer les propriétés précédentes par des considérations de géométrie projective ; mais nous avons pensé que les principes de cette géométrie étaient moins familiers à la plupart de nos lecteurs que les éléments de géométrie analytique. Le procédé est moins élégant, mais il est plus naturel.

Une fois qu'on a tracé l'arc hyperbolique  $Z_1Z'$ , on résout tout de suite le problème suivant :

$zZ$  étant une section de la poutre, située d'une manière quelconque entre un appui  $a_3$  et le foyer voisin  $f_3$ , trouver le point  $c$  où il faut appliquer la force  $\psi$ , pour que le point  $z$  soit un point d'inflexion ?

Il suffit de prendre d'abord l'intersection  $Z$  de la verticale  $zZ$  avec la branche d'hyperbole correspondante  $Z_1Z'$ , puis l'intersection  $m$  de  $a_3Z$  et de  $\mu\mu'$  ;  $mc$  sera la ligne d'action demandée.

Le point  $c$  ainsi défini reçoit le nom de *point limite* relatif à la section  $zZ$ .

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments nécessaires pour résoudre la question des charges défavorables dans une poutre continue.

**Distribution des charges uniformes produisant, dans une section donné d'une poutre continue, le moment fléchissant maximum.**

**223.** — On distingue deux cas suivant que la section donnée  $S$  est située entre les deux foyers  $F$  et  $E$  de la travée  $T$  qui contient cette section, ou en dehors de ces foyers c'est-à-dire entre l'un ou l'autre de ces foyers et l'appui voisin. En outre, dans chacun de ces cas, il y aura à étudier successivement l'influence, sur la section  $S$ , des charges qui agissent sur la travée  $T$  elle-même et celle des charges qui agissent dans les autres travées.

*Premier cas.* S est entre F et E.

Toute force appliquée à la travée T produit alors en S un moment fléchissant positif (n° 219) ; pour avoir le plus grand moment au point S, il faudra donc charger toute la travée T.

D'autre part, on sait (n° 218) que toute force agissant dans une travée quelconque produit, dans chacune des deux travées limitrophes, des moments négatifs jusqu'aux foyers les plus éloignés. Donc, pour obtenir le moment maximum en S, il faudra éviter de charger les deux travées limitrophes de T. Pour une raison analogue, les deux travées situées l'une à droite et l'autre à gauche de ces deux là devront être chargées, et ainsi de suite.

De là ce théorème :

*S étant un point quelconque compris entre les deux foyers d'une travée, pour avoir le moment fléchissant maximum au point S, il faut charger entièrement la travée T ainsi que celles qui la précèdent ou qui la suivent d'un nombre pair de rangs.*

Il est clair qu'on obtiendrait en S le moment fléchissant négatif dont la valeur absolue est maximum, en adoptant la charge complémentaire, c'est-à-dire en laissant vides les travées que l'on devait charger tout à l'heure et en chargeant celles que l'on devait laisser vides.

*Deuxième cas.* S est entre un foyer et l'appui voisin.

Considérons d'abord l'action sur le point S de la travée T.

Supposons, pour fixer les idées, S situé entre l'appui de gauche et le foyer de gauche, et soit  $\sigma$  le point limite relatif à la section S (n° 222). Toute charge  $\psi$  appliquée à un point  $c$  de la travée située à gauche de  $\sigma$  produit en S un moment fléchissant positif. En effet, cette force produit un moment positif en son point d'application  $c$  ainsi qu'en tous les points situés entre  $c$  et le point d'inflexion  $z$  correspondant, car ce n'est qu'en  $z$  que le moment produit par les forces  $\psi$  change de signe. Or, il résulte de la disposition de l'arc hyperbolique, que  $c$  étant à gauche de  $\sigma$ ,  $z$  est à gauche de S, c'est-à-dire que S est compris entre  $c$  et  $z$  ; donc le moment fléchissant que la force  $\psi$



produit en  $S$  est positif. — On verrait de même que toute charge appliquée à un point de la travée situé à droite de  $\sigma$  produit en  $S$  un moment fléchissant négatif. — Donc, pour avoir le moment fléchissant maximum en  $S$ , il faut charger la partie comprise entre l'appui de gauche et le point  $\sigma$ , et laisser vide l'autre partie de la travée  $T$ .

Ce serait au contraire la partie située entre l'appui de droite et le point limite  $\sigma$  qu'il faudrait charger, si le point  $S$  était entre le foyer de droite et l'appui de droite.

Quant à l'influence des travées autres que  $T$ , on voit, comme dans le premier cas, que ces travées doivent être chargées de deux en deux, de façon que à côté de la partie chargée de la travée  $T$  se trouve une travée vide et que à côté de la partie vide de la travée  $T$  se trouve une travée chargée.

De là ce théorème :

*S étant un point quelconque d'une travée  $T$ , compris entre ce foyer et l'appui voisin, pour avoir le moment fléchissant maximum en  $S$ , il faut charger : 1° la partie de  $T$  comprise entre le point limite  $\sigma$  relatif à  $S$  et l'appui qui est du même côté que  $S$  par rapport à  $\sigma$  ; 2° les autres travées de deux en deux, de façon que la travée contigüe à la partie chargée de  $T$  soit vide et que la travée contigüe à la partie vide de  $T$  soit chargée.*

On obtiendrait d'ailleurs au point  $S$  le moment fléchissant négatif dont la valeur absolue est maximum, en adoptant la charge complémentaire de celle que nous venons d'indiquer.

### **Distribution des charges uniformes produisant dans une section donnée l'effort tranchant maximum.**

**221.** — Puisque, d'après le n° 220, l'effort tranchant en  $S$  est positif ou négatif suivant que la charge appliquée à la travée  $T$  est à droite ou à gauche de la section, il faudra, pour avoir l'effort tranchant maximum en  $S$ , charger la partie de la travée comprise entre le point  $S$  et l'appui de droite.

D'autre part, nous savons (n° 220) que toute force agissant dans une travée quelconque détermine, dans les travées qui

précédent, des efforts tranchants alternativement négatifs et positifs, et, dans les travées qui suivent, des efforts tranchants alternativement positifs et négatifs. Il suit de là que, pour avoir en S l'effort tranchant maximum, on devra, parmi les travées qui précèdent T, charger la première, la troisième, la cinquième... et, parmi les travées qui suivent T, charger la seconde, la quatrième, etc...

De là ce théorème :

*S étant un point quelconque d'une travée T, pour avoir l'effort tranchant maximum dans la section S, il faut charger : 1° la partie de la travée T qui est comprise entre S et l'appui de droite ; 2° les autres travées de deux en deux, de façon que la travée contiguë à la partie chargée de T soit vide et que la travée contiguë à la partie vide de T soit chargée.*

Cette règle est relative aux efforts tranchants positifs (dirigée de haut en bas). Pour avoir, en S, l'effort tranchant négatif (de bas en haut) dont la valeur absolue est maximum, il suffit d'adopter la charge complémentaire de celle qui vient d'être prescrite. Cela revient tout simplement à changer, dans l'énoncé qui précède, les mots « appui de droite » en « appui de gauche. »

**225.** — Les trois règles fort simples qui précèdent font connaître la combinaison des charges uniformes capable de produire en un point donné S de la poutre le moment fléchissant ou l'effort tranchant maximum. Puis, en appliquant à ce système de charges la méthode du chapitre précédent, on trouvera les valeurs effectives de ce moment ou de cet effort.

