ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano

Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XIV

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—

1907.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIII.° (SERIE III.ª)

Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation.

(*Par* Samuel Lattès, *à Aix.*)

INTRODUCTION.

1. Les équations fonctionnelles sont, dans le sens le plus général, des équations définissant des fonctions inconnues par des relations entre ces fonctions inconnues et des fonctions données.

Il existe bien des catégories d'équations fonctionnelles suivant la nature de ces relations. Une première classe par exemple est constituée par les équations différentielles. D'autres équations, étudiées par divers géomètres, forment une deuxième classe: ce sont celles qui définissent une fonction inconnue par les valeurs que prennent certaines intégrales définies dépendant de cette fonction.

On peut concevoir encore bien d'autres espèces d'équations fonctionnelles: mais, si on excepte les deux classes précédentes, il semble que les équations fonctionnelles étudiés jusqu'ici aient été surtout celles qui definissent les fonctions inconnues par des égalités entre les valeurs de ces fonctions et les valeurs qu'elles prennent lorsqu'on y remplace les variables par des fonctions connues ou même inconnues des mêmes variables. Divers géomètres se sont occupés des équations de cette nature: je citerai, sur ce sujet, les travaux d'Abel (*) et de MM. Kœnigs (**), Grévy (***), Leau (****), Bourlet (*****).

(*) *Œuvres complètes,* t. II, pag. 36.

(**) *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bullet. des Sciences mathém.es, 1883). — *Recherches sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1884). — *Nouvelles recherches sur les équat. fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1885).

(***) *Sur les équat. fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1894).

(****) *Étude sur les équat. fonctionnelles à une ou à plusieurs variables* (Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, tome XI, 1897).

(*****) *Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini* (Annales de l'École Normale, 1897). — *Sur certains équations analogues aux équations différentielles* (Annales de l'École Normale, 1899).

Parmi ces dernières équations, une catégorie particulière importante est formée des équations qui définissent une multiplicité, courbe ou surface, invariante par une transformation.

On sait que la recherche d'une multiplicité invariante par un groupe *continu* de transformations dépend d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Mais si, au lieu d'un groupe *continu*, on considère une transformation *isolée*, la recherche d'une multiplicité invariante par cette transformation dépend d'*équations fonctionnelles.*

C'est ainsi que les équations suivantes, étudiées par M. Kœnigs, et où $\psi(x)$ désigne la fonction inconnue:

$$\psi[\varphi(x)] = \psi(x) + a \qquad \psi[\varphi(x)] = a\,\psi(x)$$
$$\psi[\psi(x)] = f(x) \qquad \psi[f(x)] = \varphi[\psi(x)]$$

définissent les courbes $y = \psi(x)$ invariantes respectivement par les transformations ponctuelles suivantes:

$$\begin{cases} X = \varphi(x) \\ Y = y + a \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \varphi(x) \\ Y = a\,y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = y \\ Y = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} X = f(x) \\ Y = \varphi(y). \end{cases}$$

2. Le but de ce travail est d'étudier les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation.

Les transformations que j'envisage sont de deux espèces différentes.

Dans la première partie, je considère des transformations ponctuelles à deux ou à trois variables. Soit par exemple:

$$X = f(x, y, z) \qquad Y = \varphi(x, y, z) \qquad Z = \theta(x, y, z)$$

une transformation à trois variables: une surface $z = \psi(x, y)$ invariante par cette transformation est définie par l'équation fonctionnelle:

$$\psi\left[f\Big(x, y, \psi(x, y)\Big), \quad \varphi\Big(x, y, \psi(x, y)\Big)\right] = \theta\Big(x, y, \psi(x, y)\Big).$$

De même une courbe invariante $y = \psi(x)$ $z = \chi(x)$ est définie par un système de deux équations fonctionnelles à deux fonctions inconnues.

Dans ses travaux sur les équations différentielles, M.r Poincaré a été amené à étudier de cette façon les courbes invariantes par une transformation à deux variables et passant par un point double de la transformation: il a démontré dans un cas très général l'existence de deux pareilles courbes (*). J'expose la méthode employée par M.r POINCARÉ en la modifiant de façon à l'étendre aux cas qu'il n'avait pas eu à envisager, pour l'objet qu'il se proposait. J'emploie une méthode analogue pour le cas d'une substitution à trois variables.

Au même ordre d'idées se rattachent plusieurs travaux de M.r PICARD, dans lesquels ce géomètre a étudié des systèmes d'équations fonctionnelles, définissant des fonctions invariantes par certaines substitutions rationnelles (**).

Dans la deuxième partie, je considère des transformations $(X, Y; x, y, y')$ faisant correspondre à un élément (x, y, y') un point (X, Y). Soit:

$$X = f(x, y, y') \qquad Y = \varphi(x, y, y')$$

une pareille transformation. Une courbe $y = \psi(x)$ invariante par cette transformation est définie par l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi').$$

On est ainsi conduit à une classe d'équations fonctionnelles, contenant la fonction inconnue $\psi(x)$ et sa dérivée $\psi'(x)$. Telle est l'équation:

$$\psi[f(x)] = \psi'(x)$$

que j'étudie, comme exemple, au Chap. IV.

3. J'ai dû me borner à étudier les transformations données et les équations fonctionnelles correspondantes dans le domaine d'un *point double* ou d'un *élément double.*

Pour une transformation ponctuelle par exemple, à un point M pris dans le domaine d'un point double correspond par la transformation un point M' situé dans le même domaine: M.r POINCARÉ l'appelle le *conséquent* du point M; le point M est lui-même le conséquent d'un point M'' qui est l'*antécédent* du point M. On est ainsi conduit à étudier la disposition des

(*) *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (4.e partie, Journal de Liouville, 1886, pages 193-195).

(**) *Sur une classe de transcendantes nouvelles* (Acta Mathematica, tomes 18 et 23). — *Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres* (Bulletin de la Société Mathém. de France 1900). — *Sur certaines équations fonctionnelles, et sur une classe de surfaces algébriques* (Comptes-Rendus de l'Ac. des Science, juillet, 1904).

conséquents et des antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double: c'est l'étude de *l'itération à plusieurs variables.*

Le cas d'une seule variable a été traité par M.r Kœnigs (*) dans le cas général, et par M.rs Grévy (**) et Leau (***) dans des cas singuliers (****) : c'est cette étude de l'itération à une variable qui est la base des travaux de M.r Kœnigs sur les équations fonctionnelles.

Pour le cas de plusieurs variables, je dois citer un travail fort important de M.r Levi-Civita (*****) dans lequel ce géomètre a étudié la stabilité ou l'instabilité d'une transformation ponctuelle dans le domaine d'un point double: il y a stabilité si à tout domaine E pris autour du point double correspond un domaine H entourant le même point et tel que les conséquents et les antécédents de tous les points de H soient tous compris dans E; il y a instabilité si, aussi petit que soit le domaine H, il y a dans ce domaine un ou plusieurs points dont un antécédent ou un conséquent au moins ne soit pas contenu dans E. M.r Levi-Civita démontre que l'instabilité est le cas général: il ne peut y avoir stabilité que si les racines de l'équation en S relative au point double (voir Chap. I et II) ont toutes des modules égaux à 1 et même alors M.r Levi-Civita démontre, du moins dans le cas de deux variables, que la substitution est instable en général.

(*) *Recherches sur les substitutions uniformes* (loc. cit.).

(**) Loc. cit.

(***) Loc. cit.

(****) Je signalerai encore, au sujet de l'itération à une variable, les travaux suivants:

Lémeray, *Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences*, 14 février 1898, 28 mars 1898, 20 janvier 1899. — *Bulletin de la Société Mathémat. de France.* Tome XXVII (pages 130-137 et 282-285).

Böttcher, *Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung* (Inaug. Dissert. Leipzig. 1898).

Enfin, on trouvera une bibliographie très étendue relative à l'itération au début du Mémoire suivant, publié en langue russe :

Aristof, *Bulletin de la Société phys.-mathém. de Kazan.* Tome X.

(*****) *Sopra alcuni criteri di instabilità* (Annali di Matematica, Serie III, Tome V, 1901) et *Comptes-Rendus,* 9, 16, et 23 juillet 1900). L'auteur a pour but essentiel l'étude de la stabilité des solutions périodiques des systèmes différentiels et l'application au problème des trois corps, mais il ramène la question à celle de la stabilité ou de l'instabilité des transformations ponctuelles et son travail est consacré en grande partie à cette question.

Voir aussi, sur le même sujet, un Mémoire de M.r Cigala: *Sopra un criterio di instabilità* (Annali di Matematica, Série III, Tome XI): l'auteur s'occupe de l'instabilité des substitutions, dans le cas, signalé par M.r Levi-Civita dans son travail, où les racines de l'équation en S ont un module égal à 1 et un argument incommensurable avec 2π.

Me limitant au cas de deux et de trois variables, j'étudie les diverses dispositions possibles pour les antécédents et les conséquents successifs d'un point, du moins dans le cas général. Les résultats auxquels je suis ainsi conduit présentent une analogie frappante avec les résultats auxquels est parvenu M.r POINCARÉ dans l'étude des courbes intégrales d'une équation différentielle dans le domaine d'un point singulier: c'est ainsi qu'on est amené à classer les points doubles de la transformation en *nœuds*, *cols*, *foyers*. J'explique les raisons de cette liaison entre les deux théories en montrant que, dans le domaine d'un point singulier, l'équation différentielle se présente comme limite d'une équation fonctionnelle définissant une courbe invariante par une transformation ponctuelle qui admet le point singulier pour point double.

4. Pour établir les divers théorèmes d'existence relatifs aux équations fonctionnelles que je considère, j'ai employé, suivant les cas, deux méthodes différentes.

Pour les transformations ponctuelles que j'étudie dans la première partie, je me suis servi surtout de la méthode employée par M.r POINCARÉ pour le cas relatif à deux variables qu'il a traité: dans cette méthode, basée sur l'emploi de fonctions majorantes, on suppose les données et les solutions cherchées analytiques. Plus récemment, M.r HADAMARD (*) a traité le cas étudié par M.r POINCARÉ, sans supposer l'analyticité des données et en faisant seulement quelques hypothèses sur la continuité des fonctions données et de leurs dérivées premières: il emploie pour cela une méthode d'approximations successives qui consiste à partir d'une courbe arbitraire, passant par le point double, à former ses *conséquentes* et ses *antécédentes* successives et à démontrer qu'elles ont des limites qui sont des courbes invariantes. J'utilise les résultats de M.r HADAMARD pour la recherche des courbes invariantes *analytiques ou non*.

Pour les transformations $(X, Y; x, y, y')$ que j'étudie dans la deuxième partie, j'emploie une méthode d'approximations successives dont le principe est le même que celui de la méthode de M.r HADAMARD que je viens de signaler: je définis, dans le domaine d'un élément double, les antécédentes successives d'une courbe et je démontre que, sous certaines hypothèses, elles ont une limite qui est une courbe invariante: une de ces hypothèses s'exprime par l'inégalité $|S| < 1$, S étant une certaine quantité dépendant de la

(*) *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles* (Bulletin de la Société Mathématique de France, Comptes-Rendus des séances, 1901).

substitution donnée et des coordonnées de l'élément double. Les résultats sont ainsi établis sans supposer l'analyticité des données; mais la méthode des fonctions majorantes, par laquelle je n'ai pas pu réussir à établir les mêmes résultats, donnerait peut-être un résultat plus complet: je montre en effet sur des exemples qu'il peut y avoir une courbe invariante, même si $|S|$ est supérieur à 1. On est ainsi conduit à se demander si l'introduction de cette quantité S ne tiendrait pas uniquement au mode de démonstration: c'est pourquoi je montre que S est bien un élément essentiel dans la question, en prouvant que c'est un invariant de la transformation donnée pour toute transformation ponctuelle.

5. Je terminerai en analysant brièvement les divers chapitres de ce travail.

Le *Chap. I* est consacré aux transformations à deux variables. Je démontre d'abord le théorème sur l'existence de deux courbes analytiques invariantes passant par le point double; j'examine le cas où la transformation donnée a une infinité de points doubles formant une courbe. Je donne ensuite à la transformation une forme réduite dans laquelle les deux courbes invariantes sont les axes de coordonnées et je me sers de cette forme pour étudier l'itération d'un point pris dans le domaine du point double. Je m'occupe ensuite de l'itération d'une courbe et de l'étude des courbes invariantes, analytiques ou non; enfin je généralise pour les substitutions à deux variables la notion de point limite à convergence irrégulière introduite par M.r Kœnigs dans l'étude des substitutions à une variable.

Dans le *Chap. II*, je traite les mêmes questions pour les transformations à trois variables, en étudiant successivement les courbes et les surfaces analytiques invariantes, les formes réduites de la substitution, l'itération d'un point.

Dans le *Chap. III*, je montre comment les surfaces et les courbes invariantes peuvent être définies, dans certains cas, sous forme implicite, par l'équation de Schrœder et je me sers des résultats connus relatifs à cette équation pour donner, dans ces cas, des équations générales permettant de représenter toute courbe, *analytique* ou *non*, invariante par la substitution, dans le domaine du point double; enfin, je m'occupe des analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des points singuliers des équations différentielles.

Dans le *Chap. IV*, je m'occupe des substitutions $(X, Y; x, y, y')$. Après avoir défini les éléments doubles, les antécédentes successives d'une courbe contenant un élément double, je démontre un théorème général d'existence sur les courbes invariantes par la substitution. Enfin je cherche les invariants différentiels du premier ordre de la substitution pour le groupe ponctuel.

Le *Chap. V* est la généralisation du précédent; j'étudie des substitutions $(X, Y_1, Y_2, \ldots Y_n; x, y_1, y_2, \ldots y_n; y'_1, y'_2, \ldots y'_n)$ contenant à la fois plusieurs fonctions et leurs dérivées par rapport à x, ce qui conduit à un système d'équations fonctionnelles.

Le *Chap. VI* est consacré aux transformations de contact: j'applique à la recherche des courbes invariantes par une transformations de contact les résultats établis précédemment, soit dans le Chap. II, soit dans le Chap. IV. Je montre aussi comment les résultats relatifs aux surfaces invariantes par une transformation à trois variables pourraient s'appliquer de même à la recherche des équations différentielles du premier ordre invariantes par une transformation de contact, mais je me borne à poser ce dernier problème.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les Séances du 30 novembre 1903 et du 2 janvier 1905.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I.

L'ITÉRATION A DEUX VARIABLES.

1. *Courbes invariantes.* — Etant donnée une substitution à deux variables:

$$X = f(x, y) \qquad Y = \varphi(x, y) \tag{1}$$

nous nous proposons de déterminer les courbes invariantes par cette substitution.

Une courbe invariante peut être définie de la façon suivante: soit P_0 un point quelconque, P_1, P_2,... P_n,... ses conséquents et P_{-1}, P_{-2},... P_{-n} ses antécédents. Joignons $P_0 P_1$ par un arc de courbe arbitraire: à cet arc la substitution fera correspondre un arc $P_1 P_2$, à ce dernier un arc $P_2 P_3$, etc.... et de même la substitution inverse fera correspondre successivement à l'arc $P_0 P_1$ les arcs $P_{-1} P_{-2}$, $P_{-2} P_{-3}$,... L'ensemble de tous ces arcs constitue une courbe invariante par la substitution.

Supposons que la suite des points P_0, P_1,... admette un point limite: si l'on suppose les fonctions f et φ continues en ce point, ce point est un point double de la substitution.

Nous supposerons pour l'instant les fonctions f et φ holomorphes dans le domaine du point double. Une courbe passant par ce point sera dite *analytique*, si l'une au moins des coordonnés x, y s'exprime par une fonction holomorphe de l'autre dans le domaine du point double.

Nous nous bornerons d'abord à chercher *les courbes invariantes passant par un point double et analytiques dans le domaine de ce point double*: mais nous étudierons plus loin (§ 14) le cas non analytique et nous obtiendrons aussi une équation générale commune à toutes les courbes invariantes, analytiques ou non (§ 27).

2. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point double de la substitution (1). Considérons l'équation en S:

$$\begin{vmatrix} f'_{x_0} - S & f'_{y_0} \\ \varphi'_{x_0} & \varphi'_{y_0} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Dans son célèbre mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles M.r Poincaré a été conduit à chercher les courbes invariantes par la substitution (1), dans le cas où les racines de l'équation en S sont positives et l'une supérieure, l'autre inférieure à 1 (*): M.r Poincaré démontre alors, par la méthode des fonctions majorantes, l'existence de deux courbes analytiques invariantes passant par le point double et définies dans le domaine de ce point. Nous allons montrer que ce résultat subsiste, du moins en général, si on ne fait plus l'hypothèse que les racines sont positives, l'une inférieure et l'autre supérieure à l'unité: nous modifierons pour cela la démonstration de M.r Poincaré, de façon à l'étendre à ces nouveaux cas.

3. Supposons les racines S, S' de l'équation (2) distinctes et non nulles: on sait, par la théorie des substitutions linéaires, qu'on peut alors, en effectuant sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part, une même substitution linéaire, ramener la substitution (1) à la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} X &= Sx + f(x, y) \\ Y &= S'y + \varphi(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ seront des séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x et de y, commençant par des termes du second degré et convergentes pour les valeurs de x et de y de module suffisamment petit.

On voit immédiatement qu'une courbe analytique invariante passant par l'origine a nécessairement pour tangente en ce point l'une des droites $0x$ ou $0y$.

Cherchons d'abord une courbe invariante tangente à $0x$ et soit:

$$y = \psi(x) = \frac{\psi''_0}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{\psi'''_0}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \cdots$$

son équation. La fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi\left[Sx + f\Big(x, \psi(x)\Big)\right] = S'\psi(x) + \varphi\Big(x, \psi(x)\Big). \tag{4}$$

(*) *Journal de Liouville,* 1886, page 193.

En prenant les dérivées successives des deux membres et en y remplaçant x par zéro, on obtiendra des égalités permettant de calculer les coefficients de la série $\psi(x)$ et il restera à établir la convergence de cette série : d'après la façon même dont elle aura été obtenue, cette série sera solution de l'équation fonctionnelle. En désignant pour abréger $\psi(x)$ par y, nous obtenons :

$$\psi'\left[Sx+f(x,\ y)\right]\times\left[S+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right]=S'y'+\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'$$

$$\psi''\left[Sx+f(x,\ y)\right]\times\left[S+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right]^2+$$

$$+\psi'(Sx+\cdots)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cdots\right]=S'y''+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\cdots$$

. . . .

les termes non écrits s'annullant pour $x=0$.

En remplaçant x par zéro, on obtient successivement :

$$\psi'_0=0 \quad \psi''_0(S'-S^2)=-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0$$

$$\psi'''_0(S'-S^3)=3S\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\psi''_0-\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0-3\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)_0\psi''_0.$$

En général, si on suppose les coefficients ψ''_0, $\psi'''_0,\ldots$, $\psi_0^{(n-1)}$ calculés, on pourra calculer le suivant, pourvu que $S'-S^n$ ne soit pas nul: *nous supposerons que $S'-S^n$ n'est nul pour aucune valeur de l'entier n.* Le calcul formel des coefficients est alors possible.

Dans le cas où $S'-S^n$ est nul, l'équation qui fournit $\psi_0^{(n)}$ est en général impossible de sorte que l'*équation fonctionnelle n'a pas en général de solution holomorphe.* Par exception, le second membre de l'équation pourrait être nul, il y aurait alors une infinité de solutions, au point de vue formel du moins, car il resterait à étudier la série au point de vue de la convergence, comme nous allons le faire dans le cas général: mais je ne traiterai que ce dernier cas.

On verra plus loin (§ 14 bis) comment le cas où $S'-S^n$ est nul peut se ramener au cas des racines égales: $S'=S$.

4. Avant de nous occuper de la convergence de la série, il est nécessaire d'étudier de plus près la façon dont figurent ψ''_0, $\psi'''_0,\ldots$, $\psi_0^{(n-1)}$ dans l'équation qui fournit $\psi_0^{(n)}$.

Considérons ψ'_0, $\psi''_0, \ldots$, $\psi_0^{(p)}$ comme étant respectivement de poids 0, 1, 2,..., $p-1$; appelons poids d'un monôme par rapport à ces mêmes quantités la somme des produits de chacune d'elles par son exposant, poids d'un polynôme le poids des termes de ce polynôme qui ont le poids le plus grand.

Nous allons montrer que $\psi_0^{(n)}$ *est un polynôme de poids* $n-2$ *par rapport aux dérivées* ψ''_0, $\psi'''_0, \ldots$, $\psi_0^{(n-1)}$ *d'ordre inférieur à* n.

Reprenons l'équation (4) que nous écrirons sous la forme:

$$\psi(v) = S' \psi(x) + \varphi(x, y)$$

en posant:

$$y = \psi(x) \qquad v = Sx + f(x, y).$$

Si on dérive n fois cette équation, on obtient une équation de la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\psi^{(n)}(v)\left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right]^n - S' \psi^{(n)}(x) = \\ &= \varpi_n\Big(\psi'(x), \psi''(x), \ldots, \psi^{(n-1)}(x);\ \psi'(v), \psi''(v), \ldots, \psi^{(n-1)}(v)\Big) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ϖ_n étant un polynôme dont les coefficients dépendent de S et des dérivées des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$; ce polynôme est linéaire par rapport à $\psi'(v)$, $\psi''(v), \ldots, \psi^{(n-1)}(v)$, mais non linéaire par rapport à $\psi'(x)$, $\psi''(x), \ldots$, $\psi^{(n-1)}(x)$.

Pour $x = 0$, $\psi^{(k)}(v)$ et $\psi^{(k)}(x)$ deviennent tous deux égaux à $\psi_0^{(k)}$: nous sommes donc conduits pour établir la proposition énoncée à considérer $\psi^{(k)}(v)$ et $\psi^{(k)}(x)$ comme étant l'un et l'autre de poids $k-1$. Nous allons démontrer que le polynôme ϖ_n est alors de poids $n-1$ et que pour $x = 0$, les termes de poids $n-1$ s'annullent de sorte que $\psi_0^{(n)}$ sera bien un polynôme de poids $n-2$ par rapport aux dérivées d'ordre inférieur à n.

Les calculs effectués au § 3 montrent que la loi ainsi énoncée est vérifiée pour les premières valeurs de l'indice n. Montrons donc que si ϖ_n est de poids $n-1$, ϖ_{n+1} sera de poids n. En dérivant l'équation (5) par rapport à x, on obtient:

$$\psi^{(n+1)}(v)\left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right]^{n+1} +$$

$$+ n\psi^{(n)}(v)\left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''\right] -$$

$$- S' \psi^{(n+1)}(x) = \frac{d\varpi_n}{dx}$$

$\frac{d\varpi_n}{dx}$ étant la dérivée totale du polynôme ϖ_n par rapport à x. On en conclut la relation de récurrence:

$$\varpi_{n+1}(x) = \frac{d\varpi_n}{dx} -$$

$$- n\psi^{(n)}(v)\left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right]^{n-1}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y}y''\right]$$

et il faut vérifier que le poids de ϖ_{n+1} est égal à n. Il suffit de l'établir pour le terme $\frac{d\varpi_n}{dx}$, car c'est évident pour le second terme. Or $\varpi_n(x)$ est une somme de termes de la forme:

$$A(x, y)\,\psi^{(k)}(v)\,y'^{\alpha_1}\,y''^{\alpha_2}\ldots y_p^{\alpha_p}$$

en posant pour abréger $y_p = \psi^{(p)}(x)$. Par dérivation, ce terme donne plusieurs autres termes obtenus en remplaçant chacun des facteurs par sa dérivée: le terme obtenu en remplaçant $A(x, y)$ par $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}y'$ a la même poids que celui dont il provient; en remplaçant $\psi^{(\,)}(v)$ par sa derivée par rapport à x le poids augmente de 1 unité; enfin si on remplace $y_k^{\alpha_k}$ par sa dérivée $\alpha_k\, y_k^{\alpha_k - 1}\, y_{k+1}$, le poids diminue de $(k-1)\,\alpha_k$ et augmente de $(k-1)(\alpha_k - 1) + k$ de sorte qu'en définitive il augmente aussi de 1 unité. Le poids de $\frac{\partial \varpi_n}{dx}$ est donc supérieur d'une unité au poids de ϖ_n, ce qui montre que ϖ_{n+1} est bien de poids n.

Il reste à voir que pour $x = 0$ les termes de poids $n-1$ s'annullent, de sorte que $\psi_0^{(n)}$ sera un polynôme de poids $n-2$. Cette circonstance provient de ce que dans chacun des polynômes ϖ les termes de poids le plus élevé contiennent en facteur $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui s'annulle pour $x = 0$. On le constate immédiatement pour ϖ_2 et il suffira de le démontrer pour ϖ_{n+1}, en supposant que cela ait été démontré pour ϖ_n. Supposons donc que, dans ϖ_n, les termes de plus haut poids soient de la forme $\frac{\partial f}{\partial y}\rho_n$, en désignant par ρ_n un polynôme dépendant des mêmes variables que ϖ_n. La relation de récurrence établie plus haut montre que, dans ϖ_{n+1}, les termes de plus haut poids proviendront du polynôme:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\rho_n}{dx} - n\,\psi^{(n)}(v)\left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right]^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}y''$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bien en facteur dans ces termes.

La proposition énoncée au début de ce paragraphe est donc établie.

5. Occupons-nous maintenant de la convergence de la série $\psi(x)$.

On peut toujours supposer $|S| < 1$: dans le cas contraire, on remplacerait la substitution (5) par son inverse et on chercherait une courbe invariante par cette substitution inverse: cette courbe serait aussi invariante par la substitution directe. Le seul cas que nous laisserons ainsi de côté sera le cas où $|S|$ serait égal à 1.

Considérons la substitution auxiliaire:

$$\left.\begin{aligned} X &= S_1 x + F(x, y) \\ Y &= S_1 y - F(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où S_1 désigne un nombre compris entre $|S|$ et 1 et $F(x, y)$ la fonction suivante:

$$F(x, y) = \frac{M\beta^2 (x+y)^2}{1 - \beta(x+y)}.$$

On sait que, M et β étant deux nombres positifs convenablement choisis, cette fonction est une fonction majorante pour les fonctions $f(x, y)$ et $-\varphi(x, y)$.

Des hypothèses faites sur S, S' et S_1, il résulte que $\frac{|S' - S^n|}{S_1 - S_1^n}$ est supérieur, quel que soit n, à un certain nombre positif λ qu'on peut toujours supposer inférieur à 1 (*). On a donc, quel que soit n:

$$|S' - S^n| > \lambda (S_1 - S_1^n).$$

Soit $\theta(x)$ la série analogue à $\psi(x)$ lorsqu'on remplace la substitution (3) par la substitution (6). Les coefficients de $\theta(x)$ seront tous positifs, comme le montre le calcul des coefficients fait au § 3. Comparons alors $|\psi''_0|$,

(*) Dans le cas envisagé par M.r Poincaré ($S' > 1 > S$), on peut prendre $\lambda = 1$: la démonstration est alors exactement la même que celle de M.r Poincaré.

$|\psi'''_0|,\dots$ à θ''_0, $\theta'''_0,\dots$ (*). On a:

$$|\psi''_0| = \left| \frac{-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0}{S'-S^2} \right| < \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\lambda (S_1 - S_1^2)}$$

ou bien:

$$|\psi''_0| < \frac{1}{\lambda} \theta''_0 .$$

On a ensuite:

$$|\psi'''_0| = \left| \frac{3 S \psi''_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 - 3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 \psi''_0}{S' - S^3} \right| <$$

$$< \frac{3 S_1 \frac{1}{\lambda} \theta''_0 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_0 + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \frac{1}{\lambda} \theta''_0}{\lambda (S_1 - S_1^3)}$$

et, à fortiori, puisque $\frac{1}{\lambda}$ est supérieur à 1:

$$|\psi'''_0| < \frac{\frac{1}{\lambda}\left[3 S_1 \theta''_0 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_0 + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \theta''_0\right]}{\lambda (S_1 - S_1^3)}$$

ou bien:

$$|\psi'''_0| < \frac{1}{\lambda^2} \theta'''_0 .$$

Je dis qu'on a en général:

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \theta_0^{(n)}.$$

En effet, supposons cette inégalité vérifiée pour ψ''_0, $\psi'''_0,\dots$, $\psi_0^{(n-1)}$ et montrons qu'elle subsiste pour $\psi_0^{(n)}$.

Il résulte du § 4 que l'on a:

$$\psi_0^{(n)} = \frac{\varpi_1 (\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi_0^{(n-1)})}{S' - S^n}$$

ϖ_1 étant un polynôme de poids $n-2$ par rapport à $\psi''_0,\dots$ $\psi_0^{(n-1)}$ dont les

(*) Je me suis inspiré, pour cette comparaison, d'une remarque de M.r Leau (*Étude sur les équations fonctionnelles.* Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, 1897. Chap. I, § 13).

coefficients sont eux-mêmes des polynômes par rapport à S et aux dérivées partielles de f et de φ.

Supposons qu'on remplace dans ϖ_1 les divers termes par leurs valeurs absolues, $|S|$ par S_1 qui lui est supérieur, les modules des dérivées partielles de f et de φ par les dérivées partielles de F qui leur sont supérieures et enfin $|\psi_0^{(k)}|$ par $\frac{1}{\lambda^{k-1}}\theta_0^{(k)}$ qui lui est supérieur. La plus haute puissance de $\frac{1}{\lambda}$ qui figure alors dans les divers termes de ϖ_1 est $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$, puisque ϖ_1 est de poids $n-2$, lorsqu'on attribue à $\psi_0^{(k)}$ le poids $k-1$. Si on remplace toutes les puissances de $\frac{1}{\lambda}$ par $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$, on augmente les divers termes. Le numérateur de $\psi_0^{(n)}$ est ainsi remplacé par le produit de $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$ par le numérateur de $\theta_0^{(n)}$. D'autre part le dénominateur de $\psi_0^{(n)}$ est supérieur à $\lambda(S_1 - S_1^n)$. On a donc:

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{\frac{1}{\lambda^{n-2}}\theta_0^{(n)}(S_1 - S_1^n)}{\lambda(S_1 - S_1^n)}$$

ou bien:

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}}\theta_0^{(n)}.$$

Si nous démontrons la convergence de la série $\theta(x)$ dans un cercle de rayon ρ, il résultera de cette inégalité la convergence de la série $\psi(x)$ dans un cercle de rayon $\lambda\rho$ et on aura ainsi prouvé l'existence d'une courbe:

$$y = \frac{\psi''_0}{1.2}x^2 + \frac{\psi'''_0}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

définie pour $|x| < \lambda\rho$, invariante par la substitution donnée et tangente à Ox.

Pour démontrer que la série $\theta(x)$ est convergente, il suffit de prouver directement qu'il existe une courbe analytique tangente à Ox et invariante par la substitution (6). La démonstration s'achève comme dans le cas envisagé par M.r Poincaré (*).

Posons $x + y = z$ et de même $X + Y = Z$. La substitution (6) devient:

$$Z = S_1 z$$
$$X = S_1 x + \frac{M\beta^2 z^2}{1 - \beta z}.$$

(*) Poincaré, loc. cit., page 195.

Cherchons une fonction x de z de la forme:

$$x = \Phi(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots$$

invariante par cette substitution. On doit avoir:

$$\Phi(S_1 z) = S_1 \Phi(z) + \frac{M \beta^2 z^2}{1 - \beta z}$$

ou:

$$S_1 z + \alpha_2 S_1^2 z^2 + \alpha_3 S_1^3 z^3 + \cdots = S_1 z +$$

$$+ (\alpha_2 S_1 + M \beta^2) z^2 + (\alpha_3 S_1 + M \beta^3) z^3 + \cdots$$

d'où l'on déduit $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$:

$$\alpha_n = -\frac{M \beta^n}{S_1 - S_1^n}$$

et:

$$x = \Phi(z) = z - \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} z^2 - \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} z^3 - \cdots - \frac{M \beta^n}{S_1 - S_1^n} z^n - \cdots$$

La série du second membre est convergente pour $|z| < \frac{1}{\beta}$ et par suite y est défini par l'équation:

$$x = x + y - \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} (x + y)^2 - \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} (x + y)^3 - \cdots$$

ou:

$$y = \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} (x + y)^2 + \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} (x + y)^3 + \cdots$$

La fonction implicite y définie par cette équation est la série $\theta(x)$ cherchée.

On démontre de même l'existence d'une courbe:

$$x = \frac{\psi''_0}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{\psi'''_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \cdots$$

tangente à $0y$ et invariante par la substitution (3), en supposant que l'on a quel que soit n: $S - S'^n \neq 0$ et $|S'| \neq 1$.

La méthode que nous venons d'employer montre que les deux courbes ainsi obtenues sont les seules courbes analytiques invariantes passant par le point double.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Etant donnée la substitution* (1), *si les racines de l'équation en S relative à un point double sont distinctes, de module différent de* 0 *et de* 1 *et si aucune des racines n'est une puissance entière de l'autre racine, il existe deux courbes analytiques invariantes C et C' et deux seulement passant par le point double et définies dans le domaine de ce point.*

6. *Courbe de points doubles.* Les coordonnées des points doubles de la substitution (1) sont données par les équations:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(x, y) \\ y &= \varphi(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

En général les points doubles sont donc des points isolés.

Il peut arriver cependant que les équations (7) soient satisfaites par les coordonnées d'une infinité de points formant une courbe: il y a alors une *courbe de points doubles C.*

En tout point de la courbe C, l'équation en S a une racine égale à 1: en un pareil point, le déterminant fonctionnel $\frac{D(f-x,\ \varphi-y)}{D(x,\ y)}$ est en effet nul et on a par suite:

$$\begin{vmatrix} f'_x - 1 & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation en S a donc une racine S' égale à 1 et une racine S qui est en général différente de 1.

Une première courbe invariante passant par un point O de la courbe C est la courbe C elle-même. Il y aura en général une deuxième courbe invariante passant par O: en effet, d'après la démonstration du théorème précédent l'existence d'une pareille courbe sera assurée si S a un module différent de 1, car alors $1 - S^n$ n'est nul pour aucune valeur entière de n.

Ainsi, par tout point de la courbe des points doubles C pour lequel $|S|$ est différent de 1, *passe une courbe analytique invariante par la substitution et distincte de la courbe C.*

7. *Forme canonique de la substitution à deux variables.* — La connaissance des courbes invariantes par une substitution permet de ramener, par un changement de variables, la substitution à une forme remarquable, dans le domaine d'un point double.

Supposons que le point double soit un point double isolé et prenons ce point pour origine : choisissons de plus les axes $0x$, $0y$ de façon qu'ils ne soient pas tangents aux deux courbes invariantes et soient :

$$y = \lambda x + \alpha x^2 + \cdots$$
$$y = \lambda' x + \alpha' x^2 + \cdots$$

les équations de ces deux courbes.

Nous pourrons, par une même transformation ponctuelle effectuée sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part, supposer que les deux courbes invariantes sont les axes $0x$, $0y$. Posons en effet :

$$\left.\begin{aligned} u &= y - \lambda x - \alpha x^2 - \cdots \\ v &= y - \lambda' x - \alpha' x^2 - \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

et pareillement :

$$U = Y - \lambda X - \alpha X^2 - \cdots$$
$$V = Y - \lambda' X - \alpha' X^2 - \cdots$$

Les équations (8) peuvent être résolues par rapport à x, y puisque $\lambda - \lambda'$ n'est pas nul et la substitution prend la forme :

$$U = f_1(u, v)$$
$$V = \varphi_1(u, v).$$

Les courbes invariantes sont devenues $u = 0$, $v = 0$; $f_1(0, v)$ doit être nul quel que soit v: U est par suite de la forme $u f_2(u, v)$, f_2 étant une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine; de même V est de la forme $v \varphi_2(u, v)$, la fonction φ_2 étant holomorphe.

Dans le domaine de l'origine la substitution (1) se ramène donc à la forme :

$$X = x f(x, y)$$
$$Y = y \varphi(x, y).$$

Il est facile de voir que les termes indépendants dans les fonctions f et φ sont les racines S, S' de l'équation en S: cela résulte de ce que ces racines sont des invariants de la substitution (1) pour toute transformation ponctuelle régulière à l'origine.

Ainsi, la substitution (1), *lorsqu'on fait sur S et S' les hypothèses du § 5, se ramène à la forme canonique suivante :*

$$\left.\begin{aligned} X &= x\,[S + F(x,\ y)] \\ Y &= y\,[S' + \Phi\,(x,\ y)] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$F(x,\ y)$ et $\Phi\,(x,\ y)$ *désignant des fonctions de x et de y nulles pour $x = y = 0$ et holomorphes dans le domaine de l'origine.*

8. *Itération d'un point.* — Supposons maintenant les variables réelles et, étant donné un point x, y dans le domaine d'un *point double isolé* de la substitution, proposons-nous d'étudier la disposition des conséquents et des antécédents successifs de ce point.

Supposons d'abord les racines S, S' de l'équation en S réelles et distinctes et distinguons trois cas:

Premier cas : $|S'| < |S| < 1$. — Soient x_1, y_1; x_2, y_2;... x_n, y_n;... les conséquents successifs du point x, y. Supposons la substitution ramenée à la forme canonique (9): pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε, les fonctions $S + F(x, y)$ et $S' + \Phi\,(x, y)$ ont un module maximum M inférieur à 1. Or on a:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n\,[S + F(x_n,\ y_n)] \\ y_{n+1} &= y_n\,[S' + \Phi\,(x_n,\ y_n)] \end{aligned}$$

et, par suite:

$$|x_{n+1}| < M\,|x_n| \quad \text{et} \quad |y_{n+1}| < M\,|y_n|.$$

Donc, si le point x, y est intérieur au domaine: $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, ses conséquents sont tous intérieurs au même domaine et l'on a :

$$|x_n| < M^n\,|x| \quad \text{et} \quad |y_n| < M^n\,|y|$$

de sorte que x_n et y_n tendent vers zéro.

Cherchons si les conséquents successifs tendent vers le point double dans une direction déterminée. On a :

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n}\left[\frac{S'}{S} + \theta\,(x_n,\ y_n)\right]$$

θ étant une fonction holomorphe de x et de y s'annullant pour $x = y = 0$. Soit k un nombre compris entre $\left|\dfrac{S'}{S}\right|$ et 1. On aura, à partir d'un certain rang:

$$\left| \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \right| < k \left| \frac{y_n}{x_n} \right|.$$

Donc $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers zéro. Il y a exception si le point initial est sur Oy: ses conséquents restent sur Oy.

Revenons maintenant à la substitution sous sa forme primitive (1). On pourra énoncer les résultats suivants:

Etant donné un point double de la substitution pour lequel les racines de l'équation en S sont réelles, distinctes, et ont des modules différents inférieurs à 1 (*), il existe un domaine entourant le point double et possédant les propriétés suivantes:

1.° *Les conséquents successifs d'un point pris dans le domaine tendent vers le point double.*

2.° *Les conséquents successifs tendent vers le point double tangentiellement à l'une des courbes invariantes C, sauf si, le point initial étant pris sur l'autre courbe C', ses conséquents restent sur C'.*

Le premier de ces résultats n'est pas modifié si les racines, toujours supposées distinctes, ont le même module: $S' = -S$. Mais le deuxième résultat ne subsiste pas.

Deuxième cas: $|S'| > |S| > 1$. La substitution inverse est de la forme:

$$x = X\left(\frac{1}{S} + \cdots\right)$$

$$y = Y\left(\frac{1}{S'} + \cdots\right)$$

et on a:

$$\left|\frac{1}{S}\right| < \left|\frac{1}{S'}\right| < 1.$$

On est donc ramené au cas précédent:

Les antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double tendent vers ce point tangentiellement à l'une des courbes invariantes, sauf si le point initial est pris sur l'autre courbe invariante.

(*) On suppose, bien entendu, qu'on est dans les conditions du théorème du § 5, c'est-à-dire qu'on n'a pas $S = S'^n$ ni $S' = S^n$.

Troisième cas: $|S'| < 1 < |S|$. Pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε, la fonction $S' + \Phi(x, y)$ a un module inférieur à un nombre positif fixe M plus petit que 1 et la fonction $S + F(x, y)$ a un module supérieur à un nombre fixe m plus grand que 1. En partant d'un point x, y intérieur au domaine $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, on obtient des conséquents x_1, y_1; x_2, y_2;... qui, jusqu'à un certain rang p, sont intérieurs au domaine et on a:

$$|x_1| > m|x|;\ |x_2| > m^2|x|;\dots\ x_p > m^p|x|$$
$$|y_1| < M|y|;\ |y_2| < M^2|y|;\dots\ |y_p| < M^p|y|.$$

Les p premiers conséquents se rapprochent donc de Ox et s'éloignent de Oy; après quoi les conséquents sortent du domaine et nous ne pouvons plus rien en dire. Ou peut d'ailleurs choisir x et y suffisamment petits pour que p soit aussi grand qu'on le veut.

De même la substitution inverse montre que les antécédents jusqu'à un certain rang q se rapprochent de Oy et s'éloignent de Ox, après quoi ils sortent du domaine. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Etant donné un point double de la substitution, pour lequel les racines de l'équation en S sont réelles, distinctes, l'une inférieure et l'autre supérieure à 1 en valeur absolue, il existe un domaine entourant le point double et tel que les conséquents successifs d'un point du domaine jusqu'à un certain rang p se rapprochent de l'une des courbes invariantes C et s'éloignent de l'autre C', tandis que les antécédents jusqu'à un certain rang q se rapprochent de C' et s'éloignent de C, après quoi les antécédents et les conséquents sortent du domaine. Si le point initial est suffisamment voisin du point double, les nombres p et q sont aussi grands qu'on le veut. Il y a exception si le point initial est pris sur les courbes C ou C'.

9. Supposons maintenant les racines S et S' imaginaires conjuguées. L'existence des courbes invariantes C et C' est assurée, si $|S|$ n'est pas égal à 1. Soient:

$$y = \lambda x + \alpha x^2 + \cdots$$
$$y = \lambda' x + \alpha' x^2 + \cdots$$

les équations des deux courbes invariantes: λ, α,... et λ', α',... sont des imaginaires respectivement conjugueés. Posons:

$$u + iv = y - \lambda x - \alpha x^2 - \cdots$$
$$u - iv = y - \lambda' x - \alpha' x^2 - \cdots$$

et pareillement:

$$U + i\,V = Y - \lambda X - \alpha X^2 - \cdots$$

$$U - i\,V = Y - \lambda' X - \alpha' X^2 - \cdots$$

Par ce changement de variables, la substitution se ramènera comme précédemment (§ 7) à la forme:

$$U + i\,V = (u + i\,v)\,(H + i\,K)$$

$$U - i\,V = (u - i\,v)\,(H - i\,K)$$

H et K étant deux fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine. En appelant encore les variables x, y, X, Y et en posant:

$$S = \rho\, e^{i\alpha} \quad S' = \rho\, e^{-i\alpha}$$

les équations de la substitution s'écrivent:

$$X + i\,Y = (x + i\,y)\,[\rho\, e^{i\alpha} + F(x,\ y) + i\,\Phi(x,\ y)]$$

$$X - i\,Y = (x - i\,y)\,[\rho\, e^{-i\alpha} + F(x,\ y) - i\,\Phi(x,\ y)]$$

F et Φ étant des fonctions holomorphes qui s'annullent pour $x = o$, $y = o$. On en déduit:

$$X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2)\,[\rho^2 + \Theta(x,\ y)]$$

Θ étant aussi une fonction holomorphe nulle à l'origine.

10. Nous distinguerons deux cas:

Premier cas: $|S| = |S'| < 1$ c'est-à-dire $\rho < 1$. — Pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε, la fonction $\rho^2 + \Theta(x,\ y)$ a un module maximum inférieur à 1. On a donc:

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 < M\,(x_n^2 + y_n^2)$$

d'où l'on déduit:

$$x_n^2 + y_n^2 < M^n\,(x^2 + y^2).$$

Donc $x_n^2 + y_n^2$ tend vers zéro et les conséquents d'un point situé dans le domaine: $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ sont intérieurs au domaine et tendent vers l'origine. D'autre part, on a:

$$\text{arg.}\,(X + i\,Y) = \text{arg.}\,(x + i\,y) + \text{arg.}\,[S + F(x,\ y) + i\,\Phi(x,\ y)].$$

En appellant ω_n l'angle de la droite joignant l'origine au point x_n, y_n avec l'axe Ox, on a :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \alpha + \varepsilon_n .$$

ε_n tendant vers zéro avec x_n et y_n.

Par suite $\omega_{n+1} - \omega_n$ a pour limite α. Il en résulte que les conséquents successifs tournent asymptotiquement autour de l'origine O à la façon de points distribués sur une spirale logarithmique et que les rayons joignant l'origine aux conséquents successifs tendent à former un angle constant chacun avec le suivant. Cette dernière circonstance provient évidemment de la forme canonique donnée à la substitution, les courbes invariantes étant les droites isotropes. Mais si on revient aux variables primitives, on peut énoncer les résultats suivants :

Etant donné un point double de la substitution, pour lequel les racines de l'équation en S sont imaginaires conjuguées et de module inférieur à 1, il existe un domaine entourant le point double et possédant les propriétés suivantes:

1.° *Les conséquents successifs d'un point pris dans le domaine tendent vers le point double.*

2.° *Les rayons vecteurs joignant l'origine aux conséquents successifs tournent indéfiniment autour de l'origine en se rapprochant aussi peu qu'on le veut des rayons homologues successifs de deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles imaginaires les tangentes aux deux courbes invariantes.*

Deuxième cas $|S| = |S'| > 1$. En remplaçant la substitution donnée par son inverse, on voit qu'on peut énoncer pour les antécédents successifs des résultats pareils à ceux trouvés dans le cas précédent pour les conséquents.

Les antécédents successifs tendent vers le point double et les rayons vecteurs qui joignent l'origine à ces antécédents tournent indéfiniment autour de l'origine.

11. Etudions enfin l'itération d'un point dans le cas où la substitution a une courbe de points doubles.

Supposons que, par une transformation ponctuelle, on ait amené cette courbe à être Oy. En tout point de Oy, d'ordonnée y_0, l'équation en S a deux racines dont l'une est égale à 1, tandis que l'autre S est une fonction de y_0 en général différente de 1. Considérons un segment AB de Oy, $y_1 < y_0 < y_2$, en chaque point duquel on ait $|S| < 1$ et supposons les fonctions qui définissent la substitution analytique dans un certain domaine: $-h < x < h$, $y_1 < y < y_2$ entourant ce segment. Par le point d'ordonnée y_0 passe une courbe invariante autre que Oy et non tangente à Oy: soit

$$y = y_0 + \alpha x + \beta x^2 + \cdots$$

son équation. La série du second membre a pour rayon de convergence $\lambda \rho$, d'après les notations du § 5. Nous voulons montrer qu'on peut supposer ce rayon *indépendant de* y_0 pour tous les points du segment AB. En effet ρ désigne le rayon de convergence de la série majorante du § 5: cette série dépend de trois constantes M, β, S_1, cette dernière assujettie à être comprise entre $|S|$ et 1. Il est évident qu'on peut prendre pour M et β les limites supérieures de l'ensemble des valeurs prises par ces quantités pour les différents points du segment AB et pour S_1 le maximum des valeurs prises par $|S|$: S_1 sera évidemment inférieur à 1. La série est alors indépendante de y_0 et il en est de même de ρ. Quant à λ, il désigne une limite inférieure de la quantité $\dfrac{(1-S^n)}{S_1 - S_1^n}$ pour l'ensemble des valeurs de n: on voit qu'on peut prendre $\lambda = \dfrac{1-S_1}{S_1}$, quantité indépendante de y_0.

On peut donc définir un domaine $-h < x < h$ tel que par tout point de Oy ayant une ordonnée comprise entre y_1 et y_2 passe une courbe invariante définie dans l'intervalle $-h < x < h$. Si h est assez petit, l'ensemble de ces courbes constitue un domaine tel que par tout point de ce domaine passe une courbe invariante et une seule.

Soit alors x, y un point pris dans ce domaine et O' le point où la courbe invariante qui y passe coupe Oy; en prenant ce point pour origine, la substitution peut être ramenée à la forme suivante:

$$X = x\,[S + f(x, y)]$$

$$Y = y\,[1 + x\,\varphi(x, y)]$$

f et φ désignant des fonctions holomorphes pour $x = y = 0$. En désignant par M le maximum de $S + f(x, y)$, qui est inférieur à 1 si h est suffisamment petit, on a:

$$x_{n+1} < M^n x$$

et par suite les conséquents du point x, y appartiennent au domaine et tendent vers O' en restant sur la courbe invariante qui passe par ce point x, y.

On obtient des conclusions analogues pour les antécédents, si on considère un segment de Oy pour lequel on ait: $|S| > 1$.

Revenant à la courbe des points doubles, on peut énoncer les résultats suivants:

Soit AB un arc de la courbe des points doubles le long duquel $|S|$ est constamment inférieur à 1: on peut limiter de part et d'autre de l'arc AB un domaine tel que les conséquents d'un point de ce domaine restent dans le domaine et tendent vers un point de la courbe des points doubles, en restant sur une même courbe analytique invariante.

Les antécédents d'un point pris dans le voisinage d'un arc AB pour lequel $|S|$ est constamment supérieur à 1 possèdent des propriétés analogues.

12. *Itération d'une courbe.* — Si, dans la substitution (1), on suppose que y soit une fonction de x: $y = \psi_0(x)$, Y devient une fonction de X, soit $Y = \psi_1(X)$ et la fonction $\psi_1(x)$ est dite la *conséquente* de $\psi_0(x)$: réciproquement, si on pose $Y = \psi_0(X)$, on a pour y une fonction $\psi_{-1}(x)$ qui est dite *l'antécédente* de $\psi_0(x)$. A une fonction continue $\psi_0(x)$, la substitution fait ainsi correspondre une suite indéfinie de conséquentes $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ et d'antécédentes $\psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots \psi_{-n}$ qui sont des fonctions continues. En général ces conséquentes ou ces antécédentes sont définies dans des intervalles distincts. Supposons cependant qu'on ait pu définir un intervalle d'existence commun à toutes les conséquentes ou à toutes les antécédentes. On peut alors établir le théorème suivant:

Théorème. — *Etant donnée la substitution* (1), *si les conséquentes ou les antécédentes successives $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots \psi_n(x)$ ou $\psi_{-1}(x), \psi_{-2}(x), \ldots \psi_{-n}(x)$ d'une fonction continue $\psi_0(x)$ sont définies dans un intervalle commun, si dans cet intervalle elles ont une limite $\psi(x)$ pour n infini et que $\psi_n(x)$ tende uniformément vers sa limite dans l'intervalle considéré, cette limite $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:*

$$\psi[f(x, \psi(x))] = \varphi(x, \psi(x)).$$

Démontrons le théorème pour les conséquentes par exemple. On a entre $\psi_n(x)$ et $\psi_{n+1}(x)$ les deux relations:

$$X = f[x, \psi_n(x)]$$

$$\psi_{n+1}(X) = \varphi[x, \psi_n(x)]$$

d'où l'on déduit:

$$\psi_{n+1}[f(x, \psi_n(x))] = \varphi(x, \psi_n(x)). \tag{10}$$

Nous supposons que la fonction $\psi_n(x)$ ait pu être définie, quel que soit n, dans un certain intervalle I où elle est continue et qu'elle ait une limite $\psi(x)$ vers laquelle elle tend *uniformément* dans cet intervalle: cette limite $\psi(x)$ est alors une fonction continue de x et on a :

$$\psi_n(x) = \psi(x) + \varepsilon_n(x) \qquad |\varepsilon_n(x)| < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif donné et l'inégalité ayant lieu, quelle que soit la valeur de x prise dans l'intervalle I, pour toutes les valeurs de n supérieures à un certain entier n'.

L'égalité (10) devient:

$$\psi[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))] + \varepsilon_{n+1}[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))] = \varphi[x, \psi(x) - \varepsilon_n(x)].$$

La quantité $X = f[x, \psi(x) + \varepsilon_n(x)]$ appartient à l'intervalle I, quel que soit x pris dans cet intervalle, puisqu'on suppose que les fonctions ψ_n et ψ_{n+1} sont définies toutes les deux dans l'intervalle I. En faisant croître n indéfiniment, $\varepsilon_{n+1}[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))]$ tend donc vers zéro et en égalant les limites des deux membres de l'égalité, on obtient:

$$\psi[f(x, \psi(x))] = \varphi(x, \psi(x)).$$

Ainsi la fonction ψ vérifie l'équation fonctionnelle précédente, autrement dit la courbe limite est invariante par la substitution.

Même démonstration pour les antécédentes.

Nous allons traiter un exemple où on peut former explicitement l'équation de la n^e conséquente et déterminer sa limite, ce qui nous permettra d'établir quelques résultats dont nous aurons à nous servir dans la suite.

13. *Exemple.* — Soit à trouver toutes les courbes invariantes par la substitution :

$$X = Sx \qquad Y = S'y. \tag{11}$$

Cette transformation est une *transformation projective*. On sait que Sophus Lie et M.r Klein ont déterminé toutes les courbes invariantes par un groupe continu de transformations projectives. Leur méthode met en évidence des relations intéressantes entre la théorie des groupes et la théorie de l'itération (*): pour obtenir des groupes projectifs à un paramètre, ils re-

(*) Sophus Lie et Klein: *Ueber diejenigen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich übergehen* (Math. Annalen, IV, 1871).

Signalons à ce sujet le travail suivant sur les rapports entre la théorie des groupes et la théorie de l'itération à plusieurs variables:

Böttcher: *Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung* (Inaug. Dissert. Leipzig, 1898).

marquent qu'il suffit de partir d'une transformation projective telle que la transformation (11), de répéter cette transformation n fois, ce qui donne :

$$X = S^n x \qquad Y = S'^n y$$

et de remplacer l'entier n par un paramètre continu t: on obtient ainsi des transformations :

$$X = S^t x \qquad Y = S'^t y \tag{12}$$

comprenant la transformation (11) et la transformation identique et ces transformations (12) forment un groupe continu.

Parmi les courbes invariantes que nous cherchons doivent se trouver les courbes qui admettent le groupe (12), mais nous devrons aussi obtenir les courbes, s'il en existe, qui admettent la transformation isolée (11).

Une courbe quelconque $y = \theta(x)$ a pour n^e conséquente :

$$y_n = S'^n \theta\left(\frac{x}{S^n}\right).$$

Il faut choisir la fonction θ de façon que y_n ait une limite pour n infini. Posons :

$$\frac{x}{S^n} = t \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{\log x - \log t}{\log S}.$$

On aura :

$$y_n = S'^{\frac{\log x - \log t}{\log S}} \theta(t) = x^{\frac{\log S'}{\log S}} \frac{\theta(t)}{t^{\frac{\log S'}{\log S}}}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment par valeurs entières, t prend une suite discontinue de valeurs qui a zéro ou l'infini pour limite, suivant la valeur de S; mais, dans les deux cas, il faut choisir $\theta(t)$ de façon que $\frac{\theta(t)}{t^{\frac{\log S'}{\log S}}}$ ait une limite : cette limite pourra dépendre de x, puisque la suite discontinue des valeurs de t dépend de x. Donc y_n aura une limite de la forme :

$$\psi(x) = x^{\frac{\log S'}{\log S}} \Omega(x).$$

L'équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\psi(x)$,

$$\psi(Sx) = S' \psi(x)$$

devient par la transformation précédente :

$$(S\,x)^{\frac{\log S'}{\log S}}\,\Omega\,(S\,x) = S'\,x^{\frac{\log S'}{\log S}}\,\Omega\,(x)$$

ou bien :

$$\Omega\,(S\,x) = \Omega\,(x).$$

Posons :

$$\Omega\,(x) = \omega\,(\log x).$$

On devra avoir :

$$\omega\,(\log x + \log S) = \omega\,(\log x).$$

L'équation générale des courbes invariantes par la substitution (11) *est donc :*

$$y = x^{\frac{\log S'}{\log S}}\,\omega\,(\log x)$$

ω *désignant une fonction périodique arbitraire, de période* $\log S$.

Complétons ce résultat en montrant que toute courbe invariante $y = \psi\,(x)$ peut être définie comme limite, pour n infini, de la n^e conséquente d'une courbe convenablement choisie. Soit $y = \psi\,(x)\,\varepsilon\,(x)$ l'équation d'une courbe dont la n^e conséquente ait pour limite la courbe invariante $y = \psi\,(x)$: l'équation de la n^e conséquente est:

$$y = S'^n\,\psi\left[\frac{x}{S^n}\right]\varepsilon\left(\frac{x}{S^n}\right)$$

ou

$$y_n = \psi\,(x)\,\varepsilon\left(\frac{x}{S^n}\right).$$

Il suffit donc de choisir pour $\varepsilon\,(x)$ une fonction qui tende vers 1 lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que $|S|$ est supérieur ou inférieur à 1: la n^e conséquente de la fonction $\psi\,(x)\;\varepsilon\,(x)$ aura pour limite $\psi\,(x)$. *On obtient donc, comme limite de conséquentes, toutes les courbes, analytiques ou non, invariantes par* (11).

14. *Etude des courbes invariantes, analytiques ou non.* — Considérons une courbe passant par un point double de la substitution (1): ses antécédentes et ses conséquentes passent par le même point double et on peut essayer de définir un domaine d'existence commun à toutes les conséquentes et à toutes les antécédentes: le théorème du § 12 permet alors de définir

une courbe invariante comme limite des antécédentes ou des conséquentes successives.

C'est par cette méthode que M.r HADAMARD (*), a pu établir l'existence, pour le cas de $|S'|<1<|S|$, des deux courbes invariantes passant par le point double, sans supposer la substitution donnée analytique.

Nous rappellerons d'abord les résultats obtenus par M.r HADAMARD, puis nous utiliserons ces resultats pour l'étude générale des courbes invariantes, analytiques ou non, passant par le point double: dans le cas particulier où la substitution est analytique, nous retrouverons ainsi, par une étude indépendante des développements en série, les résultats du § 5.

M.r HADAMARD considère la substitution (3) où f et φ sont supposés seulement avoir des dérivées continues tendant vers zéro avec x et y: en supposant $|S|>1$ et $|S|>|S'|$ (**), les conséquentes successives peuvent être définies dans un domaine commun et elles ont une limite C qui est une courbe invariante: la courbe limite est indépendante de la courbe initiale qui est assujettie seulement à avoir des tangentes dont les coefficients angulaires doivent être compris entre certaines limites. Si en même temps, on a $|S'|<1$, les antécédentes ont aussi une limite qui est une deuxième courbe invariante C'. Dans le cas actuel, *ces deux courbes sont les seules courbes invariantes passant par l'origine.*

Dans le cas où $|S|$ et $|S'|$ ne comprennent pas 1, la démonstration de M.r HADAMARD donne encore un résultat qu'il importe, pour la suite, de bien préciser. Supposons, par exemple $|S|$ et $|S'|$ inférieurs à 1. La démonstration (appliquée à la substitution inverse de (3)) prouve l'existence d'une courbe invariante C qu'on obtient comme limite des antécédentes d'une courbe arbitraire passant par l'origine. Mais deux cas sont à distinguer.

1.° $|S'|<|S|<1$. La courbe C est tangente à Oy et c'est la seule courbe invariante aboutissant à l'origine, régulière, et *non tangente à Ox.*

Son équation est de la forme:

$$x=[y^2]$$

$[y^2]$ désignant une fonction de y, du second ordre au moins par rapport à l'infiniment petit y.

(*) HADAMARD, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.* (Bullet. de la Société Mathématique de France, comptes-rendus des séances, 1901).

(**) Mr. HADAMARD suppose S positif, mais on voit aisément que la démonstration subsiste quel que soit le signe de S.

2.° $|S|<|S'|<1$. La courbe C est tangente à Ox et c'est la seule courbe invariante passant par l'origine et *non tangente à Oy*. Son équation est de la forme:

$$y=[x^2].$$

14.bis Ces résultats étant rappelés, nous supposerons, dans tout ce qui suit:

$$|S'|<|S|<1$$

le cas où les racines auraient des modules supérieurs à 1 se ramènerait à celui-ci en remplaçant la substitution donnée par son inverse. Les fonctions f et φ seront supposées avoir des dérivées premières continues et tendant vers zéro avec x et y.

La démonstration de M.r Hadamard fournit alors une courbe invariante *C tangente à Oy*: mais ce résultat est compatible avec l'éxistence d'*autres courbes invariantes tangentes à Ox*. Il est facile d'en obtenir *une infinité*. Ce sont ces courbes que nous allons définir et étudier, en caractérisant d'une façon particulière l'une d'elles C' qui, lorsque les données seront analytiques, deviendra la courbe analytique tangente à Ox, que nous avons obtenue au § 5 par la méthode des fonctions majorantes. Nous nous appuierons sur les remarques suivantes:

1.° *Les coordonnées x_n, y_n du n^e conséquent P_n d'un point P pris dans le domaine du point double tendent vers zéro pour n infini.*

Cette proposition a été établie au § 8, mais comme conséquence de l'existence des courbes analytiques invariantes: il faut donc reprendre la démonstration dans le cas actuel. On a:

$$|x_n|<|S|\,|x_{n-1}|+\eta\,[\,|x_{n-1}|+|y_{n-1}|\,]$$
$$|y_n|<|S'|\,|y_{n-1}|+\eta\,[\,|x_{n-1}|+|y_{n-1}|\,]$$

η étant un nombre positif fixe tendant vers zéro avec les dimensions du domaine dans lequel la substitution est définie. Si l'on a: $|x_{n-1}|<h$, $|y_{n-1}|<h$, il en résulte:

$$|x_n|<[\,|S|+2\eta\,]h \qquad |y_n|<[\,|S'|+2\eta\,]h$$

inégalités qui prouvent que $|x_n|$, $|y_n|$ sont inférieurs à h, si $|S|+2\eta$ et $|S'|+2\eta$ sont inférieurs à 1, ce qui a lieu pourvu que h soit suffisamment petit. De plus, si l'on a: $|x|<h$ $|y|<h$, l'application répétée des inégalités

précédentes conduit à

$$|x_n| < [|S| + 2\eta]^n h \qquad |y_n| < [|S'| + 2\eta]^n h$$

et x_n, y_n tendent bien vers zéro.

2.° *La droite OP_n a pour limite Ox pour n infini, du moins si la droite initiale est suffisamment voisine de Ox.* Posons en effet:

$$\frac{y}{x} = t \qquad \frac{Y}{X} = T.$$

La substitution donnée (3) devient:

$$\left.\begin{aligned} X &= Sx + f(x, tx) \\ T &= \frac{S'tx + \varphi(x, tx)}{Sx + f(x, tx)} = \frac{S'}{S}t + \alpha x + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3)'$$

L'équation en S relative à cette substitution a pour racines S et $\frac{S'}{S}$. Ces racines sont inférieures à 1 en module: donc il existe un nombre h_1 tel que x_n et t_n tendent vers zéro si $|x|$ et $|t|$ sont inférieurs à h_1. La proposition est établie.

Ceci posé, il y a une infinité de courbes invariantes tangentes en O à Ox. Montrons comment on peut les construire, lorsque S et S' sont positifs. Soient P_1, P_2,..., P_n... les conséquents d'un point P arbitraire. Joignons P et P_1 par un arc de courbe continu et ayant une tangente en chaque point: à cet arc la substitution fait correspondre successivement les arcs conséquents $P_1 P_2$, $P_2 P_3$,... L'ensemble de ces arcs et du point O constitue une courbe invariante tangente en O à Ox, si pour les différents points de l'arc initial le rapport $\frac{y}{x}$ est suffisamment petit. La dérivée de la fonction ainsi définie présente en général une infinité de discontinuités en P_1, P_2,..., mais on peut, si l'on veut, choisir l'arc PP_1 de façon que la dérivée soit continue. Il suffit de considérer la substitution (3) *prolongée.* On a:

$$Y' = \frac{S'y' + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'}.$$

Soit (x, y, y') l'élément d'où part l'arc PP_1 et (x_1, y_1, y'_1) son conséquent:

si l'arc PP_1 contient ce dernier élément, les points P_1, P_2,... cessent d'être anguleux et la dérivée devient continue.

Si on ne fait aucune nouvelle hypothèse, *rien ne distingue les diverses courbes ainsi obtenues: elles représentent toutes des fonctions continues ayant une dérivée première continue.*

A un autre point de vue, la *recherche des courbes invariantes tangentes à Ox revient à la recherche des courbes invariantes par la nouvelle substitution* (3)′ *et passant par le point double* $x = t = 0$.

La substitution (3)′ peut être ramenée à la forme canonique par un changement de variables de la forme:

$$t = u + \lambda x$$

et elle devient:

$$\left.\begin{aligned} X &= Sx + f_1(x, u) \\ U &= \frac{S'}{S} u + \varphi_1(x, u). \end{aligned}\right\} \qquad (3)''$$

Appliquons à cette substitution les résultats obtenus par M.r Hadamard et rappelés au § 14. Il faut supposer que f_1 et φ_1 ont des dérivées partielles continues et tendant vers zéro avec x et u: cela aura lieu en particulier si *nous supposons que f et φ ont des dérivées partielles continues, non seulement du premier ordre, mais aussi du second ordre.* Deux cas sont à distinguer, suivant que $|S|$ est inférieur ou supérieur à $\left|\frac{S'}{S}\right|$, le cas de l'égalité étant écarté: cela revient à supposer $|S'|$ supérieur ou inférieur à S^2.

1.° *S' est supérieur à S^2*, autrement dit *S' est compris entre* $|S|$ et S^2. La substitution (3″) admet une courbe invariante:

$$u = (x^2)$$

d'où:

$$y = (u + \lambda x)x = [x^2]$$

qui est la seule pour laquelle $\frac{u}{x}$, c'est-à-dire $\frac{y}{x^2}$ ait une limite finie: *c'est la seule courbe invariante tangente à Ox pour laquelle la dérivée seconde à l'origine soit finie.* Lorsque les données devrennent analytiques, cette courbe C' devient la courbe analytique invariante tangente à Ox, obtenue au § 5.

2.° *$|S'|$ est inférieur à S^2*, autrement dit *$|S'|$ est inférieur, non seulement à $|S|$, mais aussi à S^2.*

La substitution (3)″ admet alors (§ 14) une courbe invariante ayant une équation de la forme :

$$x = [u^2]$$

d'où :

$$y = t\,x = (u + \lambda\,x)\,x = [u^3].$$

Ces équations définissent une courbe tangente à $O\,x$, *mais non régulière à l'origine*: c'est la seule courbe tangente à $O x$ pour laquelle $\frac{u}{x}$, c'est-à-dire $\frac{y}{x^2} - \lambda$ ne tende pas vers zéro. Toutes les autres courbes invariantes, en nombre infini, tangentes à $O\,x$ sont telles que $\frac{y}{x^2}$ ait pour limite λ: on les obtient par le procédé géométrique indiqué plus haut. Ainsi, *il y a une infinité de courbes invariantes tangentes en O à $O\,x$ et ayant toutes à l'origine la même dérivée seconde égale à $2\,\lambda$.*

Si on ne fait aucune nouvelle hypothèse, *rien ne distingue encore les diverses courbes ainsi obtenues.*

Mais, si on suppose que f et φ ont des derivées partielles du troisième ordre continues, on pourra procéder avec (3)″ comme on avait opéré avec (3) et on est conduit à distinguer deux nouveaux cas *suivant que* $|S'|$ *est supérieur ou inférieur à* S^3. Dans le premier cas, *on obtient une courbe invariante C' tangente à $O\,x$, et une seule, pour laquelle la dérivée troisième à l'origine soit finie.* Dans le second cas, *il y a une infinité de courbes invariantes, ayant toutes à l'origine une même dérivée seconde égale à $2\,\lambda$ et une même dérivée troisième* μ et pour aller plus loin, il faut faire une nouvelle hypothèse sur les dérivées du quatrième ordre. Et ainsi de suite.

En général, on voit donc qu'on obtient les résultats suivants :

Soit n le plus petit entier vérifiant les inégalités $|S^n| < |S'| < S$. En appliquant plusieurs fois de suite à la substitution donnée des transformations alternativement de l'une des formes:

$$y = t\,x \qquad t = u + \lambda_i\,x$$

on arrivera à une substitution:

$$\begin{cases} X = S\,x + F\,(x,\ \theta) \\ \Theta = \dfrac{S'}{S^{n-1}}\,\theta + \Phi\,(x,\ \theta) \end{cases}$$

pour laquelle on aura:

$$\left| \frac{S'}{S^{n-1}} \right| > | S .$$

Si on suppose que les fonctions f et φ ont des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n continues, on est assuré que F et Φ ont des dérivées du premier ordre continues et on peut appliquer à la substitution en x, θ les résultats obtenus par M.r Hadamard (§ 14): la substitution en x, θ admet une courbe invariante:

$$\theta = [x^2]$$

qui est la seule pour laquelle $\frac{\theta}{x}$ ne tende pas vers l'infini lorsque x tend vers zéro.

Si on revient à la substitution en x, y, on obtient une courbe C' ayant une équation de la forme:

$$y = \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 - \cdots + \lambda_n x^n + [x^{n+1}]$$

(*les λ_i étant les coefficients des formules de transformation successives de la forme*: $t = u + \lambda_i x$).

et cette courbe C' est la seule tangente à Ox pour laquelle la dérivée n^e à l'origine soit finie.

Il y a en outre une infinité de courbes invariantes tangentes à Ox, mais pour lesquelles la dérivée n^e à l'origine est infinie : on les obtient par le precédé géométrique indiqué plus haut (*).

Lorsque les données deviennent analytiques, la courbe C' devient la courbe analytique invariante tangente à Ox. On voit le rôle différent joné par les deux courbes C et C', dans le cas de données non analytiques.

L'hypothèse $S' \neq S''$ à laquelle conduisait le calcul formel du § 3 est ici remplacée par : $|S'| \neq |S''|$: le cas $S' = -S''$, qui n'avait pas été écarté dans la méthode des fonctions majorantes, n'est donc pas traité par la méthode actuelle.

On voit de plus que, par des transformations convenables, *le cas où l'on aurait $S' = S''$ se ramène en définitive au cas des racines égales $S' = S$.*

(*) On verra plus loin (§ 27) une forme générale qu'on peut donner à l'équation des courbes invariantes, analytiques ou non.

15. *Points limites oscillants ou points à convergence irrégulière.* — M.r Kœnigs a introduit, dans l'étude de l'itération à une variable, la notion importante de convergence irrégulière (*). Cette notion s'étend au cas de deux ou plusieurs variables.

Etant donnée la substitution (1), désignons cette substitution par S^1 et ses puissances par S^2, S^3,... Nous dirons avec M.r Kœnigs qu'un point double de la substitution S^p *appartient à l'indice* p s'il n'est point double d'aucune substitution S^n d'indice inférieur à p. Nous énoncerons, sans les démontrer, les propositions suivantes établies par M.r Kœnigs dans le cas d'une variable et pour lesquelles la démonstration subsiste entièrement.

1.° Si O_1 est un point double de S^p, c'est aussi un point double de S^{kp}, K étant un entier positif ou négatif.

2.° Si O_1 est un point double de S^p, les conséquents O_2, O_3,..., O_p qu'on en déduit par la substitution (1) sont aussi points doubles de S^p.

3.° Si O_1 appartient à l'indice p, il en est de même de O_2, O_3,..., O_p.

4.° Les points doubles d'indice p de la substitution S^p se distribuent en cycles de p points doubles permutables circulairement par la substitution (1).

Soit maintenant M un point, M_1, M_2,... les conséquents et M_{-1}, M_{-2},... les antécédents qu'on en déduit par la substitution (1). Il peut arriver que ces conséquents et ces antécédents n'aient pas de point limite, mais qu'en prenant les points M_p, M_{2p},..., M_{kp},... dont l'indice est divisible par p, la suite de ces points ait un point limite: ce point limite est alors un point double de la substitution S^p. M.r Kœnigs l'appelle *point limite à convergence irrégulière.* M.r Poincaré, qui a considéré aussi de pareils points, les appelle des *points limites oscillants* (**).

Soit O_1, O_2,..., O_p un cycle de p points appartenant à l'indice p et permutables par la substitution S^1. Formons l'équation en S relative à la substitution S^p et au point double O_1. Si les racines de cette équation sont distinctes, différentes de 0 et si aucune des deux racines n'est une puissance entière de l'autre, il existe (§ 5) deux courbes C_1, C'_1 invariantes par la substitution S^p et définies dans le domaine de O_1. Par la substitution (1),

(*) Kœnigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bullet. des Sciences Mathématiques, 1883.)

(**) Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes.* (Journal de Math. pures et appliquées, 1890.)

ces deux courbes auront pour conséquentes deux courbes C_2, C'_2 passant par O_2 et définies dans le domaine de O_2, celles-ci deux courbes C_3, C'_3 définies dans le domaine de O_3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on revienne aux courbes C_1, C'_1. *Il existe donc deux cycles de p courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p$* et $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$, *ces courbes étant définies respectivement dans des domaines entourant $O_1, O_2, \ldots, O_p$ et les courbes de chaque cycle se permutant circulairement par la substitution* (1).

Au point de vue purement analytique, on a déterminé ainsi un système de p fonctions $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_p(x)$ vérifiant le système d'équations fonctionnelles suivant :

$$\psi_2[f(x, \psi_1(x))] = \varphi[x, \psi_1(x)]$$

$$\psi_3[f(x, \psi_2(x))] = \varphi[x, \psi_2(x)]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_p[f(x, \psi_{(p-1)}(x))] = \varphi[x, \psi_{p-1}(x)]$$

$$\psi_1[f(x, \psi_p(x))] \quad = \varphi[x, \psi_p(x)].$$

Il peut arriver que la substitution S^p admette une courbe de points doubles C_1 (§ 6); il existe alors un cycle de p courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ permutables circulairement par la substitution S^1 et possédant la propriété suivante: tout point O_1 de l'une de ces courbes C_1 coïncide avec son p^e conséquent O_{p+1}, les conséquents $O_2, O_3, \ldots, O_p$ étant respectivement sur C_2, $C_3, \ldots, C_p$. Dans ce cas il résulte du § 6 que par le point O_1 passe une courbe C'_1 autre que C_1 et invariante par S^p: cette courbe donnera naissance à un cycle de courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$ définies respectivement dans des domaines entourant $O_1, O_2, \ldots, O_p$ et permutable circulairement par S^1.

Passons à l'étude de l'itération d'un point M_1 pris dans le domaine d'un point double O_1 de la substitution S^p appartenant à l'indice p; la disposition des conséquents et des antécédents successifs de M_1 résulte immédiatement des propositions établies dans le cas où p est égal à 1 (§§ 8 à 11). Cette disposition dépend des racines de l'équation en S relative à la substitution S^p: par exemple si les racines sont réelles et inférieures en module à 1, si de plus aucune des deux racines n'est une puissance entière de l'autre, les conséquents pris de p en p ont pour limite un des points O_1, $O_2, \ldots, O_p$ formant avec O_1 un cycle de points oscillants, tandis que, pris de un en un, ils oscillent du voisinage de O_1 au voisinage de O_2, puis de O_3 et ainsi de suite.

Il n'y a aucune difficulté à généraliser de même les autres résultats.

CHAPITRE II.

L'itération a trois variables.

16. Soit donnée une substitution à trois variables:

$$X = f(x, y, z) \qquad Y = \varphi(x, y, z) \qquad Z = \theta(x, y, z) \tag{1}$$

et un point double de cette substitution que nous prendrons pour origine. Formons l'équation en S relative au point double:

$$\begin{vmatrix} f'_{x_0} - S & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ \varphi'_{x_0} & \varphi'_{y_0} - S & \varphi'_{z_0} \\ \theta'_{x_0} & \theta'_{y_0} & \theta'_{z_0} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Supposons les racines S, S', S'' de cette équation distinctes: la substitution donnée peut alors se ramener à la forme suivante, par un changement de variables:

$$\left.\begin{aligned} X &= S\ \ x + f(x, y, z) \\ Y &= S'\, y + \varphi(x, y, z) \\ Z &= S'' z + \theta(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

f, φ, θ sont des fonctions que nous supposerons holomorphes dans le domaine de l'origine et qui s'annullent ainsi que leurs dérivées du premier ordre pour $x = y = z = 0$.

On peut se proposer de chercher soit *des courbes*, soit *des surfaces* analytiques invariantes par cette substitution et passant par le point double. Nous suivrons la même méthode que dans le cas de deux variables et nous commencerons par la recherche des courbes, qui conduit à des résultats tout pareils à ceux établis pour deux variables.

17. *Courbes invariantes.* — Une courbe analytique invariante passant par l'origine a nécessairement pour tangente l'une des droites Ox, Oy, Oz.

