RECHERCHES

SUR UNE CLASSE DE

FONCTIONS ENTIÈRES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'UPSAL

ET PUBLIQUEMENT SOUTENUE

LE 16 SEPT. DÈS 10 HEURES DU MATIN

DANS LA SALLE N° XI

PAR

PAUL PERSSON

LICENCIÉ ÈS SCIENCES. VESTG.

UPSAL 1908

IMPRIMERIE ALMQVIST & WIKSELL

Dans une partie de son grand mémoire: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Acta Math. t. 29), M. MITTAG-LEFFLER a publié des découvertes fort intéressantes sur les propriétés d'une fonction entière nouvelle, nommée $E_a(x)$. La fonction est définie par l'égalité:

$$E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)} = \frac{1}{2\pi i \alpha} \int_{S_a} \frac{e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x}.$$

Le nombre α étant une quantité réelle et positive, plus petite que deux, le contour S_a est composé de deux vecteurs, issus de l'origine et étendus jusqu'à l'infini, les angles avec la direction positive de l'axe réel étant respectivement $\pm \alpha a$ $\left(\frac{3\pi}{2} > a > \frac{\pi}{2}\right)$. Ces deux vecteurs sont reliés par un arc de circonférence autour de l'origine, dont le rayon doit être si grand que le point x et l'origine se trouvent du même côté du contour. Il doit être parcouru dans le sens positif comme le dit M. MITTAG-LEFFLER, c'est à dire, on commence par intégrer le long du vecteur $-\alpha a$ à partir de l'infini jusqu'au point d'intersection avec l'arc de circonférence.

Dans le mémoire cité, M. MITTAG-LEFFLER a montré que ces fonctions jouissent des propriétés suivantes. Dans un domaine, situé autour de l'axe réel positif et limité par les vecteurs $\pm \frac{\alpha\pi}{2}$, $|E_a(x)|$ va vers l'infini comme $\left|e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}\right|$. Sur ces vecteurs, $|E_a(x)|$ tend vers une constante. Dans toute l'autre partie du plan, $|E_a(x)|$ converge vers zéro en même temps que $\frac{1}{|x|}$.[1]

[1] Ces résultats ont été signalés déjà en 1903 dans les Comptes Rendus, t. 137, pag. 554—558. Le cas où α est imaginaire a été traité par le même auteur dans la note: Sopra la funzione $E_\alpha(x)$. R. Accad. dei Lincei Atti, Série 5, Vol. 13.

Dans un mémoire, intitulé: Über die Nullstellen der Funktionen $E_a(x)$ (Acta Math. t. 29), M. Wiman a fait des recherches sur les zéros de ces fonctions, en se servant d'une méthode très simple. Le nombre α étant supposé réel, positif et plus petit que deux, les arguments des zéros tendent vers l'une ou l'autre des valeurs $\pm \frac{\alpha\pi}{2}$, en même temps que leurs modules tendent vers l'infini; le nombre des zéros dont les modules sont plus petits que la quantité r peut être exprimé très exactement par

$$N = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}.$$

Dans une note récente,[1] j'ai fait des recherches analoques sur une classe de fonctions entières, definies par M. Mittag-Leffler.[2] Je les ai appelées $E_{\alpha}^{(2)}(x)$. Les résultats obtenus sont analogues à ceux de M. Wiman.

Dans cette thèse, je vais aborder l'étude d'une classe très générale de fonctions entières, définies par des intégrales et jouissant de propriétés semblables à ceux qui caractérisent les fonctions $E_a(x)$, α étant réel, positif et plus petit que deux. La partie première traite la définition des fonctions et leur mode de croissance, la seconde nous fait connaître la position des zéros dont les modules sont grands, la troisième décrit les propriétés des dérivées de nos fonctions, et la quatrième partie contient des exemples plus ou moins compliqués de telles fonctions.

§ 1.

On peut définir les fonctions $E_a(x)$ de la manière suivante:

$$E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_1} \frac{e^{\omega'} d(\omega'^a)}{\omega'^a - x}.$$

[1] Recherches sur une classe de fonctions entières de genre infini. Arkiv för Mat., Astr. o. Fysik 1908.

[2] Sur une classe de fonctions entières de genre infini, Verhandlungen des III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904.

Cette définition m'a conduit à une généralisation:

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_1} \frac{e^{\omega'} d\varphi(\omega')}{\varphi(\omega') - x}. \tag{1}$$

Supposons d'abord que les fonctions $\varphi(\omega')$ jouissent des propriétés suivantes:

1) *La fonction $\varphi(\omega')$ de la variable complexe $\omega' = Re^{ia}$ est analytique. Une de ses branches est réelle et positive.*

2) *Dans la partie du plan des ω', définie par les inégalités:*

$$R > R_0,$$

$$-a_0 < a < a_0, \quad \left(a_0 > \frac{\pi}{2}\right),$$

cette branche n'a pas de points singuliers, le point à l'infini exclu. Soit T_1 le domaine, situé hors d'un cercle autour de l'origine de rayon R_0 et limité par les deux vecteurs $\pm a_0$. Dans l'intérieur de ce domaine, la branche $\varphi(Re^{ia})$ ($|a| < \pi$) est donc une fonction analytique régulière et $\varphi(R)$ réelle et positive, grâce à nos hypothèses.

Maintenant nous allons introduire une variable nouvelle $\omega = \varrho e^{i\vartheta}$, définie par l'une ou l'autre des équations:

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi(Re^{ia}) \\ Re^{ia} &= \psi(\omega) = F(\varrho, \vartheta)e^{if(\varrho,\vartheta)}. \end{aligned} \tag{2}$$

En introduisant cette variable, nous obtenons une représentation conforme dans le plan des ω d'un domaine simplement connexe, situé dans l'intérieur du domaine T_1. Les vecteurs dont les angles avec la direction positive de l'axe réel sont respectivement $\pm a$ sont transformés dans les courbes

$$\vartheta = \vartheta(\varrho, \pm a)$$

(3) ou

$$f(\varrho, \vartheta) = \pm a.$$

En supposant $\lim\limits_{|\omega'| = \infty} |\varphi(\omega')| = \infty$, ces courbes s'étendent jusqu'à l'infini.

L'axe réel positif est évidemment transformé en lui-même. Les circonférences autour de l'origine sont transformées dans les courbes

$$F(\varrho, \vartheta) = R,$$

R étant le rayon de la circonférence dans le plan des ω'.

De tout le domaine T_1, nous obtenons donc une représentation conforme dans le plan des ω. Il peut arriver que le domaine nouveau T couvre le plan plus d'une fois, mais cela est sans importance. Dans ce cas, T peut être considéré comme une partie d'une surface de RIEMANN, composée d'un certain nombre de feuillets. Désignons dans le suivant par $P(a, R)$ le domaine limité par les courbes:

$$\vartheta = \vartheta(\varrho, -a), \;\; F(\varrho, \vartheta) = R, \;\; \vartheta = \vartheta(\varrho, a).$$

Dans le domaine $T = P(a_0, R_0)$, situé sur notre surface de RIEMANN, la fonction $\psi(\omega)$ est régulière en tout point, sauf à l'infini. De plus, $\psi(\varrho)$ est réelle et positive dans l'intérieur de ce domaine.

Avant d'aborder l'étude de l'intégrale (1), je veux énoncer quelques théorèmes sur le module maximum et le module minimum d'une fonction analytique. Dans une note récente: Sur un théorème de M. HADAMARD dans la théorie des fonctions entières (R. del circolo mat. di Palermo, t. 25, pag. 229), M. LINDELÖF énonce le théorème suivant.

I. *Soit une fonction monogène $f(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$, qui jouit des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine connexe T, faisant partie de l'angle*

$$-\frac{\pi}{2\alpha} \leq \varphi - \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2\alpha}.$$

2°. *Sur le contour de ce domaine T, on a*

$$|f(x)| < C,$$

C étant une constante, finie.

3°. *À l'intérieur de T, l'inégalité suivante est satisfaite dès que r est suffisamment grand:*

$$|f(x)| < e^{r^k} \qquad (k < \alpha).$$

Dans ces conditions on aura:

$$|f(x)| < C$$

pour tout point x du domaine en question.

On peut dire comme corollaire de ce théorème qu'une fonction entière, jouissant des propriétés 2° et 3° et qui vérifie dans tout le reste du plan l'inégalité:

4°. $$|f(x)| < C,$$

doit être une constante. Ce théorème a été démontré par M. Phragmén déjà en 1904.[1] Il observe que les fonctions entières les plus simples qui vérifient les conditions 2° et 4° et la condition 3° pour $k = \alpha$, sont les fonctions $E_\alpha(x)$.

Il n'est pas difficile de démontrer que le théorème I subsiste même en supposant

$$|f(x)| < e^{\eta(r) r^\alpha},$$

le point x étant situé dans l'intérieur du domaine T. Par $\eta(r)$ nous désignons une fonction réelle et positive qui tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{r}$. Une démonstration se trouve dans un mémoire de M. M. Lindelöf et Phragmén.[2] En se servant de cette généralisation et en faisant une transformation de variable, on arrive au théorème suivant, dont nous aurons besoin plus tard.

I b. *Soit une fonction monogène $\Phi(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$, qui jouit des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine T, faisant partie du domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_0\right)$.*

2°. *Sur le contour de ce domaine T, on a*

$$|\Phi(x)| < C,$$

C étant une constante finie.

---

[1] E Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions, Acta Math., t. 28.

[2] Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse, et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, (Acta Math., t. 31.)

3°. *A l'intérieur de T, l'inégalité suivante est satisfaite dès que r est suffisamment grand:*

$$|\Phi(x)| < e^{\eta(r)|\psi(x)|},$$

la fonction $\psi(x)$ possédant les propriétés decrites plus haut.

Dans ces conditions, on aura:

$$|\Phi(x)| < C$$

pour tout point x du domaine en question.