En faisant cette opération pour un nombre suffisant de points S de la poutre, puis portant en chaque point S, perpendiculairement à la poutre, une ordonnée égale à la valeur trouvée pour le moment fléchissant ou l'effort tranchant en ce point, on obtiendra la courbe des moments fléchissants maximums et celle des efforts tranchants maximums.

Il resterait ici bien des détails à donner au point de vue pratique ; mais ces détails ont leur place marquée dans le vo-

lume de l'Encyclopédie relatif aux *Applications de la statique graphique*, et nous ne saurions empiéter sur le domaine réservé à M. Kœchlin dont chacun connaît la compétence en ces matières.

### Dénivellation des appuis.

**226.** — Nous avons supposé jusqu'ici que tous les appuis étaient de niveau ; c'est ainsi qu'on cherche à les placer dans la pratique ; mais malgré toutes les précautions, les erreurs de nivellement et les tassements des supports entraînent de légères dénivellations dont il faut savoir apprécier l'influence.

Nous admettrons que les dénivellations soient assez faibles pour qu'on ait le droit de négliger, par rapport à la distance de deux appuis consécutifs quelconques, la différence entre cette distance et la longueur de sa projection horizontale ; c'est cette dernière longueur qu'on nomme *longueur de la travée*. Dans cette hypothèse, les forces extérieures (charges et réactions), qui sont verticales, resteront sensiblement normales à la poutre et l'équation différentielle trouvée au n° 79 pour la ligne élastique subsistera, ainsi que la proposition du n° 80 qui en est la conséquence.

Nous désignerons les appuis par  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  et nous ne marquerons sur l'épure que les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  qui représentent leurs projections sur l'horizontale  $A_1x$  passant par le premier appui. Nous nommerons en général  $Z_i$  la différence de niveau vraie des appuis  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_i$ , cette distance étant évaluée en prenant le mètre pour unité ; ces quantités  $Z_i$  sont des données de la question.

Il s'agit d'examiner quels sont, dans la solution précédente qui est relative au cas des appuis de niveau, les tracés qui subsistent et ceux qu'il faut modifier dans le cas où les hauteurs des appuis diffèrent.

Le théorème du n° 192 subsiste intégralement, car les points  $C_i$  et  $C_{i+1}$  peuvent (n° 191) occuper une position quelconque sur les droites qui représentent les verticales des appuis ; on

peut donc les placer en  $A_i$  et  $A_{i+1}$ . Les positions des verticales trissectrices, des contreverticales, des foyers ne dépendent que des longueurs des travées, c'est-à-dire de la distribution des points  $A_i$  sur l'horizontale  $A_1x$ ; rien n'est donc à changer dans les règles données pour les construire. Mais il n'en est pas de même des points fixes.

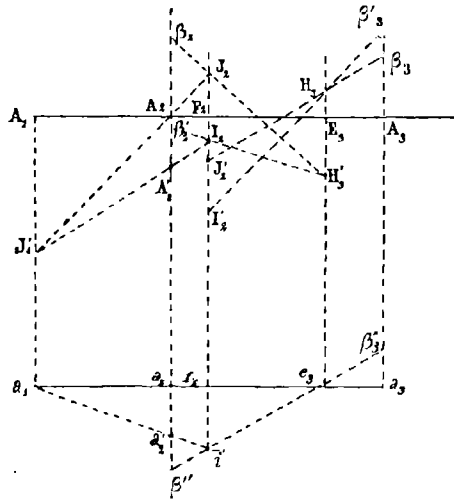
Si l'on examine avec attention les raisonnements faits aux n<sup>os</sup> 195, 196, 204, on voit qu'ils ne subsistent ici qu'à la condition de substituer aux points  $A_i$  les points  $A'_i$  qui sont les intersections des verticales ( $A_i$ ) et de la courbe homographique  $\varepsilon_1$  de la ligne élastique. C'était, en effet, à ce titre que les points  $A_i$  jouaient un rôle dans la détermination des points fixes et des moments sur piles. Lorsque ces points  $A_i$  représentaient les appuis, les ordonnées correspondantes de la ligne élastique étaient nulles et par suite aussi celles de la courbe homographique  $\varepsilon_1$  qui n'en diffèrent que par un facteur constant  $q$ . Dans notre hypothèse actuelle, les ordonnées des appuis, qui appartiennent d'ailleurs toujours à la ligne élastique, ne sont plus nulles; le facteur  $q$ , par lequel il faut les multiplier pour avoir les ordonnées correspondantes de  $\varepsilon_1$ , a son plein effet, et les points  $A'_i$ , qui doivent dans la suite du tracé remplir actuellement l'office que remplissaient dans le cas primitif les points  $A_i$ , ont des ordonnées données par la formule

$$A_i A'_i = Z_i \cdot q.$$

C'est donc dans la substitution des points  $A'_i$  aux points  $A_i$ , pour la construction des points fixes et des moments sur piles, que consiste toute la différence entre le nouveau cas et l'ancien. La marche est la même, mais les valeurs des moments sur piles, sinon la règle graphique qui les donne, éprouvent de notables changements.

Pour ne laisser aucune obscurité sur la manière d'opérer, voici l'épure pour le cas où, par exemple, tous les appuis, sauf le second auraient le même niveau. Le point  $A_2$  représente alors la projection du second appui sur l'horizontale  $A_1x$  qui renferme les autres (fig. 100). On prendra le segment vertical  $A_2 A'_2 = qZ_2$ ; puis après avoir placé les foyers, on cherchera les

points fixes. Il est clair que dans notre exemple les points fixes  $\Pi_3, \Pi'_3 \dots \Pi_n, \Pi'_n$ , n'auront subi aucun changement. Mais il n'en sera pas de même des points fixes de première espèce que nous désignerons par  $I_i, I'_i$  pour les distinguer de ceux  $J_i, J'_i$  qui existeraient s'il n'y avait pas de dénivellation.  $J'_1$  s'obtient, comme on sait, à l'aide des lignes croisées de la première travée ;  $J_2$  en résulte par la rencontre de  $J'_1 A_2$  et de la verticale ( $F_2$ ) ; puis, le segment  $J_2 J'_2$  est donné par les lignes croisées de



la deuxième travée... etc. Les lignes croisées ne changeant pas  $I'_1$  se confondra avec  $J'_1$  ; mais  $I_2$  sera à la rencontre de la verticale ( $F_2$ ) et de la droite  $J'_1 A'_3$  ; puis, on aura  $I'_2$  en prenant  $I_2 I'_2 = J_2 J'_2$  ; etc. En joignant en croix les points  $J_2, J'_2, H_3, H'_3$  on obtient les segments  $A_2 \beta_2, A_3 \beta_3$  qui représentent les moments sur piles dans l'hypothèse où tous les appuis seraient de niveau ; en joignant en croix les points  $I_2, I'_2, H_3, H'_3$ , on obtient  $A'_2 \beta'_2, A_3 \beta'_3$  qui représentent les moments sur piles dans le cas où l'appui  $A_2$  est au dessous des autres.

227. — Les changements des moments sur piles par suite de la dénivellation des appuis sont indépendants des charges.

Cette proposition est une conséquence du principe de superposition des effets des forces. Mais il est bien aisé de la démontrer ici sur l'exemple considéré.