Cherchons une courbe invariante tangente à Ox et soient:

$$y = \psi(x) \qquad z = \chi(x)$$

ses équations. Les fonctions ψ et χ vérifient le système d'équations fonctionnelles:

$$\left.\begin{aligned}\psi\,[S\,x + f(x,\ \psi(x),\ \chi(x))] &= S'\ \psi(x) + \varphi(x,\ \psi(x),\ \chi(x))\\ \chi\,[S\,x + f(x,\ \psi(x),\ \chi(x))] &= S''\,\chi(x) + \theta\,(x,\ \psi(x),\ \chi(x)).\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Posons, pour simplifier les notations:

$$\psi(x) = y \qquad \chi(x) = z \qquad S\,x + f(x,\ y,\ z) = v.$$

Les équations (4) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}\psi(v) &= S'\ y + \varphi(x,\ y,\ z)\\ \chi(v) &= S''z + \theta\,(x,\ y,\ z).\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

En prenant les dérivées successives des deux membres de chacune de ces équations par rapport à x et en remplaçant x par zéro, on obtient des égalités permettant de calculer les cœfficients ψ''_0, ψ'''_0,... et χ''_0, χ'''_0,... des séries ψ et χ. On voit immédiatement que ce calcul donne lieu aux mêmes remarques que dans le cas de deux variables (§ 4). Nous nous bornerons à énoncer la conclusion à laquelle on arrive, les démonstrations étant les mêmes:

Considérons les dérivées à l'origine y'_0, y''_0,..., $y_0^{(p)}$ de y ou $\psi(x)$ comme étant respectivement de poids 0, 1, 2,..., $(p-1)$ et de même pour z'_0, z''_0,..., $z_0^{(p)}$ dérivées de z ou $\chi(x)$. Nous obtiendrons, en dérivant les deux équations (5) par rapport à x, deux égalités de la forme:

$$(S' - S^n)\,\psi_0^{(n)} = \varpi_1\,(\psi''_0,\ \psi'''_0,\ldots,\ \psi_0^{(n-1)};\ \chi''_0,\ \chi'''_0,\ldots,\ \chi_0^{(n-1)})$$

$$(S'' - S^n)\,\chi_0^{(n)} = \varpi_2\,(\psi''_0,\ \psi'''_0,\ldots,\ \psi_0^{(n-1)};\ \chi''_0,\ \chi'''_0,\ldots,\ \chi_0^{(n-1)})$$

ϖ_1 et ϖ_2 étant des polynômes en ψ''_0, ψ'''_0,..., $\psi_0^{(n-1)}$; χ''_0, χ'''_0,..., $\chi_0^{(n-1)}$ de poids $n-2$ par rapport à ces quantités.

Le calcul formel est possible, *si on suppose que S' et S'' ne sont pas des puissances entières de S.* Dans le cas contraire, on est conduit en général à une impossibilité dans le calcul des coefficients et par suite *il n'y a pas en général de solution holomorphe* des équations fonctionnelles considérés: il peut arriver cependant qu'on soit conduit à une indétermination et il y aurait lieu de voir si la convergence des séries obtenues, est encore assurée dans ce cas, comme nous allons montrer qu'elle l'est pour le cas général

Mais nous laisserons ce cas de côté, en nous bornant au cas général où le calcul formel est possible.

Il reste donc à établir la convergence des séries obtenues, en supposant $S' - S^n$ et $S'' - S^n$ différents de 0, quel que soit n.

On peut toujours supposer $|S| < 1$ en remplaçant au besoin la substitution donnée par son inverse, qui admet évidemment les mêmes courbes invariantes qu'elle: le seul cas ainsi omis est le cas limite où l'on aurait $|S| = 1$. Considérons la substitution auxiliaire.

$$\left.\begin{aligned} X &= S_1 x + 2 F(x, y, z) \\ Y &= S_1 y - F(x, y, z) \\ Z &= S_1 z - F(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où S_1 désigne un nombre compris entre $|S|$ et 1 et $F(x, y, z)$ la fonction majorante :

$$F(x, y, z) = \frac{M \beta^2 (x + y + z)^2}{1 - \beta (x + y + z)} .$$

Il existe un nombre λ plus petit que 1, inférieur quel que soit n aux deux quantités $\dfrac{|S' - S^n|}{S_1 - S_1^n}$ et $\dfrac{|S'' - S^n|}{S_1 - S_1^n}$.

Désignons par $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ les séries analogues à $\psi(x)$ et à $\chi(x)$ pour la substitution (6): ces séries ont tous leurs coefficients positifs et, à cause de la remarque énoncée plus haut relativement aux poids des coefficients, on aura, comme pour deux variables (§ 5):

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \psi_{1,0}^{(n)} \qquad \text{et} \qquad |\chi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \chi_{1,0}^{(n)} .$$

Si on démontre la convergence des séries $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ dans un cercle de rayon ρ, il résultera de là que les séries ψ et χ seront convergentes dans le cercle de rayon $\lambda \rho$.

Pour prouver la convergence des séries ψ_1 et χ_1, il suffit de montrer qu'il existe une courbe analytique invariante par la substitution (6) et tangente a Ox. Posons :

$$\begin{aligned} x + y &= u & x + z &= v & x + y + z &= w \\ X + Y &= U & X + Z &= V & X + Y + Z &= W. \end{aligned}$$

La substitution (6) devient:

$$U = S_1 u + \frac{M \beta^2 w^2}{1 - \beta w} \qquad V = S_1 v + \frac{M \beta^2 w^2}{1 - \beta w} \qquad W = S_1 w$$

d'où l'on déduit, comme dans le cas de deux variables (§ 5), la courbe invariante:

$$u = v = w - \frac{M \beta^2 w^2}{S_1 - S_1^2} - \frac{M \beta^3 w^3}{S_1 - S_1^3} - \cdots - \frac{M \beta^n w^n}{S_1 - S_1^n}$$

série convergente si l'on a $|w| < \frac{1}{\beta}$.

On en déduit une courbe invariante par (6) et tangente à Ox: elle a pour équations:

$$y = z = \frac{M \beta^2 (x + y + z)^2}{S_1 - S_1^2} + \cdots + \frac{M \beta^n (x + y + z)^n}{S_1 - S_1^n} + \cdots$$

Les fonctions y et z de x définies implicitement par ces équations sont les fonctions $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ cherchées.

On démontre de même l'existence de deux courbes analytiques invariantes tangentes respectivement à Oy et à Oz.

La méthode ainsi employée montre que les trois courbes obtenues sont *les seules* courbes analytiques (*) invariantes passant par le point double. On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Etant donnée une substitution à trois variables, si les racines de l'équation en S relative à un point double de la substitution sont distinctes, de module différent de* 0 *et de* 1 *et si aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine, il existe trois courbes analytiques invariantes par la substitution, et trois seulement, passant par le point double et définies dans le domaine de ce point.*

Remarque. — La démonstration subsiste pour un nombre quelconque de variables. *La substitution:*

$$X_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Rappelons que nous entendons par courbe analytique (§ 1) une courbe telle que deux au moins des coordonnées x, y, z puissent s'exprimer par des fonctions holomorphes de la troisième.

Une surface analytique sera de même une surface telle que l'une au moins des trois coordonnées x, y, z puisse s'exprimer en fonction holomorphe des deux autres.

admet en un point double n courbes analytiques invariantes, si l'équation en S a ses racines distinctes, de module différent de 0 et de 1 et si aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine. Nous obtenons ainsi, dans le domaine d'un pareil point (*), $n-1$ fonctions holomorphes $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_1), \ldots, \psi_{n-1}(x_1)$ vérifiant le système fonctionnel suivant :

$$\psi_i[f_1(x_1, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})] = f_i(x_1, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

18. *Surfaces invariantes.* — Cherchons maintenant une surface analytique invariante par la substitution (3) et passant par l'origine. Le plan tangent à l'origine doit être l'un des plans de coordonnées.

Cherchons une surface tangente au plan xoy et soit:

$$z = \psi(x, y) = \frac{1}{1.2}(z_{2,0}x^2 + 2z_{1,1}xy + z_{0,2}y^2) +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(z_{3,0}x^3 + 3z_{2,1}x^2y + \cdots) + \cdots$$

son équation. Nous désignons par $z_{\alpha,\beta}$ la valeur prise par la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ pour $x = y = 0$. On a: $z_{1,0} = 0$ $z_{0,1} = 0$. Pour calculer les autres dérivées, écrivons l'équation fonctionnelle que doit vérifier la fonction $\psi(x, y)$:

$$\psi[Sx + f(x, y, \psi(x, y)), S'y + \varphi(x, y, \psi(x, y))] =$$
$$= S''\psi(x, y) + \theta(x, y, \psi(x, y)).$$

Posons pour simplifier:

$$\psi(x, y) = z \quad Sx + f(x, y, z) = v \quad S'y + \varphi(x, y, z) = w \quad \theta(x, y, z) = u.$$

(*) Les courbes invariantes sont ainsi définies dans le voisinage de l'origine: dans certains cas, on pourra, à l'aide de la substitution donnée, faire le prolongement analytique des fonctions invariantes dans d'autres régions du plan. Dans son mémoire: ***Sur une classe de transcendantes nouvelles.*** (Acta Mathematica, tomes 18 et 23). M. Picard définit ainsi dans tout le plan des transcendantes uniformes $y, z, \ldots, t$ de la variable x invariantes par la substitution rationnelle:

$$X = mx \quad Y = f(y, z, \ldots, t) \quad Z = \varphi(y, z, \ldots, t) \ldots, \quad T = \theta(y, z, \ldots, t)$$

et présentant des singularités essentielles. Mr. Poincaré a étudié les fonctions invariantes par une substitution de la même forme et n'ayant pas pour $x = o$ de point singulier essentiel (***Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes.*** Journal de Mathématiques, 1890).

L'équation fonctionnelle devient:

$$\psi(v,\ w) = S'' z + u. \tag{7}$$

On calculera les dérivées $z_{\alpha,\beta}$ en prenant les dérivées des deux membres de cette équation (7) par rapport à x et à y et en y remplaçant x et y par zéro. En prenant les dérivées α fois par rapport à x et β fois par rapport à y et en désignant toujours par $f_{\alpha,\beta}$ la valeur prise par la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ d'une fonction f de x et de y pour $x = y = o$, on obtient:

$$[\psi(v,\ w)]_{\alpha,\beta} = S'' z_{\alpha,\beta} + u_{\alpha,\beta}. \tag{8}$$

Le calcul des quantités $u_{\alpha,\beta}$ donne successivement:

$$u_{1,0} = 0 \qquad u_{0,1} = 0$$

$$u_{2,0} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_0 \qquad u_{1,1} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \qquad u_{0,2} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_0$$

$$u_{3,0} = \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}\right)_0 + 3\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial z}\right)_0 z_{2,0} \qquad u_{2,1} = \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial z}\right)_0 z_{1,1} + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y\,\partial z}\right)_0 z_{2,0} \qquad u_{1,2} = \cdots$$

. . . .

Le calcul des quantités $[\psi(v,\ w)]_{\alpha,\beta}$ donne de même successivement:

$$[\psi(v,\ w)]_{1,0} = 0 \qquad [\psi(v,\ w)]_{0,1} = 0$$

$$[\psi(v,\ w)]_{2,0} = S^2 z_{2,0} \qquad [\psi(v,\ w)]_{1,1} = S S' z_{1,1} \qquad [\psi(v,\ w)]_{0,2} = S'^2 z_{0,2}$$

$$[\psi(v,\ w)]_{3,0} = S^3 z_{3,0} + 3 S v_{2,0} z_{2,0} + 3 S w_{2,0} z_{1,1}$$

$$[\psi(v,\ w)]_{2,1} = S^2 S' z_{2,1} + 2 S v_{1,1} z_{2,0} + 2 S w_{1,1} z_{1,1} + S' v_{2,0} z_{1,1} + S' w_{2,0} z_{0,2}$$

. . . .

Dans ces formules $v_{i,j}$ et $w_{i,j}$ doivent être remplacées par leurs valeurs en fonction des quantités $z_{\alpha,\beta}$, valeurs qu'on calcule comme on a calculé $u_{\alpha,\beta}$.

Ces formules montrent que l'équation (8) prend la forme:

$$S^\alpha S'^\beta z_{\alpha,\beta} = S'' z_{\alpha,\beta} - \varpi_{\alpha,\beta}(z_{2,0},\ z_{1,2},\ z_{0,2},\ z_{3,0},\ z_{2,1}, \ldots,\ z_{i,j} \ldots)$$

$\varpi_{\alpha,\beta}$ étant un polynôme par rapport aux dérivées $z_{i,j}$ pour lesquelles $i + j$ est inférieur à $\alpha + \beta$. On démontre en outre, comme on l'a fait au § 4 pour le cas de deux variables, que le polynôme $\varpi_{\alpha,\beta}$ est de poids $\alpha+\beta-2$, si on attribue à $z_{i,j}$ le poids $i+j-1$: les coefficients de ce polynôme dépendent de S, S' et des valeurs des dérivées partielles des fonctions f, φ, θ pour $x=y=z=0$.

L'égalité précédente permet de calculer $\psi_{\alpha,\beta}$ lorsqu'on a calculé toutes les dérivées d'ordre inférieur à $\alpha+\beta$, *à condition que* $S''-S^\alpha S'^\beta$ *ne soit pas nul.*

Nous supposerons donc que $S''-S^\alpha S'^\beta$ *n'est nul pour aucune valeur positive ou nulle des entiers* α, β. Le calcul formel des coefficients est alors possible.

Nous supposerons aussi que $|S|$ *et* $|S'|$ *sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à* 1: la démonstration de la convergence de la série peut alors se faire comme pour deux variables.

Nous pouvons toujours supposer que $|S|$ et $|S'|$ sont tous deux *inférieurs à* 1, en remplaçant au besoin la substitution donnée par son inverse.

Considérons la substitution auxiliaire:

$$\left.\begin{aligned} X &= S_1 x + F(x, y, z) \\ Y &= S_1 y + F(x, y, z) \\ Z &= S_1 z - 2F(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dans laquelle $F(x, y, z)$ désigne la fonction $\dfrac{M\beta^2(x+y+z)^2}{1-\beta(x+y+z)}$, majorante pour f, φ, θ et S_1 un nombre inférieur à 1 et supérieur à la fois à $|S|$ et à $|S'|$. Désignons par $\psi^1(x, y)$ la série analogue à $\psi(x, y)$ obtenue en remplaçant la substitution (3) par la substitution (9).

La quantité $\dfrac{|S''-S^\alpha S'^\beta|}{S_1-S_1^{\alpha+\beta}}$ est supérieure, pour toutes les valeurs des entiers α, β à un certain nombre positif λ qu'on peut toujours supposer inférieur à 1 (*) et on a:

$$|S''-S^\alpha S'^\beta| > \lambda(S_1 - S_1^{\alpha+\beta}).$$

(*) Cela résulte des hyphoteses $|S|<1$ $|S'|<1$. Si, au contraire, 1 était compris entre $|S|$ et $|S'|$, l'ensemble des nombres $S''-S^\alpha S'^\beta$ pourrait avoir zéro comme valeur limite. En supposant S, S', S'' positifs, cela revient à chercher dans quel cas la droite

$$x\log S + y\log S' - \log S'' = o$$

passe à une distance minimum non nulle de tous les sommets du quadrillage formé par

Il résulte alors de la valeur trouvée plus haut pour $\psi_{\alpha,\beta}$ et des propriétés relatives au poids de $z_{\alpha,\beta}$ que l'on a, comme dans le cas de deux variables (§ 5):

$$z_{\alpha,\beta} \,| < \frac{1}{\lambda^{\alpha+\beta-1}} z^1_{\alpha,\beta}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver la convergence de la série ψ^1 dans un certain domaine $|x| < \rho$, $|y| < \rho$ pour qu'il en résulte la convergence de la série ψ dans le domaine $|x| < \lambda\rho$ $|y| < \lambda\rho$.

La démonstration s'achève comme dans le cas de deux variables. Posons:

$$\begin{aligned} x + y &= u \\ x + y + z &= v \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} X + Y &= U \\ X + Y + Z &= V. \end{aligned}$$

La substitution (9) devient:

$$\begin{cases} U = S_1\, u \quad \dfrac{2\,M\,\beta^2\,v^2}{1 - \beta\, v} \\ V = S_1\, v \end{cases}$$

et on en déduit la surface analytique, invariante par (9) et tangente au plan $x\,O\,y$, qui a pour équation:

$$z = \frac{2\,M\,\beta^2}{S_1 - S_1^2}(x + y + z)^2 + \frac{2\,M\,\beta^3}{S_1 - S_1^3}(x + y + z)^3 + \cdots$$

La série $\psi^1(x, y)$ s'obtient en résolvant cette équation par rapport à z.

Ainsi *l'existence d'une surface analytique invariante tangente au plan $x\,O\,y$ est établie en supposant que S'' n'est pas de la forme $S^\alpha S'^\beta$* (α, β *entiers positifs ou nuls*) *et que* $|S|$ et $|S'|$ *sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à* 1 (*).

---

les points du plan dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs ou nuls: on est assuré qu'il en est ainsi si le coefficient angulaire de la droite est négatif ($\log S$ et $\log S_1$ de même signe) tandis que, s'il est positif et incommensurable, la droite passe aussi près qu'on le veut d'une infinité de sommets du quadrillage, d'après un théorème bien connu sur les incommensurables.

(*) La proposition ainsi énoncée appelle de nouvelles recherches, que je dois me borner à signaler:

1.° Dans le cas où 1 est compris entre $|S|$ et $|S'|$, la méthode ne s'applique plus et il resterait à étudier la série dans ce cas: des difficultés de même nature se présentent dans

19. *Formes canoniques de la substitution à trois variables.* — Supposons que les trois racines S, S', S'' soient distinctes et qu'aucune des trois racines ne soit le produit de deux puissances à exposants entiers positifs ou nuls des deux autres racines. Il convient, pour appliquer la proposition précédente, de distinguer deux cas:

PREMIER CAS: $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ *sont tous trois inférieurs ou tous trois supérieurs à* 1. — La méthode précédente montre qu'il existe *trois surfaces analytiques invariantes, et trois seulement, passant par le point double,* une tangente à chacun des plans de coordonnées. On démontrera alors, comme dans le cas de deux variables (§ 7) qu'on peut ramener la substitution à la forme:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\,[S + F(x, y, z)] \\ Y &= y\,[S' + \Phi(x, y, z)] \\ Z &= z\,[S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

F, Φ, Θ étant trois fonctions nulles pour $x = y = z = 0$ et holomorphes dans le domaine de l'origine.

Les intersections mutuelles des trois surfaces invariantes prises deux à deux sont les trois courbes invariantes dont nous avons établi l'existence au § 17.

DEUXIÈME CAS: *Le nombre* 1 *est compris entre la plus grande et la plus petite des quantités* $|S|$, $|S'|$, $|S''|$. — La méthode précédente ne démontre plus que l'existence d'*une seule surface analytique invariante passant par*

---

l'étude des points singuliers des équations différentielles où l'on rencontre des développements dans les termes desquels entrent en dénominateur des expressions de la forme $\alpha S_1 + \beta S_2 - S_3$ (α, β entiers) pouvant devenir aussi petites qu'on le veut (Cf. DULAC, *Recherches sur les points singuliers des équat. différentielles.* Thèse 1903, page 24).

2.° Dans le cas où l'on aurait $S'' = S^{\alpha} S'^{\beta}$ (ou $S = S'^{n}$ dans le cas de 2 variables), le calcul de $Z_{\alpha,\beta}$ conduit en général à une impossibilité et il n'y a pas alors de solution holomorphe de l'équation fonctionnelle: exceptionnellement, il pourrait y avoir indétermination, le calcul formel donnerait une infinité de développements qu'il y aurait lieu d'étudier au point de vue de la convergence: la question analogue dans la théorie des points singuliers des équations différentielles a été étudiée par M. BENDIXON (*Stockholm Öfv. 1894*) et par M. HORN (*Journal für Mathem. 1896*).

3.° Enfin il y aurait lieu de traiter le cas où l'une au moins des quantités $|S|$, $|S'|$ est égale à 1: le cas où $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ seraient tous les trois égaux à 1 présenterait sans doute un intérêt particulier, puisque c'est le seul cas où la substitution puisse être stable, d'après les résultats obtenus par M. LEVI CIVITA que j'ai cités dans l'introduction, *le point double.* Si l'on a par exemple: $|S| < 1 < |S'| < |S''|$, cette surface est tangente au plan $y\,O\,z$.

Il y a deux autres développements susceptibles de représenter *formellement* deux surfaces tangentes respectivement aux deux plans $x\,O\,y$ et $x\,O\,z$: mais la méthode précédente ne permet plus d'établir leur convergence.

On ne peut donc plus affirmer dans ce cas que la surface invariante obtenue soit la seule.

Dans ce cas, nous ramènerons la substitution à une forme canonique un peu moins simple que dans le cas précédent.

On peut tout d'abord amener la surface invariante à être le plan $x\,O\,y$, en procédant comme dans le cas précédent. La substitution prend la forme :

$$X = f(x,\ y,\ z) = f_0(x,\ y) + z\,f_1(x,\ y) + z^2 f_2(x,\ y) + \cdots$$

$$Y = \varphi(x,\ y,\ z) = \varphi_0(x,\ y) + z\,\varphi_1(x,\ y) + z^2\,\varphi_2(x,\ y) + \cdots$$

$$Z = z\,\theta(x,\ y,\ z).$$

Il y a trois courbes invariantes par cette substitution (§ 17). Deux de ces courbes sont situées sur la surface invariante, qui est actuellement le plan $z = 0$: en effet, la substitution, lorsqu'on l'applique à un point du plan $x\,O\,y$, devient la substitution à deux variables:

$$X = f_0(x,\ y) \qquad Y = \varphi_0(x,\ y).$$

Il y a deux courbes C, C' invariantes par cette substitution, une tangente à $O\,x$ et l'autre à $O\,y$: ces deux courbes sont évidemment deux des trois courbes invariantes par la substitution à trois variables. Il y a de plus une courbe invariante C'' en dehors de la surface invariante. Nous allons amener ces trois courbes C, C', C'' à devenir les trois axes de coordonnées.

Soient :

$$z = 0 \qquad y = \psi(x) = \alpha_1\,x^2 + \alpha_2\,x^3 + \cdots$$

$$z = 0 \qquad x = \psi_1(y) = \beta_1\,y^2 + \beta_2\,y^3 + \cdots$$

les équations des courbes C, C' et:

$$y - \theta_1(z) = 0 \qquad x - \theta_2(z) = 0$$

les équations de la courbe C'' qui est tangente à $O\,z$.

Faisons le changement de variables suivant:

$$u = y - \theta_1(z) - \alpha_1[x - \theta_2(z)]^2 - \alpha_2[x - \theta_2(z)]^3 - \cdots$$
$$v = x - \theta_2(z) - \beta_1[y - \theta_1(z)]^2 - \beta_2[y - \theta_1(z)]^3 - \cdots$$
$$w = z$$

le même changement étant effectué sur X, Y, Z qui sont remplacés par U, V, W (*).

A la courbe invariante $z = 0$ $y = \psi(z)$ correspond: $u = 0$ $w = 0$.

A la courbe invariante $z = 0$ $x = \psi_1(y)$ correspond: $v = 0$ $w = 0$.

A la courbe invariante: $y - \theta_1(z) = 0$ $x - \theta_2(z) = 0$ correspond: $u = 0$ $v = 0$.

Pour simplifier les notations, désignons encore par x, y, z, X, Y, Z les nouvelles variables, au lieu de les désigner par u, v, w, U, V, W. Les courbes invariantes devant être les axes de coordonnés et la surface invariante le plan $x\,O\,y$, la substitution prendra la forme:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\,[S + F(x, y, z)] + y\,z\,f(x, y, z) \\ Y &= y\,[S' + \Phi(x, y, z)] + z\,x\,\varphi(x, y, z) \\ Z &= z\,[S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

F, Φ, Θ, f et φ sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine et les trois premières sont nulles à l'origine. Les termes du premier degré dans X, Y, Z sont $S\,x$, $S'\,y$, $S''\,z$, car les racines de l'équation en S restent invariantes par toute transformation ponctuelle régulière à l'origine.

20. *Itération d'un point.* — Servons-nous des formes canoniques ainsi établies pour étudier la disposition des conséquents et des antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double. Nous supposerons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que les trois racines de l'équation en S sont distinctes, ont des modules différents de 0 et de 1 et qu'aucune des racines n'est égale au produit de deux puissances à exposants entiers positifs ou nuls des deux autres racines.

(*) Les formules du changement de variables permettent d'exprimer x, y, z par des fonctions holomorphes de u, v, w dans le domaine de l'origine, puisque le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ a la valeur 1 pour $x = y = z = 0$.

Plusieurs cas peuvent se présenter et, dans ces divers cas, nous arriverons à des résultats qui présentent une analogie frappante avec les résultats obtenus par M.r Poincaré dans l'étude des courbes définies par un système d'équations différentielles du premier ordre dans le voisinage d'un point singulier (*). La raison de cette analogie sera expliquée plus loin (Chap. III).

Premier cas: *Les trois racines sont réelles et on a* $S < S' < S'' < 1$ Il y a alors trois surfaces invariantes Σ, Σ', Σ'' et trois courbes invariantes C, C', C'' qui sont les intersections des trois surfaces deux à deux.

En se servant de la forme canonique (10), on verra, comme dans le cas de deux variables (§ 8), que les conséquents successifs d'un point suffisamment voisin du point double ont pour limite le point double et qu'en général ils tendent vers ce point tangentiellement à la courbe invariante C'' (correspondant à la racine S'' de plus grand module).

De plus, le plan déterminé par la tangente à C'' et par le $n.^e$ conséquent à en général pour limite le plan tangent à la surface Σ (celle des trois surfaces qui contient C' et C''): en effet, en se servant de la forme canonique et en désignant par $x_,$, $y_,$, z_n les coordonnées du $n.^e$ conséquent, on voit aisément que l'on a: $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < k^n \left|\frac{x}{y}\right|$, k étant un nombre fixe inférieur à 1 et que par suite $\frac{x_n}{y_n}$ tend vers zéro, c'est-à-dire que le plan déterminé par Oz et par le $n.^e$ conséquent a pour limite le plan $y\,o\,z$.

Certains de ces résultats tombent en défaut si le point initial est pris sur l'une des courbes invariantes ou sur l'une des surfaces invariantes: alors le $n.^e$ conséquent a toujours pour limite le point double, mais il se déplace en restant sur la courbe ou sur la surface invariante à laquelle appartenait le point initial, de sorte que les autres résultats tombent en partie: par exemple, si le point initial est pris sur Σ, le n^e conséquent tend vers le point double tangentiellement à C' et non plus à C''.

Deuxième cas: *les trois racines sont réelles et on a:* $S > S' > S''' > 1$. Dans ce cas, on obtient pour les antécédents successifs d'un point les résultats énoncés dans le cas précédent pour les conséquents: il suffit de remplacer la substitution par son inverse pour être ramené au cas précédent.

(*) Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* (4.e partie, Journal de Liouville, 1886).

Les deux premiers cas sont les analogues du cas d'un *nœud*, dans la théorie de M.r Poincaré (page 154 du mémoire cité plus haut).

Troisième cas: *les modules des trois racines sont inférieurs à* 1, *mais il y a deux racines imaginaires conjuguées et une racine réelle:* $|S| = |S'| < 1$, $|S''| < 1$.

Il y a dans ce cas une seule surface réelle invariante Σ'' et une seule courbe réelle invariante C'' qui est extérieure à Σ'' et qui est l'intersection des deux surfaces imaginaires conjuguées Σ, Σ'.

En procédant comme au § 9, on mettra la substitution sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} X+iY &= (x+iy)\,[\,|S|\,e^{i\alpha} + F(x, y, z) + i\,\Phi(x, y, z)] \\ X-iY &= (x-iy)\,[\,|S|\,e^{-i\alpha} + F(x, y, z) - i\,\Phi(x, y, z)] \\ Z &= z\,[S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et on démontrera, comme dans le cas de deux variables, que les conséquents successifs tendent vers le point double.

De plus le plan déterminé par la tangente à la courbe C'' et par le n^e conséquent tourne indéfiniment autour de cette tangente, sans avoir de limite (§ 10).

Quant à la droite qui joint le point double au n^e conséquent, deux cas peuvent se présenter:

Supposons d'abord $|S| < |S''|$: désignons par ρ_n, ω_n, z_n les coordonnées semi-polaires du n^e conséquent; on voit que $\frac{\rho_n}{z_n}$ tend en général vers O (il y a évidemment exception si le point initial est pris sur la surface $z = 0$ ou Σ''). La droite qui joint le point double au n^e conséquent a donc pour limite la tangente à la courbe C'' (ou, sous la forme réduite, la droite Oz: $\rho = 0$).

Supposons au contraire $|S| > |S''|$: $\frac{\rho_n}{z_n}$ croît indéfiniment; la droite joignant l'origine au n^e conséquent se rapproche indéfiniment de la surface $z = 0$ ou Σ'', sans avoir d'ailleurs de position limite, puisque nous venons de voir que le plan déterminé par Oz et par cette droite n'avait pas de position limite (il y a évidemment exception si le point initial est pris sur la courbe C'': $\rho = 0$).

Dans le cas où $|S|$ et $|S''|$ sont égaux, nous ne pouvons plus rien conclure pour la limite du rapport $\frac{\rho_n}{z_n}$.

Quatrième cas: *les modules des trois racines sont supérieurs à* 1, *mais* *il y a deux racines imaginaires conjuguées et une racine réelle:* $|S| = |S'| > 1$ $|S''| > 1$.

On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le troisième cas pour les conséquents.

Le troisième et le quatrième cas sont les analogues du cas d'un *foyer*, dans la théorie de M.r Poincaré (loc. cit., pages 158-160).

Cinquième cas: *les trois racines sont réelles, deux inférieures à* 1 *et une supérieure à* 1, *en valeur absolue:* $|S| < |S'| < 1 < |S''|$.

Il y a une seule surface invariante Σ'' passant par le point double, elle contient deux courbes invariantes C, C' et il y a une troisième courbe invariante C'' en dehors de Σ''.

Si un point est pris sur Σ'', ses conséquents successifs restent sur Σ'' et ont pour limite le point double, la droite qui joint le point double au n^e conséquent ayant une position limite: on voit en effet, en se servant de la forme canonique (11) que pour un point de Σ'', on retombe sur le 1.er cas de l'itération à deux variables (§ 8).

Mais si un point est pris en dehors de Σ'', ses conséquents successifs à partir d'un certain rang sont situés en dehors du domaine de définition de la substitution et on ne peut plus rien dire. Cela résulte de ce que l'on a: $|z_{n+1}| > k |z_n|$, k étant un nombre fixe supérieur à 1.

Sixième cas: *les trois racines sont réelles et l'on a:* $|S| > |S'| > 1 > |S''|$.

On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le cinquième cas pour les conséquents.

Ce cinquième et ce sixième cas sont les analogues du cas d'un *col* dans la théorie de M.r Poincaré (loc. cit., pages 155-158).

Septième cas. *Deux racines imaginaires conjuguées de module inférieur à* 1 *et une racine réelle de module supérieur à* 1. $|S| = |S'| < 1 < |S''|$. — On arrive aux mêmes conclusions que dans le cinquième cas, sauf en ce qui concerne un point pris sur Σ'': les conséquents d'un pareil point tendent vers le point double, mais la droite qui joint un conséquent au point double, au lieu d'avoir une position limite, tourne indéfiniment autour du point double.

Huitième cas. *Deux racines imaginaires conjuguées de module supérieur à* 1 *et une racine réelle de module inférieur à* 1: $|S| = |S'| > 1 > |S''|$. On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le septième cas pour les conséquents.

Le septième et le huitième cas correspondent au cas d'un *col-foyer* dans la théorie de M.r Poincaré (loc. cit. page 160).

21. *Cas où la substitution a une infinité de points doubles formant une surface.* — Dans ce qui précède, nous avons considéré une substitution à trois variables dans le domaine d'un point double isolé. Il peut arriver que la substitution ait une infinité de points doubles formant une surface ou une courbe.

Supposons d'abord que la substitution admette une *surface* de points doubles. Je dis qu'en tout point de la surface, l'équation en S a une racine double égale à 1. En effet, prenons un point quelconque de la surface pour origine et le plan tangent comme plan des $x\,y$ et soient:

$$
\begin{aligned}
X &= a\,x + b\,y + c\,z + \cdots \\
Y &= a'\,x + b'\,y + c'\,z + \cdots \\
Z &= a''\,x + b''\,y + c''\,z + \cdots
\end{aligned}
$$

les équations de la substitution; les coordonnées des points doubles vérifient les équations:

$$
\begin{aligned}
x &= a\,x + b\,y + c\,z + \cdots \\
y &= a'\,x + b'\,y + c'\,z + \cdots \\
z &= a''\,x + b''\,y + c''\,z + \cdots
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse qu'il y a une surface de points doubles tangente au plan $x\,O\,y$ en O, ces équations doivent subsister lorsqu'on donne à x et à y des accroissements arbitraires infiniment petits $\delta\,x$, $\delta\,y$ et à z l'accroissement $\delta\,x = 0$. On a donc, quels que soient $\delta\,x$, $\delta\,y$:

$$\delta\,x = a\,\delta\,x + b\,\delta\,y \qquad \delta\,y = a'\,\delta\,x + b'\,\delta\,y \qquad 0 = a''\,\delta\,x + b''\,\delta\,y$$

d'où:

$$a = 1 \quad b = 0 \quad a' = 0 \quad b' = 1 \quad a'' = 0 \quad b'' = 0$$

et les équations de la substitution devrennent:

$$
\begin{aligned}
X &= x + c\,z + \cdots \\
Y &= y + c'\,z + \cdots \\
Z &= \quad S''\,z + \cdots
\end{aligned}
$$

En remplaçant x et y par $x + \dfrac{c\,z}{S'' - 1}$ et par $y + \dfrac{c'\,z}{S'' - 1}$ et en effectuant le même changement de variables sur X, Y, ces équations prennent la forme:

$$\begin{aligned} X &= x \quad + \cdots \\ Y &= y \quad + \cdots \\ Z &= S'' z + \cdots \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier. Sous cette forme, on voit immédiatement que deux des racines S, S' sont égales à 1 et nous supposerons la troisième racine S'' différente de 1. Il est facile de chercher les courbes et les surfaces analytiques invariantes passant par l'origine. La surface des points doubles est une première surface invariante et toute courbe tracée sur cette surface est une courbe invariante. Toute autre courbe analytique invariante doit être tangente à $0z$ et comme la substitution (13) a la forme (3), nous pouvons appliquer à cette substitution la méthode des §§ 17 et 18, quoique l'équation en S ait actuellement une racine double: on voit qu'il existe une courbe invariante tangente à $0z$, puisque $1 - S''^n$ n'est nul pour aucune valeur de n. On obtient donc les résultats suivants:

Lorsqu'une substitution à trois variables possède une infinité de points doubles formant une surface, par tout point de cette surface passe en général une courbe analytique invariante non située sur la surface. On voit qu'il y a en outre une infinité de courbes analytiques invariantes, ce sont toutes celles qu'on peut tracer sur la surface des points doubles; il y a aussi une infinité de surfaces analytiques invariantes obtenues en associant les courbes analytiques non situées sur la surface des points doubles, de façon à ce qu'elles forment des surfaces analytiques. Les points doubles pour lesquels la racine S'' serait aussi égale à 1 sont des points exceptionnels dans le domaine desquels les résultats précédents ne s'appliquent plus.

22. *Cas où la substitution a une infinité de points doubles formant une courbe.* — En tout point de la courbe des points doubles, l'équation en S a une racine égale à 1. En effet, si on prend ce point comme origine et la tangente à la courbe double pour axe des z on doit avoir, en conservant les notations du paragraphe précédent:

$$c\,\delta z = 0 \qquad c'\,\delta z = 0 \qquad \delta z = c''\,\delta z$$

quel que soit δz, d'où:

$$c = 0 \qquad c' = 0 \qquad c'' = 1 \quad .$$

et la substitution prend la forme:

$$X = a\,x + b\,y + \cdots$$
$$Y = a'\,x + b'\,y + \cdots$$
$$Z = a''\,x + b''\,y + z + \cdots$$

L'équation en S a une racine égale à 1. Si on suppose les deux autres racines distinctes et différentes de 1, on peut, par un changement de variables linéaire, ramener la substitution à la forme:

$$X = S\,x + \cdots$$
$$Y = S'\,y + \cdots$$
$$Z = \quad z + \cdots$$

Il résulte alors du § 17 que *par tout point de la courbe C des points doubles passent en général deux courbes analytiques C′, C″ invariantes par la substitution:* il ne peut y avoir exception qu'en un point où les racines S et S' seraient égales à zero ou à ± 1 ou en un point où S et S' seraient confondues.

Quant aux surfaces invariantes, il en passe d'abord deux par tout point O de la courbe C des points doubles: ce sont les surfaces engendrées par C', C'' lorsque O se déplace sur la courbe C: il résulte en outre du § 18 qu'il passe une troisième surface invariante par O, si $|S|$, $|S'|$ sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1. Ainsi:

Par tout point de la courbe des points doubles passent deux ou trois surfaces invariantes par la substitution.

L'étude de l'itération d'un point pris dans le voisinage de la courbe des points doubles est facile: elle se fait comme dans le cas de deux variables (§ 11). Soit $A\,B$ un arc de la courbe des points doubles le long duquel $|S|$ et $|S'|$ sont inférieurs à 1: on peut définir un domaine entourant $A\,B$ et tel que les conséquents successifs de tout point de ce domaine tendent vers un point O de l'arc $A\,B$ en restant sur une surface analytique invariante: ces conséquents tendent vers O suivant une direction déterminée, si S et S' sont réels et tournent au contraire indéfiniment autour de O si S et S' sont imaginaires. Si $|S|$ et $|S'|$ sont supérieurs à 1 le long de l'arc $A\,B$, les résultats précédents s'appliquent aux antécédents. Enfin si $S|$ et $|S'$ comprennent 1, les conséquents et les antécédents, à partir d'un certain rang, sortent du domaine et on ne peut plus rien dire.

L'étude de l'itération dans le voisinage d'une surface de points doubles est immédiate et nous ne nons y arrêterons pas.

Ces résultats présentent encore une analogie frappante avec les résultats établis par M.r Poincaré dans l'étude des courbes singulières d'un système de deux équations différentielles du premier ordre à trois variables (loc. cit. pages 162-167).

23. *Points limites oscillants ou à convergence irrégulière.* — Les résultats énoncés dans le cas de deux variables (Chap. I § 15) s'étendent immédiatement au cas de trois variables: on généralise la notion de point double d'une substitution en introduisant des cycles de p points permutables circulairement par la substitution: par ces points passent en général trois cycles de p courbes et, suivant les cas, trois cycles ou un cycle de p surfaces se permutant circulairement par la substitution.

La traduction analytique de ces resultats au point de vue des équations fonctionnelles n'offre aucune difficulté et nous ne nons arrêterons pas plus longtemps sur ce cas de la convergence irrégulière.

CHAPITRE III.

L'Équation de Schrœder. — Analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des points singuliers des équations différentielles.

24. *Détermination des courbes et des surfaces invariantes à l'aide de l'équation de Schrœder.* — Nous avons déterminé les courbes et les surfaces analytiques invariantes par une substitution à deux ou à trois variables et passant par un point double de la substitution. Cette recherche peut se rattacher à l'étude des équations d'Abel et de Schrœder relatives à la substitution.

Soit par exemple une substitution à trois variables

$$X = f(x, y, z) \qquad Y = \varphi(x, y, z) \qquad Z = \theta(x, y, z). \tag{1}$$

L'équation de Schrœder relative à cette substitution est l'équation fonctionnelle suivante:

$$\psi[f(x, y, z), \varphi(x, y, z), \theta(x, y, z)] = k\psi(x, y, z) \tag{2}$$

où ψ désigne la fonction inconnue et k une constante.

L'équation d'Abel se déduit de l'équation (2) en posant:

$$\psi_1(x, y, z) = \log\psi(x, y, z)$$

ce qui donne:

$$\psi_1[f(x, y, z), \varphi(x, y, z), \theta(x, y, z)] = \psi_1(x, y, z) + \log k.$$

Dans le cas d'une variable, l'équation (2) devient:

$$\psi[f(x)] = k\psi(x).$$

Elle a été étudiée dans le voisinage d'un point racine x_0 de l'équation $f(x) = x$ par M.r Kœnigs, dans le cas général où $f'(x_0)$ est différent de 1 et de 0, par M.r Grévy et M.r Leau dans ces deux derniers cas (*).

Dans le cas de n variables, les équations d'Abel et de Schrœder ont été étudiés par M.r Leau. Considérons l'équation en S relative à un point double de la substitution, supposons que les racines $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de cette équation soient distinctes, toutes inférieures ou toutes supérieures en module à 1, et qu'aucune des racines ne soit égale à un produit de puissances entières des autres racines. M.r Leau démontre que l'équation de Schrœder admet alors n solutions holomorphes dans le domaine du point double et telles que les dérivées premières ne sont pas toutes nulles au point double; pour ces n solutions, la constante k a respectivement les valeurs S_1, $S_2, \ldots, S_n$ (**).

Ce résultat permet de définir les courbes et les surfaces analytiques invariantes passant par un point double. Soit par exemple la substitution (1).

(*) Kœnigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bullet. des Sciences Mathématiques, 1883. — *Recherches sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale, 1884).

Grévy, *Sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale, 1884).

Leau, *Etude sur les équations fonctionnelles* (Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, 1897). On trouvera dans ce dernier mémoire l'indication des travaux antérieurs faits à ce sujet par plusieurs autres geomètres.

(**) M.r Leau traite aussi le cas où les racines ne sont pas distinctes et le cas où certaines des racines sont des produits de puissances entières des autres racines: mais nous laisserons ces cas de côté comme nous l'avons fait dans les chap. I et II.

D'après le théorème de M.r Leau, il existe trois fonctions holomorphes ψ_1, ψ_2, ψ_3, vérifiant les équation déduites de l'équation (2) en donnant respectivement à k les valeurs S_1, S_2, S_3. Il est évident, d'après ces équations (2), que les équations:

$$\psi_1(x,\ y,\ z)=0 \qquad \psi_2(x,\ y,\ z)=0 \qquad \psi_3(x,\ y,\ z)=0$$

définissent trois surfaces invariantes par la substitution (2) et passant par le point double et comme les dérivées partielles du premier ordre de ψ_1, ψ_2, ψ_3 ne sont pas toutes nulles au point double, ces équations définissent l'une des coordonnées en fonction implicite des deux autres dans le domaine du point double.

Ainsi, en égalant à zéro les trois solutions holomorphes de l'équation de Schrœder, *on détermine, sous forme implicite, les trois surfaces analytiques invariantes par la substitution* (1) *et passant par le point double. Les trois courbes invariantes sont les intersections de ces surfaces deux à deux.*

Mais la méthode précédente ne s'applique pas au cas où les modules des racines sont les uns inférieurs et les autres supérieurs à 1: dans les deux chapitres précédents, nous avons pu définir, dans ce cas aussi, des courbes et des surfaces invariantes.

25. *Démonstration de l'existence des solutions de l'équation de* Schrœder. — M.r Leau a démontré les résultats énoncés au paragraphe précédent en considérant l'équation de Schrœder comme un cas particulier d'équations fonctionnelles plus générales qu'il a étudiées dans le travail cité plus haut. Mais on peut obtenir les solutions de cette équation par la méthode même qui a servi à M.r Kœnigs dans le cas d'une variable, en employant les formes canoniques de la substitution que nous avons données aux §§ 7 et 19. Nous allons étendre ainsi la méthode de M.r Kœnigs au cas de plusieurs variables.

Rappelons d'abord la méthode employée par M.r Kœnigs dans le cas d'une variable (*), en modifiant légèrement les notations. Etant donnée la substitution à une variable:

$$X=f(x)=S\,x+\alpha\,x^2+\beta\,x^3+\cdots$$

désignons par x_n le n^e conséquent du point x: M.r Kœnigs démontre que

(*) *Bullet. des Sciences Mathématiques,* 1883, pages 345, 346. — *Annales de l'Ecole Normale,* 1884.

l'expression $\frac{x_n}{|S|^n}$, en supposant $S < 1$, a une limite pour n infini et que cette limite est une fonction $\psi(x)$ holomorphe dans le domaine de l'origine et vérifiant l'équation:

$$\psi[f(x)] = S\,\psi(x).$$

En outre:

$$\psi'(0) = 1.$$

Considérons de même une substitution, à trois variables par exemple, supposons que les racines de l'équation en S soient inférieures en module à 1 (*) et qu'aucune des racines ne soit le produit de deux puissances à exposants entiers des deux autres racines: on a vu (§ 19) qu'on pouvait ramener la substitution à la forme:

$$X = S_1\,x\,[1 + F(x, y, z)] \qquad Y = S_2\,y\,[1 + \Phi(x, y, z)]$$
$$Z = S_3\,z\,[1 + \Theta(x, y, z)]$$

F, Φ, Θ étant trois fonctions de x, y, z holomorphes et nulles à l'origine. Si l'on désigne par x_n, y_n, z_n les coordonnées du n^e conséquent du point x, y, z, on a:

$$x_n = S_1^n\,x\,[1 + F(x, y, z)]\,[1 + F(x_1, y_1, z_1)] \ldots$$
$$\ldots [1 + F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})].$$

Nous allons prouver que $\frac{x_n}{S_1^n}$ *a une limite pour n infini:* cela revient à établir la convergence du produit infini dont le terme général est

$$1 + F(x_n, y_n, z_n)$$

ou de la série dont le terme général est $|F(x_n, y_n, z_n)|$. On peut trouver deux nombres positifs M et β tels que l'on ait, dans un domaine suffisamment restreint autour de l'origine:

$$F(x, y, z) < \frac{M\beta\,[\,|x| + |y| + |z|\,]}{1 - \beta\,[\,|x| + |y| + |z|\,]}.$$

(*) Le cas où les racines seraient supérieures en module à 1 se ramène à celui-ci en remplaçant la substitution donnée par son inverse.

On est donc ramené à démontrer la convergence de la série dont le terme général est:

$$u_n = \frac{M\beta[\,|x_n| + |y_n| + |z_n|\,]}{1 - \beta[\,|x_n| + |y_n| + |z_n|\,]}.$$

Supposons d'abord que le point initial n'appartienne pas au plan $z = 0$: alors z_n n'est pas nul et on a vu (§ 20, 1.er cas) que le n^e conséquent d'un point n'appartenant pas à la surface invariante $z = 0$ tendait vers l'origine tangentiellement à l'intersection Oz des deux autres surfaces: $\frac{y_n}{z_n}$ et $\frac{x_n}{z_n}$ ont donc pour limite zéro; il en résulte que le rapport:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \times \frac{\left|\frac{x_{n+1}}{z_{n+1}}\right| + \left|\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\right| + 1}{\left|\frac{x_n}{z_n}\right| + \left|\frac{y_n}{z_n}\right| + 1} \times \frac{1 - \beta[\,|x_n| + |y_n| + |z_n|\,]}{1 - \beta[\,|x_{n+1}| + |y_{n+1}| + |z_{n+1}|\,]}.$$

a la même limite que le rapport $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, c'est-à-dire $|S_3|$ qui est inférieur à 1: la série est donc convergente.

Si le point initial appartient à la surface $z = 0$, on a $z_n = 0$ quel que soit n et le terme général devient:

$$u_n = \frac{M\beta[\,|x_n| + |y_n|\,]}{1 - \beta[\,|x_n| + |y_n|\,]}.$$

On démontrera comme précédemment que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a même limite que $\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|$: cette limite est $|S_2|$ qui est inférieur à 1 et la série est convergente. Il y a encore exception si le point initial est pris sur la courbe $y = z = 0$. Le terme général devient:

$$u_n = \frac{M\beta\,|x_n|}{1 - \beta\,|x_n|}.$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite $|S_1|$.

Ainsi, dans tous les cas, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite qui est $|S_3|$, $|S_2|$ ou $|S_1|$: cette limite étant inférieure à 1 dans les trois cas, le produit infini est absolument convergent. Il en résulte que $\frac{x_n}{S_1^n}$ a une limite que nous désignerons par $\psi(x, y, z)$ et qui possède les propriétés suivantes:

La limite $\psi(x, y, z)$ de $\frac{x_n}{S_1^n}$ *est une fonction holomorphe dans un certain domaine autour de l'origine, elle est nulle sur la surface invariante* $x = 0$, *ses dérivées partielles* ψ'_y, ψ'_z *sont nulles à l'origine, tandis que* ψ'_x *est différent de zéro et enfin elle vérifie l'équation de* SCHRŒDER :

$$\Psi[S_1 x(1 + F(x, y, z)), \quad S_2 y(1 + \Phi(x, y, z)), \quad S_3 z(1 + \Theta(x, y, z)] =$$
$$= S_1 \psi(x, y, z).$$

Nous nous bornerons à démontrer ce dernier point, les démonstrations de ces propositions étant les généralisations immédiates de celles que M.r KŒNIGS a données dans le cas d'une variable (*). Posons:

$$\frac{x_n}{S_1^n} = f_n(x, y, z).$$

La fonction $f_n(x, y, z)$ a pour limite $\psi(x, y, z)$. On a:

$$f_{n+1}(x, y, z) = \frac{x_{n+1}}{S_1^{n+1}} = \frac{1}{S_1} f_n[S_1 x(1 + F), \quad S_2 y(1 + \Phi), \quad S_3 z(1 + \Theta)]$$

et d'autre part:

$$f_{n+1}(x, y, z) = \frac{1}{S_1^{n+1}} \times S_1 x_n [1 + F(x_n, y_n, z_n)] = f_n(x, y, z)[1 + F(x_n, y_n, z_n)]$$

d'où l'identité:

$$\frac{1}{S_1} f_n[S_1 x(1 + F), \quad S_2 y(1 + \Phi), \quad S_3 z(1 + \Theta)] = f_n(x, y, z)[1 + F(x_n, y_n, z_n)].$$

Lorque n croît indéfiniment, on obtient en égalant les limites des deux membres:

$$\psi[S_1 x(1 + F), \quad S_2 y(1 + \Phi), \quad S_3 z(1 + \Theta)] = S_1 \psi(x, y, z).$$

La proposition est donc démontrée.

On démontrerait de même que $\frac{y_n}{S_2^n}$ et $\frac{z_n}{S_3^n}$ ont des limites qui sont des fonctions holomorphes vérifiant l'équation fonctionnelle (2) dans laquelle on donne à k les valeurs S_2, S_3.

(*) *Annales de l'Ecole Normale,* 1884 (§§ III, IV, VI).

26. *Nouvelles formes canoniques d'une substitution dans le cas où les racines de l'équation en S sont toutes inférieures ou toutes supérieures en valeur absolue à l'unité.* — Continuons à raisonner dans le cas de trois variables. Si on suppose S_1, S_2, S_3 inférieurs (ou supérieurs) tous les trois à 1 et si aucune des racines n'est égale au produit de deux puissances entières des autres racines, on peut mettre la substitution sous la forme canonique vue au § 19:

$$X = x\,[S_1 + F(x, y, z)] \quad Y = y\,[S_2 + \Phi(x, y, z)] \quad Z = z\,[S_3 + \Theta(x, y, z)].$$

On peut, en se servant des solutions de l'équation de Schrœder trouvées au paragraphe précédent, donner une forme encore plus simple à la substitution, forme signalée par M. Leau dans le travail déjà cité (*).

Nous avons démontré l'existence de trois fonctions holomorphes $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ vérifiant trois équations de la forme:

$$\psi\,[x\,(S_1 + F(x, y, z)),\ \ y\,(S_2 + \Phi(x, y, z)),\ \ z\,(S_3 + \Theta(x, y, z)] = k\,\psi(x, y, z)$$

où la constante k a respectivement les valeurs S_1, S_2, S_3. Posons:

$$\psi_1(x, y, z) = u \quad \psi_2(x, y, z) = v \quad \psi_3(x, y, z) = w$$

et pareillement:

$$\psi_1(X, Y, Z) = U \quad \psi_2(X, Y, Z) = V \quad \psi_3(X, Y, Z) = W.$$

Ces équations définissent x, y, z en fonction holomorphe de u, v, w dans le domaine de l'origine, car le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ n'est pas nul à l'origine, à cause des valeurs trouvées au paragraphe précédent pour les dérivées partielles des fonctions ψ. *Si on effectue le changement de variables ainsi défini, la substitution prend la forme:*

$$U = S_1\,u \quad V = S_2\,v \quad W = S_3\,w.$$

Telle est la forme canonique de la substitution signalée par M. Leau.

27. *Équation générale des courbes invariantes par une substitution à deux ou à trois variables.* Le résultat que nous venons d'énoncer nous permet de trouver aisément la forme générale des équations d'une courbe, *analytique ou non*, invariante par une substitution à deux ou à trois va-

(*) Leau, *loc. cit.* Chap. IV, § 1.

riables, dans le cas où la forme canonique que nous venons de trouver est valable.

Soit d'abord une substitution à deux variables, $\psi_1(x, y)$ et $\psi_2(x, y)$ les deux solutions de l'équation de SCHRŒDER. Si nous posons:

$$\psi_1(x, y) = u \quad \psi_2(x, y) = v$$

le problème se ramène à la recherche des courbes invariantes par la substitution:

$$U = S_1 u \quad V = S_2 v$$

problème traité comme exemple au § 13.

L'équation générale d'une courbe invariante est:

$$v = u^{\frac{\log S_2}{\log S_1}} \times \omega_{\log S_1}(\log u)$$

$\omega_{\log S_1}(u)$ désignant une fonction périodique arbitraire, de période $\log S_1$. On voit aisement qu'on peut donner aussi à cette équation la forme plus symétrique:

$$v^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log v) = u^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log u)$$

en désignant en général par $\omega_a(x)$ une fonction arbitraire de x admettant la période a.

Si on revient aux variables x et y, *on voit que l'équation générale des courbes invariantes par une substitution à deux variables est, dans le cas où* $|S_1|$, $|S_2|$ *sont inférieurs (ou supérieurs) à* 1 *et où aucune des racines n'est une puissance entière de l'autre racine:*

$$[\psi_1(x, y)]^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) = [\psi_2(x, y]^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log \psi_2)$$

où ψ_1 et ψ_2 désignent deux fonctions holomorphes fixes et $\omega_a(x)$ une fonction arbitraire de période a.

Dans le cas de trois variables, on trouve un résultat analogue. Le problème du § 13 se traite, pour trois variables, comme pour deux et les courbes invariantes ont pour équations générales:

$$[\psi_1(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) = [\psi_2(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log \psi_2) =$$

$$= \psi_3(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_3}} \omega_{\log S_3}(\log \psi_3).$$

La méthode ne s'applique pas au cas où les racines sont les unes inférieures, les autres supérieures à 1.

28. *Analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des courbes définies par une équation différentielle dans le domaine d'un point singulier.* — L'étude des équations différentielles du premier ordre dans le domaine d'un point singulier conduit à des résultats qui présentent une analogie évidente avec les résultats que nous avons obtenus dans la théorie de l'itération à deux et à trois variables: c'est ainsi que dans l'étude de l'itération d'un point, dans le cas de trois variables (§ 20), nous avons été amenés à distinguer plusieurs cas qui correspondent aux divers cas envisagés par M.r Poincaré dans l'étude des trajectoires d'un système d'équations différentielles du premier ordre à trois variables (*); la forme des équations générales d'une courbe invariante par une substitution trouvée au paragraphe précédent se rapproche également de la forme des équations d'une trajectoire dans le cas d'un *nœud.* Nous allons voir la raison de cette liaison entre les deux questions et montrer que le cas des équations différentielles se présente comme un cas limite de la théorie de l'itération et des équations fonctionnelles qui se rattachent à cette théorie: nous retrouverons ainsi plusieurs résultats de la théorie des équations différentielles.

Nous raisonnerons d'abord dans le cas de deux variables.

Considérons la substitution:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + f(x, y)\,\delta t \\ Y &= y + \varphi(x, y)\,\delta t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où δt désigne un paramètre que nous ferons tendre ensuite vers zéro.

Les points doubles de cette substitution sont donnés par les équations:

$$f(x, y) = 0 \quad \varphi(x, y) = 0.$$

En supposant le point double à l'origine, f et φ ont la forme:

$$f(x, y) = a x + b y + \cdots \quad \varphi(x, y) = a' x + b' y + \cdots$$

(*) Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, (4.e partie, Journal de Liouville, 1886).

Pour l'étude des points singuliers des équations différentielles, voir aussi:

Picard, *Traité d'Analyse.* Tome III (*Chap. 1 et II* et surtout le *Chap. IX*, relatif aux points singuliers des integrales réelles, qui contient les principaux résultats établis par M.r Poincaré dans le cas de deux variables, en particulier la définition des nœuds, des cols et des foyers).

Supposons les racines λ_1, λ_2, de l'équation:

$$\lambda^2 - (a + b')\lambda + a b' - b a' = 0$$

distinctes. On pourra, par un changement de variable linéaire, ramener f et φ à la forme:

$$f(x, y) = \lambda_1 x + \cdots$$
$$\varphi(x, y) = \lambda_2 y + \cdots$$

et la substitution (3) devient:

$$X = x + (\lambda_1 x + \cdots)\,\delta t$$
$$Y = y + (\lambda_2 y + \cdots)\,\delta t.$$

Les racines de l'équation en S relative à cette substitution sont:

$$S_1 = 1 + \lambda_1\,\delta t \quad S_2 = 1 + \lambda_2\,\delta t. \tag{4}$$

Soit $y = \psi(x)$ une courbe analytique invariante par la substitution. La fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi[x + f(x, y)\,\delta t] = y + \varphi(x, y)\,\delta t \tag{5}$$

dans laquelle on doit supposer y remplacé par $\psi(x)$. En développant les deux membres par rapport aux puissances de δt, elle devient:

$$\psi'(x) f(x, y)\,\delta t + \cdots = \varphi(x, y)\,\delta t + \cdots$$

d'où en divisant les deux membres par δt, en faisant tendre δt vers zéro et en remplaçant $\psi'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{\varphi(x, y)}\,. \tag{6}$$

Ainsi:

L'équation fonctionnelle qui définit une courbe invariante par (3) *devient à la limite l'équation différentielle* (6); *les courbes invariantes par* (5) *deviennent les courbes définies par cette équation différentielle; les points doubles de la substitution* (3) *deviennent les points singuliers de l'équation différentielle.*

Pour obtenir une courbe invariante par une substitution, il suffit, comme on l'a vu (§§ 1 et 14 bis), de considérer un point P_0 et ses conséquents

P_1, P_2,... ainsi que ses antécédents P_{-1}, P_{-2},..., de joindre $P_0 P_1$ par un arc de courbe: les arcs transformés de $P_0 P_1$ par la substitution donnée ou par son inverse sont des arcs $P_1 P_2$, $P_2 P_3$,... et $P_0 P_{-1}$, $P_{-1} P_{-2}$,... qui par leur ensemble constituent une courbe invariante. Lorsque, dans la substitution (3), on fait tendre δt vers 0, un point se rapproche indéfiniment de son conséquent et, à la limite, les antécédents et les conséquents successifs de $P_0 P_1$ constituent une courbe intégrale de l'équation différentielle (6). Il en résulte que, dans le voisinage d'un point singulier, les courbes intégrales présenteront plusieurs dispositions différentes suivant les diverses dispositions qui se présentent dans l'itération d'un point pour les conséquents et les antécédents successifs (§§ 8 et 9).

Dans l'étude de l'itération d'un point, on a supposé $S_1 \neq S_2$, ce qui, d'après les valeurs (4) de S_1 et de S_2, conduit à supposer $\lambda_1 \neq \lambda_2$; de plus, aucune des racines n'était une puissance entière de l'autre: or, l'égalité: $1 + \lambda_1 \delta t = (1 + \lambda_2 \delta t)^n$ devient à la limite: $\lambda_1 = n \lambda_2$ et on est conduit à supposer que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ n'est ni un entier positif, ni l'inverse d'un entier positif: c'est bien là une hypothèse qu'on est conduit à faire dans la théorie des points singuliers (Voir PICARD, *Analyse* Tome III, Chap. IX, § 3).

Ces hypothèses faites, la discussion des §§ 8 et 9 conduit à distinguer trois cas:

1. *λ_1 et λ_2 réels et de même signe.* D'après les valeurs (4) de S_1 et de S_2, ces dernières quantités sont alors toutes deux supérieures ou toutes deux inférieures à 1: on est donc dans le premier ou dans le deuxième cas du § 8 et les conséquents ou les antécédents successifs d'un point tendent vers l'origine: il en résulte que *toute courbe intégrale suffisamment voisine de l'origine passe par ce point:* l'origine est un *nœud* (PICARD, Chapitre IX, § 3).

2. *λ_1 et λ_2 réels et de signes contraires. S_1 et S_2* sont alors l'un supérieur et l'autre inférieur à 1; dans ce cas (§ 8, 3ᵉ cas), il y a deux courbes C et C' telles que les conséquents successifs d'un point de C ou les antécédents successifs d'un point de C' tendent vers l'origine, mais si le point initial est pris hors de C ou de C' les conséquents et les antécédents successifs à partir d'un certain rang sortent du domaine de l'origine. A la limite, on voit que l'équation différentielle (6) admet *deux intégrales réelles et deux seulement passant par le point singulier:* c'est le cas du *col* (PICARD Chapitre IX, § 4).

3. λ_1 *et* λ_2 *imaginaires conjugués.* Les racines S_1 et S_2 sont alors imaginaires conjuguées: les antécédents ou les conséquents successifs tournent autour de l'origine à la façon de points distribués sur une spirale logarithmique (§ 9). A la limite, *toute courbe intégrale se rapprochant suffisamment de l'origine admet ce point comme point asymptote:* on retrouve le cas d'un *foyer* (PICARD, Chap. IX, § 5).

Revenons au premier cas (λ_1 et λ_2 réels et de même signe): les racines S_1 et S_2 étant toutes deux inférieures ou toutes deux supérieures à 1, les courbes analytiques invariantes par la substitution (3) et passant par l'origine peuvent être déterminées, soit par l'équation fonctionnelle (5), soit sous forme implicite à l'aide de l'équation de SCHRŒDER (§ 24). Voyons quels résultats nous fournit à la limite cette dernière équation: elle a actuellement la forme:

$$\psi\left[x+(\lambda_1 x+\cdots)\,\delta t,\ y+(\lambda_2 y+\cdots)\,\delta t\right]=K\psi(x,\ y) \tag{7}$$

ou

$$\psi(x,\ y)+\frac{\partial\psi}{\partial x}(\lambda_1 x+\cdots)\,\delta t+\frac{\partial\psi}{\partial y}(\lambda_2 y+\cdots)\,\delta t+\cdots=K\psi(x,\ y).$$

Posons:

$$K=1+\rho\,\delta t.$$

L'équation devient:

$$(\lambda_1 x+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta t+(\lambda_2 y+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta t+\cdots=\rho\,\psi(x,\ y)\,\delta t.$$

En divisant les deux membres par δt et en faisant tendre δt vers zéro, on obtient:

$$(\lambda_1 x+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(\lambda_2 y+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial y}=\rho\,\psi(x,\ y). \tag{8}$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui joue un rôle important dans la théorie des points singuliers (Voir PICARD, *Analyse* III, Chap. I, § 3).

L'équation de SCHRŒDER (7) a, comme on l'a vu au § 26, deux solutions holomorphes $\psi_1(x,\ y)$, $\psi_2(x,\ y)$ pour lesquelles la constante K a respectivement les valeurs $S_1=1+\lambda_1\,\delta t \quad S_2=1+\lambda_2\,\delta t$. A la limite, l'équation (8) a deux solutions holomorphes obtenues en prenant pour ρ les valeurs λ_1, λ_2: ce sont bien les conclusions auxquelles on arrive dans la théorie des points singuliers (PICARD, Chap. I, §§ 3 et 7; Chap. II, § 1).

Ainsi, *l'équation fonctionnelle* (5) *et l'équation de* SCHRŒDER (7) *jouent l'une par rapport à l'autre le même rôle que l'équation différentielle* (6) *et l'équation aux dérivées partielles* (8) *l'une par rapport à l'autre.*

Enfin, nous avons établi au § 27 la forme générale de l'équation des courbes invariantes par la substitution. Cette équation est:

$$[\psi_1(x,\ y)]^{\frac{1}{\log S_1}}\omega_{\log S_1}(\log\psi_1) = [\psi_2(x,\ y)]^{\frac{1}{\log S_2}}\omega_{\log S_2}(\log\psi_2)$$

$\omega_{\log S_1}(x)$ et $\omega_{\log S_2}(x)$ désignant deux fonctions arbitraires de périodes respectives $\log S_1$ et $\log S_2$: ces fonctions deviennent, lorsque δt tend vers zéro, des fonctions de période zéro, c'est-à-dire des constantes et l'équation précédente devient

$$A\ [\psi_1(x,\ y)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_1\delta t)}} = A_2[\psi_2(x,\ y)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_2\delta t)}}$$

et on en déduit, en élevant les deux membres à la puissance δt et en faisant tendre δt vers zéro:

$$A_1[\psi_1(x,\ y)]^{\frac{1}{\lambda_1}} = A_2[\psi_2(x,\ y)]^{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

On retrouve la forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle (6), dans le cas d'un *nœud*, qui résulte d'un théorème général dû à M.r Poincaré (Voir Picard, Ch. I, § 7 et Ch. IX, § 3).

29. Les mêmes analogies entre la théorie des points singuliers des équations différentielles et la théorie de l'itération se présentent dans le cas de trois variables. Considérons la substitution:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + (\lambda_1 x + \cdots)\,\delta t \\ Y &= y + (\lambda_2 y + \cdots)\,\delta t \\ Z &= z + (\lambda_3 z + \cdots)\,\delta t. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Soient $y = \psi(x)$ $z = \chi(x)$ les équations d'une courbe invariante par cette substitution. Les fonctions ψ et χ vérifient le système d'équations fonctionnelles:

$$\psi[x + (\lambda_1 x + \cdots)\,\delta t] = y + (\lambda_2 y + \cdots)\,\delta t$$
$$\chi[x + (\lambda_1 x + \cdots)\,\delta t] = z + (\lambda_3 z + \cdots)\,\delta t$$

dans lesquelles y et z sont mis pour abréger à la place de $\psi(x)$ et de $\chi(x)$. Lorsque δt tend vers zéro, ces équations deviennent, comme dans le cas de deux variables:

$$\psi'(x) \times [\lambda_1 x + \cdots] = \lambda_2 y + \cdots$$
$$\chi'(x) \times [\lambda_1 x + \cdots] = \lambda_3 z + \cdots$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx}{\lambda_1 x + \cdots} = \frac{dy}{\lambda_2 y + \cdots} = \frac{dz}{\lambda_3 z + \cdots}. \tag{10}$$

Les courbes invariantes par la substitution (9), qui admet l'origine pour point double, deviennent donc les intégrales du système (10) qui a un point singulier à l'origine.

Soit de même: $z = \psi(x, y)$ l'équation d'une surface invariante par la substitution (9): la fonction ψ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi\left[x + (\lambda_1 x + \cdots)\,\delta t, \quad y + (\lambda_2 y + \cdots)\,\delta t\right] = \lambda_3 z + \cdots$$

qui devient à la limite:

$$(\lambda_1 x + \cdots)\frac{\partial z}{\partial x} + (\lambda_2 y + \cdots)\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda_3 z + \cdots \tag{11}$$

C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par les courbes intégrales du système (10): les intégrales de cette équation (11) se présentent donc comme limites des surfaces invariantes par la substitution (9).

La discussion du § 20 relative à l'itération d'un point par une substitution à trois variables conduirait à distinguer les quatre espèces de points singuliers envisagées par M.r Poincaré dans l'étude des intégrales du système (10), les *nœuds*, les *cols*, les *foyers* et les *cols-foyers*. Nous renverrons pour cette étude au mémoire de M.r Poincaré « *Sur les courbes définies par une équation différentielle* » (Journ. de Liouville 1889); on verra aisément comment les résultats qui y sont établis résulteraient de l'étude de l'itération d'un point, comme dans le cas de deux variables.

Bornons-nous à indiquer comment on peut déduire de la théorie de l'itération la forme des équations d'une courbe intégrale dans le cas d'un *nœud*: ce cas est celui où λ_1, λ_2, λ_3 sont positifs et par suite $S_1 = 1 + \lambda_1\,\delta t$ $S_2 = 1 + \lambda_2\,\delta t$ $S_3 = 1 + \lambda_3\,\delta t$ tous les trois supérieurs ou tous les trois inférieurs à 1. On a vu au § 27 que les équations générales d'une courbe invariante sont:

$$[\psi_1(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_1\delta t)}} \times \omega_{\log S_1}(\log\psi_1) = [\psi_2(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_2\delta t)}} \times \omega_{\log S_2}(\log\psi_2) =$$

$$= [\psi_3(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_3\delta t)}} \times \omega_{\log S_3}(\log\psi_3).$$

Lorsque δt tend vers zéro, les fonctions ω deviennent des constantes A_1, A_2, A_3 et, en multipliant les trois membres par δt et faisant tendre δt vers zéro, on obtient la forme générale suivante des équations:

$$A_1 [\psi_1 (x, y, z)]^{\frac{1}{\lambda_1}} = A_2 [\psi_2 (x, y, z)]^{\frac{1}{\lambda_2}} = A_3 [\psi_3 (x, y, z)]^{\frac{1}{\lambda_3}}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 désignant trois fonctions holomorphes et A_1, A_2, A_3 des constantes arbitraires. Ce sont, aux notations près, les équations générales données par M.r Poincaré pour les courbes intégrales du système (10) (*).

Le cas où la substitution (9) aurait une infinité de points doubles formant une courbe conduit à la limite au cas où le système (10) aurait une *courbe singulière:* les résultats du § 22 nous donneraient ainsi les résultats établis par M.r Poincaré, pour le cas d'une courbe singulière, dans le mémoire déjà cité plusieurs fois (**).

(*) Poincaré, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* (Thèse, Paris, 1879, page 70).

(**) *Journal de Liouville,* 1886 (pages 162-165).

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE IV.

Les courbes invariantes par une substitution $(X,\ Y;\ x,\ y,\ y')$.

1. Considérons une substitution de la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x,\ y,\ y') \\ & \qquad\qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \\ Y &= \varphi(x,\ y,\ y') \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où f et φ désignent des fonctions continues de x, y, y'. Nous appellerons une pareille substitution une substitution $(X,\ Y;\ x,\ y,\ y')$.

Si une fonction $y = \psi(x)$ reste invariante par cette substitution, elle vérifie une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue intervient par elle-même et par sa dérivée. On a en effet, dans cette hypothèse:

$$X = f[x,\ \psi(x),\ \psi'(x)]$$

$$\psi(x) = \varphi[x,\ \psi(x),\ \psi'(x)]$$

d'où l'on déduit l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x,\ \psi(x),\ \psi'(x)] = \varphi[x,\ \psi(x),\ \psi'(x)]. \tag{2}$$

On voit donc que l'étude des équations fonctionnelles de cette dernière forme revient à l'étude des courbes invariantes par une substitution $(X,\ Y;\ x,\ y,\ y')$.

2. *Conséquentes et antécédentes.* — La substitution (1) fait correspondre un point $(X,\ Y)$ à un élément de courbe $(x,\ y,\ y')$. Réciproquement à un point $(X,\ Y)$ correspondent une infinité d'éléments x, y, y' vérifiant le système (1).

A toute fonction $y = \psi(x)$ la substitution (1) fait correspondre une fonction Y de X qui sera dite la *conséquente* de $\psi(x)$. Les équations (1) permettent de calculer Y', Y'',... en fonction de x, y, y', y'',... *Si la transformation* (1) *n'est pas une transformation de contact,* la dérivée $Y^{(n)}$ dépendra de x, y et des dérivées de y jusqu'à l'ordre $n+1$. Il en résulte que si deux courbes ont un élément commun et ont *un contact d'ordre n* suivant cet élément, leurs conséquentes ont *un contact d'ordre $n-1$* au point P correspondant à cet élément; si les deux courbes ont un contact du premier ordre, leurs conséquentes ont au point P deux tangentes distinctes; enfin, si deux courbes passant par un point p et définies dans le voisinage de p ne sont pas tangentes en ce point, leurs conséquentes sont définies l'une dans le voisinage du point P_1 correspondant à l'élément de la première courbe et l'autre dans le voisinage du point P_2 correspondant à l'élément de la deuxième courbe, de sorte que *les conséquentes ne peuvent pas, en général, être définies dans un même domaine.*

Réciproquement, à une fonction $Y = \psi(X)$, la substitution (1) fait correspondre une infinité de fonctions y de x. Ce sont les intégrales de l'équation différentielle:

$$\varphi(x, y, y') = \psi[f(x, y, y')]$$

Supposons la courbe $Y = \psi(X)$ définie dans le voisinage du point P de coordonnées X_0, $\psi(X_0)$. A ce point P correspondent une infinité d'éléments. Soit E l'un de ces éléments: il y a en général une courbe intégrale de l'équation différentielle contenant cet élément et définie dans le voisinage de cet élément: cette courbe sera dite *antécédente* de $Y = \psi(X)$. Ainsi une courbe a une infinité d'*antécédentes.* Si deux courbes ont *un contact d'ordre n* au point P, leurs antécédentes contenant l'élément E ont *un contact d'ordre $n+1$* suivant cet élément (bien entendu en écartant toujours le cas où la transformation (1) serait une transformation de contact).

3. On pourra obtenir des courbes invariantes par la substitution (1) comme limite des antécédentes ou des conséquentes successives d'une courbe, à l'aide de la proposition suivante:

Théorème. — *Si les antécédentes ou les conséquentes successives $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., $\psi_n(x)$,... d'une fonction $\psi_0(x)$ sont définies dans un certain domaine commun et ont dans ce domaine une limite $\psi(x)$ pour n infini, si cette limite $\psi(x)$ a une dérivée $\psi'(x)$ et si $\psi_n(x)$, $\psi'_n(x)$ tendent uniformément vers leurs limites dans le domaine considéré, la limite $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle* (2).

Cette proposition se démontre comme la proposition analogue relative à l'itération à deux variables que nous avons établie dans la première partie (§ 12).

4. *Eléments doubles.* — Si on veut appliquer le théorème précédent, la difficulté est de définir toutes les antécédentes successives dans un domaine qui leur soit commun.

Il est naturel, pour simplifier, de se limîter au voisinage d'un *élément double* de la substitution.

Nous dirons qu'un élément (x_0, y_0, y'_0) est un élément double de la substitution (1) si le point qui lui correspond est le point (x_0, y_0) lui-même.

Les éléments doubles vérifient le système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0, y'_0) \\ y_0 &= \varphi(x_0, y_0, y'_0). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si une courbe contenant l'élément double et définie dans le voisinage de x_0 n'est pas invariante, elle a avec sa conséquente un contact d'un certain ordre p; il en résulte (§ 2) que la première et la deuxième conséquentes auront un contact d'ordre $p-1$, la deuxième et la troisième un contact d'ordre $p-2$, et ainsi de suite; les p premières conséquentes seront bien définies dans un certain intervalle x_0-h, x_0+h, mais la p^e conséquente ne contiendra plus l'élément double et la $(p+1)^e$ ne sera plus définie dans le domaine de x_0: les conséquentes finissent donc par passer par des points du plan situés dans des domaines distincts, de sorte que si $f(x, y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ ne sont définies que dans un certain champ, on ne peut pas appliquer la méthode des approximations successives aux conséquentes. *Nous nous limiterons donc dans la suite à l'étude des antécédentes.*

5. *Forme réduite de la substitution* (1). — Soit (x_0, y_0, y'_0) un élément double: x_0, y_0, y'_0 vérifient les relations (4). On peut, par un changement de variables, amener x_0, y_0, y'_0 à être nuls tous les trois. Il suffit de poser:

$$x = x_0 + u$$

$$y = y_0 + y'_0 u + v$$

d'où l'on déduit: $y' = y'_0 + v'$.

Cette transformation fait correspondre l'élément (u, v, v') à l'élément (x, y, y') et de même le point U, V au point X, Y.

La substitution (1) ainsi transformée devient:

$$x_0 + U = f(x_0 + u,\ y_0 + y'_0 u + v,\ y'_0 + v')$$

$$y_0 + y'_0 U + V = \varphi(x_0 + u,\ y_0 + y'_0 u + v',\ y'_0 + v')$$

d'où l'on déduit en tenant compte des relations (4) et en n'écrivant dans les seconds membres que les termes du premier degré en u, v, v':

$$U = u\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0 + v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + v'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 + \cdots$$

$$V = v\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y'\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\right]_0 + v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 +$$

$$+ v'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 +$$

On peut donc toujours ramener la substitution (1) *à la forme suivante:*

$$\left.\begin{aligned} X &= a x + b y + c y' + F(x, y, y') \\ Y &= A x + B y + C y' + \Phi(x, y, y'). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

L'élément double a maintenant pour coordonnées $x = y = y' = 0$. Nous supposerons à l'avenir la substitution donnée sous la forme (5): F et Φ seront des fonctions définies dans le domaine de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues dans ce domaine et tendant vers zéro avec x, y y'.