Supposons pour un moment

$$\psi(\omega) = e_n(\omega^\nu),$$

n étant un nombre entier positif ou zéro, ν positif! La fonction $e_n(\omega^\nu)$ est définie par la formule de récurrence:

$$e_n(\omega^\nu) = e^{e_{n-1}(\omega^\nu)},$$

$$e_0(\omega^\nu) = \omega^\nu.$$

Considérons d'abord la fonction $e_1(\omega^\nu)$. Dans ce cas, l'équation

$$f(\varrho, \vartheta) = a_1$$

peut s'écrire:

$$\varrho^\nu \sin \nu\vartheta = a_1,$$

relation qui nous donne

$$\vartheta = \vartheta(\varrho, a_1) = \frac{a_1}{\nu\varrho^\nu}(1 + \eta(\varrho)).$$

En se servant de cette valeur de ϑ, on peut écrire:

$$e_1(\omega^\nu) = e^{\sqrt{\varrho^{2\nu} - a_1^2}}\, e^{ia_1} = e_1(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho)[a_1^2])e^{ia_1},$$

$[a_1^2]$ désignant des termes d'ordre a_1^2. Cette relation nous donne:

$$e_2(\omega^\nu) = e^{e_1(\varrho^\nu)(1-\eta(\varrho)[a_1^2])(\cos a_1 + i \sin a_1)} = F_2(\varrho, a_2)\, e^{ia_2}.$$

L'équation:

$$e_1(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho)[a_1^2]) \sin a_1 = a_2$$

nous donne:

$$a_1 = \frac{a_2}{e_1(\varrho^\nu)}(1 + \eta(\varrho)),$$

$$\vartheta = \vartheta(\varrho, a_2) = \frac{a_2}{\nu \varrho^\nu e_1(\varrho^\nu)}(1 + \eta(\varrho)),$$

$$e_2(\omega^\nu) = e_2(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho)[a_2^2])e^{ia_2}.$$

Il est donc très probable que les relations suivantes soient vérifiées:

$$\nu\vartheta(\varrho, a_m) = \frac{a_m(1 + \eta(\varrho))}{\varrho^\nu e_1(\varrho^\nu)\ldots e_{m-1}(\varrho^\nu)},$$

$$e_m(\omega^\nu) = e_m(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho)[a_m^2])e^{ia_m}.$$

Il est très facile de prouver que ces relations subsistent pour $n = m + 1$, si elles sont vérifiées pour $n = m$. Car on a:

$$e_{m+1}(\omega^\nu) = e^{e_m(\omega^\nu)} =$$

$$= e^{e_m(\varrho^\nu)(1-\eta(\varrho)[a^2m])(\cos a_m + i \sin a_m)}$$

L'équation

$$f(\varrho, \vartheta) = a_{m+1}$$

nous donne:

$$a_m = \frac{a_{m+1}}{e_m(\varrho^\nu)}(1 + \eta(\varrho)),$$

$$\nu\vartheta(\varrho, a_{m+1}) = \frac{a_{m+1}(1 + \eta(\varrho))}{\varrho^\nu e_1(\varrho^\nu)\ldots e_m(\varrho^\nu)},$$

$$e_{m+1}(\omega^\nu) = e_{m+1}(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho)[a_{m+1}^2])e^{ia_{m+1}}.$$

En supposant $\psi(\omega) = e_n(\omega^\nu)$, on a donc les relations:

$$\vartheta(\varrho, a) = \frac{a(1 + \eta(\varrho))}{\nu\varrho^\nu\ldots e_{n-1}(\varrho^\nu)},$$

(4)

$$e_n(\omega^\nu) = e_n(\varrho^\nu)(1 - \eta(\varrho, a))e^{ia},$$

$\eta(\varrho, a)$ s'annulant en même temps que $\frac{1}{\varrho}$ pour toute valeur considérée de a.

M. Wiman a dirigé mon attention sur le fait qu'il est très probable qu'on puisse trouver pour le module minimum un théorème analogue au théorème I, en appliquant la même méthode de démonstration qu'a employée M. Lindelöf dans la note citée. Dans le suivant, ce théorème nous sera très utile. Je n'ai jamais vu exposé de pareil théorème. Le voici:

II. *Soit une fonction analytique $\Phi(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$, qui jouit des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine T, renfermant l'angle*

$$-\frac{\pi}{2k} \geqq \varphi - \varphi_0 \geqq \frac{\pi}{2k},$$

et situé hors d'un cercle autour de l'origine dont le rayon est r_0.

2°. *A l'intérieur de ce domaine, on a:*

$$|\Phi(x)| < e^{-\frac{1}{\eta(r)} r^k}.$$

3°. *Sur le contour de T, on a:*

$$|\Phi(x)| < C,$$

C étant une constante finie.

Dans ces conditions, on a identiquement:

$$\Phi(x) = 0.$$

Nous allons examiner la fonction analytique

$$\Psi(x) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(r^k e^{ik(\varphi-\varphi_0)} - r_0^k\right)} \Phi(x)$$

dans un domaine limité par les deux vecteurs $\pm \frac{\pi}{2k} + \varphi_0$, l'arc de circonférence dont le rayon est r_0 et un arc de circonférence γ autour de l'origine, dont le rayon est très grand. Quelque petit que soit le nombre ε, il est facile de voir que sur le contour, formé de ces quatre courbes, on a l'inégalité:

$$|\Psi(x)| \leqq C,$$

pourvu qu'on ait pris le rayon de la circonférence γ assez grand. Donc, cette inégalité doit être verifiée aussi dans tout le domaine, limité par ce contour. En choisissant un point

$$x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \left(|\varphi_1 - \varphi_0| < \frac{\pi}{2k}\right), \; (r_1 > r_0),$$

d'ailleurs arbitraire, on peut écrire cette inégalité:

$$|\Phi(x_1)| < C e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(r_1^k \cos k(\varphi_1 - \varphi_0) - r_0^k\right)} < \delta.$$

Le nombre positif δ peut être choisi aussi petit qu'on le voudra, pourvu qu'on ait pris ε suffisamment petit. Cette inégalité entraine donc l'égalité:

$$\Phi(x_1) = 0.$$

Donc, nous avons démontré que dans les conditions données, on a toujours l'identité:

$$\Phi(x) = 0.$$

Ce théorème est aussi susceptible de la même généralisation que le théorème I.

II b. *Soit une fonction analytique $\Phi(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$, qui jouit des propriétés suivantes.*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine T, limité par les courbes:*

$$f(r, \varphi - \varphi_0) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad F(r, \varphi - \varphi_0) = R_0.$$

2°. *Sur le contour de ce domaine, on a*

$$|\Phi(x)| < C,$$

C étant une constante finie.

3°. *Dans l'intérieur de T, on a:*

$$|\Phi(x)| < e^{-\frac{1}{\eta(r)}|\psi(x)|}.$$

Dans ces conditions on a identiquement

$$\Phi(x) = 0.$$

Maintenant nous allons restreindre les fonctions $\varphi(\omega')$ et $\psi(\omega)$ de plus. *Nous supposons qu'on puisse écrire:*

$$\vartheta(\varrho, a) = a\sigma(\varrho)(1 + \varepsilon(\varrho, a)), \tag{5}$$

$\varepsilon(\varrho, a)$ *tendant vers zéro en même temps que* $\frac{1}{\varrho}$ *pour chaque valeur considérée de* a, *la fonction réelle et positive* $\sigma(\varrho)$ *tendant vers une constante positive finie ou vers zéro, lorsque* ϱ *croît au delà de toute limite.* De plus, il faut faire des suppositions sur la nature de $|\psi(\omega)|$. *Supposons par exemple que dans tout le domaine* $P(a_0, R_0)$, *l'une ou l'autre des inégalités suivantes soit toujours vérifiée dès que* ϱ *est suffisamment grand:*

$$e_n(\varrho^{\nu-\delta}) < |\psi(\omega)| < e_n(\varrho^{\nu+\delta}) \quad . \tag{6}$$

$$(n = 1,\ 2, \ldots,\ \nu > 0), \quad (n = 0,\ \nu > \tfrac{1}{2}),$$

ou

$$e_{n-1}\left(\varrho^{\frac{1}{\delta}}\right) < |\psi(\omega)| < e_n(\varrho^{\delta}), \tag{6 b}$$

$$(n \geq 1),$$

δ étant un nombre positif plus petit qu'un nombre donné quelconque, pourvu que ϱ soit suffisamment grand.

Si dans l'inégalité (6), on peut prendre $n = 0$, on peut choisir:

$$\sigma(\varrho) = \frac{1}{\nu},$$

c'est à dire, l'équation (5) peut s'écrire:

$$\vartheta(\varrho, a) = \frac{a}{\nu}(1 + \varepsilon(\varrho, a)). \tag{5 b}$$

Si cela n'était pas vrai, on aurait:

$$\vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\mu}(1 + \varepsilon(\varrho, a)),$$

le nombre positif μ étant distinct de zéro et de ν. Supposons d'abord $\mu > \nu$! Dans le domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_1\right)$, situé dans l'intérieur de l'angle

$$-\frac{\pi}{2\mu}(1+\delta_1) \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2\mu}(1+\delta_1),$$

où le nombre positif δ_1 peut être pris aussi petit qu'on le voudra, pourvu que R_1 soit suffisamment grand, la fonction $e^{\psi(\omega)}$ jouit des propriétés suivantes:

Sur le contour de ce domaine, son module est plus petit qu'une certaine constante; dans l'intérieur de ce domaine, on a:

$$|e^{\psi(\omega)}| < e^{\varrho^{\mu_1}} \qquad (\mu > \mu_1 > \nu).$$

En appliquant le théorème I, on arrive à l'inégalité:

$$|e^{\psi(\omega)}| < C,$$

et cette inégalité doit être vérifiée en tout point, appartenant au domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_1\right)$, ce qui est impossible, car le module de $e^{\psi(\omega)}$ tend vers l'infini, lorsque ω croît au delà de toute limite en restant dans l'intérieur du domaine. Donc, on ne peut pas avoir $\mu > \nu$.

Supposons enfin $\mu < \nu$! En appliquant le théorème II, on arriverait à l'identité absurde:

$$e^{-\psi(\omega)} = 0,$$

ω étant situé dans l'intérieur d'un domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_2\right)$. Notre supposition est donc fausse, et la relation (5 b) doit être vérifiée.

Si l'on ne peut pas pendre $n = 0$ dans l'inégalité (6), on démontre aisément que la relation suivante est exacte:

$$\lim_{\varrho=\infty} \sigma(\varrho) = 0.$$

Pour les recherches suivantes, il faut connaître une limite inférieure de la valeur de $\sigma(\varrho)$, ϱ étant grand. Supposons que l'inégalité suivante soit satisfaite à partir d'une certaine valeur de ϱ:

$$\frac{1}{e_{n_1}(\varrho^{\nu_1+\delta})} < \sigma(\varrho) < \frac{1}{e_{n_1}(\varrho^{\nu_1-\delta})}.$$

En appliquant la même méthode comme plus haut, et en supposant l'inégalité (6) vérifiée, on peut vérifier l'exactitude des égalités:

$$n_1 = n - 1, \qquad \nu_1 = \nu.$$

Il ne faut que se servir des théorèmes I b et II b.