Dans ce but, nous avons fait, en dessous de l'épure précédente, celle qui conviendrait au cas où, les appuis conservant les mêmes positions que ci-dessus, la poutre n'aurait ni poids ni surcharge ; les points correspondants des deux dessins ont été marqués par les mêmes lettres majuscules dans la figure supérieure, minuscules dans la figure inférieure. En l'absence de toute charge, dans chaque travée les deux lignes croisées coïncident et par suite les deux points fixes de même espèce se confondent en un seul. Ainsi les points  $J_1$  et  $J'_1$  sont en  $a_1$ ,  $J_2$  et  $J'_2$  en  $f_2$ ,  $H_3$  et  $H'_3$  en  $e_3$  ; enfin  $I_2$  et  $I'_2$  sont en  $i$  à la rencontre de  $a_1 a'_2$  et de la verticale ( $f_2$ ). On voit par là que les moments sur piles sont nuls dans le cas où les appuis sont de niveau, en sorte que les segments  $a'_2 \beta''_2$ ,  $a_3 \beta''_3$ , qui représentent leurs valeurs dans le cas où l'appui  $A_2$  est abaissé, sont précisément les variations qu'ils reçoivent par suite de la dénivellation. Il faut donc prouver l'égalité

$$A_2 \beta_2 - A'_2 \beta'_2 = - a'_2 \beta''_2$$

ou, en retranchant de part et d'autres les longueurs égales  $A_2 A'_2$ ,  $a_2 a'_2$

$$\beta_2 \beta_2 = a_2 \beta''_2.$$

Or le rapport de ces segments est le même que celui de  $J_2 I_2$  à  $f_2 i$  ; ou encore le même que le rapport de  $A_2 A'_2$  à  $a_2 a'_2$ , qui est égal à l'unité.

**228.** — Il résulte de cette proposition que l'influence des abaissements des appuis peut être déterminée à part et même à l'avance, et que l'épure à faire pour cela est d'une grande simplicité puisqu'on y suppose, comme dans la partie inférieure de la figure 100, la poutre sans poids ni surcharge. Les moments sur piles ainsi trouvés devront être ajoutés ensuite à ceux que donnent les charges en supposant les appuis de niveau.

Il résulte aussi de la même proposition que les combinaisons de charges défavorables sont les mêmes, que les appuis aient

la même hauteur ou non. Il n'y a donc pas à revenir sur ce que nous avons dit à ce sujet (n° 223).

**Autre méthode pour la poutre continue. Réduction du problème à la construction d'un polygone auxiliaire.**

229. — Un jeune ingénieur fort distingué, M. Bertrand de Fontvioland, a proposé, dans les *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils* (1886), pour le problème de la poutre continue, une modification de la solution de Mohr, qui mérite d'être remarquée. Nous aurions pu abrégé l'exposition de ce nouveau procédé en profitant des développements donnés dans le chapitre précédent ; mais nous avons préféré, pour bien dégager la méthode, en présenter une exposition directe et indépendante de toute notion préalable sur la théorie de la poutre continue.

Nous devons placer avant tout une observation concernant la poutre dont les extrémités seules reposent sur deux appuis, que nous supposons d'ailleurs simples et de même niveau. Si l'on donne les verticales suivant lesquelles agissent les charges concentrées  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , auxquelles elle est soumise (fig. 60), ainsi que le diagramme  $a\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4b$  des moments fléchissants, on peut trouver la grandeur des charges  $F_1, F_2, F_3, F_4$ ; il est d'ailleurs sous entendu qu'on donne aussi les échelles  $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\rho}$  des longueurs, des forces et des moments fléchissants. Il suffit d'exécuter en ordre inverse les tracés du n° 103. On prendra donc à volonté un pôle  $\pi$  à une distance

$$\delta = \frac{\rho}{\lambda\varphi}$$

d'une verticale quelconque, et, par ce pôle, on mènera, jusqu'à leur rencontre avec cette verticale, les rayons  $\pi a_1, \pi a_2, \pi a_3, \pi a_4, \pi a_b$  respectivement parallèles aux côtés successifs  $a\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4, \alpha_4b$  de la ligne funiculaire donnée. On obtiendra ainsi les vecteurs  $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_b$ , et par suite, en multipliant par  $\varphi$ , les intensités des forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ .

230. — Cela posé, considérons une poutre continue à  $n$  ap-

puis, simples et de niveau. Soit  $A_1 A_n$  la droite qui la représente sur l'épure, et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les points qui figurent les appuis. Les charges verticales qui sollicitent la poutre sont d'ailleurs quelconques, concentrées ou réparties (fig. 101).

En supprimant les piles intermédiaires  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ , et appliquant aux points  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$  de la poutre des forces  $R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$  égales aux réactions de ces piles, on ramène la question à l'étude d'une poutre à deux appuis  $A_1$  et  $A_n$ , sollicitée à la fois par les charges données  $P$  et par des forces inconnues  $R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$ .

Désignons par  $A_1 p_2 \dots p_i p_{i+1} \dots p_{n-1} A_n$  le diagramme des moments fléchissants que développeraient, dans cette poutre à deux appuis, les charges  $P$  si elles agissaient seules, et par  $A_1 r_2 \dots r_i r_{i+1} \dots r_{n-1} A_n$  le diagramme analogue pour le cas où les forces  $R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$  agiraient seules. Ce sont deux li-

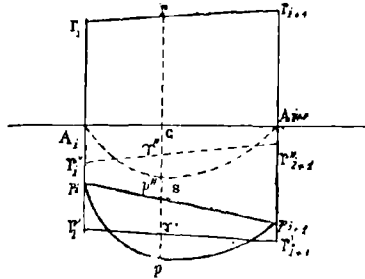


Fig. 101.

gnes funiculaires, passant l'une et l'autre par  $A_1$  et  $A_n$ , et supposées relatives à une même distance polaire d'ailleurs quelconque  $\delta$ . La ligne  $A_1 r_2 \dots r_{n-1} A_n$  est polygonale, puisque les forces  $R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$  sont isolées, tandis que la ligne  $A_1 p_2 \dots p_{n-1} A_n$  peut être polygonale, courbe ou mixte, suivant la nature des charges  $P$ .

Soit  $A_1 r'_2 \dots r'_{n-1} A_n$  le polygone symétrique de  $A_1 r_2 \dots r_{n-1} A_n$  par rapport à l'horizontale  $A_1 A_n$ .

Enfin,  $p_i$  désignant en général le point où la verticale du point  $A_i$  rencontre le diagramme  $A_1 p_2 \dots p_{n-1} A_n$ , menons les cordes  $A_1 p_2, p_2 p_3, \dots, p_i p_{i+1}, \dots, p_{n-1} A_n$ . Le polygone inscrit dont ces cordes sont les côtés successifs peut être considéré



comme le diagramme des moments fléchissants que développerait dans la poutre à deux appuis  $A_1$  et  $A_n$  un système bien défini (n° 229) de forces  $F_2, F_3, \dots, F_{n-1}$  concentrées et appliquées aux points  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ , ce diagramme étant d'ailleurs relatif à la distance polaire  $\delta$  déjà considérée.