Dans la forme ainsi réduite de la substitution, les coefficients a, b, c, A, B, C exprimés en fonction des coordonnées primitives x_0, y_0, y_0' de l'élément double ont les valeurs suivantes:

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0 \qquad A = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y'\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\right]_0$$

$$b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \qquad B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

$$c = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 \qquad C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0.$$

6. *Courbes invariantes.* — Nous nous proposons de chercher une courbe invariante par la substitution (5) et contenant l'élément double (0, 0, 0).

Nous chercherons à l'obtenir comme limite d'antécédentes successives contenant cet élément double.

Soit donc :

$$Y = \psi_0(X)$$

l'équation d'une courbe contenant l'élément double, c'est-à-dire tangente en O à Ox. Il lui correspond une infinité d'antécédentes qui sont les intégrales de l'équation différentielle :

$$\psi_0[ax + by + cy' + F(x, y, y')] = Ax + By + Cy' + \Phi(x, y, y').$$

Il y a une intégrale et une seule de cette équation passant par l'origine et définie dans le domaine de l'origine *pourvu que C ne soit pas nul,* condition que nous supposons remplie. Cette intégrale est tangente en O à Ox: *c'est elle seule que nous appellerons désormais l'antécédente de la fonction $\psi_0(x)$.*

D'après les propriétés énoncées au § 2, *on voit que les antécédentes successives sont toutes tangentes en O à Ox et qu'elles ont chacune un contact de plus en plus élevé avec la précédente.* Leurs équations sont de la forme :

$$y = \psi_1(x) = ax^2 + \cdots$$
$$y = \psi_2(x) = ax^2 + bx^3 + \cdots$$
$$y = \psi_3(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots$$

la série $\psi_n(x)$ ayant ses termes depuis le premier jusqu'au terme en x^{n+1} identiques aux termes de même degré des séries suivantes. S'il existe une fonction invariante par la substitution (5), on connaît ainsi les termes successifs de son développement en série. Ce développement est de la forme :

$$y = ax^2 + \cdots$$

Calculons le premier coefficient a : on peut se servir pour cela de la première antécédente, puisque ce coefficient est le même pour la courbe invariante et pour la première antécédente. L'équation différentielle de cette dernière que nous avons écrite plus haut donne, en prenant les dérivées des deux membres et en faisant x égal à zéro dans l'égalité ainsi obtenue:

$$A + Cy''_0 = 0$$

d'où :

$$y''_0 = -\frac{A}{C}.$$

L'équation de la courbe invariante supposée exister est donc de la forme:

$$y = -\frac{A}{C}\frac{x^2}{2} + \cdots$$

Ceci nous conduit à faire un nouveau changement de variables qui simplifiera la substitution (5) et à poser:

$$y = -\frac{A}{C}\frac{x^2}{2} + y_1$$

d'où:

$$y' = -\frac{A}{C}x + y'_1.$$

La substitution (5) devient:

$$X = \frac{aC - cA}{C}x + b\,y_1 + c\,y'_1 + F\left(x,\ -\frac{A}{C}\frac{x^2}{2} + y_1,\ -\frac{A}{C}x + y'_1\right)$$

$$Y_1 = \qquad B\,y_1 + C\,y'_1 + \Phi\left(x,\ -\frac{A}{C}\frac{x^2}{2} + y_1,\ -\frac{A}{C}x + y'_1\right) + \\ + \frac{A}{C}\frac{X^2}{2}.$$

En mettant de nouveau y, y' à la place de y_1, y'_1 pour simplifier les notations et en posant:

$$S = \frac{aC - cA}{C}$$

la substitution (5) prend la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} X &= Sx + by + cy' + F(x, y, y') = f(x, y, y') \\ Y &= \qquad By + Cy' + \Phi(x, y, y') = \varphi(x, y, y') \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

F et Φ ne sont plus les mêmes fonctions que dans la forme (5) de la substitution, mais ce sont des fonctions possédant les mêmes propriétés, c'est-à-dire définies dans le domaine de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et tendant vers zéro avec x, y, y'. Quant à b, c, B, C ce sont les mêmes quantités que dans (5).

7. Pour démontrer l'existence d'une fonction invariante par la substitution (6), il suffira de démontrer, d'après le théorème du § 3:

1.° *que les antécédentes successives* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots \psi_n(x) \ldots$ *d'une fonction initiale* $\psi_0(x)$ *convenablement choisie, antécédentes qui sont obtenues sous forme de séries par l'intégration d'équations différentielles, peuvent être définies et sont convergentes dans un certain intervalle de convergence commun.*

2.° *que* $\psi_n(x)$ *et* $\psi'_n(x)$ *tendent uniformément vers des limites dans cet intervalle de convergence commun.*

Le but final des développements qui suivent est de démontrer les propositions précédentes dans le cas où l'on a:

$$C = 0 \quad \text{et} \quad S < 1.$$

La fonction initiale $\psi_0(x)$ devra être assujettie à certaines restrictions qui seront fixées au cours des démonstrations.

Nous montrerons d'abord comment on peut choisir la fonction initiale de façon à ce que cette fonction et son antécédente puissent être définies dans un intervalle commun *ne dépendant que de la substitution* (6) *donnée et qu'elles soient assujetties aux mêmes restrictions dans cet intervalle :* on voit qu'on pourra passer alors de la première à la deuxième antécédente comme on est passé de la fonction à la première antécédente, et ainsi de suite, de sorte que toutes les antécédentes, pourront être définies dans un domaine commun. C'est l'objet du théorème suivant:

8. Théorème. — *Sous les hypothèses:* $C = 0$ *et* $|S| < 1$, *on peut déterminer deux nombres positifs* δ *et* h, *ne dépendant que de la substitution* (6) *donnée, de façon que, si* $\psi(x)$ *est une fonction définie dans l'intervalle* $-h$, $+h$, *nulle pour* $x = 0$ *et vérifiant dans cet intervalle l'inégalité:*

$$|\psi'(x)| < \delta \times |x|$$

son antécédente $\psi_1(x)$ *possède les mêmes propriétés, c'est-à-dire soit définie dans l'intervalle* $-h, +h$, *s'annulle pour* $x = 0$ *et vérifie, dans l'intervalle, l'inégalité:*

$$|\psi'_1(x)| < \delta \times |x| .$$

Soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une courbe tangente en O à Ox, la fonction ψ étant définie dans le domaine de l'origine et vérifiant l'inégalité:

$$|\psi'(x)| < \delta \times |x| .$$

Son antécédente est une fonction y donnée par l'équation différentielle:

$$\psi\,[Sx + by + cy' + F(x, y, y')] = By + Cy' + \Phi(x, y, y').$$

Cette équation peut être résolue par rapport à y' dans le domaine de l'origine, puisque C est $\neq 0$ et elle admet une intégrale et une seule tangente en O à $O\,x$, de sorte que l'antécédente est définie dans un certain intervalle autour de l'origine. La difficulté est de montrer qu'on peut limiter cet intervalle de façon qu'il ne dépende pas de la fonction ψ, mais seulement de la substitution (6) et de façon que la fonction y ainsi définie vérifie aussi l'inégalité: $y' < \delta \times x$. Pour le montrer, nous allons intégrer l'équation par approximations successives: on sait que c'est une méthode imaginée par M.r PICARD (*) pour établir les théorèmes d'existence relatifs aux équations différentielles; cette méthode nous permettra de définir un intervalle de convergence ne dépendant que de la substitution (6). Il convient pour cela de modifier la forme de l'équation différentielle. La substitution donnée est la suivante

$$X = S\,x + b\,y + c\,y' + F(x,\ y,\ y')$$
$$Y = \qquad B\,y + C\,y' + \Phi(x,\ y,\ y').$$

Résolvons la deuxième équation par rapport à y': c'est possible puisque C est $\neq 0$. La substitution prend alors la forme:

$$\left.\begin{aligned} X &= S\,x + b\,y + c\,y' + F(x,\ y,\ y') = f(x,\ y,\ y') \\ y' &= \qquad -\frac{B}{C}\,y + \frac{1}{C}\,Y + \Phi_1(x,\ y,\ Y) = \varphi_1(x,\ y,\ Y) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Φ_1 est comme F une fonction de trois variables définie dans le voisinage de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et tendant vers zéro en même temps que les variables.

Pour préciser, nous supposerons les fonctions F et Φ_1 définies pour les valeurs des variables inférieures en valeur absolue au nombre positif ε: dans ces conditions, les dérivées partielles de ces fonctions sont inférieures en valeur absolue à un nombre positif α, ce dernier nombre pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, à condition de prendre ε suffisamment petit, c'est-à-dire de restreindre suffisamment le champ de définition de la substitution.

L'équation différentielle qui définit l'antécédente devient:

$$y' = \varphi_1(x,\ y,\ \psi[f(x,\ y,\ y')]). \qquad (8)$$

(*) PICARD, *Traité d'Analyse.* Tome III.

C'est cette équation qu'il s'agit d'intégrer par approximations successives. Nous démontrerons pour cela quelques propositions préliminaires.

LEMME I. *La fonction y de x étant définie dans l'intervalle $-h$, $+h$, s'annullant pour $x=0$ et vérifiant l'inégalité $|y'| < \delta \times |x|$, on a dans tout l'intervalle $-h$, $+h$ l'inégalité:*

$$|f(x, y, y')| < |x|$$

pourvu que δ et h soient suffisamment petits.

On a en effet:

$$f(x, y, y') = Sx + by + cy' + F(x, y, y').$$

La fonction $F(x, y, y')$ n'étant définie que pour les valeurs de x, y, y' inférieures en valeur absolue à ε, il faut tout d'abord s'assurer que x, y, y' sont compris dans ces limites. Or on a:

$$|y'| < \delta \times |x|$$

d'où:

$$|y| < \frac{\delta x^2}{2}.$$

Il suffit que l'on ait:

$$|x| < \varepsilon \quad \delta |x| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\delta x^2}{2} < \varepsilon$$

d'où les trois conditions:

$$|x| < \varepsilon \quad |x| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad |x| < \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\delta}}. \tag{9}$$

Le nombre h doit donc déjà être pris inférieur à la fois à ε, $\frac{\varepsilon}{\delta}$ et $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\delta}}$. On a alors:

$$|f(x, y, y')| < |Sx + by + cy'| + \alpha[|x| + |y| + |y'|]$$

et a fortiori, en tenant compte des inégalités $|y'| < \delta |x|$ et $|y| < \frac{\delta x^2}{2}$:

$$|f(x, y, y')| < |S| |x| + |b| \frac{\delta x^2}{2} + |c| \delta |x| + \alpha\left[|x| + \frac{\delta x^2}{2} + \delta |x|\right]$$

ou bien:

$$|f(x, y, y')| < |x| [|S| + |c| \delta + \alpha + \alpha\delta] - \frac{\delta x^2}{2} [|b| - \alpha].$$

Pour que le premier membre soit inférieur à x, il suffit qu'il en soit ainsi du second membre, ce qui donne, en divisant par x les deux membres de l'inégalité ainsi obtenue:

$$S + c\,\delta + \alpha + \alpha\,\delta + \frac{\delta\, x}{2}[\,b + \alpha] < 1.$$

Le premier membre de cette inégalité est une fonction continue de α, δ et x; pour $\alpha = \delta = x = 0$ elle se réduit à S qui, par hypothèse, est inférieur à 1. Il en résulte qu'il existe un nombre positif h, *ne dépendant que des coefficients* b, c *et* S, tel que l'inégalité précédente soit satisfaite, pourvu que α, δ et x vérifient les inégalités:

$$\alpha < h \quad \delta < h \quad x < h. \tag{10}$$

On aura donc bien:

$$f(x, y, y') < x$$

pourvu que ε soit pris assez petit pour que α soit inférieur à h et que δ et x soient aussi inférieurs à h.

Lemme II. $\psi(x)$ *et* y *étant des fonctions de* x *définies dans l'intervalle* $h, +h$, *s'annullant pour* $x = 0$ *et vérifiant les inégalités:*

$$|y' < \delta\, x| \quad \text{et} \quad \psi'(x) < \delta\,|x|$$

la fonction $\varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')])$ *est une fonction de* x *définie dans le même intervalle et inférieure en valeur absolue à* $\delta\, x$, *pourvu que* h *soit suffisamment petit.*

La fonction φ_1 étant une fonction de trois variables définie pour les valeurs des trois variables inférieures en valeur absolue à ε, il faut tout d'abord s'assurer que $|x$, y et $\psi[f(x, y, y')]$ sont inférieurs à ε, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-h$ et $+h$. Or on a choisi h de façon que $|x$ vérifie les inégalités (9): il en résulte d'abord:

$$|x| < \varepsilon \quad |y| < \frac{\delta\, x^2}{2} < \varepsilon.$$

De plus, on a d'après le lemme I:

$$|f(x, y, y')| < |x| < h$$

et par suite:

$$|\psi[f(x, y, y')]| < \frac{\delta}{2}\,|f(x, y, y')|^2 < \frac{\delta\, x^2}{2} < \varepsilon.$$

La fonction φ_1 est donc une fonction de x définie dans l'intervalle $-h, +h$.

Il faut prouver maintenant que la valeur absolue de φ_1 est inférieure à $\delta\ x$. Posons pour abréger: $\psi[f(x, y, y')] = \psi_1$. On a:

$$\varphi_1(x, y, \psi_1) = -\frac{B}{C}\, y + \frac{1}{C}\, \psi_1 + \Phi_1(x, y, \psi_1)$$

d'où:

$$\varphi_1 < \left|\frac{B}{C}\right|\, y \,| + \left|\frac{1}{C}\right|\ \psi_1 + \alpha\,[\ x + y + \psi_1\ ].$$

Or on a:

$$y < \frac{\delta x^2}{2} \quad \text{et} \quad \psi_1 < \frac{\delta}{2}\ f(x, y, y')^{\,2} < \frac{\delta x^2}{2}$$

puisque $f(x, y, y')$ est inférieur à x et par suite à h (Lemme I).

Donc:

$$\varphi_1 < \left[\left|\frac{B}{C}\right| + \left|\frac{1}{C}\right|\right] \frac{\delta x^2}{2} + \alpha\left[\ x + \frac{2\,\delta\, x^2}{2}\right]$$

ou:

$$\varphi_1 < \left[\left|\frac{B}{C}\right| + \left|\frac{1}{C}\right| + 2\,\alpha\right] \frac{\delta x^2}{2} + \alpha\ x\ .$$

Pour que φ_1 soit inférieur à $\delta\ x$, il suffit qu'il en soit ainsi du second membre de l'inégalité, ce qui donne:

$$\frac{\delta\ x}{2}\left[\left|\frac{B}{C}\right| + \left|\frac{1}{C}\right| + 2\,\alpha\right] + \alpha < \delta$$

d'où:

$$\frac{x\,|}{2} < \frac{\delta - \alpha}{\delta\left[\left|\frac{B}{C}\right| + \left|\frac{1}{C}\right| + 2\,\alpha\right]}.$$

Cette inégalité peut être satisfaite, en prenant h suffisamment petit, pourvu toutefois que le second membre soit positif, ce qui donne:

$$\delta > \alpha$$

α et δ n'ont été assujettis jusqu'ici qu'à verifier les inégalités (10). On peut toujours supposer en outre que l'on a pris: $\alpha < \delta$.

Le lemme est donc démontré pourvu que h, α et δ vérifient de nouvelles inégalités, *qui ne dépendent toujours que de la substitution*, et qui peuvent être satisfaites.

Ces deux lemmes étant démontrés, revenons à l'intégration par approximations successives de l'équation différentielle :

$$y' = \varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')]) \tag{8}$$

qui définit l'antécédente.

Remplaçons dans le second membre y par une fonction quelconque y_1, définie dans l'intervalle h, $+h$, nulle pour $x=0$ et vérifiant la condition:

$$y'_1 < \delta\ x$$

et déterminons la fonction y_2 par l'équation :

$$y'_2 = \varphi_1(x, y_1, \psi[f(x, y_1, y'_1)]).$$

D'après le lemme II, le second membre est une fonction définie dans l'intervalle $-h$, $+h$ de sorte que par une quadrature on obtient la fonction y_2 vérifiant l'équation précédente et nulle pour $x=0$: cette fonction est définie dans le même intervalle et vérifie la même condition que y_1:

$$|y'_2| < \delta |x|$$

d'après le lemme II.

On déterminera de même la fonction y_3 par l'équation:

$$|y'_3| = \varphi_1(x, y_2, \psi[f(x, y_2, y'_2)])$$

et cette fonction, définie encore dans l'intervalle $-h$, $+h$, vérifiera la même inégalité que y_1 et y_2. Et ainsi de suite.

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *sont définies dans un domaine commun* $-h$, $+h$ et y_n vérifie l'inégalité:

$$|y'_n| < \delta |x|.$$

Il faut prouver que y_n tend vers une limite pour n infini et que cette limite vérifie l'équation différentielle (8): l'intégrale de cette équation qui s'annulle pour $x=0$ sera ainsi définie dans l'intervalle $-h$, $+h$.

Pour prouver que y_n a une limite, il suffit de prouver que la série $\Sigma(y_{n+1} - y_n)$ est convergente. On a:

$$y'_{n+1} = \varphi_1(x, y_n, \psi_n)$$

$$y'_n = \varphi_1(x, y_{n-1}, \psi_{n-1})$$

avec:

$$\psi_n = \psi[f(x, y_n, y'_n)]$$

d'où:

$$|y'_{n+1} - y'_n| = |\varphi_1(x, y_n, \psi_n) - \varphi_1(x, y_{n-1}, \psi_{n-1})|.$$

Désignons par β une limite supérieure des modules des dérivées partielles de f et de φ_1: on avait désigné précédemment par α une limite supérieure des modules des dérivées partielles de F et de Φ_1 et les relations (7) montrent par suite qu'il suffit de prendre pour β le plus grand des nombres:

$$|S| + \alpha, \quad |b| + \alpha, \quad |c| + \alpha, \quad \left|\frac{B}{C}\right| + \alpha, \quad \left|\frac{1}{C}\right| + \alpha$$

de sorte que β est connu en même temps que α.

On a:

$$|y'_{n+1} - y'_n| < \beta\,|y_n - y_{n-1}| + \beta\,|\psi_n - \psi_{n-1}| \tag{11}$$

et:

$$\psi_n - \psi_{n-1} = \psi[f(x, y_n, y'_n)] - \psi[f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})] =$$
$$= [f(x, y_n, y'_n) - f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})]\,\psi'(\xi)$$

ξ est un nombre compris entre $f(x, y_n, y'_n)$ et $f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})$ et par suite inférieur en valeur absolue à $|x|$ et, à fortiori, à $|h|$ (Lemme I), de sorte que l'on a:

$$\psi'(\xi) < \delta\,\xi < \delta\,h$$

et:

$$|\psi_n - \psi_{n-1}| < [\,\beta\,|y_n - y_{n-1}| + \beta\,|y'_n - y'_{n-1}|\,]\,\delta\,h.$$

L'inégalité (11) devient:

$$|y'_{n+1} - y'_n| < \beta\,|y_n - y_{n-1}| + \beta^2\,\delta\,h\,|y_n - y_{n-1}| + \beta^2\,\delta\,h\,|y'_n - y'_{n-1}|$$

ou:

$$|y'_{n+1} - y'_n| < \beta\,(1 + \beta\,\delta\,h)\,|y_n - y_{n-1}| + \beta^2\,\delta\,h\,|y'_n - y'_{n-1}|. \tag{12}$$

Dans cette inégalité donnons d'abord à n la valeur 2. Elle devient:

$$|y'_3 - y'_2| < \beta\,(1 + \beta\,\delta\,h)\,|y_2 - y_1| + \beta^2\,\delta\,h\,|y'_2 - y'_1|.$$

Or on a:

$$|y'_1| < \delta\,h \qquad |y'_2| < \delta\,h$$

d'où:

$$|y'_2 - y'_1| < 2\,\delta\,h$$

et de même:

$$|y_1| < \frac{\delta h^2}{2} \qquad |y_2| < \frac{\delta h^2}{2}$$

d'où:

$$|y_2 - y_1| < \delta h^2.$$

Par suite:

$$|y'_3 - y'_2| < \beta (1 + \beta \delta h) \delta h^2 + \beta^2 \delta h \times 2 \delta h$$

ou:

$$|y'_3 - y'_2| < \beta \delta h^2 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta).$$

On en déduit une limite supérieure de $|y_3 - y_2|$:

$$|y_3 - y_2| < \beta \delta h^2 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta) |x| < \beta \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta).$$

De ces limites supérieures pour $|y_3 - y_2|$ et $|y'_3 - y'_2|$, on déduit des limites supérieures pour $|y'_4 - y'_3|$ et $|y_4 - y_3|$, en donnant à n la valeur 3 dans l'inégalité (12):

$$\begin{aligned} |y'_4 - y'_3| &< \beta (1 + \beta \delta h) |y_3 - y_2| + \beta^2 \delta h |y'_3 - y'_2| \\ &< \beta^2 \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)(1 + \beta \delta h + \beta \delta) \\ &< \beta^2 \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^2 \end{aligned}$$

d'où:

$$|y_4 - y_3| < \beta^2 \delta h^4 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^2.$$

On voit immédiatement qu'on a d'une façon générale:

$$|y'_{n+1} - y'_n| < \beta^{n-1} \delta h^n (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^{n-1}$$

$$|y_{n+1} - y_n| < \beta^{n-1} \delta h^{n+1} (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^{n-1}.$$

Les séries $\Sigma (y_{n+1} - y_n)$ et $\Sigma (y'_{n+1} - y'_n)$ sont donc uniformément et absolument convergentes dans l'intervalle $-h, +h$ pourvu que l'on ait:

$$\beta h (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta) < 1.$$

On peut toujours choisir h suffisamment petit pour qu'il en soit ainsi.

Il résulte de là que y_n et y'_n tendent uniformément vers des limites. Soit $\lim y_n = y$. A cause de la convergence uniforme de la suite des dérivées, on aura: $\lim y'_n = y'$. Or on a en général:

$$y'_n = \varphi_1 (x, y_{n-1}, \psi [f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})]).$$

En égalant les limites des deux membres pour n infini, on obtient:

$$y' = \varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')]).$$

La limite y vérifie donc l'équation différentielle (8) et on a ainsi prouvé que l'intégrale de cette équation nulle pour $x = 0$ est définie dans un certain intervalle $-h, +h$ *ne dépendant que de la substitution donnée et indépendant de la fonction* ψ.

Il reste à prouver que l'intégrale y ainsi obtenue vérifie l'inégalité:

$$|y'| < \delta |x|$$

dans tout l'intervalle $-h, +h$.

Or on a:

$$|y'_n| < \delta |x|$$

quel que soit n et $|y'_n|$ a pour limite y' lorsque n augmente indéfiniment. Il en résulte:

$$|y'| \leq \delta |x|$$

l'inégalité peut devenir une égalité, mais cela ne changera rien aux conclusions que nous allons en tirer.

Le théorème est donc démontré.

9. *Il résulte de ce théorème que toutes les antécédentes*

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \ldots, \quad \psi_n(x)$$

d'une fonction $\psi_0(x)$ *convenablement choisie sont définies dans un certain domaine commun* $-h, +h$.

La substitution étant ramenée à la forme (7), on pourra en effet déterminer à l'aide de cette substitution, les nombres δ et h dont il s'agit dans le théorème du § 8. Partant alors d'une fonction $\psi_0(x)$ définie dans l'intervalle $-h, +h$, nulle pour $x = 0$ et vérifiant l'inégalité $|\psi_0(x)| < \delta |x|$, le théorème du § 8 montre que l'antécédente de cette fonction est définie dans le même intervalle et y vérifie la même inégalité. En appliquant de nouveau le théorème, on passe de cette fonction $\psi_1(x)$ à son antécédente et la deuxième antécédente $\psi_2 |x|$ se trouve définie dans l'intervalle $-h, +h$ et y vérifie toujours la même inégalité. Et ainsi de suite. On voit qu'en général $\psi_n(x)$ est défini dans le domaine $-h, +h$.

Nous allons montrer maintenant que les antécédentes convergent uniformément vers une limite dans le domaine $-h, +h$, pourvu que h soit suffisamment petit.

10. Lemme. — *Soit u une fonction de x nulle pour $x = 0$, définie dans l'intervalle $-h$, $+h$, ayant une dérivée dans cet intervalle et y vérifiant l'inégalité:*

$$\left| \frac{du}{dx} \right| < k \,|\, u \,|+ k'$$

où k et k' désignent deux nombres positifs. On a dans tout l'intervalle:

$$|\, u \,| < k' h \, e^{kh}.$$

On a:

$$u = \pm |\, u \,|$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{d \,|\, u \,|}{dx}$$

$$\left| \frac{du}{dx} \right| = \left| \frac{d \,|\, u \,|}{dx} \right| .$$

L'inégalité donnée devient:

$$\left| \frac{d \,|\, u \,|}{dx} \right| < k \,|\, u \,| + k'$$

et puisque $\frac{d \,|\, u \,|}{dx}$ est inférieur ou égal à son module, on a aussi:

$$\frac{d \,|\, u \,|}{dx} < k \,|\, u \,| + k'$$

et par suite:

$$e^{-kx} \left[\frac{d \,|\, u \,|}{dx} - k \,|\, u \,| - k' \right] < 0.$$

Le premier membre est la dérivée de la fonction:

$$v = e^{-kx} \left[|\, u \,| + \frac{k'}{k} \right] .$$

Supposons d'abord x positif.

La fonction v est décroissante dans l'intervalle 0, x et sa valeur pour la valeur x de la variable est inférieure à sa valeur pour $x = 0$, ce qui donne l'inégalité:

$$e^{-kx} \left[|\, u \,| + \frac{k'}{k} \right] < \frac{k'}{k}$$

d'où:

$$|u| < \frac{k'}{k}(e^{kx} - 1)$$

et, a fortiori:

$$|u| < \frac{k'}{k} < k\,h\,e^{kh}$$

ou:

$$|u| < k' h\, e^{kh}.$$

Supposons maintenant x négatif et posons $x = -x'$. On a:

$$\frac{d\,u}{d\,x} = -\frac{d\,u}{d\,x'}.$$

et l'inégalité donnée devient:

$$\left|\frac{d\,u}{d\,x'}\right| < k\,|u| + k'$$

d'où l'on déduit comme précédemment:

$$|u| < k'\,h\,e^{kh}.$$

11. Théorème. *Supposons $C \mid\!\!- 0$ et $|S| < 1$ et soit $\psi(x)$ une fonction vérifiant les conditions du théorème du § 8, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x) \ldots$ les antécédentes successives de cette fonction: lorsque n augmente indéfiniment, $\psi_n(x)$ et $\psi'_n(x)$ tendent uniformément vers des limites dans le domaine $-h$, $+h$ pourvu que h soit suffisamment petit. La fonction limite est indépendante de la fonction initiale $\psi(x)$.*

Considérons deux fonctions $\psi(x)$, $\theta(x)$ vérifiant les conditions du théorème du § 8, c'est-à-dire définies dans l'intervalle $-h$, $+h$, nulles pour $x = 0$ et satisfaisant aux inégalités:

$$|\psi'(x)| < \delta\,|x| \quad \text{et} \quad |\theta'(x)| < \delta\,|x|$$

et soient:

$$y_1 = \psi_1(x) \quad z_1 = \theta_1(x)$$

leurs antécédentes.

Nous allons comparer $\psi_1 - \theta_1$ à $\psi - \theta$.

Soit σ le maximum de la fonction $|\psi - \theta|$ dans l'intervalle $-h$, $+h$, de sorte que, si l'on a $|x| < h$, on a aussi:

$$|\psi(x) - \theta(x)| < \sigma.$$

Les fonctions y_1 et z_1 vérifient respectivement l'équation différentielle (8) et une équation analogue, qui sont les suivantes:

$$y'_1 = \varphi_1(x, \ y_1, \ \psi[f(x, y_1, y'_1)])$$
$$z'_1 = \varphi_1(x, \ z_1, \ \theta[f(x, z_1, z'_1)]).$$

Si on désigne par β, comme au § 8, le module maximum des dérivées partielles des fonctions f et φ_1 dans le champ de définition de ces fonctions, on déduit des équations précédentes, en les retranchant membre à membre:

$$|y'_1 - z'_1| < \beta\, |y_1 - z_1| + \beta\, |\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]|\,.$$

On a:

$$\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)] = \psi[f(x, y_1, y'_1)] -$$
$$- \psi[f(x, z_1, z'_1)] + \psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]$$

d'où:

$$|\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| < |\psi[f(x, y_1, y'_1)] -$$
$$- \psi[f(x, z_1, z'_1)]| + |\psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z_1)]|\,.$$

La quantité $f\ (x, z_1, z'_1)$ est en valeur absolue inférieure à $|x|$, (lemme I du § 8) et par suite on a:

$$|\psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| < \sigma.$$

D'autre part:

$$\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \psi[f(x, z_1, z'_1)] = \psi'(\xi)[f(x, y_1, y'_1) - f(x, z_1, z')]$$

ξ étant un nombre compris entre $f\ (x, y_1, y'_1)$ et $f\ (x, z_1, z'_1)$ et par suite inférieur à x (Lemme I du § 8), de sorte que l'on a:

$$|\psi'(\xi)| < \delta h$$

Il en résulte:

$$|\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \psi[f(x, z_1, z')]| < [\beta\, |y_1 - z_1| + \beta\, |y'_1 - z'_1|]\,\delta h$$

et finalement:

$$|\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| < \beta\,\delta h\,[\,|y_1 - z_1| + |y'_1 - z'_1|\,] + \sigma.$$

On a donc:

$$|y'_1 - z'_1| < \beta\, |y_1 - z_1| + \beta^2\,\delta h\,[\,|y_1 - z_1| + |y'_1 - z'_1|\,] + \beta\sigma$$

d'où:

$$|y'_1 - z'_1|\,(1 - \beta^2\,\delta h) < \beta\,(1 + \beta\,\delta h)\,|y_1 - z_1| + \beta\,\sigma.$$

En supposant $h < \frac{1}{\beta^2 \delta}$, ce qui est possible à condition de restreindre l'intervalle $-h$, $+h$, on en déduit:

$$|y'_1 - z'_1| < \frac{\beta(1 + \beta \delta h)}{1 - \beta^2 \delta h} |y_1 - z_1| + \frac{\beta \sigma}{1 - \beta^2 \delta h}.$$

Posons:

$$\frac{\beta(1 + \beta \delta h)}{1 - \beta^2 \delta h} = k \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{1 - \beta^2 \delta h} = k'.$$

L'inégalité devient:

$$|y'_1 - z'_1| < k |y_1 - z_1| + k' \sigma$$

et on en déduit, en vertu du lemme démontré au paragraphe précédent,

$$|y_1 - z_1| < k' h e^{kh} \sigma.$$

Ainsi, l'inégalité:

$$|\psi(x) - \theta(x)| < \sigma$$

entraîne pour les antécédentes $\psi_1(x)$, $\theta_1(x)$ de $\psi(x)$ et de $\theta(x)$ l'inégalité:

$$|\psi_1(x) - \theta_1(x)| < k' h e^{kh} \sigma.$$

Prenons pour fonction θ la première antécédente ψ_1: alors θ_1 devient la deuxième antécédente ψ_2 et, en désignant par $\psi_3, \ldots, \psi_4, \ldots$ les antécédentes successives, on a les inégalités:

$$\begin{aligned}
&|\psi(x) - \psi_1(x)| < \sigma \\
&|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < k' h e^{kh} \sigma \\
&|\psi_2(x) - \psi_3(x)| < (k' h e^{kh})^2 \sigma \\
&\vdots \\
&|\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)| < (k' h e^{kh})^n \sigma.
\end{aligned}$$

Supposons h choisi de telle sorte que l'on ait:

$$k' h e^{kh} < 1.$$

On a:

$$k' h e^{kh} = \frac{\beta h}{1 - \beta^2 \delta h} e^{\frac{\beta h(1+\beta\delta h)}{1-\beta^2\delta h}}.$$

C'est une fonction de h nulle pour $h = 0$ et continue dans le domaine de $h = 0$: on peut donc prendre h suffisamment petit pour que $k' h e^{kh}$ soit inférieur à 1. Alors la série dont le terme général est $(k' h\, e^{kh})^n\, \sigma$ est convergente et par suite la série $\Sigma\,[\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)]$ est absolument et uniformément convergente dans un certain domaine $-h,\ +h$.

Ceci prouve que $\psi_n(x)$ tend uniformément vers une limite $\psi(x)$.

Montrons que $\psi'_n(x)$ tend aussi uniformément vers une limite. On a démontré l'inégalité:

$$|y'_1 - z'_1| < k\,|y_1 - z_1| + k'\,\sigma.$$

On a donc:

$$|y'_1 - z'_1| < k\,k'\,h\,e^{kh}\,\sigma + k'\,\sigma$$

ou bien:

$$|y'_1 - z'_1| < k'\,\sigma\,[k\,h\,e^{kh} + 1]$$

Si y_1 désigne la première antécédente et z_1 la deuxième, on a:

$$|\psi'_1 - \psi'_2| < k'\,(1 + k\,h\,e^{kh})\,\sigma.$$

Ainsi l'inégalité:

$$|\psi(x) - \psi_1(x)| < \sigma$$

entraîne:

$$|\psi'_1(x) - \psi'_2(x)| < k'\,(1 + k\,h\,e^{kh})\,\sigma$$

Plus généralement, l'inégalité:

$$|\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x)| < (k'\,h\,e^{kh})^{n-1}\,\sigma$$

entraînera:

$$|\psi'_n(x) - \psi'_{n+1}(x)| < k'\,(1 + k\,h\,e^{kh})\,(k'\,h\,e^{kh})^{n-1}\,\sigma.$$

Puisque $k' h\, e^{kh}$ est inférieur à 1, la série $\Sigma\,[\psi'_n(x) - \psi'_{n+1}(x)]$ est uniformément convergente dans le domaine $-h,\ +h$.

Donc $\psi'_n(x)$ tend uniformément vers une limite, qui est nécessairement égale à $\psi'(x)$

Enfin *la limite $\psi(x)$ est indépendante de la courbe initiale:* en effet, si on part de deux fonctions initiales différentes $\psi(x)$, $\theta(x)$ et si σ désigne le module maximum de $\psi(x) - \theta(x)$, on a, en désignant par $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ les n^{es} antécédentes:

$$|\psi_n(x) - \theta_n(x)| < (k'\,h\,e^{kh})^n\,\sigma.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\psi_n(x) - \theta_n(x)$ tend vers zéro, ce qui prouve que $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ ont des limites égales.

Le théorème est donc démontré. En se servant maintenant du théorème du § 3, on voit qu'on a défini dans l'intervalle $-h$, $+h$ une solution de l'équation fonctionnelle (7).

12. Les théorèmes des §§ 8 et 11 ont été démontrés dans l'hypothèse où l'on a:

$$C \neq 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1.$$

dans la substitution (6) du § 6.

On a pris pour origine le point double x_0, y_0, y'_0 de la substitution. Revenons aux notations du début, c'est-à-dire supposons la substitution donnée sous la forme:

$$X = f(x, y, y')$$
$$Y = \varphi(x, y, y')$$

et soient x_0, y_0, y'_0 les coordonnées d'un élément double: calculons C et S en fonction de x_0, y_0, y'_0. En se reportant aux §§ 5 et 6, on voit que l'on a:

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 .$$

$$S = \frac{aC - cA}{C} = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_0 = \left(\frac{[f\varphi]}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}}\right)_0$$

en désignant par $[f\varphi]$ le numérateur de S, comme on le fait dans la théorie des équations aux dérivées partielles, où cette expression est connue sous le nom de *crochet de* Poisson.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui résume les théorèmes des §§ 3, 8 et 11.

Théorème. — *Etant donnée la substitution:*

$$X = f(x, y, y')$$
$$Y = \varphi(x, y, y')$$

et un élément double (x_0, y_0, y'_0) *de cette substitution dans le domaine duquel* f *et* φ *sont définies, continues et ont des dérivées partielles du premier ordre continues, posons:*

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 \quad \text{et} \quad S = \frac{[f\varphi]}{C} .$$

Si l'on a:

$$C \mid 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1$$

il existe une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la substitution et contenant l'élément double x_0, y_0, y'_0, $\psi(x)$ étant une fonction définie dans un certain intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$ et ayant une dérivée dans cet intervalle. Cette fonction vérifie, dans cet intervalle, l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi(x), \psi'(x))] = \varphi(x, \psi(x), \psi'(x)).$$

13. EXEMPLE. — *Soit à trouver une fonction $\psi(x)$ telle que sa dérivée se déduise de la fonction en y remplaçant x par une fonction donnée $f(x)$.*

L'équation fonctionnelle que vérifie $\psi(x)$ est:

$$\psi[f(x)] = \psi'(x) \tag{13}$$

elle définit une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la substitution:

$$X = f(x) \quad Y = y'.$$

Les éléments doubles (x_0, y_0, y'_0) vérifient les équations:

$$x - f(x) = 0 \quad y = y'.$$

Soit y une quantité arbitraire et x_0 une racine de l'équation $f(x) - x = 0$. Le point x_0, y_0 et la droite de coefficient angulaire y_0 passant par ce point constituent un élément double et on a, pour cet élément:

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 = 1 \quad S = \frac{[f \varphi]}{C} = f'(x_0).$$

Supposons donc $|f'(x_0)| < 1$. On pourra alors définir une solution $y = f(x)$ de l'équation (13), contenant l'élément (x_0, y_0, y'_0) et qu'on obtiendra comme limite des antécédentes successives d'une courbe arbitraire:

$$Y = F(X).$$

La première antécédente est définie par l'équation différentielle:

$$y' = F[f(x)]$$

d'où

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} F[f(x)]\, dx.$$

En remplaçant dans cette équation x par $f(x)$ et y par y', on obtient l'équation différentielle de la deuxième antécédente:

$$y' = y_0 + \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)]\, dx$$

d'où l'équation de la deuxième antécédente:

$$y_2 = y_0 + y_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)]\, dx.$$

On a de même:

$$y_3 = y_0 + y_0 (x - x_0) + y_0 \int_{x_0}^{x} [F(x) - x_0]\, dx + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} dx \int_{x_0}^{f_2(x)} F[f(x)]\, dx$$

et, en général, on a pour équation de la n^e antécédente:

$$y_n = y_0 + y_0 (x - x_0) + \cdots + y_0 \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} \cdots dx \int_{x_0}^{f_p(x)} [f(x) - x_0]\, dx + \cdots$$
$$\cdots + y_0 \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} dx \cdots \int_{x_0}^{f_{n-2}(x)} [f(x) - x_0]\, dx + R_n$$

en désignant par $f_p(x)$ la p^e itérée de la fonction $f(x)$ et en posant:

$$R_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} \cdots dx \int_{x_0}^{f_{n-1}(x)} F[f(x)]\, dx.$$

Il est facile de voir que le terme complémentaire R_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment: en effet, si x est compris dans un intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$ suffisamment restreint, il en est de même de $f(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ à cause de l'hypothèse $|f'(x_0)| < 1$ (*). Soit d'autre part M le module maximum de $F(x)$ dans l'intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$; on a:

$$\left| \int_{x_0}^{x} F[f(x)]\, dx \right| < M h; \quad \left| \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)]\, dx \right| < \left| \int_{x_0}^{x} M h\, dx \right| < M h^2; \ldots$$

(*) Kœnigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1883).

et en général:

$$|R_n| < M h^n$$

R_n tend vers zéro si h est suffisamment petit.

On a donc ainsi une solution de l'équation (13) représentée par le développement en série suivant:

$$y = y_0 + y_0 (x - x_0) + \cdots + y_0 \int_{x_0}^{x} d\,x \int_{x_0}^{f(x)} d\,x \ldots \int_{x_0}^{f_n(x)} [f(x) - x_0]\, d\,x + \cdots$$

D'après la théorie générale, cette série est uniformément convergente dans un certain intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$ et vérifie l'équation (13): il est d'ailleurs aisé de le vérifier directement.

14. Revenons à la théorie générale. Le théorème du § 12 fournit une courbe invariante passant par l'élément double (x_0, y_0, y'_0) à condition que, pour cet élément, C ne soit pas nul et que $|S|$ soit inférieur à 1. *La courbe ainsi obtenue par la méthode des approximations successives est-elle la seule courbe invariante contenant l'élément double* (x_0, y_0, y'_0)? On peut répondre affirmativement à cette question, tout au moins dans le cas où, les fonctions $f(x, y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ étant analytiques, on cherche une courbe invariante analytique, hypothèse que nous n'avons pas faites jusqu'ici; en effet prenons la substitution sous la forme (6): la fonction inconnue $y = \psi(x)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle:

$$\psi[S x + b \psi + c \psi' + \cdots] = B \psi + C \psi' + \cdots$$

avec les conditions:

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi'(0) = 0.$$

En prenant les dérivées successives des deux membres et en y remplaçant x par zéro, on obtient des égalités permettant de calculer les coefficients ψ''_0, ψ'''_0,... et on constate que le calcul formel est possible et donne un développement unique si C n'est pas nul: le développement ainsi obtenu coïncide nécessairement avec celui que fournit la méthode des approximations successives, dans le cas où $|S|$ est inférieur à 1 et il est convergent, d'après le théorème du § 12.

15. *Cas où* $|S|$ *est supérieur à* 1. — Il reste à voir si, dans le cas où $|S|$ est supérieur à 1, le développement obtenu est encore convergent:

l'hypothèse $|S| < 1$ a été en effet introduite dans la méthode des approximations successives pour permettre de définir un domaine d'existence commun à toutes les antécédentes et il est facile de voir que, dans l'hypothèse où $|S|$ est supérieur à 1, les diverses antécédentes sont définies dans des domaines dont l'étendue tend vers zéro. Il serait donc préférable de recourir, dans ce cas, à la méthode des fonctions majorantes pour étudier la convergence du développement formel: Il faudrait, pour cela, former une *substitution majorante* pour laquelle on puisse connaître directement une courbe invariante: n'ayant pas pu obtenir une pareille fonction, je dois me borner à faire quelques remarques relatives à ce cas.

On peut voir tout d'abord que dans le cas où $|S|$ est supérieur à 1, le développement formel peut être soit convergent, soit divergent et que par suite il y aurait lieu de chercher de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour que le développement soit convergent. Je vais donner en effet un exemple où, $|S|$ étant plus grand que 1, le développement est divergent et un deuxième exemple où, $|S|$ étant encore supérieur à 1, le développement est convergent.

1^er^ exemple. Soit la substitution $X = Sx \quad Y = y'$ à laquelle correspond l'équation:

$$\psi(Sx) = \psi'(x).$$

Considérons l'élément double $0,\ y_0,\ y_0$. Le développement formel est le suivant:

$$y = y_0 + y_0 x + S y_0 \frac{x^2}{1 . 2} + \cdots + S^{\frac{(n-1)n}{2}} y_0 \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Le cas où $|S|$ est inférieur à 1 est un cas particulier de l'exemple traité au § 13: dans ce cas le développement est convergent et même convergent quel que soit x.

Si au contraire $|S|$ est supérieur à 1, la série est divergente.

Par l'élément double $(0,\ y_0,\ y_0)$, il ne passe aucune courbe analytique invariante.

2^e^ exemple. Montrons maintenant qu'il peut y avoir une courbe invariante même si $|S|$ est supérieur à 1.

Considérons en effet une substitution à deux variables:

$$X = f(x,\ y) = S_1 x + \cdots$$

$$Y = \varphi(x,\ y) = S_2 y + \alpha x^2 + \cdots$$

Supposons $|S_1|$ supérieur à 1. D'après la théorie de l'itération à deux variables (Ch. I), il y a une courbe invariante $y = \psi(x)$ tangente à Ox à l'origine. On trouve:

$$\psi(x) = \frac{\alpha x^2}{S_1^2 - S_2} + \cdots$$

d'où:

$$\psi'(x) = \frac{2 \alpha x}{S_1^2 - S_2} + \cdots$$

Considérons alors la substitution $(X, Y; x, y, y')$ suivante:

$$X = f(x, y) + \psi'(x) - y'$$
$$Y = \varphi(x, y) + \psi'(x) - y'.$$

Cette substitution admet évidemment la courbe invariante $y = \psi(x)$. Calculons $|S|$. La substitution précédente s'écrit:

$$X = x\left(S_1 + \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2}\right) - y' + \cdots$$
$$Y = \frac{2\alpha x}{S_1^2 - S_2} + S_2 y - y' + \cdots$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

On a:

$$|S| = \frac{aC - cA}{C} = S_1 + \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2} - \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2} = S_1$$

et par suite:

$$|S| > 1.$$

Considérons par exemple la substitution:

$$X = 2x$$
$$Y = 3y + x^3$$

qui laisse invariante la courbe: $y = \frac{x^3}{5}$.

On en déduit la substitution:

$$X = 2x - y' + \frac{3x^2}{5}$$

$$Y = 3y + y' - \frac{3x^2}{5} + x^3$$

qui laisse invariante la même courbe $y = \frac{x^3}{5}$: cette courbe contient l'élément double (0, 0, 0) pour lequel on a: $|S| = 2$.

On voit par cet exemple qu'il peut y avoir une courbe invariante contenant un élément double, même si pour cet élément on a: $|S| > 1$.

On peut se demander alors si la quantité S joue bien un rôle essentiel dans la question ou si son introduction n'est pas dûe uniquement à l'emploi de la méthode des approximations successives. Nous allons montrer que la quantité S se présente bien comme un élément essentiel dans l'étude des substitutions $(X, Y; x, y, y')$.

16. *Transformations ponctuelles de l'équation fonctionnelle* (2). — Supposons qu'on effectue sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part une même transformation ponctuelle:

$$x = \lambda(u, v) \qquad X = \lambda(U, V)$$
$$y = \mu(u, v) \qquad Y = \mu(U, V).$$

La substitution donnée $(X, Y; x, y, y')$ devient une substitution $(U, V; u, v, v')$: l'élément double (x_0, y_0, y'_0) devient un nouvelle élément double (u_0, v_0, v'_0) et l'équation fonctionnelle qui définit une courbe invariante par la substitution donnée devient une nouvelle équation fonctionnelle qui définit les courbes invariantes par la nouvelle substitution: si $v = \theta(u)$ est une solution de la nouvelle équation, contenant l'élément double (u_0, v_0, v'_0), les équations:

$$x = \lambda(u, \theta(u))$$
$$y = \mu(u, \theta(u))$$

définiront y en fonction de x et la fonction ainsi définie sera une solution de l'équation fonctionnelle primitive.

Une équation fonctionnelle étant ainsi transformée en une autre, la recherche des solutions de la première équation et la recherche des solutions de la deuxième équation constituent deux problèmes équivalents.

On peut se demander alors si l'on ne pourrait pas, par une transformation ponctuelle, ramener le cas où $|S|$ est supérieur à 1 au cas précédemment étudié où $|S|$ est inférieur à 1. Or on constate que, si on effectue une transformation ponctuelle quelconque, S conserve la même valeur. Autrement dit:

S est un invariant de la substitution (X, Y; x, y, y') pour le groupe ponctuel.

Pour établir cette proposition, nous allons appliquer la méthode de Sophus Lie et de Mr Tresse pour le calcul des invariants différentiels des groupes continus de transformation: nous verrons ainsi que S est, pour le groupe ponctuel, le seul invariant distinct du premier ordre de la substitution en un élément double.

18. *Invariant différentiels du premier ordre de la substitution (X, Y; x, y, y'), en un élément double.* — Etant donnée la substitution

$$X = f(x, y, y') \qquad Y = \varphi(x, y, y')$$

soient x_0, y_0, y'_0 les coordonnées d'un élément double. Nous voulons chercher une fonction des coordonnées de l'élément double et des valeurs prises par les dérivées partielles de f et de φ en cet élément double qui reste invariante lorsqu'on transforme la substitution par une transformation ponctuelle quelconque.

Nous allons montrer que la seule fonction distincte possédant cette propriété est la quantité S dont l'expression a été donnée au § 12.

$$S = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_0 .$$

Tout autre invariant du premier ordre est de la forme $F(S)$, F étant une fonction arbitraire.

M.r Tresse a montré que le calcul des invariants d'une multiplicité relativement à un groupe donné revient à la recherche d'une transformation déterminée du groupe qui permette de donner à la multiplicité une forme réduite: les coordonnées de l'élément réduit sont alors les unes des constantes fixes et les autres des invariants (*).

Le groupe que nous devons considérer est celui des transformations ponctuelles du plan: mais nous avons vu, au début de ce chapitre, qu'on pouvait, par une transformation ponctuelle, ramener toute substitution (X, Y;

(*) Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformation* (Acta Mathematica, tome 18, 3.e partie, Chap. I, § 1).

x, y, y') à la forme :

$$\left.\begin{aligned} X &= S\,x + b\,y + c\,y' + \cdots \\ Y &= \qquad B\,y + C\,y' + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

où S a la valeur donnée plus haut et b, c, B, C des valeurs qui ont été calculées (*) ; on peut, par suite, se borner à considérer le sous-groupe des transformations ponctuelles qui conservant à la substitution la forme précédente et chercher une fonction de S, b, c, B, C invariante par les transformations de ce sous-groupe (**). Soit :

$$x = \alpha\,u + \beta\,v + \cdots$$

$$y = \alpha'\,u + \beta'\,v + \cdots$$

une transformation ponctuelle quelconque laissant invariant le point double (0, 0). On déduit de ces formules de transformation :

$$y' = \frac{\alpha' + \beta'\,v' + \lambda\,u + \mu\,v}{\alpha + \beta\,v' + \cdots} + \cdots$$

λ, μ dépendant des termes du second degré de la transformation précédente Pour que la substitution (14) conserve sa forme, il faut qu'à l'élément double (0, 0, 0) corresponde le même élément, ce qui exige $\alpha' = 0$; les formules de transformation ont donc la forme :

$$x = \alpha\,u + \beta\,v + \cdots$$

$$y = \qquad \beta'\,v + \cdots$$

$$y' = \alpha''\,u + \beta''\,v + \frac{\beta'}{\alpha}\,v' + \cdots$$

et la substitution (14) devient :

$$\alpha\,U + \beta\,V + \cdots = (S\,\alpha + c\,\alpha'')\,u + (S\,\beta + b\,\beta' + c\,\beta'')\,v + \frac{c\,\beta'}{\alpha}\,v' + \cdots$$

$$\beta'\,V + \cdots = \qquad C\,\alpha''\,u + (B\,\beta + C\,\beta'')\,v + C\,\frac{\beta'}{\alpha}\,v' + \cdots$$

(*) Il faut supposer, bien entendu, $C \neq 0$, comme nous l'avons fait jusqu'ici.

(**) Tresse, ibid., § 3.

En résolvant ces équations par rapport à U, V, on voit immédiatement que l'on doit supposer $\alpha'' = 0$ pour que la transformation (14) conserve sa forme et les équations précédentes résolues par rapport à U, V deviennent alors:

$$U = S\,u + \frac{S\,\beta\,\beta' + b\,\beta'^2 + c\,\beta'\,\beta'' - B\,\beta\,\beta' - C\,\beta\,\beta''}{\alpha\,\beta'}\,v + \frac{c\,\beta' - C\,\beta}{\alpha^2}\,v' + \cdots$$

$$V = \left(B + \frac{C\,\beta''}{\beta'}\right) v + \frac{C}{\alpha}\,v' + \cdots$$

substitution de la forme:

$$\left.\begin{aligned} U &= S\,u + b_1\,v + c_1\,v' + \cdots \\ V &= \qquad\; B_1\,v + C_1\,v' + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

On voit déjà que S est un invariant: pour montrer que c'est le seul invariant distinct du premier ordre, il suffit de montrer qu'on peut choisir α, β, β', β'' de façon que les autres coefficients b_1, c_1, B_1, C_1 de la substitution aient des valeurs déterminées. Cherchons à déterminer α, β, β', β'' de façon que la substitution (15) ait la forme réduite suivante:

$$\left.\begin{aligned} U &= S\,u + v + \cdots \\ V &= \qquad\; v' + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Il suffit de poser:

$$\frac{C}{\alpha} = 1 \quad B + \frac{C\,\beta''}{\beta'} = 0 \quad c\,\beta' - C\,\beta = 0$$

$$\frac{S\,\beta\,\beta' + b\,\beta'^2 + c\,\beta'\,\beta'' - B\,\beta\,\beta' - C\,\beta\,\beta''}{\alpha\,\beta'} = 1$$

d'où:

$$\alpha = C \quad \frac{\beta}{c} = \frac{\beta'}{C} = \frac{\beta''}{-B} \quad \text{et} \quad [S\,c + b\,C - c\,B]\,\beta' = C^2.$$

On peut donc déterminer α, β, β', β'', de façon à avoir le forme réduite (16), à condition que $S\,c + b\,C - c\,B$ ne soit pas nul.

Ainsi S est le seul invariant distinct du premier ordre. De plus, la substitution peut se ramener en général à la forme réduite (16); *enfin l'équation:*

$$S\,c + b\,C - c\,B = 0$$

est une équation invariante.

Lorsque cette dernière équation est satisfaite, la forme réduite (16) ne peut plus convenir; mais on peut alors déterminer α, β, β', β'' de façon que la substitution (15) prenne la forme:

$$\left.\begin{aligned} U &= S u + \cdots \\ V &= v' + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{ bis})$$

Il suffit de poser, pour cela :

$$\alpha = C' \quad \beta = c \quad \beta' = C' \quad \beta'' = \quad B.$$

Ainsi :

Dans le domaine d'un élément double pris pour origine on peut toujours ramener la substitution (15) *à l'une des formes réduites* (16) *ou* (16 *bis*), *formes qui mettent en évidence l'existence d'un seul invariant distinct du premier ordre, l'invariant S.*

CHAPITRE V.

Substitutions contenant plusieurs fonctions et leurs dérivées.

19. Nous généraliserons les résultats du chapitre précédent en considérant une substitution dépendant de plusieurs variables: x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ et des dérivées y'_1, $y'_2, \ldots, y'_n$ de y_1, $y_2, \ldots, y_n$ par rapport à x. Considérons la substitution:

$$\left.\begin{aligned} X &= f\,(x, y_1, y_2, \ldots y_n;\ y'_1, y'_2, \ldots y'_n) \\ Y_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n;\ y'_1, y'_2, \ldots y'_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n;\ y'_1, y'_2, \ldots y'_n). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nous appellerons encore *élément double* de cette substitution un élément $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y'_{10}, y'_{20}, \ldots, y'_{n0})$ auquel corresponde le point x_0, y_{10}, $y_{20}, \ldots, y_{n0}$. Les coordonnées d'un élément double sont données par le système suivant:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= f\,(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y'_{10}, y'_{20}, \ldots, y'_{n0}) \\ y_{i0} &= f_i\,(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y'_{10}, y'_{20}, \ldots, y'_{n0}) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les éléments doubles constituent en général une multiplicité dépendant de n paramètres: dans le plan, par exemple, $(n=1)$, les éléments doubles dépendent d'un seul paramètre et les points $(x_0,\ y_{10})$ forment une courbe; dans l'espace, les éléments doubles dépendent de deux paramètres et les points $(x_0,\ y_{10},\ y_{20})$ forment une surface, du moins dans le cas général.

20. Donnons d'abord une forme réduite à la substitution dans le domaine d'un point double. Posons:

$$x = x_0 + u \qquad y_i = y_{i0} + y'_{i0}\, u + v_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

d'où l'on déduit:

$$y'_i = y'_{i0} + v'_i$$

et posons de même:

$$x = x_0 + U \qquad Y_i = y_{i0} + y'_{i0}\, U + V_i\,.$$

La substitution (1) devient une substitution faisant correspondre le point $(U,\ V_i)$ à l'élément $(u,\ v_i,\ v'_i)$. A l'élément double:

$$(x_0,\ y_{10},\ y_{20}, \ldots,\ y_{n0}\,;\ y'_{10},\ y'_{20}, \ldots,\ y'_{n0})$$

correspond dans la nouvelle substitution un élément dont toutes les coordonnées sont nulles et la substitution prend la forme suivante, dans laquelle on a encore désigné les variables par x, y au lieu de u, v, afin de simplifier les notations:

$$\left.\begin{array}{l}
X = a_0\, x + a_1\, y_2 + a_2\, y_2 + \cdots + a_n\, y_n + \alpha_1\, y'_1 + \alpha_2\, y'_2 + \cdots + \alpha_n\, y'_n + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + F(x,\ y_i\,;\ y'_j) \\
Y_1 = a_{0,1}\, x + a_{1,1}\, y_1 + a_{2,1}\, y_2 + \cdots + a_{n,1}\, y_n + \alpha_{1,1}\, y'_1 + \alpha_{2,1}\, y'_2 + \cdots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{n,1}\, y'_n + F_1(x,\ y_i\,;\ y'_j) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_k = a_{0,k}\, x + a_{1,k}\, y_1 + a_{2,k}\, y_2 + \cdots + a_{n,k}\, y_n + \alpha_{1,k}\, y'_1 + \alpha_{2,k}\, y'_2 + \cdots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{n,k}\, y'_n + F_k(x,\ y_i\,;\ y'_j) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_n = a_{0,n}\, x + a_{1,n}\, y_1 + a_{2,n}\, y_2 + \cdots + a_{n,n}\, y_n + \alpha_{1,n}\, y'_1 + \alpha_{2,n}\, y'_2 + \cdots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{n,n}\, y'_n + F_n(x,\ y_i\,;\ y'_j).
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Les expressions $F_k(x,\ y_i,\ y'_j)$ désignent des fonctions de $x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$;

$y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ ayant des dérivées partielles du premier ordre que nous supposons nulles et continues à l'origine.

Les coefficients a et α, exprimés en fonction des coordonnées primitives $(x_0, y_{i0}; y'_{i0})$ de l'élément double, ont les valeurs suivantes, qu'on calcule immédiatement comme au Chap. I (§ 5):

$$a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n}\right)_0$$

$$a_i = \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_0$$

$$\alpha_i = \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i}\right)_0$$

$$a_{0,k} = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f_k}{\partial y_1} + \cdots + y'_n \frac{\partial f_k}{\partial y_n} - y'_k \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right]_0$$

$$\left.\begin{aligned} a_{i,k} &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} - y'_k \frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_0 \\ \alpha_{i,k} &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial y'_i} - y'_k \frac{\partial f}{\partial y'_i}\right)_0 \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\Big\} = 1, 2, 3, \ldots, n\right).$$

On peut encore transformer la substitution (2) de façon à faire disparaître les termes en x dans $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Considérons le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ a_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \ldots & \alpha_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{0,n} & \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Soient $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les coefficients de $a_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans le développement de ce déterminant. Posons:

$$y_1 = \frac{A_1}{A_0}\frac{x^2}{2} + v_1 \qquad y_2 = \frac{A_2}{A_0}\frac{x^2}{2} + v_2 \ldots \qquad y_n = \frac{A_n}{A_0}\frac{x^2}{2} + v_n$$

d'où:

$$y'_1 = \frac{A_1}{A_0} x + v'_1 \qquad y'_2 = \frac{A_2}{A_0} x + v'_2 \ldots \qquad y'_n = \frac{A_n}{A_0} x + v'_n$$

et pareillement:

$$Y_1 = \frac{A_1}{A_0}\frac{X^2}{2} + V_1 \qquad Y_2 = \frac{A_2}{A_0}\frac{X^2}{2} + V_2 \ldots \qquad Y_n = \frac{A_n}{A_0}\frac{X^2}{2} + V_n.$$

La substitution (2) devient une substitution donnant X, V_1, V_2, V_n,... en fonction de x, v_1, v_2,..., v_n; v'_1, v'_2,..., v'_n: écrivons cette substitution en remplaçant les lettres v et V par des lettres y et Y, afin de simplifier les notations; nous obtenons:

$$X = \frac{a_0 A_0 + \alpha_1 A_1 \cdots + \alpha_n A_n}{A_0} x + a_1 y_1 + a_2 y_2 \cdots + a_n y_n \cdots + \\ + \alpha_1 y'_1 + \cdots + \alpha_n y'_n + F(x, y_i; y'_j)$$

$$Y_k = \frac{a_{0,k} A_0 + \alpha_{1,k} A_1 \cdots + \alpha_{n,k} A_n}{A_0} x + a_{1,k} y_1 + a_{2,k} y_2 \cdots + a_{n,k} y_n + \\ + \alpha_{1,k} y'_1 + \cdots + \alpha_{n,k} y'_n + F_k(x, y_i; y'_j)$$

substitution dans laquelle les fonctions F ne sont plus les mêmes que pour la substitution (2), mais possèdent les mêmes propriétés. On voit que les coefficients de x dans Y_1, Y_2,..., Y_n sont nuls et que le cofficient de x dans X est $\frac{\Delta}{A_0}$: la substitution devient, en posant $\frac{\Delta}{A_0} = S$:

$$\left.\begin{aligned}
X &= S x + a_1 y_1 + a_2 y_2 \cdots + a_n y_n + \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \cdots + \\
&\qquad + \alpha_n y'_n + F(x, y_i; y'_j) \\
Y_1 &= \qquad a_{1,1} y_1 + a_{2,1} y_2 \cdots + a_{n,1} y_n + \alpha_{1,1} y'_1 + \alpha_{2,1} y'_2 \cdots + \\
&\qquad + \alpha_{n,1} y'_n + F_1(x, y_i; y'_j) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_n &= \qquad a_{1,n} y_1 + a_{2,n} y_2 \cdots + a_{n,n} y_n + \alpha_{1,n} y'_1 + \alpha_{2,n} y'_2 \cdots + \\
&\qquad + \alpha_{n,n} y'_n + F_n(x, y_i; y'_j).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

C'est une forme de la substitution analogue à celle que nous avons obtenue dans le cas de deux variables (§ 6, équat. (6)): nous avons supposé implicitement le déterminant:

$$A_0 = \alpha_{1,1}, \quad \alpha_{2,2}, \quad \alpha_{n,n}$$

différent de zéro.

21. *Courbes invariantes par la substitution* (1). — En suivant la même marche que dans le cas de deux variables, nous démontrerons que, *sous les hypothèses* $A_0 \neq 0$ et $|S| < 1$, il existe une courbe invariante:

$$y_1 = \psi_1(x) \quad y_2 = \psi_2(x) \ldots y_n = \psi_n(x)$$

contenant l'élément double pris pour origine. Cette courbe sera définie comme limite des antécédentes successives d'une courbe initiale contenant l'élément double et définie dans le domaine de cet élément.

Considérons un système de fonctions:

$$y_1 = \psi_{1,0}(x) \quad y_2 = \psi_{2,0}(x) \dots y_n = \psi_{n,0}(x)$$

définies dans l'intervalle $-h$, $+h$ et vérifiant dans cet intervalle les inégalités:

$$|\psi'_{1,0}(x)| < \delta \times |x| \quad |\psi'_{2,0}(x)| < \delta \times |x| \dots |\psi'_{n,0}(x)| < \delta \times |x|. \tag{4}$$

A ce système, la substitution (3) fait correspondre un *système antécédent:*

$$\psi_{1,1}(x) \quad \psi_{2,1}(x) \dots \psi_{n,1}(x)$$

et on démontrera comme au § 8 la proposition suivante:

On peut déterminer deux nombres positifs δ et h de façon que le système antécédent soit défini dans le même intervalle $-h$, $+h$ que le système donné et vérifie les mêmes inégalités:

$$|\psi'_{1,1}(x)| < \delta \times |x| \quad |\psi'_{2,1}(x)| < \delta |x| \dots |\psi'_{n,1}(x)| < \delta |x|.$$

Pour établir cette proposition, on résoudra d'abord le système des n dernières équations (3) par rapport à y'_1, $y'_2, \dots, y'_n$ ce qui est possible dans le domaine de l'origine puisque le déterminant Δ_0 est supposé différent de zéro. La substitution (3) prend alors la forme:

$$X = S\,x + a_1 y_1 + a_2 y_2 \cdots + a_n y_n + \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \cdots + \alpha_n y'_n + F(x, y_i; y'_j)$$

$$y'_k = \gamma_{1,k} y_1 + \gamma_{2,k} y_2 \cdots + \gamma_{n,k} y_n + \delta_{1,k} Y_1 + \delta_{2,k} Y_2 \cdots + \delta_{n,k} Y_n + F_k(x, y_i; Y_j)$$

analogue à la forme (7) du § 8. On déduira de là le système d'équations différentielles définissant la première antécédente et on démontrera la proposition énoncée en appliquant à ce système la méthode des approximations successives exactement de la même manière qu'au § 8.

De cette proposition, il résulte que tous les systèmes antécédents successifs sont définis dans un domaine commun $-h$, $+h$. Il reste à montrer que, dans ce domaine, *les antécédentes ont une limite et que cette limite constitue une courbe invariante par la substitution.*

A cet effet, on considérera, comme au § 11, deux systèmes de fonctions $\psi_{1,0}$, $\psi_{2,0}, \dots, \psi_{n,0}$ d'une part et $\theta_{1,0}$, $\theta_{2,0}, \dots, \theta_{n,0}$ d'autre part, vérifiant les inégalités (4); posons, pour abréger:

$$y_1 = \psi_{1,0}(x) \quad y_2 = \psi_{2,0}(x) \ldots y_n = \psi_{n,0}(x) \quad \text{et} \quad z_1 = \theta_{1,0}(x)$$
$$z_2 = \theta_{2,0}(x) \ldots z_n = \theta_{n,0}(x)$$

et soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ et $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ les antécédents de ces deux systèmes de fonctions. Soit σ le module maximum des quantités $|y_1 - z_1|$, $|y_2 - z_2|, \ldots,$ $|y_n - z_n|$ dans l'intervalle $-h, +h$; on démontrera aisément (voir § 11) que les inégalités:

$$|y_1 - z_1| < \sigma \quad |y_2 - z_2| < \sigma \ldots |y_n - z_n| < \sigma$$

entrainent une inégalité de la forme:

$$|Y'_1 - Z'_1| + |Y'_2 - Z'_2| \cdots + |Y'_n - Z'_n| < k[|Y_1 - Z_1| +$$
$$+ |Y_2 - Z_2| \cdots + |Y_n - Z_n|] + k'\sigma$$

k et k' étant des constantes dépendant de h et des données, c'est-à-dire des coefficients de la substitution donnée. Si l'on pose:

$$|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| \cdots + |Y_n - Z_n| = u$$

et si on remarque que l'on a:

$$u' \leq |Y'_1 - Z'_1| + |Y'_2 - Z'_2| \cdots + |Y'_n - Z'_n|$$

l'inégalité précédente entraine:

$$u' < ku + k'\sigma$$

et on en déduit, comme au § 10:

$$u < k\,h\,e^{k'h}\sigma$$

ou:

$$|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| \cdots + (Y_n - Z_n| < k\,h\,e^{k'h}\sigma$$

et, *a fortiori:*

$$|Y_i - Z_i| < k\,h\,e^{k'h}\sigma \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La démonstration s'achève comme au § 11: Si on prend pour z_i la première antécédente de y_i et si on désigne par $Y_{i,p}$ la p^e antécédente de y_i, on déduit de là:

$$|Y_{i,p} - Y_{i,p+1}| < (k\,h\,e^{k'h})^p\sigma.$$

Or, on peut choisir h suffisamment petit pour que $k h e^{k'h}$ soit inférieur à 1 et ceci prouve la convergence uniforme de la série $\sum\limits_p (Y_{i,p} - Y_{i,p+1})$ dans l'intervalle $-h$, $+h$ et on démontre de même que la série $\sum\limits_p (Y'_{i,p} - Y'_{i,p+1})$ est uniformément convergente dans le même intervalle. Il en résulte que $Y_{i,p}$ et $Y'_{i,p}$ tendent uniformément vers des limites pour p infini. Le système des fonctions limites ainsi obtenu:

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \ldots, \quad \psi_n(x)$$

est indépendant des fonctions initiales et définit une courbe:

$$y_1 = \psi_1(x) \quad y_2 = \psi_2(x) \ldots y_n = \psi_n(x)$$

invariante par la substitution donnée.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème du § 12.

THÉORÈME. *Etant donnés la substitution* (1) *et un élément double* $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0}; y'_{1,0}, y'_{2,0}, \ldots, y'_{n,0})$ *de cette substitution, posons:*

$$A_0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_1} - y'_1 \dfrac{\partial f}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_2} - y'_1 \dfrac{\partial f}{\partial y'_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_n} - y'_1 \dfrac{\partial f}{\partial y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_1} - y'_n \dfrac{\partial f}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_2} - y'_n \dfrac{\partial f}{\partial y'_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_n} - y'_n \dfrac{\partial f}{\partial y'_n} \end{vmatrix},$$

et:

$$S = \frac{1}{A_0} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \cdots + y'_n \dfrac{\partial f}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial f}{\partial y'_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial y'_n} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + y'_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots + y'_n \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x} + y'_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} \cdots + y'_n \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y'_n} \end{vmatrix}$$

expressions dans lesquelles on suppose $x, y_1, \ldots, y_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ *remplacés par les coordonnées de l'élément double. Supposons:*

$$A_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1.$$

Il existe alors un système de fonctions $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ *définies dans un* *certain intervalle* $x_0 - h$, $x_0 + h$, *prenant les valeurs* $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0}$ *pour* $x = x_0$, *ayant dans le même intervalle des dérivées qui pour* $x = x_0$ *prennent les valeurs* $y'_{1,0}, y'_{2,0}, \ldots, y'_{n,0}$ *et vérifiant le système d'équations fonctionnelles suivant:*

$$\left.\begin{array}{l}
\psi_1 [f(x, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n)] = f_1 (x, \psi_1, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \ldots, \psi'_n) \\
\psi_2 [f(x, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n)] = f_2 (x, \psi_1, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \ldots, \psi'_n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_n [f(x, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n)] = f_n (x, \psi_1, \ldots, \psi_n; \psi'_1, \ldots, \psi'_n).
\end{array}\right\} \quad (5)$$

On peut faire, au sujet de la solution ainsi trouvée, les mêmes remarques que dans le cas de deux variables (§ 14); si on suppose les données analytiques et qu'on cherche des développements analytiques vérifiant les équations fonctionnelles (5), on trouve que le calcul formel des coefficients est possible, *en supposant que* A_0 *ne soit pas nul.* On est assuré de la convergence des développements formels ainsi obtenus, dans le cas où $|S|$ est inférieur à 1, car dans ce cas ces développements coïncident avec ceux que donne la méthode des approximations successives. Il resterait à voir à quelles conditions ces développements convergent, lorsque $|S|$ est supérieur à 1.

On peut aussi montrer que la quantité S est un élément essentiel, de la substitution, car c'est un invariant de la substitution pour toute transformation ponctuelle. Nous allons chercher plus généralement tous les invariants différentiels du premier ordre de la substitution pour le groupe ponctuel.

22. *Invariants différentiels du premier ordre de la substitution* (1) *pour le groupe des transformations ponctuelles.* — Nous emploierons encore dans cette recherche la méthode déjà appliquée au § 18 et qui consiste à chercher une forme réduite de la substitution.

La substitution (1) a déjà été ramenée à la forme (3): mais on peut encore simplifier la forme ainsi obtenue. Si on effectue sur les y et les Y une même substitution linéaire et homogène à coefficients constants:

$$y_i = \sum_k \lambda_{k,i}\, z_k \quad \text{et} \quad Y_i = \sum_k \lambda_{k,i}\, Z_k$$

d'où il résulte:

$$y'_i = \sum_k \lambda_{k,i}\, z'_k$$

la substitution (3) conserve sa forme. Considérons l'équation:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - S & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - S & \dots & \alpha_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0$$

et limitons-nous au cas général où cette équation a n racines distinctes $S_1, S_2, \dots, S_n$; nous devons supposer en outre que cette équation n'a pas de racines nulles, puisque le produit des racines est égal au signe près au déterminant A_0 que nous avons supposé non nul. Considérons la substitution linéaire:

$$Y_i = \alpha_{1,i}\, y'_1 + \alpha_{2,i}\, y'_2 \dots + \alpha_{n,i}\, y'_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On sait, par la théorie des substitutions linéaires, qu'on peut disposer des coefficients $\lambda_{k,i}$ de façon que la substitution précédente soit transformée en la suivante:

$$Z_1 = S_1\, z'_1 \qquad Z_2 = S_2\, z'_2 \qquad Z_n = S_n\, z'_n\,.$$

Il en résulte évidemment que la substitution (3) prend la forme suivante, où on a encore designé les variables par y_i et Y_i, au lieu de z_i et Z_i:

$$\left.\begin{aligned} X &= S\,x + b_1\,y_1 + b_2\,y_2 \dots + b_n\,y_n + \beta_1\,y'_1 + \beta_2\,y'_2 \dots + \beta_n\,y'_n + \cdots \\ Y_i &= \qquad b_{1,i}\,y_1 + b_{2,i}\,y_2 \dots + b_{n,i}\,y_n + S_i\,y'_i + \cdots \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier et les coefficients b et β étant des fonctions des coefficients a.

On peut se borner à considérer le sous-groupe des transformations ponctuelles qui conservent à la substitution cette forme (6) et chercher les invariants de la substitution (6) pour les substitutions de ce sous groupe; les invariants ainsi obtenus seront les invariants de la substitution (1) pour le groupe ponctuel général.

On reconnaît aisément que la transformation ponctuelle la plus générale qui conserve sa forme à la substitution (6) est la transformation suivante, qui a été *prolongée* jusqu'aux dérivées du premier ordre:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda u + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \cdots + \lambda_n v_n + \cdots \\ y_i &= \lambda_{i,i} v_i + \cdots \\ y'_i &= \mu_{1,i} v_1 + \mu_{2,i} v_2 \cdots + \mu_{n,i} v_n + \frac{\lambda_{i,i}}{\lambda} v'_i + \cdots \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

Il faut disposer des coefficients de cette transformation de façon à donner à la substitution une forme réduite. Les n dernières équations de la substitution (6) deviennent, lorsqu'on applique à cette substitution la transformation (7):

$$\lambda_{i,i} V_i = (b_{1,i} \lambda_{1,1} + S_i \mu_{1,i}) v_1 + (b_{2,i} \lambda_{2,2} + S_i \mu_{2,i}) v_2 + \cdots +$$
$$+ (b_{n,i} \lambda_{n,n} + S_i \mu_{n,i}) v_n + \frac{S_i \lambda_{i,i}}{\lambda} v'_i + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Choisissons les coefficients λ et μ de façon que les termes en v_1, $v_2, \ldots, v_n$ disparaissent: il suffit pour cela de choisir les coefficients $\mu_{k,i}$ de façon que l'on ait:

$$b_{k,i} \lambda_{i,i} + S_i \mu_{k,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n \quad k = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui donne:

$$\mu_{k,i} = -\frac{b_{k,i} \lambda_{i,i}}{S_i}.$$

Les coefficients $\mu_{k,i}$ seront donc déterminés lorsqu'on aura déterminé les coefficients $\lambda_{i,i}$ et les n dernières équations (6) deviennent:

$$V_1 = \frac{S_1}{\lambda} v'_1 + \cdots$$

$$V_2 = \frac{S_2}{\lambda} v'_2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{S_n}{\lambda} v'_n + \cdots$$

Prenons pour λ la valeur $\lambda = S_1$. Alors les équations précédentes deviennent :

$$V_1 = v'_1 + \cdots$$

$$V_2 = \frac{S_2}{S_1} v'_2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{S_n}{S_1} v'_n + \cdots$$

Elles mettent déjà en évidence les invariants : $\frac{S_2}{S_1} \frac{S_3}{S_1} \cdots \frac{S_n}{S_1}$. Il reste à déterminer les coefficients λ_j et $\lambda_{i,i}$. La transformation (7) devient, lorsqu'on y remplace les μ par leurs valeurs en fonction des $\lambda_{i,i}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= S_1 u + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \cdots + \lambda_n v_n + \cdots \\ y_i &= \lambda_{i,i} v_i + \cdots \\ y'_i &= -\frac{\lambda_{1,1} b_{1,i}}{S_i} v_1 - \frac{\lambda_{2,2} b_{2,i}}{S_i} v_2 \cdots - \frac{\lambda_{n,n} b_{n,i}}{S_i} v_n + \frac{\lambda_{i,i}}{S_1} v'_i + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (7\text{ bis})$$

et la première équation (6) devient, par cette transformation :

$$S_1 U = -\lambda_1 v'_1 - \lambda_2 \frac{S_2}{S_1} v'_2 \cdots - \lambda_n \frac{S_n}{S_1} v'_n + S S_1 u + S \lambda_1 v_1 + S \lambda_2 v_2, \cdots + S \lambda_n v_n$$
$$+ b_1 \lambda_{1,1} v_1 + b_2 \lambda_{2,2} v_2 \cdots + b_n \lambda_{n,n} v_n + \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 \cdots + \beta_n y'_n + \cdots$$

équation dans laquelle il faut supposer $y'_1, y'_2, \ldots y'_n$ remplacés par les valeurs tirées de (7 bis) en fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_n$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$. On peut disposer de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de façon à annuller les coefficients de $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$. Il faut pour cela :

$$-\lambda_1 + \frac{\beta_1 \lambda_{1,1}}{S_1} = 0 \quad -\lambda_2 \frac{S_2}{S_1} + \beta_2 \frac{\lambda_{2,2}}{S_1} = 0 \ldots \lambda_n \frac{S_n}{S_1} + \beta_n \frac{\lambda_{n,n}}{S_1} = 0$$

d'où :

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1 \lambda_{1,1}}{S_1} \quad \lambda_2 = \frac{\beta_2 \lambda_{2,2}}{S_2} \cdots \lambda_n = \frac{\beta_n \lambda_{n,n}}{S_n}$$

et il n'y a plus qu'à calculer $\lambda_{1,1} \lambda_{2,2} \ldots \lambda_{n,n}$.