Notre supposition est donc identique à l'une ou l'autre des conditions:

$$(7) \qquad \frac{1}{e_{n-1}(\varrho^{\nu+\delta})} < \sigma(\varrho) < \frac{1}{e_{n-1}(\varrho^{\nu-\delta})} \quad \text{(cond. 6) vérifiée).}$$

$$(7\,\text{b}) \qquad \frac{1}{e_{n-1}(\varrho^{\delta})} < \sigma(\varrho) < \left[\frac{1}{e_{n-2}\left(\varrho^{\frac{1}{\delta}}\right)}\right] \quad \text{(cond. 6 b) vérifiée).}$$

En prenant R_1 suffisamment grand et

$$|a| < \frac{\pi}{2} + \beta \leqq a_0,$$

la valeur du nombre positif β dépendant de celle de ν, le domaine $P(a, R_1)$ est situé sur un seul feuillet de notre surface de Riemann, grâce à la condition $\nu > \frac{1}{2}$ pour $n = 0$. Dans le suivant, nous supposons toujours les quantités R_1 et a choisies de cette manière, c'est à dire nous ne considérons qu'une seule branche de la fonction $\psi(\omega)$.

De plus, nous supposons que la fonction $\omega\psi'(\omega)$ jouisse de la propriété, exprimée par la relation suivante:

$$\varrho e^{i\vartheta(\varrho,a)}\psi'(\varrho e^{i\vartheta(\varrho,a)}) = F_2(\varrho,\vartheta)e^{i(a_1+\vartheta)} = F_2(\varrho,\vartheta)e^{ia(1+\varepsilon(\varrho,a))},$$

le module $F_2(\varrho,\vartheta)$ satisfaisant à l'une ou l'autre des inégalités (6) ou (6 b), les nombres n et ν étant les mêmes qu'on doit choisir pour la fonction $\psi(\omega)$. Cette hypothèse nous permet de trouver quelques propriétés de la fonction $\psi(\omega)$

qui nous aideront à calculer le nombre des zéros des fonctions $\Pi(x)$ dont les modules sont plus petits qu'une certaine quantité r.

Dans l'intérieur du domaine $P(a, R_1)$, la fonction analytique $\psi(\omega) = X(\omega_{\prime}, \omega_{\prime\prime}) + i\,Y(\omega_{\prime}, \omega_{\prime\prime})$ de la variable complexe $\omega = \omega_{\prime} + i\omega_{\prime\prime}$, est régulière. En partant des identités connues:

$$\frac{\partial X}{\partial \omega_{\prime}} = \frac{\partial Y}{\partial \omega_{\prime\prime}}; \quad \frac{\partial X}{\partial \omega_{\prime\prime}} = -\frac{\partial Y}{\partial \omega_{\prime}},$$

on trouve les deux identités:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho F^{-1} \frac{\partial F}{\partial \varrho}; \quad \frac{\partial f}{\partial \varrho} = -\varrho^{-1} F^{-1} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}.$$

Les équations (3) nous donnent:

$$\frac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial \varrho} = -\frac{\partial f}{\partial \varrho} : \frac{\partial f}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial a} = \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}}.$$

En introduisant:

$$F(\varrho, \vartheta(\varrho, a)) = F_1(\varrho, a),$$

on trouve:

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial \vartheta} : \frac{\partial f}{\partial \vartheta} =$$

$$= -\varrho F_1 \frac{\partial f}{\partial \varrho} : \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho F_1 \frac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial \varrho}.$$

On a donc:

$$\log F_1(\varrho, a) = \log \psi(\varrho) + a \frac{\partial F_1(\varrho, \theta a)}{\partial a} : F_1(\varrho, \theta a) =$$

$$= \log \psi(\varrho) + a\varrho \frac{\partial \vartheta(\varrho, \theta a)}{\partial \varrho}, \qquad (0 < \theta < 1).$$

Maintenant il faut trouver une valeur de $\dfrac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial \varrho}$. On a:

$$f(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2i}\{\log \psi(\varrho e^{i\vartheta}) - \log \psi(\varrho e^{-i\vartheta})\};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{\psi'(\varrho e^{i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{i\vartheta})} e^{i\vartheta} - \frac{\psi'(\varrho e^{-i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{-i\vartheta})} e^{-i\vartheta}\right\} =$$

$$= \left|\frac{\psi'(\varrho e^{i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{i\vartheta})}\right| \sin(a_1 - a + \vartheta).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{\psi'(\varrho e^{i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{i\vartheta})} i\varrho e^{i\vartheta} + \frac{\psi'(\varrho e^{-i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{-i\vartheta})} i\varrho e^{-i\vartheta}\right\} =$$

$$= \varrho\left|\frac{\psi'(\varrho e^{i\vartheta})}{\psi(\varrho e^{i\vartheta})}\right| \cos(a_1 - a + \vartheta).$$

On trouve donc:

$$\frac{\partial \vartheta(\varrho, a)}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{tg}(a_1 - a + \vartheta) = -\frac{a\,\varepsilon(\varrho, a)}{\varrho},$$

$$F_1(\varrho, a) = \psi(\varrho)(1 + \varepsilon(\varrho, a)). \tag{8}$$

De plus, on a:

$$\log F_1(\varrho, a + d) = \log F_1(\varrho, a) + d\,\varepsilon(\varrho, a).$$

En déterminant d par l'inégalité:

$$|d| \leqq \frac{c}{\psi(\varrho)},$$

c étant une constante finie, on trouve:

$$F_1(\varrho, a + d) = F_1(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho, a), \tag{9}$$

relation qui nous sera utile plus loin.

Nous supposons de plus qu'on ait:

$$\frac{d\sigma(\varrho)}{d\varrho} = \varrho^{-1}\varepsilon(\varrho). \tag{10}$$

La fonction analytique $\psi(\omega)$ doit donc vérifier toutes les conditions suivantes dans l'intérieur du domaine $P\left(\frac{\pi}{2} + \beta, R_1\right)$:

I. *La fonction* $\psi(\omega)$, *qui est réelle et positive pour des valeurs réelles et positives de la variable* ω, *n'a pas de points singuliers dans l'intérieur de ce domaine, excepté le point à l'infini.*

II. *Les modules* $F(\varrho, \vartheta)$ *et* $F_2(\varrho, \vartheta)$ *satisfont à l'une ou l'autre des inégalités* (6) *et* (6 b). *De plus, on peut écrire:*

$$\psi(\omega) = \psi(\varrho e^{i\vartheta(\varrho, a)}) = F(\varrho, \vartheta) e^{ia}$$

$$\omega \psi'(\omega) = \varrho e^{i\vartheta(\varrho, a)} \psi'(\varrho e^{i\vartheta(\varrho, a)}) = F_2(\varrho, \vartheta) e^{ia(1+\varepsilon(\varrho, a))}.$$

Ces relations entraînent les relations (8) *et* (9). *On a encore:*

$$\vartheta(\varrho, a) = \frac{a}{\nu}(1 + \varepsilon(\varrho, a)) \qquad (F(\varrho, \vartheta) < \varrho^{\nu+\delta})$$

$$\vartheta(\varrho, a) = a\,\sigma(\varrho)(1 + \varepsilon(\varrho, a)) \qquad \left(F(\varrho, \vartheta) > \varrho^{\frac{1}{\delta}}\right),$$

la fonction $\sigma(\varrho)$ *vérifiant les conditions* (10) *et* (7) *ou* (7 b).

En introduisant la variable ω, l'intégrale (1) se transforme en:

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\psi(\omega)} d\omega}{\omega - x}. \tag{11}$$

Le contour Γ est évidemment composé de la manière suivante. Les vecteurs $\pm a$ sont remplacés par les courbes $\vartheta = \vartheta(\varrho, \pm a)$ et l'arc de circonférence par la courbe $F(\varrho, \vartheta) = R$, la valeur de R dépendant de la position du point x. Soit toujours $R > R_1$ et $a < \frac{\pi}{2} + \beta < \pi$. En fixant la valeur de R, par exemple à $R = R_1$, on a:

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)} d\omega}{\omega - x} + (e^{\psi(x)}). \tag{12}$$

Le terme entre la parenthèse apparaît, si le point x est situé dans l'intérieur du domaine $P(a, R_1)$, car on a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\psi(\omega)} d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)} d\omega}{\omega - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{e^{\psi(\omega)} d\omega}{\omega - x},$$

τ étant un contour fermé, parcouru dans le sens direct. Comme l'on sait, on a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau}\frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x} = e^{\psi(x)},$$

si le point x est situé dans l'intérieur du contour τ. Le point x se trouvant hors de ce contour, l'intégrale s'annule.

L'intégrale (11) définit évidemment une fonction analytique, uniforme et finie en tout point x, c'est à dire, $\Pi(x)$ est une fonction entière. Grâce aux conditions (6) et (7), il est facile de démontrer que la relation suivante est vérifiée:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x}\right| = \eta(r).$$

Évidemment, les fonctions $\Pi(x)$ jouissent de la propriété suivante.

Le module de x croissant vers l'infini dans l'intérieur du domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_1\right)$, la fonction $\Pi(x)$ croît vers l'infini comme $e^{\psi(x)}$; sur le contour de ce domaine, son module converge vers une valeur finie, et dans le reste du plan, la fonction $\Pi(x)$ tend vers zéro en même temps que r^{-1}.

On voit tout de suite que l'intégrale suivante est toujours finie pour toute valeur de x:

$$\Pi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x}, \tag{13}$$

le contour γ étant composé des courbes

$$\vartheta = \pm\, a\,\sigma(\varrho)$$

et par exemple d'un arc de circonférence autour de l'origine, les unissant. Il faut seulement prendre le rayon de ce cercle suffisamment grand. Fixons la valeur ϱ_1 du rayon de cette circonférence! En prenant ϱ_1 suffisamment grand, on a:

$$\Pi_1(x) = (e^{\psi(x)}) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x}, \tag{14}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x} \right| = \eta(r).$$

La fonction $\Pi_1(x)$ est aussi une fonction entière. Dans tout le plan, la fonction entière $\Pi_1(x) - \Pi(x)$ vérifié la condition:

$$|\Pi_1(x) - \Pi(x)| = \eta(r),$$

ce qui entraîne l'identité:

$$\Pi_1(x) = \Pi(x).$$

Évidemment le contour d'intégration de l'intégrale (13) est plus simple que celui de l'intégrale (11).

En développant la fonction entière $\Pi(x)$ dans la série:

$$\Pi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m, \tag{15}$$

le coefficient α_m est déterminé par la formule:

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\psi(\omega)} \omega^{-m-1}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\psi(\omega)} \omega^{-m-1}\,d\omega. \tag{16}$$

§ 2.