Soient  $C, p, s, r, r'$ , les points où une verticale quelconque rencontre respectivement la poutre, la ligne funiculaire  $A_1 p_2 \dots p_{n-1} A_n$ , le polygone inscrit et les polygones symétriques  $A_1 r_2 \dots r_{n-1} A_n$ ,  $A_1 r'_2 \dots r'_{n-1} A_n$ . Les segments

$$Cp, \quad Cs, \quad Cr$$

représentent à l'échelle  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda \rho \delta}$ , les moments fléchissants produits sur la poutre à deux appuis, respectivement par les charges  $P$ , par les forces  $F_2, \dots, F_{n-1}$  et par les réactions  $R_2, \dots, R_{n-1}$ . Par suite les segments

$$Cp - Cs = sp, \quad Cr + Cs = Cs - Cr' = -sr' = r's,$$

multipliés par  $\rho$ , expriment les moments fléchissants développés, d'une part par les charges  $P$  et les forces  $(-F_2), \dots, (-F_{n-1})$ , et de l'autre par les forces  $(R_2 + F_2), \dots, (R_{n-1} + F_{n-1})$ .

Or, en vertu du principe de superposition des effets des forces, la somme

$$\rho \cdot sp + \rho \cdot r's$$

représente le moment produit, dans la poutre à deux appuis  $A_1, A_n$ , par l'influence simultanée des deux groupes de forces

$$P, \quad (-F_2), \quad \dots, \quad (-F_{n-1}) \\ (R_2 + F_2), \quad \dots, \quad (R_{n-1} + F_{n-1})$$

c'est-à-dire par l'action simultanée des charges  $P$ , et des réactions  $R_2, \dots, R_{n-1}$ . Le moment représenté par la somme ci-dessus est donc le *moment fléchissant effectif de la poutre continue* au point  $C$ .

Des deux moments partiels

$$\rho \cdot sp \quad , \quad \rho \cdot r's$$

en lesquels se trouve ainsi décomposé le moment effectif de la poutre continue, le premier  $\rho.sp$  est connu, car rien n'empêche de construire immédiatement la ligne funiculaire  $A_1 p_2 \dots p_{n-1} A_n$  et son polygone inscrit; le second  $\rho.r's$ , que nous nommerons *moment complémentaire* au point C, reste donc la seule inconnue de la question.

Remarquons d'ailleurs que sur chaque pile  $A_i$  l'ordonnée  $sp$  s'annule et par suite aussi le moment partiel  $\rho.sp$ ; donc, tandis que, pour un point quelconque de la poutre, le moment effectif diffère du moment complémentaire, sur chaque pile ces moments deviennent égaux; on leur donne le nom de *moments sur piles*.

Ce sont ces moments sur piles :

$$\dots \rho \cdot r'_i p_i, \quad \rho \cdot r'_{i+1} p_{i+1}, \quad \dots$$

qu'il suffit de déterminer; car, les lignes  $p_i p_{i+1}$  et leurs cordes étant tracées, dès qu'on aura en outre les segments verticaux  $p_i r_i$ ,  $p_{i+1} r_{i+1}$ , les trapèzes tels que  $p_i p_{i+1} r_{i+1} r_i$  seront déterminés et par suite aussi tous les moments complémentaires  $\rho.r's$ .

**231.** — Considérons maintenant la ligne élastique de la poutre continue ou plutôt la courbe homographique  $\varepsilon_1$  de cette ligne. Soient  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  les courbes homographiques des lignes élastiques relatives, à la poutre à deux appuis  $A_1 A_n$  sollicitée, d'abord seulement par les charges P et les forces  $(-F_2) \dots, (-F_{n-1})$ , puis seulement par les forces  $(R_2 + F_2) \dots, (R_{n+1} + F_{n-1})$ . Il résulte du principe de superposition des effets des forces que, si l'on suppose les trois courbes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  construites avec le même coefficient  $q$  de réduction, et si l'on désigne respectivement par  $y_1, y_2, y_3$  leurs ordonnées comptées, sur une même verticale quelconque, à partir du point C où cette verticale rencontre l'horizontale  $A_1 A_n$  des appuis considérée comme axe des  $x$ , on aura, en grandeur et en signe,

$$y_1 = y_2 + y_3.$$

Or, sur les appuis  $y_1$  est nulle; donc, sur un appui quelconque

$A_i$ , les ordonnées  $y_2$  et  $y_3$  ont des valeurs  $(y_2)_i, (y_3)_i$  égales et de signes contraires.

Mais les valeurs  $(y_2)_i$  sont connues. En effet nous avons appris au n° 124 à construire la courbe homographique d'une poutre à deux appuis sollicitée par des charges quelconques dès qu'on connaît le diagramme des moments produits par les charges. Or, c'est ici le cas pour la courbe  $\epsilon_s$ ; le diagramme correspondant est celui des premiers moments partiels c'est-à-dire le diagramme formé sur la ligne funiculaire  $A_i p_2 \dots p_i p_{i+1} \dots p_{n-1} A_n$  et son polygone inscrit  $A_i p_2 \dots p_i p_{i+1} \dots p_{n-1} A_n$ . La règle donnée au n° 124 permettrait de construire la courbe  $\epsilon_s$ , c'est-à-dire d'obtenir toutes les valeurs de  $y_2$  et en particulier les valeurs  $(y_2)_i$ . Comme nous ne voulons que ces dernières, il suffira de faire les opérations graphiques suivantes : on mesurera pour chaque travée  $A_i A_{i+1}$  l'aire  $\sigma_i$  comprise entre la ligne  $p_i p_{i+1}$  et sa corde ; on déterminera (fig. 102) la verticale  $(C_i)$  du centre de gravité de cette aire, verticale que nous nommerons *verticale principale* de la travée ; puis, à l'aide d'une distance polaire  $\Delta$  prise à volonté sur l'épure, on construira le polygone funiculaire qui passe par  $A_i$  et  $A_n$  et qui est relatif aux forces fictives  $V_i$  ayant pour vecteurs

$$v_i = \frac{\sigma_i}{k}$$

et pour lignes d'actions les verticales principales. Les ordonnées  $A_i A'_i$  de ce polygone funiculaire relatives aux points  $A_i$  seront

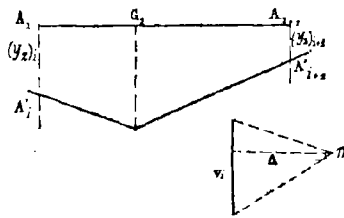


Fig. 102.

les valeurs  $(y_2)_i$ . Quant au paramètre  $k$ , on le choisira à volonté comme  $\Delta$ , ce qui fixera la valeur du coefficient  $q$  de réduction

des courbes homographiques considérées, en vertu de la relation (4) du n° 195.

Les ordonnées  $(y_2)_i$  étant connues, il en est de même des ordonnées  $(y_3)_i$  qui leurs sont égales et de signes contraires. Mais la courbe  $\epsilon_3$  est relative à la poutre à deux appuis  $A_1 A_n$  supposée sollicitée par les seules forces  $(R_2 + F_2), \dots (R_{n-1} + F_{n-1})$ . La question se trouve donc ramenée à la suivante :

Connaissant les ordonnées  $(y_3)_i$  de la courbe homographique  $\epsilon_3$  d'une poutre à deux appuis  $A_1 A_n$ , aux points d'application  $A_2 \dots A_{n-1}$  de forces inconnues  $(R_2 + F_2), \dots (R_{n-1} + F_{n-1})$ , trouver les moments fléchissants que ces forces développent en leurs points d'application c'est-à-dire les moments que nous avons appelés moments sur piles.

**232.** — Les points actuellement connus de la courbe  $\epsilon_3$  sont les symétriques par rapport à  $A_1 A_n$  des points  $A'_i$  fournis par la construction du numéro précédent ; mais, on peut, en renversant tous les signes, substituer à la courbe  $\epsilon_3$  sa symétrique  $\epsilon'_3$  laquelle passe alors par les points  $A'_i$  eux-mêmes.