Déterminons ces quantités par la condition que les coefficients de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans U soient égaux à 1. On obtient ainsi les conditions :

$$\frac{S \beta_i \lambda_{i,i}}{S_i} + b_i \lambda_{i,i} - \frac{\beta_1 \lambda_{i,i} b_{i,1}}{S_1} - \frac{\beta_2 \lambda_{i,i} b_{i,2}}{S_2} \cdots - \frac{\beta_n \lambda_{i,i} b_{i,n}}{S_n} = S_1.$$

Ou:

$$\left[\frac{S\beta_i}{S_i} + b_i - \frac{\beta_1 b_{i,1}}{S_1} - \frac{\beta_2 b_{i,2}}{S_2} \cdots - \frac{\beta_n b_{i,n}}{S_n}\right] \times \lambda_{i,i} = S_1 \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations déterminent les coefficients $\lambda_{i,i}$ pourvu que les coefficients de $\lambda_{i,i}$ dans ces équations ne soient pas nuls: en égalant à 0 ces derniers coefficients, on obtiendrait des *équations invariantes* et il y aurait lieu de chercher de nouvelles formes réduites pour le cas où une ou plusieurs de ces équations invariantes seraient satisfaites, mais nous nous limiterons au cas général où aucune de ces équations n'est satisfaite.

On voit qu'on a disposé de tous les coefficients de la transformation (7) qui peuvent modifier les coefficients des termes du premier degré dans la substitution (6): les coefficients des termes du premier degré dans la nouvelle substitution sont alors, les uns des constantes et les autres les invariants cherchés. La forme réduite obtenue est la suivante:

$$\left.\begin{aligned} U &= Su + v_1 + v_2 \cdots + v_n + \cdots \\ V_1 &= \qquad\qquad v'_1 + \cdots \\ V_2 &= \qquad\qquad \frac{S_2}{S_1} v'_2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_n &= \qquad\qquad \frac{S_n}{S_1} v'_n + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ainsi:

Dans le cas général, la substitution (1) *peut se ramener à la forme réduite* (8), *dans le domaine d'un élément double, et cette forme réduite met en évidence le système suivant d'invariants différentiels distincts du premier ordre de la substitution* (1), *relativement au groupe des transformations ponctuelles:*

$$S, \quad \frac{S_2}{S_1}, \quad \frac{S_3}{S_1}, \ldots, \quad \frac{S_n}{S_1}.$$

Tout autre invariant différentiel du premier ordre est de la forme:

$$F\left(S, \quad \frac{S_2}{S_1}, \quad \frac{S_3}{S_1}, \ldots, \quad \frac{S_n}{S_1}\right)$$

F étant une fonction arbitraire.

CHAPITRE VI.

Courbes invariantes par une transformation de contact.

23. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés classiques des transformations de contact dans le plan (*). Soit donnée la transformation

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y &= \varphi(x, y, y'). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

On en déduit:

$$Y' = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'} y''} \tag{2}$$

de sorte que en général Y' dépend de x, y, y', y''. La transformation est une *transformation de contact* si à deux courbes tangentes quelconques elle fait correspondre deux courbes tangentes ou, en d'autres termes, si Y' ne dépend que de x, y, y'. Il faut et il suffit pour cela que les fonctions f et φ vérifient l'identité:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 0$$

ou, en employant la notation usuelle dont nous avons déjà fait usage au chap. IV:

$$[f\varphi] \equiv 0.$$

Deux fonctions f et φ liées par cette relation sont dites *en involution.*

Si f et φ sont en involution, l'expression (2) de Y' ne dépend que de x, y, y'. Posons:

$$\theta(x, y, y') = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

(*) Voir par exemple:
Lie-Scheffers, *Geometrie der Berhührungs-transformationen* (Chap. III, §§ 1 et 2).

La transformation (1) est une transformation d'*élément* à *point*, mais si aux équations (1) on adjoint l'équation (2), on a une transformation d'*élément* à *élément:*

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y &= \varphi(x, y, y') \\ Y' &= \theta(x, y, y') \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

et c'est de cette façon qu'on définit en général une transformation de contact.

Dans l'étude des courbes invariantes par une transformation de contact, nous prendrons la transformation, soit sous la forme (1), soit sous la forme (3): dans le premier cas, nous aurons ainsi une transformation de la nature de celles que nous avons étudiées dans cette deuxième partie; dans le deuxième cas, au contraire, nous aurons à nous servir des résultats de la première partie (itération à trois variables). Pour distinguer dans la suite la transformation (1) de la transformation (3), nous appellerons la transformation (1) une transformation de contact d'*élément* à *point* ou transformation $(X, Y; x, y, y')$ et la transformation (3) une transformation de contact *d'élément* à *élément* ou transformation $(X, Y, Y'; x, y, y')$.

Relativement aux fonctions en involution, nous rappellerons encore les résultats classiques suivants:

Si f et φ sont deux fonctions en involution, les équations:

$$f(x, y, y') = \text{const.} \quad \varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

sont deux intégrales premières de la même équation différentielle du second ordre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0.$$

Toute autre intégrale première de cette équation est une fonction arbitraire de f et de φ.

Enfin si on élimine y' entre les deux équations différentielles:

$$f(x, y\ y') = a \quad \varphi(x, y, y') = b$$

on obtient une équation

$$\omega(x, y, a, b) = 0$$

qui définit une intégrale commune aux deux équations différentielles.

§ 24. Considérons d'abord la transformation de contact donnée comme une transformation $(X, Y; x, y, y')$: elle est alors définie par les équations (1) et elle possède une infinité d'éléments doubles (x_0, y_0, y'_0) définis par les équations:

$$f(x_0, y_0, y'_0) = x_0 \quad \varphi(x_0, y_0, y'_0) = y_0 .$$

Nous entendons ici les mots « élément double » au sens que nous leur avons donné au Chap. IV (§ 4). Si, au contraire, nous considérions la transformation comme une transformation $(X, Y, Y'; x, y, y')$, il faudrait entendre par « élément double » un élément vérifiant non seulement les deux équations précédentes, mais aussi la suivante:

$$\theta(x_0, y_0, y'_0) = y'_0 .$$

Nous supposons actuellement qu'il s'agit d'un élément qui est double pour (1) sans être double pour (3), de sorte que l'on a:

$$\theta(x_0, y_0, y'_0) \neq y'_0 .$$

En se reportant à la valeur de $\theta(x, y, y')$ donnée plus haut, on voit qu'on peut mettre $\theta(x, y, y')$ sous l'une des formes suivantes:

$$\theta(x, y, y') = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'} .$$

de sorte que l'inégalité précédente revient à la suivante:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \neq 0$$

ou, avec les notations du § 12:

$$C \neq 0.$$

§ 25. *Courbes invariantes par la transformation* $(X, Y; x, y, y')$. — Proposons-nous de trouver une courbe invariante par la transformation (1) et contenant l'élément double x_0, y_0, y'_0: conformément à ce qu'il a été dit au paragraphe précédent, nous entendons par élément double un élément vérifiant seulement les deux équations (1), de sorte que C n'est pas nul.

La théorie des transformations de contact conduit à une *courbe* qui correspond au *point* unique x_0, y_0: cette courbe s'obtient en eliminant y' entre les équations:

$$f(x, y, y') = x_0 \qquad \varphi(x, y, y') = y_0 .$$

C'est elle que nous trouvons ici comme solution de l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi'). \qquad (E)$$

Il est essentiel de remarquer que cette solution est une *solution étrangère* et qu'elle ne fournit pas à proprement parler une courbe invariante par la transformation: à un élément variable x, y, y' de la courbe $y = \psi(x)$ correspond en effet un point fixe unique x_0, y_0.

La solution étrangère ainsi obtenue existe évidemment, que C soit nul ou non. Mais il y a une différence essentielle entre les deux cas. Si on suppose, comme nous le faisons actuellement, que C n'est pas nul, les remarques faites au § 14 montrent qu'il ne passe par l'élément x_0, y_0, y'_0 qu'une seule solution de l'équation (E), tout au moins en supposant la transformation donnée et la solution cherchée analytiques: la solution étrangère est donc la *seule* solution de l'équation (E) contenant l'élément double. Supposons au contraire $C = 0$, ce qui revient à considérer un élément x_0, y_0, y'_0 double, non seulement pour la transformation (X, Y; x, y, y'), mais aussi pour la transformation (X, Y, Y'; x, y, y'): *la solution étrangère n'est plus nécessairement la seule* et nous démontrerons effectivement bientôt l'existence de deux autres solutions qui donneront de véritables courbes invariantes par la transformation de contact et contenant l'élément double.

26. *Exemples.* 1.° Soit la transformation par polaires reciproques par rapport à la conique:

$$2y - x^2 = 0.$$

Cette transformation est définie par les équations:

$$X = y' \quad Y = xy' - y$$

et l'équation fonctionnelle correspondante est:

$$\psi[\psi'(x)] = x\psi'(x) - \psi(x). \qquad (E)$$

Les éléments doubles sont donnés par les équations:

$$x_0 = y'_0 \quad x_0 y'_0 = 2y_0$$

ou bien:

$$y_0 = \frac{x_0^2}{2} \quad y'_0 = x_0.$$

Ce sont les éléments formés d'un point de la conique et de la tangente en ce point. En éliminant y' entre les équations:

$$y' = x_0 \quad x\,y' - y = \frac{x_0^2}{2}$$

on obtient

$$y = x\,x_0 \quad \frac{x_0^2}{2}.$$

On vérifie immédiatement que la fonction $\psi(x)$ ainsi définie:

$$\psi(x) = x\,x_0 - \frac{x_0^2}{2}$$

vérifie l'équation (E).

L'équation précédente représente la tangente à la conique : à un élément variable de cette tangente la transformation fait correspondre un point unique de la même droite, le point de contact de la tangente.

On a ainsi la *solution étrangère* signalée en général au paragraphe précédent. Les véritables solutions du problème, c'est-à-dire les courbes invariantes par polaires réciproques, ont été déterminées, à un point de vue différent, par Mr Darboux dans son célèbre mémoire « *sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* » (*) M.r Darboux a traité le problème analogue dans l'espace, mais sa méthode subsiste évidemment pour le cas du plan. Au point de vue qui nous occupe, le problème reviendrait à trouver une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la transformation :

$$X = y' \quad Y = x\,y' - y \quad Y' = x.$$

La fonction $\psi(x)$ devrait vérifier l'équation (E) et la nouvelle équation:

$$\psi'[\psi'(x)] = x. \tag{E'}$$

Mais je me bornerai à signaler cette methode, qui conduit aisément à la détérmination de toutes les courbes identiques à leurs polaires réciproques.

(*) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Note IX).

2.° Soit la transformation de contact:

$$X = a\,x + y' \qquad Y = 2\,a\,y + y'^2.$$

L'équation fonctionnelle correspondante est:

$$\psi\,[a\,x + \psi'(x)] = 2\,a\,\psi(x) + [\psi'(x)]^2. \tag{E}$$

Les éléments doubles ont pour coordonnées:

$$x = x_0 \qquad y = \frac{x_0^2\,(1-a)^2}{1-2\,a} \qquad y' = x_0\,(1-a)$$

x_0 étant arbitraire. On a une solution de l'équation (E), dépendant du paramètre arbitraire x_0, en éliminant y' entre les équations:

$$a\,x + y' = x_0 \qquad 2\,a\,y + y'^2 = \frac{x_0^2\,(1-a)^2}{1-2\,a}$$

ce qui donne:

$$y = \psi(x) = \frac{a\,x_0^2}{2\,(1-2\,a)} + x_0\,x - \frac{a\,x^2}{2}\ .$$

La vérification est immédiate.

27. *Courbes invariantes par la transformation de contact* (X, Y, Y'; x, y, y'). Considérons maintenant la transformation de contact donnée comme une transformation (X, Y, Y'; x, y, y'): conformément à ce qui a été dit au § 24, nous ne parlerons, cette fois, d'élément double que lorsqu'on aura les *trois* équations:

$$f(x_0,\, y_0,\, y'_0) = x_0 \qquad \varphi(x_0,\, y_0,\, y'_0) = y_0 \qquad \theta(x_0,\, y_0,\, y'_0) = y'_0\,.$$

La troisième équation peut s'écrire (§ 24):

$$C = 0.$$

Le cas que nous allons traiter est donc le cas exclu dans les deux paragraphes précédents, dans lequel la solution étrangère n'est plus nécessairement la seule contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0).

Nous nous proposons donc de trouver une courbe invariante par la substitution (3) et contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0). Soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une pareille courbe. La fonction $\psi(x)$ devra vérifier les deux équations fonctionnelles:

$$\psi\,[f(x,\,\psi,\,\psi')] = \varphi\,(x,\,\psi,\,\psi') \tag{E}$$

$$\psi'\,[f(x,\,\psi,\,\psi')] = \theta\,(x,\,\psi,\,\psi'). \tag{E'}$$

La fonction θ est liée à f et à φ par l'identité:

$$\theta\,(x,\,y,\,y') \equiv \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'} y''}\,.$$

Le second membre de cette identité ne contient y'' qu'en apparence, en réalité il est indépendant de y'' puisque la transformation est une transformation de contact.

Si on dérive l'équation (E) par rapport à x, on obtient:

$$\psi'\,[f(x,\,\psi,\,\psi')] \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\psi' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\psi''$$

ou, à cause de l'identité précédente:

$$\psi'[f(x,\,\psi,\,\psi')] \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''\right) = \theta\,(x,\,y,\,y')\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''\right]$$

équation qui se décompose en deux dont l'une est l'équation fonctionnelle (E') et l'autre une équation différentielle:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi'' = 0. \tag{E''}$$

Ainsi toute fonction qui vérifie l'équation (E) vérifie aussi, ou bien l'équation (E'), ou bien l'équation (E''), d'où deux cas à distinguer:

1.° Supposons que la fonction ψ vérifie les équations (E) et (E''): elle ne constitue pas alors une solution du problème tel que nous le posons actuellement et il est facile de voir qu'une pareille solution n'est autre que la solution étrangère obtenue en § 25; en effet l'équation (E'') admet une intégrale première

$$f(x,\,\psi,\,\psi') = x_0$$

et l'équation (E) devient, en tenant compte de cette dernière équation:

$$\varphi\,(x,\,\psi,\,\psi') = \psi\,(x_0) = y_0.$$

En éliminant ψ' entre ces deux équations, on a bien la solution ψ obtenue au § 25.

2.° Supposons que la fonction ψ ne vérifie pas (E''), elle doit alors vérifier (E'). Montrons tout d'abord que, réciproquement, si une courbe $y = \psi(x)$ contient l'élément double x_0, y_0, y'_0 et si $\psi(x)$ vérifie l'équation (E'), cette fonction $\psi(x)$ vérifie aussi l'équation (E). On aura en effet, en multipliant les deux membres de l'équation (E') par $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''$, la nouvelle équation :

$$\psi'[f(x, \psi, \psi')] \times \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\psi' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\psi''$$

d'où

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi') + C.$$

C étant une constante. L'équation devant être satisfaite pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, on a :

$$\psi(x_0) = y_0 + C$$

d'où $C = 0$.

Ainsi la fonction $\psi(x)$ qui vérifie l'équation (E') vérifie aussi l'équation (E). Il résulte de là que, pour avoir la courbe cherchée invariante par la transformation (3), il suffit de considérer la substitution

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y' &= \theta(x, y, y') \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

et de chercher une courbe invariante par cette substitution contenant l'élément (x_0, y_0, y'_0) double, non seulement pour la substitution (4), mais aussi pour la substitution (3). Si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une pareille courbe, $\psi(x)$ vérifie en effet l'équation (E') et par suite l'équation (E).

L'étude des substitutions de la forme (4) pourrait se faire comme celle des substitutions $(X, Y; x, y, y')$ qui a été faite au Chap. IV: on pourrait définir les antécédentes et les conséquentes successives d'une courbe initiale contenant l'élément double et chercher si ces antécédentes et ces conséquentes ont des limites. On pourrait étudier ainsi les équations fonctionnelles de la forme (E), et cela, même dans le cas où il ne s'agirait pas d'une transformation de contact. Mais cette étude n'est pas indispensable pour le problème actuel, que nous aborderons par une autre méthode au paragraphe suivant et elle exigerait des développements uu peu longs: aussi je me contenterai d'énoncer, pour les substitutions de la forme (4), quelques résultats dont je me propose de développer les démonstrations dans un travail ultérieur. Ces résultats sont les suivants :

Etant donnée la substitution (4) et un élément double (x_0, y_0, y'_0) de cette substitution, formons l'équation :

$$S^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial y'}\right)_0 S + [f, \theta]_0 = 0.$$

Soient S', S'' les racines de cette équation supposées distinctes et non nulles :

1.° Si $|S'|$, $|S''|$ sont tous deux inférieurs à 1, il existe une courbe invariante contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) et définie dans un certain intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$: cette courbe peut s'obtenir comme limite des antécédentes successives d'une courbe contenant l'élément double.

2.° Si $|S'|$, $|S''|$ sont tous deux supérieurs à 1, il existe une courbe invariante, limite des conséquentes successives.

3.° Si $|S'|$, $|S''|$ comprennent 1, il existe deux courbes invariantes, l'une limite d'antécédentes et l'autre limite de conséquentes (*).

Si on applique la proposition précédente aux transformations de contact, on voit qu'on peut définir, suivant les cas, *une ou deux courbes invariantes par la transformation de contact* (3) *et contenant l'élément double* x_0, y_0, y'_0 *de cette transformation.*

Ce résultat est ainsi établi sans supposer l'analyticité des données et en supposant seulement, comme on l'a fait au Chap. IV pour d'autres substitutions, que les fonctions données f, φ, θ sont définies dans le domaine de (x_0, y_0, y'_0) et ont des dérivées du premier ordre continues dans ce domaine. Mais il n'est pas prouvé que les courbes ainsi obtenues soient les seules et, en particulier, pour le cas de $|S'|$, $|S''|$ inférieurs ou supérieurs tous deux à 1, il n'est pas prouvé qu'il n'existe pas une deuxième courbe invariante.

Dans la méthode du paragraphe suivant, nous supposerons les fonctions f, φ, θ analytiques et nous pourrons démontrer alors *qu'il existe deux courbes analytiques invariantes dans tous le cas :* en restreignant les hypothèses

---

(*) Ces résultats s'appliquent à toute substitution de la forme (4), même si cette substitution ne provient pas d'une transformation de contact.

faites sur les fonctions f, φ, θ, nous pourrons ainsi obtenir un résultat plus complet que par la méthode précédente.

Nous allons donc reprendre par cette deuxième méthode la recherche des courbes invariantes par la transformation (3).

28. *Deuxième méthode.* — Dans la transformation de contact (3), remplaçons y' par une variable z indépendante de x et de y: elle devient une substitution à trois variables:

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, z) \\ Y &= \varphi(x, y, z) \\ Z &= \theta(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{ bis})$$

la fonction θ pouvant prendre l'une des formes suivantes:

$$\theta(x, y, z) = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} z}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} z} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}. \qquad (5)$$

Nous allons appliquer à cette substitution les résultats de Chap. II sur l'itération à trois variables.

Si on a obtenu une courbe plane $y = \psi(x)$ invariante par la transformation de contact (3), on en déduit une courbe de l'espace: $y = \psi(x)$ $z = \psi'(x)$ invariante par la transformation ponctuelle (3 bis).

Réciproquement, supposons qu'on ait obtenu une courbe analytique invariante par la substitution (3 bis) et passant par le point double (x_0, y_0, y'_0) de cette substitution: on sait qu'il y en a trois en général (Chap. II). Soient $y = \psi(y)$ $z = \chi(x)$ les équations d'une pareille courbe. Peut-on en déduire que la courbe plane $y = \psi(x)$ est invariante par la transformation de contact (3)? La question revient à chercher *si $\chi(x)$ est necessairement la dérivée de $\psi(x)$*: nous montrerons que cette condition n'est satisfaite que par deux des trois courbes invariantes et non pas par la troisième.

29. *Forme réduite.* — Donnons d'abord une forme réduite de la transformation de contact dans le domaine de l'élément double (x_0, y_0, y'_0). Par un changement de variables, on peut toujours amener l'élément double à avoir ses trois coordonnées nulles et les deux premières équations (3) ont alors la forme:

$$\begin{aligned} X &= a x + b y + c y' + F(x, y, y') \\ Y &= A x + B y + C y' + \Phi(x, y, y'). \end{aligned}$$

Nous avons obtenu au Chap. IV (§ 5) les expressions de a, b, c, A, B, C en fonction des coordonnées primitives (x_0, y_0, y'_0) de l'élément double. En se reportant à ces valeurs, on voit que l'on a en particulier :

$$A = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y' \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\right]_0$$

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 \qquad a = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0 \qquad c = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0.$$

Actuellement, on a :

$$A = 0 \qquad C = 0$$

car l'élément double (x_0, y_0, y'_0) vérifie l'équation $y'_0 = \theta(x_0, y_0, y'_0)$ qui peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$y'_0 = \left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'}\right)_0 = \left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}\right)_0.$$

De plus, pour pouvoir appliquer les résultats obtenus dans l'étude de l'itération à trois variables, il faut supposer que dans le domaine de (x_0, y_0, y'_0) les fonctions f, φ, θ sont holomorphes et, d'après les formes (5) de la fonction θ, il faut que $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ ne soient pas nuls en même temps (*), afin que l'on puisse employer l'une au moins des deux formes (5) de la fonction θ : il en résulte *qu'on doit supposer que a et c ne sont pas nuls en même temps.*

(*) Les conditions $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0 \neq 0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 \neq 0$ expriment, en général, que y'_0 n'est pas infini : elles dépendent donc de l'orientation des axes de coordonnées. Le seul cas qui reste ainsi à étudier est celui où l'on a en même temps :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'}\right)_0 = 0.$$

Les éléments doubles vérifiant simultanément ces 4 équations sont des éléments singuliers dans le domaine desquels une étude particulière serait nécessaire.

Les équations réduites sont donc de la forme:

$$X = a\,x + b\,y + c\,y' + F(x, y, y')$$
$$Y = B\,y + \Phi(x, y, y')$$

a et c n'étant pas nuls tous les deux.

On déduit de ces équations Y' sous les deux formes suivantes:

$$Y' = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(B + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) y'}{a + \frac{\partial F}{\partial x} + \left(b + \frac{\partial F}{\partial y}\right) y'} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y'}}{c + \frac{\partial F}{\partial y'}} \,. \tag{6}$$

On emploiera la première si a n'est pas nul et la deuxième si c n'est pas nul et on pourra, dans les deux cas, développer Y' en série ordonnée suivant les puissances de x, y, y', dans le domaine de l'origine. Examinons successivement les deux cas.

1.° Supposons $c \neq 0$ et employons la deuxième forme de Y'. On a, pour le développement de Y', une expression de la forme:

$$Y' = \alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,y' + \cdots$$

α, β, γ ayant les valeurs suivantes:

$$\alpha = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y'}\right)_0 \quad \beta = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial y'}\right)_0 \quad \gamma = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\right)_0 \,.$$

Ces coefficients α, β, γ et les coefficients a, b, c, B, ne sont pas d'ailleurs indépendants.

On a en effet l'identité:

$$\left(a + \frac{\partial F}{\partial x} + b\,y' + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + B\,y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'\right)\left(c + \frac{\partial F}{\partial y'}\right) \equiv 0 \tag{7}$$

qui exprime que la transformation est une transformation de contact. En dérivant cette identité par rapport à y' et en remplaçant ensuite x, y, y' par zéro, on obtient:

$$a\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\right)_0 - c\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial y'}\right)_0 - c\,B = 0$$

ou bien:

$$a\,\gamma - c\,\alpha = B.$$

On voit d'ailleurs aisément que cette relation est la seule existant entre les coefficients des termes du premier degré en x, y, y' dans le cas général.

Ainsi, en supposant $c \neq 0$, *la transformation prend la forme réduite*:

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, y') = a x + b y + c y' + \cdots \\ Y &= \varphi(x, y, y') = \qquad\quad B y \qquad\quad + \cdots \\ Y' &= \theta(x, y, y') = \alpha x + \beta y + \gamma y' + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

les coefficients étant liés par la relation:

$$a \gamma - c \alpha = B.$$

2.° Supposons $a \neq 0$. On emploiera alors la première forme (6) de Y' et on aura:

$$Y' = \alpha x + \beta y + \gamma y' + \cdots$$

α, β, γ ayant les valeurs:

$$\alpha = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 \quad \beta = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}\right)_0 \quad \gamma = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y'} + B\right)_0.$$

Si on dérive les deux membres de l'identité (7) par rapport à x et si on remplace x, y, y' par zéro, on obtient la relation:

$$a\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y'}\right)_0 - c\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 = 0$$

ou bien:

$$a(a \gamma - B) - c a \alpha = 0$$

ou encore:

$$a \gamma - c \alpha = B.$$

Ainsi, on obtient encore dans ce cas la même forme réduite (8) *pour la transformation de contact.*

30. Dans la transformation (8), remplaçons maintenant y' par une variable z indépendante de x et de y, comme nous l'avons indiqué au § 28. Elle devient une substitution à trois variables:

$$\left.\begin{aligned} X &= f(x, y, z) = a x + b y + c z + \cdots \\ Y &= \varphi(x, y, z) = \qquad\quad B y \qquad\quad + \cdots \\ Z &= \theta(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8 bis}$$

avec la relation:

$$a \gamma - c \alpha = B.$$

L'équation en S relative à cette substitution (Voir Chap. II est la suivante:

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ 0 & B-S & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma-S \end{vmatrix} = 0$$

ou bien:

$$(B-S)\,[(a-S)(\gamma-S)-c\,\alpha]=0$$

ou encore

$$(B-S)\,[S^2-(a+\gamma)\,S+B]=0$$

à cause de la relation $a\gamma - c\,\alpha = B$.

L'une des racines est $S=B$. Soient S', S'' les deux autres racines. Remarquons que l'on a:

$$S=S'S''.$$

Ainsi, l'une des racines de l'équation en S relative à un élément double d'une transformation de contact est égale au produit des deux autres.

Remarquons aussi que l'équation du second degré qui admet pour racines S', S'' n'est autre que l'équation en S considérée au § 27, dans la première méthode indiquée pour la recherche des courbes invariantes (*).

Pour appliquer le théorème fondamental du Chap. II sur les courbes invariantes par une substitution, nous devons supposer que les racines de l'équation en S sont distinctes, ont des modules différents de zéro et de 1, et enfin qu'aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine: à cause de la relation $S=S'S''$, cette dernière hypothèse revient à supposer qu'aucune des deux racines S', S'' n'est une puissance entière de l'autre. Nous ferons donc ces diverses hypothèses.

Il existe alors trois courbes analytiques invariantes par la substitution (8 bis) et passant par l'origine. Cherchons les tangentes à ces trois courbes à l'origine.

La tangente à la courbe invariante C correspondant à la racine $S=B$ a pour équations:

$$(a-B)\,x+b\,y+c\,z=0$$

$$\alpha\,x+\beta\,y+(\gamma-B)\,z=0.$$

(*) Dans cette équation, le terme indépendant $[f,\,\theta]_0$ se réduit en effet à $a\gamma - c\alpha$, c'est-à-dire à B.

Remarquons qu'*elle n'est pas située dans le plan* $y=0$, car il foudrait pour cela:

$$(a-B)(\gamma-B)-c\,\alpha=0$$

et l'une des racines S' S'' serait égale à B: l'équation du troisième degré en S aurait une racine double, contre l'hypothèse.

Considérons maintenant la tangente à la courbe invariante C' correspondant à la racine S'. Elle a pour équations:

$$(a-S')\,x+b\,y+c\,z=0$$

$$(B-S')\,y=0$$

$$\alpha\,x+\beta\,y+(\gamma-S')\,z=0$$

équations qui se réduisent aux suivantes:

$$(a-S')\,x+c\,z=0 \quad y=0.$$

La tangente est donc située dans le plan $y=0$. Il en est de même pour la tangente à la courbe invariante C'' correspondant à la racine S''.

Ainsi, pour deux des trois courbes analytiques invariantes par la substitution (8 bis) *et passant par l'origine, on a* $y'_0=0$: *soient* C', C'' *ces deux courbes; pour la troisième courbe* C *au contraire, on a* $y'_0 \neq 0$.

Ceci posé, soient $y=\psi(x)$ $z=\chi(x)$ les équations de l'une quelconque de ces trois courbes C, C', C''. Nous allons démontrer que, pour C' et C'', la fonction $\chi(x)$ est la dérivée de $\psi(x)$, mais que pour C il n'en est pas ainsi: il en résultera qu'il existe deux courbes analytiques invariantes par la transformation de contact (8) et deux seulement.

Si on suppose en effet y et z remplacés dans les équations (8 bis) par les coordonnées $\psi(x)$, $\chi(x)$ d'un point de l'une des trois courbes C, C', C'', on a:

$$\left.\begin{aligned} Y' &= \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}z'}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+\dfrac{\partial f}{\partial z}z'} \\ Z &= \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}z+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}z'}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}z+\dfrac{\partial f}{\partial z}z'}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Rappelons que, dans cette dernière équation, z' n'entre que d'une façon apparente, puisque la transformation (8) est une transformation de contact.

Supposons d'abord que y et z désignent les coordonnées d'un point de l'une des deux courbes C', C''. Pour ces courbes, on a:

$$y'_0 = z_0 = 0.$$

Prenons les dérivées successives par rapport à x des deux membres des équations (9) et remplaçons x par zéro dans les relations ainsi obtenues. Pour $x = 0$, Y, Y', Y'',... et Z, Z', Z'',... deviennent égaux respectivement à y, y', y'',... et à z, z', z'',... On obtient donc ainsi des relations entre y'_0, y''_0, y'''_0,... et z'_0, z''_0, z'''_0,... On a:

$$Y'' = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} z' + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} y' z' +\right.}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right)^3}$$

$$\frac{\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z''\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z} z''\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right)^3}.$$

Si on remplace x par zéro, on obtient une relation entre y'_0, z'_0, y''_0, z''_0 qui, résolue par rapport à y''_0, prend la forme:

$$y''_0 = \lambda(y'_0, z'_0, z''_0).$$

La deuxième équation (9) ne diffère de la première que par le changement de y' en z et de Y' en Z: donc, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x et en remplaçant x par zéro, on obtient:

$$z'_0 = \lambda(z_0, z'_0, z''_0).$$

En comparant les deux relations ainsi obtenues, et en tenant compte de la relation $y'_0 = z_0$, on voit que l'on a:

$$y''_0 = z'_0.$$

Je dis qu'en général on aura de même:

$$y_0^{(n)} = z_0^{(n-1)}.$$

Supposons la proposition établie pour toutes les valeurs de n jusqu'à $n = p - 1$ et démontrons qu'elle subsiste pour $n = p$.

En dérivant p fois la première équation (9) par rapport à x, en remplaçant x par zéro et en résolvant par rapport à $y_0^{(p)}$ la relation ainsi obtenue (*), on obtient une égalité de la forme:

$$y_0^{(p)} = \lambda_p \left(y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(p-1)}; z'_0, z''_0, \dots, z_0^{(p)}\right).$$

Dérivons maintenant la deuxième équation (9) par rapport à x: comme elle ne diffère de la première que par le changement de y' en z et de Y' en Z, ce qui entraîne le changement de $y^{(k)}$ en $z^{(k-1)}$ et de $Y^{(k)}$ en $Z^{(k-1)}$, on obtiendra, pour $x = 0$:

$$z_0^{(p-1)} = \lambda_p \left(z_0, z'_0, \dots, z_0^{(p-2)}; z'_0, z''_0, \dots, z_0^{(p)}\right)$$

et comme on a, par hypothèse:

$$y'_0 = z_0 \quad y''_0 = z'_0, \dots, y_0^{(p-1)} = z_0^{(p-2)}$$

on voit qu'on aura aussi:

$$y_0^{(p)} = z_0^{(p-1)}$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, les équations de chacune des courbes C et C' sont de la forme:

$$y = \psi(x) = y''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + y'''_0 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$z = \chi(x) = y''_0 x + y'''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

et $\chi(x)$ est bien la dérivée de $\psi(x)$.

Il en résulte que la courbe plane $y = \psi(x)$ est bien invariante par la transformation de contact (8).

(*) Il est aisé de voir que la relation ainsi obtenue et les relations analogues obtenues précédemment déterminent bien d'une façon univoque les quantités $y''_0, y'''_0, \dots, y_0^{(p)}$. Ces relations, jointes aux relations analogues obtenues en partant de la deuxième équation (9), sont en effet les équations servant à effectuer le calcul formel des coefficients $y''_0, y'''_0, \dots$ et $z''_0, z'''_0, \dots$ des équations d'une courbe invariante, lorsqu'on a déjà calculé les coefficients y'_0 et z'_0. Or, d'après les résultats du Chap. II, les coefficients y'_0, z'_0 une fois calculés, *il y a une courbe invariante et une seule* pour laquelle y'_0, z'_0 ont les valeurs ainsi calculées: il en résulte évidemment que les équations que nous considérons peuvent être résolues de proche en proche par rapport à $y''_0, y'''_0, \dots, y_0^{(p)}$ et qu'elles ont chacune *une solution et une seule.*

Ce raisonnement s'applique aux deux courbes C' et C'', mais il ne s'applique pas à la courbe C, car pour cette dernière, on a:

$$y'_0 \neq z_0$$

puisque z_0 est nul et que y'_0 n'est pas nul.

Ainsi la courbe C qui est invariante par la transformation ponctuelle (8 bis) ne fournit pas une courbe plane invariante par la transformation de contact (8).

Les résultats des derniers paragraphes sont résumés dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME. — *Soit donnée une transformation de contact:*

$$X = f(x, y, y') \qquad Y = \varphi(x, y, y') \qquad Y' = \theta(x, y, y').$$

Soit (x_0, y_0, y'_0) *un élément double de la transformation dans le domaine duquel les coefficients* f, φ, θ *sont holomorphes. Supposons que l'équation en* S:

$$S^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial y'}\right)_0 S + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$$

ait ses racines distinctes, de module différent de 0 *et de* 1 *et enfin qu'aucune des racines ne soit une puissance entière de l'autre racine* (*). *Il existe alors deux courbes analytiques et deux seulement invariantes par la transformation de contact et contenant l'élément double* (x_0, y_0, y'_0). *Si* $y = \psi(x)$ *est l'équation d'une de ces courbes, la fonction* $\psi(x)$ *vérifie, dans le domaine de* x_0, *les deux équations fonctionnelles:*

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi') \qquad (E)$$

$$\psi'[f(x, \psi, \psi')] = \theta(x, \psi, \psi'). \qquad (E')$$

31. *Exemple.* — Soit la transformation de contact:

$$X = ax + y' \quad Y = 2ay + y'^2 \quad Y' = 2y'$$

(*) Il n'y a pas à faire intervenir la troisième racine $S = B$ dans ces hypothèses, puisque la courbe invariante de l'espace correspondant à cette racine ne fournit pas une courbe plane invariante par la transformation de contact: si, par suite d'une hypothèse faite sur cette racine, la courbe invariante de l'espace qui lui correspond venait à disparaître, cela ne changerait donc pas les résultats relatifs à la transformation de contact.

et soit à déterminer les courbes analytiques invariantes contenant l'élément double $x_0 = y_0 = y'_0 = 0$.

Considérons la substitution:

$$X - a\,x + z \quad Y = 2\,a\,y + z^2 \quad Z = 2\,z.$$

On détermine aisément les courbes invariantes passant par l'origine, en employant la méthode des coefficients indéterminés et on trouve les trois courbes suivantes:

1ere courbe : $x = 0 \quad z = 0$

2e courbe : $y = 0 \quad z = 0$

3e courbe : $y = \dfrac{(2-a)\,x^2}{2} \qquad z = (2-a)\,x.$

Pour les deux dernières courbes, z est la dérivée de y par rapport à x; ces deux dernières courbes donnent deux courbes planes invariantes par la transformation de contact:

1ere courbe : $y = 0$

2e courbe : $y = \dfrac{(2-a)\,x^2}{2}.$

Ces deux fonctions vérifient à la fois les deux équations fonctionnelles:

$$\psi\,[a\,x + \psi'(x)] = 2\,a\,\psi(x) + [\psi'(x)]^2$$

$$\psi'[a\,x + \psi'(x)] = 2\,\psi'(x).$$

La vérification est immédiate.

On a trouvé en outre au § 26 une infinité de solutions vérifiant la première de ces équations sans vérifier la deuxième.

32. *Équations différentielles invariantes par une transformation de contact.* — Étant donnée la transformation de contact (3), on peut se proposer de chercher une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ invariante par la transformation. Une pareille équation possède la propriété suivante: étant donnée une courbe intégrale de l'équation, la transformation de contact appliquée à cette courbe donne une nouvelle courbe intégrale de la même équation.

Le problème revient à la recherche d'une surface invariante par la substitution à trois variables (3 bis). Soit (x_0, y_0, y'_0) un point double de cette substitution: l'équation en S relative à ce point a trois racines dont l'une S est égale au produit des deux autres S', S''. D'après les résultats du Chap. II (§§ 18 et 19) sur les surfaces invariantes, il y a en général une surface invariante contenant l'élément double et correspondant à la racine S', pourvu que S et S'' soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1; il y a de même une surface invariante correspondant à la racine S'' pourvu que S et S' soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1. Mais pour la troisième racine S, on est arrété dans le calcul formel des coefficients à cause de la relation $S = S'S''$: il n'y a donc pas en général de surface invariante correspondant à cette racine; mais il peut arriver cependant que, pour une transformation particulière, il y ait, non pas impossibilité, mais indétermination dans le calcul formel: dans ce cas, on aurait une infinité de développements vérifiant formellement l'équation fonctionnelle qui définit la surface invariante et il resterait à voir si les développements obtenus sont convergents. La même question se pose d'ailleurs dans le Chap. II, toutes les fois qu'il y a entre S, S', S'' une relation de la forme $S = S'^{\alpha} S''^{\beta}$ et nous n'avons pas étudié ce cas au Chap. II. Nous nous bornerons donc à conclure en remarquant que *toutes les fois qu'on a pu obtenir une surface invariante par la transformation* (3 bis), *on en déduit, en remplaçant z par y' dans l'équation de cette surface, une équation différentielle du premier ordre qui admet la transformation de contact* (3). Ce résultat est général pourvu qu'on considère, comme le fait Sophus Lie, une équation différentielle du premier ordre comme une équation entre les coordonnées x, y, y' d'un élément: l'énoncé s'applique alors, même au cas où l'équation d'une surface invariante ne contiendrait pas z.

Exemple. — Soit la transformation déjà considérée au paragraphe précédent:

$$X = a\,x + y' \quad Y = 2\,a\,y + y'^2 \quad Y' = 2\,y'.$$

Si on y remplace y' par z, on a la transformation ponctuelle:

$$X = a\,x + z \quad Y = 2\,a\,y + z^2 \quad Z = 2\,z$$

qui admet l'origine pour point double.

Ramenons d'abord cette transformation à avoir la forme canonique indiquée au Chap. II. Pour cela, il suffit de poser:

$$u = x + \frac{z}{a-2} \quad \text{et} \quad U = X + \frac{Z}{a-2}.$$

La transformation devient :

$$U = a\,u \quad Y = 2\,a\,y + z^2 \quad Z = 2\,z.$$

Les racines de l'équation en S sont a, 2 et $2\,a$.

A la racine $S' = 2$ correspond la surface invariante tangente au plan $x\,O\,y$:

$$z = 0.$$

A la racine $S'' = a$ correspond la surface invariante tangente au plan $y\,O\,z$:

$$u = 0.$$

Enfin cherchons une surface invariante tangente au plan $x\,O\,z$. Soit :

$$y = \psi(u, z) = \alpha\,u^2 + 2\,\beta\,u\,z + \gamma\,z^2 + \cdots$$

l'équation de cette surface. La fonction ψ doit vérifier l'équation fonctionnelle :

$$\psi(a\,u, 2\,z) = 2\,a\,\psi(u, z) + z^2.$$

On reconnaît aisément que tous les coefficients de $\psi(u, z)$ doivent être nuls sauf γ qui est égal à $\frac{1}{2\,(2-a)}$ et β qui est arbitraire : ainsi on est dans le cas où le calcul des coefficients conduit à une indétermination et on trouve une infinité de surfaces analytiques invariantes tangentes au plan $x\,O\,z$ et ayant pour équation générale :

$$y = \beta\,u\,z + \frac{z^2}{2\,(2-a)}\cdot$$

Si on revient aux variables x, y, z, on a les surfaces invariantes suivantes :

$$z = 0 \quad x = \frac{z}{2-a} \quad y = \beta\,x\,z + \frac{1-2\,\beta}{2\,(2-a)}\,z^2$$

et si on revient à la transformation de contact dans le plan, *on voit qu'on obtient les équations différentielles suivantes invariantes par la transformation de contact :*

$$y' = 0 \quad x = \frac{y'}{2-a} \quad y = \beta\,x\,y' + \frac{1-2\,\beta}{2\,(2-a)}\,y'^2$$

β étant une constante arbitraire et la méthode employée montre que *ce sont les seules équations différentielles admettant la transformation de contact proposée*, vérifiées pour $x=0$ $y=0$ $y'=0$ et telles que l'une au moins des trois quantités x, y, y' soit une fonction holomorphe des deux autres quantités, dans le domaine de $x=y=y'=0$.

Toute courbe intégrale de l'une de ces équations se transforme, lorsqu'on lui applique la transformation de contact donnée, en une nouvelle courbe intégrale de la même équation: il peut arriver que la courbe intégrale considérée coïncide avec sa transformée, c'est alors une des courbes invariantes trouvées au paragraphe précédent.

Il faut supposer, dans ce qui précède, qu'aucune des quantités a, 2 et $2a$ n'est le produit de deux puissances entières des deux autres quantités: dans ce cas, il peut y avoir une nouvelle indétermination dans le calcul formel des coefficients, d'après la théorie générale du Chap. II et les équations obtenues ne sont plus les seules répondant à la question: enfin si $a=2$, les résultats précédents tombent en défaut, mais nous nous bornerons au cas général.

33. *Convergence irrégulière et cycles de courbes invariantes.* — La notion de convergence irrégulière dont nous avons parlé dans l'étude de l'itération a deux ou à trois variables (1ère partie §§ 15 et 23) s'étend sans difficulté aux transformations de contact.

Considérons une transformation de contact T^1 et ses puissances T^2, T^3,... On peut se proposer de chercher une courbe qui soit invariante par la transformation T^p sans être invariante par les transformations T^n d'indice n inférieur à p. Une pareille courbe C est transformée successivement par la transformation T^1 en des courbes C_2, $C_3, \ldots$, C_p, $C_{p+1}, \ldots$ et la courbe C_{p+1} coïncide avec C_1, car elle pourrait se déduire de C_1 par la transformation T^p qui laisse C_1 invariante: *on a ainsi un cycle de p courbes se permutant circulairement par la transformation T^1.* Au point de vue purement analytique, nous formons ainsi *un cycle de p fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots$, $\psi_p(x)$ vérifiant un système d'équations fonctionnelles.*

Cette notion de convergence irrégulière s'applique, soit qu'on considère la transformation T^1 comme une transformation $(X, Y; x, y, y')$ *d'élément à point* (§§ 24 à 26), soit qu'on la considère comme une transformation *d'élément à élément* (§ 27 et suivants). Supposons que la transformation soit celle définie par les équations (3) ou (3 bis): dans le premier cas, on définit ainsi un cycle de fonctions ψ, $\psi_2, \ldots$, ψ_p vérifiant le système d'équations fonctionnelles

$$\psi_2 [f(x, \psi_1, \psi'_1)] = \varphi(x, \psi_1, \psi'_1) \tag{E_1}$$

$$\psi_3 [f(x, \psi_2, \psi'_2)] = \varphi(x, \psi_2, \psi'_2) \tag{E_2}$$

$$\vdots$$

$$\psi_p [f(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1})] = \varphi(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1}) \tag{E_{p-1}}$$

$$\psi_1 [f(x, \psi_p, \psi'_p)] = \varphi(x, \psi_p, \psi'_p). \tag{E_p}$$

Dans le deuxième cas, les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ doivent vérifier, non seulement les équations $(E_1), (E_2), \ldots, (E_p)$, mais aussi les équations:

$$\psi'_2 [f(x, \psi_1, \psi'_1)] = \theta(x, \psi_1, \psi'_1) \tag{E'_1}$$

$$\psi'_3 [f(x, \psi_2, \psi'_2)] = \theta(x, \psi_2, \psi'_2) \tag{E'_2}$$

$$\vdots$$

$$\psi'_1 [f(x, \psi_p, \psi'_p)] = \theta(x, \psi_p, \psi'_p). \tag{E'_p}$$

La résolution de ces systèmes d'équations fonctionnelles se ramène, comme on voit, à la résolution d'une ou de deux équations fonctionnelles définissant une courbe invariante par la transformation T^p: soit C_1 cette dernière courbe et $C_2, C_3, \ldots, C_p$ les transformées successives de C_1 par la transformation T^1. Si ces courbes ont respectivement pour équation les équations suivantes :

$$y = \psi_1(x) \quad y = \psi_2(x) \ldots y = \psi_p(x)$$

les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ constituent une solution du système d'équations fonctionnelles données.

Rappelons enfin qu'on obtient, par de simples éliminations, une infinité de courbes invariantes par une transformation de contact considérée comme transformation $(X, Y; x, y, y')$ (§ 25). Il en résulte qu'on obtiendra par de simples éliminations une infinité de solutions du système formé par les équations $E_1, E_2, \ldots, E_p$.

34. Exemples. — 1.° Soit la transformation de contact d'*élément* à *point*:

$$T_1 \begin{cases} X = x + y' \\ Y = 2y + y'^2 \end{cases}$$

et soit à trouver un cycle de deux courbes C_1, C'_1 se permutant par la transformation T_1.

La transformation itérée T^2 est la suivante:

$$T_2 \begin{cases} X = x \quad + 3\,y' \\ Y = 4\,y + 6\,y'^2. \end{cases}$$

Les éléments doubles de T_2 ont pour coordonnées $x = \lambda \;\; y = 0 \;\; y' = 0$, λ étant arbitraire. Pour obtenir une courbe invariante par T_2, il suffit (§ 25) d'éliminer y' entre les équations:

$$\begin{aligned} x \quad + 3\,y' &= \lambda \\ 4\,y + 6\,y'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination est:

$$y = -\frac{1}{6}(x-\lambda)^2. \tag{C_1}$$

C'est l'équation de la courbe C_1. Si on applique à cette courbe la transformation T_1, on obtient la courbe C_2. On trouve immédiatement l'équation de cette courbe:

$$y = -(x-\lambda)^2. \tag{C_2}$$

Les deux courbes (C_1) et (C_2) se permutent par la transformation T_1. Au point de vue purement analytique, les fonctions:

$$\psi(x) = -(x-\lambda)^2 \quad \text{et} \quad \theta(x) = -\frac{1}{6}(x-\lambda)^2$$

vérifient le système d'équations fonctionnelles:

$$\begin{aligned} \psi\,[x + \theta'(x)] &= 2\,\theta(x) + [\theta'(x)]^2 \\ \theta\,[x + \psi'(x)] &= 2\,\psi(x) + [\psi'(x)]^2. \end{aligned}$$

On pourrait, de la même manière, chercher un cycle de p courbes se permutant circulairement par la transformation T_1.

2.° Soit la transformation de contact d'*élément à élément*

$$T_1 \begin{cases} X = a\,y' \\ Y = b\,(x\,y' - y) \\ Y' = \dfrac{b}{a}\,x \end{cases}$$

et soit à trouver un cycle de deux courbes se permutant par la transformation. La transformation itérée est la suivante :

$$T_2 \begin{cases} X = b\,x \\ Y = b^2\,y \\ Y' = b\,y'. \end{cases}$$

C'est une simple transformation ponctuelle prolongée. Elle admet les courbes invariantes $y = \lambda\,x^2$, λ étant arbitraire.

La courbe C_1 a pour équation :

$$y = \lambda\,x^2.$$

La courbe C_2 s'obtient en appliquant à C_1 la transformation T_1, ce qui donne :

$$y = \frac{b\,x^2}{4\,a^2\,\lambda}\,.$$

Si on pose :

$$\psi(x) = \lambda\,x^2 \qquad \theta(x) = \frac{b\,x^2}{4\,a^2\,\lambda}$$

les fonctions ψ et θ vérifient le système des quatre équations fonctionnelles :

$$\psi\,[a\,\theta'(x)] = b\,[x\,\theta'(x) - \theta(x)] \qquad \psi'\,[a\,\theta'(x)] = \frac{b}{a}\,x$$

$$\theta\,[a\,\psi'(x)] = b\,[x\,\psi'(x) - \psi(x)] \qquad \theta'\,[a\,\psi'(x)] = \frac{b}{a}\,x.$$

TABLE DES MATIÈRES

Sulle forme differenziali a variabili alcune dipendenti altre indipendenti.

(*Del Dott.* GUIDO TOGNOLI, *a Pavia.*)

Il chiarissimo prof. PASCAL in una lunga serie di lavori pubblicati in questi ultimi anni ha studiato le forme e le equazioni ai differenziali totali di ordine superiore nell'ipotesi che, o *una* delle variabili sia funzione delle rimanenti (*), o *tutte* siano funzioni di altre indeterminate (**).

In questo lavoro io ho preso a considerare le forme ai differenziali totali in un' ipotesi diversa, e cioè quando si immagini che *alcune* delle variabili siano funzioni di altre indeterminate che, in particolare, potranno essere le rimanenti. Questa ipotesi è contemporaneamente per un certo senso più generale e per un altro verso meno generale della seconda di quelle sopraindicate; in ogni modo essa comprende come casi particolari sia l'una che

---

(*) E. PASCAL, *Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.* Rend. Ist. Lomb. (2). 33. (1900). — *La teoria delle equazioni ai differenziali totali di III.° ordine.* Rend. Ist. Lomb. (2). 33. (1900). — *Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2.ter Ord.,* Math. Ann., t. 54.

(**) E. PASCAL, *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di II.° ordine.* Annali di Matem. (3). 7. (1901). — *Un teorema della teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di II.° ordine.* Rend. Ist. Lomb. (2). 34. (1901). — *Sulle matrici a caratteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali di II.° ordine.* Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902). — *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali.* Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902). — *Estensione di alcuni teoremi di* FROBENIUS. Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902). — *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di II.° ordine.* Rend. Acc. Lincei. (5). XI. (1902). — *I problemi di riduzione di* PFAFF *e di* JACOBI *nel caso del II.° ordine.* Rend. Acc. Lincei. (5). XII. (1903). — *Nove note sulle forme ai differenziali totali di ordine r.* Rend. Acc. Lincei. (5). XII. (1903). 1.° e 2.° sem. — *Sulle forme differenziali omogenee di ordine superiore.* Rend. Ist. Lomb. (2). 36. (1903). — *Le forme differenziali ad una sola variabile.* Rend. Ist. Lomb. (2). 37. (1904).

l'altra di quelle considerate dal prof. Pascal, e posso così ottenere, in alcuni problemi, delle formole uniche.

Io farò vedere che, in gran parte, la ricerca può svolgersi in modo da potersi ricondurre al caso già trattato, e propriamente che i simboli e in generale le formazioni fondamentali che conviene introdurre nel nostro caso si possono ridurre a quelle già adoperate dal prof. Pascal.

Mi è grato pertanto di tributare pubblicamente al chiarissimo mio Maestro vivi ringraziamenti per i preziosi consigli e gli amorevoli incoraggiamenti di cui mi fu largo.

Divido il mio lavoro in due parti, studiando nella prima parte le forme ai differenziali totali di ordine qualunque, e nella seconda le forme di 2.° ordine.

Nel § 1 trovo l'espressione del differenziale totale erresimo di una funzione di più variabili nella ipotesi già detta, e fisso il tipo delle forme ai differenziali che studierò in questo lavoro.

Nel § 2 trovo le condizioni di completa integrabilità dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero una di tali forme. Nel § 3 sono contenute alcune ricerche sulla trasformazione delle derivate di una funzione per effetto di speciali trasformazioni di variabili. I risultati ottenuti in questo paragrafo vengono poi applicati nel § 4 allo studio di certi coefficienti numerici che compaiono nella espressione già trovata del differenziale totale erresimo, e nel § 5 allo studio della trasformazione di una forma del tipo considerato in un' altra del medesimo tipo ed allo studio dell'invariante Λ, estensione di quello già considerato dal prof. Pascal.

Nel § 6 osservo come le forme ai differenziali totali di II.° ordine da me studiati si possono considerare sotto un duplice punto di vista, e nel successivo § 7 dò varie proprietà delle forme stesse considerate nell'uno e nell'altro modo.

Infine nel § 8 considero il sistema di equazioni ai differenziali totali che si ottiene uguagliando a zero alcune delle nostre forme di II.° ordine, nell'ipotesi che il nostro sistema sia solubile rispetto a tanti differenziali secondi quante sono le incognite.

PARTE PRIMA

§ 1.

Forma del differenziale totale erresimo di una funzione. Forme differenziali di ordine r.

Si consideri una funzione $f(x_1 \dots x_n)$ di n variabili, delle quali $n-k$ e precisamente le $x_{k+1} \dots x_n$ siano indipendenti, e le altre, cioè le $x_1 \dots x_k$, siano funzioni di certe variabili $t_1, t_2, \dots$ sulle quali non si fanno ipotesi e che in particolare potranno essere le $x_{k+1} \dots x_n$.

In tale ipotesi se: $j_1 \dots j_p$ sono p dei numeri $1, \dots, k$ anche ripetuti, $j_{p+1} \dots j_m$ sono $m-p$ dei numeri $k+1, \dots, n$ anche ripetuti, il termine generale del differenziale totale erresimo della data funzione sarà:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,m} d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m}$$

$$(m \leq r)$$

ove il sommatorio $\sum\limits_{r_1 \dots r_p}$ va esteso a tutti i numeri $r_1, \dots, r_p$ interi positivi non nulli tali che $r_1 + \dots + r_p = r - m + p$, e $[r_1 \dots r_p]_{r,m}$ è un certo coefficiente numerico che studieremo in seguito.

Nel termine generale del nostro differenziale erresimo compare adunque una derivata mista rispetto a variabili dipendenti $(x_{j_1} \dots x_{j_p})$ ed a variabili indipendenti $(x_{j_{p+1}} \dots x_{j_m})$. Osserviamo subito che mentre vi sono sempre termini in cui le variabili di derivazione sono tutte dipendenti, e ciò qualunque sia m, se è $m < r$ non vi sono termini in cui la derivata sia presa rispetto a sole variabili indipendenti.

Volendo poi che in ogni derivata mista la derivazione si intenda sempre fatta, prima rispetto alle variabili indipendenti, poi rispetto alle variabili dipendenti, resta giustificato il coefficiente $\binom{m}{p}$ che vedremo ora attribuito al termine generale nello sviluppo del differenziale totale erresimo.

Precisamente *al differenziale totale r-simo possiamo dare l'una o l'altra delle forme:*

$$\left.\begin{aligned} d^r f = & \sum_{m=1}^{r} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \binom{m}{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,m} \, d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} \, d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m} + \\ & + \sum_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} \, d x_{j_1} \dots d x_{j_r} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d^r f = & \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \binom{m}{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,m} \, d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} \, d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m} + \\ & + \sum_{p=0}^{r} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_r} \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \dots \partial x_{j_r}} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,r} \, d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} \, d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ove il sommatorio $\sum\limits_{j_1 \dots j_p}$ va esteso a tutte le disposizioni con ripetizione dei numeri $1, \dots, k$ a p a p, il sommatorio $\sum\limits_{j_{p+1} \dots j_m}$ a tutte le disposizioni con ripetizione dei numeri $k+1, \dots, n$ ad $m-p$ ad $m-p$. Inoltre conveniamo che per $p=0$ nel doppio sommatorio $\sum\limits_{j_1 \dots j_p} \sum\limits_{j_{p+1} \dots j_m}$ si eseguisca solo il sommatorio rispetto al secondo gruppo di indici, per $p=m$ si eseguisca solo quello relativo al primo gruppo.

Infine il sommatorio $\sum\limits_{j_1 \dots j_r}$ che si è messo in evidenza nella (1), va esteso alle disposizioni con ripetizione degli $n-k$ numeri $k+1, \dots, n$ ad r ad r.

Osserviamo subito che se tutte le variabili sono dipendenti, se cioè si ha $k=n$, allora non può essere altro che $p=m$, epperò per le fatte convenzioni le espressioni precedentemente considerate diventano:

$$d^r f = \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{r_1 \dots r_m} [r_1 \dots r_m]_{r,m} \, d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_m} x_{j_m}$$

e questa è proprio la forma del differenziale totale erresimo di una funzione di n variabili dipendenti data dal prof. PASCAL (*), anche per ciò che riguarda i coefficienti numerici, come meglio vedremo quando avremo studiata la espressione $[r_1 \dots r_p]_{r,m}$.

Se invece tutte le variabili sono indipendenti allora, essendo $k=0$, sarà necessariamente $p=0$, e quindi la (1) e la (2) danno:

$$d^r f = \sum_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} d x_{j_1} \dots d x_{j_r}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le disposizioni con ripetizione dei numeri $1, \dots, n$ ad r ad r. Questa è l'espressione che si trova di solito nei testi di Calcolo, ove si dà l'espressione del differenziale erresimo solo per il caso delle variabili indipendenti.

Osserviamo anche che la (1) e (2) assumono forma più semplice introducendo il simbolo:

$$\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_p j_{p+1} \dots j_m} \equiv \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,m} d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m}$$

estensione del simbolo introdotto dal prof. PASCAL (**) per il caso delle variabili dipendenti.

La espressione rappresentata da questo simbolo si può rendere separatamente simmetrica rispetto al gruppo delle $j_1 \dots j_p$ e a quello delle $j_{p+1} \dots j_m$.

Precisamente se con $S_{j_1 \dots j_p}$ si intende l'operazione della somma ottenuta scambiando fra loro gli indici $j_1 \dots j_p$ in tutti i $p!$ modi possibili, e si definisce in modo analogo l'operazione $S_{j_{p+1} \dots j_m}$ potremo scrivere:

$$\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_p j_{p+1} \dots j_m} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p!} \frac{1}{(m-p)!} S_{j_1 \dots j_p} S_{j_{p+1} \dots j_m} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{r,m} d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} d x_{p+1} \dots d x_{j_m}.$$

Ci converrà poi anche, per ciò che riguarda la (1), introdurre il simbolo:

$$\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_r} \equiv \frac{1}{r!} S_{j_1 \dots j_r} d x_{j_1} \dots d x_{j_r}.$$

(*) E. PASCAL, *Su di un invariante simultaneo*... Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902).

(**) E. PASCAL, *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque*. Rend. Acc. Lincei. (5). XII. (1903).

In questo lavoro noi considereremo forme ai differenziali totali di tipo analogo ai differenziali totali formati nel modo ora detto. Precisamente considereremo quelle espressioni che si ottengono sostituendo nel differenziale totale erresimo alle $\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}}$ delle funzioni arbitrarie $X_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m}$ di tutte le x (ove gli indici $\leq k$ occupano costantemente il primo posto) simmetriche separatamente rispetto alle $j_1 \ldots j_p$ ed alle $j_{p+1} \ldots j_m$

Una forma differenziale di tal natura si può quindi rappresentare con

$$X^{(r)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{r} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \binom{m}{p} X_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} + \\ + \sum_{j_1 \ldots j_r} X_{j_1 \ldots j_r} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_r} \end{array} \right. \tag{3}$$

(ove le ultime $j_1 \ldots j_r$ sono $> k$), od anche:

$$X^{(r)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \binom{m}{p} X_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} + \\ + \sum_{p=0}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_r} \binom{r}{p} X_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_r} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_r} . \end{array} \right. \tag{4}$$

È bene notare che per una $X^{(s)}$ in cui sia $s < r$, il numero dei coefficienti a 2, 3,... indici è in generale maggiore del numero dei coefficienti di $X^{(r)}$ collo stesso numero di indici.

§ 2.

Condizioni di completa integrabilità di una equazione ai differenziali totali di ordine r.

Si consideri l'equazione che si ottiene uguagliando a zero una forma ai differenziali totali del tipo ora considerato. Diremo che essa è *completamente integrabile* (seguendo le denominazioni del prof. Pascal) quando esistano due funzioni f e μ di tutte le x, tali che moltiplicando il primo membro della data equazione per μ si ottenga il differenziale totale erresimo della f.

Quando questo si verifichi la equazione si integra eguagliando la f ad una funzione arbitraria di grado $r - 1$ delle $x_{k+1} \ldots x_n$.

Ci proponiamo ora di trovare a quali condizioni debbano soddisfare i coefficienti X perchè la $X^{(r)} = 0$ sia completamente integrabile. L'analoga ricerca per il caso delle variabili dipendenti fu già fatta dal dott. SINIGALLIA (*), e avremo occasione di richiamarne i risultati per confrontarli con quelli che verremo ottenendo. Per il caso di una variabile funzione delle rimanenti, le condizioni erano state prima trovate dal prof. PASCAL (**).

Nell'ipotesi della completa integrabilità avremo:

$$\mu X_{j_1} = \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}, \qquad \mu X_{j_1 j_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \tag{1}$$

ove $j_1 = 1, \ldots, k$ e $j_2 = 1, \ldots, n$; e in generale:

$$\mu X_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}} \tag{2}$$

per $p = 1, \ldots, m$; e per $p = 0$ (il che porta $m = r$):

$$\mu X_{j_1 \ldots j_r} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_r}} \tag{3}$$

ove adunque $j\ ,\ldots, j_r > k$.

Perchè intanto possano sussistere le (1), le X ad uno o a due indici devono soddisfare alle:

$$\left.\begin{aligned}
&X_{j_1} X_{j_2 j_3} - X_{j_2} X_{j_1 j_3} + X_{j_2} \frac{\partial X_{j_1}}{\partial x_{j_3}} - X_{j_1} \frac{\partial X_{j_2}}{\partial x_{j_3}} = 0 && \begin{pmatrix} j_1, j_2 \leq k \\ j_3 \text{ qualunque} \end{pmatrix} \\
&X_{j_1} \left(\frac{\partial X_{j_1 j_2}}{\partial x_{j_3}} - \frac{\partial X_{j_1 j_3}}{\partial x_{j_2}} \right) + X_{j_1 j_3} \frac{\partial X_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \quad X_{j_2 j_2} \frac{\partial X_{j_1}}{\partial x_{j_3}} = 0 && \begin{pmatrix} j_1 \leq k \\ j_2, j_3 \text{ qualunque} \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ed allora per $\frac{\partial \lg \mu}{\partial x_{j_s}}$ $(j_s = 1, \ldots, n)$ possiamo prendere una qualunque delle espressioni

$$\frac{X_{j_1 j_s} - \frac{\partial X_{j_1}}{\partial x_{j_s}}}{X_{j_1}}$$

che si hanno al variare di j da 1 a k.

(*) L. SINIGALLIA, *Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.* Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902).

(**) E. PASCAL, *Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.* Rend. Ist. Lomb. (2). 33. (1900).

Le (2) danno luogo a due ordini di condizioni. Le prime si ottengono mettendo in relazione le X aventi uno stesso numero di indici; si ha in tal guisa:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_p}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_{m+1}}\right)}{\partial x_{j_m}}\\
&\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_{s-1}\, j_{s+1}\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_s}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_s\, j_{s+2}\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_{s+1}}}\\
&\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_{p+s-1}\, j_{p+s+1}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_{p+s}}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_{p+s}\, j_{p+s+2}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_{p+s+1}}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

Le altre si ottengono mettendo in relazione una X ad m indici con una X avente gli indici della prima meno uno. Si ha così:

$$\mu\, X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_m}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}\right)}{\partial x_{j_p}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_{m+1}}\right)}{\partial x_{j_m}}\,. \qquad (b)$$

Tenendo conto però della prima delle (a) basta considerare la prima delle (b) ora scritte.

Infine le (3) dànno luogo ad un sol tipo di condizioni: quelle che si ottengono confrontando X aventi uno stesso numero di indici. Di queste condizioni possiamo formare due gruppi: secondo che si confrontano due X aventi tutti indici $>k$, oppure una X con indici $>k$ con una X avente un indice $\leq k$ e gli altri $>k$ (nel qual caso si tien conto e delle (3) e delle (2)).

Abbiamo così:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_{s-1}\, j_{s+1}\cdots j_r}\right)}{\partial x_{j_s}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_s\, j_{s+2}\cdots j_r}\right)}{\partial x_{j_{s+1}}}\\
&\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_1\cdots j_{r-1}\, j_r}\right)}{\partial x_{j_\sigma}}=\frac{\partial\left(\mu\, X_{j_\sigma\, j_1\cdots j_{r-1}}\right)}{\partial x_{j_r}}
\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

ove nella prima le j_ν sono $>k$, e nella seconda è $j_\sigma \leq k$.

Se adunque nelle (a), (b), (c) alle derivate logaritmiche di μ sostituiamo le espressioni prima trovate, avremo delle condizioni che insieme colle (4) ci si presentano come necessarie per la completa integrabilità della nostra equazione. Esse sono:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}}{\partial x_{j_p}} - \frac{\partial X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_{m-1}}}{\partial x_{j_m}} = \\ &= ((j_1\, j_p))\, \frac{X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}}{X_{j_1}} - ((j_1\, j_{p-1}))\, \frac{X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_m}}{X_{j_1}}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ed analoghe, dedotte dalle (a).

$$X_{j_1\cdots j_p\, j_{p+1}\cdots j_m} = \frac{\partial X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}}{\partial x_{j_p}} - ((j_1\, j_p))\, \frac{X_{j_1\cdots j_{p-1}\, j_{p+1}\cdots j_m}}{X_{j_1}}\,. \qquad (6)$$

dedotte dalle (b).

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_{j_1\cdots j_{s-1}\, j_{s+1}\cdots j_r}}{\partial x_{j_s}} - \frac{\partial X_{j_1\cdots j_s\, j_{s+2}\cdots j_r}}{\partial x_{j_{s+1}}} = \\ &= ((j_1\, j_s))\, \frac{X_{j_1\cdots j_{s-1}\, j_{s+1}\cdots j_r}}{X_{j_1}} - ((j_1\, j_{s+1}))\, \frac{\partial X_{j_1\cdots j_s\, j_{s+2}\cdots j_r}}{X_{j_1}}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ed analoghe, dedotte dalle (c).

Con $((j_1\, j_s))$ abbiamo rappresentato l'espressione $\dfrac{\partial X_{j_1}}{\partial x_{j_s}} - X_{j_1\, j_s}$, adottando così un simbolo introdotto dal prof. PASCAL (*).

Le condizioni (4), (5), (6), (7) sono poi anche sufficienti. Infatti le (4) ci assicurano che possono coesistere le relazioni $\mu\, X_{ij} = \dfrac{\partial\,(\mu\, X_i)}{\partial x_j}$ ove $\begin{matrix} i \leq k \\ j \text{ qualunque}\end{matrix}$; tenendo conto delle (5), (6), (7) abbiamo allora che insieme colle (1) sussistono le (a), (b), (c) e quindi, per un lemma conosciuto (**) [« Date più funzioni Y_i, Y_{ij}, Y_{ijh},... di n variabili $x_1 \ldots x_n$, le condizioni necessarie e sufficienti perchè esse si possano considerare come derivate prime, seconde,... di una funzione delle $x_1 \ldots x_n$ sono:

$$\frac{\partial Y_{ij}\ldots}{\partial x_h} = Y_{hij}\ldots; \qquad \frac{\partial Y_{ij}\ldots}{\partial x_h} = \frac{\partial Y_{hj}\ldots}{\partial x_i}\ \Big] \quad .$$

possiamo concludere che la data equazione è completamente integrabile.

(*) *Annali di Mat.* (3). t. VII.

(**) v. PASCAL, *Rend. Ist. Lomb.* (2). 33. (1900), pag. 12.

Sempre seguendo il procedimento usato dal dott. SINIGALLIA nella Nota citata, potremmo mostrare che le (5) sono conseguenza delle (4) e delle (6). Basterebbe far vedere che se sussistono le (5) per le X ad $(m-2)$ indici, oltre beninteso tutte le (4) e (6), sussistono anche le (5) per le X ad $m-1$ indici: tenendo conto allora che per $m=2$ le (5) sono comprese nelle (4), il teorema risulta completamente dimostrato. Senza addentrarci nei dettagli della dimostrazione, riterremo adunque che le condizioni per la completa integrabilità sono date dalle (4), (6) e (7).

Vogliamo piuttosto vedere in che cosa differiscano, per ciò che riguarda la completa integrabilità, le equazioni ora considerate da quelle studiate dal dott. SINIGALLIA.

Nel caso di tutte variabili dipendenti: « *Se una $X^{(r)}=0$ è completamente integrabile, le X a più di due indici della data equazione si esprimono in modo determinato mediante le X ad uno e a due indici.* »

Nel nostro caso abbiamo: « *Se una $X^{(r)}=0$ è completamente integrabile, mediante le X ad uno e a due indici possiamo esprimere in modo determinato solo quelle X a più di due indici di cui uno almeno sia $\leq k$; per le altre X a più di due indici (necessariamente ad r indici), conosciamo solo dalle relazioni alle derivate parziali cui devono soddisfare.*

Le formole poi che servono ad esprimere le X a più indici di cui uno sia $\leq k$, sono del medesimo tipo di quelle date dal dott. SINIGALLIA. »

Inoltre è facile vedere che, contrariamente a quanto si verifica nell'altro caso, se si forma l'equazione $X^{(s)}=0$ in cui s sia minore di r, e di cui i coefficienti con $1, 2, \ldots, s$ indici sieno unicamente e gli stessi coefficienti omonimi della $X^{(r)}=0$, se $X^{(r)}=0$ è completamente integrabile, non lo sarà più $X^{(s)}=0$.

§ 3.

TRASFORMAZIONE DELLE DERIVATE DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI PER EFFETTO DI SPECIALI TRASFORMAZIONI DI VARIABILI.

Si consideri una funzione $f(x_1 \ldots x_n)$, e si dividano le variabili in due gruppi $(x_1 \ldots x_k)$, $(x_{k+1} \ldots x_n)$. Ci proponiamo di vedere come si trasforma una qualunque derivata della nostra funzione, quando si mutino le variabili x in nuove variabili $y_1 \ldots y_k$, $y_{k+1} \ldots y_n$ mediante l'una o l'altra delle seguenti trasformazioni, (formanti naturalmente sempre un gruppo)

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = x_i(y_1 \dots y_k) & (i \leq k) \\ x_i = x_i(y_1 \dots y_k\, y_{k+1} \dots y_n) & (i > k) \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = x_i(y_1 \dots y_k) & (i \leq k) \\ x_i = \text{funzione lineare delle } (y_{k+1} \dots y_n) & (i > k). \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

Le $x(y)$, a meno che sia detto esplicitamente il contrario, sono funzioni affatto àrbitrarie delle y, colla condizione che:

siano differenti da zero

nel primo caso: il determinante funzionale delle $x_1 \dots x_k$ rispetto alle $y_1 \dots y_k$, e il determinante $\dfrac{\partial(x_{k+1} \dots x_n)}{\partial(y_{k+1} \dots \partial y_n)}$ contenuto nella matrice funzionale delle $x_{k+1} \dots x_n$ rispetto a tutte le y;

nel secondo caso il determinante $\dfrac{\partial(x \dots x_k)}{\partial(y_1 \dots y_k)}$, ed il determinante $\dfrac{\partial(x_{k+1} \dots x_n)}{\partial(y_{k+1} \dots y_n)}$; questo ultimo non essendo poi altro che il determinante dei coefficienti della sostituzione lineare.

Con queste ipotesi resta così possibile l'esprimere reciprocamente le y mediante le x.

Nei paragrafi successivi avremo solo occasione di considerare (per le $X^{(r)}$ ove $r > 2$) la trasformazione (β): però sarà meglio studiare ora anche la (α) e perchè essa si presenta nel caso di $r = 2$, e perchè dallo studio di essa seguiranno immediatamente le proprietà della (β). Cominciamo pertanto dalla (α).

Consideriamo la derivata:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_\varrho}\, \partial y_{h_{\varrho+1}} \dots \partial y_\mu}$$

$$\text{ove:} \left\{\begin{array}{lll} h_1 \dots h_\rho & \text{sono } \rho \text{ dei numeri} & 1, \dots, k \quad \text{anche ripetuti} \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu & \text{sono } \mu - \rho \text{ dei numeri} & k+1, \dots, n \quad \text{anche ripetuti} \end{array}\right.$$

e vediamo di esprimerla mediante le derivate delle f rispetto alle x. Siamo partiti da una derivata rispetto alla y, anzichè rispetto alla x, per poter confrontare con maggior facilità i risultati che otterremo con quelli trovati dal prof PASCAL (*).

(*) *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Rend. Acc. Lincei. (5). XII. (1903).

Per i primi ordini abbiamo immediatamente:

$$r \leqq k) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_r}; \quad r > k) \; \frac{\partial f}{\partial y_r} = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$$

$$r,\, s \leqq k) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$\left.\begin{matrix} r \leqq k \\ s > k \end{matrix}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$r,\, s > k) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

e quindi non sarebbe difficile, per induzione, ottenere la formola generale. Ma possiamo anche utilizzare i risultati ottenuti dal prof. Pascal nella Nota ora citata.

La trasformazione $(\varkappa)$ differisce dalle trasformazioni: $x_i = x_i(y_1 \ldots y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ solo perchè le x con indice $\leqq k$ non sono funzioni delle y con indice $> k$. Basterà quindi, nell'applicare quei risultati, tener conto che è zero ogni derivata di una x con indice $\leqq k$, rispetto ad una y con indice $> k$.

Incominceremo a porre:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{\mu}{\rho} \frac{\partial^m f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\rho} \partial y_{h_{\rho+1}} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{m} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \binom{m}{p} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ove i sommatori rispetto alle j hanno il significato detto al § 1, e le formazioni $\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$, estensione di quelle considerate dal prof. Pascal, sono costituite da raggruppamenti di derivate delle x rispetto alle y, che ora studieremo. Si prevede che talune di esse potranno essere nulle, come effettivamente si verifica, cosicchè la nostra derivata non risulterà espressa mediante tutte le derivate rispetto alle x che figurano nella formola provvisoria ora scritta.

Sempre riferendoci alla Nota citata, abbiamo che nel nostro caso il termine generale di $\begin{pmatrix} j_1 \dots j_p & j_{p+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho & h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$ è:

$$\frac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_1}} \cdots \frac{\partial^{r_p} x_{j_p}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_p}} \cdot \frac{\partial^{r_{p+1}} x_{j_{p+1}}}{\partial (y_h)_{r_{p+1}}} \cdots \frac{\partial^{r_m} x_{j_m}}{\partial (y_h)_{r_m}} \qquad (a)$$

con $\dfrac{\partial^{r_s} x_{j_s}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_s}}$ intendendo la derivata, di ordine r_s, della x_{j_s} rispetto ad r_s delle variabili $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$, e con $\dfrac{\partial^{r_k} x_{j_s}}{\partial (y_h)_{r_s}}$ intendendo la derivata di ordine r_s della x_{j_s} rispetto ad r_s y prese fra tutte le $y_{h_1}, \dots, y_{h_\varrho}, y_{h_{\varrho+1}}, \dots, y_{h_\mu}$.