Dans ce paragraphe, nous passons à l'étude des zéros des fonctions $\Pi(x)$. Nous supposons les modules des zéros grands. On peut se servir de la même méthode qu'a employée M. Wiman dans le mémoire, cité plus haut. Notre fonction étant définie par l'équation (14), il faut donc développer en série demi-convergente l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega - x} = \alpha_{-1} x^{-1} + \cdots + \alpha_{-n} x^{-n} + \cdots + \alpha_{-m} x^{-m} + R_m, \tag{17}$$

les quantités α_{-n} et R_m étant déterminées par les formules:

$$\alpha_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{\psi(\omega)} \omega^{n-1}\,d\omega, \tag{18}$$

$$R_m = \frac{1}{2\pi i x^m} \int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)} \omega^m d\omega}{\omega - x}. \tag{19}$$

En premier lieu, il faut calculer une limite supérieure de $|R_m|$, le module r étant grand. En choisissant le nombre entier m d'une manière convenable, on peut trouver une limite supérieure de cette quantité qui est d'un ordre de grandeur favorable. Transformons donc la formule (19) de la manière suivante:

$$R_m = \frac{1}{2\pi i x^m} \left\{ \int \frac{e^{\psi(\omega)} \omega^m d\omega}{\omega - x} + \right.$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{e^{\psi(\varrho e^{ia\sigma(\varrho)})} \varrho^m e^{i(m+1)a\sigma(\varrho)} \left(1 + ia\varrho \frac{d\sigma(\varrho)}{d\varrho}\right) d\varrho}{\varrho e^{ia\sigma(\varrho)} - r e^{i\varphi}} -$$

$$\left. - \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{e^{\psi(\varrho e^{-ia\sigma(\varrho)})} \varrho^m e^{-i(m+1)a\sigma(\varrho)} \left(1 - ia\varrho \frac{d\sigma(\varrho)}{d\varrho}\right) d\varrho}{\varrho e^{-ia\sigma(\varrho)} - r e^{i\varphi}} \right\} = A + B + D;$$

la première des trois intégrales étant prise le long de l'arc de circonférence, appartenant au contour γ_1. En désignant par C_n une constante finie et positive, on arrive évidemment au résultat:

$$|A| < C_1 r^{-m}.$$

Passons au calcul d'une limite supérieure de $|B|$ Supposons en premier lieu que le point x se trouve dans le voisinage de la courbe $\vartheta = a\sigma(\varrho)$, c'est-à-dire qu'on ait:

$$\varphi = a\sigma(r)(1 + \varepsilon(r)).$$

Le nombre β étant toujours fini, on peut choisir un nombre $a_1 > a$, vérifiant l'inégalité:

$$\frac{\pi}{2} < a_1 < \frac{\pi}{2} + \beta,$$

et un contour nouveau, remplaçant la courbe $\vartheta = a\sigma(\varrho)$ et composé de la manière suivante:

1° la courbe $\vartheta = a\sigma(\varrho)$ entre les points $\varrho_1 e^{ia\sigma(\varrho_1)}$ et $(r-\delta)e^{ia\sigma(r-\delta)}$, $(r+\delta)e^{ia\sigma(r+\delta)}$ et le point à l'infini, δ étant un nombre positif;

2° deux arcs de circonférences τ_1 et τ_2 autour de l'origine, le premier entre les points $(r-\delta)e^{ia\sigma(r-\delta)}$ et $(r-\delta)e^{ia_1\sigma(r-\delta)}$, le second entre les points $(r+\delta)e^{ia_1\sigma(r+\delta)}$ et $(r+\delta)e^{ia\sigma(r+\delta)}$;

3° la courbe $\vartheta = a_1\sigma(\varrho)$ entre les points $(r-\delta)e^{ia_1\sigma(r-\delta)}$ et $(r+\delta)e^{ia_1\sigma(r+\delta)}$. En désignant par γ_2 le contour, formé par les trois dernières courbes, on a évidemment:

$$|B| \leqq \frac{1}{2\pi r^m}\left|\int_{\varrho_1}^{r-\delta} \frac{e^{\psi(\varrho e^{ia\sigma(\varrho)})}\varrho^m e^{ia(m+1)\sigma(\varrho)}\left(1 + ia\varrho\frac{d\sigma(\varrho)}{d\varrho}\right)d\varrho}{\varrho e^{ia\sigma(\varrho)} - re^{i\varphi}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi r^m}\left|\int_{r+\delta}^{\infty} d\varrho\right| + \frac{1}{2\pi r^m}\left|\int_{\gamma_2} \frac{e^{\psi(\omega)}\omega^m d\omega}{\omega - x}\right| + \nu\left|e^{\psi(re^{ia_2\sigma(r)})}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{C_2}{r^m\delta}\int_{\varrho_1}^{\infty}\left|e^{\psi(\varrho e^{ia\sigma(\varrho)})}\right|\varrho^m d\varrho + \frac{1}{2\pi r^m\eta}\int_{\gamma_2}\left|e^{\psi(\omega)}\omega^m\right|\left|d\omega\right| + \nu\left|e^{\psi(re^{ia_2\sigma(r)})}\right|;$$

$$(a \leqq a_2 \leqq a_1).$$

Le point x étant situé sur la courbe $\vartheta = a\sigma(\varrho)$, il faut choisir $\nu = \frac{1}{2}$, dans l'autre cas $\nu = 1$. La quantité positive η est la valeur minimum de $|\omega - x|$, le point ω étant situé sur le contour γ_2.

Introduisons:

$$\varrho = r + \delta_1 \qquad (|\delta_1| \leqq \delta = \mu_1\sigma(r)),$$

μ_1 étant une constante positive, finie! On trouve:[1]

$$\varrho \sin a_1\sigma(\varrho) = a_1(r+\delta_1)\sigma(r+\delta_1)(1+\varepsilon(r)) =$$

$$= a_1 r\sigma(r)(1+\mu\sigma'(r+\theta\delta_1))(1+\varepsilon(r)) = a_1 r\sigma(r)(1+\varepsilon(r)), \quad (0<\theta<1),$$

[1] en supposant $\lim\limits_{\varrho=\infty}\sigma(\varrho) = 0$.

$$(|\mu| < \mu_1),$$

$$\varrho \sin a_1 \sigma(\varrho) - r \sin \varphi = r\sigma(r)(a_1 - a)(1 + \varepsilon(r));$$

c'est-à-dire, sur le contour γ_2, on a:

$$\frac{1}{|\omega - x|} \leqq \frac{1}{\eta} \leqq \frac{C_3}{\delta}.$$

La longueur de ce contour γ_2 est d'ordre $r\sigma(r)$. En tenant compte des inégalités (6), on peut écrire:

$$\left| e^{\psi(\varrho e^{ia\sigma(\varrho)})} \right| < e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}, \qquad (\nu_1 < \nu)$$

$$\left| e^{\psi(\varrho e^{ia_1\sigma(\varrho)})} \right| < e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}.$$

$M[F(\varrho)]$ désignant la valeur maximum du module de la fonction $F(\varrho)$, on arrive évidemment au résultat suivant:

$$|B| < \frac{C_2}{r^m \delta \varrho_1} M[\varrho^{m+2} e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}] + \frac{C_4 r \sigma(r)}{2\pi \delta r^m} M[\varrho^m e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}] +$$

$$+ e^{-e_n(r^{\nu_1})}.$$

L'expression $\varrho^{m+2} e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}$ devient un maximum pour $\varrho = \varrho_2$, si ϱ_2 satisfait à l'équation

$$(20) \qquad m + 2 = \nu_1 \varrho_2^{\nu_1} e_1(\varrho_2^{\nu_1}) \ldots e_n(\varrho_2^{\nu_1}).$$

Il est très favorable de s'arranger de manière que ce maximum ait lieu dans le voisinage de $\varrho = r$. Le nombre m étant arbitraire, on peut le déterminer par l'équation:

$$(21) \qquad m + 2 = \nu_1 r^{\nu_1} e_1(r^{\nu_1}) \ldots e_n(r^{\nu_1}) + \lambda \qquad \left(|\lambda| \leqq \frac{1}{2}\right).$$

En introduisant $\varrho_2 = r + \delta_2$, ces deux équations nous donnent:

$$(22) \qquad |\delta_2| \leqq \frac{r(1 + \varepsilon(r))}{2(m+2)},$$

car on a:

$$\nu_1 \varrho_2^{\nu_1} e_1(\varrho_2^{\nu_1}) \ldots e_n(\varrho_2^{\nu_1}) = \nu_1 r^{\nu_1} e_1(r^{\nu_1}) \ldots e_n(r^{\nu_1}) +$$

$$+ \delta_2 \nu_1 r_1^{\nu_1 - 1} e_1(r_1^{\nu_1}) \ldots e_{n-1}(r_1^{\nu_1}) \nu_1 r_1^{\nu_1} e_1(r_1^{\nu_1}) \ldots e_n(r_1^{\nu_1})(1 + \varepsilon(r)), \quad (n \geqq 1)$$

le point r_1 étant situé entre les points ϱ_2 et r. Évidemment, le membre droit de l'équation (20) croît constamment en même temps que ϱ, c'est-à-dire, on a:

$$\nu_1 r_1^{\nu_1} e_1(r_1^{\nu_1}) \ldots e_n(r_1^{\nu_1}) = m + 2 + \lambda_1, \qquad \left(|\lambda_1| < \frac{1}{2}\right).$$

On trouve donc:

$$\delta_2 = \frac{\lambda r}{m+2} \varepsilon(r). \qquad (n \geqq 1).$$

Dans le cas $n = 0$, on trouve:

$$\delta_2 = \frac{\lambda r}{m+2}(1 + \varepsilon(r)).$$

L'inégalité (22) est donc correcte. En se servant de cette inégalité, on arrive aux formules suivantes:

$$e_n(\varrho_2^{\nu_1}) = e_n(r^{\nu_1}) + \delta_2 \nu r_1^{\nu_1 - 1} e_1(r_1^{\nu_1}) \ldots e_n(r_1^{\nu_1}) = e_n(r^{\nu_1}) + \omega(r),$$

$$|\omega(r)| \leqq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon(r));$$

$$\varrho_2^{m+2} = r^{m+2}\left(1 + \frac{\lambda}{m+2}(1 + \varepsilon(r))\right)^{m+2} < C_5 r^{m+2} \qquad (n = 0)$$

$$\varrho_2^{m+2} = r^{m+2}\left(1 + \frac{\varepsilon(r)}{m+2}\right)^{m+2} < C_5 r^{m+2} \qquad (n \geqq 1),$$

$$M\left[\varrho^{m+2} e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}\right] \leqq C_6 r^{m+2} e^{-e_n(r^{\nu_1})}$$

$$M\left[\varrho^{m} e^{-e_n(\varrho^{\nu_1})}\right] \leqq C_6 r^{m} e^{-e_n(r^{\nu_1})}.$$

On trouve donc:

$$|B| < C_7 \frac{r^2}{\sigma(r)} e^{-e_n(r^{\nu_1})} < C_8 e^{-e_n(r^{\nu_2})}. \qquad (\nu_2 < \nu_1).$$

Si l'on ne peut pas écrire

$$\varphi = a\sigma(r)(1 + \varepsilon(r)),$$

on arrive d'une manière plus simple encore à la même limite supérieure de $|B|$.