Désignons par  $M_i$  les moments sur piles ; imaginons en chaque point  $A_i$  une ordonnée  $A_i \mu_i$  égale à

$$-\frac{M_i}{\rho}$$

et traçons le polygone  $A_1 \mu_2 \dots \mu_i \mu_{i+1} \dots \mu_{n-1} A_n$ .

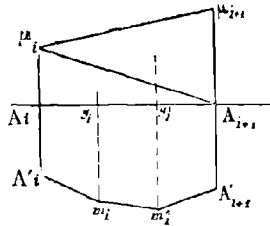


Fig. 103.

$A_i A_{i+1}$  étant une travée intermédiaire quelconque (fig. 103) décomposons le trapèze  $A_i \mu_i \mu_{i+1} A_{i+1}$  en deux triangles par

l'une de ses diagonales ; désignons par  $\theta_i, \theta'_i$  les aires des deux triangles  $A_i \mu_i A_{i+1}$  et  $u_i A_{i+1} \mu_{i+1}$  et par  $(g_i), (g'_i)$  les verticales qui passent par les centres de gravité de ces triangles. Ces verticales peuvent être tracées *à priori* puisqu'elles divisent la longueur de la travée en trois parties égales ; on leur donne le nom de *verticales trissectrices*. Considérons les forces fictives  $U_i$  et  $U'_i$  qui, ayant pour vecteurs

$$u_i = -\frac{\theta_i}{k} \quad u'_i = -\frac{\theta'_i}{k},$$

agiraient suivant les verticales trissectrices  $(g_i), (g'_i)$  ; concevons le polygone funiculaire de trois côtés  $A'_i m' m'_i A'_{i+1}$  qui,

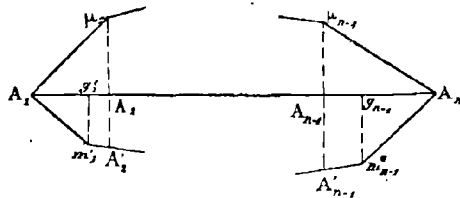


Fig. 104.

passant par  $A'_i$  et  $A'_{i+1}$  est relatif aux deux forces  $U_i$  et  $U'_i$  et a pour distance polaire  $\Delta$  ;  $\Delta$  et  $k$  ont ici les valeurs déjà adoptées précédemment. Dans chaque travée intermédiaire on aura un tel polygone ; mais (fig. 104) dans les travées de rive  $A_1 A_2$  et  $A_{n-1} A_n$  les deux polygones correspondants  $A_1 m'_1 A_2, A'_{n-1} m'_{n-1} A_n$  n'ont que deux côtés, les verticales trissectrices les plus voisines des culées  $A_1$  et  $A_n$  ne jouant aucun rôle, puisqu'on a des simples triangles  $A_1 \mu_2 A_2, A_{n-1} \mu_{n-1} A_n$  au lieu de trapèzes.

L'ensemble des polygones ainsi définis pour les diverses travées forme ce que nous appellerons le *polygone auxiliaire*<sup>1</sup> de la poutre continue. Ce polygone a en apparence

$$2 + 3(n - 3) + 2 = 3n - 5$$

1. Nous employons ici cette dénomination, et non celle du *second polygone funiculaire*, pour éviter la confusion avec le *second polygone funiculaire* de Mohr, qui n'est pas le même que ce *polygone auxiliaire*.

côtés,  $n$  étant le nombre des appuis ; en réalité, il n'en a que

$$3n - 5 - (n - 2) = 2n - 3,$$

vu que le dernier côté de chacun des polygones partiels coïncide avec le premier côté du suivant.

Pour le démontrer, remarquons que la ligne  $\epsilon'_3$  passe par les points  $A_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}, A_n$  et n'a en chacun d'eux, à cause de la continuité, qu'une seule tangente. Or cette courbe est une ligne funiculaire, de distance polaire  $\Delta$ , pour une charge représentée par l'aire comprise entre l'horizontale  $A_1A_n$  et le contour polygonal  $A_1\mu_2 \dots \mu_i\mu_{i+1} \dots \mu_{n-1}A_n$ . Désignons par  $t_i$  la tangente en  $A'_i$  à la courbe  $\epsilon'_3$  et considérons la partie de cette courbe qui est relative à la travée quelconque  $A_iA_{i+1}$ ; on sait (n° 34) que le polygone funiculaire  $A'im'im'_iA'_{i+1}$  a ses côtés extrêmes  $A'im_i$  et  $m'_iA'_{i+1}$  dirigés suivant les tangentes  $t_i, t_{i+1}$ . Le même raisonnement appliqué à la travée précédente prouverait que le côté  $m'_{i-1}A'_i$  se confond avec  $t_i$ . Donc les deux côtés  $m'_{i-1}A'_i$  et  $A'im_i$  sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Il est clair que si l'on savait construire le polygone auxiliaire on pourrait d'après la règle indiquée au n° 229, remonter aux vecteurs  $u_i$  et  $u'_i$  des forces fictives correspondantes ; on connaîtrait donc les aires  $\theta_i, \theta'_i$  et par suite, comme ces aires sont égales à

$$\frac{1}{2} A_i A_{i+1} \cdot A_i \mu_i \quad , \quad \frac{1}{2} A_i A_{i+1} \cdot A_{i+1} \mu_{i+1}$$

on aurait les ordonnées  $A_i\mu_i$  qui, multipliées par  $p$ , donneraient les moments sur piles  $M_i$ .

Toute la question se réduit donc, en dernière analyse, à la construction du polygone auxiliaire.

### Construction du polygone auxiliaire.

**233.** — Avant de procéder à la construction de ce polygone, nous devons donner quelques définitions.

Deux d'entre elles, celles des *contreverticales* et des *foyers*,

ne dépendent pas des charges, mais seulement des longueurs des travées successives. Nous les avons données avec détail aux n<sup>os</sup> 199, 200 et 201 auxquels le lecteur n'a qu'à se reporter, vu qu'il n'y a pas un mot à changer.

A ces deux définitions, il faut en joindre une troisième, celle des *pivots*<sup>1</sup>, que nous allons indiquer.

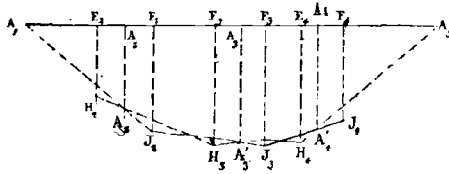


Fig. 105.

Soient  $A_1, F_2, F_3, F_4$  les foyers de gauche (fig. 105) de la poutre que, pour fixer les idées, nous supposons à 5 appuis  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , et par suite à 4 travées. Joignons le premier foyer  $A_1$  au point  $A'_2$  et soit  $J_1$  l'intersection de  $A_1A'_2$  et de la verticale du foyer  $F_2$ . Menons de même  $J_2A'_3$  jusqu'à sa rencontre  $J_2$  avec la verticale de  $F_3$ , puis  $J_3A'_4$  jusqu'à sa rencontre  $J_3$  avec la verticale de  $F_4$ . Les points ainsi obtenus,  $J_1, J_2, J_3, J_4$ , prendront le nom de *pivots de première espèce*. Il y en a un sur la verticale de chaque foyer de gauche, à condition de compter parmi les pivots le point  $A_1$  avec lequel sont de la sorte confondus les points  $F_1$  et  $J_1$ .