I numeri $r_1, \dots, r_p, r_{p+1}, \dots, r_m$ sono intieri positivi non nulli tali che la loro somma sia uguale a μ, e la somma dei primi p non superi ρ. Conveniamo poi che per $p = 0$ nel termine generale si consideri solo la seconda parte $\dfrac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (y_h)_{r_1}} \cdots \dfrac{\partial^{r_m} x_{j_m}}{\partial (y_h)_{r_m}}$, e per $p = m$ si consideri solamente la prima $\dfrac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_1}} \cdots \dfrac{\partial^{r_m} x_{j_m}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_m}}$. Si deve inoltre tener conto che nel termine generale le derivate di $x_{j_1} \dots x_{j_p}$ vanno prese rispetto a tutte o parte delle $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$, le derivate delle $x_{j_{p+1}} \dots x_{j_m}$ vanno prese rispetto a quelle delle $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}\, y_{h_{\rho+1}} \dots y_{h_\mu}$ che non si sono prese nel formare la prima parte. Ciò che ora preciseremo.

Per un sistema fisso di valori delle $r_1 \dots r_p$ avremo intanto varii termini come (a), in corrispondenza ai diversi modi di raggruppare le $y_{h_1} \dots y_{h_\rho}$, considerate come ρ elementi distinti, in un gruppo di r_1 di esse, con un gruppo di r_2 delle rimanenti... e così via con un gruppo di r_p; cosicchè se $r_1 + \dots + r_p = \rho$ avremo ogni volta distribuite in gruppi di tal natura tutte le $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$, se $r_1 + \dots + r_p < \rho$ in ognuno di questi raggruppamenti non compariranno complessivamente tutte le $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$ ma solo $\rho - r_1 - \dots - r_p$ fra esse.

In corrispondenza poi ad un sistema fisso di valori delle $r_1 \dots r_p\ r_{p+1} \dots r_m$, oltre ad avere varii termini come (a), per i diversi modi di raggruppamento delle $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$ ora considerati, ne avremo anche per i diversi modi di raggruppare quelle fra le $y_{h_1} \dots y_{h_\varrho}$ che si fossero ommesse e le $y_{h_{\rho+1}} \dots y_{h_\mu}$, considerate complessivamente come $\mu - r_1 - \cdots - r_p$ elementi distinti, in un gruppo di r_{p+1} di esse, con un gruppo di r_{p+2} delle rimanenti e così via.

Concludendo, i termini come (a) che si hanno per ogni sistema fisso di valori attribuiti alle r, sono in numero di:

$$N^{(\rho)}_{r_1 \cdots r_p} \cdot N^{(\mu - r_1 - \cdots - r_p)}_{r_{p+1} \cdots r_m}$$

essendo:

$$N^{(\rho)}_{r_1 \cdots r_p} = \frac{\binom{\rho}{r_1}\binom{\rho - r_1}{r_2} \cdots \binom{\rho - r_1 - \cdots - r_{p-1}}{r_p}}{\rho_1 ! \, \rho_2 ! \ldots}$$

se fra i numeri $r_1 \ldots r_p$ ve ne sono ρ uguali fra loro, ρ_2 uguali fra loro ma non ai precedenti e così via..., e:

$$N^{(\mu - r_1 - \cdots - r_p)}_{r_{p+1} \cdots r_m} =$$

$$= \frac{\binom{\mu - r_1 - \cdots - r_p}{r_{p+1}}\binom{\mu - r_1 - \cdots - r_p - r_{p+1}}{r_{p+2}} \cdots \binom{\mu - r_1 - \cdots - r_{m-1}}{r_m}}{\rho_{p+1} ! \, \rho_{p+2} ! \ldots}$$

se fra i numeri $r_{p+1} \ldots r_m$ ve ne sono ρ_{p+1} uguali fra loro, ρ_{p+2} uguali fra loro ma non ai precedenti... e così via.

Per avere tutta la $\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$, oltre all'eseguire gli indicati raggruppamenti, dobbiamo far variare le r per tutti i valori positivi interi non tutti nulli tali che $r_1 + \cdots + r_p \leqq \rho$, $r_1 + \cdots + r_p + r_{p+1} + \cdots + r_m = \mu$ e sommare tutti i termini come (a) che così si ottengono. *Denotando questa operazione con* $\sum\limits_{r_1 \ldots r_p} \sum\limits_{r_{p+1} \ldots r_m}$, *e denotando con* $\sum\limits_{N^{(\rho)}_{r_1 \ldots r_p}} \sum\limits_{N^{(\mu - r_1 - \cdots - r_p)}_{r_{p+1} \ldots r_m}}$ *il sommatorio esteso ai diversi raggruppamenti delle y che si devono eseguire per ogni sistema di r avremo infine:*

$$\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} =$$

$$= \sum_{r_1 \ldots r_p} \sum_{r_{p+1} \ldots r_m} \sum_{N^{(\rho)}_{r_1 \ldots r_p}} \sum_{N^{(\mu - r_1 - \cdots - r_p)}_{r_{p+1} \ldots r_m}} \frac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_1}} \cdots \frac{\partial^{r_p} x_{j_p}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_p}} \cdot \frac{\partial^{r_{p+1}} x_{j_{p+1}}}{\partial (y_h)_{r_{p+1}}} \cdots \frac{\partial^{r_m} x_{j_m}}{\partial (y_h)_{r_m}} =$$

$$= \frac{1}{p!} \frac{1}{(m-p)!} S_{j_1 \ldots j_p} S_{j_{p+1} \ldots j_m} \sum_{r_1 \ldots r_p} \sum_{r_{p+1} \ldots r_m} \sum_{N^{(\rho)}_{r_1 \ldots r_m}} \sum_{N^{(\mu - r_1 - \cdots - r_p)}_{r_{p+1} \ldots r_m}} \frac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_1}} \cdots \frac{\partial^{r_p} x_{j_p}}{\partial (\bar{y}_h)_{r_p}} \cdot \frac{\partial^{r_{p+1}} x_{j_{p+1}}}{\partial (y_h)_{r_{p+1}}} \cdots \frac{\partial^{r_m} x_{i_m}}{\partial (y_h)_{r_m}}$$

Ci sarà ora facile scorgere che alcune delle $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$, come abbiamo già detto, sono identicamente nulle.

Sono nulle: le $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ per $p = m$, $\rho \quad \mu$.

le $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ per $p \quad 0$, $\rho = 0$

le $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ per $p > \rho$.

Queste ultime sono nulle perchè per $p > \rho$ non si possono trovare dei numeri $r_1 \ldots r_p$ interi positivi non nulli tali che la loro somma sia $\leq \rho$.

Non vi sono poi altri casi in cui la mancanza di un gruppo di indici porti l'annullarsi identico della formazione; questa può tutto al più semplificarsi come nel caso di $p = 0$, e in quello di $\rho = \mu$.

Da tutto quanto precede segue che *la* (1) *può acquistare la forma definitiva :*

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\rho} \partial y_{h_{\rho+1}} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{p=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}} + \\ &+ \sum_{m=\rho+1}^{\mu} \sum_{p=0}^{\rho} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p & j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\rho & h_{\rho+1} \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ove si è supposto ρ *essenzialmente diverso da* 0 *e da* μ.

Per $\rho = \mu$ (cioè $h_1, \ldots, h_\rho \leq k$) abbiamo semplicemente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \\ &\quad = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \sum_{j_1 \ldots j_p} \sum_{j_{p+1} \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_p \; j_{p+1} \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \ldots \partial x_{j_m}} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

e infine *per* $\rho = 0$ $(h_1 \ldots h_\mu > k)$ si ha la formula ancora più semplice:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \quad (4)$$

ove le $j_1 \ldots j_m$ sono tutte $> k$.

Fin qui abbiamo considerata la trasformazione (α) : *ora per venire alla* (β) *cominciamo a supporre che nella* (α) *le* $x_{k+1} \dots x_n$ *siano funzioni delle sole* $y_{k+1} \dots y_n$, *funzioni del resto arbitrarie, salvo la condizione* $\frac{\partial (x_{k+1} \dots x_n)}{\partial (y_{k+1} \dots y_n)} = -0.$

In tale ipotesi si ha :

$$\begin{pmatrix} j_1 \dots j_p & j_{p+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho & h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} j_1 \dots j_p \\ h_1 \dots h_\rho \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_{p+1} \dots j_m \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

ove :

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_p \\ h_1 \dots h_\rho \end{pmatrix}_{xy} &= \frac{1}{p!} S_{j_1 \dots j_p} \sum_{r_1 \dots r_p} \sum_{N^{(\rho)}_{r_1 \dots r_p}} \frac{\partial^{r_1} x_{j_1}}{\partial (y_h)_{r_1}} \cdots \frac{\partial^{r_p} x_{j_p}}{\partial (y_h)_{r_p}} \\ \begin{pmatrix} j_{p+1} \dots j_m \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} &= \frac{1}{(m-p)!} S_{j_{p+1} \dots j_p} \sum_{r_{p+1} \dots r_m} \sum_{N^{(\mu-\rho)}_{r_{p+1} \dots r_m}} \frac{\partial^{r_{p+1}} x_{j_{p+1}}}{\partial (y_h)_{r_{p+1}}} \cdots \frac{\partial^{r_m} x_{j_m}}{\partial (y_h)_{r_m}} \end{aligned} \right.$$

i simboli avendo il solito significato naturalmente adatto a questo caso. Così p. es.

$$N^{(\mu-\rho)}_{r_{p+1} \dots r_m} = \frac{\begin{pmatrix} \mu - \rho \\ r_{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu - \rho - r_{p+1} \\ r_{p+2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mu - r_{p+1} - \dots - r_{m-1} \\ r_m \end{pmatrix}}{\rho_{p+1}! \, \rho_{p+2}! \dots} .$$

In questo caso sono nulle anche le $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ per

$$p = 0, \quad \rho = 0; \quad p = m, \quad \rho = \mu$$

e per avere, nel sommatorio solito, delle $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ non identicamente nulle, bisogna che, oltre all'essere come prima $m \leq \mu$, $p \leq \rho$, sia anche $m - p \leq \mu - \rho$.

La (2), tenendo conto di tutto ciò, ed osservando che:

$$\sum_{p=0}^{\rho} \sum_{m-p=1}^{\mu-\rho} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{m-\mu+\rho}$$

diventa :

$$\left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_\rho} \partial y_{h_{\rho+1}} \dots \partial y_{h_\mu}} = \\ & = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=1}^{m-\mu+\rho} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_p \\ h_1 \dots h_\rho \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_{p+1} \dots j_m \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p} \partial x_{j_{p+1}} \dots \partial x_{j_m}} . \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Le (3) e (4) assumono poi la forma:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \tag{3'}$$

ove: per $h_1, \ldots, h_\mu \leq k$ (cioè $\rho = \mu$) le j sono $\leq k$

per $h_1, \ldots, h_\mu > k$ (cioè $\rho = 0$) le j sono $> k$.

Se infine veniamo alla nostra (β), *dobbiamo osservare che per la linearità delle funzioni del secondo gruppo, non sono solo nulle le* $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}$ *in cui* $m - p$ *supera* $\mu - \rho$ *ma anche quelle in cui* $m - p$ *è inferiore a* $\mu - \rho$. *Dunque dovremo prendere* $p = m - \mu + \rho$: *le solite formole* (2), (3), (4) *acquistano allora la forma*:

$$\left. \begin{aligned} \binom{\mu}{\rho} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\rho} \partial y_{h_{\rho+1}} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \\ = \sum_{m=1}^{\mu} \binom{m}{\mu - \rho} \sum_{j_1 \ldots j_{m-\mu+\rho}} \sum_{j_{m-\mu+\rho+1} \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots, \ldots j_m \\ h_1 \ldots, \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{m-\mu+\rho}} \partial x_{j_{m-\mu+\rho+1}} \ldots \partial x_{j_m}} \end{aligned} \right\} \tag{2''}$$

ove ρ è differente da zero e da μ;

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \ldots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_m \\ h_1 \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \tag{3''}$$

ove $h_1 \ldots h_\mu$, $j_1 \ldots j_m$ sono tutti $\leq k$;

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \ldots \partial y_{h_\mu}} = \sum_{j_1 \ldots j_\mu} \begin{pmatrix} j_1 \ldots j_\mu \\ h_1 \ldots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \frac{\partial^\mu f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\mu}} \tag{4''}$$

ove $h_1, \ldots, h_\mu$ e così $j_1 \ldots j_\mu$ sono tutte $> k$.

Le $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ che entrano in quest'ultima formola sono formate colle sole derivate prime in modo semplicissimo. Dello stesso tipo sono le $\begin{pmatrix} j_{m-\mu+\rho+1} \ldots j_m \\ h_{\rho+1} \ldots h_m \end{pmatrix}_{xy}$ che entrano come fattore nella $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ della (3″): l'altro fattore $\begin{pmatrix} j_1 \ldots j_{m-\mu+\rho} \\ h_1 \ldots h_\rho \end{pmatrix}_{xy}$ essendo invece formato ancora come nel caso della trasformazione intermedia prima considerato.

Sulle $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ che compaiono trasformando la nostra derivata colla (α) o colla (β), abbiamo due ordini di identità analoghe a quelle date dal prof. Pascal (*), alle quali se ne possono aggiungere altre che ricordano quelle date dallo stesso Autore (**) per i simboli $\delta^{(r)}$, sempre nel caso delle variabili dipendenti, ma che ivi non sono esplicitamente rilevate.

Di questi sei gruppi di identità, ci limiteremo a darne due, riferendoci sempre alla (β): quelle del primo gruppo sono interessanti per il confronto che faremo colle identità relative ai nostri $\delta^{(r)}$; quelle del secondo gruppo verranno applicate in seguito quando parleremo di un certo invariante della $X^{(r)}$ e di una forma alle derivate parziali.

Identità del I° tipo). Sappiamo che è:

$$\begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho \quad h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho} \\ h_1 \dots h_\rho \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} .$$

Applicando al primo fattore, che è una formazione di quelle considerate dal prof. Pascal, le relazioni della Nota: *Introduzione*... già citata, ed osservando che per il secondo fattore subito si ha:

$$\begin{pmatrix} j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \frac{1}{\mu - \rho} S_{j_m} \begin{pmatrix} j_m \\ h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_{m-1} \\ h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$$

otterremo le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho \quad h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y_{h_\rho}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\rho-1} \quad h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} + \\ &+ \frac{1}{m - \mu + \rho} S_{j_{m-\mu+\rho}} \begin{pmatrix} j_{m-\mu+\rho} \\ h_\rho \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho-1}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\rho-1} \quad h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho \quad h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \\ &= \frac{1}{\mu - \rho} S_{j_m} \begin{pmatrix} j_m \\ h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_\rho \quad h_{\rho+1} \dots h_{\mu-1} \end{pmatrix}_{xy} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(*) *Su di un invariante* ... Rend. Ist. Lomb. (2). 35. (1902), pag. 698. — *Introduzione* ... Rend. Acc. Lincei. (5). 12. (1903), pag. 328.

(**) *Introduzione* ..., pag. 330.

che si hanno per $m = 2, .., \mu - 1$ prendendo rispettivamente di mira una variabile dipendente y_{h_ϱ} ed una indipendente y_{h_μ}.

Per $m = \mu$ si ha per:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_\rho \, j_{\rho+1} \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_\rho \, h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} &= \frac{1}{\rho} S_{j_\rho} \begin{pmatrix} j_\rho \\ h_\rho \end{pmatrix}'_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{\rho-1} \, j_{\rho+1} \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_{\rho-1} \, h_{\rho+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = \\ &= \frac{1}{\mu - \rho} S_{j_\mu} \begin{pmatrix} j_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_\rho \, j_{\rho+1} \dots j_{\mu-1} \\ h_1 \dots h_\rho \, h_{\rho+1} \dots h_{\mu-1} \end{pmatrix}_{xy} . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Non sarà fuor di luogo tener presente che nella $\begin{pmatrix} j \\ h \end{pmatrix}_{xy}$ generale, il fattore $\begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho} \\ h_1 \dots h_\rho \end{pmatrix}_{xy}$ non contiene le y indipendenti, e l'altro fattore non contiene affatto le y, ma è solo formato coi coefficienti della sostituzione lineare. Potremo perciò scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{m-\mu+\rho} \, j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m \\ h_1 \dots h_\rho \quad h_{\rho+1} \dots \quad h_\mu \end{pmatrix}_{xy} = 0 \tag{8}$$

per $i \leqq k$.

Identità del II° tipo). Partendo dalle (2″), (3″), (4″) ed applicando il procedimento usato dal prof. Pascal nella Nota: *Su di un invariante*... troviamo:

a). L'espressione:

$$\sum_{\mu=m'}^{m} \sum_{h} \begin{pmatrix} m' \\ m-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_1 \dots j'_{m'-m+p} \, j'_{m'-m+p+1} \dots j'_{m'} \\ h_1 \dots h_{\mu-m+p} \, h_{\mu-m+p+1} \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_{\mu-m+p} \, h_{\mu-m+p+1} \dots h_\mu \\ j_1 \dots j_p \quad j_{p+1} \dots \quad j_m \end{pmatrix}_{yx}$$

ha il valore 1 se è $m = m'$, $j_r = j'_r$: in ogni altro caso ha il valore zero. (Si suppone p diverso da 0 e da m: i sommatori hanno il solito significato).

b). L'espressione:

$$\sum_{\mu=m}^{m'} \sum_{h_1 \dots h_\mu} \begin{pmatrix} j'_1 \dots j'_{m'} \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_\mu \\ j_1 \dots j_m \end{pmatrix}_{yx}$$

vale 1 per $m = m'$, $j_r = j'_r$; zero in ogni altro caso. Le $j'_1 \dots j'_{m'}$, le $j_1 \dots j_m$ e le $h_1 \dots h_\mu$ sono tutte $\leqq k$.

c). L'espressione:

$$\sum_{h_1 \dots h_m} \begin{pmatrix} j'_1 \dots j'_m \\ h_1 \dots h_m \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_m \\ j_1 \dots j_m \end{pmatrix}_{yx}$$

vale 1 per $j_r = j'_r$, zero in ogni altro caso. Le $j'_1 \dots j'_{m'}$, le $j_1 \dots j_m$ e le $h_1 \dots h_m$ sono ora invece tutte $> k$.

§ 4.

Ancora sulla forma del differenziale totale erresiano di una funzione. Alcune identità sui $\delta^{(r)}$.

Veniamo ora a dare l'espressione esplicita del coefficiente $[r_1 \dots r_m]_{\mu,m}$, imitando il procedimento indicato dal prof. Pascal (*).

Partiamo dalla espressione:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\rho=1}^{\mu} \sum_{h_1 \dots h_\rho} \sum_{h_{\rho+1} \dots h_\mu} \binom{\mu}{\rho} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_\rho} \partial y_{h_{\rho+1}} \dots \partial y_{h_\mu}} d y_{h_1} \dots d y_{h_\rho} d y_{h_{\rho+1}} \dots d y_{h_\mu} + \\ &+ \sum_{h_1 \dots h_\mu} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_\mu}} d y_{h_1} \dots d y_{h_\mu} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

(ove le ultime $h_1, \dots, h_\mu$ sono $> k$), e sostituiamo alle derivate rispetto ad y le loro espressioni mediante le derivate rispetto alle x. Dovremo così ottenere il differenziale μ-esimo della f espresso nelle x, cioè:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \binom{m}{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots, \dots \partial x_{j_m}} \sum_{r_1 \dots r_p} [r_1 \dots r_p]_{\mu,m} d^{r_1} x_{j_1} \dots d^{r_p} x_{j_p} d x_{j_{p+1}} \dots d x_{j_m} + \\ &+ \sum_{j_1 \dots j_\mu} \frac{\partial^\mu f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}} d x_{j_1} \dots d x_{j_\mu} \end{aligned}\right.$$

(ove le ultime $j_1 \dots j_\mu$ sono $> k$). D'altra parte eseguendo la sostituzione che ora si è detto, ponendo $\rho = \mu - m + p$ ed osservando che:

$$\sum_{\rho=1}^{\mu} \sum_{m=1}^{\mu} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{\rho=1}^{\mu} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=\mu-m+1}^{m} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=1}^{m}$$

troviamo che la (α) diventa:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\mu} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j} \binom{m}{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots, \dots \partial x_{j_\mu}} \left[\sum_{h} \binom{m-p}{\mu} \begin{pmatrix} j_1 \dots & j_p & j_{p+1} \, j_m \\ h_1 \dots h_{\mu-m+p} & h_{\mu-m+p+1} & h_\mu \end{pmatrix}_{xy} d y_{h_1} \dots d y_{h_m} \right] + \\ &+ \sum_{h_1 \dots h_\mu} \sum_{j_1 \dots j_\mu} \frac{\partial^\mu f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} d y_{h_1} \dots d y_{h_\mu} \end{aligned}$$

dove le j e le h dell'ultima riga, sono al solito, $> k$.

(*) *Su di un invariante simultaneo* ..., pag. 696.

Quindi dovrà essere:

$$d\,x_{j_1}\ldots d\,x_{j_\mu} = \sum_{h_1\ldots h_\mu} \binom{j_1\ldots j_\mu}{h_1\ldots h_\mu} d\,y_{h_1}\ldots d\,y_{h_\mu}$$

$$\sum_{r_1\ldots r_p} [r_1\ldots r_p]_{r,m}\, d^{r_1} x_{j_1}\ldots d^{r_p} x_{j_p}\, d\,x_{j_{p+1}}\ldots d\,x_{j_m} =$$

$$= \sum_{h_1\ldots h_{\mu-m+p}} \sum_{h_{\mu-m+p+1}\ldots h_\mu} \binom{\mu}{m-p} \binom{j_1\ldots j_p,\, j_{p+1}\ldots j_m}{h_1\ldots\ldots,\ldots\ldots h_\mu} d\,y_{h_1}\ldots d\,y_{h_\mu}\,.$$

Ora la prima di queste relazioni è senza altro soddisfatta. Riguardo alla seconda abbiamo, pure immediatamente:

$$d x_{j_{p+1}}\ldots d\,x_{j_m} = \sum_{h_{\mu-m+p+1}\ldots h_\mu} \binom{j_{p+1}\ldots\quad j_m}{h_{\mu-m+p+1}\ldots h_\mu}_{xy} d\,y_{h_{\mu-m+p+1}}\ldots d\,y_{h_\mu}$$

cosicchè essa si riduce a:

$$\sum_{r_1\ldots r_p} [r_1\ldots r_p]_{\mu,m} d^{r_1} x_{j_1}\ldots d^{r_p} x_{j_p} = \sum_{h_1\ldots h_{\mu-m+p}} \binom{j_1\ldots\quad j_p}{h_1\ldots h_{\mu-m+p}}_{xy} d\,y_{h_1}\ldots d\,y_{h_{\mu-m+p}}\,.$$

Ma, come ha dimostrato il prof. PASCAL (*), è:

$$\sum_{h_1\ldots h_{\mu-m+p}} \binom{j_1\ldots\quad j_p}{h_1\ldots h_{\mu-m+p}}_{xy} d\,y_{h_1}\ldots d\,y_{h_{\mu-m+p}} = \sum_{r_1\ldots r_p} \sum_{N^{(\mu-m+p)}_{r_1\ldots r_p}} d^{r_1} x_{j_1}\ldots d^{r_p} x_{j_p}$$

quindi concludiamo:

$$[r_1\ldots r_p]_{r,m} = \binom{r}{m-p} N^{(r\ \ m+p)}_{r_1\cdots r_p}$$

ove, analogamente a quanto già si è detto, il simbolo N rappresenta l'espressione:

$$N^{(r\ \ m+p)}_{r_1\cdots r_p} = \frac{\binom{r-m+p}{r_1}\binom{r-m+p-r_1}{r_2}\cdots\binom{r-m+p-r_1-\cdots-r_{p-1}}{r_p}}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots}$$

le $\rho_1, \rho_2, \ldots$ essendo quei numeri altrove già definiti.

(*) Loc. cit.

Venendo ora a trattare di alcune identità relative ai simboli $\delta^{(r)}$, *incominciamo da quelle* (*) *che si ottengono differenziando l'espressione del differenziale erresimo e paragonando coll'espressione del differenziale* $(r-1)$*-esimo.* Esse sono:

$$\text{per } p=0 \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_{r+1}} = \frac{1}{r+1} S_{j_{r+1}} \delta^{(r)}_{j_1\ldots j_r} d x_{j_{r+1}} \\ &d\,\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_{r+1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{per } p=1\,; \quad \delta^{(r+1)}_{j_1,j_2\ldots j_m} = d\,\delta^{(r)}_{j_1,j_2\ldots j_m}\,; \quad \delta^{(r+1)}_{j_1} = d\,\delta^{(r)}_{j_1}$$

$$\text{per } p=2,\ldots,m \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_m} = \frac{1}{p} S_{j_p} \delta^{(r)}_{j_1\ldots j_{p-1} j_{p+1}\ldots j_m} d x_{j_p} + d\,\delta^{(r)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_m} \\ &\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_m} = \frac{1}{m-p} S_{j_m} \delta^{(r)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_{m-1}} d x_{j_m} \end{aligned} \right\} \left(\text{ove } m=2,\ldots,r\right)$$

$$\left. \begin{aligned} &\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_{r+1}} = \frac{1}{p} S_{j_p} \delta^{(r)}_{j_1\ldots j_{p-1} j_{p+1}\ldots j_{r+1}} d x_{j_p} \\ &\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_{r+1}} = \frac{1}{r-p+1} S_{j_{r+1}} \delta^{(r)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_r} d x_{j_{r+1}} \end{aligned} \right\} \left(\text{ove } m=r+1\right).$$

Queste identità si possono del resto ottenere immediatamente da quelle date dal prof. PASCAL (**).

Così per ottenere la prima del terzo gruppo, basta osservare che si può porre:

$$\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p, j_{p+1}\ldots j_m} = \delta^{(r-m+p+1)}_{j_1\ldots j_p} \; \delta^{(m-p)}_{j_{p+1}\ldots j_m}$$

ove il primo fattore è del tipo dei $\delta^{(r)}$ considerati dal prof. PASCAL, e ad esso sono applicabili le relazioni prima nominate, il secondo è formato in modo semplicissimo mediante soli differenziali primi. Avendosi allora:

$$\delta^{(r+1)}_{j_1\ldots j_p j_{p+1}\ldots j_m} = \delta^{(m-p)}_{j_{p+1}\ldots j_m} \left[d\,\delta^{(r-m+p)}_{j_1\ldots j_p} + \frac{1}{p} S_{j_p} \delta^{(r\ m+p-1)}_{j_1\ldots j_{p-1}} \cdot d x_{j_p} \right]$$

ed osservando che è identicamente:

$$d\,\delta^{(m-p)}_{j_{p+1}\ldots j_m} = 0$$

(*) Cfr. PASCAL, *Introduzione* ..., pag. 329.

(**) Loc. cit., pag. 329.

potremo scrivere:

$$\delta^{(r+1)}_{j_1 \dots j_p j_{p+1} \dots j_m} = d \left[\delta^{(r\ m\ p)}_{j_1 \dots j_p} \cdot \delta^{(m\ p)}_{j_{p+1} \dots j_m} \right] - \frac{1}{p} S_{j_p} \left[\delta^{(r\ m\ p-1)}_{j_1 \dots j_{p\ 1}} \cdot \delta^{(m\ p)}_{j_{p+1} \dots j_m} \right] d\, x_{j_p}$$

che è appunto l'identità che volevamo. Analogamente si potrebbero avere le altre.

Nello stesso modo da un altro gruppo di identità date dal prof. Pascal (*) nella stessa Nota potremmo p. es. ricavare che:

$$\binom{p}{s} \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_p j_{p\ 1} \dots j_m} = \sum_{\sigma = s}^{r-m+s} \binom{r - m + p}{\sigma} \delta^{(\sigma)}_{j_1 \dots j_s} \delta^{(r-\sigma)}_{j_{s+1} \dots j_p j_{p\ 1} \dots j_m} .$$

§ 5.

Trasformazione di una $X^{(r)}$ in una forma del medesimo tipo. Invariante simultaneo di una tale forma e di una alle derivate parziali.

Consideriamo una forma $X^{(r)}$ di quelle definite al § 1. Se vogliamo trasformarla in una dello stesso tipo scritta in nuove variabili $y_1 \dots y_k$ (dipendenti), $y_{k+1} \dots y_n$ (indipendenti: nel senso almeno che si possano considerare costanti i loro differenziali primi), la trasformazione di variabili più generale cui possiamo ricorrere è la (β) definita al § 3. Noi possiamo cioè porre le $x_1 \dots x_k$ funzioni arbitrarie delle $y_1 \dots y_k$, le $x_{k+1} \dots x_n$ funzioni lineari delle $y_{k\ 1} \dots y_n$, sotto le solite condizioni per i determinanti funzionali.

La nostra $X^{(r)}$ allora diventa:

$$\left\{ \begin{aligned} Y^{(r)} \equiv & \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{h_1 \dots h_\varrho} \sum_{h_{\varrho+1} \dots h_\mu} \binom{\mu}{\rho} Y_{h_1 \dots h_\varrho h_{\rho\ 1} \dots h_\mu} \delta^{(r)}_{h_1 \dots h_\rho h_{\rho\ 1} \dots h_\mu} + \\ & + \sum_{h_1 \dots h_r} Y_{h_1 \dots h_r} \delta^{(r)}_{h_1 \dots h_r} \end{aligned} \right.$$

(ove le ultime $h_1 \dots h_r$ sono tutte $> k$, ciò che sempre sottintenderemo) e le Y si esprimono mediante le X come si esprimono le derivate rispetto

(*) Loc. cit., pag. 330.

alle y di una $f(x)$, scritta nelle y, mediante le derivate della f stessa rispetto alle x.

Avremo adunque:

$$(\rho \mid= 0) \quad \left\{ \begin{aligned} &\binom{\mu}{\rho} Y_{h_1 \dots h_\rho\, h_{\rho+1} \dots h_\mu} = \\ &\qquad = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}} \sum_{j_{m-\mu+\rho+1} \dots j_m} \binom{m}{\mu-\rho} X_{j_1, \dots, \dots j_m} \begin{pmatrix} j_1 \dots, \dots j_m \\ h_1 \dots, \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \\ &Y_{h_1 \dots h_r} = \sum_{j_1 \dots j_r} X_{j_1 \dots j_r} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_r \\ h_1 \dots h_r \end{pmatrix}_{xy} \qquad (j_1 \dots j_p > k). \end{aligned} \right.$$

Si consideri ora una forma Ξ alle derivate parziali di ordine r e del tipo speciale:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=1}^{r} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \binom{m}{p} \xi_{j_1 \dots j_p\, j_{p+1} \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots, \dots \partial x_{j_m}} + \\ &+ \sum_{j_1 \dots j_r} \xi_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} \end{aligned} \right.$$

e se ne cerchi la trasformata per la (β), quando si trasformino le derivate. Avremo così una:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\rho=1}^{\mu} \sum_{h_1 \dots h_\rho} \sum_{h_{\rho+1} \dots h_\mu} \binom{\mu}{\rho} \eta_{h_1 \dots h_\rho\, h_{\rho+1} \dots h_\mu} \frac{\partial^m f}{\partial y_{h_1} \dots, \dots \partial y_{h_\mu}} + \\ &+ \sum_{h_1 \dots h_r} \eta_{h_1 \dots h_r} \frac{\partial^r f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_r}} \end{aligned} \right.$$

ove:

$$(\rho \mid= 0) \quad \left\{ \begin{aligned} &\eta_{h_1 \dots h_\rho\, h_{\rho+1} \dots h_\mu} = \\ &\qquad = \sum_{m=\mu}^{r} \sum_{j_1 \dots j_{m-\mu+\rho}\, j_m} \sum_{\mu+\rho+1 \dots j_m} \binom{m}{\mu-\rho} \xi_{j_1, \dots, \dots j_m} \begin{pmatrix} h_1 \dots, \dots h_\mu \\ j_1 \dots, \dots j_m \end{pmatrix}_{yx} \\ &\eta_{h_1 \dots h_r} = \sum_{j_1 \dots j_r} \xi_{j_1 \dots j_r} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix}_{yx} . \end{aligned} \right.$$

Io dico che l'espressione:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Lambda = \sum_{m=1}^{r} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j_1 \dots j_p} \sum_{j_{p+1} \dots j_m} \binom{m}{p} X_{j_1 \dots j_p\, j_{p+1} \dots j_m} \xi_{j_1 \dots j_p\, j_{p+1} \dots j_m} + \\ &\qquad + \sum_{j_1 \dots j_r} X_{j_1 \dots j_r} \xi_{j_1 \dots j_r} \end{aligned} \right.$$

è invariante simultaneo della X e della Ξ rispetto alla (β). Infatti formata l'analoga espressione Λ' nelle Y e nelle η, sostituendo a queste le loro espressioni mediante le X e le ξ usando per queste ultime degli indici diversi onde evitare confusione, osservando che posto $m - \mu + \rho = p$ è identicamente:

$$\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\rho=1}^{\mu}\sum_{m'=1}^{\mu}\sum_{m=1}^{r} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{m'=1}^{m}\sum_{\mu=m'}^{m}\sum_{\rho=1}^{\mu} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{\mu=m}^{m'}\sum_{p=\mu-m+1}^{m}\sum_{m'=1}^{m} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{p=1}^{m}\sum_{m'=1}^{m}\sum_{\mu=m'}^{m}$$

e tenendo presenti le identità del II° tipo date al § 3, si trova $\Lambda' = \Lambda$.

Si può anche supporre che nella Ξ il primo sommatorio vada da 1 ad s ove $s < r$; il Λ corrispondentemente modificato è ancora invariante simultaneo delle due forme.

Per $p = m$ si ritrova quindi il risultato ottenuto dal prof. Pascal nella più volte citata Nota: *Su di un invariante...*

PARTE SECONDA

§ 6.

Le forme differenziali di II.° ordine:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i\, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_j \qquad (k \leq n).$$

Le $X^{(r)}$ considerate nella prima parte, per $r = 2$ acquistano la forma:

$$X^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{k} X_i\, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_j + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_j + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} X_i\, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_i$$

sempre essendo $x_1 \ldots x_k$ le variabili dipendenti, $x_{k+1} \ldots x_n$ le indipendenti, ed essendo le X delle funzioni arbitrarie di tutte le x tali che $X_{ij} = X_{ji}$. Esse sono del tipo del differenziale totale secondo di una $f(x_1 \ldots x_n)$ formato nelle solite ipotesi.

Osserviamo subito però che una forma $X^{(2)}$ come quella ora scritta si può anche considerare sotto un altro punto di vista, e precisamente essa si può considerare come caso particolare della forma:

$$U^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i\, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, d\,x_i\, d\,x_j$$

di quelle considerate dal prof. Pascal (del tipo differenziale secondo di una funzione di tutte variabili dipendenti) quando in quest'ultima si pongano uguali a zero le X ad un solo indice $> k$.

Questa doppia interpretazione è caratteristica del caso di $r = 2$, giacchè in generale una $X^{(r)}$ di quelle da noi considerate non si può considerare come caso particolare di una $X^{(r)}$ di quelle studiate dal prof. Pascal in corrispondenza all'annullarsi di certi coefficenti X, e questo perchè nei termini rimanenti le $\delta_j^{(r)}$ che si avrebbero nel caso di variabili tutte dipendenti differiscono da quelle che si hanno nel nostro caso. Si potrebbe tutto al più osservare che oltre il caso di $r=2$, è anche eccezionale in questo senso il caso di $k=0$; ma non è di ciò che vogliamo qui occuparci.

Interpretando la $X^{(2)}$ sotto il secondo punto di vista, la $X^{(2)}=0$ non può essere completamente integrabile, non può cioè la $X^{(2)}$ moltiplicata per un fattore μ, funzione di tutte le x, ridursi a differenziale secondo di una funzione f delle $x_1 \ldots x_n$ considerate come variabili dipendenti, senza che siano nulle anche quelle X a due indici in cui uno almeno degli indici superi k. Ciò che noi escludiamo.

Considerando invece la $X^{(2)}$ come del tipo dei nostri differenziali secondi, la $X^{(2)}=0$ può essere completamente integrabile, e le condizioni di completa integrabilità sono:

$$\left.\begin{array}{lll} X_i\,((h\,j)) - X_h\,((i\,j)) = 0 & \left(\begin{array}{c} i,\ h \leq k \\ j \text{ qualunque} \end{array}\right) & (1) \\ X_i\,[i\,j\,l] + X_{il}\,((i\,j)) - X_{ij}\,((i\,l)) = 0 & \left(\begin{array}{c} i \leq k \\ j,\ l \text{ qualunque} \end{array}\right) & (2) \\ X_1\,[h\,j\,l] = X_{hl}\,((1\,j)) - X_{hj}\,((1\,l)) & \left(\begin{array}{c} h,\ j > k \\ l \text{ qualunque} \end{array}\right) & (3) \end{array}\right\}$$

mantenendo i simboli:

$$((i\,j)) = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij}\,;\ [i\,j\,l] = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{il}}{\partial x_j}$$

introdotti dal prof. PASCAL (*).

Noi ci asteniamo dall'addentrarci nei dettagli della dimostrazione, come del resto faremo sempre in questa seconda parte che sarà più che altro una raccolta di risultati. Così pure ommettiamo le altre forme che si possono dare alle condizioni di integrabilità.

Mostreremo piuttosto come le (1), (2), (3) *comprendono come casi particolari le condizioni date dal prof.* PASCAL, *nella Memoria nei* Math. Annalen (**) *per*

(*) E. PASCAL, *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni differenziali di II.º ordine*. Annali di Matematica. (3). 7. (1901).

(**) E. PASCAL, *Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2.ter Ordnung*, Math. Ann., Bd. 54.

il caso di una sola variabile dipendente, e nella già citata Memoria degli Annali di Matematica *per il caso di variabili tutte dipendenti.*

Nella Memoria dei *Math. Ann.* si considerano sistemi formati da equazioni differenziali di II.° ordine in cui le variabili dipendenti sono tante quante le equazioni: le equazioni stesse sono risolute rispetto ai differenziali secondi di queste variabili. Quando il sistema si riduce ad una sola equazione, le condizioni ivi contenute si riducono a:

$$\frac{\partial X_{hj}}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{hl}}{\partial x_j} + X_{1k} X_{hj} - X_{1j} X_{hk} = 0 \qquad (j,\ h,\ l = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

(salvo opportuni cambiamenti di lettere: si è supposta poi l'equazione risolta rispetto a $d^2 x_1$). Ora se $k = 1$ noi vediamo appunto che le (1) cessano di aver significato, le (2) valgono solo per $i = 1$ e diventano:

$$\frac{\partial X_{1j}}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{1l}}{\partial x_j} = 0 ; \qquad (j,\ l = 1, \ldots, n)$$

le (3) valgono tutte e vanno scritte (essendo $X_1 = 1$):

$$\frac{\partial X_{hj}}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{hl}}{\partial x_j} + X_{1l} X_{hj} - X_{1j} X_{hl} = 0$$

per $h = 2, \ldots, n$; j, l qualunque purchè non entrambe uguali ad 1. Nell'insieme abbiamo dunque le (4).

Le condizioni poi della Memoria negli *Annali di Matematica* sono in sostanza le (1) e (2) estese a tutti i valori $1, \ldots, n$ delle lettere.

Ora appunto per $k = n$ le (1) e (2) devono essere estese in questo modo, mentre le (3) cessano di aver significato.

La trasformazione della $X^{(2)}$ in un'altra del medesimo tipo in certe nuove variabili y va intesa in due modi differenti secondo il punto di vista sotto cui si considera la $X^{(2)}$ stessa.

Se la $X^{(2)}$ si considera del tipo dei nostri differenziali totali, allora la sua trasformazione va intesa nel modo già detto in generale per la $X^{(r)}$. Dette $(y_1 \ldots y_k)$ le nuove variabili dipendenti, $(y_{k+1} \ldots y_n)$ le indipendenti, la trasformazione di variabili da usarsi è sempre la (β) considerata al § 3.

Se la $X^{(2)}$ si considera nell'altro modo, cioè come caso particolare di un'analoga forma a variabili dipendenti, per trasformarla in un'altra dello stesso tipo nelle variabili $y_1 \dots y_n$ ancora tutte dipendenti, non possiamo intanto ricorrere alla trasformazione generale:

$$x_i = x_i(y_1 \dots y_n) \qquad i = 1, \dots, n$$

(colla solita condizione per l'jacobiano), poichè l'essere nulle le X_i per $i > k$ non è proprietà invariantiva rispetto ad una trasformazione generale di variabili. *Perchè nella trasformata manchino le Y_r per $r > k$, la trasformazione più generale di cui possiamo fare uso è la (α) pure definita al § 3.*

Le formole che esprimono i nuovi coefficienti Y mediante i primitivi X sono rispettivamente:

Nel I.° caso)

$$\begin{cases}
Y_r = \sum_{i=1}^{k} X_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} & (r \leq k \\[2ex]
Y_{rs} = \sum_{i=1}^{k} X_i \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \, \partial y_s} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & (r, s \leq k \\[2ex]
Y_{rs} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} + \dfrac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_r} & \left(\begin{matrix} r \leq k \\ s > k \end{matrix}\right. \\[2ex]
Y_{rs} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_r} + \dfrac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & \left(\begin{matrix} r > k \\ s \leq k \end{matrix}\right. \\[2ex]
Y_{rs} = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & (r, s > k
\end{cases}$$

Nel II.° caso)

$$\begin{cases}
Y_r = \sum_{i=1}^{k} X_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} & (r \leq k \\[2ex]
Y_{rs} = \sum_{i=1}^{k} X_i \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \, \partial y_s} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & (r, s \leq k \\[2ex]
Y_{rs} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} + \dfrac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_r} & \left(\begin{matrix} r \leq k \\ s > k \end{matrix}\right. \\[2ex]
Y_{rs} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_r} + \dfrac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & \left(\begin{matrix} r > k \\ s \leq k \end{matrix}\right. \\[2ex]
Y_{rs} = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_r} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_s} & (r, s > k.
\end{cases}$$

§ 7.

Alcune proprietà relative alle forme considerate nel paragrafo precedente.

Vogliamo ora dare alcune proprietà della forma $X^{(2)}$, considerata nell'uno o nell'altro dei modi detti. Al solito ci limiteremo a dare i risultati.

a). *L'espressione:*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{k} X_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \xi_{ij}$$

è invariante simultaneo della forma:

$$X^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} X_i \, d^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \, d x_i \, d x_j$$

e della forma alle derivate parziali:

$$\Xi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

rispetto alla trasformazione di variabili (β).

Così pure, rispetto alla (β), *la espressione:*

$$\Lambda' = \sum_{i=1}^{k} X_i \xi_i + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \xi_{ij}$$

è invariante simultaneo della solita forma $X^{(2)}$ *e della forma alle derivate parziali:*

$$\Xi' = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

Le proprietà ora dette sono caso particolare di quelle trovate nel caso generale per le $X^{(r)}$ considerate sempre sotto il nostro punto di vista.

b). *L'espressione:*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{k} X_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \xi_{ij}$$

è invariante simultaneo della $X^{(r)}$ *e della forma generale alle derivate parziali di II.° ordine:*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial^2 f}{d x_i \, d x_j}$$

rispetto alla trasformazione di variabili (α).

La dimostrazione è facilissima: essa si fonda sulle identità, relative alla trasformazione (α):

$$\left\{ \begin{array}{ll} i,\ u \leq k), & \displaystyle\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_u} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i = u \\ 0 & \text{se } i \neq u \end{array} \right. \\[2ex] i > k,\ u \leq k), & \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_u} = 0 \\[2ex] i,\ u > k), & \displaystyle\sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_u} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i = u \\ 0 & \text{se } i \neq u \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$i,\ u,\ v = k), \quad \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_u \, \partial x_v} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \, \partial y_s} \frac{\partial y_r \, \partial y_s}{\partial x_u \, \partial x_v} = 0.$$

La proprietà ora esposta (b) è un esempio di proprietà dimostrate dal prof. PASCAL per il caso di variabili dipendenti e che si mantengono anche nel caso che siano nulle le X_i ($i > k$) purchè, in corrispondenza si sostituisca alla trasformazione:

$$x_i = x_i (y_1 \ldots y_n) \qquad (i = 1, \ldots;\ n)$$

la speciale trasformazione (α) più volte considerata. Gli esempii si possono moltiplicare: così ha luogo la proprietà dimostrata dal prof. PASCAL nella Nota: *Un teorema nella teoria invariantiva* ... (*).

Essa assume la forma:

c) *Per la speciale trasformazione di variabili* (α) *sono invarianti le caratteristiche di alcune matrici (sulla determinazione delle quali per brevità non*

(*) *Rend. Ist. Lomb.* (2). 34., pag. 1180.

ci fermeremo) contenute nella matrice totale:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc}
0 & X_1 & \dots & X_k & 0 & \dots & 0 \\
X_1 & (1,\,1) & \dots & (1,\,k) & (1,\,k+1) & \dots & (1,\,n) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
X_k & (k,\,1) & \dots & (k,\,k) & (k,\,k+1) & \dots & (k,\,n) \\
0 & (k+1,\,1) & \dots & (k+1,\,k) & (k+1,\,k+1) & \dots & (k+1,\,n) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & (n,\,1) & \dots & (n,\,k) & 0 & \dots & 0 \\
X_1 & \{1,\,1\} & \dots & \{1,\,k\} & \{1,\,k+1\} & \dots & \{1,\,n\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
X_k & \{k,\,1\} & \dots & \{k,\,k\} & \{k,\,k+1\} & \dots & \{k,\,n\} \\
0 & \{k+1,\,1\} & \dots & \{k+1,k\} & \{k+1,\,k+1\} & \dots & \{k+1,\,n\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \{n,\,1\} & \dots & \{n,\,k\} & \{n,\,k+1\} & \dots & \{n,\,n\} \\
X_{ij} & (i\,j\,1) & \dots & (i\,j\,k) & (i,\,j,\,k+1) & \dots & (i,\,j,\,n)
\end{array} \right\|$$

i cui elementi sono formati mediante i coefficienti X della forma $X^{(2)}$ e precisamente è:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ll}
(i\,j) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} & ;\ (i\,\bar{j}) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} \\[2ex]
(i\,j) = \quad - \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} & ;\ (\bar{i}\,\bar{j}) = 0
\end{array}\right. \\[4ex]
\left\{\begin{array}{ll}
\{i\,j\} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} - 2\,X_{ij} ; & \{i\,\bar{j}\} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - 2\,X_{ij} \\[2ex]
\{\bar{i}\,j\} = \quad \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} - 2\,X_{ij} ; & \{i\,\bar{j}\} = \quad - 2\,X_{ij}
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \begin{array}{l} i,\ j \leq k \\ \bar{i},\ \bar{j} > k \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(i\,j\,h) = \dfrac{\partial X_{ij}}{\partial x_h} - \dfrac{\partial X_{ih}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_{jh}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial^2 X_h}{\partial x_i\,\partial x_j} \\[2ex]
(i\,j\,h) = \dfrac{\partial X_{ij}}{\partial x_h} - \dfrac{\partial X_{ih}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_{jh}}{\partial x_i}
\end{array}\right\} \begin{array}{l} i,\ j = 1, \dots, n \\ h \leq k ;\quad \bar{h} > k. \end{array}$$

Questi elementi non sono altro che quelli considerati dal prof. PASCAL e denotati cogli stessi simboli (*), modificati, in parte, in corrispondenza all'annullarsi di alcune delle X ad un solo indice.

(*) Salvo per il simbolo a tre indici per cui abbiamo tenuto conto della modificazione portata dall'Autore stesso nei suoi lavori posteriori a quello ora citato.

La dimostrazione si può condurre parallelamente a quella data dal prof. PASCAL: i calcoli si presentano però più laboriosi.

Da ultimo vogliamo accennare ad una ricerca che si riferisce alla $X^{(2)}$ considerata del tipo dei nostri differenziali totali di II.° ordine, il problema di riduzione di PFAFF.

d) Ci proponiamo cioè di *trasformare la $X^{(2)}$ nel prodotto di un fattore ρ finito contenente tutte le variabili, per una nuova forma differenziale contenente una variabile di meno. Dobbiamo distinguere due casi secondo che la variabile che vogliamo venga a mancare è una delle dipendenti $(y_1 \dots y_k)$, o una delle indipendenti $(y_{k+1} \dots y_n)$.*

I.° caso). Volendo che manchi per esempio la y_k, devono i coefficienti Y della trasformata essere tali, che siano soddisfatte le relazioni (*):

$$\left\{\begin{array}{lll} Y_k = 0; & Y_{k,r} = 0 & (r = 1, \dots, n) \\ \dfrac{1}{Y_t}\dfrac{\partial Y_t}{\partial y_k} = \rho; & \dfrac{1}{Y_{rs}}\dfrac{\partial Y_{r,s}}{\partial y_k} = \rho & \left(\begin{array}{c} r, s = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ t = 1 \dots k-1 \end{array}\right). \end{array}\right.$$

Tenendo presenti le espressioni già trovate per le Y, si può allora dimostrare che: *affinchè la riduzione sia possibile è necessario e sufficiente che sia $\leq k$ la caratteristica della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni:*

$$\left.\begin{array}{rl} 0 = \sum_{i=1}^{k} X_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} & \\ \rho X_j = \sum_{i=1}^{k} (j\,i) \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} & (j \leq k) \\ \rho X_j = \sum_{i=1}^{k} \{j\,i\} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} & (j \leq k) \\ 0 = \sum_{i=1}^{k} X_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} & (j > k) \\ \rho X_{h,j} = \sum_{i=1}^{k} (hji) \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k} & (h, j = 1, \dots, n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

lineari ed omogenee nelle $k+1$ incognite $\rho, \dfrac{\partial x_1}{\partial y_k}, \dots, \dfrac{\partial x_k}{\partial y_k}$.

Il procedimento poi per procedere alla effettiva riduzione, supposta soddisfatta la condizione ora detta, è analogo a quello indicato dal prof. PASCAL

(*) Cfr. E. PASCAL, *I problemi di riduzione di* PFAFF *e di* JACOBI *nel caso del II.° ordine.* Rend. Acc. Lincei. (5). XII. (1903).

nella Nota citata. Se ρ, $\xi_1, \ldots, \xi_k$ è una soluzione del sistema (1) si formi l'equazione alle derivate parziali:

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

e se ne trovino $k-1$ integrali indipendenti $y_1, \ldots, y_{k-1}$. Presa infine una nuova funzione y_k delle x, arbitraria purchè indipendente dalle $y_1, \ldots, y_{k-1}$, avremo nelle:

$$\left.\begin{array}{ll} y_i = y_i(x_1 \ldots x_k) & ;\ i \leq k \\ y_i = \text{funzioni lineari arbitrarie di } (x_{k+1} \ldots x_n)\,; & i > k \end{array}\right\} \qquad (2)$$

tutte le trasformazioni che risolvono il problema.

II.° caso). Volendo invece che manchi una variabile indipendente, per esempio la y_n, il sistema da considerarsi, analogo al sistema (1) del caso precedente, è:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = \sum_{j=k+1}^{n} X_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial y_n} & (i = 1, \ldots, n) \\ \rho X_i = \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij}\right) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} & (i \leq k) \\ \rho X_{ih} = \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial X_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} & (i, h = 1, \ldots, n) \end{array}\right\} \qquad (1')$$

Nelle formule poi che dànno la risoluzione effettiva del problema risultano arbitrarie le $y_i(x)$ per $i \leq k$, ed è facile vedere come vadano prese le altre $y(x)$: sempre però purchè possano coesistere le (1').

§ 8.

Sistemi di equazioni ai differenziali totali di II.° ordine.

Un sistema di m delle nostre equazioni ai differenziali totali di II.° ordine assume la forma:

$$\sum_{i=k+1}^{n} X_{i,r}\, d^2 x_i + \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{h,j,r}\, d x_h\, d x_j = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

quando si assumano come variabili indipendenti le $x_1 \dots x_k$, come dipendenti le $x_{k+1} \dots x_n$: ciò che noi supporremo per facilitare il confronto coi risultati ottenuti dal prof. PASCAL nelle due citate Memorie degli *Annali di Matematica* e dei *Math. Annalen.*

Ci limiteremo a studiare un tale sistema nell'ipotesi che sia $n - k \geqq m$, e sia inoltre non nullo un minore di ordine m della matrice delle X a due indici. Se per esempio è diverso da zero il minore: $\begin{vmatrix} X_{n-m+1,1} & \dots & X_{n-m+1,m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,m} \end{vmatrix}$ il sistema si può scrivere:

$$\left.\begin{array}{l} d^2 x_{n-m+1} - \sum\limits_{\rho=k+1}^{n-m} X_{\rho,1}\, d^2 x_\rho - \sum\limits_{u=1}^{n} \sum\limits_{v=1}^{n} X_{u,v,1}\, d x_u\, d x_v = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d^2 x_n \quad - \sum\limits_{\rho=k+1}^{n-m} X_{\rho,m}\, d^2 x_\rho - \sum\limits_{u=1}^{n} \sum\limits_{v=1}^{n} X_{u,v,m}\, d x_u\, d x_v = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

ove le X sono certe nuove funzioni di tutte le x, che supponiamo soddisfacenti alle condizioni $X_{u,v,r} = X_{v,u,r}$.

Noi ci riferiremo sempre alla forma (1). Un tale sistema si dirà *completamente integrabile* quando esistono m sistemi linearmente indipendenti di funzioni μ, ed m funzioni φ tali che si abbia:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} & (r = 1, \dots, m) \\ - \sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r X_{\rho,r} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} & (\rho = k+1, \dots, n-m) \\ - \sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,v,r} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_u\, \partial x_v} & (u,\ v = 1, \dots, n). \end{array}\right.$$

Sussisteranno allora le relazioni:

$$- \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,n-m+i,r} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_u} \quad ; (i = 1, \dots, m;\ u = 1, \dots, n) \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,\rho,r} = \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{\rho,r}\right) ; (\rho = k+1, \dots, n-m;\ u = 1, \dots, n) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_u}\left(\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,w,r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_v}\left(\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{v,w,r}\right) ; (u,\ v,\ w = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Delle (4) però, alcune e precisamente quelle in cui $w > k$; $u, v = 1, \ldots, n$ e quelle in cui $u, v > k$ e $w = 1, \ldots, n$ sono conseguenza di quelle dei due primi gruppi (2) e (3).

Vediamo ora quali condizioni per le X derivino dalle (2), (3), (4). Le (3) intanto, tenendo conto delle (2) diventano:

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r \left[\frac{\partial X_{\rho,r}}{\partial x_u} - X_{u,\rho,r} - \sum_{s=1}^{m} X_{\rho,s} X_{u,n-m+s,r} \right] = 0 ; \qquad \begin{pmatrix} \rho = k+1, \ldots, n \\ u = 1, \ldots, \quad n \end{pmatrix}. \tag{a}$$

Queste si possono considerare come $n(n-m-k)$ equazioni lineari omogenee nelle μ. Se il sistema è completamente integrabile, esistono m sistemi di μ: scrivendo allora quelle m delle relazioni precedenti che si hanno per un sistema fisso di valori di ρ ed u, mettendo ogni volta al posto delle μ uno dei sistemi ora nominati, si conclude che devono in corrispondenza essere nulle le quantità in parentesi quadra.

Variando poi ρ, u abbiamo in sostanza le condizioni:

$$((\rho, u, r)) = 0 \qquad (\rho = k+1, \ldots, n-m;\ u = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

mantenendo il simbolo usato dal prof. PASCAL nella Memoria citata:

$$((\rho, u, r)) \equiv \frac{\partial X_{\rho,r}}{\partial x_u} - X_{u,\rho,r} - \sum_{s=1}^{m} X_{\rho,s} X_{u,n-m+s,r} .$$

Altre condizioni ci si presentano come necessarie, applicando alle (2) il procedimento indicato dal prof. PASCAL nella Memoria dei *Math. Annalen.*

Senza entrare in dettagli osserveremo che ci si riduce in sostanza a trovare le condizioni di completa integrabilità del sistema:

$$d\mu_{is} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{u=1}^{n} \mu_{rs} X_{u,n-m+i,r} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

ma, come si sa dalla teoria delle equazioni differenziali di I.° ordine, esse condizioni sono date da:

$$F_u Y_v - F_v Y_u = 0 \qquad (u, v = 1, \ldots, n)$$

$$\text{ove:} \left\{ \begin{aligned} F_u &= \frac{\partial}{\partial x_u} - \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,n-m+i,r} \right] \frac{\partial}{\partial \mu_i} \\ Y_u &= \sum_{t=1}^{m} \left[\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,n-m+t,r} \right] . \end{aligned} \right.$$

Quindi in definitiva abbiamo le condizioni:

$$\Big[u, v, n - m + t, r\Big] = 0 \qquad \begin{pmatrix} u, v = 1, \ldots, n \\ t, r = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{6}$$

avendo mantenuto il simbolo:

$$\Big[u, v, w, r\Big] \equiv \frac{\partial X_{u,w,r}}{\partial x_v} - \frac{\partial X_{v,w,r}}{\partial x_u} + \sum_{s=1}^{m} \Big(X_{u,n-m+s,r} X_{v,w,s} - X_{v,n-m+s,r} X_{u,w,s} \Big).$$

Alle (5) e (6), tenendo conto delle indipendenti fra le (4), dobbiamo aggiungere le

$$[u, v, w, r] = 0 \tag{7}$$

ove w ed almeno uno degli indici u, v non superano k.

Le analoghe condizioni che si avrebbero considerando quelle (4) che sono conseguenza delle (2), (3), sono conseguenza delle condizioni trovate, come era a prevedersi e come si vede subito tenendo conto della relazione identica:

$$[u, v, w, r] + [v, w, u, r] + [w, u, v, r] = 0.$$

Le condizioni (5), (6), (7) trovate finora come necessarie sono poi anche sufficienti.

La dimostrazione, in tutto analoga a quella data dal prof. PASCAL per il caso di tutte variabili dipendenti, si fonda sopra la considerazione del sistema (α) che risulta completamente integrabile quando sono soddisfatte le (6): si fa allora vedere che agli m sistemi di μ che lo soddisfano, corrispondono m funzioni φ integrali del nostro sistema. Precisamente queste funzioni φ ci appaiono dapprima come integrali del sistema di equazioni lineari ai differenziali totali di I.° ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\,x_{n-m+1} - \sum\limits_{\rho=k+1}^{n-m} X_{\rho,1}\, d\,x_\rho = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ d\,x_n - \sum\limits_{\rho=k+1}^{n-m} X_{\rho,m}\, d\,x_\rho = 0 \end{array} \right.$$

(che è completamente integrabile quando sono soddisfatte le (5)) e sono adunque tali che:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+i}} & (i=1,\ldots, m) \\ -\sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r X_{\rho,r} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} & (\rho = \ +1,\ldots, n-m). \end{array}\right.$$

Ma tenendo conto delle (2), (3), che sono soddisfatte poichè sono per ipotesi verificate le (5), (6), e delle (4) cui si risale dalle (7), abbiamo poi anche:

$$-\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{u,v,r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_u \partial x_v}, \qquad (u,\ v=1,\ldots, n)$$

e quindi il sistema dato (1) è completamente integrabile.

Dalle condizioni così trovate in generale possono discendere quelle per i due casi considerati dal prof. PASCAL.

I.° Sia $k=0$. Allora le (5) diventano:

$$((i\,j\,r))=0 \qquad (i=1,\ldots, n-m;\ j=1,\ldots n)$$

le (7) perdono significato, le (6) restano inalterate. Si ritrovano così le due serie di condizioni date dal prof. PASCAL nella più volte citata Memoria degli *Annali di Matematica.*

II.°) Sia $k=n-m$. Allora le (5) perdono significato, le (6) restano inalterate ed insieme colle (7)

$$[i,\ j,\ h,\ r]=0 \quad \text{ove ora} \quad i,\ j=1,\ldots, n;\ h=1,\ldots, n-m$$

si hanno proprio le condizioni trovate dal suddetto Autore nella Memoria nei *Math. Annalen.*

Pavia, estate 1904.

INDICE

Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi.

(Di G. Pavanini, *a Padova.)*

Consideriamo quel notevole caso particolare del problema dei tre corpi, in cui una delle tre masse, che chiameremo P, è trascurabile e non influisce quindi sul moto delle altre due S_1, S_2. Allora S_1 ed S_2 sono dotate d'un moto kepleriano.

I tipi finora studiati di soluzioni periodiche sono:

1.° Soluzioni *piane* (di Hill e Charlier) che hanno luogo vicino alle posizioni d'equilibrio relativo di P rispetto ai due centri mobili S_1, S_2. Queste soluzioni esistono per qualsiasi valore delle masse di S_1 ed S_2.

2.° Soluzioni vicine alle posizioni singolari S_1, S_2.

3.° Soluzioni messe in luce da Poincaré, che hanno un grado di generalità di molto superiore alle precedenti, ma di cui si può rigorosamente dimostrare l'esistenza solo per valori abbastanza piccoli di una delle due masse finite (ad esempio di quella di S_2) rispetto all'altra. Il Poincaré si riferisce alle variabili kepleriane di P rispetto al centro di massa finita S_1. Egli è così condotto a distinguere tre specie di soluzioni periodiche: per quelle della prima specie le inclinazioni sono nulle e le eccentricità piccolissime; per quelle della seconda specie le inclinazioni sono nulle e le eccentricità finite; infine, per quelle di terza specie, le inclinazioni non sono più nulle.

Le soluzioni del primo tipo (cioè quelle che hanno luogo nell'intorno di una posizione di equilibrio) sono intimamente legate (almeno quando si consideri la massa di S_2 abbastanza piccola) alle soluzioni di seconda specie di Poincaré.

Quelle del secondo tipo hanno interesse puramente analitico e non sembrano suscettibili di applicazioni astronomiche perchè i corpi celesti non sono punti materiali e la rappresentazione matematica cessa di essere attendibile allorquando le mutue distanze scendono al disotto di un certo limite.

Restando così nell'ambito delle possibili applicazioni possiamo asserire che le soluzioni scoperte da POINCARÉ comprendono (se non altro qualitativamente) tutte quelle conosciute finora.

Argomento della presente Memoria è invece di provare l'esistenza di una categoria di soluzioni periodiche, bene distinta (per quanto meno ampia e meno importante) da quelle studiate fino ad oggi. Mi propongo cioè di mostrare che hanno luogo soluzioni periodiche non piane nell'ipotesi che le due masse finite di S_1 ed S_2 differiscano poco fra loro.

Rappresento queste due masse rispettivamente con $\frac{1}{2} - \mu$ ed $\frac{1}{2} + \mu$ e suppongo che S_1, S_2 ruotino uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O (moto questo il più semplice compatibile con la legge di NEWTON). Così S_1 ed S_2 si muovono costantemente in un piano ϖ.

Studio dapprima il caso particolare in cui le due masse finite sono eguali, in cui cioè $\mu = 0$; suppongo inoltre che P si trovi inizialmente sulla perpendicolare condotta per O al piano ϖ, e che abbia la sua velocità iniziale diretta secondo questa perpendicolare. In questa ipotesi riconosco con facilità — ed è il contenuto della prima parte della presente Memoria — che, quando si limitino convenientemente i valori dell'energia totale E, il moto di P avviene lungo la sopradetta perpendicolare fra due limiti simmetrici rispetto al centro di gravità, limiti che sono nulli per $E = -2$, e tendono all'infinito quando E tende a 0. Così ci troviamo in presenza di un moto che è del tipo di quegli armonici.

Semplici considerazioni sull'equazioni del movimento mostrano che il moto di P è periodico. L'integrazione effettiva permette poi di constatare una doppia periodicità e fornisce il valore, particolarmente importante per il seguito della ricerca, del periodo reale T.

Nella seconda parte passo a considerare il moto di P quando le due masse di S_1 e di S_2 non sono più eguali, quando cioè μ è diverso da 0. In questo caso, mi domando, esistono soluzioni periodiche vicine alle oscillazioni rettilinee testè accennate, cioè corrispondenti all'ipotesi di $\mu = 0$? I risultati, a cui giungo, equivalgono ad una risposta affermativa alla questione propostami.

Rigorosamente posso dimostrare l'esistenza di tali soluzioni quando suppongo

$$E = -2 + \varepsilon$$

con ε positivo e sufficentemente piccolo, e μ poco diverso da 0. Più specificatamente, poichè, come già accenammo, quando $\mu = 0$ ed $E = -2$ il centro di gravità del sistema S_1, S_2 è una posizione d'equilibrio stabile per P, ne segue che alle soluzioni periodiche delle quali posso provare con tutto rigore l'esistenza, corrispondono delle orbite chiuse che di poco s'allontanano dal centro di gravità O.

Nelle classiche ricerche di Poincaré si presenta la circostanza favorevole che si sa integrare il sistema di equazioni differenziali per $\mu = 0$, cosicchè, trovato che per questo valore di μ esistono delle soluzioni periodiche, la dimostrazione dell'esistenza di tali soluzioni anche per μ diverso da 0, non richiede che una semplice verifica materiale. Nel mio caso invece le equazioni del moto non sono integrabili per $\mu = 0$, e quindi per raggiungere il mio scopo devo ricorrere a speciali artifici.

Arrivo così a mettere in evidenza una duplice infinità di soluzioni periodiche.

Il problema che mi sono proposto di trattare non è puramente teorico, ma esso trova la sua applicazione nel caso, considerato in Astronomia, delle stelle doppie.

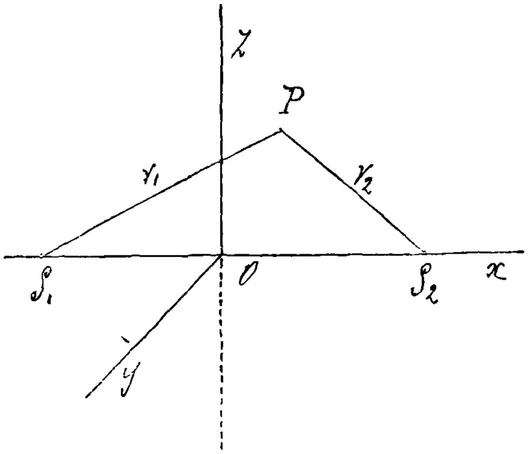
Effettivamente, si considerino due corpi celesti (stelle) di masse pressochè eguali e si supponga che essi esercitino la loro azione attrattiva su un asteroide, sul quale non agiscano forze ulteriori. Si supponga ancora che questo asteroide si trovi inizialmente poco discosto dalla perpendicolare condotta per il centro di gravità del sistema delle due stelle al loro piano del movimento, ed allora saremo condotti al caso da noi trattato.

Equazioni del moto.

1. Due corpi (stelle) S_1 ed S_2, di masse m_1, m_2 rispettivamente eguali ad $\frac{1}{2} - \mu$, $\frac{1}{2} + \mu$ ruotano uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O (moto questo il più semplice compatibile con la legge di Newton). Così S_1 ed S_2 si muovono costantemente in un piano ϖ. La distanza costante $\overline{S_1 S_2}$ l'assumeremo quale unità di lunghezza, e disporremo dell'unità di tempo in modo che la costante di Gauss risulti eguale all'unità: ne segue allora

che anche la velocità angolare (*moto medio*) con la quale la retta $\overline{S_1 S_2}$ ruota attorno ad O sarà eguale ad uno.

Consideriamo un sistema di assi $O\,x\,y\,z$, uniformemente ruotante attorno all'asse z, aventi l'origine in O, il piano ϖ per piano $z=0$, e la direzione



positiva dell'asse x coincidente con $O\,S_2$; il verso della rotazione sia $x \rightarrow y$.

Rispetto a questo sistema di assi le coordinate di S_1, S_2 saranno:

$$-\left(\frac{1}{2}+\mu\right),\ 0,\ 0;\quad \frac{1}{2}-\mu,\ 0,\ 0.$$

Un terzo corpo P di massa trascurabile, sia soggetto all'attrazione di S_1 ed S_2. Indichiamo con r_1 ed r_2 le distanze di P da S_1, S_2, mentre x, y, z rappresentino le sue coordinate rispetto al sistema $O\,x\,y\,z$, cosicchè

$$r_1 = \left|\sqrt{\left(x+\mu+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2}\,\right|,$$

$$r_2 = \left|\sqrt{\left(x+\mu-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2}\,\right|.$$

Il potenziale unitario delle forze agenti su P è

$$U=\frac{\frac{1}{2}-\mu}{r_1}+\frac{\frac{1}{2}+\mu}{r_2}.$$

Assunti nel modo detto il sistema di assi mobili e ricordando che nel nostro caso il moto medio è eguale all'unità, dal teorema di Coriolis si ha che le componenti dell'accelerazione assoluta del moto di P sono date dalle seguenti espressioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Le equazioni del moto risultano dall'eguagliare l'accelerazione assoluta alla forza unitaria; nel problema proposto saranno adunque:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} + x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y} + y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

PARTE PRIMA

2. Cominciamo dal considerare il caso nel quale $\mu = 0$ e quindi

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2},$$

$$\overline{O S_1} = \overline{O S_2}.$$

Supponiamo inoltre che il mobile P si trovi inizialmente sull'asse z e che secondo quest'asse sia diretta la sua velocità iniziale. Le attrazioni esercitate da S_1, S_2 ammettono perciò una risultante pur essa costantemente diretta secondo l'asse z.

Il moto di P sarà quindi definito in questo caso dalle equazioni

$$x = y = 0,$$

$$z'' = \frac{\partial U}{\partial z},$$

dove

$$U = \frac{1}{r},$$

essendo

$$r = r_1 = r_2 = \left| \sqrt{\frac{1}{4} + z^2} \right|.$$

Avremo dunque

$$z'' = - \frac{8 z}{(1 + 4 z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posto

$$z^2 = \zeta,$$

si ha

$$2 z z' \, d t = d \zeta,$$

e, moltiplicando la precedente equazione differenziale per $z' \, d\, t$, si ottiene

$$\frac{1}{2} d\, z'^2 = - \frac{4\, d\, \zeta}{(1+4\,\zeta)^{\frac{3}{2}}} = 2\, d\, (1+4\,\zeta)^{-\frac{1}{2}},$$

dalla quale

$$\frac{1}{2} z'^2 = \frac{2}{\sqrt{1+4\,z^2}} + E, \qquad (2)$$

dove E (costante d'integrazione) non è altro che l'*energia totale.*

3. La (2) esprime il modo di variare della velocità di P relativamente alla sua posizione ed all'energia totale.

Per $E > 0$ il secondo membro della (2), qualunque sia z, non s'annulla mai, cioè la velocità si mantiene sempre diversa da 0. Perciò P si muoverà costantemente nella medesima direzione, dipendente dalla sua velocità iniziale. In ogni caso esso s'allontanerà sempre indefinitamente, dalla sua posizione corrispondente a $t = 0$.

Quando invece $E < -2$ la (2) non può mai essere soddisfatta da valori reali di z e z'. Basta osservare che il suo primo membro è sempre positivo, mentre il secondo, essendo $\frac{2}{\sqrt{1+4\,z^2}}$ compreso fra 0 e 2, al variare di z, risulterebbe sempre negativo.

Nel caso infine di

$$-2 < E < 0$$

esistono due valori finiti di z eguali e di segno opposto

$$z_0 = \frac{\sqrt{4 - E^2}}{2\,E} \quad \text{e} \quad -z_0,$$

che annullano z' e costituiscono i limiti fra i quali è compreso il moto di P. Essi sono cioè, com'è ben noto, il massimo ed il minimo di z: se ne può avere la conferma osservando i segni di z'' per questi valori di z. In ogni posizione intermedia fra $-z_0$ e z_0, z deve essere crescente o decrescente, quindi il moto non cambia di direzione che nelle posizioni estreme. Per $E = 0$, z_0 e $-z_0$ sono rispettivamente eguali a $+\infty$ e $-\infty$; mentre per $E = -2$ questi due limiti si riducono eguali a 0. Ne segue in questa seconda ipotesi, che il centro di gravità del sistema S_1, S_2 è una posizione di equilibrio stabile per il mobile P.

I valori dell'energia totale che noi considereremo d'ora in avanti (e lo diciamo una volta per sempre) saranno solamente quelli che soddisfano alla relazione

$$-2 < E < 0,$$

perchè solo in questo caso il moto presenta effettivo interesse.

4. Vediamo ora di studiare il carattere del moto di P lungo l'asse z compreso fra i due limiti simmetrici rispetto all'origine z_0 e $-z_0$. Proveremo che questo moto è periodico e ne determineremo nello stesso tempo anche il periodo.

A tale scopo poniamo

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} = p + \frac{1}{6}E, \tag{3}$$

od anche

$$\frac{1}{\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2} = 1 + 4z^2,$$

che derivata rapporto a t da:

$$-\frac{1}{\left(p+\frac{1}{6}E\right)^3}\frac{dp}{dt} = 4zz',$$

dalla quale, tenendo conto anche della (2),

$$z'^2 = \frac{1}{16\left(p+\frac{1}{6}E\right)^6 z^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\left(p+\frac{1}{6}E\right)^4 \left\{1-\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2\right\}}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = -4\left(p+\frac{1}{6}E\right) + 2E$$

perciò

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = 4\left(p+\frac{1}{6}E\right)^4 \left\{1 - \left(p+\frac{1}{6}E\right)^2\right\}\left\{-4\left(p+\frac{1}{6}E\right)+2E\right\}$$

ed infine

$$\frac{dp}{dt} = 2\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2 \sqrt{4p^3 - \left(4+\frac{1}{3}E^2\right)p - \frac{1}{3}E\left(\frac{1}{9}E^2 - 4\right)}.$$

Lo studio del moto si fa nel modo migliore introducendo una variabile ausiliaria definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{4p^2 - g_2 p - g_3},$$

dove

$$g_2 = 4 + \frac{1}{3} E^2, \qquad g_3 = \frac{1}{3} E\left(\frac{1}{9} E^2 - 4\right).$$

Da questa posizione risulta che la p si può risguardare come la funzione ellittica di WEIRSTRASS, gl'invarianti della quale sono g_2 e g_3. Perciò p è funzione doppiamente periodica di u.

È noto che la determinazione dei suoi periodi 2ω e $2\omega'$ è sempre possibile eccettuato allora che il determinante

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$$

è nullo, caso limite nel quale la funzione ellittica degenera in funzione circolare od iperbolica.

Fra poco prenderemo in esame questo caso. Ora osserviamo invece che le radici dell'equazione

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 0$$

disposte per ordine di grandezza sono:

$$e_1 = 1 - \frac{1}{6} E, \quad e_2 = \frac{1}{3} E, \quad e_3 = -\left(1 + \frac{1}{6} E\right):$$

quindi, per valori reali di E (soli valori da noi considerati), esse pure sono reali, perciò Δ dev'essere sempre positivo.

In queste condizioni i due periodi sono l'uno reale l'altro puramente immaginario, determinati dalle formule

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}, \qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Notiamo ancora come i valori di p definiti dalla (3) sono compresi fra e_2 ed e_3 poichè dovendo essere

$$-4\left(p + \frac{1}{6} E\right) + 2E \geqq 0,$$

sarà:

$$p \leqq \frac{1}{3} E = e_2 ;$$

inoltre p assume il suo valore minimo quando $z = 0$, ed allora dalla (3)

$$p = -\left(1 + \frac{1}{6} E\right) = e_3 :$$

perciò

$$e_3 \leqq p \leqq e_2 .$$

Segue da questa relazione e ponendo mente ai valori di p nel parallelogramma dei periodi, che

$$u = \omega' + \xi$$

essendo ξ una variabile reale. Questa conclusione ci servirà fra poco in una importante *Osservazione.*

Prescindiamo ora dai limiti fra i quali sono compresi i valori di p e dalla forma della variabile u: teniamo solo presente che possiamo considerare la p come la funzione del WEIRSTRASS di cui sono assegnati gl'invarianti. Poichè p è allora doppiamente periodica rispetto ad u, la (3) sta a dire che anche z gode della medesima proprietà considerata quale funzione implicita di u. Vediamo come si possa dedurre da questo fatto che z è funzione periodica, anzi doppiamente periodica, del tempo.