En se servant de la même méthode, on trouve la même limite supérieure de $|C|$. $|A|$ étant évidemment d'un ordre inférieur, on arrive au résultat suivant.

Le nombre m étant déterminé par la formule (21), *la fonction* $\psi(\omega)$ *vérifiant l'inégalité suivante à partir d'une certaine valeur de* ϱ*:*

$$|\psi(\varrho e^{ia\sigma(\varrho)})| > e_n(\varrho^{\nu-\delta}),$$

on trouve:

$$|R_m| \leqq C e^{-e_n(r^{\nu_1})}. \qquad (\nu_1 < \nu).$$

Sans doute, on pourrait trouver une valeur plus petite de la limite supériure de $|R_m|$, mais la valeur trouvée suffit aux recherches suivantes.

Si l'on suppose que $\psi(\omega)$ vérifie une certaine condition, le fait qu'on peut trouver une telle limite supérieure du module de R_m, nous permet de démontrer le théorème suivant:

Si pour toutes les valeurs de m, on a $\alpha_{-m} = 0$, *il faut que l'identité suivante existe:*

$$\Pi(x) = e^x P(x),$$

$P(x)$ *étant un polynome. Cette identité est équivalente à l'identité:*

$$\psi(\omega) = \omega + \log P(\omega).$$

Comme on sait, $e^x P(x)$ *n'a qu'un nombre fini de zéros.*

Supposons donc pour un moment $\alpha_{-m} = 0$ pour toute valeur de m! Soit de plus l'inégalité suivante vérifiée dans l'intérieur du domaine $P'(a, \varrho)$, dès que r est suffisamment grand:

$$|\psi(x)| > r^{1+\mu},$$

μ étant un nombre positif fini, mais aussi petit qu'on le voudra! Par $P'(a, \varrho)$ nous désignons le domaine, situé du côté droit d'un contour, composé des courbes $\vartheta = \pm a\sigma(\varrho)$ et un arc de circonférence autour de l'origine au rayon ϱ. le contour étant parcouru dans le sens positif. Dans le demi-plan, situé du côté gauche de l'axe imaginaire, on a donc la relation:

$$\Pi(x) = (e^{\psi(x)}) + R_m(x),$$

où le premier terme apparaît, si le point x se trouve dans l'intérieur du domaine $\overline{T}$, appartenant à la fois au domaine $P'(a, \varrho)$ et au demi-plan gauche. S'il existe un tel domaine $\overline{T}$ et si r est suffisamment grand, on a pour tout point qui lui appartient:

$$|e^{\psi(x)}| < e^{-r^{1+\mu_1}} \qquad (0 < \mu_1 < \mu).$$

Dans le demi-plan gauche, on a les inégalités:

$$|R_m(x)| < e^{-r^{1+\mu_1}},$$

c'est-à-dire, on a:

$$|\Pi(x)| < e^{-r^{1+\mu_1}}.$$

En vertu du théorème II, la dernière inégalité entraîne l'identité:

$$\Pi(x) = 0,$$

ce qui est impossible. Nos hypothèses sont donc incompatibles.

Supposons enfin que dans l'intérieur du domaine $P'(a_0, \varrho)$, l'inégalité suivante soit verifiée:

$$r^{\nu_2} < |\psi(x)| \leqq r^{1+\mu} \qquad \left(\nu_2 > \frac{1}{2}\right).$$

Supposons de plus qu'on puisse choisir le nombre a_0 si grand, que le domaine $P'(a_0, \varrho)$ couvre toute la partie du plan des ω, située hors du cercle autour de l'origine dont le rayon est ϱ, pourvu que ϱ soit suffisamment grand. Soit l'axe réel négatif une coupure, et examinons dans toute la partie du plan, situé hors du cercle, la fonction analytique régulière:

$$\Pi(x) - e^{\psi(x)}.$$

La variable x étant défendue de franchir l'axe réel négatif et la circonférence, pour tout point dont le module est suffisamment grand, la relation suivante est vérifiée:

$$|\Pi(x) - e^{\psi(x)}| < e^{-r^{\nu_3}} \qquad \left(\nu_3 > \frac{1}{2}\right).$$

En effet, on a:

$$\Pi(x) - e^{\psi(x)} = R_m(x) - (e^{\psi(x)}),$$

où le dernier terme apparaît dès que le point x est situé dans le domaine $\overline{T}_1$ qui n'appartient pas au domaine $P'(a, \varrho)$. Dans le domaine $\overline{T}_1$, on a évidemment:

$$|e^{\psi(x)}| < e^{-r^{\nu_3}}.$$

Pour tout point x, l'inégalité suivante est vérifiée dès que r est suffisamment grand:

$$|R_m(x)| < e^{-r^{\nu_3}}.$$

En vertu du théorème II, on arriverait à l'identité:

$$\Pi(x) = e^{\psi(x)}.$$

Grâce aux hypothèses sur la nature de $\psi(x)$, $e^{\psi(x)}$ n'a pas de zéros dont les modules sont plus grands qu'une certaine quantité, c'est-à-dire, $\Pi(x)$ n'a qu'un nombre limité de zéros. Alors, il faut avoir

$$\Pi(x) = P(x)\,e^x,$$

et notre théorème est démontré. Dans le suivant, nous excluons le cas $\psi(\omega) = \omega + \log P(\omega)$.

Ces recherches préliminaires étant achevées, abordons l'étude définitif des zéros de nos fonctions! Le cas $\Pi(x) = P(x)e^x$ étant exclu, il est toujours possible de trouver un coefficient $\alpha_{-p} \neq 0$. En supposant r suffisamment grand $(r > \varrho)$, et

$$\alpha_{-\mu} = 0 \qquad (\mu < p)$$

$$\alpha_{-\mu} = 0 \qquad (p < \mu < p + p_1)$$

$$\alpha_{-p-p_1} \neq 0,$$

on a les relations suivantes:

$$\Pi(x) = e^{\psi(x)} + \alpha_{-p}x^{-p}(1 + q(x)), \tag{23}$$

le point x étant situé dans l'intérieur du domaine $P'(a, \varrho)$ et

$$(24) \qquad H(x) = \alpha_{-p} x^{-p}(1 + q(x))$$

pour tout point, situé dans toute l'autre partie du plan, $q(x)$ étant d'ordre de grandeur r^{-p_1}. Le point $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1 e^{i\vartheta(r_1, a_1)}$ étant un zéro et r_1 suffisamment grand, la dernière relation exige que ce zéro se trouve dans l'intérieur du domaine $P'(a, \varrho)$. En introduisant:

$$F(r, \varphi)\, e^{if(r,\varphi)} = F_1(r, a)\, e^{ia},$$

l'équation (23) entraîne les relations:

$$e^{F_1(r_1, a_1)\cos a_1} = |\alpha_{-p}|\, r_1^{-p}(1 + u\, r_1^{-p_1}),$$

$$-F_1(r_1, a_1)\cos a_1 = p \log r_1 - \log |\alpha_{-p}| + u_1 r_1^{-p_1},$$

les quantités variables u et u_1 étant toujours finies. La dernière relation nous donne:

$$a_1 = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \delta'\right),$$

δ' vérifiant l'équation:

$$F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) \sin \delta' = p \log r_1 - \log |\alpha_{-p}| + u_1 r^{-p_1}.$$

En déterminant δ par l'équation:

$$(25) \qquad F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) \sin \delta = p \log r - \log |\alpha_{-p}|,$$

la relation suivante est vérifiée sur les courbes $\vartheta = \pm\, \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$:

$$|e^{\psi(x)}| = |\alpha_{-p} x^{-p}|.$$

Les quantités δ et δ' sont évidemment d'ordre de grandeur:

$$\frac{\log \dfrac{r^p}{|\alpha_{-p}|}}{\psi(r)},$$

et on trouve évidemment:

$$r(\delta' - \delta) = \varepsilon(r).$$

Les zéros tendent donc toujours vers les courbes

$$\vartheta = \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$$

δ étant déterminé par l'équation (25). *La fonction $\psi(r)$ vérifiant l'inégalité:*

$$\psi(r) > r^{1+\mu} \qquad (\mu > 0),$$

les zéros tendent même vers les courbes

$$\vartheta = \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2}\right) \cdot$$

Maintenant nous allons passer au calcul du nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r, la valeur de r étant grande. L'axe réel positif étant un axe de symmetrie, il suffit d'examiner les zéros, situés sur le demi-plan supérieur. Supposons:

$$\alpha_{-p} > 0, \qquad \sigma(\varrho) = \frac{1}{\nu} \cdot$$

La relation (23) nous donne la formule:

$$F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) \cos \delta' = -p\,\vartheta\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) + (2k+1)\pi + u_2 r_1^{-p_1}$$

la quantité u_2 étant aussi finie. On peut transformer cette relation en

$$(26) \qquad F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta\right) = -\frac{p\pi}{2\nu} + (2k+1)\pi + \varepsilon(r_1).$$

S'il existait un zéro pour toute valeur de k, cette équation nous donnerait le module du k-ième zéro avec une très grande approximation.

Afin de trouver le vrai nombre des zéros, nous déterminons r par l'équation:

$$(27) \qquad F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) \cos \delta = -p\,\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) + 2k\pi.$$

Le point $x = re^{i\varphi}$ étant situé sur l'une ou l'autre des courbes $\vartheta = \pm\, \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$, l'équation suivante est vérifiée:

$$e^{\psi(x)} = \alpha_{-p}\, x^{-p}.$$

Puis, calculons la valeur de

$$N = \frac{1}{2\,\pi i}\int d \log \Pi(x),$$

l'intégrale étant prise le long de la circonférence au rayon r autour de l'origine, r étant déterminé par l'équation (27). La fonction $\Pi(x)$ peut être représentée de la manière suivante:

$$\Pi(x) = e^{\psi(x)}(1 + u), \qquad \left(|\varphi| \leqq \vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)\right)$$

$$\Pi(x) = \alpha_{-p}\, x^{-p}(1 + u), \quad \left(\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) \leqq \varphi \leqq 2\,\pi - \vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)\right)\cdot$$

Grâce au choix favorable de r, la quantité variable u est continue en tout point du contour d'intégration. Examinons la valeur de de cette quantité aux environs du point d'intersection de la circonférence avec la courbe $\vartheta = \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)\cdot$ Le nombre d étant déterminé par l'inégalité:

$$|d| \leqq d_1 = \frac{c}{\psi(r)},$$

nous avons trouvé plus haut (pag. 14):

$$F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta + d\right) = F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) + \varepsilon(r).$$

Nous avons donc une relation de la forme:

$$F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta + d\right) \cos(\delta + d) = -\frac{p\pi}{2\,\nu} + 2\,k\pi + \varepsilon(r).$$