En partant de  $A_5$  et opérant de la même manière sur les foyers de droites  $A_5$  ou  $E_5, E_4, E_3, E_2$  on obtient une autre série de points  $II_2, II_3, II_4, II_5$  ou  $A_5$ , que nous nommons *pivots de seconde espèce*; il y en a un sur la verticale de chaque foyer de droite.

**234.** — Cela posé, voici le théorème qui permet de tracer le polygone auxiliaire.

*Tout côté de rang impair  $m$ <sup>me</sup> du polygone auxiliaire passe par les deux pivots  $J_i$  et  $II_{i+1}$  de la travée correspondante  $A_i A_{i+1}$ .*

1. Nous employons cette dénomination, au lieu de celle de *points fixes*, afin qu'on ne confonde pas les *pivots* avec les *points fixes* de la méthode de Mohr

Pour le prouver, nous observerons d'abord que deux côtés de rang impair consécutifs quelconques  $m_{i-1}m'_{i-1}$  et  $m_i m'_i$  se coupent sur la contreverticale  $(\gamma_i)$  de l'appui situé entre ces

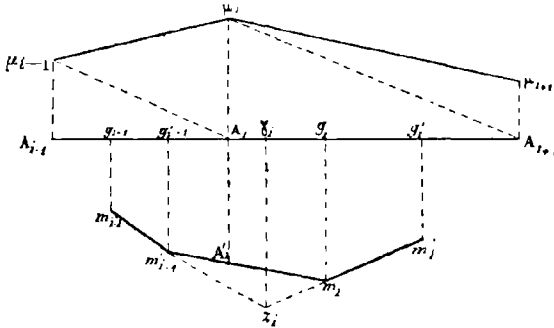


Fig. 106.

côtés. En effet les deux côtés en question doivent (n° 38) se croiser sur la ligne d'action de la résultante des forces  $U'_{i-1}$  et  $U_i$  comprises entre eux (fig. 106). Or ces forces agissent suivant les verticales trissectrices  $(g'_{i-1})$  et  $(g_i)$ ; leur résultante a pour ligne d'action la verticale qui divise  $g'_{i-1}g_i$  en deux parties inversement proportionnelles à leurs intensités, c'est-à-dire aux aires des triangles  $\mu_{i-1}\mu_i A_i$ ,  $A_i \mu_i A_{i+1}$ . Mais ces deux triangles de même base  $A_i \mu_i$  sont proportionnels à leurs hauteurs  $A_{i-1} A_i$ ,  $A_i A_{i+1}$  ou encore aux segments  $g'_{i-1} A_i$ ,  $A_i g_i$ ; la ligne d'action de la résultante en question est donc la verticale qui par-

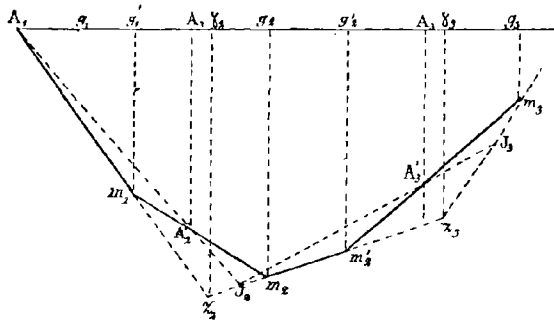


Fig. 107.



lage  $g'_{i-1}g_i$  en deux parties directement proportionnelles à  $g'_{i-1}\gamma_i$  et  $\gamma_i g_i$ , c'est-à-dire précisément la contreverticale ( $\gamma_i$ ).

Cela dit, considérons (fig. 107) le polygone auxiliaire  $A_1m_1A'_2m_2m'_2A'_3\dots$ . Soit  $z_1$  le point où le premier côté va rencontrer la contreverticale ( $\gamma_2$ ) et  $m_2$  le point où le second côté va couper la verticale trissectrice ( $g_2$ ), le troisième côté  $m_2m'_2$  sera d'après l'alinéa précédent, le prolongement de  $z_1m_2$ ; mais, d'après la construction des pivots, le point où la droite  $A_1A'_2$  rencontre  $z_1m_2$ , est précisément le pivot  $J_2$ ; donc le troisième côté passe par  $J_2$ . En raisonnant à partir de  $J_2$ , comme on vient de le faire à partir de  $J_1$  (ou  $A_1$ ), on verra de même que le cinquième côté passe par  $J_3$ , et ainsi de suite.

Il est donc établi que les côtés de rang impair passent par les pivots de gauche situés dans leurs travées respectives.

On prouverait de même, en partant de l'autre travée de rive  $A_{n-1}A_n$ , que ces mêmes côtés passent par les pivots de droite, ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

On pourra donc tracer les côtés de rang impair puisque on aura deux points de chacun d'eux. Comme vérification, deux côtés de rang impair consécutifs devront se croiser sur la contreverticale de l'appui situé entre eux.

Enfin, en joignant l'extrémité  $m'_{i-1}$  d'un côté quelconque  $m_{i-1}m'_{i-1}$  de rang impair à l'origine  $m_i$  du côté de rang impair suivant  $m_im'_i$ , on aura le côté de rang pair  $m'_{i-1}m_i$  compris entre eux; et, comme nouvelle vérification, ce côté devra passer par le sommet  $A_i$ .

### Résumé et observations.

**235.** — Telle est la méthode de M. de Fontvioland.

Nous n'avons qu'à renvoyer aux n° 207 pour les efforts tranchants et les réactions d'appuis.

Mais nous devons ajouter encore deux remarques, l'une sur la détermination des premiers moments partiels, l'autre sur la dénivellation des appuis.

Au lieu de construire (n° 230) la ligne funiculaire  $A_1p_2\dots p_{n-1}A_n$  et son polygone inscrit (fig. 101), il vaut mieux, en pra-

tique, pour déterminer les premiers moments partiels tels que  $\rho$ . *sp*, employer le procédé suivant :

On commencera par construire, avec la même distance polaire  $\delta$ , pour chaque travée  $A_i A_{i+1}$  considérée comme indépendante, la ligne funiculaire  $A_i p'' A_{i+1}$  qui passe par les extrémités de cette travée. Cette ligne est indiquée en pointillé sur la figure. L'ensemble de ces lignes relatives aux diverses travées a reçu le nom de *premier polygone funiculaire* de la poutre continue. L'ordonnée  $cp''$  de ce polygone, pour un point quelconque  $c$  de la poutre, est précisément égale à  $sp$ . En effet, la ligne  $p_i p_{i+1}$  est aussi une ligne funiculaire de distance polaire  $\delta$ , pour celles des charges  $P$  qui s'exercent sur la travée considérée comme indépendante, et la corde  $p_i p_{i+1}$  est sa ligne de fermeture ; les ordonnées  $sp$  et  $cp''$ , représentant dès lors le même moment et à la même échelle, sont égales.

Les premiers moments partiels prennent de la sorte une nouvelle signification ; ils ne sont autres que les moments fléchissants que produiraient les charges données si les travées étaient considérées comme non solidaires.

A la fin, c'est-à-dire quand on aura trouvé les moments sur piles  $M_i$  à l'aide du polygone auxiliaire, au lieu de porter les segments

$$-\frac{M_i}{\rho}, \quad -\frac{M_{i+1}}{\rho}$$

en  $p_i r'_i$  et  $p_{i+1} r'_{i+1}$ , on les portera en  $A_i r'_i$  et  $A_{i+1} r''_{i+1}$  puis, en tirant les droites telles que  $r''_i r''_{i+1}$ , on tombera précisément sur le diagramme des sommets fléchissants auquel conduit la méthode de Mohr et qui forme la partie supérieure de la fig. 93 ; on en déduira enfin le diagramme général qui forme la partie inférieure de la même figure.