Essendo

$$\frac{dp}{dt} = 2\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2 \sqrt{4 p^3 - g_2 p - g_3} ,$$

si ha

$$\frac{du}{dt} = 2\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2 :$$

così il tempo si può ritenere funzione di u e perciò, integrando l'ultima relazione scritta rispetto a questa variabile, abbiamo

$$2 t = \int \frac{d u}{\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2} + C. \tag{4}$$

Per determinare questo integrale introdurremo un'argomento v che soddisfi alla relazione

$$p v = - \frac{1}{6} E.$$

Sappiamo che nel parallelogramma dei periodi vi sono due valori di v per i quali la p assume un valore determinato, che corrispondono a valori di p' eguali e di segno opposto. Ricordando che

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)^2 = 4\,(p - e_1)\,(p - e_2)\,(p - e_3),$$

per $p = -\frac{1}{6}E$, essendo ancora $-\frac{1}{6}E = -\frac{1}{2}e_2$ avremo

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)^2 = 4\left(-\frac{e_2}{2} - e_1\right)\left(-\frac{e_2}{2} - e_2\right)\left(-\frac{e_2}{2} - e_3\right) =$$

$$= 6\,e_2\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)\left(e_3 + \frac{e_2}{2}\right),$$

dalla quale

$$p'^2\,v = 6\,e_2\,.$$

Per quanto osservammo ora, si può assumere tanto $p'\,v = +\sqrt{6\,e_2}$ come $p'\,v = -\sqrt{6\,e_2}$ e ne risulterà in ogni caso un determinato argomento v tale che per $p\,v = -\frac{1}{6}E$. Se noi però ci limitiamo a considerare il parallelogrammo o, ω, $\omega + \omega'$, o vediamo che v deve essere compreso fra ω ed $\omega + \omega'$, essendo

$$p\,\omega = e_1\,, \quad p\,(\omega + \omega') = e_2\,, \quad p\,\omega' = e_3$$

ed

$$e_2 < -\frac{e_2}{2} < e_1\,.$$

Questa limitazione corrisponde all'assumere $p'\,v = +\sqrt{6\,e_2}$ poichè fra ω ed $\omega + \omega'$ $p'\,v$ è sempre positivo.

Una volta assunto questo valore bene precisato di v, ricordando dalla teoria delle funzioni ellittiche che

$$\frac{1}{p\,u - p\,v} = \frac{1}{p'\,v}\left\{\zeta\,(u - v) - \zeta\,(u + v) + 2\,\zeta\,v\right\},$$

derivando questa relazione rapporto a v, ricaviamo la formula

$$\frac{p'\,v}{(p\,u - p\,v)^2} = \frac{1}{p'\,v}\left\{p\,(u - v) + p\,(u + v) - 2\,p\,v\right\} -$$

$$-\frac{p''\,v}{p'^2\,v}\left\{\zeta\,(u - v) - \zeta\,(u + v) + 2\,\zeta\,v\right\},$$

coll'aiuto della quale possiamo subito integrare la (4).

Avremo cioè

$$2t = \int \frac{du}{\left(pu + \frac{1}{6}E\right)^2} + C = \int \frac{du}{(pu - pv)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{p'^2 v} \left\{ \frac{p'' v}{p' v} \left(\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v \right) - \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2upv \right\} + C.$$

Poichè

$$\zeta(u-v) + \zeta(u+v) = \frac{p'' u}{pu - pv} + 2\zeta u,$$

l'espressione di t in funzione di u sarà

$$2t = \frac{1}{p'^2 v} \left\{ \frac{p'' v}{p' v} \left(\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v \right) - \frac{p' u}{pu - pv} - 2\zeta u \right\} + \frac{1}{6} u + C.$$

Quando si aumenta u del suo periodo 2ω chiamando T il corrispondente aumento di t, avremo

$$2T = \frac{1}{p'^2 v} \left\{ \frac{p'' v}{p' v} \left[\log e^{4\eta v} - 4\omega\zeta v \right] - 4\eta \right\} + \frac{\omega}{3},$$

cioè

$$T = \frac{2}{p'^2 v} \left\{ \frac{p'' v}{p' v} (\eta v - \omega\zeta v) - \eta \right\} + \frac{\omega}{6}$$

dove $\eta = \zeta\omega$.

Dunque ad un aumento di u corrispondente al suo periodo reale, t aumenta di una quantità costante, poichè T non dipende da u. Ma abbiamo già osservato che z è funzione periodica di u, quindi l'intervallo di tempo necessario perchè z riprenda un suo valore al variare di u è costante, cioè z è funzione periodica di t e T ne è il suo periodo.

Risultati analoghi si otterebbero col medesimo procedimento, se si studiasse il comportamento di z rispetto a $2\omega'$. Essendo però questo periodo puramente immaginario lo studio di z rispetto a $2\omega'$ non presenta alcun pratico interesse.

Ad ogni modo possiamo affermare essere z funzione doppiamente periodica del tempo.

Oltre a z anche l'accelerazione e la velocità sono funzioni periodiche del tempo; basta osservare le loro espressioni in funzione di z. Di più, in z_0 e $-z_0$ cioè nei punti estremi la velocità è nulla, mentre l'accelerazione è massima (considerando il suo valore assoluto); il fatto inverso succede invece per $z=0$.

Da tutto questo si conclude che la soluzione del problema nel caso in considerazione ($\mu=0$ ed $-2<E<0$) è periodica ed il moto di P si presenta del tipo dei moti armonici.

La sua decomposizione in moti armonici elementari si può avere mediante la serie di Fourier, che inoltre dà anche l'espressione di z in funzione del tempo cioè

$$z^2 = a_0 + \sum_1^\infty {}_n \left\{ a_n \cos \frac{n \pi t}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi t}{T} \right\},$$

dove i coefficienti hanno espressioni bene determinate.

5. *Osservazione.* — Poichè il discriminante della funzione di Weirstrass è

$$\Delta = 16\, (e_1 - e_2)^2\, (e_2 - e_3)^2\, (e_3 - e_1)^2,$$

per i nostri valori delle radici avremo:

$$\Delta = 64 \left(1 - \frac{1}{2} E\right)^4 .$$

Da questa espressione di Δ ne segue che per

$$E = \pm 2$$

Δ s'annulla.

Ha per noi grande importanza, per quanto tratteremo fra breve, il caso di $E=-2$, nel quale come notammo, il centro di gravità rappresenta per P una posizione di equilibrio stabile.

Determiniamo il valore limite di T quando E converge a -2. Questo calcolo si può fare direttamente nella espressione di T già ottenuta, ma si raggiunge più presto lo scopo considerando che per $E=-2$, $\Delta=0$ e quindi p degenera in funzione circolare e propriamente

$$p\,u = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi\, u}{2\,\omega}\right)};$$

essendo

$$\left(\frac{2\,\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{2\, g_2}{9\, g_3}.$$

Per $E = -2$

$$g_2 = \frac{16}{3}, \quad g_3 = \frac{64}{27}$$

e perciò

$$p\,u = -\frac{2}{3} + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\,u}.$$

Abbiamo visto essere

$$2\,T = \int_u^{u+2\omega} \frac{d\,u}{\left(p + \frac{1}{6}E\right)^2}$$

ed avendo notato che

$$u = \omega + \xi$$

con ξ reale, avremo

$$2\,T = \int_0^{2\omega} \frac{d\,\xi}{\left(p + \frac{1}{6}E\right)^2}.$$

Sostituendo a p il suo valore nel caso di degenerazione, e notando che allora $\omega' = \infty$ e quindi $\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\,(\omega' + \xi) = \infty$,

$$2\,T = \int_0^{2\omega} \frac{d\,\xi}{\left\{-1 + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\,(\omega' + \xi)}\right\}^2} = \int_0^{2\omega'} d\,\xi,$$

cioè

$$T = \omega,$$

od anche, ricordando il valore di ω in questo caso di degenerazione,

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

T adunque ha un limite diverso da 0 al convergere di E verso -2, quando cioè il moto degenera in posizione d'equilibrio.

Questa osservazione ci permetterà di asserire l'esistenza di soluzioni periodiche anche quando μ è diverso da 0.

PARTE SECONDA

6. In questa seconda parte prendiamo in esame il caso di μ diverso da 0.

Il moto di P è allora definito dalle equazioni (1). Vediamo di scrivere queste equazioni sotto forma canonica.

Le (1) ammettono l'integrale di Jacobi

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-U-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=-C,$$

il quale poi non è altro che l'integrale delle forze vive nel moto relativo.

Poniamo

$$x=x_1, \qquad y=x_2, \qquad z=x_3$$

$$\frac{dx}{dt}-y=y_1, \quad \frac{dy}{dt}+x=y_2, \quad \frac{dz}{dt}=y_3,$$

$$F=\frac{1}{2}(y_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(y_2-x_1)^2+\frac{1}{2}y_3^2-U-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$$

allora le equazioni del moto si scrivono sotto la forma canonica cercata:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial y_i},\\ & \qquad\qquad (i=1,\,2,\,3)\\ \frac{dy_i}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial x_i}.\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Abbiamo già visto come nel caso di $\mu=0$ le equazioni del movimento ammettono (per ciascun valore dell'energia totale E compreso fra 0 e -2) una soluzione periodica Ω_0 di periodo T, alla quale corrisponde un moto di P lungo l'asse z compreso fra due limiti simmetrici rispetto all'origine. Durante un tale movimento le coordinate x ed y e quindi le variabili canoniche x_1, x_2 sono sempre nulle: è poi

$$z = x_3 = \varphi(t), \qquad z' = y_3 = \varphi'(t),$$

indicando con φ una funzione del tempo che s'annulla solo nell'origine, mentre la sua derivata φ' s'annulla solo per i valori estremi di z.

Assunto l'istante in cui il mobile passa per O quale origine del tempo, alla soluzione Ω_0 appartengono i valori iniziali

$$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0 \qquad y_3 = \varphi'(0).$$

Consideriamo ora, sempre supposto $\mu = 0$, una soluzione Σ_0 delle (1') infinitamente vicina alla Ω_0, i cui valori iniziali sieno

$$\begin{array}{lll} x_1 = \beta_1 & x_2 = \beta_2 & x_3 = \beta_3 \\ y_1 = \beta_4 & y_2 = \beta_5 & y_3 = \varphi'(0) + \beta_6, \end{array}$$

essendo le β poco diverse da 0.

Nella Σ_0 le x_i ed y_i risulteranno funzioni regolari dei valori iniziali suddetti. In un generico istante t, avremo per ciò dei sviluppi ordinati secondo le potenze di β del tipo

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \xi_i + R_i, \\ x_3 &= \varphi(t) + \xi_3 + R_3, \\ && (i = 1,\ 2 \quad j = 4,\ 5) \\ y_i &= \eta_i + R_j, \\ y_3 &= y'(t) + \eta_3 + R_6, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

rappresentando le ξ ed η i termini di primo ordine nelle β, mentre le R indicano i termini d'ordine superiore.

Consideriamo infine per $\mu \neq 0$ una soluzione Σ del nostro sistema di equazioni, tale che per $\mu = 0$ essa si riduca alla soluzione Σ_0. Avremo allora per la Σ

$$x_i = x_i(\mu,\ \beta,\ t),$$

$$y_i = y_i(\mu,\ \beta,\ t).$$

7. Proponiamoci ora di riconoscere se possono essere soddisfatte le condizioni perchè Σ risulti una soluzione periodica di periodo $T + \tau$.

Perchè ciò sia, posto

$$\begin{aligned} x_i(\mu, \beta, T+\tau) - x_i(\mu, \beta, 0) &= \psi_i \\ y_i(\mu, \beta, T+\tau) - y_i(\mu, \beta, 0) &= \psi_j, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 4, 5, 6 \end{pmatrix}$$

dovremo avere

$$\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_6 = 0. \tag{6}$$

Le ψ risultano funzioni olomorfe di μ, delle β e di τ annullantesi con queste quantità.

Le (6) non sono tutte indipendenti fra loro, perchè il sistema (1′) ammette l'integrale di JACOBI

$$F = -C;$$

cosicchè soddisfatte le $\psi_i = 0$ ad esempio per $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sarà soddisfatta anche la $\psi_6 = 0$ (*).

Abbiamo dunque da considerare un sistema di cinque equazioni con sette incognite $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6, \tau)$. È ben noto che in tale caso, per μ sufficentemente piccolo, esso ammette una soluzione, nella quale tutti i valori delle incognite sono nulle, se uno qualunque dei minori di quarto ordine della matrice funzionale

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_6} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_6} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_5}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_5}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_5}{\partial \beta_6} & \frac{\partial \psi_5}{\partial \tau} \end{matrix} \right\|$$

(*) ψ_6 rappresenta l'incremento di y_3 (cioè di z) quando si passa da $t = 0$ a $t = T + \tau$. L'essere $\psi_6 = 0$ significa che y_3 è funzione periodica di t. Benchè, per $F = -C$, la $\psi_6 = 0$ sia soddisfatta quando sono soddisfatte le relazioni $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_5 = 0$, tuttavia avendo dalla $F = -C$

$$y_3^2 = 2U + x_1^2 + x_2^2 - (y_1 + x_2)^2 - (y_2 - x_1)^2 - 2C,$$

può sembrare ambiguo se dopo un periodo $T + \tau$, y_3 riprenda il valore iniziale, o lo riprenda con segno cambiato. Il dubbio è tolto però se si nota che nella Ω_0, y_3, ad intervalli di tempo eguali al suo periodo riprende il suo valore iniziale, e quindi anche nella soluzione vicina Σ, y_3 riprenderà il suo valore iniziale che differisce da 0 di una quantità finita.

Era opportuno chiarire questo fatto.

è diverso da 0 per $\mu = \beta_1 = \tau = 0$. I valori di β e τ che allora si ricaveranno, sono funzioni regolari di μ che s'annullano con questo parametro.

Ammessa soddisfatta questa condizione, la traiettoria del moto corrispondente alla soluzione periodica che allora si potrà ricavare, differirà di poco da quella corrispondente Ω_0. Siccome in questa P si muove lungo l'asse z, fra due limiti simmetrici, ed a distanza finita rispetto all'origine, la traiettoria della soluzione periodica che cerchiamo attraverserà il piano $z = 0$. Assumiamo questo istante come origine del tempo: ne risulterà

$$\beta_3 = 0.$$

Può sembrare che l'introduzione arbitraria dell'equazione $\beta = 0$, diminuisca la generalità, e che non si possa trovare così che le soluzioni periodiche tali che β_3 sia nullo per $t = 0$.

Ma noi otterremo tutte le altre cambiando t in $t + h$, h essendo una costante qualunque.

Siamo ridotti intanto ad un sistema di cinque equazioni

$$\psi_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3.\ 4,\ 5)$$

a sei incognite. Vediamo se è possibile risolvere questo sistema rispetto a 5 delle 6 incognite, ad esempio rispetto a

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \tau,$$

assumendo invece ad arbitrio il valore di β_6, purchè sufficentemente piccolo.

Basterà perciò che sia diverso da 0 il determinante funzionale

$$\frac{\partial\,(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4\,\psi_5)}{\partial\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5\,\tau)}$$

quando si faccia

$$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \tau = 0.$$

Per calcolare questo determinante possiamo porre addirittura nelle ψ, $\mu = 0$, allora

$$\begin{aligned} \psi_i &= \xi_i + R_i - \beta_i, \\ \psi_j &= \eta_i + R_j - \beta_j, \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ j = 4,\ 5 \end{pmatrix} \\ \psi_3 &= \varphi\,(T + \tau) + \xi_3 + R_3 - \beta_3 \end{aligned}$$

e quindi il determinante in parola (dovendo porre in esso, come dicemmo,

$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \tau = 0$) si riduce al prodotto

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial (\psi_1\, \psi_2\, \psi_4\, \psi_5)}{\partial (\beta_1\, \beta_2\, \beta_4\, \beta_5)},$$

dove, per $\tau = 0$,

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} = \varphi'(T) = \varphi'(0) \neq 0.$$

Rimane da provare che

$$\Delta = \frac{\partial (\psi_1\, \psi_2\, \psi_4\, \psi_5)}{\partial (\beta_1\, \beta_2\, \beta_4\, \beta_5)}$$

è pur esso diverso da 0.

Ponendo ora nelle ψ anche $\tau = 0$ avremo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_1} - 1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_2} - 1 & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_4} - 1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_5} - 1 \end{vmatrix}.$$

(Si noti che nell'espressione ora scritta di Δ abbiamo ommesso i termini che provengono dalle R, perchè essi contengono le β almeno al primo grado e quindi s'annullano quando si pone $\beta_i = 0$. Così possiamo, per il nostro scopo, prescindere senz'altro dal considerare questi termini.)

8. Per lo studio di questo determinante fa d'uopo conoscere le ξ e le η. A tale scopo riprendiamo le espressioni (5) delle x_i, y_i, sostituiamole nelle (1′) ed eguagliamo i termini di primo grado nelle β. Si trova senza difficoltà

$$\frac{d\,\xi_i}{d\,t} = \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d\,y_i\, d\,x_k}\right) \xi_k + \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d\,y_i\, d\,x_k}\right) \eta_k,$$

$$\frac{d\,\eta_i}{d\,t} = -\,\Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d\,x_i\, d\,y_k}\right) \xi_k - \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d\,x_i\, d\,y_k}\right) \eta_k,$$

dove le derivate racchiuse fra parentesi s'intendono prese relativamente alla soluzione Ω_0, cioè si deve porre in esse

$$\mu = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$$

mentre x_3 ed y_3 vanno sostituite con $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$.

Le equazioni differenziali sopra scritte non sono che le *equazioni alle variazioni* delle equazioni (1'). Da esse si ottiene come subito si verifica

$$\frac{d\,\xi_i}{d\,t} = \xi_2 + \eta_1\,, \qquad \frac{d\,\xi_2}{d\,t} = -\,\xi_1 + \eta_2\,, \qquad \frac{d\,\xi_3}{d\,t} = \eta_3\,,$$

$$\frac{d\,\eta_1}{d\,t} = P_1\,\xi_1 + \eta_2\,, \qquad \frac{d\,\eta_2}{d\,t} = P_2\,\xi_2 - \eta_1\,, \qquad \frac{d\,\eta_3}{d\,t} = P_3\,\xi_3\,,$$

dove

$$P_1 = \frac{3}{4}\,\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}\,, \qquad P_2 = -\,\frac{1}{r^3}\,,$$

$$P_3 = \frac{3\,z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\,,$$

rappresentando r la distanza di P da S_1 ed S_2, cioè

$$r = \left|\sqrt{\frac{1}{4} + z^2}\,\right|.$$

Per le (3) quindi

$$P_1 = 8\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3 - 24\left(p + \frac{1}{6}E\right)^5, \qquad P_2 = 8\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3,$$

$$P_3 = 24\left(p + \frac{1}{6}E\right)^5 - 16\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3.$$

Dall'espressioni ora scritte delle P risulta che esse sono funzioni periodiche (anzi, più propriamente, doppiamente periodiche), del tempo. Le ξ_i ed η_i sono così definite da un sistema di equazioni differenziali a coefficenti periodici.

Detto sistema si divide in due gruppi

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,\xi_3}{d\,t} = \eta_3\,, \\ &\frac{d\,\eta_3}{d\,t} = P_3\,\xi_3\,; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,\xi_1}{d\,t} = \xi_2 + \eta_1\,, \qquad \frac{d\,\xi_2}{d\,t} = -\,\xi_1 + \eta_2\,, \\ &\frac{d\,\eta_1}{d\,t} = P_1\,\xi_1 + \eta_2\,, \qquad \frac{d\,\eta_2}{d\,t} = P_2\,\xi_2 - \eta_1\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

9. Per il nostro scopo basterà considerare questo secondo gruppo di equazioni, limitandoci inoltre a valori di E vicini al limite inferiore -2. Poniamo in conformità

$$E = -2 + \varepsilon$$

con ε (finito, ma) sufficientemente piccolo (*).

Il sistema (7) si può allora risguardare come un sistema di equazioni differenziali dipendenti dal parametro ε.

Il determinante Δ, che necessita provare essere diverso da 0, non è altro che il determinante jacobiano delle funzioni

$$\xi_i(T) - \xi_i(0), \qquad \eta_i(T) - \eta_i(0) \qquad (i = 1, 2)$$

rapporto a $\xi_i(0)$ ed $\eta_i(0)$, poichè le β coincidono coi valori delle ξ e delle η. Così considerato questo determinante, se dimostriamo ch'esso non è nullo per $\varepsilon = 0$ avremo risolta la questione dell'esistenza di soluzioni periodiche per $\mu = 0$, perchè esso sarà allora non nullo anche per $\varepsilon \neq 0$.

Quando $\varepsilon = 0$, cioè $E = -2$, $r = \frac{1}{2}$ e quindi

$$P_1 = 16, \qquad P_2 = -8,$$

ed il sistema (7) si riduce a

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + \eta_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 + \eta_2,$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = 16\,\xi_1 + \eta_2, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = -8\,\xi_2 - \eta_1.$$

S'ottiene così un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti, il quale può essere risolto nel solito modo.

(*) Può sembrare che con questa limitazione si possono solamente trovare quelle soluzioni periodiche che hanno luogo nell'intorno di una posizione d'equilibrio. Ma le cose non stanno proprio così. Infatti, dimostrato una volta che Δ è diverso da 0 per $\mu = \varepsilon = 0$, è chiaro che esisteranno due limiti finiti μ_1 ed ε_1 di μ ed ε tali che, per tutti i valori di $\mu < \mu_1$ e di $\varepsilon < \varepsilon_1$, Δ si manterrà ancora diverso da 0. Ma per valori ε non nulli nè superiori ad ε_1 e per $\mu = 0$, P è dotato di un vero moto finito e quindi esistono dei moti periodici che differiscono poco da questi anche nel caso di $\mu \neq 0$ e minore di μ_1. È dunque una classe più generale di soluzioni periodiche delle quali dimostreremo rigorosamente l'esistenza.

Poniamo cioè

$$\xi_i = \gamma_i \, e^{\rho t}, \qquad \eta_i = \delta_i \, e^{\rho t}, \qquad (i = 1, 2)$$

con che le costanti γ e δ sono determinate dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \rho\gamma_1 - \gamma_2 - \delta_1 &= 0, \\ \gamma_1 + \rho\gamma_2 - \delta_2 &= 0, \\ -16\gamma_1 + \rho\delta_1 - \delta_2 &= 0, \\ 8\gamma_2 + \delta_1 + \rho\delta_2 &= 0, \end{aligned}$$

che si potranno risolvere rispetto alle γ ed alle δ se

$$\begin{vmatrix} \rho & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \rho & 0 & -1 \\ -16 & 0 & \rho & -1 \\ 0 & 8 & 1 & \rho \end{vmatrix} = 0,$$

cioè se

$$\rho^4 - 6\rho^2 - 119 = 0.$$

Ad ognuno dei quattro valori distinti di ρ

$$\rho', \quad -\rho', \quad \rho'', \quad -\rho'',$$

dove

$$\rho' = \sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \qquad \rho'' = \sqrt{3 - 8\sqrt{2}},$$

corrisponde un sistema di valori pure distinti per le γ e δ, vale a dire

$$\gamma_1 = \begin{cases} \gamma'_1 \\ -\gamma'_1 \\ \gamma''_1 \\ -\gamma''_1 \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} \gamma'_2 \\ \gamma'_2 \\ \gamma''_2 \\ \gamma''_2 \end{cases} \qquad \delta_1 = \begin{cases} \delta'_1 \\ \delta'_1 \\ \delta''_1 \\ \delta''_1 \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} -\delta'_2 \\ \delta'_2 \\ -\delta''_2 \\ \delta''_2 \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} \gamma'_1 = 4(3 + 2\sqrt{2})\sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \\ \gamma''_1 = 4(3 - 2\sqrt{2})\sqrt{3 - 8\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma'_2 = -4(5 + 2\sqrt{2}), \\ \gamma''_2 = 4(2\sqrt{2} - 5), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta'_1 = 8(23 + 16\sqrt{2}), \\ \delta''_1 = 8(23 - 16\sqrt{2}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta'_2 = 8\sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \\ \delta''_2 = 8\sqrt{3 - 8\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Gli integrali generali del nostro sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti saranno quindi:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (\quad C_1 e^{\rho' t} - C_2 e^{-\rho' t})\,\gamma'_1 + (C_3 e^{\rho'' t} - C_4 e^{-\rho'' t})\,\gamma''_1,\\
\xi_2 &= (\quad C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\gamma'_2 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\gamma''_2,\\
\eta_1 &= (\quad C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\delta'_1 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\delta''_1,\\
\eta_2 &= (-C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\delta'_2 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\delta''_2,
\end{aligned}$$

le C essendo le 4 costanti d'integrazione, che noi determineremo in modo che i valori iniziali di ξ_i ed η_i sieno precisamente β_1, β_2, β_4, β_5. Ciò è possibile, perchè per $t = 0$ il determinante D dei coefficienti delle C è diverso da 0, essendo

$$D = \begin{vmatrix} \gamma'_1 & -\gamma'_1 & \gamma''_1 & -\gamma''_1 \\ \gamma'_2 & \gamma'_2 & \gamma''_2 & \gamma''_2 \\ \delta'_1 & \delta'_1 & \delta''_1 & \delta''_1 \\ -\delta'_2 & \delta'_2 & -\delta''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix},$$

cioè

$$D = 4 \cdot \begin{vmatrix} -\gamma'_1 & \gamma''_1 \\ \delta'_2 & -\delta''_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma'_2 & \gamma''_2 \\ \delta'_1 & \delta''_1 \end{vmatrix},$$

ossia infine

$$D = i\, 2^{17} \,.\, 17 \,.\, \sqrt{119}.$$

Assunte in questo modo le C, il determinante Δ si scinde nel prodotto dei due

$$\frac{\partial(\psi_1\,\psi_2\,\psi_4\,\psi_5)}{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}, \qquad \frac{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}{\partial(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5)};$$

il secondo non è che l'inverso di

$$D = \frac{\partial(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5)}{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}$$

e quindi è diverso da 0. Il primo, avendo già notato che le ψ (dovendo in Δ porre $\mu = \beta_i = \tau = 0$) sono rispettivamente eguali a

$$\xi_i(T) - \xi_i(0), \qquad \eta_i(T) - \eta_i(0),$$

si presenta sotto la forma

$$(e^{T\varrho'} - 1)\,(e^{-T\varrho'} - 1)\,(e^{-T\varrho''} - 1)\,(e^{-T\varrho''} - 1)\,D$$

e perciò è pur esso diverso da 0. Ciò apparisce chiaro ricordando che abbiamo già dimostrato (*) come al convergere di E a -2, T ha un limite finito e diverso da 0 e propriamente $T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Gli esponenti di e sono quindi diversi da 0, ed anche (avendo presenti i valori di ρ) da multipli di 2π.

È dunque $\Delta \neq 0$, vale a dire il problema che abbiamo preso a considerare ammette delle soluzioni periodiche anche quando le due masse m_1, m_2 di S_1 ed S_2 non sono più eguali.

10. Queste soluzioni da noi messe in luce sono in numero doppiamente infinito, poichè abbiamo assunto ad arbitrio uno dei valori delle variabili canoniche (β_6) ed oltre a questa abbiamo dato pure ad arbitrio anche l'origine del tempo. Gli altri elementi del moto risulteranno invece bene determinati. Possiamo notare che, per gli integrali di Jacobi, ad ogni valore di β_6 (una volta determinati i valori delle altre variabili) corrisponde un unico valore di E, cioè dell'energia totale, ed inversamente, ad ogni valore di E corrisponde un'unico valore di β_6. Così possiamo dire anche che la duplice infinità di queste soluzioni dipende dalla scelta arbitraria dell'origine del tempo e dell'energia totale.

(*) Vedi « Osservazione », p. Iª.

Un problema sui sistemi di linee fra loro coniugate e sulle relative trasformazioni di Laplace.

(*Di* PASQUALE CALAPSO, *a Palermo.*)

Allo studio delle equazioni lineari alle derivate parziali della forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{1'}$$

si collegano secondo LAPLACE due trasformazioni L, L^{-1} definite rispettivamente dalle formole

$$x_1 = x - \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{2'}$$

$$x_2 = x - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u}. \tag{3'}$$

Applicando all'equazione (1') o l'una o l'altra di queste trasformazioni, la (1') si cambia in una nuova equazione della medesima forma.

Ricordiamo il significato geometrico di queste trasformazioni. Siano x, y, z, tre soluzioni della (1') e interpretiamo queste come coordinate cartesiane ortogonali di un punto P dello spazio; al variare di u e v il punto P descrive un sistema coniugato.

Applicando alle funzioni x, y, z la trasformazione L, queste si cambiano in cert'altre funzioni x_1, y_1, z_1; il punto P dello spazio si cambia in un punto P_1 e quest'ultimo al variare di u e v descrive un nuovo sistema coniugato.

Similmente applicando alle funzioni x, y, z la trasformazione L^{-1} il punto P si cambia in un punto P_2. il quale al variare di u e v descrive a sua volta un nuovo sistema coniugato.

Lo scopo della presente Memoria è la ricerca dei sistemi coniugati, per cui entrambi i sistemi derivati con le trasformazioni L, L^{-1} risultano ortogonali.

Ogni sistema coniugato che gode di questa proprietà lo chiameremo brevemente *un sistema coniugato* (G).

Per la trattazione del problema conviene giovarsi di due teoremi di GUICHARD (*) che possono enunciarsi nel modo seguente:

I) *Un sistema coniugato parallelo a un sistema coniugato* (G) *è ancor esso un sistema coniugato* (G).

II) *Per ogni sistema coniugato* (G) *esiste sempre un sistema coniugato ad esso parallelo che ammette gl'invarianti uguali.*

Questi teoremi permettono di limitare la ricerca alla formazione dei sistemi coniugati (G) a invarianti uguali; l'equazione di LAPLACE relativa a un siffatto sistema coniugato è in tal caso della forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{4'}$$

e la determinazione della funzione φ dipende da un'equazione differenziale alle derivate parziali di 4.° ordine.

Nota la funzione φ per avere definitivamente le funzioni x, y, z occorre integrare un sistema di RICCATI.

Per le varie questioni relative al problema proposto è molto utile introdurre l'invariante H dell'equazione (4') definito dalla formola

$$H=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}.$$

Si può allora domandare a che condizione deve soddisfare una funzione H affinchè si possa assumere come invariante per un'equazione della forma (4') relativa a un sistema coniugato (G).

La funzione H è caratterizzata dal fatto che le due equazioni nella funzione incognita ω

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{H}\operatorname{sen}\omega,\\ \cos\omega&=H^2-H\frac{\partial^2\log H}{\partial u\,\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

debbono ammettere una soluzione comune.

(*) *Sur les réseaux qui, par la méthode de* LAPLACE, *se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux* [Comptes Rendus, anno 1901, vol. 132, pg. 249].

Si riconosce frattanto una soluzione particolare del problema; invero possiamo soddisfare alle precedenti ponendo

$$\omega = 0,$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u \, \partial v} = 1.$$

Quest'ultima col porre $H = e^\Theta$, assume la forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = 2 \operatorname{senh} \Theta. \tag{6'}$$

Similmente possiamo soddisfare alle (5′) ponendo

$$\omega = \pi,$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u \, \partial v} = -1.$$

Quest'ultima col porre $H = e^\Theta$, assume la forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = 2 \cosh \Theta. \tag{7'}$$

Dopo le ricerche da me esposte in una precedente Memoria (*), sappiamo che le due equazioni (6′), (7′) sono quelle da cui dipende la ricerca delle *asintotiche virtuali* di un paraboloide qualunque a punti iperbolici.

Intorno a queste equazioni e alle varie questioni geometriche che vi si connettono, possediamo ormai le recenti Memorie del Bianchi (**), in cui l'illustre geometra ha portato la teoria al massimo grado di sviluppo; per questa ragione non insistiamo su questa soluzione particolare del problema.

Escludendo d'ora innanzi questi casi, per ottenere l'invariante incognito H, elimineremo quest'ultimo fra le (5′) ed avremo per la funzione ω l'equazione

---

(*) *Sulla deformazione delle quadriche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, anno 1902, t. XVI, pg. 297].

(**) *Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, anno 1903, vol. XXXVIII, pg. 515].

Sulla deformazione dei paraboloidi [Annali di Matematica, anno 1904, serie III, vol. IX, pg. 247].

Sulla deformazione dei paraboloidi [Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 1905, serie V, vol. XIV, pg. 359].

differenziale di 4.° ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}=\cot\omega\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,. \tag{8'}$$

Determinata nel modo più generale una soluzione ω di questa equazione se ne dedurrà immediatamente l'invariante incognito ponendo

$$H=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Qui è interessante risolvere il problema seguente:

Determinare tutti i sistemi coniugati (G) *a invarianti uguali, dato che sia l'invariante.*

Per quanto sopra abbiamo detto assegnare l'invariante H ad un sistema coniugato (G), è quanto assegnare la soluzione ω dell'equazione differenziale (8').

Per avere allora la funzione φ relativa all'equazione (4') del sistema coniugato (G), occorre integrare il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}&=\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\left[\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]+\\
&\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}-\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\,,\\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}&=\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\left[\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]+\\
&\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\,,\\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}&=\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

$$\left.\begin{aligned}
4W^2&=(\cos\omega-\cos\Omega)\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\\
&\qquad-(\cos\omega-\cos\Omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Dopo di che si conoscerà la funzione φ dell'equazione (4'), e integrando un sistema di RICCATI si avranno definitivamente le funzioni x, y, z.

L'integrazione introdurrà manifestamente tre costanti arbitrarie. Possiamo dare altresì un procedimento mediante il quale si possono dedurre, da un *noto* sistema coniugato (G) ad invarianti uguali, infiniti sistemi coniugati (G), dipendenti da tre costanti arbitrarie, i quali hanno in comune col primo l'invariante; e sembra assai notevole che questo procedimento non richieda che soli calcoli algebrici e di derivazione.

Per esporre con chiarezza questo procedimento, chiameremo *superficie* Σ_1 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali; parimenti chiameremo *superficie* Σ_2 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L^{-1} da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Ora per le superficie Σ_1 e Σ_2 sussiste il seguente teorema:

L'inversione per raggi vettori reciproci (trasformazione I) trasforma una superficie Σ_1 in infinite nuove superficie Σ_1, e trasforma parimenti una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.

Se ne deduce facilmente il procedimento in discorso, cioè:

Da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali, applicando la trasformazione $L I L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1} I L$), si hanno infiniti sistemi coniugati (G) a invarianti uguali dipendenti da tre costanti arbitrarie. Tali sistemi coniugati (G) avranno in comune col sistema coniugato iniziale l'invariante.

Risoluta coll'integrazione del sistema completo (9'), (10'), (11') la questione di determinare tutti i sistemi coniugati (G) che ammettono un assegnato invariante, riteniamo fare un passo verso la soluzione definitiva del problema collo stabilire una trasformazione per l'invariante, ossia una trasformazione per gl'integrali dell'equazione differenziale di 4.º ordine (8').

Tale trasformazione si riassume nel seguente teorema:

Se ω è una soluzione della (8'), il sistema delle equazioni (9'), (10') è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione Ω con tre costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione dell'equazione differenziale di 4.º ordine (8').

Completeremo infine il risultato ottenuto con un'ultima proposizione la quale può enunciarsi nel modo seguente:

Se x, y, z sono le coordinate d'un punto che descrive un sistema coniu-

gato (G) a invarianti uguali, ponendo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial u},\\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -e^{-2\varphi}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -e^{-2\varphi}\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= -e^{-2\varphi}\frac{\partial z}{\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

si avranno per quadrature tre funzioni ξ, η, ζ che sono le coordinate di un punto che descrive un nuovo sistema coniugato (G) a invarianti eguali.

Ora supposto il sistema iniziale (G) ottenuto partendo da una soluzione ω della (8') e integrando il sistema completo (9'), (10'), (11') l'invariante di (G) sarà

$$H = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1},$$

e l'invariante del nuovo sistema coniugato sarà dato da

$$H_1 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Le formole (12') dànno adunque per quadrature una trasformazione per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che chiameremo *trasformazione C*; mediante la quale la funzione ω si cambia in Ω e l'invariante H in H_1.

Frattanto rimane stabilito un metodo di trasformazioni per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che consiste nel comporre la trasformazione LIL^{-1} (o la trasformazione $L^{-1}IL$) colla trasformazione C.

Sembra assai notevole che l'applicazione successiva ed illimitata di questo metodo di trasformazioni richieda soltanto successive quadrature.

§ I. Condizioni caratteristiche per i sistemi coniugati (G).

1. Riferiamo una superficie S ad un sistema coniugato di linee, e siano

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

le coordinate correnti di un punto della superficie.

Conservando le consuete notazioni, porremo

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = F, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G. \tag{2}$$

Denoteremo altresì con X, Y, Z i coseni direttori della normale, essendo le linée u e v coniugate si dovrà avere:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = 0. \tag{3}$$

Introdurremo inoltre le funzioni

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \tag{4}$$

sicchè le due forme fondamentali della superficie saranno:

$$E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2, \tag{5}$$

$$D\, d u^2 + D''\, d v^2. \tag{6}$$

Introdurremo infine per la prima di queste forme i simboli di CHRISTOFFEL $\left\{ \begin{matrix} i\ k \\ l \end{matrix} \right\}$.

Le funzioni x, y, z, X, Y, Z delle variabili u e v soddisfano al sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D X, \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D'' X,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{-D}{E G - F^2}\left(G \frac{\partial x}{\partial u} - F \frac{\partial x}{\partial v}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{D''}{E G - F^2}\left(F \frac{\partial x}{\partial u} - E \frac{\partial x}{\partial v}\right), \tag{9}$$

colle analoghe in y e z, che è illimitatamente integrabile in forza delle relazioni

$$D\,D'' = \sqrt{E\,G-F^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{E\,G-F^2}}{G}\left\{ {2\;2 \atop 1} \right\}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E\,G-F^2}}{G}\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}\right)\right], \tag{10}$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \left\{ {1\;2 \atop 1} \right\} D - \left\{ {1\;1 \atop 2} \right\} D'', \tag{11}$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \left\{ {1\;2 \atop 2} \right\} D'' - \left\{ {2\;2 \atop 1} \right\} D, \tag{12}$$

che sono, com'è noto, necessarie e sufficienti.

Con queste notazioni le due trasformazioni di LAPLACE L, L^{-1} sono espresse rispettivamente dalle formole:

$$x_1 = x - \frac{1}{\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}} \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{13}$$

$$x_2 = x - \frac{1}{\left\{ {1\;2 \atop 2} \right\}} \frac{\partial x}{\partial u}, \tag{14}$$

colle analoghe in y e z.

2. Per stabilire le condizioni caratteristiche per un sistema coniugato (G), conviene derivare le (13) e (14) rispetto ad u e v, eliminando per mezzo delle (7) le derivate delle funzioni x, y, z d'ordine superiore al primo. Avremo così:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{1}{\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\} - \left\{ {1\;2 \atop 2} \right\}\right)\frac{\partial x}{\partial v}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}}\left(\left\{ {2\;2 \atop 1} \right\}\frac{\partial x}{\partial u} + D'' X\right) + \\
&\quad + \frac{1}{\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\} - \left\{ {2\;2 \atop 2} \right\} + \left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}\right)\frac{\partial x}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_2}{\partial v} &= \frac{1}{\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial u},\\
\frac{\partial x_2}{\partial u} &= -\frac{1}{\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}}\left(\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}+D\,X\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial u}.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Donde, ponendo:

$$M=\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\right)G-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}F-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}G,$$

$$N=\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\right)E-\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}F-\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}E,$$

si ricava:

$$\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{1}{\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\right).\,M,$$

$$\sum\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}=\frac{1}{\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}^2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\right).\,N.$$

Escluderemo dalle nostre considerazioni il caso in cui si annulla l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix},$$

perchè in tal caso la superficie generata dal punto x_1, y_1, z_1 si riduce a una curva; escluderemo del pari il caso in cui si annulla l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}.$$

Le condizioni caratteristiche per un sistema coniugato (G) sono dunque date dall'annullarsi delle quantità M ed N; saranno cioè:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}\right)G=\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}G,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}\right)E=\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}F.$$

Queste a causa delle identità

$$\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}G=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}F=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},$$

si possono scrivere più semplicemente come segue:

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}. \tag{18}$$

§ II. Semplificazione delle equazioni caratteristiche.

3. Volendo esprimere questo risultato sotto forma più semplice conviene introdurre come incognite principali le funzioni φ e ψ definite rispettivamente dalle formole

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}. \tag{19}$$

In questo modo le (17) e (18) integrate dànno:

$$\log\sqrt{G}=\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\varphi+\lambda(u),$$

$$\log\sqrt{E}=\log\frac{\partial\psi}{\partial u}+\psi+\mu(v),$$

essendo $\lambda(u)$ funzione della sola u e $\mu(v)$ funzione della sola v.

D'altra parte dalle (19) la funzione φ è definita a meno di una funzione arbitraria della sola u, e parimenti la ψ è definita a meno di una funzione arbitraria della sola v; ond'è che senza ledere la generalità possiamo porre:

$$\log \sqrt{G} = \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi,$$

$$\log \sqrt{E} = \log \frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi,$$

e per conseguenza

$$\sqrt{E} = e^{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \sqrt{G} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{20}$$

Ciò posto ricorriamo alle identità

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} E + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} F,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} F + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} G.$$

Queste permettono di esprimere la F per mezzo delle funzioni φ e ψ in due modi differenti; invero sostituendo per le quantità $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}$ le espressioni (19) e per le funzioni E, G le espressioni (20) dopo semplificazione si ottiene:

$$F = e^{2\psi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right), \tag{21}$$

$$F = e^{2\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right). \tag{22}$$

Ne deriva tra le funzioni φ e ψ la relazione fondamentale

$$\left.\begin{aligned} & e^{2\psi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \\ & = e^{2\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

che in modo più compendioso potremo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\psi - \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\varphi - \psi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right). \tag{24}$$

§ III. I teoremi di Guichard.

4. Per la trattazione del problema proposto giovano due teoremi di Guichard, che nel presente paragrafo enuncieremo e dimostreremo direttamente.

I due teoremi in discorso possono enunciarsi sotto la forma seguente:

α) *Un sistema coniugato parallelo a un sistema coniugato* (G) *è ancor esso un sistema coniugato* (G).

β) *Per ogni sistema coniugato* (G), *esiste sempre un sistema coniugato ad esso parallelo che ammette gl'invarianti uguali.*

Per la dimostrazione assumiamo anzitutto un sistema coniugato (G) per il quale conserveremo le notazioni dei paragrafi precedenti.

Un sistema coniugato ad esso parallelo è definito dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= a\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= a\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= a\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= b\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= b\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= b\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

in cui a e b soddisfano al sistema

$$\frac{\partial a}{\partial v} = (b-a)\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial b}{\partial u} = (a-b)\frac{\partial \psi}{\partial u}. \tag{26}$$

Sulla superficie luogo del punto ξ, η, ζ l'equazione di Laplace del sistema coniugato assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = \frac{b}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{a}{b}\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v},$$

e introducendo per la nuova superficie le quantità

$$E', \quad G', \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}', \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}'$$

avremo:

$$\sqrt{E'} = a\sqrt{E}, \qquad \sqrt{G'} = b\sqrt{G}, \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \frac{b}{a}\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \frac{a}{b}\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \tag{28}$$

Da queste per derivazione si ricava:

$$\frac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial v},$$

ossia per la (17)

$$\frac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

Ancora derivando la prima delle (28) si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \log a}{\partial v},$$

ossia per la prima delle (26]

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial \log b}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

si ha quindi

$$\frac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix}'.$$

Similmente si dimostra aver luogo la relazione

$$\frac{\partial \log\sqrt{E'}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix}',$$

ed è così dimostrato il teorema I.

Per la dimostrazione del teorema II osserviamo che in forza della (24) esiste una funzione σ che soddisfa al sistema simultaneo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{\psi-\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= e^{\varphi-\psi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Assumendo una soluzione σ di questo sistema, potremo soddisfare alle (26) ponendo

$$a = e^{\psi+\sigma}, \qquad b = e^{\varphi+\tau}.$$

L'equazione di LAPLACE relativa al corrispondente sistema coniugato è in tal caso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = e^{\varphi-\psi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + e^{\psi-\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

ed ha per la (24) gl'invarianti uguali.

§ IV. I SISTEMI CONIUGATI (G) A INVARIANTI UGUALI.

5. Dopo questi teoremi limiteremo le nostre considerazioni ai sistemi coniugati (G) che ammettono gl'invarianti uguali; le formole relative si otterranno da quelle dei paragrafi I e II ponendo $\psi = \varphi$; si avrà quindi:

$$\sqrt{E} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad F = e^{2\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v}, \qquad \sqrt{G} = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{30}$$

e la (24) risulta verificata identicamente.

Le trasformazioni di LAPLACE saranno rappresentate analiticamente dalle formole

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ x_2 &= x - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

colle analoghe in y e z; la superficie luogo del punto $x_1\, y_1\, z_1$ sarà da noi detta superficie Σ_1, e la superficie luogo del punto $x_2\, y_2\, z_2$ sarà da noi detta superficie Σ_2; in altri termini chiameremo superficie Σ_1 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali; parimenti chiameremo superficie Σ_2 ogni superficie di cui le linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L^{-1} da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

6. Qui è molto utile stabilire la forma che assume l'elemento lineare delle superficie Σ_1 e Σ_2.

Secondo le notazioni introdotte la prima delle (15) si può mettere sotto la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{32}$$

Donde derivando rispetto a v

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Inoltre si ha dalla prima delle (31)

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \tag{34}$$

Dalle (32), (33), (34) eliminando la funzione x e riducendo si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial x_1}{\partial v} + \\ &+ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)\right]\frac{\partial x_1}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

che è l'equazione di Laplace delle linee di curvatura di Σ_1.

D'altra parte denotando con

$$E_1\, d u^2 + G_1\, d v^2$$

l'elemento lineare della superficie Σ_1, l'equazione di Laplace delle sue linee di curvatura sarà:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}.$$

Ed allora si dovrà avere:

$$\frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Se ne deduce integrando:

$$\sqrt{E_1} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot U,$$

$$\sqrt{G_1} = \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \cdot V,$$

essendo U funzione della sola u, V funzione della sola v.

Ora per una conveniente scelta del parametro v, possiamo supporre senza ledere la generalità $V = 1$, quindi scriveremo:

$$\sqrt{G_1} = \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \cdot \tag{36}$$

Per determinare definitivamente la quantità $\sqrt{E_1}$, basterà quadrare la (32), avremo così:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

colle analoghe in y e z, da cui sommando e semplificando:

$$E_1 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2,$$

e per conseguenza:

$$\sqrt{E_1} = \pm e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot$$

Per togliere l'incertezza del segno, sottragghiamo le (31); avremo così:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v},$$

colle analoghe in y e z, da cui quadrando, sommando ed osservando le (30):

$$\sum (x_1 - x_2)^2 = 2 \frac{e^{\varphi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot$$

Ora per le (30) la quantità $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ nel campo di variabilità che si considera è positiva; concludiamo perciò che l'espressione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

rappresenta a meno di un fattor positivo il quadrato della distanza di due punti corrispondenti sulle superficie Σ_1 e Σ_2.

Essa è quindi positiva, sicchè scriveremo:

$$\sqrt{E_1} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \tag{37}$$

Similmente per una conveniente scelta del parametro u i coefficienti dell'elemento lineare della superficie Σ_2 avranno la forma:

$$\sqrt{E_2} = \frac{e^{\varphi}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

$$\sqrt{G_2} = e^{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right).$$

7. Stabilita così la forma che assume l'elemento lineare sulle superficie Σ_1 e Σ_2, possiamo facilmente ottenere le quantità D, D'' relative alla superficie iniziale S. Poniamo a tal uopo per semplicità:

$$m = - \frac{\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}},$$

$$n = \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right],$$

sarà per la (17):

$$n = \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}} \left[\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right],$$

e la seconda delle (15) si scriverà:

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = m \frac{\partial x}{\partial u} + n \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{D''}{\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}} X. \tag{38}$$

ossia:

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} - n \frac{\partial x}{\partial v} = m \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D''}{\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}} X. \tag{39}$$

Dalla (38) ed analoghe in y e z quadrando e sommando, si ha:

$$G_1 = E m^2 + G n^2 + \frac{D''^2}{\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2} + 2 F m n.$$

Similmente dalla (39) quadrando, sommando e tenendo conto che

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

si ottiene:

$$G_1 + G n^2 = E m^2 + \frac{D''^2}{\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2} \cdot$$

Sommando colla precedente e semplificando si ottiene:

$$\frac{D''^2}{\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2} = G_1 - m (E m + F n),$$

Quest'ultima a causa dell'identità

$$E m + F n = m \frac{E G - F^2}{G},$$

si può scrivere:

$$\frac{D''^2}{\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2} = G_1 - \frac{E G - F^2}{G} m^2.$$

Ed ora ponendo per m la sua espressione effettiva e per G_1 l'espressione sopra stabilita (36) avremo definitivamente:

$$D''^2 = e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{G} \left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 . \tag{40}$$

Similmente:

$$D^2 = e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{E} \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 . \tag{41}$$

8. Qui è interessante dimostrare che le funzioni D e D'' definite dalla (10) e dalla (40) verificano necessariamente la (12).

Invero la (10) si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right),$$

ossia sviluppando la derivazione al 2.° membro e tenendo conto che

$$\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}=\sqrt{EG-F^2}\left(\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

avremo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left[\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{1}{e}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right].$$

Ed ora in forza dell'identità

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}=e^{\varphi}\left(\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

scriveremo definitivamente:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)=\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{42}$$

Ciò posto scriviamo la (40) sotto la forma:

$$\frac{D''^2}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}-\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)^2.$$

Derivando rispetto ad u e tenendo presente la (42) otteniamo:

$$\frac{1}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\left[\frac{\partial(D''^2)}{\partial u}-2D''^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right]=$$

$$-\frac{2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-2\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\left[\frac{D\,D''}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right],$$

ossia:

$$\frac{1}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}\left[\frac{\partial (D''^2)}{\partial u} - 2\,D''^2\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} + 2\,D\,D''\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\}\right] =$$

$$= \frac{2}{e^{2\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\left[D''^2 - e^{2\varphi} + \frac{E\,G - F^2}{G}\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\}^2\right]$$

Ma la parentesi del secondo membro è per la (40) identicamente nulla, ne segue:

$$\frac{\partial (D''^2)}{\partial u} - 2\,D''^2\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} + 2\,D\,D''\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - D''\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} + D\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\} = 0.$$

come volevasi dimostrare.

Similmente si dimostra che le funzioni D e D'' definite dalla (10) e dalla (41) verificano la (11); ed allora possiamo concludere che la condizione necessaria e sufficiente per la funzione incognita φ si otterrà eliminando D e D'' fra le (10), (40), (41).

9. Per presentare la condizione richiesta sotto la forma definitiva conviene introdurre l'invariante H dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

cioè porremo

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}. \tag{43}$$

Sostituendo ai simboli di Christoffel i valori effettivi, avremo:

$$\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\}(E\,G - F^2) = e^{4\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}H - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v}\right]. \tag{44}$$

$$\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}(E\,G - F^2) = e^{4\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}H - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 H - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u}\right]. \tag{45}$$

$$E\,G - F^2 = e^{4\varphi}\left(2\,H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2\right). \tag{46}$$

Ciò posto assumendo la (10) sotto la forma (42) e sostituendo in questa al simbolo $\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}$ la sua effettiva espressione dedotta dalla (44) e (46) dopo riduzione avremo:

$$
\begin{aligned}
D D''(E G-F^2)\, e^{-6\varphi} &= \left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right)\left(2H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2\right) - \\
&- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}H^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H^2 + H\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v} + \\
&+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 H^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 H^2 - H\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial H}{\partial v} + \\
&+ H\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u} - H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v},
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{aligned}
D D''(E G-F^2)\, e^{-6\varphi} &= \left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right)\left(2H\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2\right) - \\
&- e^{-6\varphi}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}\frac{(E G - F^2)^2}{\sqrt{EG}},
\end{aligned}
$$

da cui semplificando

$$
D D'' = e^{2\varphi}\left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right) - \frac{E G - F^2}{\sqrt{EG}}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}. \tag{47}
$$

Frattanto la condizione richiesta per la funzione φ si può mettere sotto la forma:

$$
\begin{aligned}
&\left[e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{E}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}^2\right]\left[e^{2\varphi} - \frac{E G - F^2}{G}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}^2\right] = \\
&= \left[e^{2\varphi}\left(H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}\right) - \frac{E G - F^2}{\sqrt{EG}}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}\right]^2.
\end{aligned} \tag{48}
$$

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione di LAPLACE

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}
$$

sia l'equazione di un sistema coniugato (G), *è che la funzione* φ *sia una soluzione dell'equazione differenziale di 4.º ordine* (48).

Nota una soluzione di questa equazione, se ne dedurranno le coordinate x, y, z del punto che descrive il sistema coniugato integrando il sistema completo (7), (8), (9).

§ V. Esame di alcuni casi particolari.

10. In questo paragrafo esamineremo alcune soluzioni particolari dell'equazione di 4.° ordine (48).

A tale scopo osserviamo che questa equazione risulta identicamente soddisfatta se si pone simultaneamente

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{G}}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\},\\ &H^2-H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}=1.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Noi dimostreremo che queste due equazioni ammettono effettivamente soluzioni comuni, che daranno manifestamente soluzioni particolari del nostro problema.

Per la dimostrazione di quanto abbiamo asserito scriveremo la prima delle (49), in forza della (44) e della (45), sotto la forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \log H}{\partial u}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \log H}{\partial v}, \tag{50}$$

ed associeremo a questa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-H. \tag{51}$$

Pensando queste due equazioni come un sistema simultaneo nella funzione incognita φ in cui H sia una soluzione qualunque dell'equazione di 2.° ordine

$$H^2-H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}=1, \tag{52}$$

si trova con un calcolo facile che esso è illimitatamente integrabile.

Concludiamo quindi che le (49) ammettono infinite soluzioni comuni dipendenti da due funzioni arbitrarie; per determinarle basterà assumere nel modo più generale una soluzione della (52) e integrare il sistema simultaneo (50), (51).

11. Similmente possiamo soddisfare alla (48) ponendo

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = -1.$$

Invero si dimostra come precedentemente che queste equazioni ammettono infinite soluzioni comuni, le quali si ottengono assumendo nel modo più generale una soluzione dell'equazione

$$H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} = -1, \tag{53}$$

e integrando il sistema

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \log H}{\partial u} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \log H}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - H.$$

La determinazione di queste soluzioni particolari dipende adunque dall'integrazione delle due equazioni (52), (53). Queste col porre $H = e^{\Theta}$ assumono rispettivamente la forma:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \operatorname{senh} \Theta,$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \cosh \Theta.$$

Risulta dalle ricerche da me esposte nella Memoria sopra citata che queste equazioni sono quelle da cui dipende la ricerca delle ***assintotiche virtuali*** di un paraboloide qualunque a punti iperbolici.

La teoria di queste equazioni e delle questioni geometriche che vi si connettono, ha ormai raggiunto dopo le Memorie del Bianchi il massimo grado di sviluppo; per questa ragione abbandoneremo l'esame di questi casi particolari e ritorneremo al problema sotto la forma più generale.

§ VI. Condizioni caratteristiche per l'invariante.

12. Ora vogliamo stabilire le condizioni a cui deve soddisfare una funzione H affinchè si possa assumere come invariante per un sistema coniugato (G).

Per condurre con semplicità i calcoli relativi introdurremo due funzioni ausiliarie λ e μ definite rispettivamente dalle formole:

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{D''}{e^{\varphi}}, \qquad \operatorname{sen}\mu = \frac{D}{e^{\varphi}}. \tag{54}$$

In forza delle (40) e (41) possiamo porre senza ledere la generalità:

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{e^{\varphi}\sqrt{G}} \begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \cos\mu = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{e^{\varphi}\sqrt{E}} \begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \tag{55}$$

Con questa notazione la (48) si può scrivere:

$$\cos(\lambda-\mu) = H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}. \tag{56}$$

Dalle (54) inoltre per derivazione tenendo presenti le (54) stesse e le (55), (11), (12), si ha:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= -\frac{e^{\varphi}\sqrt{G}}{\sqrt{EG-F^2}}\operatorname{sen}\mu, \\ \frac{\partial\mu}{\partial v} &= -\frac{e^{\varphi}\sqrt{E}}{\sqrt{EG-F^2}}\operatorname{sen}\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Donde moltiplicando ed osservando la (46):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\mu}{2H\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - H^2}. \tag{58}$$

Questa relazione si può scrivere altresì:

$$\frac{H}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}} = 2 - \frac{\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\mu}{H\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}},$$

e finalmente sostituendo al primo membro per H la sua espressione effettiva e rammentando le (3)), otteniamo dopo riduzione:

$$\frac{F}{\sqrt{E\,G}} = \frac{\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu}{H \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} - 1. \tag{59}$$

13. Ora derivando le (57) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \,\partial v} = - \frac{e^{\varphi} \sqrt{G}}{\sqrt{E\,G - F^2}} \left[\cos\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} + \operatorname{sen}\mu \left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 2 \; 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \right],$$

che in forza dell'identità

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 2 \; 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \; 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{F}{G}$$

potremo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \,\partial v} = - \frac{e^{\varphi} \sqrt{G}}{\sqrt{E\,G - F^2}} \left[\cos\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} + \operatorname{sen}\mu \left\{ \begin{matrix} 2 \; 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{F}{G} \right],$$

ossia per le (55) e (57):

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \,\partial v} = \cot\mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{E\,G}} \cot\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

ed infine per la (59):

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \,\partial v} = \left(\cot\lambda + \cot\mu \right) \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \cos\lambda \operatorname{sen}\mu. \tag{60}$$

Similmente si ricava:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \,\partial v} = \left(\cot\mu + \cot\lambda \right) \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \operatorname{sen}\lambda \cos\mu. \tag{61}$$

Da queste sottraendo si deduce:

$$\frac{\partial^2 (\lambda - \mu)}{\partial u \,\partial v} = \frac{1}{H} \operatorname{sen}(\lambda - \mu). \tag{62}$$

Questa e la (56) ponendo $\lambda - \mu = \omega$ si potranno scrivere:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \,\partial v} &= \frac{1}{H} \operatorname{sen}\omega, \\ \cos\omega &= H^2 - H \frac{\partial^2 \log H}{\partial u \,\partial v}. \end{aligned} \right\} \tag{63}$$

14. Frattanto si vede che affinchè una funzione H si possa assumere come invariante per un sistema coniugato (G) è necessario che le (63) nella funzione incognita ω debbono ammettere una soluzione comune.

Eliminando fra esse l'invariante H (*) avremo per la funzione ω l'equazione differenziale alle derivate parziali di 4° ordine:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right)^{-1} = \cot\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\cdot \tag{64}$$

Viceversa dimostreremo in seguito il seguente teorema, che chiameremo teorema fondamentale:

Se ω è una soluzione dell'equazione di 4° ordine (64), *esistono ∞^3 sistemi coniugati* (G) *a invarianti uguali per cui l'invariante è dato dalla formola:*

$$H = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right)^{-1},$$

15. Qui è opportuno stabilire un sistema di formole molto utili per il seguito della presente memoria.

Derivando rispetto ad u la prima della (57) e tenendo presenti le (57) stesse, si ha:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot\mu \frac{\partial\lambda}{\partial u} \frac{\partial\mu}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\left[\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\}\right]. \tag{65}$$

D'altra parte ricordiamo l'identità:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{F}{E}.$$

Questa per la seconda delle (55) si può scrivere:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} - \frac{e^{\varphi}\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \cos\mu \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

ed ancora per la prima delle (57) e per la (59):

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} + \cot\mu \frac{\partial\lambda}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu}{H \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} \dfrac{\partial\mu}{\partial v}} - 1\right).$$

(*) Qui escludiamo dalle nostre considerazioni i casi in cui si abbia $\omega = 0$ oppure $\omega = \pi$, che forniscono le soluzioni particolari osservate al § V.

Ed ora sostituendo nella (65) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} \right). \tag{66}$$

Infine osserviamo che per le (54), (55), (57) possiamo scrivere:

$$-\frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} = \frac{1}{H} \frac{E G - F^2}{e^{2\varphi} E} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix},$$

ossia per la (45):

$$-\frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \mu}{H \dfrac{\partial \mu}{\partial v}} = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \log H}{\partial u}.$$

Sostituendo in (66) e semplificando coll'osservare le (30) avremo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \log H}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} H,$$

E questa per le (54) e (57) scriveremo definitivamente:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \cot \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \log H}{\partial u} + \frac{H}{\operatorname{sen} \lambda} \frac{D D''}{\sqrt{E G - F^2}}. \tag{67}$$

Similmente si ricava:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} = \cot \lambda \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial \log H}{\partial v} + \frac{H}{\operatorname{sen} \mu} \frac{D D''}{\sqrt{E G - F^2}}. \tag{68}$$

16. Inoltre si ha dalle (54):

$$D D'' = e^{2\varphi} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu,$$

ossia per le (57):

$$\frac{D D''}{E G - F^2} = \frac{1}{\sqrt{E G}} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Donde moltiplicando membro a membro e tenendo presente le (30):

$$\frac{D^2 D''^2}{EG-F^2}=\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\mu\,\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

e per la (58):

$$\frac{D^2 D''^2}{EG-F^2}=\frac{2}{H}\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v}-\frac{1}{H^2}\operatorname{sen}^2\lambda\operatorname{sen}^2\mu\,. \tag{69}$$

Da questa infine ponendo:

$$W=\frac{D D''}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{70}$$

derivando e sostituendo per le derivate seconde di λ e μ le espressioni (60), (61), (67), (68) dopo semplificazione si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u}&=\operatorname{sen}\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}+(\cot\lambda+\cot\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u}W+\cot\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}W-\frac{\partial\log H}{\partial u}W,\\ \frac{\partial W}{\partial v}&=\operatorname{sen}\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(\cot\lambda+\cot\mu)\frac{\partial\mu}{\partial v}W+\cot\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}W-\frac{\partial\log H}{\partial v}W.\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

17. Stabilite così queste formole fondamentali, introdurremo la funzione Ω definita dalla relazione:

$$\Omega=\lambda+\mu.$$

Sarà allora:

$$\lambda=\frac{1}{2}(\Omega+\omega),\qquad \mu=\frac{1}{2}(\Omega-\omega), \tag{72}$$

e sostituendo nella (60), (67), (68) per λ e μ queste espressioni e tenendo presenti le (63) otteniamo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}&=\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\left[\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]+\\ &\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega+\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}-\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2},\\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}&=\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\left[\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)\right]\\ &\qquad+\frac{2W}{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega-\omega}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}.$$

Similmente sostituendo nella (69) per λ e μ le espressioni (72) e per H l'espressione (63). avremo:

$$
\left.\begin{aligned}
4W^2 = (\cos\omega - \cos\Omega)\,\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\cdot\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - {} \\
- (\cos\omega - \cos\Omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2.
\end{aligned}\right\}\tag{74}
$$

Infine analogamente operando sulle (71), avremo:

$$
\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial W}{\partial u} &= \operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} + \frac{2W\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u} + \\
&\quad + W\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u} + 2W\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right), \\
2\frac{\partial W}{\partial v} &= \operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u} + \frac{2W\operatorname{sen}\Omega}{\cos\omega-\cos\Omega}\,\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} + \\
&\quad + W\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial v} + 2W\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{75}
$$

Queste sono le formole che volevamo stabilire.

Intorno al sistema (73), (74) si possono verificare le seguenti proprietà:

1.° Dalle (73) e (74) seguono le (75).

2.° Il sistema (73), (74) è illimitatamente integrabile in forza della (64).

§ VII. Rappresentazione sferica di Gauss.

18. I teoremi dimostrati al § III lasciano prevedere che i sistemi coniugati (G) si possono definire mediante proprietà caratteristiche della loro rappresentazione sferica.

Noi pertanto procederemo alla ricerca di queste proprietà.

Denotando con:

$$
ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{76}
$$

l'elemento lineare sferico, si ha da formole note:

$$
e = \frac{G\,D^2}{EG - F^2}, \qquad f = -\frac{F\,D\,D''}{EG - F^2}, \qquad g = \frac{E\,D''^2}{EG - F^2}.
$$

Quindi osservando le (54) e (57) avremo:

$$e = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2, \qquad g = \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2.$$

Inoltre essendo:

$$F = \sqrt{EG} - e^{2\varphi} H,$$

potremo scrivere:

$$f = \frac{e^{2\varphi} H - \sqrt{EG}}{EG - F^2} \cdot e^{2\varphi} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu,$$

e per la (46) e (57):

$$f = -\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{H}{2H \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - H^2} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu.$$

Infine per la (58):

$$f = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{1}{H} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mu.$$

Dopo i risultati conseguiti nel paragrafo precedente potremo esprimere le quantità e, f, g per mezzo delle funzioni ω e Ω; sicchè scriveremo;

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u}\right]^2, \\ g &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}\right]^2, \\ f &= \frac{1}{4} \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ne deriva facilmente per la (74):

$$e g - f^2 = W^2.$$

19. In ciò che segue ci proponiamo di stabilire le proprietà relative alla forma (76) in cui le quantità e, f, g sono definite dalle (77). A tale scopo sarà utile calcolare i simboli $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ & l \end{matrix} \right\}'$ relativi alla (76).

Frattanto ricorriamo alle identità:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}' \sqrt{e} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}' \frac{f}{\sqrt{e}}, \\ \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}' \frac{f}{\sqrt{g}} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}' \sqrt{g}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Inoltre dalle (77) abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\sqrt{e} &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ \varepsilon'\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}. \qquad (\varepsilon' = \pm 1) \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Da queste derivando ed eliminando per mezzo delle (73) le derivate di 2.° ordine della Ω, otteniamo:

$$\varepsilon\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\Omega}{2(\cos\omega-\cos\Omega)}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\Omega}{2\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},$$

$$\varepsilon'\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen}\Omega}{2(\cos\omega-\cos\Omega)}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\Omega}{2\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}.$$

Portando queste espressioni e le (77) nelle (78) queste forniscono per le quantità incognite $\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'$ le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}' &= \frac{1}{2}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}, \\ \begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}' &= \frac{1}{2}\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}; \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}' &= \varepsilon'\sqrt{g}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}, \\ \begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}' &= \varepsilon\sqrt{e}\cot\frac{\Omega+\omega}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

In secondo luogo ricorriamo alle identità:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\log W}{\partial u} &= \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}', \\ \frac{\partial\log W}{\partial v} &+ \begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'. \end{aligned}\right\} \tag{81'}$$

Sostituendo in queste per le derivate della W le espressioni (75) e per i simboli $\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'$ le (80), avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}1\;1\\1\end{matrix}\right\}' &= \frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}+\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right),\\
\left\{\begin{matrix}2\;2\\2\end{matrix}\right\}' &= \frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}+\cot\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{82}$$

Infine ricordando le identità:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix}1\;1\\1\end{matrix}\right\}'\sqrt{e}+\left\{\begin{matrix}1\;1\\2\end{matrix}\right\}'\frac{f}{\sqrt{e}},\\
\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial v} &= \left\{\begin{matrix}2\;2\\1\end{matrix}\right\}'\frac{f}{\sqrt{g}}+\left\{\begin{matrix}2\;2\\2\end{matrix}\right\}'\sqrt{g},
\end{aligned}$$

e tenendo presenti le (77), (82), (74) otteniamo dopo riduzione:

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}1\;1\\2\end{matrix}\right\}' &= \varepsilon\sqrt{e}\cdot\frac{1}{W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2},\\
\left\{\begin{matrix}2\;2\\1\end{matrix}\right\}' &= \varepsilon'\sqrt{g}\cdot\frac{1}{W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}.
\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

20. Ciò posto se fra le (79) e (81) eliminiamo le funzioni Ω, ω avremo le condizioni richieste, cioè:

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}1\;2\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}1\;2\\1\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}1\;2\\1\end{matrix}\right\}'^2+g,\\
\left\{\begin{matrix}1\;2\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}1\;2\\2\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}1\;2\\2\end{matrix}\right\}'^2+e.
\end{aligned}\right\}\tag{84}$$

Similmente eliminando fra le (83) e (79) le funzioni Ω, ω tenendo presenti le (81), avremo altresì:

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}1\;1\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}1\;1\\2\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}1\;1\\2\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}2\;2\\2\end{matrix}\right\}',\\
\left\{\begin{matrix}2\;2\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}2\;2\\1\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}2\;2\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}1\;1\\1\end{matrix}\right\}'.
\end{aligned}\right\}\tag{85}$$

Qui è interessante osservare che dalla coesistenza delle (84) e (85) segue che la forma (76) ha la curvatura $= +1$, e viceversa dall'ipotesi che la forma (76) ha la curvatura $= +1$ e dalle (85) seguono le (84).

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Se ω *è una soluzione dell'equazione differenziale* (64), *e* Ω *è una soluzione del sistema completo* (73), (74), *ponendo:*

$$e = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\right]^2,$$

$$g = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\right]^2,$$

$$f = \frac{1}{4}\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\,\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v} - \operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},$$

la forma differenziale

$$d s'^2 = e\,d u^2 + e\,f\,d u\,d v + g\,d v^2 \tag{86}$$

avrà la curvatura $=+1$, *e i suoi coefficienti soddisfaranno alle condizioni* (85).

§ VIII. Dimostrazione del teorema fondamentale.

21. È qui il momento di dimostrare il teorema fondamentale, per il che mostreremo anzitutto che un sistema coniugato la cui rappresentazione sferica soddisfa le (85) è necessariamente un sistema coniugato (G).

Invero un sistema coniugato si può ritenere definito a meno di movimenti dalla sua rappresentazione sferica e da due funzioni D e D'' che verificano le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} &= \left\{\begin{matrix} 1\;2 \\ 1 \end{matrix}\right\}' D - \left\{\begin{matrix} 1\;1 \\ 2 \end{matrix}\right\}' D'', \\ \frac{\partial D''}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix} 1\;2 \\ 2 \end{matrix}\right\}' D'' - \left\{\begin{matrix} 2\;2 \\ 1 \end{matrix}\right\}' D. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Si avrà allora:

$$E = \frac{g\,D^2}{e\,g - f^2}, \quad F = -\frac{f\,D\,D''}{e\,g - f^2}, \quad G = \frac{e\,D''}{e\,g - f^2}, \tag{88}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1\;2 \\ 1 \end{matrix}\right\} = -\frac{D''}{D}\left\{\begin{matrix} 1\;1 \\ 2 \end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix} 1\;2 \\ 2 \end{matrix}\right\} = -\frac{D}{D''}\left\{\begin{matrix} 2\;2 \\ 1 \end{matrix}\right\}'. \tag{89}$$

Da queste per derivazione tenendo presenti le (87) si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log D''}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\;1\\2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}',$$

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial\log D'}{\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial v}-\begin{Bmatrix}2\;2\\2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}',$$

e per la prima delle (85):

$$\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix};$$

similmente si ricava:

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix},$$

ed è così dimostrato quanto sopra abbiamo asserito.

Adunque da una soluzione ω dell'equazione (64) integrando il sistema completo (73) (74), si deduce la forma (86) che si può assumere come rappresentazione sferica per infiniti sistemi coniugati (G), dipendentemente dalle soluzioni del sistema (87).

22. Ora possiamo soddisfare a questo sistema ponendo in particolare:

$$\frac{\partial\log D}{\partial u}=\frac{1}{2}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u}-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\log D}{\partial v}=\frac{1}{2}\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u},$$

$$D''=D\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega+\omega}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\Omega-\omega}{2}}.$$

Sarà allora per le (89) e (83)

$$\left.\begin{aligned}\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u},\\ \begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}&=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

Da queste, tenendo presenti le (73), (74), (75) si trovano con calcoli facili le relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix},$$

$$H=\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Così il teorema fondamentale è pienamente dimostrato.

§ IX. Le superficie Σ_1, Σ_2.

23. Abbiamo visto nel paragrafo IV che l'elemento lineare di una superficie Σ_1 è dato dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{E_1}&=e^{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\\ \sqrt{G_1}&=\frac{e^{\varphi}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}.\end{aligned}\right\}\tag{91}$$

Abbiamo visto altresì (32) che le derivate parziali delle funzioni x_1, y_1, z_1 rispetto alla variabile u sono legate alle derivate parziali delle funzioni x, y, z dalle relazioni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

ossia:

$$\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\dfrac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Sostituendo nelle (31) avremo:

$$x=x_1-\frac{1}{\dfrac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{\partial x_1}{\partial u},\tag{92}$$

che è la rappresentazione analitica della trasformazione L^{-1} applicata alle linee di curvatura di Σ_1, e che trasforma queste nel sistema coniugato iniziale (G).

Introducendo inoltre le quantità D_1, D''_1 relative ad una superficie Σ_1 e le quantità X_3, Y_3, Z_3 che dànno i coseni direttori della normale avremo per le funzioni x_1, y_1, z_1, X_3, Y_3, Z_3 il sistema completo seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{1}{2G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + D_1 X_3, \\
\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E_1}\frac{\partial G_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{1}{2G_1}\frac{\partial G_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + D'' X_3,
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{D_1}{E_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \\
\frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\frac{D''_1}{G_1}\frac{\partial x}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

24. Se deriviamo la (92) rispetto ad u ed eliminiamo per la prima delle (93) la derivata seconda della funzione x_1, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} = &\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial x_1}{\partial u} + \\
&+ \frac{1}{\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}}\frac{1}{2G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{D_1}{\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}} X_3 .
\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Ciò posto dalle (91) derivando e tenendo presenti le (91) stesse otteniamo:

$$e^{\varphi}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} = \sqrt{E_1}; \tag{96}$$

e se inoltre fra questa e le (91) eliminiamo la φ, troviamo per le funzioni $\sqrt{E_1}$, $\sqrt{G_1}$ la relazione:

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} + \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}} = 0. \tag{97}$$

Ancora dalla (96) per derivazione ricaviamo:

$$e^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{\sqrt{E_1}}{\left(\dfrac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2}\left[\frac{\partial^2\log\sqrt{G_1}}{\partial u^2}-\frac{\partial\log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right]. \tag{98}$$

Ed ora ricorrendo alla (95) e alle analoghe in y e z, quadrando sommando e tenendo presente che:

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=e^{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2,$$

otteniamo infine:

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{\partial^2\log\sqrt{G_1}}{\partial u^2}-2\frac{\partial\log\sqrt{E_1}}{\partial u}\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}+\left(\frac{\partial\log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2+\\&\qquad+\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Possiamo quindi enunciare il risultato seguente:

Le linee di curvatura di una superficie Σ_1 soddisfano alle condizioni (97), (99).

25. Viceversa è importante dimostrare che ogni superficie le cui linee di curvatura soddisfano alle condizioni (97), (99) è necessariamente una superficie Σ_1; cioè le sue linee di curvatura si possono far derivare mediante la trasformazione L da un sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Infatti supponiamo che le linee di curvatura di una superficie soddisfacciano alle condizioni (97), (99); e definiamo una funzione φ mediante la formola (96).

Dalla coesistenza della (96) e (97), avremo:

$$\sqrt{G_1}=\frac{e^{\varphi}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

e per conseguenza:

$$\sqrt{E_1}=e^{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

e la (99) si potrà scrivere sotto la forma:

$$e^{-2\varphi}E_1-2e^{-\varphi}\sqrt{E_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2=0. \tag{100}$$

Ciò posto scriviamo la trasformazione L^{-1} nel modo seguente:

$$x = x_1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

e deriviamo avendo cura di eliminare colle (93) le derivate di 2.° ordine di x_1; avremo tenuto conto della (96):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{e^\varphi}{G_1} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} - e^\varphi \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} X_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

colle analoghe in y e z.

Da queste quadrando e sommando e tenendo conto della (100) segue facilmente:

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2,$$

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = e^{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2.$$

Infine se fra le equazioni

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(1 - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial u}\right) \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = - \frac{e^\varphi}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

eliminiamo la funzione x_1, otteniamo la nuova equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Concludiamo quindi che il sistema derivato dalle linee di curvatura di una superficie soddisfacente alle condizioni (97,) (99) è un sistema coniugato ad invarianti uguali; per esso si ha altresì:

$$\sqrt{E} = e^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \sqrt{G} = e^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

e per conseguenza:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}.$$

Le condizioni (97) e (99) sono adunque caratteristiche per le linee di curvatura di una superficie Σ_1.

Con un procedimento analogo si vede che una superficie Σ_2 è perfettamente caratterizzata dalle condizioni:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{E_2}}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_2}}{\partial u} + \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{E_2}} = 0,$$

$$2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{E_2}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_2}}{\partial v} + \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_2}}{\partial v} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{D''_2}{\sqrt{G_2}} \right)^2 = 0.$$

§ X. Le trasformazioni delle superficie Σ_1, Σ_2.