Sur notre circonférence les relations suivantes sont donc vérifiées:

$$\frac{\alpha_{-p}x^{-p}}{e^{\psi(x)}} = \left|\frac{\alpha_{-p}x^{-p}}{e^{\psi(x)}}\right| \frac{e^{-ip\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta+d\right)}}{e^{iF_1\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta+d\right)\cos(\delta+d)}} =$$

$$= \left|\frac{\alpha_{-p}x^{-p}}{e^{\psi(x)}}\right| e^{-i(2k\pi+\varepsilon(r))}, \quad \left(\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta-d_1\right) \leqq \varphi \leqq \vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right);$$

$$\frac{e^{\psi(x)}}{\alpha_{-p}x^{-p}} = \left|\frac{e^{\psi(x)}}{\alpha_{-p}x^{-p}}\right| e^{i(2k\pi+\varepsilon(r))}$$

$$\left(\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta\right) \leqq \varphi \leqq \vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta+d_1\right)\right).$$

La quantité u jouit donc de la propriété, exprimée par la relation:

$$R(u) > 0,$$ [1]

la valeur de φ étant déterminée par l'inégalité:

$$\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta-d_1\right) \leqq |\varphi| \leqq \vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta+d_1\right).$$

De plus, on a évidemment:

$$F_1\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta\pm d_1\right)\sin(\delta\pm d_1) = p\log r - \log|\alpha_{-p}| \pm c + \varepsilon(r).$$

Donc, pour tout point dont l'argument peut s'écrire:

$$|\varphi| \neq \vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta+d\right),$$

on a l'inégalité suivante:

$$|u| \leqq e^{-c}(1+\varepsilon(r)).$$

En prenant par exemple $c=1$, on trouve:

$$R(1+u) > 0,$$

inégalité qui est vérifiée sur toute la circonférence. Alors, on a

$$\int d\log(1+u) = 0.$$

[1] Par $R(u)$ on comprend la partie réelle de u.

Par conséquence, nous arrivons au résultat:

$$2\pi i N = \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} F_1(r, a)\, e^{ia} + \int_{\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta\right)}^{2\pi-\vartheta\left(r,\frac{\pi}{2}+\delta\right)} - p i \varphi .$$

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)\cos\delta}{\pi} - p + \frac{2p\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{2\pi} =$$

(28)

$$= \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) + \varepsilon(r) = 2k - p.$$

L'équation (26) nous donne donc, avec une très grande exactitude, la valeur du module du k-ième zéro, situé sur le demi-plan supérieur.

Dans le cas, où l'on a:

$$\lim_{\varrho\to\infty} \sigma(\varrho) = 0,$$

on trouve:

$$(29) \qquad N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p + \varepsilon(r) = 2k - p,$$

le nombre k étant déterminé par l'équation (27).

En supposant $\alpha_{-p} < 0$, il faut déterminer r par l'équation

$$(27\,\mathrm{b}) \quad F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)\cos\delta = -p\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right) + (2k+1)\pi,$$

et on trouve:

$$(28\,\mathrm{b}) \quad N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p + \frac{p}{2\nu} + \varepsilon(r) = 2k + 1 - p,$$

$\Pi(x)$ étant d'ordre ν,

$$(29\,b) \qquad N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p + \varepsilon(r) = 2\,k + 1 - p,$$

$\Pi(x)$ étant d'ordre infini.

Alors, les résultats de nos recherches sur les zéros des fonctions entières $\Pi(x)$ sont:

$\Pi(x)$ étant d'ordre fini ν, les arguments des zéros tendent vers l'une ou l'autre des valeurs:

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2\,\nu}.$$

Dès que r est suffisamment grand, le nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r, peut être exprimé par:

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p\left(1 - \frac{1}{\nu}\right),$$

le coefficient α_{-p} étant le premier des α_{-m} qui ne s'évanouit. Ce coefficient α_{-p} étant positif, cette valeur du nombre des zéros est exacte en même temps que le valeur de r rend $N + p$ pair. Dans le cas $\alpha_{-p} < 0$, on trouve une valeur exacte, en choisissant r de manière à rendre $N + p$ impair.

$\Pi(x)$ étant d'ordre infini, les arguments des zéros tendent vers zéro de la même manière que $\pm \frac{\pi}{2}\sigma(r)$. Dès que cette quantité est d'ordre de grandeur plus petit que r^{-1}, les zéros tendent évidemment vers l'axe réel positif. Le nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r, est donné par:

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p.$$

Le coefficient α_{-p} étant positif, cette valeur est exacte, si le nombre $N + p$ est pair; dans le cas contraire, il faut avoir $N + p$ impair. La quantité δ est déterminée par l'équation (25).

En tous cas, le nombre des zéros peut être exprimé de la manière suivante:

$$N = \frac{\psi(r)}{\pi}(1 + \varepsilon(r)),$$

$\varepsilon(r)$ *tendant vers zéro en même temps que* r^{-1}.

Il est très facile de calculer les zéros des fonctions $\Pi(x) + C$, C étant une constante finie. *Les zéros tendent vers les courbes:*

$$\varphi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \delta_1\right)\sigma(r),$$

δ_1 étant d'ordre de grandeur $\dfrac{C}{\psi(r)}$. Le terme principal $a_{-p}x^{-p}$ est évidemment remplacé par C. *Le nombre des zéros est donné par*

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi},$$

C étant positif, cette valeur est exacte en même temps que N est pair, C étant négatif, il faut avoir N impair.

On doit se souvenir qu'on a:

$$F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta_1\right) = F_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon(r).$$

§ 3.

Dans ce paragraphe, nous allons examiner les propriétés de la fonction $\dfrac{d\Pi(x)}{dx} = \Pi'(x)$. Évidemment, cette fonction peut être représentée par l'intégrale:

$$\Pi'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{\psi(\omega)}d\omega}{(\omega - x)^2}. \tag{30}$$

En se servant de la méthode, employée plus haut, on trouve:

$$\Pi'(x) = (e^{\psi(x)}\psi'(x)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}d\omega}{(\omega - x)^2}, \tag{31}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\psi(\omega)}d\omega}{(\omega-x)^2}\right|=\eta(r), \tag{32}$$

car la valeur de l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau}\frac{e^{\psi(\omega)}d\omega}{(\omega-x)^2},$$

τ étant un contour, renfermant le point x, est évidemment:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau}\frac{e^{\psi(\omega)}d\omega}{(\omega-x)^2}=e^{\psi(x)}\psi'(x).$$

La fonction $\psi'(\omega)$ étant régulière dans le domaine $P(a, R_0)$, on peut donc dire ce qui suit:

Dans l'intérieur du domaine $P\left(\frac{\pi}{2}, R_0\right)$, $|\Pi'(x)|$ *converge vers l'infini comme:*

$$|e^{\psi(x)}\psi'(x)|.$$

Dans toute la partie du plan qui n'appartient pas au domaine $P\left(\frac{\pi}{2}+\delta, R_0\right)$, δ *étant un nombre positif aussi petit qu'on le voudra,* $\Pi(x)$ *tend vers zéro en même temps que* r^{-1}.

Examinons l'intégrale:

$$\Pi_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)d\omega}{\omega-x}.$$

Cette intégrale a toujours un sens. De plus, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$|\Pi_2(x)-\Pi'(x)|<\varepsilon,$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, pourvu que r soit suffisamment grand. On trouve donc une nouvelle représentation de la fonction $\Pi'(x)$:

$$\Pi'(x) = \Pi_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega - x} =$$

(33)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega - x} = (e^{\psi(x)}\psi'(x)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega - x}.$$

En développant dans la série de puissances:

$$\Pi'(x) = \alpha'_0 + \alpha'_1 x + \cdots + \alpha'_m x^m + \cdots,$$

on trouve

(34) $$\alpha'_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega^{m+1}}.$$

En intégrant par parties, on obtient la relation:

$$\frac{\alpha'_m}{m+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^{\psi(\omega)}\,d\omega}{\omega^{m+2}} = \alpha_{m+1},$$

relation qui démontre encore l'exactitude de la représentation de $\Pi'(x)$ par les formules (33).

En développant $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega - x}$ dans la série demi-convergente:

(35) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega}{\omega - x} = \alpha'_{-1}x^{-1} + \cdots + \alpha'_{-m}x^{-m} + R'_m,$$

on trouve:

$$\alpha'_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,d\omega = 0$$

$$\alpha'_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} e^{\psi(\omega)}\psi'(\omega)\,\omega^{n-1}\,d\omega =$$

(36)

$$= \frac{n-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} e^{\psi(\omega)}\,\omega^{n-2}\,d\omega = -(n-1)\,\alpha_{-(n-1)}.$$

Le premier des coefficients α'_{-n} qui est distinct de zéro est donc:

(37) $$\alpha'_{-p-1} = -p\alpha_{-p}.$$

De plus, on a:

$$|R'_m| \leqq e^{-e_n(r^{\nu-\delta})},$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif δ, les nombres n et ν étant les mêmes qu'il faut choisir aux calculs des zéros de $\Pi(x)$, le nombre m étant choisi comme dans le paragraphe précédent.

Abordons maintenant l'étude des zéros! Le point $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1 e^{i\vartheta(r_1, a_1)}$ étant un zéro, on a:

$$e^{F_1(r_1, a_1)\cos a_1} |\psi'(r_1 e^{i\vartheta(r_1, a_1)})| = p|\alpha_{-p}| r_1^{-p-1}(1 + u r_1^{-p_1}),$$

relation qu'on peut transformer en:

$$F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right)\sin\delta' = (p+1)\log r_1 - \log p|\alpha_{-p}| + \\ + \log|\psi'(x_1)| + u_1 r_1^{-p_1},$$

en introduisant $a_1 = \frac{\pi}{2} + \delta'$. En déterminant δ par l'équation:

(38) $$F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)\sin\delta = (p+1)\log r - \log p|\alpha_{-p}| + \log|\psi'(x)|,$$

on a sur les courbes:

$$\varphi = \pm\vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$$

la relation:

$$|e^{\psi(x)}\psi'(x)| = |\alpha'_{-p-1}x^{-p-1}|.$$

Évidemment les quantités δ et δ' sont d'ordre de grandeur:

$$\frac{\log\left(\dfrac{r^{p+1}\left|\psi'\left(re^{i\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}\right)\right|}{p|\alpha_{-p}|}\right)}{\psi(r)}.$$

Les zéros tendent donc vers les courbes $\varphi = \pm\, \vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$, δ *étant déterminé par l'équation* (38).