En résumé, le procédé de M. de Fontviolant revient à décomposer en quelque sorte le second polygone funiculaire de Mohr en deux autres plus simples ; l'un donne les points  $A'_i$ , l'autre dépend des points  $A'_i$  et fournit les moments sur piles. On divise ainsi le travail ; le polygone auxiliaire n'exige par travée que deux points fixes au lieu de quatre, et ces pivots se déduisent des points  $A'_i$  comme les points fixes de Mohr se déduisent des points  $A_i$ .

**236.** — La méthode s'étend d'ailleurs immédiatement au cas où les appuis ont des hauteurs inégales à condition, bien entendu, comme nous l'avons dit au n° 226, que les dénivellations soient assez faibles pour qu'on ait le droit de négliger, vis-à-vis de la distance de deux appuis consécutifs quelconques la différence entre cette distance et sa projection horizontale.

Il n'y a rien à changer au raisonnement jusqu'à la conséquence que l'on tire de l'équation

$$y_1 = y_2 + y_3$$

du n° 231. Ici, il n'est plus vrai de dire que  $y_1$  est nul sur les appuis; mais sa valeur  $(y_1)_i$  est connue, puisqu'on donne la différence de niveau entre le premier appui et chacun des autres. Par suite, à la relation

$$(y_3)_i = - (y_2)_i$$

il faut substituer

$$(y_3)_i = (y_1)_i - (y_2)_i,$$

pour obtenir  $(y_3)_i$ . Le reste s'achève sans modification.

FIN

# INDEX ALPHABÉTIQUE

(Les chiffres indiquent les pages).

## A

Aire du segment parabolique, 98.  
Allongement d'une fibre, 82, 84.  
*Amsler*, 114.  
Appuis encastrés, 135.  
Appuis intermédiaires, 138.  
Appuis simples, 113.  
Articulations, 174.  
Avantages des systèmes articulés sans lignes surabondantes, 214.  
Axe commun à deux polygones funiculaires des mêmes forces, 20.

## B

Barres d'un système articulé, 175.  
Bares de treillis, 184.  
Bielles, 193, 199, 203.  
*Bossut* (L.), 191.

## C

Centre de gravité d'une aire plane ; sa détermination graphique, 101 à 104.  
Centres de gravité des aires planes ; formules et propriétés fondamentales, 94.  
Centre de gravité du quadrilatère et du trapèze, 97, 98.  
Centre de gravité du triangle, 96.  
Centre de gravité du segment parabolique, 98.  
Charge (Ligne de, surface de), 125.  
Charges fixes concentrées, 116.  
Charges fixes continues, 122.  
Charges mobiles concentrées, 116.  
Charge mobile uniforme, 162.

Charges défavorables, 249, 259.  
Coefficient d'élasticité, 84, 142.  
*Collignon*, 211.  
Composition des forces concourantes, 5.  
Composition des forces parallèles, 13.  
Composition de deux forces quelconques appliquées à un corps rigide, 8.  
Compression de la fibre moyenne, 84.  
Compression des barres d'un système articulé (Voir: Tensions), 175.  
Conditions graphiques pour que des forces situées dans un plan soient en équilibre, aient une résultante ou se réduisent à un couple, 40.  
Conditions pour qu'un système articulé soit déformable, strictement indéformable, ou à lignes surabondantes, 206.  
Conditions pour que la statique pure donne les tensions d'un système de barres, 204, 206.  
Contrefiches, 185.  
Contreflèches, 146.  
Contreverticales, 228.  
Conventions relatives aux signes des moments, 6.  
Convoi (Voir: charge mobile), 147.  
Côtés moyens du second polygone funiculaire, 226.  
Couples; rappel de leurs propriétés. 8, 52.  
Courbes funiculaires, 65 à 78.  
Courbes représentatives des moments fléchissants ou des efforts tranchants maximums dans une poutre continue.  
*Cremona*, 191.  
*Culmann*, 168, 176, 178, 179, 183.

**D**

Démonstration par la statique des propriétés géométriques des polygones funiculaires, 42.  
 Dénivellations des appuis, 263, 279.  
*Deprez* (Marcel), 114.  
*Desargues*, 12.  
 Diagramme général des forces élastiques dans un système articulé; lignes principales; lignes secondaires, 192.  
 Diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants maximums, produits par une charge roulante, 157, 161.  
 Diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants dans une poutre continue pour une charge donnée, 237, 238.  
 Dimensions transversales d'une pièce, 92.  
 Distance polaire d'un polygone funiculaire, 43, 52.  
 Distinction entre les tensions et les compressions des barres d'un système articulé, 176, 187.  
 Distribution des charges uniformes produisant dans une section d'une poutre continue le moment fléchissant ou l'effort tranchant maximum, 259, 261.

**E**

*Eddy*, 167.  
 Echelles des longueurs, des forces, des moments, 119, 125.  
 Effort tranchant; sa définition; sa relation avec le moment fléchissant, 84, 92.  
 Effort tranchant; sa détermination 1° dans la poutre à deux appuis avec charges fixes, 118, 121, 124, 127, 130, 132, 135, 136, 139; 2° dans la poutre à deux appuis avec charge

roulante, 159 à 161; 3° dans la poutre continue, 238.  
 Ellipse centrale d'inertie, 111.  
 Emploi simultané de la méthodes des sections et de la méthode des nœuds, 198.  
 Encastrement, 135.  
 Entretoise, 170 à 172.  
 Equation des courbes funiculaires, 74.  
 Equation de la ligne élastique et de sa ligne homographique, 88, 90.  
 Equation d'équarissage, 91.  
 Equilibre d'un corps rigide libre ou gêné, 40, 60.  
 Equilibrer un système de forces à l'aide de forces dont on donne les lignes d'action, 52.  
 Equivalence des conditions analytiques et des conditions graphiques d'équilibre, 49.  
 Equivalence de deux groupes de forces, 38.  
 Expression graphique de la somme des moments d'un système de forces, 45, 47.  
 Expression remarquable du moment fléchissant produit par des charges concentrées et par une charge permanente uniforme, 163, 166.

**F**

Ferme Polonceau à une ou à trois bielles, 197, 199.  
 Fibre moyenne, 81.  
 Fibre neutre, 86.  
 Fibre quelconque; son raccourcissement relatif, 82.  
 Figures homologiques, 12 à 16.  
 Figures réciproques, 191.  
*Flamant*, 163, 211.  
 Flèche de la ligne élastique dans le cas d'une charge uniforme, 145.  
 Flexion plane; formules fondamentales, 86.

*Fontvioland* (de), 267, 277, 278.  
 Forces intérieures, 174.  
 Forces extérieures réparties, 65.  
 Foyers d'une poutre continue, 23, 231.  
 Frames (Framework, Fachwerk), 195.

## II

Homogénéité des formules, 88.  
 Homologie (axe, centre, rapport d'),  
 13, 16.  
 Homologie de deux polygones funicu-  
 laires d'un même système de forces  
 concourantes ou parallèles, 27, 28.  
*Howe*, 184.  
 Hypothèses de la résistance des ma-  
 tériaux, 81.

## J

*Jung*, 191.

## K

*Kleitx*, 162.  
*Kechlin*, 263.