26. Intorno alle superficie Σ_1 e Σ_2 sussistono alcune trasformazioni che si fondano sul seguente teorema:

L'inversione per raggi vettori reciproci (trasformazione I) *trasforma una superficie Σ_1 in infinite nuove superficie Σ_1, e trasforma parimenti una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.*

Consideriamo anzitutto una superficie Σ_1; secondo i risultati da me stabiliti in una precedente Memoria (*), ponendo:

$$\rho = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 \tag{101}$$

(*) *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275].

avremo per la superficie trasformata:

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(1)} &= \frac{1}{\rho^2} E_1, \quad G_1^{(1)} = \frac{1}{\rho^2} G_1, \\ \frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}} &= \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} + \sqrt{E_1^{(1)}} \sum 2 X_3 (x_1 - a), \\ \frac{D''^{(1)}_1}{\sqrt{G_1^{(1)}}} &= \frac{D''_1}{\sqrt{G_1}} + \sqrt{G_1^{(1)}} \sum 2 X_3 (x_1 - a). \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

La funzione ρ definita dalla (101) soddisfa al sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} &= \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{2G_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 E_1 + D_1 \sum 2 X_3 (x_1 - a), \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2E_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{1}{2G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 G_1 + D''_1 \sum 2 X_3 (x_1 - a). \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Dalle (102) derivando otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Da queste derivando ancora e tenendo presente le (103), avremo:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right).$$

D'altra parte:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \log \sqrt{E_1}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right).$$

Quindi sottraendo:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Ma si ha inoltre:

$$\frac{\sqrt{E_1^{(1)}}}{\sqrt{G_1^{(1)}}} = \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}};$$

e sommando colla precedente e tenendo presente la (97) si ricava adunque:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u} + \frac{\sqrt{E_1^{(1)}}}{\sqrt{G_1^{(1)}}} = 0. \tag{105}$$

27. Ciò posto conviene esaminare la quantità $\sum 2 X_3 (x_1 - a)$, che scriviamo per disteso; cioè:

$$\sum 2 X_3 (x_1 - a) = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \begin{vmatrix} 2(x_1 - a) & 2(y_1 - b) & 2(z_1 - c) \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Quadrando e tenendo presente la (101), avremo:

$$\left[\sum 2 X_3 (x_1 - a)\right]^2 = \frac{1}{E_1 G_1} \begin{vmatrix} 4\rho & \frac{\partial \rho}{\partial u} & \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial u} & E_1 & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} & 0 & G_1 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\left[\sum 2 X_3 (x_1 - a)\right]^2 = 4\rho - \frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{G_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2.$$

Ora quadrando le (102) e tenendo presente quest'ultima ricaviamo:

$$\left(\frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}}\right)^2 = \left(\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\right)^2 + 2\frac{D_1}{\rho} \sum 2 X_3 (x_1 - a) +$$
$$+ \frac{4 E_1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{E_1}{\rho^2 G_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2.$$

Infine derivando le (104) ed eliminando colle (103) le derivate seconde di ρ, dopo riduzione otteniamo:

$$2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1^{(1)}}}\frac{\partial\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v}\right)^2 =$$

$$= 2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2 -$$

$$- 2\frac{D_1}{\rho}\sum 2 X_3 (x_1 - a) - \frac{4 E_1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - \frac{E_1}{\rho^2 G_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2.$$

Sommando colla precedente ed osservando la (99) si ricava:

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial^2 \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\frac{\partial \log\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log\sqrt{G_1^{(1)}}}{\partial u}\right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{G_1^{(1)}}}\frac{\partial\sqrt{E_1^{(1)}}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{D_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}}\right)^2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Adunque le linee di curvatura della superficie trasformata soddisfano ancora le (105) e (106); possiamo quindi concludere che la superficie trasformata è ancor essa una superficie Σ_1.

In modo analogo si dimostra che l'inversione per raggi reciproci trasforma una superficie Σ_2 in infinite nuove superficie Σ_2.

È utile osservare che in forza delle (91) l'invariante $\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{G_1}}$ della superficie Σ_1 rispetto all'inversione, coincide con l'invariante H dell'equazione di Laplace relativa al sistema coniugato iniziale (G); similmente l'invariante $\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{E_2}}$ della superficie Σ_2 coincide con l'invariante H.

§ XI. Determinazione dei sistemi coniugati (G) a invarianti uguali, assegnatone l'invariante.

28. Per quanto abbiamo visto precedentemente, assegnare l'invariante di un sistema coniugato (G) equivale ad assegnare una soluzione dell'equazione di 4.° ordine (64).

Sappiamo inoltre dal § VIII che data una soluzione ω dell'equazione (64) si hanno ∞^3 sistemi coniugati (G) a invarianti uguali, che ammettono per invariante la funzione

$$H=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Per determinarli effettivamente occorre integrare il sistema completo (73), (74); indi si porrà:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{2W}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}.$$

Nota in questo modo la funzione φ, si avranno dalle (30) le funzioni E, F, G, e dalle (40), (41), (47) le funzioni D, D''.

Determinate così le quantità E, F, G, D, D'' si determineranno le funzioni x, y, z integrando il sistema completo (7), (8), (9).

29. Però dopo i risultati ottenuti al paragrafo precedente possiamo stabilire un metodo mediante il quale si possono dedurre *con soli calcoli algebrici e di derivazione* da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali ∞^3 sistemi coniugati (G) a invarianti uguali aventi in comune col primo l'invariante.

Invero da quanto è dimostrato nel sudetto paragrafo discende facilmente la proposizione:

Da un noto sistema coniugato (G) a invarianti uguali, applicando la trasformazione $L\,I\,L^{-1}$ (o la trasformazione $L^{-1}\,I\,L$) si hanno infiniti sistemi coniugati (G) a invarianti uguali dipendenti da tre costanti arbitrarie. Tali sistemi coniugati (G) avranno in comune col sistema coniugato iniziale l'invariante.

§ XII. Le trasformazioni degl'invarianti dell'equazione (64).

30. Abbiamo risoluta nel paragrafo precedente la questione di determinare i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali assegnatone l'invariante; ora vogliamo stabilire una trasformazione per l'invariante, ossia una trasformazione per gl'integrali dell'equazione (64).

Tale trasformazione si riassume nel seguente teorema:

Se ω *è una soluzione della* (64) *il sistema di equazioni* (73), (74) *è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione* Ω *con tre costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione dell'equazione differenziale di 4.° ordine* (64).

Per la dimostrazione scriviamo la terza delle (73) sotto la forma:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{\cos\omega-\cos\Omega}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\,. \tag{107}$$

Tenendo presente quest'ultima si ricava facilmente che la (74) si può anche scrivere come segue:

$$\left.\begin{aligned}4\,W^2=(\cos\Omega-\cos\omega)\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial v}\frac{\partial(\omega-\Omega)}{\partial v}-\\ -(\cos\Omega-\cos\omega)^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2.\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Ora dalla (107) per derivazione tenendo conto delle (73), (74), (107) dopo riduzione si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\cot\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}+\\ +\frac{1}{W}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

Inoltre da questa derivando rispetto a v e tenendo sempre conto delle (73), (74), (107) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}-\\ -\frac{1}{2W^2}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}\,,\end{aligned}$$

ossia per la (74):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\cot\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}-\\ -\frac{1}{4\,W^2}(\cos\omega-\cos\Omega)^2\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\end{aligned}$$

Infine facendo uso della (107) scriveremo:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right) = \cot\Omega \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4W^2} (\cos\omega - \cos\Omega)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} -$$

$$- \frac{1}{4W^2} (\cos\omega - \cos\Omega) \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial u} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v},$$

e per la (108):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right) = \cot\Omega \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right)^{-1},$$

ed è così stabilita la proposizione.

§ XIII. Le trasformazioni dei sistemi coniugati (G) a invarianti uguali.

31. Completeremo i risultati ottenuti nel paragrafo precedente dimostrando il seguente teorema:

Se x, y, z sono le coordinate d'un punto che descrive un sistema coniugato (G) a invarianti uguali, ponendo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= e^{-2\varphi} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= e^{-2\varphi} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= e^{-2\varphi} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -e^{-2\varphi} \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -e^{-2\varphi} \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= -e^{-2\varphi} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

si avranno per quadrature tre funzioni ξ, η, ζ che sono le coordinate di un nuovo punto che descrive un nuovo sistema coniugato (G) a invarianti uguali.

Infatti si verifica facilmente che le (109) sono coesistenti; inoltre sulla superficie luogo del punto ξ, η, ζ le linee u v sono coniugate, e si ha:

$$E' = e^{-2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2, \quad G' = e^{-2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}' = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}' = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

e per conseguenza:

$$\frac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}',$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{E'}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}'.$$

32. Ora supposto il sistema iniziale (G) ottenuto col procedimento indicato al § XI, denotando con H_1 l'invariante del nuovo sistema coniugato, sarà:

$$H_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$H_1=2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-H,$$

e sostituendo per H e φ le loro espressioni effettive:

$$H_1=\frac{1}{2W^2}\operatorname{sen}\frac{\Omega-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\Omega+\omega}{2}\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial u}\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Questa infine tenendo presente la (74), la (107) e la (108) facilmente si riduce alla forma:

$$H_1=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)^{-1}.$$

Le formole (109) dànno adunque per quadrature una trasformazione per i sistemi coniugati (G) a invarianti uguali che chiameremo *trasformazione G*; mediante la quale la funzione ω si cambia in Ω e l'invariante H in H_1.

Frattanto rimane stabilito un metodo di trasformazioni per i sistemi coniugati (G) a invarianti eguali, che consiste nel comporre la trasformazione LIL^{-1} (o la trasformazione $L^{-1}IL$) colla trasformazione G.

Sembra assai notevole che l'applicazione successiva ed illimitata di questo metodo di trasformazioni richiede soltanto successive quadrature.

Transformations of Minimal Surfaces.

(*By* LUTHER PFAHLER EISENHART.)

In a Memoir published by CALAPSO in the *Annali* (*), the author has developed at length the theory and transformations of a class of surfaces, discovered by GUICHARD (**) and characterized by the property:

Given a surface N of the class; « there exists a surface N' having the same spherical representation of its lines of curvature as the surface N, and such that if r_1, r_2 are the principal radii of curvature of N, and r'_1, r'_2 the corresponding radii of N', one has

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.}, \tag{I}$$

the constant being different from zero ».

CALAPSO has shown that, if a surface be referred to its lines of curvature, the necessary and sufficient condition that it be a surface N is that either of the following conditions be satisfied:

$$\left(\sqrt{G}\,\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\,\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2 = G - E, \tag{II}$$

$$\left(\sqrt{G}\,\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\,\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2 = G + E, \tag{III}$$

where the functions E, G, D, D'' are the fundamental quantities of the surface. According as a surface satisfies the first or second of these conditions, it is called by CALAPSO a *surface of* GUICHARD *of the first kind* or *of the second kind.*

In the present Note we show that one of the surfaces parallel to a min-

(*) *Alcune superficie di* GUICHARD *e le relative trasformazioni* [Annali, ser. III, vol. XI, p. 201-251, (1905)].

(**) *Sur les Surfaces isothermiques* [Comptes Rendus, vol. 130, p. 159].

imal surface satisfies (II) and that the surface N' associated with it after the manner of the above theorem is a sphere. After deducing these results in § 1, we apply in the subsequent §§ the results of GUICHARD and CALAPSO to this group of surfaces of GUICHARD. We shall refer to these particular surfaces as *surfaces P*.

GUICHARD has shown that from a surface of the first kind one can deduce an infinity of isothermic surfaces referred to their lines of curvature each of which is the locus of a point A situated on an isotropic tangent to the surface N. In § 2 it is found that these transforms of a surface P are minimal surfaces; hence we have a transformation from the minimal surface, S, which is parallel to P, to new minimal surfaces, which for convenience we shall call the surfaces $\overline{S}$.

In § 3 we apply to the P-surfaces parallel to the surfaces $\overline{S}$ (call them the surfaces $\overline{P}$) the GUICHARD transformations and find that the determination of all these transformations requires only quadratures. However, these new minimal surfaces are imaginary.

In § 4 we apply to the surfaces $\overline{P}$ the transformation of GUICHARD in which $+i$ has been replaced by $-i$ and vice-versa. Among the infinity of transforms of a surface $\overline{P}$ there is always one real minimal surface other than the original surface S.

In this manner we can obtain from a given minimal surface an infinity of real minimal surfaces, whose determination requires the solution of a pair of RICCATI equations. The relation between the original surface and any one of these transforms is perfectly reciprocal, so that when the transforms S_1 of S have been found, one can get the transforms S'_1 of the surfaces S_1 by quadratures.

CALAPSO has shown (*) that, given any isothermic surface, a surface of GUICHARD can be found by inverting the transformation of GUICHARD. In § 5 we apply this inverted transformation and also its conjugate to the surfaces $\overline{S}$, and in both cases we find that all the transforms are imaginary.

(*) L. c., pag. 230.

§ 1. Surfaces P.

Consider the minimal surface S with the linear element

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2), \tag{1}$$

and for which the coefficients of the second quadratic form are

$$D = -1, \qquad D'' = 1. \tag{2}$$

Now the linear element of the spherical representation is

$$d s'^2 = e^{-2\theta} (d u^2 + d v^2), \tag{3}$$

and the Gauss and Codazzi equations are satisfied, if θ is a solution of the equation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}. \tag{4}$$

If we denote by X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X, Y, Z the direction-cosines of the tangents to the curves $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ and of the normal to the surface respectively, we have (*)

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^\theta X_1, & \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1, & \dfrac{\partial X}{\partial u} = e^{-\theta} X_1, \\
\dfrac{\partial x}{\partial v} = e^\theta X_2, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X, & \dfrac{\partial X}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2,
\end{array}\right\} \tag{5}$$

and similar equations in the y's and z's.

A surface parallel to S at the distance a is given by

$$\xi = x - a X, \qquad \eta = y - a Y, \qquad \zeta = z - a Z.$$

The fundamental quantities of this surface are found to be

$$E = (e^\theta - a e^{-\theta})^2, \qquad F = 0, \qquad G = (e^\theta + a e^{-\theta})^2,$$

$$D = -e^{-\theta} (e^\theta - a e^{-\theta}), \qquad D' = 0, \qquad D'' = e^{-\theta} (e^\theta + a e^{-\theta}).$$

(*) Bianchi, *Lezioni*, vol. II, p. 336.

These expressions satisfy equation (II), if $a = 1$ and only in this case. Hence the surface defined by

$$\xi = x - X, \qquad \eta = y - Y, \qquad \zeta = z - Z, \tag{6}$$

is a surface of Guichard of the first kind; we designate such a surface by P. From above it is seen that the fundamental quantities for P are

$$E = 4\sinh^2\theta, \quad G = 4\cosh^2\theta, \quad D = -2\,e^{-\theta}\sinh\theta, \quad D'' = 2\,e^{-\theta}\cosh\theta. \tag{7}$$

Calapso has shown (*) that the necessary and sufficient condition that a surface be a surface of Guichard is that the linear elements of the surface and its spherical representation be reducible to the respective forms.

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= e^{2t}(\sinh^2\Theta\, du^2 + \cosh^2\Theta\, dv^2) \\ d\sigma'^2 &= (\cosh\Theta + H\sinh\Theta)^2\, du^2 + (\sinh\Theta + H\cosh\Theta)^2\, dv^2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

the lines of curvature being parametric, and the functions t, H and Θ being solutions of the system of equations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial u} = (H + \coth\Theta)\frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = (H + \tanh\Theta)\frac{\partial t}{\partial v}, \\ &\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + \coth\Theta\,\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \tanh\Theta\,\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{1}{\sinh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u} + \\ &\qquad + \frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial v} + (\cosh\Theta + H\sinh\Theta)(\sinh\Theta + H\cosh\Theta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

In order that (3) may take the form of the second of (8), we must have

$$\cosh\Theta + H\sinh\Theta = e^{-\theta}, \qquad \sinh\Theta + H\cosh\Theta = -\,e^{-\theta},$$

from which it follows that

$$\Theta = \theta, \qquad H = -1. \tag{10}$$

Moreover, the first of (8) reduces to (1), if

$$e^t = 2. \tag{11}$$

In consequence of (4) equations (9) are satisfied by the above values (10), (11).

(*) L. c., p. 214.

Calapso has shown (*) that the surface N', which is related to N in the manner stated in the theorem leading to the relation (I), is defined by the forms (8), where now the functions t_1, H_1, Θ_1 relating to N' are given by

$$e^{t_1} = e^{-t}(1 - H^2), \quad \sinh \Theta_1 = \frac{-1}{1-H^2}\left[\sinh \Theta (1 + H^2) + 2H \cosh \Theta\right],$$

$$\cosh \Theta_1 = \frac{1}{1-H^2}\left[\cosh \Theta (1 + H^2) + 2H \sinh \Theta\right].$$

When the surface N is a surface P, the surface N' is the unit sphere upon which the Gaussian representation of P is made.

§ 2. The Transformation of Guichard.

Guichard (**) has announced the following theorem:

Given a surface satisfying conditions (8) and (9), a function φ can be determined in such a way that the surface $\overline{S}$ defined by

$$\overline{x} = \xi + e^{\varphi}(X_1 + i X_2), \quad \overline{y} = \eta + e^{\varphi}(Y_1 + i Y_2), \quad \overline{z} = \zeta + e^{\varphi}(Z_1 + i Z_2) \quad (12)$$

is isothermic.

Calapso shows (***) that the function φ is determined by the following pair of illimitably integrable equations:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \Theta}{\partial v} = -\sinh \Theta \cosh(\varphi - t) -$$

$$- i \tanh \Theta \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{1}{2} e^{\varphi - t}(H^2 \sinh \Theta + 2H \cosh \Theta),$$

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \cosh \Theta \sinh(\varphi - t) -$$

$$- \coth \Theta \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{1}{2} e^{\varphi - t}(H^2 \cosh \Theta + 2H \sinh \Theta),$$

(*) L. c., p. 214.
(**) L. c., p. 161.
(***) L. c., p. 224.

When the surface of Guichard is a surface P, these reduce to

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{1}{2} e^{\varphi - \theta} - e^{-\varphi} \sinh \theta, \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{1}{2} e^{\varphi - \theta} - e^{-\varphi} \cosh \theta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In consequence of (5) and (6) we get from (12) by differentiation

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= 2 \sinh \theta\, X_1 + e^{\varphi} (X_1 + i X_2) \left(\frac{1}{2} e^{\varphi - \theta} - e^{-\varphi} \sinh \theta\right) - e^{\varphi - \theta} X, \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= 2 \cosh \theta\, X_2 - i e^{\varphi} (X_1 + i X_2) \left(\frac{1}{2} e^{\varphi - \theta} - e^{-\varphi} \cosh \theta\right) + i e^{\varphi - \theta} X, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

so that

$$\bar{E} = \Sigma \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)^2 = e^{2\varphi}, \quad \bar{F} = \Sigma \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0, \quad \bar{G} = \Sigma \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)^2 = e^{2\varphi}. \tag{15}$$

From (14) we find that the direction-cosines, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, of the normal to the surface $\bar{S}$ are of the form

$$\bar{X} = e^{-\varphi} (X_1 - i X_2) + X. \tag{16}$$

By differentiation we get

$$\frac{\partial X}{\partial u} = e^{-2\varphi} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = - e^{-2\varphi} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, \tag{17}$$

so that

$$\bar{D} = - \Sigma \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = -1, \quad \bar{D}' = 0, \quad \bar{D}'' = 1. \tag{18}$$

Hence $\bar{S}$ is a minimal surface, and the linear element of its spherical representation is

$$d \bar{s}'^2 = e^{-2\varphi} (d u^2 + d v^2). \tag{19}$$

Denoting by $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1$; $\bar{X}_2, Y_2, \bar{Z}_2$, the direction-cosines of the tangents to the curves $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ respectively on $\bar{S}$, we have

$$\bar{X}_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \qquad \bar{X}_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

which in consequence of (14) reduce to

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_1 &= \left(\frac{1}{2}e^{\varphi-\theta}+e^{-\varphi}\sinh\theta\right)X_1+\left(\frac{1}{2}e^{\varphi-\theta}-e^{-\varphi}\sinh\theta\right)i\,X_2-e^{-\theta}X,\\ i\,\overline{X}_2 &= \left(\frac{1}{2}e^{\varphi-\theta}-e^{-\varphi}\cosh\theta\right)X_1+\left(\frac{1}{2}e^{\varphi-\theta}+e^{-\varphi}\cosh\theta\right)i\,X_2-e^{-\theta}X.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

If e^{φ} be replaced by ρ, equations (13) take the Riccati form. Hence there exists a family of imaginary minimal surfaces depending upon a parameter, transforms of P and consequently of S; and the complete determination of these surfaces requires the integration of a pair of Riccati equations.

§ 3. Guichard Transformations of $\overline{S}$.

Since $\overline{S}$ is a minimal surface, we have a new surface $\overline{P}$ parallel to S. From (6), (12) and (16) it follows that this surface is defined by equations of the form

$$\overline{\xi}=\xi+e^{\varphi}(X_1+i\,X_2)-e^{-\varphi}(X_1-i\,X_2)-X. \tag{21}$$

We apply to $\overline{P}$ a transformation of Guichard. From (12) it follows that the transform S_1 is defined by equations of the form

$$x_1=\overline{\xi}+e^{\varphi_1}(\overline{X}_1+i\,\overline{X}_2), \tag{22}$$

where φ_1 is a solution of the equations

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\varphi}-e^{-\varphi_1}\sinh\varphi,\quad i\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\varphi}-e^{-\varphi_1}\cosh\varphi. \tag{23}$$

In consequence of (20) and (21) equation (22) is reducible to

$$x_1=\xi+(1+e^{\varphi_1-\theta})\left[e^{\varphi}(X_1+i\,X_2)-e^{-\varphi}(X_1-i\,X_2)\right]-(2e^{\varphi_1-\theta}+1)X. \tag{24}$$

On replacing $\xi+X$ by x in this equation, we get a transformation involving two parameters, which changes the original minimal surface S into another minimal surface S_1.

If equations (23) be written in the form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = -\frac{1}{2}e^{\varphi-\varphi_1} + \frac{1}{2}e^{-\varphi}\sinh\varphi_1,$$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = -\frac{1}{2}e^{\varphi-\varphi_1} + e^{-\varphi}\cosh\varphi_1,$$

and be compared with (13), it is seen that a solution of them is given by

$$e^{\varphi_1} = -e^{\theta}. \tag{25}$$

Hence, since equations (23) are of the Riccati type, they are integrated completely by quadratures. Therefore, the complete determination of the doubly-infinite group of surfaces S_1 defined by (24), requires the solution of a pair of Riccati equations and quadratures.

Evidently the transformation determined by (25) leads to S itself. We inquire whether any of the other surfaces S_1 are real, when S is real.

Il we put

$$\varphi = \alpha + i\beta,$$

where α and β are real, equations (13) are replaced by

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \left(\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta} - e^{-\alpha}\sinh\theta\right)\cos\beta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta} + e^{-\alpha}\cosh\theta\right)\sin\beta,\\
&\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta} + e^{-\alpha}\sinh\theta\right)\sin\beta,\\
&\frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\left(\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta} - e^{\alpha-}\cosh\theta\right)\cos\beta.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

In like manner, if φ_1 is real, equations (23) can be written

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \left(\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\alpha} - e^{-\varphi_1}\cosh\alpha\right)\cos\beta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\left(\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\alpha} + e^{-\varphi_1}\cosh\alpha\right)\sin\beta,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial \beta}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\alpha} - e^{-\varphi_1}\sinh\alpha\right)\cos\beta,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} = -\left(\frac{1}{2}e^{\varphi_1-\alpha} + e^{-\varphi_1}\sinh\alpha\right)\sin\beta.$$

In order that the first two equations of these two sets be consistent, we must have

$$\frac{1}{2}\, e^{\varphi_1-\alpha} - e^{-\varphi_1}\cosh\alpha - \frac{1}{2}\, e^{\alpha-\theta} + e^{-\alpha}\sinh\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2}\, e^{\varphi_1-\alpha} + e^{-\varphi_1}\cosh\alpha + \frac{1}{2}\, e^{\alpha-\theta} + e^{-\alpha}\cosh\theta = 0,$$

from which by addition we get (25). Hence *of all the surfaces defined by* (24) *S is the only real one.*

§ 4. Conjugate Guichard Transformations of $\overline{S}$.

We apply now to the surface $\overline{P}$, defined by (21), the conjugate transformation of Guichard, that is, the transformation with $+i$ replaced by $-i$.

Now the equations analogous to (23) are

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{2}\, e^{\theta_1-\varphi} - e^{-\theta_1}\sinh\varphi,\quad i\,\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\frac{1}{2}\, e^{\theta_1-\varphi} + e^{-\theta_1}\cosh\varphi, \tag{27}$$

and the coordinates of the transform S_1 are of the form

$$x_1 = \overline{\xi} + e^{\theta_1}(\overline{X_1} - i\,\overline{X_2}),$$

which reduces to

$$x_1 = \xi + e^{\varphi}(X_1 + i\,X_2) + (e^{\theta_1+\theta} - 1)\, e^{-\varphi}(X_1 - i\,X_2) - X. \tag{28}$$

As in the preceding case, if $\xi + X$ be replaced by x, this gives a transformation from one minimal surface, S, to a double-infinite family of surfaces, S_1. Later we shall find a particular solution of equations (27); hence the complete determination of all the above transforms of a surface S requires the solution of an equation of Riccati and quadratures.

We inquire whether any of these transforms are real. On the assumption that θ_1 is real equations (27) can be written

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \left(\frac{1}{2}\, e^{\theta_1-\alpha} - e^{-\theta_1}\cosh\alpha\right)\cos\beta,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}\, e^{\theta_1-\alpha} + e^{-\theta_1}\cosh\alpha\right)\sin\beta, \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial u}+\frac{\partial \beta}{\partial v}&=\left(\frac{1}{2}e^{\theta_1-\alpha}-e^{-\theta_1}\sinh\alpha\right)\cos\beta,\\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v}-\frac{\partial \beta}{\partial u}&=\left(\frac{1}{2}e^{\theta_1-\alpha}+e^{-\theta_1}\sinh\alpha\right)\sin\beta.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

In order that equations (29) be consistent with the first two of (26), we must have

$$\frac{1}{2}e^{\theta_1-\alpha}-e^{-\theta_1}\cosh\alpha-\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta}+e^{-\alpha}\sinh\theta=0,$$

$$\frac{1}{2}e^{\theta_1-\alpha}+e^{-\theta_1}\cosh\alpha-\frac{1}{2}e^{\alpha-\theta}-e^{-\alpha}\cosh\theta=0,$$

which reduce to the single equation

$$e^{\theta_1}=2\cosh\alpha\,.\,e^{\alpha-\theta}.\tag{31}$$

It is readily found that this value of θ_1 satisfies equations (30).

Substituting in (28) and replacing ξ by $x-X$ we get the equation

$$x_1=x+2\,e^{\alpha}(\cos\beta\,X_1-\sin\beta\,X_2)-2\,X,\tag{32}$$

and similar expressions for y_1 and z_1 which define a real transform, S_1, of a given surface, S.

By differentiation we get

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u}&=(e^{2\alpha-\theta}\cos 2\beta-e^{-\theta})\,X_1-e^{2\alpha-\theta}\sin 2\beta\,X_2-2\,e^{\alpha-\theta}\cos\beta\,X,\\ \frac{\partial x_1}{\partial v}&=e^{2\alpha-\theta}\sin 2\beta\,X_1+(e^{2\alpha-\theta}\cos 2\beta+e^{-\theta})\,X_2-2\,e^{\alpha-\theta}\sin\beta\,X.\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

From these and similar expressions in y_1 and z_1 we derive the following values for the direction-cosines of the normal to S_1

$$X'=\tanh\alpha\,X+\frac{1}{\cosh\alpha}(\cos\beta\,X_1-\sin\beta\,X_2).\tag{34}$$

And the direction-cosines of the tangents to the curves $v=$ const., $u=$ const. on S_1 are of the respective forms

$$\left.\begin{aligned}X'_1&=\frac{1}{2\cosh\alpha}\left[(e^{\alpha}\cos 2\beta-e^{-\alpha})\,X_1-e^{\alpha}\sin 2\beta\,X_2-2\cos\beta\,X\right],\\ X'_2&=\frac{1}{2\cosh\alpha}\left[e^{\alpha}\sin 2\beta\,X_1+(e^{\alpha}\cos 2\beta+e^{-\alpha})\,X_2-2\sin\beta\,X\right].\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

From (32) and (34) we get

$$\Sigma X (x_1 - x) = -2, \qquad \Sigma X' (x_1 - x) = 2, \tag{36}$$

and

$$\Sigma (x_1 - x)^2 = 4 (e^{2\alpha} + 1).$$

Hence the line joining corresponding points on two surfaces S and S_1 makes equal angles with the normals to the surfaces at these points. As this angle is not a right angle, the transformation is different from the one due to THYBAUT (*).

From (34) it follows that the direction-cosines of the line of intersection of the tangent planes to S and S_1 at corresponding points are

$$\sin\beta X_1 + \cos\beta X_2 , \qquad \sin\beta Y_1 + \cos\beta Y_2 , \qquad \sin\beta Z_1 + \cos\beta Z_2 .$$

Hence this line is perpendicular to the projection upon the tangent plane to S of the line joining the points of tangency on S and S_1.

Denote by ξ, η, ζ the coordinates of the point of intersection of these two lines. Since we must have

$$\Sigma X (\xi - x) = 0, \qquad \Sigma X' (\xi - x') = 0,$$

if we put

$$\xi = x + \lambda (\cos\beta X_1 - \sin\beta X_2),$$

it is found that

$$\lambda = 2 \cosh \alpha.$$

From the foregoing discussion it follows that each pair of solutions of equations (26) gives a real transform of S. The form of these equations is such that the arbitrary constant entering in the complete solution appears in both α and β. From (32) it is seen that the points, on all the transforms, corresponding to a point on S lie in the plane parallel to the tangent plane to S and at the distance 2 from it.

We inquire whether the normals to the surfaces S and S_1 at corresponding points meet. In order that this may happen two functions λ and μ must exist which are such that

$$x_0 = x + \lambda X = x_1 + \mu X'.$$

and similar equations in $y's$ and $z's$.

(*) BIANCHI, *Lezioni*, vol. II, p. 334.

If the above values be substituted, it is found that these equations are satisfied when

$$\lambda = \mu = -2\, e^{\alpha} \cosh \alpha.$$

This result suggests that this transformation which we have found coincides with one previously discovered by BIANCHI (*) as an outcome of a theorem of GUICHARD. It is readily found that the two transformations are the same (**). From the investigation of BIANCHI we know that the locus of the point (x_0, y_0, z_0) is a surface applicable to a paraboloid of revolution.

§ 5. INVERSE TRANSFORMATIONS OF GUICHARD.

CALAPSO has shown (***) that the transformation of GUICHARD can be inverted, that is, every isothermic surface can be considered as derived from a GUICHARD surface by means of the construction indicated in the theorem of GUICHARD. We shall apply this inverse transformation to the surfaces $\overline{S}$.

In the first place we solve equations (16) and (20) for X, X_1, X_2, getting

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \left(\frac{1}{2}\, e^{\varphi-\theta} + e^{-\varphi} \sinh \theta\right) \overline{X}_1 - \left(\frac{1}{2}\, e^{\varphi-\theta} - e^{-\varphi} \cosh \theta\right) i\, \overline{X}_2 + e^{-\varphi}\, \overline{X}, \\ i\, X_2 &= -\left(\frac{1}{2}\, e^{\varphi-\theta} - e^{-\varphi} \sinh \theta\right) \overline{X}_1 + \left(\frac{1}{2}\, e^{\varphi-\theta} + e^{-\varphi} \cosh \theta\right) i\, \overline{X}_2 + e^{-\varphi}\, \overline{X}, \\ X &= -\, e^{-\theta} (\overline{X}_1 - i\, \overline{X}_2) + \overline{X}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

In consequence of these relations equation (12) can be written

$$\overline{x} = \xi + 2\,(\sinh \theta\, \overline{X}_1 + \cosh \theta \,.\, i\, \overline{X}_2 + \overline{X}). \tag{38}$$

If $\overline{S}$ is any minimal surface and the linear element of its representation is written in the form (19), the function φ must satisfy equation (4). But

(*) *Lezioni*, vol. II, p. 333.

(**) The formulae of comparison are

$$\frac{\Phi}{W} - 2\, e^{\alpha} \cosh \alpha, \quad \frac{\cos \beta}{\cosh \alpha} = -\frac{2\, e^{-\theta}}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha} = 2 \frac{e^{-\theta}}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

(***) L. c., p. 230.

this is the condition that equations (13) be consistent in θ. Hence (38) is the transformation from a surface $\overline{S}$ to P as well as equations (12) define the transformation from P to $\overline{S}$. But since equations (13) are completely integrable in θ for a particular φ, it follows that each of the surfaces defined by

$$\xi_1 = \overline{x} - 2\,(\sinh\theta_1\,\overline{X}_1 + \cosh\theta_1\, i\,\overline{X}_2 + \overline{X}), \tag{39}$$

where θ_1 is any solution of

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\frac{\partial\theta_1}{\partial v} = \frac{1}{2}\,e^{\varphi-\theta_1} - e^{-\varphi}\sinh\theta_1,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta_1}{\partial u} = \frac{1}{2}\,e^{\varphi-\theta_1} - e^{-\varphi}\cosh\theta_1, \tag{40}$$

is a surface of GUICHARD, P_1, which is an inverse of the surface $\overline{S}$, determined by the function φ.

From (37) it is seen that the direction-cosines of the normal to P_1 are of the form

$$X' = -e^{-\theta_1}\overline{X}_1 + e^{-\theta_1}\, i\,\overline{X}_2 + \overline{X}. \tag{41}$$

Denoting by S_1 the minimal surface parallel to P_1, we have

$$x_1 = \xi_1 + X',\quad y_1 = \eta_1 + Y',\quad z_1 = \zeta_1 + Z',$$

which by means of (39), (41), (12) and (20) reduce to

$$x_1 = x + (1 - e^{\theta_1-\theta})\,[e^{\varphi}(X_1 + i\,X_2) - e^{-\varphi}(X_1 - i\,X_2) - 2\,X], \tag{42}$$

and similar expressions for y_1 and z_1. Since θ is a solution of (40), the complete determination of the doubly-infinite family of transforms of S defined by (42) requires the solution of one pair of RICCATI equations (13) and quadratures.

If the differential quotients of φ be eliminated from equations (13) and (40), we get

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u} = {} & \left[\frac{1}{2}\,e^{\alpha}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) - e^{-\alpha}(\cosh\theta_1 - \cosh\theta)\right]\cos\beta + \\ & + i\left[\frac{1}{2}\,e^{\alpha}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) + e^{-\alpha}(\cosh\theta_1 - \cosh\theta)\right]\sin\beta,\\ i\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = {} & \left[\frac{1}{2}\,e^{\alpha}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) - e^{-\alpha}(\sinh\theta_1 - \sinh\theta)\right]\sin\beta + \\ & + i\left[\frac{1}{2}\,e^{\alpha}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) + e^{-\alpha}(\sinh\theta_1 - \sinh\theta)\right]\sin\beta.\end{aligned}$$

From this it follows that for θ_1 and θ to be real we must have

$$\frac{1}{2} e^{\alpha} (e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) + e^{-\alpha} (\cosh \theta_1 - \cosh \theta) = 0,$$

$$\frac{1}{2} e^{\alpha} (e^{-\theta_1} - e^{-\theta}) - e^{-\alpha} (\sinh \theta_1 - \sinh \theta) = 0,$$

which reduces to $\theta_1 = \theta$. Hence all the minimal surface transforms (42) of S are imaginary.

We pass finally to the case in which we apply to the surfaces $\overline{S}$ the conjugate inverse transformation. In place of equations (40) we have

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - i \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \frac{1}{2} e^{\varphi - \theta_1} - e^{-\varphi} \sinh \theta_1 \quad i \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = - \frac{1}{2} e^{\varphi - \theta_1} + e^{-\varphi} \cosh \theta_1,$$

and the equations of transformation are of the form

$$x_1 = x + e^{\varphi} (X_1 + i X_2) - e^{-\varphi} (e^{\theta_1 + \theta} + 1) (X_1 - i X_2) - 2 X.$$

Proceeding as in the former case, we find that the condition that θ_1 be real is

$$e^{\theta_1} = - e^{\alpha - \theta} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}),$$

which evidently is impossible.

Princeton University, January, 1906.

Sur les équations linéaires aux différences finies.

(Par M. Walter B. Ford, *à Ann Arbor.)*

Considérations préliminaires.

1. Pendant plusieurs années M. Dini a publié dans les *Annali* une série de Mémoires intéressants sur les équations différentielles. Toutes ses recherches se groupent, en dernier lieu, autour une expression qui se trouve dans le premier Mémoire (janvier, 1899) pour l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire du $n^{ième}$ ordre; cette expression a la forme d'une série infinie dont le $m^{ième}$ terme est une intégrale définie *m-tuple* qui dépend non seulement des coefficients de l'équation donnée, mais aussi de n fonctions arbitraires. Pour un choix convenable de ces fonctions il peut arriver que l'intégrale générale prendra une forme qui fait voir directement ses propriétés les plus importantes et c'est ainsi, en particulier, que dans son deuxième Mémoire (avril, 1899) M. Dini trouve que sa méthode s'applique à l'étude des intégrales de certaines équations différentielles linéaires quand on considère ces intégrales pour des valeurs très grandes de la variable indépendante. De cette manière, il arrive à un théorème général qui donne, comme conséquences spéciales, beaucoup des résultats importants de M. Poincaré (*) publiés en 1885, ainsi que certains résultats plus récents de M. Kneser (**). Mais, ce n'est pas ici le lieu d'énumérer toutes les applications et tous les résultats nombreux que M. Dini a trouvé dans cette série de Mémoires; il suffit de remarquer que sa méthode est tout à fait originale et

---

(*) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* American Journal of Mathematics, Vol. VII.

(**) *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments;* Journal de Crelle, t. 120, pp. 267-275 (1899).

qu'elle ne laisse rien à désirer au point de vue ni de sa généralité ni de la valeur des applications que l'on peut en faire.

Le caractère de cette méthode d'étudier les équations différentielles ainsi que l'analogie bien connue entre la théorie de telles équations et la théorie des équations aux différences finies nous porte à croire que l'on peut adapter la méthode à l'étude des intégrales des équations de cette dernière espèce, et c'est cette question que nous nous proposons dans le Mémoire actuel. D'ailleurs, il y a deux considérations spéciales qui nous semblent ajouter un intérêt supplémentaire à cette recherche. Autant que l'auteur en sache, il n'existe dans la litérature actuelle sur le calcul des différences finies aucun théorème analogue à celui que nous avons signalé plus haut relatif aux intégrales de certaines équations différentielles linéaires considérées pour les valeurs très grandes de l'argument. Pour être plus précis, si l'on a une équation linéaire aux différences finies sous la forme

$$A_0(x)\,y(x+n)+A_1(x)\,y(x+n-1)+A_2(x)\,y(x+n-2)+\cdots$$
$$\cdots+A_n(x)\,y(x)=0$$

où le coefficient $A_r(x)$, $r=0,\ 1,\ 2,\ldots\ n$ tend vers une limite bien déterminée quand $x=\infty$, il n'existe aucun théorème qui exprime d'une manière explicite l'allure de l'intégrale générale $y(x)$ quand x prend des valeurs très grandes. Il est vrai que M. Poincaré, dans le Mémoire cité plus haut, démontre sous les mêmes hypothèses l'existence de la limite $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y(x+1)}{y(x)}$, $y(x)$ étant une intégrale quelconque de l'équation donnée, et il trouve la valeur de cette limite; mais, le but que nous nous proposons est plutôt de déterminer le caractère de l'intégrale $y(x)$ *elle-même*, de sorte que les propriétés du rapport $\dfrac{y(x+1)}{y(x)}$, bien qu'elles ne soient pas le but de nos recherches, en résultent comme conséquences spéciales (*). En second lieu, un théorème

(*) De l'égalité $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y(x+1)}{y(x)}=k=$ *une valeur déterminée* on peut seulement conclure que, pour les valeurs assez grandes de x, il existe une relation de la forme

$$y(x+1)+[\varepsilon(x)-k]\,y(x)=0$$

où $\lim\limits_{x=\infty}\varepsilon(x)=0$. Quant à la fonction $y(x)$ elle-même, nous obtenons en effectuant l'intégratel que nous venons de l'indiquer pour les équations aux différences finies, une fois obtenu, aurait une application directe à l'étude de la convergence des fractions algébriques continues. En effet, si l'on représente par $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ la $n^{ième}$ réduite d'une quelconque des fractions algébriques continues qui correspondent à une série donnée de puissances:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (r = \textit{rayon de convergence} \geqq 0)$$

on sait bien (*) que chacun des polynômes $P_n(x)$, $Q_n(x)$ considéré pour une valeur fixée de x, satisfait à une équation linéaire aux différences finies du second ordre par rapport à la variable n, de sorte qu'en se servant d'un tel théorème on pourrait étudier la convergence de la fraction pour la valeur donnée de x: ce qui veut dire, étudier l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

C'est donc un théorème de ce caractère spécial que nous avions en vue et nous croyons l'avoir trouvé dans notre Théorème III, aussi bien que dans le Théorème I. Nous comptons publier plus tard les applications les plus importantes de ces deux Théorèmes, surtout les applications à la question de la convergence des fractions algébriques continues.

Enfin, avant d'aborder les considérations détaillées des paragraphes suivants, l'auteur se fait un devoir d'exprimer ici sa profonde gratitude à M. DINI. En comparant les pages qui suivent avec les deux premiers Mémoires mentionnés plus haut, on verra sans peine tout ce qu'il lui doit, et que les présentes recherches eussent, en somme, été impossibles sans l'aide, la direction que lui fournissait ainsi l'éminent mathématicien italien.

---

tion de cette équation par les méthodes bien connues (voir par exemple BOOLE, *A treatise on the calculus of finite differences*, London, 1860, pp. 101, 102)

$$y(x) = c\,[\varepsilon(x-1) - k]\,[\varepsilon(x-2) - k]\,[\varepsilon(x-3) - k]\ldots[\varepsilon(r) - k],$$

r étant une valeur quelconque fixée de x, et c étant la valeur de $y(r)$. Mais, cette expression a la forme d'un produit dans lequel le nombre des facteurs croît indéfiniment avec x, et par conséquent elle ne s'adapte pas, au moins en général, à l'étude de la question que nous avons posée.

(*) Voir par exemple la thèse de M. PADÉ: *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*. Annales de l'École Normale supérieure, 3ième série, t. 9, supplément, p. 43 (1892).

2. Nous résumons, d'abord quelques relations générales du calcul des différences finies.

Représentons par $y(x)$ une fonction (réelle ou complexe) de la variable réelle x et supposons que cette fonction soit définie (*) au moins pour tous les entiers positifs $x >$ un certain entier $\alpha > 0$. Alors, la $n^{ième}$ différence $\Delta^n y(x)$ de $y(x)$ est définie par la formule

$$\left.\begin{aligned} \Delta^n y(x) &= y(x+n) - n\,y(x+n-1) + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} y(x+n-2) - \cdots + (-1)^n y(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

et, avec les hypothèses indiquées cette différence constitue évidemment une fonction définie comme $y(x)$ au moins pour tous les entiers positifs $x \geqq \alpha$.

Comme résultat spécial de cette définition, nous remarquons tout d'abord l'existence des expressions $\Delta^r y(x+n-r)$; $r = 0, 1, 2, \ldots n$ lorsque $x \geqq \alpha$. De plus, pour les mêmes valeurs de x les trois relations générales existent:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n-r) &= y(x+n) - r\,\Delta y(x+n-1) + \\ &+ \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 y(x+n-2) - \cdots \\ &\cdots + (-1)^r \Delta^r y(x+n-r); \quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^r y(x+n-r) &= \Delta^r y(x) + (n-r)\,\Delta^{r+1} y(x) + \\ &+ \frac{(n-r)(n-r-1)}{2!} \Delta^{r+2} y(x) + \\ &+ \cdots + \Delta^n y(x); \quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^r y(x) &= \Delta^r y(x+n-r) - (n-r)\,\Delta^{r+1} y(x+n-r-1) + \\ &+ \frac{(n-r)(n-r-1)}{2!} \Delta^{r+2} y(x+n-r-2) - \\ &- \cdots + (-1)^{n-r} \Delta^n y(x); \quad r = 0, 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En effet, ces relations résultent directement quand on substitue pour les différences diverses leurs valeurs déterminées par l'équation (1).

(*) Nous employons toujours le mot *défini* dans le sens « défini d'une manière unique ».

Les formules (2), (3), (4) nous permettent de faire les observations suivantes qui nous seront utiles dans ce qui va suivre.

En nous bornant toujours aux valeurs de x qui sont des entiers positifs, supposons que pour $x \geqq \alpha$ la fonction $y(x)$ existe et satisfasse à une équation linéaire aux différences finies de la forme ordinaire :

$$\alpha_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \alpha_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x) + \cdots + \alpha_n(x)\,y(x) = 0 \qquad (5)$$

dans laquelle les coefficients α_r sont des fonctions données (réelles ou complexes) de x, c'est-à-dire, quand $x \geqq \alpha$ la fonction $y(x)$ existe et par conséquent aussi toutes les fonctions $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x), \ldots\, \Delta^n y(x)$ et pour les mêmes valeurs de x l'équation (5) se vérifie. Alors, il résulte de ce que nous venons de dire que les expressions

$$y(x+n),\ \Delta y(x+n-1),\ \Delta^2 y(x+n-2), \ldots\ \Delta^{n-1} y(x+1),\ \Delta^n y(x)$$

existent quand $x \geqq \alpha$ et, d'après la formule (4) il résulte aussi que pour les mêmes valeurs de x ces expressions satisfont à une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned} a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + a_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x+2) + \cdots + \\ + a_{n-1}(x)\,\Delta y(x+n-1) + a_n(x)\,y(x+n) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

les coefficients a_r étant des fonctions linéaires des coefficients α_r et étant déterminés par la formule suivante :

$$\left.\begin{aligned} a_r = \frac{(-1)^{n-r}}{r!}\Big[\frac{n!}{(n-r)!}\,\alpha_n - \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\,\alpha_{n-1} + \frac{(n-2)!}{(n-r-2)!}\,\alpha_{n-2} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-n}\frac{r!}{0!}\,\alpha_r\Big], \qquad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Réciproquement, si l'on a une fonction $y(x)$ qui existe pour $x \geqq \alpha$ et satisfait à une équation (6) dans laquelle les a_r sont déterminés en termes des fonctions données α_r par les relations (7) cette fonction satisfera à l'équation (5) pour toutes les valeurs indiquées de x. En effet, il résulte de la relation (1) que les expressions $y(x)$, $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x), \ldots\, \Delta^n y(x)$ existent pour $x \geqq \alpha$ et en même temps, la relation (3) nous permet d'écrire l'équation donnée (6) sous la forme

$$\alpha'_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha'_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \cdots + \alpha'_n(x)\,y(x) = 0$$

où les coefficients α'_r sont déterminés par les équations

$$\alpha'_r = \frac{1}{r!}\left[\frac{n!}{(n-r)!}\,\alpha_n + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\,\alpha_{n-1} + \cdots + \frac{(r+1)!}{1!}\,\alpha_{r+1} + \frac{r!}{0!}\,\alpha_r\right],$$

$$r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n.$$

lesquelles suivant les relations données (7) se réduisent aux autres $\alpha'_r = \alpha_r$.

Ainsi, on peut toujours remplacer une équation linéaire aux différences finies, ayant la forme usuelle (5) par une autre de la forme (6) de manière que lorsque la fonction $y(x)$ est une intégrale de l'une pour $x \geqq \alpha$ elle sera aussi une intégrale de l'autre.

Plus généralement, on peut démontrer au moyen des relations générales (1), (2), (3) et (4) que si l'on a une équation linéaire dans n'importe quelle des formes suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0(x)\,\Delta^n y(x) + \alpha_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + \alpha_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + \alpha_n(x)\,y(x) = 0 \\
&a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + a_2(x)\,\Delta^{n-2} y(x+2) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + a_n(x)\,y(x+n) = 0 \\
&A_0(x)\,y(x+n) + A_1(x)\,y(x+n-1) + A_2(x)\,y(x+n-2) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + A_n(x)\,y(x) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

il est possible de trouver une équation ayant l'une ou l'autre des deux autres formes et telle que si $y(x)$ est une intégrale de l'une lorsque $x \geqq \alpha$ elle sera de même une intégrale de l'autre pour les mêmes valeurs de x.

Le premier théorème (*).

3. Cela posé, nous allons nous occuper de l'équation de la deuxième des formes (8):

$$a_0(x)\,\Delta^n y(x) + a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + a_n(x)\,y(x+n) = 0 \qquad (9)$$

(*) On trouve l'énoncé du théorème dans le § 8.

en supposant que les coefficients a sont des fonctions connues (réelles ou complexes) de la variable réelle x. En nous bornant toujours (comme il suffit pour les applications usuelles) aux valeurs entières positives de x, supposons que les coefficients a soient définis pour tous les entiers positifs $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$.

Supposons aussi d'abord que la fonction $y(x)$ qui joue le rôle d'intégrale soit donnée et soit définie (comme les coefficients a) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$.

Choisissons maintenant une fonction arbitraire $z(x)$ qui est aussi définie pour $x \geqq \alpha$. Pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,[a_0(x_1)\,\Delta^n y(x_1) + a_1(x_1)\,\Delta^{n-1} y(x_1+1) + \cdots +\\ + a_n(x_1)\,y(x_1+n)] = 0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

où la sommation a rapport (de la manière ordinaire) aux entiers x_1 qui se trouvent entre α et $x-1$ (α et $x-1$ compris). Nous allons considérer d'abord certaines transformations qui sont possibles pour le terme

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\,a_r(x_1)\,\Delta^{n-r} y(x_1+r); \quad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ (n-1). \qquad (11)$$

Or, en général $u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions définies pour $x \geqq \alpha$ on peut écrire pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} u(x_1)\,\Delta v(x_1) = \Big[u(x_1)\,v(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} - \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} v(x_1+1)\,\Delta u(x_1)\ (*). \qquad (12)$$

En effet, avec ces hypothèses on sait que les différences $\Delta u(x)$, $\Delta v(x)$ existent pour $x \geqq \alpha$ de sorte que pour les mêmes valeurs de x l'expression $u(x)\,\Delta v(x) + v(x+1)\,\Delta u(x)$ existe et quand $x \geqq \alpha + 1$ on peut écrire

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} [u(x_1)\,\Delta v(x_1) - v(x_1+1)\,\Delta u(x_1)] =$$

$$= \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} [u(x_1+1)\,v(x_1+1) - u(x_1)\,v(x_1)] =$$

$$= u(x)\,v(x) - u(\alpha)\,v(\alpha) = \Big[u(x_1)\,v(x_1)\Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x}.$$

Mais, cette formule est, en effet, la formule cherchée (12).

(*) Nous posons toujours $[f(x)]_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$ et $[f(x)]_{x=a} = f(a)$.

Cela posé, retournons au terme (11). Avec les hypothèses actuelles pour $a_r(x)$ et $z(x)$ la fonction $z(x)a_r(x)$ sera définie pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ et, suivant la définition (1) telle sera aussi l'expression $\Delta^{n-r-1} y(x+r)$. Par conséquent, nous pouvons appliquer la formule (12) au terme (11) en prenant $u(x) = z(x)\, a_r(x)$, $v(x) = \Delta^{n-r-1} y(x+r)$. Nous obtenons ainsi pour toutes les valeurs de $x > \alpha + 1$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r) =$$

$$= \Big[z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r-1} y(x_1+r) \Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} - \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} \Delta^{n-r-1} y(x_1+r+1)\, \Delta \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}.$$

Mais, on peut de nouveau appliquer la formule (12) à la sommation qui se trouve dans le second membre de cette dernière équation, de sorte qu'on a aussi

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r) =$$

$$= \Big[z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r-1} y(x_1+r) - \Delta \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}\, \Delta^{n-r-2} y(x_1+r+1) \Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} +$$

$$\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} \Delta^{n-r-2} y(x_1+r+2)\, \Delta^2 \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}.$$

Après $n-r$ applications pareilles de la formule (12) nous obtenons pour toutes les valeurs de $x > \alpha + 1$ la relation

$$\left.\begin{aligned} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r) &= \Big[P_r(x_1) \Big]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} + \\ &+ (-1)^{n-r} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, \Delta^{n-r} \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}, \\ &(r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où

$$\left.\begin{aligned} P_r(x) = z(x)\, a_r(x)\, \Delta^{n-r-1} y(x+r) - \\ - \Delta \{ z(x)\, a_r(x) \}\, \Delta^{n-r-2} y(x+r+1) + \cdots \\ + \cdots + (-1)^{n-r-1}\, \Delta^{n-r-1} \{ z(x)\, a_r(x) \}\, y(x+n-1). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Enfin, en donnant à r ses valeurs successives 0, 1, 2,... $(n-1)$ et en nous servant de la relation (10), nous obtenons la relation suivante pour les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\left[P_0(x_1) + P_1(x_1) + \cdots + P_{n-1}(x_1)\right]_{x_1=\alpha}^{x_1=x} + \\ + \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\left[z(x_1)\,a_n(x_1) - \Delta\{z(x_1)\,a_{n-1}(x_1)\} + \right. \\ \left. + \Delta^2\{z(x_1)\,a_{n-2}(x_1)\} - \cdots + (-1)^n \Delta^n\{z(x_1)\,a_0(x_1)\}\right] = 0.\end{array}\right\} \qquad (15)$$

Mais, suivant la définition (14), nous trouvons immédiatement que

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_{n-1}(x) = p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\ + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1)$$

où les expressions $p_0(x)$, $p_1(x)$,... $p_n(x)$ sont déterminées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = z(x)\,a_0(x) \\ p_1(x) = z(x)\,a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_1(x) - \Delta p_0(x) \\ p_2(x) = z(x)\,a_2(x) + \varepsilon_1 \Delta\{z(x)\,a_1(x)\} + \varepsilon_2 \Delta^2\{z(x)\,a_0(x)\} = \\ \qquad\qquad = z(x)\,a_2(x) - \Delta p_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}(x) = z(x)\,a_{n-1}(x) + \varepsilon_1 \Delta\{z(x)\,a_{n-2}(x)\} + \cdots + \\ \qquad + \varepsilon_{n-1} \Delta^{n-1}\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_{n-1}(x) - \Delta p_{n-2}(x) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

avec $\varepsilon_r = (-1)^r$.

Par conséquent, si nous posons encore

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x) = z(x)\,a_n(x) + \varepsilon_1 \Delta\{z(x)\,a_{n-1}(x)\} + \cdots + \\ \qquad + \varepsilon_n \Delta^n\{z(x)\,a_0(x)\} = z(x)\,a_n(x) - \Delta p_{n-1}(x) \end{array}\right\} \qquad (17)$$

l'équation (15) prend la forme

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1)\,p_2(x)\,\Delta^{n-3} y(x+2) + \cdots + \\ \qquad + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1) = \\ \qquad = \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,Z(x_1) + c \end{array}\right\} \qquad (18)$$

où

$$Z(x_1) = -p_n(x) \qquad (19)$$

et

$$c = [p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + p_{n-1}(x)\,y(x+n-1)]_{x=\alpha} \qquad (20)$$

4. La formule (18) une fois établie, comme conséquence nécessaire exprimant une relation entre les fonctions données $a_0(x)$, $a_1(x)$,... $a_n(x)$ et la fonction choisie $z(x)$, profitons maintenant de l'arbitraire qui existe dans le choix de cette fonction $z(x)$. Ainsi, en désignant par $z_1(x)$, $z_1(x)\dots z_n(x)$ n telles fonctions $z(x)$ et par $p_{r,0}(x)$, $p_{r,1}(x)$,..., $p_{r,n-1}(x)$, $Z_r(x)$, c_r respectivement les fonctions $p_0(x)$, $p_1(x)$,..., $p_{n-1}(x)$, $Z(x)$ et la constante c qui correspondent à la fonction $z_r(x)$, nous aurons le système suivant d'équations pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{1,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{1,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{1,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\
&p_{2,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{2,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{2,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_{n,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{n,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + \\
&\qquad + p_{n,n-1}\, y(x+n-1) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n .
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Par conséquent, nous n'avons qu'à supposer que les fonctions $z_r(x)$ aient été choisies de sorte que pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ le déterminant

$$P(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-1} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{22}$$

est différent de zéro, pour écrire (en particulier) toujours pour les mêmes valeurs de $x \geqq \alpha + 1$,

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)} \tag{23}$$

où $P_n(x)$ représente le déterminant obtenu de (22) en y remplaçant les éléments de la dernière colonne par les seconds membres correspondants des équations (21).

La relation (23) une fois obtenue, considérons en plus de détail les propriétés du déterminant (22). Nous avons d'abord

$$P(x) = \left| \begin{array}{lll} z_1 a_0(x) & z_1 a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_1 a_0(x) \} & \\ & & z_1 a_2(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_1 a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_1 a_0(x) \} \ldots \\ z_2 a_0(x) & z_2 a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_2 a_0(x) \} & \\ & & z_2 a_2(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_2 a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_2 a_0(x) \} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n a_0(x) & z_n a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_n a_0(x) \} & \\ & & z_n a_1(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_n a_1(x) \} + \varepsilon_2 \Delta^2 \{ z_n a_0(x) \} \ldots \end{array} \right|,$$

Mais, d'après la formule générale bien connue

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^n \{ u(x) v(x) \} = \Delta^n v(x) u(x) + n \Delta^{n-1} v(x+1) \Delta u(x) + \\ \quad + \dfrac{n(n-1)}{2!} \Delta^{n-2} v(x+2) \Delta^2 u(x) + \ldots + v(x+n) \Delta^n u(x) \end{array} \right\} \tag{24}$$

ce déterminant prend directement la forme

$$P(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{n-1} a_0(x) a_0(x+1) a_0(x+2) \ldots a_0(x+n-1) Q(x) \tag{25}$$

où

$$Q(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{vmatrix}. \tag{26}$$

De la même manière, nous obtenons pour le déterminant $P_n(x)$ la forme

$$P_n(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{n-2} a_0(x) a_0(x+1) a_0(x+2) \ldots a_0(x+n-2) Q_n(x)$$

où

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n) Z_1(x_1) + c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n) Z_2(x_1) + c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & \sum\limits_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n) Z_n(x_1) + c_n \end{vmatrix}.$$

Comme conséquence première de l'équation (25), on peut remplacer la condition introduite plus haut relative au déterminant $P(x)$, par la suivante:

le coefficient $a_0(x)$ de l'équation donné (9) avec le déterminant $Q(x)$ (qui ne dépend que des fonctions $z_r(x)$) ne doit s'annuler pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$. De plus, l'équation (23) prend maintenant la forme

$$y(x+n-1) = \varepsilon_{n-1} \frac{Q_n(x)}{a_0(x+n-1)\,Q(x)}.$$

Ou, si nous posons

$$A(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \dots & \Delta^{n-1} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \dots & \Delta^{n-1} z_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \dots & \Delta^{n-1} z_n & c_n \end{vmatrix} \tag{27}$$

et

$$\bar{q}(x, x_1) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \dots & \Delta^{n-2} z_1 & Z_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \dots & \Delta^{n-2} z_2 & Z_2(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \dots & \Delta^{n-2} z_n & Z_n(x_1) \end{vmatrix} \tag{28}$$

nous aurons pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$y(x+n-1) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\,Q(x)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\,\bar{q}(x, x_1).$$

Enfin, après la transformation $x - 1 = x'$, cette équation devient

$$\left.\begin{aligned} y(x+n) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} y(x_1+n)\,\bar{q}(x+1, x_1), \quad (x \geqq \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Cette dernière formule a évidemment une relation étroite avec la formule importante (26) du susdit premier Mémoire de M. Dini et nous allons l'employer pour étudier les intégrales $y(x)$ qui peuvent exister sous des hypothèses données pour une équation (9). Cependant, nous remarquons que jusqu'à ce point la signification précise de cette formule est celle d'une relation nécessaire entre les coefficients donnés $a_0(x)$, $a_1(x)$,… $a_n(x)$, l'intégrale $y(x)$

considérée comme donnée et une suite de n fonctions arbitraires $z_1(x)$, $z_2(x), \dots z_n(x)$ quand on suppose, en résumé, que

a) chacune des fonctions $a_0(x)$, $a_1(x), \dots a_n(x)$; $z_1(x)$, $z_2(x), \dots z_n(x)$ est définie pour toutes les valeurs entières de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$,

b) la fonction $y(x)$ est une intégrale donnée particulière de l'équation (9) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$,

c) le coefficient $a_0(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$,

d) on choisit les fonctions $z_1(x)$, $z_2(x) \dots z_n(x)$ de manière que le déterminant $Q(x)$ défini par l'équation (26) ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha + 1$.

5. Revenons alors à la formule (29). En remplaçant l'expression $y(x_1 + n)$ qui se trouve sous le signe de sommation par sa valeur déterminée par la même formule, nous obtenons la nouvelle relation pour les valeurs de $x \geqq \alpha$:

$$y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\, \bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} y(x_2+n)\, \bar{q}(x_1+1, x_2).$$

De la même manière on obtient maintenant

$$y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\, \bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\, \bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\, Q(x_2+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)}$$

$$\sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\, Q(x_2+1)} \sum_{x_3=\alpha}^{x_3=x_2} y(x_3+n)\, \bar{q}(x_2+1, x_3).$$

En général, après m applications pareilles de la formule (29) nous arrivons au résultat suivant dans lequel, comme dans les deux précédents, on suppose toujours que $x \geqq \alpha$:

$$\left.\begin{aligned}
y(x+n) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_2)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\,\bar{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} + \\
& + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \cdots \\
& \sum_{x_{m-1}=\alpha}^{x_{m-1}=x_{m-2}} \frac{\bar{q}(x_{m-2}+1,\,x_{m-1})}{a_0(x_{m-1}+n)\,Q(x_{m-1}+1)} \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \frac{A(x_m+1)\,\bar{q}(x_{m-1}+1,\,x_m)}{a_0(x_m+n)\,Q(x_m+1)} + \\
& + R_m(x)
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

où

$$R_m(x) = \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1,\,x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \cdots$$

$$\cdots \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \frac{\bar{q}(x_{m-1}+1,\,x_m)}{a_0(x_m+n)\,Q(x_m+1)} \sum_{x_{m+1}=\alpha}^{x_{m+1}=x_m} y(x_{m+1}+n)\,\bar{q}(x_m+1,\,x_{m+1}).$$

Par conséquent, nous arrivons au résultat suivant: si les fonctions $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ (qui doivent satisfaire aux conditions déjà spécifiées au § 4) sont telles qu'on a $\lim\limits_{m=\infty} R_m(x) = 0$ pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$, alors la formule (30) fournit le moyen d'exprimer explicitement sous la forme d'une série infinie convergente les valeurs que l'intégrale $y(x)$ doit avoir pour les valeurs $x \geqq \alpha + n$ de x.

De plus, il n'est pas difficile de montrer que cette dernière condition se présentera dans tous les cas où l'on peut écrire, pour un choix donné des fonctions z

$$\left| \frac{\bar{q}(x+1,\,x_1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \right| \leqq d < 1 \ (*) \quad \left\{ \begin{array}{c} d = \text{une constante indépendante} \\ \text{de } x \text{ et } x_1, \\ x \geqq \alpha, \quad x_1 \geqq \alpha. \end{array} \right\} \quad (e)$$

(*) Nous indiquons toujours par $|f|$ la valeur absolue ou le module de f suivant que f est réel ou complexe.

En effet, la valeur de x étant choisie, représentons par λ_x la valeur maximum de l'expression $y(x_1+n)$ lorsque $\alpha \leqq x_1 \leqq x$. Nous pourrons donc écrire pour la même valeur de x

$$|R_m(x)| < \lambda_x d^{m+1} K_m(x) \tag{31}$$

où

$$K_m(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_{m+1}=\alpha}^{x_{m+1}=x_m} 1. \tag{32}$$

Mais, pour cette expression $K_m(x)$ nous pouvons démontrer l'équation suivante :

$$K_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}(x-\alpha+m+1)(x-\alpha+m)\cdots(x-\alpha+1). \tag{33}$$

En effet (en suivant le procès d'une induction mathématique) on a d'abord l'équation évidente

$$K_0(x) = x-\alpha+1 \tag{34}$$

tandis que si l'on pose

$$K_{m-1}(x) = \frac{1}{m!}(x-\alpha+m)(x-\alpha+m-1)\ \ldots(x-\alpha+1) \tag{35}$$

on obtient

$$K_m(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} K_{m-1}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x}(x_1-\alpha+m)(x_1-\alpha+m-1)\ldots(x_1-\alpha+1) =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{y_1=m}^{y_1=x-\alpha+m} y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1).$$

Mais, il existe la formule générale

$$\sum_{y_1=p}^{y_1=q} y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big[y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m)\Big]_{y_1=p}^{y_1=q}$$

comme on voit en écrivant

$$y_1(y_1-1)(y_1-2)\ldots(y_1-m+1) =$$

$$= \frac{1}{m+1}[(y_1+1)y_1(y_1-1)\ldots(y_1-m+1) - y_1(y_1-1)\ldots(y_1-m)].$$

Ainsi, l'existence de la relation (35) nous permet d'écrire

$$K_m(x) = \frac{1}{(m+1)}\Big[y_1(y_1-1)\dots(y_1-m)\Big]_{y_1=m}^{y_1=x-\alpha+m+1} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!}(x-\alpha+m+1)(x-\alpha+m)\dots(x-\alpha+1);$$

en d'autres termes, d'après l'équation (34) nous avons démontré la formule désirée (33).

De la formule (33) nous avons maintenant

$$K_m(x) = \frac{(x-\alpha+m+1)!}{(x-\alpha)!\,m!} =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)!}(x-\alpha+m+1)(x-\alpha+m)\dots(m+1)$$

de sorte que nous pouvons écrire pour une valeur quelconque de $x \geqq \alpha$

$$K_m(x) = \frac{m^{x-\alpha+1}}{(x-\alpha)!}\Big\{1+\varepsilon_m(x)\Big\} \tag{36}$$

où $\lim\limits_{m=\infty} \varepsilon_m(x) = 0$.

Par conséquent, en revenant à l'inégalité (31) et en nous rappelant que $d < 1$ nous arrivons à l'équation désirée $\lim\limits_{m=\infty} R_m(x) = 0$, $x \geqq \alpha$.

6. Dans tout ce qui précède nous avons supposé toujours que la fonction $y(x)$ qui joue le rôle d'intégrale particulière de l'équation (9) était donnée, c'est-à-dire, nous avons observé la condition (b) du § 4. Sous cette condition, les fonctions $z_r(x)$ une fois choisies, les constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ qui se trouvent dans le déterminant $A(x)$ sont déterminées complètement par les n équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} c_r = [p_{r,0}(x)\,\Delta^{n-1}y(x) + p_{r,1}(x)\,\Delta^{n-2}y(x+1) + \cdots \\ \dots + p_{r,n-1}(x)\,y(x+n-1)]_{x=\alpha}; \qquad r = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Indépendamment de tout ce qui précède, soit donnée maintenant une équation (9) et une suite de n fonctions arbitraires $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$. Supposons que les coefficients donnés $a_0, a_1 \dots, a_n$ et les fonctions $z_1, z_2, \dots, z_n$ satisfassent à la condition (a) du § 4 et que les conditions (c) et (d) du même paragraphe soient satisfaites non seulement pour $x \geqq \alpha + 1$ mais aussi pour

$x=\alpha$. Enfin, supposons qu'il soit donné une suite de n constantes arbitraires $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$.

Alors, en vertu de l'équation (25) le déterminant $P(x)$ défini par l'équation (22) ne s'annulera pas pour $x \geqq \alpha$. En particulier, on aura $P(\alpha) \neq 0$ de sorte que, les constantes c_r étant connues, le système (37) détermine d'une manière unique les valeurs des quantités $\Delta^{n-1} y(\alpha)$, $\Delta^{n-2} y(\alpha+1), \ldots, y(\alpha+n-1)$. Par conséquent, d'après la relation (1) on trouve directement que, sous les mêmes conditions, les quantités $y(\alpha)$, $y(\alpha+1), \ldots$, $y(\alpha+n-1)$ seront aussi déterminées et déterminées d'une manière unique.

Ceci dit, supposons encore pour fixer les idées, que la condition (e) du § 5 soit satisfaite dans laquelle pour les fonctions données $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et pour les constantes données $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, l'expression $\bar{q}(x, x_1)$ est définie par l'équation (28).

Sous ces conditions, nous allons montrer que la série infinie

$$\left.\begin{aligned}
Y(x) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} + \\
&+ \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} + \\
&+ \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \\
&\sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{A(x_2+1)\,\bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} + \\
&+ \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \\
&\sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \frac{\bar{q}(x_1+1, x_2)}{a_0(x_2+n)\,Q(x_2+1)} \sum_{x_3=\alpha}^{x_3=x_2} \frac{A(x_3+1)\,\bar{q}(x_2+1, x_3)}{a_0(x_3+n)\,Q(x_3+1)} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

convergera pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ et sera telle que si nous posons $y(x+n) = Y(x)$ les valeurs de $y(x)$ ainsi déterminées dans l'intervalle $x \geqq \alpha + n$ avec les valeurs $y(\alpha+n-1)$, $y(\alpha+n-2), \ldots$, $y(\alpha)$ déterminées par les équations (37) constitueront une intégrale de l'équation donnée (9) pour toutes les valeurs (entières) de $x \geqq \alpha$: c'est-à-dire, pour une telle valeur de x les expressions $\Delta^n y(x)$, $\Delta^{n-1} y(x+1), \ldots, y(x+n)$ existeront et vérifieront l'équation (9).

Or, la valeur de $x \geqq \alpha$ étant donnée, la fonction $\dfrac{A(x_1+1)}{a_0(x_1+n)Q(x_1+n)}$ considérée pour les valeurs de x_1 dans l'intervalle $\alpha \leqq x_1 \leqq x$ aura une valeur maximum μ_x de sorte que le $m^{ième}$ terme de la série donnée, quand on le considère pour la valeur indiquée de x sera moindre en valeur absolue que $d^{m-1} \mu_x K_m(x)$ où $K_m(x)$ a la définition (32). Ainsi, d'après la relation (36) le même terme devient moindre en valeur absolue que

$$\mu_x d^{m-1} \frac{(m-2)^{x-\alpha+1}}{(x-\alpha)!} \{ 1 + \varepsilon_{m-2}(x) \}.$$

Il s'en suit que pour toutes les valeurs de m plus grandes qu'une certaine valeur m_0 et pour toutes les valeurs déjà indiquées pour x le même terme est moindre en valeur absolue que $G(x) d^{m-1} (m-2)^{x-\alpha+1}$, $G(x)$ étant indépendante de m, et puisque $d<1$ cette expression est le $m^{ième}$ terme d'une série convergente.

Pour prouver que la fonction indiquée $y(x)$ est une intégrale de l'équation (9) il suffit de supposer que la série (30) est convergente pour $x \geqq \alpha$: c'est-à-dire, il n'importe pas si la condition spéciale que nous avons signalée est satisfaite.

Or, la série étant convergente pour les valeurs de $x \geqq \alpha$, on établit directement pour les mêmes valeurs de x l'égalité

$$Y(x) = y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)Q(x+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)Q(x+1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} y(x_1+n)\, q(x+1, x_1)$$

d'où on a pour les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$:

$$y(x+n-1) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)Q(x)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)Q(x)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, \bar{q}(x, x_1).$$

Par conséquent, en substituant pour $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ leurs valeurs déterminées par (27) et (28), et en nous servant de l'équation (25), nous arrivons à la relation

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)} \qquad (x \geqq \alpha + 1) \tag{39}$$

où $P(x)$ est le déterminant (22), tandis que $P_n(x)$ est le déterminant

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,n-2} & \Phi_1 + c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \dots & p_{2,n-2} & \Phi_2 + c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \dots & p_{n,n-2} & \Phi_n + c_n \end{vmatrix}$$

avec

$$\Phi_r(x) = \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x-1} y(x_1+n)\, Z_r(x_1); \qquad r = 1,\ 2,\ 3, \dots\ n. \tag{40}$$

Cela posé, considérons le système de n fonctions $\eta_0(x)$, $\eta_1(x)$,... $\eta_{n-1}(x)$ dont chacune est définie (en vertu de nos hypothèses actuelles, et d'équation (25)) pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ au moyen des n équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} p_{1,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{1,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{1,n-1}\,\eta_0(x) &= H_1(x) + c_1 \\ p_{2,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{2,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{2,n-1}\,\eta_0(x) &= H_2(x) + c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_{n,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{n,1}\,\eta_{n-2}(x) + \dots + p_{n,n-1}\,\eta_0(x) &= H_n(x) + c_n \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

où $H_r(\alpha) = 0$ $(r = 1, 2, \dots n)$ tandis que pour des valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ la même expression $H_r(x)$ est définie par l'équation $H_r(x) = \Phi_r(x)$.

Or, nous avons d'abord pour la valeur spéciale $x = \alpha$ les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \eta_0(\alpha) = y(\alpha + n - 1), \quad \eta_1(\alpha) = \Delta\, y(\alpha + n - 2), \\ \eta_2(\alpha) = \Delta^2\, y(\alpha + n - 3), \dots \quad \eta_{n-1}(\alpha) = \Delta^{n-1}\, y(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

En effet, les quantités $y(\alpha)$, $y(\alpha+1)$,... $y(\alpha+n-1)$ étant déterminées par hypothèse de sorte qu'elles satisfont aux équations (37) on vérifie directement les relations indiquées (42).

D'ailleurs, en se bornant aux valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ on trouve tout de suite d'après l'équation (39) que

$$\eta_0(x) = y(x + n - 1). \tag{43}$$

En même temps, nous observons que toutes les différences $\Delta\,\eta_s(x)$ $(s = 0, 1, 2, \dots n-1)$ existent lorsque $x \geqq \alpha + 1$ parce que si l'on a en général une fonction $u(x)$ définie pour les valeurs de $x \geqq \alpha + 1$ il résulte de la définition (1) que la différence $\Delta\, u(x)$ existe pour toutes les mêmes valeurs de x.

Or, la $r^{ième}$ équation du système (41) est

$$p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-1}\,\eta_0(x)=H_r(x)+c_r\,.$$

Par conséquent, si l'on prend la première différence de chaque membre de cette équation, en se rappelant en même temps la formule générale

$$\Delta\,\{u(x)\,v(x)\}=u(x)\,\Delta\,v(x)+\Delta\,u(x)\,v(x+1),$$

il vient

$$\begin{gathered}p_{r,0}\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+p_{r,1}\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+p_{r,n-1}\,\Delta\,\eta_0(x)+\\+\Delta\,p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1)+\Delta\,p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1)+\cdots+\\+\Delta\,p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1)=y(x+n)\,Z_r(x).\end{gathered}$$

De plus, si nous observons que l'équation (43) nous permet d'écrire

$$y(x+n)=\eta_0(x+1)\,;\quad(x\geqq\alpha)\tag{44}$$

et si nous nous servons des définitions (16), (17) et (19) cette dernière équation devient

$$\begin{gathered}z_r\,a_0\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+[z_r\,a_1-\Delta\,p_{r,0}]\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+[z_r\,a_2-\Delta\,p_{r,1}]\,\Delta\,\eta_{n-3}(x)+\\+\ldots+[z_r\,a_{n-1}-\Delta\,p_{r,n-2}]\,\Delta\,\eta_0(x)+[z_r\,a_n-\Delta\,p_{r,n-1}]\,\eta_0(x+1)+\\+\Delta\,p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1)+\Delta\,p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1)+\cdots+\Delta\,p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1)=0\end{gathered}$$

ou

$$\theta\,z_r+\theta_1\,\Delta\,p_{r,0}+\theta_2\,\Delta\,p_{r,1}+\cdots+\theta_{n-1}\,\Delta\,p_{r,n-2}=0\,;\,(r=1,\;2,\ldots,\;n)\tag{45}$$

où

$$\theta=a_0(x)\,\Delta\,\eta_{n-1}(x)+a_1(x)\,\Delta\,\eta_{n-2}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\,\Delta\,\eta_0(x)+a_n(x)\,\eta_0(x+1)$$

et

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1\;\;=\eta_{n-1}(x+1)-\Delta\,\eta_{n-2}(x)\\ \theta_2\;\;=\eta_{n-2}(x+1)-\Delta\,\eta_{n-3}(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_{n-s-1}=\eta_{s+1}(x+1)-\Delta\,\eta_s(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_{n-2}=\eta_2(x+1)-\Delta\,\eta_1(x)\\ \theta_{n-1}=\eta_1(x+1)-\Delta\,\eta_0(x).\end{array}\right\}\tag{46}$$

Mais, en se servant encore de la relation $\Delta\,p_{r,s-1}=z_r\,a_s-p_{r,s}$ on voit tout de suite que le discriminant du système d'équations (45) se réduit à $\frac{\varepsilon_{n-1} P(x)}{a_0(x)}$ et, par suite (d'après nos hypothèses relatives à la fonction $P(x)$) ne s'annule pas pour $x \geqq \alpha$.