Supposons maintenant α_{-p} positif! Évidemment on doit avoir:

$$F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) \cos \delta' + \arg \psi'\left(r_1 e^{i\vartheta\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right)}\right) =$$

$$= -(p+1)\,\vartheta\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) + 2\,k\pi + u_2 r_1^{-p},$$

relation qui se simplifie en:

$$F_1\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta\right) + \frac{\pi}{2} = -\,p\,\vartheta\left(r_1, \frac{\pi}{2} + \delta\right) + 2\,k\,\pi + \varepsilon(r_1).$$

Par arg $f(x)$, je veux désigner l'argument de la fonction $f(x)$. Par hypothèse, on a:

$$\arg\left\{re^{i\vartheta(r,a)}\,\psi'(re^{i\vartheta(r,a)})\right\} = a + \varepsilon(r),$$

ce qui démontre l'exactitude des calculs précédents.

Pour trouver le vrai nombre des zéros, déterminons r par l'équation:

$$F_1\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) \cos \delta + \arg\left\{re^{i\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)}\,\psi'\left(re^{i\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)}\right)\right\} =$$

$$= -\,p\,\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right) + (2\,k + 1)\pi.$$

Dans le point $x = re^{i\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2} + \delta\right)}$, les deux termes principaux $e^{\psi(x)}\psi'(x)$ et $\alpha'_{-p-1}\, x^{-p-1}$ sont donc égaux. Calculons enfin la valeur de l'intégrale:

$$N = \frac{1}{2\,\pi\, i}\int d \log \Pi'(x),$$

l'intégrale étant prise le long de la circonférence au rayon r autour de l'origine et dans le sens direct. La fonction $\Pi'(x)$ peut évidemment être représentée de la manière suivante:

$$\Pi'(x) = e^{\psi(x)}\,\psi'(x)(1+u), \qquad \left(|\varphi| \leqq \vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)\right),$$

$$\Pi'(x) = -p\alpha_{-p}x^{-p-1}(1+u),$$

$$\left(\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right) \leqq \varphi \leqq 2\pi - \vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)\right).$$

En se servant des méthodes, employées dans le paragraphe précédent, on trouve

$$\int d \log(1+u) = 0,$$

$$(39)\quad N = \frac{F\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} + \frac{1}{2} - (p+1) + \frac{p\vartheta\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} + \varepsilon(r) =$$

$$= (2k+1) - (p+1) = 2k - p.$$

Les zéros ont donc les propriétés suivantes:

$\Pi(x)$ étant d'ordre ν, les arguments des zéros de la fonction $\Pi'(x)$ tendent vers l'une ou l'autre des valeurs:

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2\nu}.$$

Le nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r est donné par:

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p - \frac{1}{2} + \frac{p}{2\nu},$$

pourvu que r soit suffisamment grand.

$\Pi(x)$ étant d'ordre infini, les arguments des zéros tendent vers zéro comme $\pm \frac{\pi}{2}\sigma(r)$. Le nombre des zéros est donné par:

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\pi} - p - \frac{1}{2}.$$

Le coefficient α_{-p} étant le premier des coefficients α_{-n} qui ne s'évanouit, N nous donne le vrai nombre des zéros, si $N+p$ est *pair, α_{-p} étant positif, si $N+p$ est impair dans le cas contraire. Le nombre δ est donné par l'équation* (38).

En tous cas, on a

$$N = \frac{\psi(r)(1+\varepsilon(r))}{\pi}.$$

§ 4.

Dans ce paragraphe, je veux examiner quelques fonctions spéciales. En choisissant:

$$\psi(\omega) = \omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

α étant réel, positif, $(\alpha < 2)$, on obtient les fonctions connues $\alpha E_\alpha(x)$. Comme on le voit, en se servant des formules, données plus haut, on peut trouver toutes les propriétés, découvertes par MM. Mittag-Leffler et Wiman. Passons à l'étude de la fonction $\alpha E'_\alpha(x)$ et considérons en premier lieu le cas $0 < \alpha < 1$. On a:

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} < 0,$$

$$\alpha'_{-2} = -\alpha_{-1} = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} > 0.$$

Alors, les zéros tendent vers l'une ou l'autre des courbes:

$$\varphi = \pm\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \delta\right),$$

la quantité δ étant déterminée par l'équation:

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\delta}{\alpha} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\log r + \log\left|\frac{\Gamma(-\alpha)}{\alpha}\right|.$$

Les zéros, situés sur le demi-plan supérieur, ont évidemment une distance du vecteur $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2}$ qui tend vers l'infini en même temps que les modules des zéros. Le nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r est approximativement donné par la formule

$$N' = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} + \frac{\alpha}{2} - 1\frac{1}{2},$$

cette valeur du nombre des zéros étant exacte, si r est choisi de manière à rendre N' pair. Toutefois, il faut que r soit suffisamment grand. Le point $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ étant un zéro, on peut trouver r_1, en résolvant l'équation:

$$r_1^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi + \varepsilon(r_1).$$

Les formules équivalentes dans la théorie des fonctions $E_\alpha(x)$ sont:

$$N = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} + \frac{\alpha}{2} - 1,$$

où il faut que N soit pair, et

$$r_1^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi + 2k\pi + \varepsilon(r_1).$$

Dans le cas $1 < \alpha < 2$, on a:

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} > 0,$$

$$\alpha'_{-2} < 0.$$

Les zéros tendent vers les mêmes courbes comme plus haut, et ceux, situés sur le demi-plan supérieur, tendent même vers le vecteur $\varphi = \frac{\alpha\pi}{2}$. En effet, leurs distances de ce vecteur tendent vers zéro en même temps que leurs modules croissent vers l'infini. Le nombre des zéros est aussi donné par:

$$N' = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} + \frac{\alpha}{2} - 1\frac{1}{2},$$

mais cette formule nous donne le vrai nombre des zéros dont les modules sont plus petits que r, si N' est impair. Il faut que le module r_1 vérifie l'équation:

$$r_1^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \varepsilon(r_1).$$

En tenant compte des formules qui nous donnent les modules des zéros, on arrive à ce qui suit: *Entre deux zéros consécutifs de $E_\alpha(x)$ se trouve un zéro de $E'_\alpha(x)$ et vice versa, pourvu que les modules de ces zéros soient suffisamment grands.*[1]

Considérons un cercle avec le rayon r autour de l'origine! Supposons que, dans l'intérieur de ce cercle, se trouvent N_1 zéros de la fonction $E_\alpha(x)$ et N'_1 zéros de la fonction $E'_\alpha(x)$! Le rayon r étant suffisamment grand et m un nombre entier, nous obtenons des formules de ce paragraphe les équations:

$$N_1 - N'_1 = 2m$$

ou

$$N_1 - N'_1 = 2m + 2,$$

$$N - N' = \frac{1}{2}.$$

La dernière relation nous donne l'une ou l'autre des équations:

$$(40) \qquad \begin{aligned} N_1 - N'_1 &= 0 \\ N_1 - N'_1 &= 2. \end{aligned}$$

Supposons maintenant:

$$\psi(\omega) = \omega^{\frac{1}{\alpha}} (\log \omega)^{\frac{1}{\alpha_1}} \ldots (\log_n \omega)^{\frac{1}{\alpha_n}} = F_1(\varrho, a)\, e^{ia}, \qquad (\alpha < 2).$$

On a:

$$\omega\psi'(\omega) = \frac{1}{\alpha}\psi(\omega)\left\{1 + \frac{1}{\alpha_1 \log \omega} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n \log \omega \ldots \log_n \omega}\right\} =$$

$$= \frac{\psi(\omega)}{\alpha}\left\{1 + \frac{1+v}{\alpha_1 \log \varrho}\right\} = F_3(\varrho, a)\, e^{i(a_1+\vartheta)}.$$

---

[1] Il faut que ces zéros se trouvent sur le même demi-plan.

Évidemment, v satisfait à l'inégalité:

$$|v| < \eta(\varrho).$$

Alors, en supposant

$$|a| \neq \frac{\pi}{2},\ 0,$$

nous obtenons la relation:

$$\operatorname{tg}(a_1 + \vartheta) = \operatorname{tg} a \left(1 + \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}\right),$$

ce qui nous donne:

$$\operatorname{tg}(a_1 + \vartheta - a) = \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}.$$

Nous avons évidemment les relations suivantes:

$$\frac{F_1(\varrho, a)}{\alpha} = F_3(\varrho, a)\left(1 + \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}\right),$$

$$F_3(\varrho, a) \cos(a_1 + \vartheta) = \frac{F_1(\varrho, a)}{\alpha}\left\{\left(1 + \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}\right)\cos a + \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}\sin a\right\},$$

c'est-à-dire, on trouve:

$$\lim_{|a| = \frac{\pi}{2}} \cos(a_1 + \vartheta) = \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho},$$

$$\frac{\pi}{2} - \lim_{a = \frac{\pi}{2}} (a_1 + \vartheta) = \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho}.$$

En général, on a donc:

$$\operatorname{tg}(a_1 + \vartheta - a) = \frac{\varepsilon(\varrho)}{\log \varrho},$$

(41) $$F_1(\varrho, a + \delta) = F_1(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho),$$

δ étant d'ordre $\dfrac{C \log \varrho}{\psi(\varrho)}$.

Ces recherches étant achevées, on voit tout de suite que notre fonction spéciale jouit de toutes les propriétés, énumérées dans le premier paragraphe, et les fonctions entières:

$$E_{a a_1 \ldots a_n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_a} \frac{e^{\omega^{\frac{1}{a}} (\log \omega)^{\frac{1}{a_1}} \ldots (\log_n (\omega))^{\frac{1}{a_n}}}}{\omega - x} d\omega$$

ont les propriétés caractéristiques des fonctions $\Pi(x)$.[1] Les arguments des zéros des fonctions $E_{a a_1 \ldots a_n}(x)$ et $E'_{a a_1 \ldots a_n}(x)$ tendent vers l'une ou l'autre des valeurs $\pm \frac{a\pi}{2}$. $F_1(\varrho, a)$ étant une expression très compliquée, il faut employer la valeur suivante du nombre des zéros des deux fonctions:

$$N, N' = \frac{r^{\frac{1}{a}} (\log r)^{\frac{1}{a_1}} \ldots (\log_n r)^{\frac{1}{a_n}}}{\pi} (1 + \varepsilon(r)).$$

Mais en tenant compte de la relation (41), on trouve:

$$N_1 - N'_1 = 2$$

ou

$$N_1 - N_1' = 0.$$

De plus entre deux zéros consécutifs de l'une des deux fonctions se trouve un zéro de l'autre fonction.