## L

*Leman* (G.), 147, 161.  
 Lemmes de Géométrie, 9, 11, 12.  
*Lévy* (Maurice), 1, 167, 168, 191,  
 203, 204, 205, 210, 214.  
 Lieu du point de rencontre de deux  
 côtés de rang assignés dans les  
 polygones funiculaires d'un même  
 système de forces, 22, 24.  
 Lieu des pôles des polygones funicu-  
 laires passant par deux points don-  
 nés, 25.  
 Lieu relatif aux points d'inflexion d'une  
 poutre continue, 258.  
 Ligne d'action d'une force appliquée à  
 un corps rigide, 5.  
 Ligne de clôture d'un polygone funicu-  
 laire, 110, 119.

Lignes croisées; cas général; cas d'une  
 charge uniforme totale ou partielle,  
 231, 239, 240.  
 Ligne élastique; définition et équation  
 différentielle, 88.  
 Ligne élastique considérée comme une  
 courbe funiculaire, 89.  
 Ligne homographique de la ligne élas-  
 tique: son équation; sa construction,  
 90, 140, 143, 145.  
 Limite supérieure du moment fléchis-  
 sant maximum, dans le cas d'une  
 charge roulante, 169.  
 Longérons, 170.

## M

*Maxwell*, 191.  
 Membres d'une poutre, 181.  
*Ménabréa* (le général de), 210.  
*Ménélaüs*, 229.  
 Méthode des nœuds, 186.  
 Méthode des sections, 175.  
 Mètre; mètre-tonne, 8.  
 Moment fléchissant, sa détermination  
 graphique: 1° dans les poutres à  
 deux appuis avec charges fixes, 116,  
 121, 124, 128, 132, 136, 138, 140;  
 2° dans les poutres à deux appuis  
 avec charge mobile, 152, 154; 3°  
 dans la poutre continue, 217, 236.  
 Moment fléchissant produit en une  
 section par le passage d'un train,  
 162, 164.  
 Moment fléchissant maximum sous un  
 essieu donné, 168.  
 Moments fléchissants partiels; mo-  
 ments complémentaires, 269, 270.  
 Moment d'inertie d'une aire plane: sa  
 détermination graphique, 101 à 104.  
 Moments d'ordre supérieur d'une aire  
 plane: leur détermination graphi-  
 que, 105.  
 Moment statique d'une force; son  
 expression graphique, 6, 44.

Moments sur piles, 217.  
*Mohr*, 209, 235, 267, 273, 275, 278.

**P**

Parabole ; divers tracés, 75 à 79.  
 Paraboloides hyperboliques ; propriétés et tracés divers, 148 à 150.  
 Parallélogramme des forces ; autre énoncé, 3.  
 Pivots et point fixes d'une poutre continue, 232, 275.  
 Poinçons, 185.  
 Points d'inflexion dans une poutre continue 255, 256.  
 Points limites relatifs à une section donnée d'une poutre continue, 259.  
 Pôle d'un polygone funiculaire, 20, 21.  
*Polonceau*, 197, 198 199.  
 Polygone auxiliaire, 273.  
 Polygone circonscrit, à une courbe funiculaire, 68.  
 Polygone des vecteurs d'un système de forces, 5.  
 Polygones funiculaires ; propriétés géométriques, 17 à 33.  
 Polygones funiculaires ; propriétés mécaniques, 36 à 49.  
 Polygones funiculaires ouverts ou fermés, 23.  
 Polygone funiculaire passant par trois points donnés, 30, 31, 32.  
 Polygone funiculaire passant par deux points donnés et ayant une distance polaire donnée, 33, 34.  
 Poutre à deux appuis : 1° avec charges concentrées, 116 ; 2° avec charge fixe continue, 122, 128 ; 3° avec charge mixte, 133 ; 4° avec charge mobile, 147.  
 Poutre à deux appuis intermédiaires, 138.  
 Poutre encastrée à un bout et libre à l'autre, 145.  
 Poutre continue : 1° méthode de *Mohr*,

217 à 235 ; 2° méthode de M. B. de Pontviolant, 267 à 279.  
 Poutre continue encastrée à l'un des bouts ou aux deux bouts, 245.  
 Poutre simple encastrée à ses deux bouts, 246.  
 Poutre continue soumise à une charge unique concentrée, 251.  
 Poutre à treillis simple (*Howe*, *Warren*), 170, 184, 187.  
 Poutre à treillis multiple, 185.  
 Premier polygone funiculaire, 222.  
 Problèmes relatifs à la composition des forces, 50 à 608.  
 Problèmes relatifs aux polygones funiculaires, 21, 30, 31.  
 Problèmes relatifs aux réactions, 60 à 64.  
 Procédé de *Culman* pour les forces intérieures, 176.  
 Procédé de *Hitter* ou des moments statiques, 178.  
 Projection d'une force sur un axe, 2.

**R**

Rayon de gyration d'une aire plane, 110, 111.  
 Réactions des appuis dans la poutre simple ou dans la poutre continue, 116, 123, 134, 136, 138, 238.  
 Réactions simples et réactions composées ; cas d'indétermination, 61, 62.  
 Réduction d'un système de forces situées dans un même plan, 36.  
 Relation entre la compression, le moment fléchissant, l'effort tranchant et les forces extérieures, 85.  
 Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant, 92.  
 Relations qui résultent de la figure d'un système articulé à lignes surabondantes ; procédé de *Mohr*, 209.  
 Résultante de deux forces dont le

point de concours est inaccessible, 30.  
 Résultante d'un système de forces situées dans un plan: son vecteur et sa ligne d'action, 41, 42.  
*Ritter*, 178, 179, 198.  
*Rouché*, 1, 204.  
*Rouché et de Comberousse*, 3, 12, 148, 229.

**S**

*Saviotti*, 191.  
 Second polygone funiculaire, 222.  
 Section transversale d'une poutre, 82.  
 Segment représentatif d'une force, 2.  
 Segments rectilignes, leurs propriétés, 3.  
 Semelles (Voir: Membrures), 181.  
 Superposition des effets des forces, 249.  
 Statique graphique; son objet, 1.  
 Systèmes articulés; leur définition, 174.  
 Systèmes articulés déformables; strictement indéformables; à lignes surabondantes, 205.  
 Systèmes articulés anormaux, 206.  
 Systèmes articulés érigés en solide d'égale résistance, 212.  
 Systèmes partiels, 9, 42.

**T**

Tangente aux courbes funiculaires, 68.  
 Tangente à la ligne représentative des moments fléchissants ou des efforts tranchants. 127. ...

Tension de la fibre moyenne, 84.  
 Tensions des barres, par la méthode des sections ou celle des nœuds, 175, à 203.  
 Tensions des barres d'un système à lignes surabondantes, 207.  
 Théorème de Desargues, 12.  
 Théorème des projections, 3.  
 Théorème de Varignon, 4.  
 Tonne, 2.  
 Train (voir: Charge mobile), 167.  
 Travée: définition de sa longueur, 216, 263.  
 Travées de la rive, 223.  
 Travée supportant une charge concentrée unique, 253.  
 Travées réticulaires, 195.  
 Treillis simple ou multiple, 179, 211.

**U**

Unités de longueur, de force, de moment, 7.

**V**

*Varignon*, 6.  
 Vecteur d'une force, 3.  
*Ventre*, 167.  
 Verticales principales, 222.  
 Verticales trissectrices, 222.

**W**

*Warren*, 179, 192, 198, 210.