Admettons:

$$\psi(\omega) = e_n(\omega^\nu) = F_1(\varrho, a) e^{ia}, \qquad (n \geqq 1).$$

On trouve:

$$\omega \psi'(\omega) = \nu \omega^\nu \ldots e_{n-1}(\omega^\nu) e_n(\omega^\nu),$$

$$\omega \psi'(\omega) = F_3(\varrho, a) e^{i(a_1 + \vartheta)} = F_3(\varrho, a) e^{ia\left(1 + \frac{1+\varepsilon(\varrho)}{e_{n-1}(\varrho^\nu)}\right)}$$

$$\operatorname{tg}(a_1 + \vartheta - a) = \frac{a(1 + \varepsilon(\varrho))}{e_{n-1}(\varrho^\nu)}.$$

Par conséquent, on a:

$$F_1\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta\right) = F_1\left(\varrho, \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon(\varrho),$$

---

[1] Cette fonction a été construite par M. Mittag-Leffler. (Voir sa note, citée pag. 2.)

δ étant d'ordre $\dfrac{C \log \varrho}{e_n(\varrho^v)}$,

$$F_1\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta'\right) = F_1\left(\varrho, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \varepsilon(\varrho), \tag{42}$$

δ' étant déterminé par

$$\delta' = \frac{\log |\omega \psi'(\omega)|}{\psi(\varrho)}(1 + \varepsilon(\varrho)) = \frac{e_{n-1}(\varrho^v)}{e_n(\varrho^v)}(1 + \varepsilon(\varrho)).$$

$$\left(\omega = \varrho e^{i\vartheta\left(\varrho, \frac{\pi}{2} + \delta'\right)}\right).$$

La fonction:

$$E_a^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{e_n\left(\omega^{\frac{1}{a}}\right)} d\omega}{\omega - x}$$

et sa dérivée possèdent donc toutes les propriétes des fonctions $\Pi(x)$. Par conséquent, leur mode de croissance est connu. On sait de même comment sont situés leurs zéros. Leurs nombres sont donnés par:

$$N, N' = \frac{e_n\left(r^{\frac{1}{a}}\right)}{\pi}(1 + \varepsilon(r)),$$

$$N = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi} - p,$$

$$N' = \frac{F_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi} - p - 1,$$

c'est-à-dire, on a:

$$N - N' = 1.$$

En conséquence, l'une ou l'autre des équations suivantes est vérifiée:

$$N_1 - N'_1 = 0,$$

$$N_1 - N'_1 = 2.$$

De même, entre deux zéros consécutifs de $E_a^{(n)}(x)$ se trouve un zéro de $E'^{(n)}_a(x)$ et vice versa.

Dans le cas spécial $n=1$, on trouve:

$$N = e^{\sqrt{r^{\frac{2}{a}} - \frac{\pi^2}{4}}} - p,$$

$$N' = e^{\sqrt{r^{\frac{2}{a}} - \frac{\pi^2}{4}}} - p - 1.$$

Il serait facile de multiplier le nombre des exemples, mais cela n'a aucun intérêt. Au lieu de cela, on serait tenté d'examiner l'intégrale (11), en admettant d'autres hypothèses sur la nature de la fonction $\psi(\omega)$. C'est ainsi qu'on obtient des fonctions $\Pi(x)$, comprenant les fonctions $E_a(x)$, $(a>2)$. Sans aucune doute, ces recherches seraient encore plus faciles que ceux que nous venons de faire. Les fonctions qui nous intéressent le plus sont $E_a(x)$ et $E'_a(x)$. Les propriétés de celle-là sont connues. Tous leurs zéros sont négatifs. En appliquant le théorème de LAGUERRE, on trouve donc quelques propriétés des zéros de $E'_a(x)$.

En faisant la transformation

$$\omega = \omega'^{\frac{1}{a}},$$

la quantité $a=\beta+i\gamma$ étant imaginaire, $\beta>0$, l'intégrale (11) définit des fonctions $\Pi(x)$, renfermant les fonctions $E_a(x)$, $E_a^{(2)}(x)$. Il n'y a aucune difficulté de modifier les calculs de manière à trouver les propriétés de ces nouvelles fonctions entières.

Notes.

J'ai dit (pag. 8) que le théorème II a rapport au module minimum d'une fonction analytique, ce qui est évidemment une erreur. Cependant, en se servant des deux théorèmes, cités dans le premier paragraphe, on en peut trouver deux autres qui se rapportent au module minimum d'une fonction analytique. C'est M. WIMAN qui a conduit mon attention sur l'existence de ces théorèmes intéressants. Les voici:

III. *Soit une fonction analytique de la variable complexe* $x = re^{i\varphi} = u + iv$ *qui jouit des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine connexe T, faisant partie de l'angle:*

$$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi - \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2k}.$$

2°. *Sur le contour de ce domaine T, on a:*

$$|f(x)| \geqq C,$$

C étant une constante finie.

3°. *A l'intérieur de T, l'inégalité*

$$|f(x)| > e^{-\eta(r) r^k}$$

est vérifiée dès que r est suffisamment grand.

Dans ces conditions, on aura pour tout point x du domaine T l'inégalité:

$$|f(x)| \geqq C,$$

pourvu que le module $|x|$ soit suffisamment grand.

Considérons un domaine T_1, formé de tous les points x de T dont les modules sont plus grands que r_1. Ce nombre étant choisi suffisamment grand, $f(x)$ n'a pas de zeros, situés à l'intérieur de T_1, et la fonction $\frac{1}{f(x)}$ vérifie donc toutes les hypothèses, enumérées dans le théorème I. Par conséquent, l'inégalité

$$\frac{1}{|f(x)|} \leq C$$

est vérifiée pour tout point, appartenant au domaine T_1, c'est-à-dire, on a:

$$|f(x)| \geq C.$$

IV. *Soit une fonction analytique $f(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi} = u + iv$ qui jouit des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine connexe T, renfermant la partie de l'angle*

$$-\frac{\pi}{2k} \geq \varphi - \varphi_0 \geq \frac{\pi}{2k}$$

qui se trouve hors du cercle $|x| = r_0$.

2°. *Sur le contour de T, on a:*

$$|f(x)| \geq C,$$

C étant une constante finie.

3°. *A l'intérieur de ce domaine, on a:*

$$|f(x)| > e^{\frac{1}{\eta(r)} r^k}.$$

Dans ces conditions, cette fonction n'existe pas.

On peut évidemment trouver un domaine T_1 où $\frac{1}{f(x)}$ vérifie toutes les hypothèses, énumérées dans le théorème II. Ce domaine est formé de tous les points x du domaine T dont les modules sont plus grands qu'un certain nombre positif et fini r_1. Par conséquent, on arrive à l'identité absurde:

$$\frac{1}{f(x)} = 0.$$

On peut démontrer ces deux théorèmes, en se servant de la propriété de la fonction $\log |f(x)|$ d'être une fonction harmonique des deux variables u et v. Evidemment, cette fonction est aussi régulière à l'intérieur des domaines T_1. De cette manière, il ne faut pas connaître les théorèmes I et II.

Retournons encore une fois à ces théorèmes! En examinant le mode de les prouver, on voit tout de suite qu'ils subsistent même en supposant que les inégalités:

$$|f(x)| < e^{\eta(r) r^a}$$

et

$$|f(x)| < e^{-\frac{1}{\eta(r)} r^k}$$

ne sont vérifiées que sur une infinité d'arcs de circonférence dont les rayons croissent infiniment. Par conséquent, si l'on admet que les fonctions $f(x)$ qui vérifient les hypothèses de l'un ou de l'autre des théorèmes III ou IV ne satisfassent à la condition 3 que pour une infinité de modules r_n, croissant vers l'infini en même temps que n, ces théorèmes ne cessent pas d'être vrais, pourvu que les fonctions $f(x)$ ne possèdent pas de zéros à l'intérieur des domaines T. Le théorème IV peut être interprété d'une manière fort intéressante.

Soit une fonction analytique $f(x)$ qui jouit des propriétés suivantes:

1°. *Elle est régulière à l'intérieur et sur le contour d'un domaine T, renfermant la partie de l'angle*

$$-\frac{\pi}{2k} \geqq \varphi - \varphi_0 \geqq \frac{\pi}{2k}$$

qui se trouve hors du cercle $|x| = r_0$.

2°. *Sur le contour de ce domaine, on a:*

$$|f(x)| \geqq C,$$

C étant une constante finie.

3°. *Sur les parties des arcs de circonférence $|x| = r_n$* [1] *qui sont situées à l'intérieur du domaine T, on a l'inégalité:*

$$|f(x)| > e^{\frac{1}{\eta(r)} r^k}.$$

Dans ces conditions, la fonction $f(x)$ a une infinité de zéros $x_1 x_2 \dots x_n \dots$, situés dans l'intérieur de T. L'exposant de convergence μ de la suite $|x_1|, |x_2|, \dots |x_n| \dots$ vérifie l'inégalité:

$$\mu \geqq k.$$

Grâce au théorème IV, il faut d'abord que $f(x)$ possède une infinité de zéros, situés à l'intérieur de T. Construisons donc la fonction entière

$$f_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) e^{\frac{x}{x_n} + \dots + \frac{x_p}{p x_n^p}},$$

---

[1] $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$, r_n croissant vers l'infini en même temps que n.

et considérons la fonction analytique $\frac{f(x)}{f_1(x)}$. Cette fonction vérifie évidemment toutes les hypothèses du théorème IV, si l'on a pas pour une infinité des arcs $|x| = r_n$ l'inégalité:

$$|f_1(x)| > e^{\frac{1}{\eta} r^k},$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif η, pourvu que r soit suffisamment grand. Pour une infinité d'indices n, on a donc:

$$|x_n| < n^{\frac{1}{k} - \delta}. \tag{42}$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif δ, pourvu que n soit suffisamment grand, c'est-à-dire, on a:

$$\mu \geqq k.$$

Enfin, si l'on sait comment décroît la fonction $\eta(r)$, on peut préciser l'inégalité (42).

On peut modifier les théorèmes I et III de la manière suivante. En remplaçant C par Ce^{r^β} ou Ce^{-r^β}, [1] on arrive à l'une ou l'autre des inégalités:

$$|f(x)| < Ce^{r^\beta},$$

$$|f(x)| > Ce^{-r^\beta},$$

inégalités qui sont vérifiées en tout point du domaine T. Les deux autres théorèmes ne cessent pas d'être vrais, si l'on introduit ces hypothèses modifiées.

Enfin, en faisant des transformations de variables, on trouve une foule de théorèmes nouveaux.

[1] $\beta < k$.

Errata.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de:*	*Lisez:*
2	27	$E_\alpha(x)$	$\alpha E_\alpha(x)$
9	26	$\lvert \psi(x) \rvert$	$\lvert \psi(x e^{i\varphi_0}) \rvert$
22	5	$\lvert C \rvert$	$\lvert D \rvert$
31	6	$\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta_1\right) \sigma(r)$	$\varphi = \pm\, \vartheta \left(r, \frac{\pi}{2} + \delta_1\right)$