Ainsi, pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ nous aurons nécessairement $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$.

Après ces préparatifs nous sommes à même de démontrer la relation générale suivante

$$\Delta \eta_s(x) = \Delta^{s+1} y(x+n-s-1) \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{47}$$

En effet, d'après les équations (42) et (43), nous avons tout d'abord

$$\eta_0(x) = y(x+n-1); \quad (x \geqq \alpha).$$

Mais, il résulte de là (en remarquant encore qu'en général, lorsque $u(x)$ est définie pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ la différence $\Delta u(x)$ est nécessairement definie aussi pour les mêmes valeurs de x) que

$$\Delta \eta_0(x) = \Delta y(x+n-1) \qquad (x \geqq \alpha). \tag{48}$$

Or, en suivant le procès de l'induction mathématique, si nous posons

$$\Delta \eta_{s-1}(x) = \Delta^s y(x+n-s); \qquad (x \geqq \alpha)$$

nous avons, en nous rappelant les équations (46) et $\theta_{n-s} = 0$,

$$\eta_s(x+1) = \Delta^s y(x+n-s) \qquad (x \geqq \alpha).$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x+n-s-1) \qquad (x \geqq \alpha + 1). \tag{49}$$

Mais, d'après les équations (42) nous avons aussi $\eta_s(\alpha) = \Delta^s y(\alpha+n-s-1)$ de sorte qu'au lieu de la relation (49) il existe la relation plus générale

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x+n-s-1) \qquad (x \geqq \alpha).$$

Cette relation est donc établie aussitôt qu'on se rend compte de l'équation (48).

Mais, les relations (44) et (47) avec l'équation $\theta = 0$ nous donnent le résultat désiré: c'est-à-dire, la fonction $y(x)$ étant donnée de la manière indiquée plus haut, les expressions $\Delta_n y(x)$, $\Delta^{n-1} y(x+1), \ldots \Delta y(x+n-1)$, $y(x+n)$ existent pour $x \geqq \alpha$ et satisfont à l'équation (9).

7. Tout en conservant les hypothèses du dernier paragraphe, supposons maintenant non seulement que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ satisfassent aux conditions y introduites, mais aussi que la fonction

$$A_0(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq \alpha$. Dans ces circonstances, nous allons montrer que les raisonnements du même paragraphe nous permettent de trouver non seulement des intégrales particulières de l'équation donnée (9) quand $x \geqq \alpha$, mais aussi (les fonctions z_r étant une fois choisies) ils conduisent à l'intégrale générale. En effet, supposons qu'on donne aux constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ les n systèmes de valeurs $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots c_{r,n}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ et que $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ représentent respectivement les intégrales particulières correspondantes pour $x \geqq \alpha$ obtenues de la manière indiquée dans le § 6 et supposons que le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} \tag{50}$$

ait une valeur différente de zéro. Nous pourrons alors démontrer que toute intégrale de l'équation (9) pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ doit avoir la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \ldots + k_n y_n(x) \tag{51}$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des constantes (indépendantes de x) et pas toutes égales à zéro.

Pour prouver cela commençons par rappeler encore que les intégrales $y_r(x)$ satisfont aux équations (37). Ainsi, on trouve que le déterminant C peut se transformer dans la forme

$$C = P(\alpha) D(\alpha)$$

où $P(x)$ a la signification ordinaire, tandis que $D(\alpha)$ est le déterminant

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \Delta^{n-1} y_1(\alpha) & \Delta^{n-2} y_1(\alpha+1) & \ldots & y_1(\alpha+n-1) \\ \Delta^{n-1} y_2(\alpha) & \Delta^{n-2} y_2(\alpha+1) & \ldots & y_2(\alpha+n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_n(\alpha) & \Delta^{n-2} y_n(\alpha+1) & \ldots & y_n(\alpha+n-1) \end{vmatrix}.$$

De plus, ce dernier déterminant, quand on substitue pour les différences successives leurs valeurs déterminées par la formule (1) prend la forme

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} y_1(\alpha+n-1) & y_1(\alpha+n-2) & \dots & y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha+n-1) & y_2(\alpha+n-2) & \dots & y_2(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(\alpha+n-1) & y_n(\alpha+n-2) & \dots & y_n(\alpha) \end{vmatrix}. \tag{52}$$

Il résulte donc, d'après l'hypothèse $C = 0$ que nous pouvons écrire $D(\alpha) = 0$ où $D(\alpha)$ est défini par l'équation (51).

Cela posé, il convient d'établir les deux lemmes généraux suivants:

Lemme I: Soit donnée une équation linéaire aux différences finies (9) dans laquelle les coefficients a_0, a_1,... a_n sont définis pour toutes les valeurs (entières positives) de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$. Soit aussi $y_1(x)$, $y_2(x)$,... $y_n(x)$ n intégrales particulières de cette équation pour $x \geqq \alpha$. Enfin, supposons que l'expression $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ ne s'annule pas quand $x \geqq \alpha$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales indiquées soient dépendantes linéairement, c'est-à-dire qu'on ait pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ la relation

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \textit{ constantes}) \tag{53}$$

est que le déterminant (52) n'a pas la valeur zéro.

Or, il résulte tout de suite des propriétés bien connues des déterminants que la condition indiquée est nécessaire. Pour voir qu'elle est aussi suffisante nous observons d'abord que, en vertu des remarques générales du § 2 l'équation (9) peut s'écrire sous la forme

$$A_0(x)\,y(x+n) + A_1(x)\,y(x+n-1) + \cdots + A_n(x)\,y(x) = 0 \tag{54}$$

où les coefficients A sont liés par une rélation linéaire aux coefficients a et où, en particulier $A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Or, si le déterminant (52) est égal à zéro, nous savons bien qu'il existe n constantes λ_1, λ_2,... λ_n pas toutes égales à zéro de sorte qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\ \qquad\qquad \{x = \alpha,\ \alpha+1, \dots,\ \alpha+n-1\}. \end{array}\right\} \tag{55}$$

Mais, en général, si l'on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} x = p,\ p+1, \dots\ p+n-1 \\ \qquad p \geqq \alpha \end{array}\right\}. \end{array}\right\} \tag{56}$$

alors (en se rappelant que $A_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$) on a la même relation aussi pour $x = p + n$ comme cela résulte de l'équation (54).

Par conséquent, en commençant de l'équation (55) nous pourrons écrire sous les hypothèses actuelles la relation désirée (53).

Lemme II. Soit $y_1(x)$, $y_2(x)$,... $y_n(x)$ n intégrales linéairement indépendantes de l'équation (9) pour $x \geqq \alpha$. Alors, en supposant que les coefficients satisfont aux conditions du lemme précédent, toute autre intégrale de la même équation pour ces valeurs de x peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x); \quad (k_1, k_2, \ldots k_n \textit{ constantes}). \tag{57}$$

En effet, considérons le système de constantes k_1, k_2,... k_n déterminé par les équations

$$\left.\begin{array}{l} y(\alpha) = k_1 y_1(\alpha) + k_2 y_2(\alpha) + \cdots + k_n y_n(\alpha) \\ y(\alpha+1) = k_1 y_1(\alpha+1) + k_2 y_2(\alpha+1) + \cdots + k_n y_n(\alpha+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(\alpha+n-1) = k_1 y_1(\alpha+n-1) + k_2 y_2(\alpha+n-1) + \cdots + \\ \qquad\qquad + k_n y(\alpha+n-1). \end{array}\right\} \tag{58}$$

Or, le discriminant de ce système (qui n'est autre chose que le déterminant (52)) est différent de zéro suivant notre hypothèse, de sorte que ces constantes k existent et sont déterminées d'une manière unique. Mais, si l'on substitue dans l'équation (59) les valeurs de $y(\alpha)$, $y(\alpha+1)$,... $y(\alpha+n-1)$ données par les équations (58) il résulte directement d'après la condition $A_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ que

$$y(\alpha+n) = k_1 y_1(\alpha+n) + k_2 y_2(\alpha+n) + \cdots + k_n y_n(\alpha+n). \tag{59}$$

Enfin, en employant les valeurs de $y(\alpha+1)$, $y(\alpha+2)$,... $y(\alpha+n)$ déterminées par les équations (58), (59) on arrive à un résultat correspondant pour l'expression $y(\alpha+n+1)$ et en continuant de la même manière on arrive évidemment à la relation désirée (57).

Revenons donc aux remarques que nous avons faites au commencement du paragraphe. En rappelant qu'on a pour les intégrales $y_1(x)$, $y_2(x)$,... $y_n(x)$ l'inégalité $D(\alpha) \neq 0$ où $D(\alpha)$ est définie par l'équation (52) il résulte du lemme I que les mêmes intégrales sont linéairement indépendantes dans l'intervalle $x \geqq \alpha$. De là, en appliquant le lemme II, nous arrivons maintenant à l'équation désirée (51).

Enfin, nous observons que l'intégrale $y(x)$ que nous avons obtenue dans le § 6 et qui contient les n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$ représentera elle-même l'intégrale générale pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ lorsque (outre la condition indiquée plus haut relative à l'expression $A_0(x)$) les intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ correspondant aux n systèmes de valeurs

$$1, 0, 0, 0, \ldots 0; \quad 0, 1, 0, 0, \ldots 0; \quad 0, 0, 1, 0, 0, \ldots 0; \ldots; \quad 0, 0, 0, \ldots 1$$

existent pour toutes les valeurs x dans le même intervalle. En effet, d'après ce que nous venons de dire, les mêmes intégrales formeront un système fondamental pour l'intervalle $x \geqq \alpha$. De plus, quand on développe chacun des déterminants $A(x+1)$, $A(x_1+1), \ldots A(x_n+1)$ par rapport aux éléments de la dernière colonne l'intégrale $y(x)$ du § 6 prend la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n(x),$$

les constantes k étant arbitraires.

8. En résumé, nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant:

THÉORÈME I. *Soit donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$a_0(x) \Delta^n y(x) + a_1(x) \Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + a_n(x) y(x+n) = 0$$

les coefficients étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ *un certain entier* $\alpha \geqq 0$, *et le coefficient* $a_0(x)$ *ne s'annulant pour aucune des mêmes valeurs de* x.

Choisissons maintenant un système quelconque de n *fonctions* $z_1(x)$, $z_2(x)$, $z_3(x), \ldots z_n(x)$ *dont chacune est définie au moins pour toutes les valeurs entières positives de* $x \geqq \alpha$ *tandis que le déterminant*

$$Q(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{vmatrix}$$

ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x.

En même temps, choisissons un système de n *constantes arbitraires* c_1, c_2,

$c_3, \ldots c_n$ *et formons les déterminants*

$$A(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n \ldots & \Delta^{n-2} z_n & c_n \end{vmatrix},$$

$$q(x, x_1) = -\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & f_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & f_2(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n \ldots & \Delta^{n-2} z_n & f_n(x_1) \end{vmatrix}$$

où

$$f_r(x) = z_r a_n - \Delta \{ z_r a_{n-1} \} + \Delta^2 \{ z_r a_{n-1} \} + \cdots + (-1)^n \Delta^n \{ z_1 a_0 \};$$

$$r = 0, 1, \ldots n$$

et posons

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = \frac{A(x_1+1)\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)Q(x_1+1)}.$$

Enfin, formons la série infinie

$$Y(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0(x+n)Q(x+1)}[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots]$$

où

$$u_m(x) = (-1)^{m(n-1)} \sum_{x_1=\alpha}^{x_1=x} \sum_{x_2=\alpha}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_m=\alpha}^{x_m=x_{m-1}} \Phi(x, x_1)\Phi(x_1, x_2)\ldots$$
$$\ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\Psi(x_{m-1}, x_m)$$

et supposons que cette série soit convergente pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ $\left(\right.$*ce qui a lieu en particulier si* $\left|\frac{q(x+1, x_1)}{a_0(x+n)Q(x+1)}\right| \leqq d < 1$ *lorsque* $x \geqq \alpha$, $x_1 \geqq \alpha$, *d étant une constante*$\left.\right)$.

Alors, le système d'équations

$$c_r = [p_{r,0}\Delta^{n-1}y(x) + p_{r,1}\Delta^{n-2}y(x+1) + \cdots + p_{r,n-1}y(x+n-1)]_{x=\alpha};$$

$$r = 1, 2, \ldots n$$

où

$$p_{r,s} = z_r(x)\, a_s(x) - \Delta \{ z_r(x)\, a_{s-1}(x) \} + \cdots + (-1)^s \Delta^s \{ z_r(x)\, a_0(x) \}$$

détermine d'une manière unique une valeur pour chacune des expressions $\Delta^{n-1} y(\alpha)$, $\Delta^{n-2} y(\alpha+1), \ldots\ y(\alpha+n-1)$ et par conséquent, pour chacune des expressions $y(\alpha)$, $y(\alpha+1), \ldots\ y(\alpha+n-1)$ et la fonction $y(x)$ qui prend ces valeurs dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \alpha+n-1$ et les valeurs $y(x) = Y(x-n)$ dans l'intervalle $x \geqq \alpha+n$ sera une intégrale de l'équation donnée pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$.

De plus, cette intégrale sera l'intégrale générale pour les mêmes valeurs de x lorsque l'expression $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x, tandis que les intégrales particulières $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots\ y_n(x)$ qui correspondent aux n systèmes de valeurs

$$1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots\ 0;\ 0,\ 1,\ 0, \ldots\ 0; \ldots;\ 0,\ 0,\ 0, \ldots\ 1$$

des constantes c_1, $c_2, \ldots\ c_n$ existent dans le sens indiqué plus haut.

Ce théorème, bien que compliqué, a évidemment une grande généralité, surtout parce qu'on peut choisir les fonctions auxiliaires z_1, $z_2, \ldots\ z_n$ d'une façon bien arbitraire. En effet, on peut ordinairement choisir ces fonctions d'un nombre infini de manières, à chacune desquelles correspond une expression de la forme indiquée pour l'intégrale générale de l'équation donnée (9). En même temps, il résulte de cette liberté de choix qu'on peut obtenir souvent l'intégrale générale sous une forme spéciale, qui met en évidence directement ses propriétés les plus importantes.

Le deuxième théorème.

9. En dehors du théorème du paragraphe précédent, nous désirons établir un autre théorème général qui se prête surtout à l'étude des intégrales d'une équation (9) quand on les considère pour les valeurs très grandes de l'argument x.

A cet effet, revenons à l'équation (9) et posons encore les hypothèses du § 3 relatives aux coefficients a_0, $a_1, \ldots\ a_n$ et à l'intégrale $y(x)$. D'ailleurs, ayant choisis la fonction $z(x)$ comme dans le cas précédent, choisissons encore un entier positif, arbitrairement grand β.

Alors, nous pouvons écrire évidemment pour toutes les valeurs de x (x entier positif, comme toujours) dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\left[a_0(x)\,\Delta^n y(x_1) + a_1(x_1)\,\Delta^{n-1} y(x_1+1) + \cdots + \right.$$
$$\left. + a_n(x_1)\, y(x_1+n)\right] = 0.$$

Comme dans le cas précédent, considérons maintenant le terme

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r).$$

Or, en général, $u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions définies dans l'interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ on peut écrire pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle plus petit $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} u(x_1)\,\Delta v(x_1) = \Big[u(x_1)\, v(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta} - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} v(x_1+1)\,\Delta u(x_1). \qquad (60)$$

En effet, sous les hypothèses indiquées, chacune des différences $\Delta u(x)$, $\Delta v(x)$ existe pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$ et, par conséquent, il est de même pour l'expression $u(x)\,\Delta v(x) + v(x+1)\,\Delta u(x)$. Nous avons donc pour toutes ces valeurs de x

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} \left[u(x_1)\,\Delta v(x_1) + v(x_1+1)\,\Delta u(x_1)\right] =$$

$$= \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} \left[u(x_1+1)\, v(x_1+1) - u(x_1)\, v(x_1)\right] =$$

$$= u(\beta)\, v(\beta) - u(x)\, v(x) = \Big[u(x_1)\, v(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta},$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (60).

Nous obtenons donc dans le cas actuel pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$ l'équation

$$\sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} z(x_1)\, a_r(x_1)\, \Delta^{n-r} y(x_1+r) = \Big[P_r(x_1)\Big]_{x_1=x}^{x_1=\beta} +$$

$$+ (-1)^{n-r} \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \Delta^{n-r} \{ z(x_1)\, a_r(x_1) \}; \qquad r = 0,\ 1, \ldots\ n-1,$$

l'expression $P_r(x)$ étant définie par l'équation (14).

Par conséquent, en suivant encore de proche en proche les raisonnements du § 3 nous arrivons à la relation

$$p_0(x)\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1(x)\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + p_{n-1}(x)\, y(x+n-1) = \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta - 1)$$

$$- \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z(x_1) + c$$

les expressions p_0, $p_1, \ldots\, p_n$ et $Z(x)$ étant données comme dans le cas précédent par les équations (16), (17) et (19) tandis que pour la constante c on a maintenant

$$c = \left[p_0\,\Delta^{n-1} y(x) + p_1\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots + p_{n-1}\, y(x+n-1)\right]_{x=\beta}. \qquad (61)$$

Cela posé, répétons les opérations du § 4 avec les modifications qui se présentent naturellement. Ainsi, choisissons n fonctions arbitraires z_1, $z_2, \ldots$ z_n et considérons le système des n équations

$$p_{r,0}\,\Delta^{n-1} y(x) + p_{r,1}\,\Delta^{n-2} y(x+1) + \cdots +$$

$$+ p_{r,n-1}\, y(x+n-1) = - \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_r(x_1) + c_r$$

$$r = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ n.$$

Supposons maintenant que, les fonctions z étant choisies de la manière indiquée, le déterminant $P(x)$ donné par l'équation (22) ne s'annule pas lorsque $x \geqq \alpha$. Nous pourrons donc écrire (en particulier) pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)}$$

ou $P_n(x)$ représente maintenant le déterminant

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \ldots & p_{1,n-2} & - \sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \ldots & p_{2,n-2} & - \sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,0} & p_{r,1} & \ldots & p_{n,n-2} & - \sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n \end{vmatrix} \qquad (62)$$

ou

$$P_n(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2}\, a_0(x)\, a_0(x+1) \dots a_0(x+n-1)\, Q_n(x)$$

où

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \dots & \Delta^{n-2} z_1 & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \dots & \Delta^{n-2} z_2 & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \dots & \Delta^{n-2} z_n & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n \end{vmatrix}.$$

En vertu de l'équation (25) on peut remplacer la condition $P(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ par l'autre $Q(x) \neq 0$, $a_0(x) \neq 0$, $x \geqq \alpha$ et si nous posons maintenant

$$\bar{q}(x, x_1) = -\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \dots & \Delta^{n-2} z_1 & Z_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \dots & \Delta^{n-2} z_2 & Z_2(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \dots & \Delta^{n-2} z_n & Z_n(x_1) \end{vmatrix} \tag{63}$$

nous avons maintenant pour les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta - 1$:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n-1) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} \sum_{x_1=x}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \bar{q}(x, x_1) \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

où les expressions $Q(x)$ et $A(x)$ ont les significations signalées dans le cas précédent, c'est-à-dire, ils ont respectivement les définitions (26) et (27).

La formule (64) peut s'écrire aussi sous la forme suivante, en supposant maintenant que x est dans l'intervalle $\alpha - 1 \leqq x \leqq \beta - 2$:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} y(x_1+n)\, \bar{q}(x+1, x_1). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Par conséquent, on obtient aussi pour toutes ces valeurs de x:

$$\begin{aligned} y(x+n) &= \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \frac{A(x_1+1)\, \bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\, Q(x_1+1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{a_0(x+n) Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n) Q(x_1+1)} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} y(x_2+n)\, \bar{q}(x_1+1, x_2). \end{aligned}$$

Plus généralement, si nous posons

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = \frac{A(x_1+1)\,\overline{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)} \tag{66}$$

nous obtenons la formule générale suivante qui est valable pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $\alpha - 1 \leqq x \leqq \beta - 2$:

$$\left.\begin{aligned} y(x+n) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)} \Bigg[& A(x+1) + \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \Psi(x, x_1) + \\ & + \varepsilon_{n-2}^2 \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Psi(x_1, x_2) + \\ & + \varepsilon_{n-1}^3 \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \sum_{x_3=x_2+1}^{x_3=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\,\Psi(x_2, x_3) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \varepsilon_{n-1}^m \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots \\ & \ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m) + \varepsilon_{n-1}^m R_m(x) \Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

où

$$R_m(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\beta-1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\beta-1} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\beta-1} \sum_{x_{m+1}=x_m+1}^{x_{m+1}=\beta-1} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots$$
$$\ldots \Phi(x_{m-1}, x_m)\,y(x_{m+1}+n)\,\overline{q}(x_m+1, x_{m+1}).$$

En étudiant ce résultat, il est important de remarquer une différence essentielle entre cette dernière relation et la relation correspondante (30). Dans la relation (30), on peut donner une valeur aussi grande qu'on veut au nombre m mais cela n'est pas vrai dans le cas actuel. En effet, la valeur de x étant donnée, pour calculer les diverses limites inférieures des sommations qui se trouvent dans l'expression plus haut il faut déterminer un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots\, x_{m+1}$ au moyen des équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + 1 \\ x_2 &= x_1 + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{m+1} &= x_m + 1 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

et en même temps on doit avoir

$$x_{m+1} \leqq \beta - 1. \tag{69}$$

Ces relations (68) et (69) conduisent immédiatement à la seule relation $x \leqq \beta - m + 2$ relative aux quantités β et m de sorte que, β et x étant choisis, il faut prendre

$$m \leqq \beta - x + 2.$$

Cependant, la valeur de m sera sans restriction, comme dans le cas précédent, si l'on peut prendre dans tout ce qui précède $\beta = \infty$, mais il est évident qu'on ne peut pas faire cela et en même temps être assuré que le second membre de l'équation résultante (67) ait une signification sans poser d'autres conditions sur les fonctions $a_0, a_1, \ldots a_n$; $z_1, z_2, \ldots z_n$ et l'intégrale donnée $y(x)$. En même temps, il n'est pas important, dans le but que nous poursuivons de spécifier ce que ces conditions doivent être. En effet, la formule (67) une fois trouvée comme conséquence nécessaire de nos hypothèses actuelles, elle ne fait maintenant qu'inspirer les considérations suivantes qui correspondent à celles du § 6.

9. Sans regard, alors, aux hypothèses spéciales des paragraphes précédents, revenons à l'équation donnée (9). Supposons que les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ satisfassent aux conditions indiquées au commencement du § 3 et que $a_0(x)$ ne s'annule jamais pour $x \geqq \alpha$. Choisissons maintenant un système quelconque de n fonctions $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ telle que

$$z_r(x) \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

est définie pour toutes les valeurs de $x \geqq \alpha$ tandis que le déterminant $Q(x)$ défini par l'équation (26) ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x. Enfin, soient données n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Sous ces hypothèses, les expressions $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ définies respectivement par les équations (27) et (63) auront évidemment une signification lorsque $x \geqq \alpha$, $x_1 \geqq \alpha$ de sorte qu'il en sera de même pour les expressions $A(x+1)$, $\bar{q}(x+1, x_1)$, $\Phi(x, x_1)$, $\Psi(x, x_1)$ lorsque $x \geqq \alpha - 1$, $x_1 \geqq \alpha$.

Cela posé, considérons la série infinie suivante (qui se présente naturellement si l'on a égard aux résultats du paragraphe précédent)

$$Y(x) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)}\left[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots\right] \tag{70}$$

où

$$u_m(x) = \varepsilon_{n-1}^m \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\ldots$$

$$\Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m).$$

Les fonctions $a_0, a_1, \ldots a_n$; $z_1, z_2, \ldots z_n$ et les constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ étant ainsi données, supposons maintenant que pour les valeurs de $x \geqq x_0 \geqq \alpha - 1$, x_0 étant une constante suffisamment grande, les conditions suivantes soient satisfaites :

a) chacun des termes $u_m(x)$ a une signification;

b) la série $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_m(x)| + \cdots$ converge vers une limite $U(x)$ telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |\Phi(x, x_1)|\, U(x_1)$$

converge aussi.

c) la série $Y(x)$ (qui convergera certainement sous les conditions (*a*) et *b*)) est telle que chacune des expressions

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1)\, Z_r(x_1) \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

a une signification.

Nous allons montrer que sous ces conditions la fonction $y(x)$ définie pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 + n$ par la formule $y(x) = Y(x - n)$ sera une intégrale de l'équation donnée (9) pour toutes ces valeurs de x.

Pour le voir, nous observons d'abord que l'équation (70) nous permet d'écrire lorsque $x \geqq x_0$, $x_1 \geqq x_0$:

$$Y(x_1)\, \bar{q}(x+1, x_1) = \varepsilon_{n-1}\, \Psi(x, x_1) + \varepsilon_{n-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1)\, \Phi(x, x_1).$$

Par conséquent, en représentant par p une constante $> x_0$ nous pouvons écrire aussi pour les valeurs de $x \geqq x_0$:

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} Y(x_1)\, \bar{q}(x+1, x_1) = \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} \Psi(x, x_1) +$$

$$+ \varepsilon_{n-1} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=p} \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1)\, \Phi(x, x_1).$$

Or, quand la quantité p augmente indéfiniment le premier terme du second membre de cette équation tend vers la limite $u_1(x)$. En même temps, le second terme du même membre prend la forme d'une série infinie double dans laquelle on peut intervertir l'ordre des sommations.

En effet, cette dernière propriété résulte d'un théorème bien connu (*) relatif aux séries infinies, quand on observe que sous les hypothèses actuelles la série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} | u_m(x_1)\, \Phi(x, x_1) | \quad \text{ou} \quad \Phi(x, x_1) | \sum_{m=1}^{m=\infty} | u_m(x_1) |$$

converge à une limite $| \Phi(x, x_1) | U(x_1)$ telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} | \Phi(x, x_1) | U(x_1)$$

converge aussi.

Nous aurons donc pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1)\, \bar{q}(x+1, x_1) = u_1(x) + \varepsilon_{n-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} u(x_1)\, \Phi(x, x_1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x) = \varepsilon_{n-1}\, a_0 (x+n)\, Q(x+1)\, Y(x) - A(x+1)$$

d'où il résulte encore que

$$\left.\begin{aligned} Y(x) = {} & \frac{\varepsilon_{n-1} A(x+1)}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n)\, Q(x+1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1)\, \bar{q}(x+1, x_1); \qquad (x \geqq x_0). \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Or, en posant $y(x) = Y(x-n)$ ou $y(x+n) = Y(x)$ la relation (71) nous donne

$$y(x+n-1) = \frac{\varepsilon_{n-1} A(x)}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0(x+n-1)\, Q(x)} \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, q(x, x_1) \qquad (x \leqq x_0+1)$$

d'où, en substituant pour les expressions $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ leurs valeurs telles qu'elles sont déterminées par les équations (27) et (63) et en se servant de

(*) Voir par exemple : GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tome I, p. 401 (Paris, 1902).

l'équation (25) il vient

$$y(x+n-1) = \frac{P_n(x)}{P(x)} \qquad (x \geqq x_0 + 1) \tag{72}$$

l'expression $P(x)$ étant donnée par le déterminant (22) tandis que l'expression $P_n(x)$ est le déterminant

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_1(x_1) + c_1 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_2(x_1) + c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-2} & -\sum\limits_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_n(x_1) + c_n \end{vmatrix}$$

qui a certainement une signification quand $x \geqq x_0 + 1$ d'après la condition (c) posée plus haut.

L'équation (72) une fois établie, nous allons considérer (comme dans le cas précédent) les n fonctions $\eta_0(x)$, $\eta_1(x)$,... $\eta_{n-1}(x)$ dont chacune est définie (en vertu de nos hypothèses) quand $x \geqq x_0 + 1$ au moyen du système suivant:

$$\left. \begin{aligned} p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x) + p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x) + \cdots + p_{r,n-2}\,\eta_1(x) + p_{r,n-1}\,\eta_0(x) = H_r(x) + c_r \\ r = 1, 2, \ldots n \end{aligned} \right\} \tag{73}$$

où

$$H_r(x) = -\sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\, Z_r(x_1).$$

Nous aurons d'abord

$$\eta_0(x) = y(x+n-1) \qquad (x \geqq x_0 + 1). \tag{74}$$

En même temps, d'après la définition (1) on peut dire que chacune des expressions $\Delta\, \eta_s(x)$ existe quand $x \geqq x_0 + 1$ parce que les fonctions $\eta_s(x)$ elles-mêmes existent pour les mêmes valeurs de x.

Prenons donc la première différence de chaque membre de la $r^{\text{ième}}$ équation du système (73). Ainsi nous obtenons pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 + 1$ l'égalité

$$\begin{aligned} p_{r,0}\,\Delta\,\eta_{n-1}(x) + p_{r,1}\,\Delta\,\eta_{n-2}(x) + \cdots + p_{r,n-1}\,\Delta\,\eta_0(x) + \\ + \Delta p_{r,0}\,\eta_{n-1}(x+1) + \Delta p_{r,1}\,\eta_{n-2}(x+1) + \cdots + \Delta p_{r,n-1}\,\eta_0(x+1) = y(x+n)\, Z_r(x). \end{aligned}$$

Mais, d'après l'équation (74) nous pouvons écrire quand $x \geqq x_0$,

$$y(x+n) = \eta_0(x+1).$$

Par conséquent, en rappelant les définitions (16), (17) et (19) nous avons maintenant pour les valeurs de $x \geqq x_0 + 1$

$$z_r a_0 \Delta \eta_{n-1}(x) + [z_r a_1 - \Delta p_{r,0}] \Delta \eta_{n-1}(x) + [z_r a_2 - \Delta p_{r,1}] \Delta \eta_{n-3}(x) + \\ + \cdots + [z_r a_{n-1} - \Delta p_{r,n-2}] \Delta \eta_0(x) + [z_r a_n - \Delta p_{r,n-1}] \eta_0(x+1) + \\ + \Delta p_{r,0} \eta_{n-1}(x+1) + \Delta p_{r,1} \eta_{n-2}(x) + \cdots + \Delta p_{r,n-1} \eta_0(x+1) = 0$$

ou

$$\left.\begin{array}{c} \theta z_r + \theta_1 \Delta p_{r,0} + \theta_1 \Delta p_{r,1} + \cdots + \theta_{n-1} \Delta p_{r,n-2} = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots n, \\ x \geqq x_0 + 1. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{75}$$

où

$$\theta = a_0(x) \Delta \eta_{n-1}(x) + a_1(x) \Delta \eta_{n-2}(x) + \cdots + a_{n-1} \Delta \eta_0(x) + a_n(x) \eta_0(x+1)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = \eta_{n-1}(x+1) - \Delta \eta_{n-2}(x) \\ \theta_2 = \eta_{n-2}(x+1) - \Delta \eta_{n-3}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_{n-s-1} = \eta_{s+1}(x+1) - \Delta \eta_s(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_{n-1} = \eta_1(x+1) - \Delta \eta_0(x). \end{array}\right.$$

Mais, en se servant encore de la relation $\Delta p_{r,s-1} = z_r a_s - p_{r,s}$, il vient (comme dans le cas précédent) que le discriminant du système (75) ne s'annule pas lorsque $x \geqq x_0 + 1$ de sorte que pour les mêmes valeurs de x on a nécessairement $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer la formule

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x+n-s-1); \qquad x \geqq x_0 + s + 1. \tag{76}$$

En effet, si nous posons

$$\eta_{s-1}(x) = \Delta^{s-1} y(x+n-s), \qquad x \geqq x_0 + s$$

nous obtenons

$$\Delta \eta_{s-1}(x) = \Delta^s y(x+n-s), \qquad x \geqq x_0 + s$$

et puisque $\theta_{n-s-2} = 0$ nous pouvons écrire aussi

$$\eta_s(x+1) = \Delta^s y(x+n-s)\,; \qquad x \geqq x_0 + s$$

ou

$$\eta_s(x) = \Delta^s y(x+n-s-1)\,; \qquad x \geqq x_0 + s + 1$$

ce qui est la formule indiquée (76). Cette formule sera donc démontrée aussitôt que nous prenons en égard l'équation (74).

En particulier, il suffit de prendre $x \geqq x_0 + n$ pour écrire

$$\Delta\, \eta_s(x) = \Delta^{s+1} y(x+n-s-1)\,; \qquad s = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ (n-1),$$

de sorte que, en vertu de l'équation $\theta = 0$, on a pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 + n$ la relation désirée

$$a_0(x)\, \Delta^n y(x) + a_1(x)\, \Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + a_n(x)\, y(x+n) = 0.$$

10. Supposons maintenant remplies non seulement les conditions du dernier paragraphe, mais encore la suivante: la fonction

$$A_0(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)$$

ne s'annule pour aucune valeur de $x \geqq$ une certaine valeur fixée $\overline{x}_0$. Avec ces hypothèses, nous pouvons démontrer (les fonctions $z_1, z_2, \ldots z_n$ une fois choisies) que si l'on choisit n systèmes de valeurs $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots c_{r,n}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots n)$ pour les constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ de sorte que le système particulier $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots c_{r,n}$ corresponde à l'intégrale $y_r(x)$ $(x \geqq x_{0,r} + n)$ et si en même temps le déterminant (50) est différent de zéro, alors les n intégrales $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots y_n(x)$ constituent un système fondamental d'intégrales pour toutes les valeurs de $x \geqq X_0$, X_0 étant une quantité quelconque, fixée et au moins aussi grande que la plus grande des quantités $x_{0,1} + n, x_{0,2} + n, \ldots x_{0,n} + n, \overline{x}_0$.

Pour prouver cela, il suffit évidemment d'après les deux lemmes du § 7 de montrer qu'il existe une valeur fixée X_0 qui satisfait aux conditions indiquées plus haut et en outre est telle que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1(X_0+n-1) & y_1(X_0+n-2) & \ldots & y_1(X_0) \\ y_2(X_0+n-1) & y_2(X_0+n-2) & \ldots & y_2(X_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(X_0+n-1) & y_n(X_0+n-2) & \ldots & y_n(X_0) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Or, d'après les considérations du dernier § on sait que pour $x \geqq x_{0,r} + n$ l'intégrale $y_r(x)$ est telle qu'on a les n équations suivantes:

$$c_{1,r} = p_{1,0}\,\Delta^{n-1}\,y_r(x) + p_{1,1}\,\Delta^{n-2}\,y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{1,n-1}\,y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_1(x_1)$$
$$c_{2,r} = p_{2,0}\,\Delta^{n-1}\,y_r(x) + p_{2,1}\,\Delta^{n-2}\,y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{2,n-1}\,y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_2(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n,r} = p_{n,0}\,\Delta^{n-1}\,y_r(x) + p_{n,1}\,\Delta^{n-2}\,y_r(x+1) + \cdots +$$
$$+ p_{n,n-1}\,y_r(x+n-1) + \sum_{x_1=x}^{x_1=\infty} y(x_1+n)\,Z_n(x_1).$$

Mais, en donnant dans ces équations à x une valeur suffisamment grande, chacune des sommations qui s'y trouvent devient aussi petite qu'on veut en valeur absolue: cela résulte, en effet, de l'hypothèse que nous avons faite relative à l'existence de ces sommations. Par conséquent, en prenant x suffisamment grand, le déterminant C qui est définie par (50) diffère aussi peu qu'on veut du déterminant obtenu de (50) en y remplaçant l'élément $c_{r,s}$ par l'expression

$$p_{s,0}\,\Delta^{n-1}\,y_r(x) + p_{s,1}\,\Delta^{n-2}\,y_r(x+1) + \cdots + p_{s,n-1}\,y(x+n-1).$$

En d'autres termes, pour x suffisamment grand nous pouvons écrire

$$C = P(x)\,D(x) + \varepsilon(x) \tag{77}$$

où $P(x)$ a la signification usuelle et $D(x)$ est le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} \Delta^{n-1}\,y_1(x) & \Delta^{n-2}\,y_1(x+1) & \ldots & y_1(x+n-1) \\ \Delta^{n-1}\,y_2(x) & \Delta^{n-2}\,y_2(x+1) & \ldots & y_2(x+n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1}\,y_n(x) & \Delta^{n-2}\,y_n(x+1) & \ldots & y_n(x+n-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x+n-1) & y_1(x+n-2) & \ldots & y_1(x) \\ y_2(x+n-1) & y_2(x+n-2) & \ldots & y_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(x+n-1) & y_n(x+n-2) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

et où l'expression $\varepsilon(x)$ est telle que $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Cela posé, donnons à x une valeur X_0 plus grande que n'importe quelle des quantités $x_{0,1}+n$, $x_{0,2}+n, \ldots$ $x_{0,n}+n$, $\bar{x}_0$ et en même temps telle que $|\varepsilon(X_0)|<C$. Alors, non seulement nous serons assurés que toutes les fonctions $y_r(x)$ sont des intégrales de l'équation donnée (9) lorsque $x \geqq X_0$ et pour les mêmes valeurs de x que $A_0(x) \neq 0$, mais encore nous aurons, d'après l'équation (77),

$$P(X_0)\,D(X_0)=M$$

où M est une constante différente de zéro.

Ainsi, en rappelant que la quantité $P(X_0)$ est finie, nous avons $D(X_0) \neq 0$ de sorte que nous arrivons au résultat indiqué.

Enfin, on peut répéter ici les considérations qui se trouvent à la fin du § 7, excepté qu'on remplace maintenant l'intervalle $x \geqq \alpha$ par l'autre $x \geqq X_0$.

Les résultats des trois derniers paragraphes nous permettent d'énoncer le théorème général suivant:

11. Théorème II. *Soit donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$a_0(x)\,\Delta^n y(x)+a_1(x)\,\Delta^{n-1} y(x+1)+\cdots+a_n(x)\,y(x+n)=0$$

les coefficients étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$, et le coefficient $a_0(x)$ ne s'annulant pour aucune des mêmes valeurs de x.

Choisissons maintenant un système quelconque de n fonctions $z_1(x)$, $z_2(x), \ldots$ $z_n(x)$ dont chacune est définie au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq \alpha$ tandis que le determinant

$$Q(x)=\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-1} z_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-1} z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-1} z_n \end{vmatrix}$$

ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de x.

En même temps, choisissons un système de n constantes arbitraires c_1, c_2, $c_3, \ldots$ c_n et formons les déterminants

$$A(x)=\begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z_1 & \ldots & \Delta^{n-2} z_1 & c_1 \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \ldots & \Delta^{n-2} z_2 & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \ldots & \Delta^{n-2} z_n & c_n \end{vmatrix},$$

$$\bar{q}(x,\ x_1) = \begin{vmatrix} z_1 & \Delta z_1 & \Delta^2 z & \dots & \Delta^{n-2} z_1 & f_1(x_1) \\ z_2 & \Delta z_2 & \Delta^2 z_2 & \dots & \Delta^{n-2} z_2 & f_2(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \Delta z_n & \Delta^2 z_n & \dots & \Delta^{n-2} z_n & f_n(x_1) \end{vmatrix}$$

où

$$f_r(x) = z_r a_n - \Delta\{z_r a_{n-1}\} + \Delta^2\{z_r a_{n-2}\} - \cdots +$$
$$+ (-1)^n \Delta^n\{z_r a_0\}; \quad (r = 0,\ 1, \dots\ n),$$

et posons

$$\Phi(x,\ x_1) = \frac{\bar{q}(x+1,\ x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}, \qquad \Psi(x,\ x_1) = \frac{A(x_1+1)\,\bar{q}(x+1,\ x_1)}{a_0(x_1+n)\,Q(x_1+1)}.$$

Enfin, formons la série infinie

$$Y(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0(x+n)\,Q(x+1)}\left[A(x+1) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots\right]$$

où

$$u_m(x) = (-1)^{m(n-1)} \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty}\ \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \Phi(x,\ x_1)\,\Phi(x_1,\ x_2)\dots$$
$$\dots\Phi(x_{m-2},\ x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1},\ x_m).$$

On peut dire maintenant que si une valeur fixée $x_0 \geqq \alpha$ *existe telle que pour* $x \geqq x_0$:

a) *chacun des termes* $u_m(x)$ *a une signification,*

b) *la série*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |\,u_m(x_1)$$

converge vers une limite $U(x)$ *telle que la série*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} |\,\Phi(x,\ x_1)\,|\,U(x_1)$$

converge aussi,

c) *la série* $Y(x)$ (*qui convergera certainement lorsque* $x \geqq x_0$ *d'après les conditions* (*a*), (*b*)) *définit une fonction de* x *telle que chacune des expressions*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} Y(x_1)\,f_r(x_1) \qquad (r = 1,\ 2, \dots\ n)$$

a une signification,

alors, la fonction $y(x) = Y(x-n)$ *sera une intégrale de l'équation donnée pour toutes les valeurs de* $x \geqq x_0 + n$.

De plus, cette intégrale sera l'intégrale générale pour les mêmes valeurs de x *lorsque l'expression* $A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$ *ne s'annule pour aucune des mêmes valeurs de* x, *tandis que les intégrales particulières* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *correspondant aux* n *systèmes de valeurs* 1, 0, 0,... 0; 0, 1, 0,... 0; 0, 0, 1, 0,... 0,...; 0, 0, 0,... 0. 1 *des constantes* $c_1, c_2, \ldots c_n$ *existent dans le sens indiquée plus haut lorsque* $x \geqq x_0 + n$.

Applications des théorèmes précédents à des équations de types speciaux.

12. Nous allons considérer, au moyen du théorème du dernier paragraphe quelques propriétés importantes des intégrales d'une équation (9) lorsque l'argument x prend des valeurs très grandes. Dans ce but, il convient tout d'abord de faire quelques observations générales relatives aux déterminants $Q(x)$, $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$ (qui jouent un rôle essentiel dans tout ce qui précède) quand on détermine les fonctions auxiliaires $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ de manière à satisfaire à une équation linéaire aux différences finies du $n^{\text{ième}}$ ordre, ayant des coefficients constants.

Ainsi, supposons que ces fonctions z forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\alpha_0 \Delta^n z(x) + \varepsilon_1 \alpha_1 \Delta^{n-1} z(x) + \varepsilon_2 \alpha_2 \Delta^{n-2} z(x) + \cdots + \varepsilon_n \alpha_n z(x) = 0, \tag{78}$$

les quantités α étant constantes (indépendantes de x) avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\varepsilon_s = (-1)^s$ (*).

Or, on peut obtenir sans difficulté un système d'intégrales fondamentales pour l'équation (78). En effet, en suivant les indications du § 2 on peut écrire cette équation sous la forme

$$A_0 z(x+n) + A_1 z(x+n-1) + \cdots + A_n z(x) = 0, \tag{79}$$

(*) Nous avons introduit les quantités ε_s dans les coefficients de l'équation (78) pour écrire cette équation sous une forme adaptée aux considérations qui suivent.

où les coefficients A sont des constantes déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} A_r = \frac{\varepsilon_r}{(n-r)!}\left[\frac{n!}{r!}\alpha_0 + \frac{(n-1)!}{(r-1)!}\alpha_1 + \frac{(n-2)!}{(r-2)!}\alpha_2 + \cdots + \frac{(n-r)!}{0!}\alpha_r\right]; \\ r = 0, 1, \ldots n. \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Mais, il est bien connu (*) que les fonctions

$$z_1(x) = m_1^x, \quad z_2(x) = m_2^x, \ldots \quad z_n(x) = m_n^x \qquad (81)$$

où les quantités $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont les racines (réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique

$$\varphi(m) = A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + \cdots + A_n = 0 \qquad (82)$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'équation (79) pourvu que ces racines soient distinctes.

Supposons donc que l'équation (9) aussi que l'équation (78) étant données, on forme l'équation algébrique (82) et que toutes ses n racines soient distinctes, et prenons pour les fonctions auxiliaires $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ les n fonctions (81).

Il résulte directement que $\Delta^r z_s = (m_s - 1)^r m_s^x; \left\{\begin{array}{l} r = 0, 1, 2, \ldots \\ s = 1, 2, \ldots n \end{array}\right.$ de sorte que le déterminant $Q(x)$ se réduit à $(m_1 m_2 m_3 \ldots m_n)^x q$, q étant le produit $\Pi_{r,s}(m_r - m_s)$ de toutes les différences $m_r - m_s$ quand $r > s$. De plus, il résulte de nos hypothèses que $q \neq 0$. Ajoutons maintenant l'hypothèse ultérieure qu'aucune des racines $m_1, m_2, \ldots m_n$ n'est égale à zéro.

Alors, le déterminant $Q(x)$ ne s'annulera jamais et on aura

$$Q(x) = \sigma^x q \qquad (83)$$

où

$$\sigma = m_1 m_2 m_3 \ldots m_n = \frac{\varepsilon_n A_n}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Quant aux déterminants $A(x)$ et $\bar{q}(x, x_1)$, prenons la définition (63) de $\bar{q}(x, x_1)$ (en nous bornant ainsi au théorème II) et développons chacun des mêmes déterminants par rapport aux éléments de la dernière colonne. Nous

(*) Voir, par exemple: Boole, *A treatise on the calculus of finite differences*, p. 106 (London, 1860).

obtenons ainsi

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \varepsilon_{n-1} Q\ (x)\, c_1 + \varepsilon_{n-2} Q_2(x)\, c_2 + \cdots + \varepsilon_0 Q_n(x)\, c_n, \\ \bar{q}(x,\ x_1) &= \varepsilon_{n-1} Q_1(x) f_1(x_1) + \varepsilon_{n-2} Q_2(x) f_2(x_1) + \cdots + \varepsilon_0 Q_n(x) f_n(x_1) \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

où $Q_r(x)$ est le mineur du déterminant $Q(x)$ par rapport au $r^{ième}$ élément de la dernière colonne, et où $f_r(x)$ a la signification usuelle :

$$f_r(x) = z_r(x)\, a_n(x) + \varepsilon_1 \Delta \{ z_r(x)\, a_{n-1}(x) \} + \cdots + \varepsilon_n \Delta^n \{ z_r(x)\, a_0(x) \}. \quad (85)$$

D'ailleurs, en posant pour faciliter l'analyse $\sigma_r = \dfrac{\sigma}{m_r}$, nous avons

$$Q_r(x) = \sigma_r^x\, q_r$$

où

$$q_r = \frac{q}{(m_r - m_1)(m_r - m_2)\cdots(m_r - m_{r-1})(m_{r+1} - m_r)\ldots(m_n - m_r)} = \frac{\varepsilon^{n-s}\, \alpha_0\, q}{\varphi(m_r)}.$$

Ainsi, les formules (84) prennent les formes

$$A(x) = \alpha_0\, q \sum_1^n {}_r \frac{c_r\, \sigma_r^x}{\varphi'(m_r)}, \quad (86)$$

$$\bar{q}(x,\ x_1) = \alpha_0\, q \sum_1^n {}_r \frac{\sigma_r^x f_r(x_1)}{\varphi'(m_r)}. \quad (87)$$

De plus, d'après l'équation (85) nous pouvons écrire

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_0^n {}_s\, \varepsilon_s\, \Delta^{n-s} \{ z_r\, a_s \}$$

ou

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_0^n {}_s\, \varepsilon_s\, \Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s)\, z_r] = m_r^x \sum_0^n \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s)\, m_r^x]}{m_r^x}$$

de sorte que

$$f_r(x) = \varepsilon_n\, m_r^x \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x) \quad (88)$$

où

$$F_{r,s}(x) = \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s)\, m_r^x]}{m_r^x}. \quad (89)$$

Cela posé, nous allons considérer les expressions

$$\Phi(x,\ x_1) = \frac{\bar{q}(x+1,\ x_1)}{a_0(x_1 + n)\, Q(x_1 + 1)} \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \frac{A(x_1 + 1)\, \bar{q}(x+1,\ x_1)}{a_0(x_1 + n)\, Q(x_1 + 1)}$$

dont les propriétés jouent un rôle essentiel lorsque on désire appliquer le théorème II.

D'après les équations (83), (86), (87), (88) et (89) et la relation $m_r = \frac{\sigma}{\sigma_r}$ nous avons dans le cas actuel les relations

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(x, x_1) &= \frac{\varepsilon_n \alpha_0}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \frac{\sigma_r^{(x-x_1)}}{m_r \varphi'(m_r)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1), \\
\Psi(x, x_1) &= \alpha_0 q \Phi(x, x_1) \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_t^{x_1+1}}{\varphi'(m_t)} = \\
&= \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_r^{(x-x_1)} \sigma_t^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1)
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

dont la dernière $\left(\text{en vertu de l'équation } \sigma_t = \frac{\sigma_r m_r}{m_t}\right)$ peut prendre aussi la forme

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0 (x_1 + n)} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_t \frac{c_t \sigma_r^{x+1} \left(\frac{m_r}{m_t}\right)^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}_s F_{r,s}(x_1). \tag{91}$$

Ainsi, chaque fois que nous aurons, outre l'équation (9) encore une équation (78) pour déterminer les fonctions auxiliaires, pour s'assurer si le théorème II peut être appliqué il suffit de s'assurer si les conditions (a), (b) et (c) du même théorème sont satisfaites, les $\Phi(x, x_1)$ et $\Psi(x, x_1)$ étant donnés par les équations (90) et (91).

13. Après ces observations générales nous allons considérer les équations (9) dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ (outre qu'ils sont définis pour les valeurs de $x \gtreqless \alpha$) tendent vers les limites $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ respectivement lorsque $x = \infty$. Supposons aussi que $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ et déterminons les fonctions $z_1(x), z_2(x), \ldots z_n(x)$ de la manière que nous venons d'indiquer, les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ de l'équation (78) étant maintenant ces mêmes valeurs limites. En d'autres termes, supposons que l'équation donnée (9) ait la forme limite

$$\alpha_0 \Delta^n y(x) + \alpha_1 \Delta^{n-1} y(x+1) + \cdots + \alpha_n y(x+n-1) = 0 \tag{92}$$

lorsque $x = \infty$ et choisissons comme fonctions auxiliaires $z_r(x)$ les intégrales fondamentales de la forme m^x ($m =$ constante indépendante de x) de l'équation aux différences finies $f_r(x) = 0$ qui correspond à la même équation (92).

Alors les quantités $a_s - \alpha_s$ qui se trouvent dans l'expression $F_{r,s}(x)$ tenderont vers la limite zéro lorsque $x = \infty$. En particulier, supposons que pour toutes les valeurs de x plus grandes qu'une certaine valeur fixée x_0 on ait

$$|a_s - \alpha_s| < \frac{\tau(x)}{x}, \tag{93}$$

$\tau(x)$ étant une fonction positive de x telle que la série infinie

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

converge; par exemple, $\tau(x) = \frac{1}{x^\nu}, \frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}, \frac{1}{\log x (\log x)^{1+\nu}} \cdots$ avec $\nu > 0$.

Enfin, outre la supposition que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$ et que les racines $m_1, m_2, \ldots m_n$ de l'équation algébrique (82) sont distinctes (de sorte qu'on puisse employer les résultats du paragraphe précédent) commençons par supposer que toutes ces racines ont le même module ρ.

Avec ces hypothèses diverses, considérons tout d'abord l'expression $F_{r,s}(x)$ qui est définie par l'équation (89). D'après la formule (24) nous avons

$$\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) m_r^x] = m_r^x \Delta^{n-s}[(a_s(x) - \alpha_s)] + n(m_r - 1) m_r^x \Delta^{n-s-1}[a_s(x+1) - \alpha_s] +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}(m_r - 1)^2 m_r^x \Delta^{n-s-2}[a_s(x+2) - \alpha_s] + \cdots$$
$$+ (m_r - 1)^{n-s} m_r^x [a_s(x+s) - \alpha_s].$$

D'ailleurs, lorsque $x \geqq x_0$ nous pouvons écrire, d'après les formules (1) et (93), $|\Delta^r(a_s - \alpha_s)| < 2^r \frac{\tau(x)}{x}$ de sorte que la dernière équation nous donne pour ces mêmes valeurs de x

$$\Delta^{n-s}(a_s - \alpha_s) m_r^x < (m_r - 1)^{n-s} m_r^x 2^{2n-s} \frac{\tau(x)}{x} < 2^{2n}(m_r - 1)^n m_r^x \frac{\tau(x)}{x}.$$

Par conséquent, nous avons

$$|F_{r,s}(x)| < 2^{2n}(\rho + 1)^n \frac{\tau(x)}{x}$$

et

$$\left|\sum_0^n{}_s F_{r,s}(x)\right| < 2^{2n}(n+1)(\rho+1)^n \frac{\tau(x)}{x} < \Omega_1 \frac{\tau(x)}{x}; \qquad (x \geqq x_0) \tag{94}$$

Ω_1 étant une constante (dépendant seulement de n et ρ).

Ceci dit, considérons l'expression $\Phi(x, x_1)$ qui est définie par l'équation (90). Puisque $|m_r| = \rho$ nous avons $\sigma_r = \rho^{n-1} i_r$, i_r étant une quantité dont le module est égal à un. Nous aurons donc, avec les hypothèses actuelles

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0}{a_0(x_1 + n)} \rho^{(n-1)(x-x_1)} \sum_1^n {}^r \frac{i_r^{(x-x_1)}}{m_r \varphi'(m_r)} \sum_0^n {}^s F_{r,s}(x_1)$$

ou, en rappelant l'équation (94) et la relation $\lim\limits_{x_1=\infty} a_0(x_1+n) = \lim\limits_{x_1=\infty} a_0(x_1) = \alpha_0$,

$$\Phi(x, x_1) = \rho^{(n-1)(x-x_1)} M(x, x_1) \tag{95}$$

où pour toutes valeurs entières de x et pour les valeurs de $x_1 \geqq x_0$ (x_0 suffisamment grand)

$$|M(x, x_1)| < \Omega_2 \frac{\tau(x_1)}{x_1}; \quad \Omega_2 = \text{constante indépendante de } x \text{ et } x_1. \tag{96}$$

De la même manière, nous pouvons écrire pour l'expression $\Psi(x, x_1)$

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n \alpha_0^2 q}{a_0(x_1 + n)} \rho^{(n-1)(x+1)} \sum_1^n {}^r \sum_1^n {}^t \frac{c_t\, i_r^{x+2} \left(\frac{m_r}{m_t}\right)^{x_1+1}}{m_r \varphi'(m_r) \varphi'(m_t)} \sum_0^n {}^s F_{r,s}(x_1) \tag{97}$$

d'où, en observant que $\left|\frac{m_r}{m_t}\right| = 1$ il vient

$$\Psi(x, x_1) = \rho^{(n-1)(x+1)} N(x, x_1) \tag{98}$$

où, pour toutes les valeurs entières de x et pour les valeurs de $x_1 \geqq x_0$ (x_0 suffisamment grand)

$$|N(x, x_1)| < \Omega_3 \frac{\tau(x_1)}{x_1}; \quad \Omega_3 = \text{constante indépendante de } x \text{ et } x_1. \tag{99}$$

Ainsi, nous arrivons à la formule

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2) \ldots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m) = \\ &\qquad = \rho^{(n-1)(x+1)} P(x, x_1, x_2, \ldots x_m) \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

où, pour toutes les valeurs entières de x et pour $x_m \geqq x_{m-1} \geqq \cdots \geqq x_1 \geqq x_0$, nous pouvons écrire

$$|P(x, x_1, x_2, \ldots x_m)| < \Omega_2^{m-1} \Omega_3 \frac{\tau(x_1)\,\tau(x_2) \ldots \tau(x_m)}{x_1\, x_2 \ldots x_m}.$$

La formule (100) une fois établie, les conditions (*a*) et (*b*) du théorème II seront remplies directement dans le cas actuel. En effet, la condition (*a*) est remplie parce que nous avons lorsque $x \geqq x_0$

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} | \Phi(x, x_1) \Phi(x_1, x_2) \dots$$
$$\dots \Phi(x_{m-2}, x_{m-1}) \Psi(x_{m-1}, x_m) < \rho^{(n-1)(x+1)} \Omega_2^{m-1} \Omega_3 W(x)$$

où

$$W(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \cdot \frac{\tau(x_1)}{x_1} \sum_{x_2=x_1+1}^{x_2=\infty} \frac{\tau(x_2)}{x_2} \cdots \sum_{x_m=x_{m-1}+1}^{x_m=\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m},$$

et il résulte de nos hypothèses que cette expression $W(x)$ a une signification pour toutes les valeurs indiquées de x.

De plus, si nous posons

$$\tau_1(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

de sorte que $\tau_1(x)$ devient aussi petit qu'on veut en prenant x suffisamment grand, nous pourrons écrire aussi

$$u_m(x) = \rho^{(n-1)(x+1)} V_m(x) \tag{101}$$

où

$$V_m(x) < \Omega_2^{m-1} \Omega_3 [\tau_1(x)]^m ; \qquad x \geqq x_0 . \tag{102}$$

Par conséquent, en prenant x_0 suffisamment grand il résulte la relation

$$| u_m(x) | < \rho^{(n-1)(x+1)} k_m \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geqq x_0, \\ k = \text{constante (indépendante de } x) < 1, \end{array} \right.$$

d'où on conclut que la série $| u_1(x) | + | u_2(x) | + \cdots + | u_m(x) | + \cdots$ converge et a une somme $U(x) = \theta(x) \rho^{(n-1)(x+1)}$ telle que $\theta(x) < \frac{k}{1-k}$ lorsque $x \geqq x_0$.

Enfin, quant aux expressions $| \Phi(x, x_1) | U(x_1)$ et $Y(x_1) f_r(x_1)$ (qui se trouvent dans les conditions (*b*) et (*c*) du théorème II) d'après les équations (88), (94), (95) et (96) ces expressions prennent les formes respectives

$$\theta_1(x, x_1) \rho^{(n-1)(x+1)}, \quad \frac{\theta_2(x, r)}{a_0(x_1+n)} \left[\frac{A(x_1+1) \rho^{x_1}}{Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1) \rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)} \right]$$

où pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$, on a

$$\theta_1(x, x_1) < \Omega_5 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \, (\Omega_5 = \text{const. ind. de } x \text{ et } x_1),$$

$$|\theta_2(x_1, r)| < \Omega_1 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \, (r = 1, 2, \ldots n) \quad \text{et} \quad |\theta_3(x)| \leqq \theta(x).$$

En même temps, d'après les équations (83) et (86) le module de chacun des quotients $\dfrac{A(x_1+1)\rho^{x_1}}{Q(x_1+1)}$, $\dfrac{\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)}$ reste toujours fini. Ainsi, on voit que les expressions $|\Phi(x, x_1)| \, U(x_1)$ et $Y(x_1) f_r(x_1)$ possèdent les propriétés désirées.

Il résulte ainsi sous les hypothèses actuelles relatives à l'équation (9) et aux racines de l'équation algébrique (82) que toutes les conditions que nous avons posées dans le théorème II sont remplies.

Nous allons considérer la forme de la série $Y(x)$ qui se présente dans le cas actuel.

D'après les équations (83) et (86) il vient

$$\begin{aligned} Y(x) = \varepsilon_{n-1} \Bigg[& \frac{\alpha_0}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}} \sum_1^n{}^r \frac{c_r \, \sigma_r^{x+1}}{\varphi'(m_r)} + \\ & + \frac{u_1(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}\, q} + \cdots + \frac{u_m(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}\, q} + \cdots \Bigg] = \\ = \varepsilon_{n-1} \Bigg[& \left\{ \sum_1^n{}^r \frac{c_r}{\varphi'(m_r)\, m_r^{x+1}} - \frac{a_0(x+m) - \alpha_0}{a_0(x+n)} \sum_1^n{}^r \frac{c_r}{\varphi'(m_r)\, m_r^{x+1}} \right\} + \\ & + \frac{u_1(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}\, q} + \cdots + \frac{u_m(x)}{a_0(x+n)\,\sigma^{x+1}\, q} + \cdots \Bigg]. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de nos hypothèses relatives aux différences $a_s(x) - \alpha_s$ nous avons au moins pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0 - n$

$$|a_0(x+n) - \alpha_0| < \frac{\tau(x+n)}{x+n} < \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1} < \tau_1(x).$$

Par conséquent, en nous rappelant les équations (101) et (102) nous pouvons écrire pour toutes les valeurs de $x \geqq x_0$:

$$Y(x) = \frac{c'_1}{m_1^{x+1}} + \frac{c'_2}{m_2^{x+1}} + \cdots + \frac{c'_n}{m_n^{x+1}} + \frac{\eta(x)}{\rho^{x+1}}$$

où $c'_r = \frac{\varepsilon_{n-1}\, c_r}{\varphi'(m_r)}$ et où $\eta(x)$ est une fonction de x qui tend vers zéro comme $\tau_1(x)$ lorsque $x = \infty$.

En appliquant le théorème II, nous avons donc la formule suivante pour l'intégrale particulière $y(x)$ que nous avons obtenue quand on la considère au moins pour les valeurs de $x \geqq x_0 + n$

$$y(x) = Y(x-n) = \frac{c''_1}{m_1^x} + \frac{c''_2}{m_2^x} + \cdots + \frac{c''_n}{m_n^x} + \frac{\varepsilon(x)}{\rho^x} \tag{103}$$

où $c''_r = m_r^{n-1} c'_r$ et où $\varepsilon(x)$, comme la fonction $\eta(x)$ employée plus haut, a la forme $\varepsilon(x) = g\,\tau_1(x)$, g étant une fonction de x dont le module ne dépasse jamais une certaine constante. De plus, en observant que l'existence de la condition $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ demande que l'expression

$$A_0(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)$$

ne s'annule pour aucune valeur de x plus grande qu'un certain nombre fixe, il résulte du même théorème II que l'intégrale générale de l'équation donnée (9) aura la forme (103) pour toutes les valeurs de x qui dépassent un certain nombre fixe.

Nous allons considérer certains résultats analogues qui ont lieu lorsque toutes les racines de l'équation (82) n'ont pas le même module ρ.

Supposons, en effet, que $m_1, m_2, \ldots m_h$ $(h < n)$ soient les racines dont le module est un maximum ρ, et, au lieu de considérer comme arbitraires toutes les constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ posons $c_{h+1} = c_{h+2} = \cdots = c_n = 0$, les autres constantes $c_1, c_2, \ldots c_h$ étant arbitraires comme auparavant. Ces hypothèses signifient évidemment que nous nous bornons à certaines intégrales particulières au lieu de l'intégrale générale.

D'après l'équation (91) nous avons maintenant pour l'expression $\Psi(x, x_1)$ la formule

$$\Psi(x, x_1) = \frac{\varepsilon_n\, \alpha_0^2\, q}{a_0(x_1 + n)} \sum_1^n{}_r \sum_1^h{}_t \frac{c_t\, \sigma_r^{x+1} \left(\frac{m_r}{m_t}\right)^{x+1}}{m_r\, \varphi'(m_r)\, \varphi'(m_t)} \sum_0^n{}_s F_{r,s}(x_1)$$

dans laquelle, pour toutes les valeurs possibles de r et t nous avons $\left|\frac{m_r}{m_t}\right| \leqq \rho$. Quant à l'expression $\Phi(x, x_1)$ nous avons encore la formule (90) mais dans le cas actuel $|\sigma_r| \leqq \rho^{n-1}$ au lieu de $|\sigma_r| = \rho^{n-1}$.

Par conséquent, en posant les mêmes hypothèses comme auparavant pour les différences $a_s - \alpha_s$ nous arrivons encore aux formules (95) et (98) dans lesquelles les fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$, bien que différentes des fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$ du cas précédent, ont les propriétés indiquées par les équations (96) et (99) respectivement. Mais, cela suffit, comme dans le cas précédent, pour nous assurer que le théorème II est applicable.

Par conséquent, pour toutes les valeurs de x plus grandes qu'un certain nombre fixe nous pouvons écrire

$$y(x) = \frac{c''_1}{m_1^x} + \frac{c''_2}{m_2^x} + \cdots + \frac{c''_h}{m_h^x} + \frac{\varepsilon(x)}{\rho^x}$$

où $c''_r = \dfrac{\varepsilon_{n-1} m_r^{n-1} c_r}{\varphi'(m_r)}$ et où $\varepsilon(x)$ a les propriétés signalées plus haut.

Avant de résumer nos résultats actuels sous la forme d'un théorème général, il convient de faire quelques observations générales.

Ainsi, supposons pour le moment qu'au lieu de commencer par une équation de la forme (9) on ait une équation sous la deuxième des formes (8), c'est-à-dire

$$A_0(x)\, y(x+n) + A_1(x)\, y(x+n-1) + \cdots + A_n(x)\, y(x) = 0. \tag{104}$$

Supposons que le coefficient $A_r(x)$ soit défini pour tous les entiers positifs $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$ et qu'il tend vers la limite B_r lorsque $x = \infty$ de sorte que la différence $A_r(x) - B_r$ considérée comme un infiniment petit, satisfait aux conditions que nous venons de poser pour l'expression $a_s(x) - \alpha_s$.

Or, suivant les indications du § 2 on peut remplacer l'équation actuelle (104) par une autre de la forme (9), les coefficients $a_r(x)$ étant données par la formule

$$\left.\begin{aligned} a_r(x) = \frac{\varepsilon_{n-r}}{(n-r)!}\biggl[\frac{n!}{r!} A_n(x) &+ \frac{(n-1)!}{(r-1)!} A_{n-1}(x) + \\ &+ \frac{(n-2)!}{(r-2)!} A_{n-2}(x) + \cdots + \frac{(n-r)!}{0!} A_{n-r}(x)\biggr]. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Mais cette formule montre que les coefficients de l'équation indiquée (9) satisferont à toutes les conditions que nous avons toujours posées dans l'étude d'une telle équation, pourvu que le coefficient $A_n(x)$ (qui ne diffère de $a_0(x)$ que par le facteur ε_n) ne s'annule pas pour les valeurs de $x \geqq \alpha$ et qu'on ait $\lim\limits_{x=\infty} A_n(x) = B_n \neq 0$ et $\lim\limits_{x=\infty} [a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)] = B_0 \neq 0$.

D'ailleurs, quand on a une équation (9) dont les coefficients sont déterminés au moyen des relations (105) l'équation (79) pour déterminer les fonctions auxiliaires $z_r(x)$ devient

$$B_n z(x+n) + B_{n-1} z(x+n-1) + \cdots + B_0 z(x) = 0.$$

En effet, d'après la relation (105) on a évidemment

$$\alpha_r = \frac{\varepsilon_{n-r}}{(n-r)!}\left[\frac{n!}{r!} B_n + \frac{(n-1)!}{(r-1)!} B_{n-1} + \cdots + \frac{(n-r)!}{0!} B_{n-r}\right]$$

de sorte que les équations (80) se réduisent directement aux autres $A_r = \varepsilon_n B_{n-r}$. Par conséquent, l'équation algébrique (82) pour déterminer les racines $m_1, m_2, \ldots m_n$ devient maintenant

$$B_n m^n + B_{n-1} m^{n-1} + \cdots + B_0 = 0$$

de sorte que les quantités $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots \frac{1}{m_n}$ sont les racines de l'autre équation

$$B_0 m^n + B_1 m^{n-1} + \cdots + B_n = 0.$$

Enfin, il suffit d'observer qu'en prenant α suffisamment grand la condition $A_n(x) \quad 0$, $x \geqq \alpha$ est satisfaite d'elle-même d'après l'autre condition $B_n \mid- 0$ pour énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit donnée une équation linéaire aux différences finies sous la forme*

$$A_0(x) y(x+n) + A_1(x) y(x+n-1) +$$
$$+ A_2(x) y(x+n-2) + \cdots + A_n(x) y(x) = 0,$$

les coefficients A étant définis au moins pour toutes les valeurs entières positives de $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$. De plus, supposons que le coefficient $A_r(x)$ tende vers la limite B_r lorsque $x = \infty$ de sorte que la différence $A_r(x) - B_r$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression $\frac{\tau(x)}{x}$, $\tau(x)$ étant une fonction positive telle que la série

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

converge, par exemple $\tau(x) = \frac{1}{x^\nu}, \frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}, \frac{1}{\log x (\log_2 x)^{1+\nu}}, \cdots$ *avec* $\nu > 0$.

Enfin supposons que $B_0 \neq 0$, $B_n \neq 0$.

Alors, si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *les racines (réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique*

$$B_0 \lambda^m + B_1 \lambda^{m-1} + B_2 \lambda^{m-2} + \cdots + B_n = 0$$

on a les résultats suivants pourvu que toutes ces racines soient distinctes:

a) *si toutes les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *ont le même module* λ *l'intégrale générale de l'équation donnée, quand on considère cette intégrale pour les valeurs entières de* x *plus grandes qu'un certain nombre fixe, prend la forme*

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_n \lambda_n^x + \lambda^x \varepsilon(x)$$

où les quantités $c_1, c_2, \ldots c_n$ *sont des constantes arbitraires, tandis que l'expression* $\varepsilon(x)$ *est une fonction de* x *qui lorsque* $x = \infty$ *devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression*

$$\sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1} .$$

b) *si les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *n'ont pas le même module et si* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ $(h < n)$ *sont celles dont le module a la valeur minimum* λ, *il existe une intégrale particulière de l'équation donnée qui, quand on la considère pour les valeurs entières de* x *plus grandes qu'un certain nombre fixe, prend la forme*

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_h \lambda_h^x + \lambda^x \varepsilon(x)$$

où $c_1, c_2, \ldots c_h$ *sont des constantes arbitraires, tandis que l'expression* $\varepsilon(x)$ *a la signification indiquée plus haut.*

14. Nous allons généraliser le théorème précédent en supposant que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas toutes distinctes.

Dans ce but, retournons aux considérations des §§ 12 et 13 et supposons (comme dans le cas précédent) que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation donnée (9) soient définis pour tous les entiers $x \geqq$ un certain entier $\alpha \geqq 0$ et tendent vers les limites $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ respectivement lorsque $x = \infty$, où $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. En outre, quant aux racines $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ de l'équation algébrique actuelle, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_p$ $(p < n)$ soient distinctes, tandis que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ représentent respectivement leurs degrés de multiplicité, de sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = n.$$

Enfin, mettons $x^{(0)} = 1$, $x^{(t)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-t+1)$, $(t \geqq 1)$; alors, il est bien connu que sous nos hypothèses les n fonctions suivantes ;

$$\begin{array}{llll} z_1 = m_1^x, & z_2 = x^{(1)} m_1^x, & z_3 = x^{(2)} m_1^x, \ldots, & z_\alpha = x^{(\alpha-1)} m_1^x \\ z_{\alpha+1} = m_2^x, & z_{\alpha+2} = x^{(1)} m_2^x, & z_{\alpha+3} = x^{(2)} m_2^x, \ldots, & z_{\alpha+\beta} = x^{(\beta-1)} m_2^x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n-\lambda+1} = m_p^x, & z_{n-\lambda+2} = x^{(1)} m_p^x, & z_{n-\lambda+3} = x^{(2)} m_p^x, \ldots, & z_n = x^{(\lambda-1)} m_p^x \end{array}$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'equation (78) ou (79).

Cela posé, choisissons ces n fonctions comme les fonctions auxiliaires $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ de notre équation (9). Nous allons déterminer d'abord la valeur correspondante du déterminant $Q(x)$.

Or, nous avons en particulier $z_r = x^{(r-1)} z_1$, $1 \leqq r \leqq \alpha$. Par conséquent, en nous servant de la relation générale (24), nous obtenons

$$\left.\begin{array}{r} \Delta^s z_r = \Delta^s x^{(r-1)} z_1 + s\, \Delta^{s-1} (x+1)^{(r-1)} \Delta z_1 + \\ + \dfrac{s(s-1)}{2} \Delta^{s-2} (x+2)^{(r-1)} \Delta^2 z_1 + \cdots \\ + \cdots + s\, \Delta (x+s-1)^{(r-1)} \Delta^{s-1} z_1 + (x+s)^{(r-1)} \Delta^s z_1 ;\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \quad (106)$$

Mais, nous voyons directement que

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta^s x^{(t)} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-s+1)\, x^{t-s} ; \quad (s \leqq t) \\ \Delta^s x^{(t)} = 0 ; \quad (s > t) \\ \Delta^s z_1 = (m_1 - 1)^s m_1^x = \mu_1^s m_1^x ; \quad \mu_1 = m_1 - 1 \end{array}\right.$$

de sorte que l'équation (106) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta^s z_r = m_1^x \Big[& (r-1)(r-2)\ldots(r-s)\, x^{(r-s-1)} + \\ & + \mu_1 s (r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)(x+1)^{(r-s)} + \\ & + \mu_1^r \frac{s(s-1)}{2} (r-1)(r-2)\ldots(r-s+2)(x+2)^{(r-s+1)} + \cdots \\ & \cdots + \mu_1^{s-1} s (r-1)(x+s-1)^{(r-2)} + \mu_1^s (x+s)^{(r-1)} \Big] ; \end{aligned}$$

$$(1 \leqq r \leqq \alpha).$$

De la même manière, il résulte plus généralement que si l'on pose

$\mu_t = m_t - 1$ on peut écrire

$$\Delta^s z_r = m_t^x \, p_{r,s}(\mu_t)\,; \quad (1 \leqq r \leqq n)$$

où $t = 1$ lorsque $1 \leqq r \leqq \alpha$, $t = 2$ lorsque $\alpha + 1 \leqq r \leqq \alpha + \beta, \ldots, t = p$ lorsque $n - \lambda + 1 \leqq r \leqq n$, et où

$$\begin{aligned} p_{r,s}(\mu_t) = \mu_t^s (x+s)^{(r-1)} + s(r-1)\mu_t^{s-1}(x+s-1)^{(r-2)} + \\ + \frac{s(s-1)}{2}(r-1)(r-2)\mu_t^{s-2}(x+s-2)^{(r-3)} + \cdots \\ + s(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)\mu_t(x+1)^{(r-s)} + \\ + (r-1)(r-2)\ldots(r-s)\, x^{(r-s-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi le déterminant $Q(x)$ prend la forme

$$Q(x) = (m_1^\alpha \, m_2^\beta \, m_3^\gamma \ldots m_p^\lambda)^x \, \Delta_n$$

où Δ_n est un déterminant d'ordre n dont les α premières lignes horizontales sont

$$p_{r,0}(\mu_1) \quad p_{r,1}(\mu_1) \quad p_{r,2}(\mu_1) \ldots p_{r,n-1}(\mu_1)\,; \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \alpha,$$

tandis que les $(\alpha+1)^{ième}$, $(\alpha+2)^{ième}, \ldots, (\alpha+\beta)^{ième}$ lignes sont

$$p_{r,0}(\mu_2) \quad p_{r,1}(\mu_2) \quad p_{r,2}(\mu_2) \ldots p_{r,n-1}(\mu_2)\,; \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \beta,$$

et ainsi de suite, les λ dernières lignes étant

$$p_{r,0}(\mu_p) \quad p_{r,1}(\mu_p) \quad p_{r,2}(\mu_p) \ldots p_{r,n-1}(\mu_p)\,; \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, \lambda.$$

Mais, si l'on observe la relation

$$\begin{aligned} p_{r,s}(\mu_t) - (r-1)(x+s-r+2)^{(1)} p_{r-1,s}(\mu_t) + \\ + \frac{(r-1)(r-2)}{2}(x+s-r-3)^{(2)} p_{r-2,s}(\mu_t) + \cdots + \\ + (-1)^{(r-2)}(r-1)(x+s-1)^{(r-2)} p_{2,s}(\mu_t) + (-1)^{r-1}(x+s)^{(r-1)} p_{1,s}(\mu_t) = \\ = s(s-1)(s-2)\ldots(s-r+2)\mu_t^{s-r+1} \end{aligned}$$

ce déterminant Δ_n peut se transformer directement dans un autre dont les α

premières lignes horizontales sont

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_1 \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_1^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_1^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\alpha$$

tandis que les $(\alpha+1)^{ième}$, $(\alpha+2)^{ième}$, ... $(\alpha+\beta)^{ième}$ lignes sont

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_2 \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_2^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_2^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\beta$$

et ainsi de suite, les λ dernières lignes étant

$$0\,0\,0 \ldots 0 \quad (r-1)! \quad r!\mu_p \quad \frac{(r+1)!}{2}\mu_p^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}\mu_p^{n-r-1}; \qquad r=1,\,2,\ldots,\,\lambda.$$

Ainsi, en se rappelant la relation $\mu_t - \mu_\omega = m_t - m_\omega$, on arrive à la valeur suivante pour le déterminant Δ_n:

$$\Delta_n = t_0\,[(m_2-m_1)^\alpha]^\beta\,[(m_3-m_1)^\alpha(m_3-m_2)^\beta]^\gamma \ldots$$
$$\ldots [(m_p-m_1)^\alpha(m_p-m_2)^\beta \ldots (m_p-m_1)^\chi]^\lambda$$

où

$$t_0 = 1!\,2!\,3! \ldots (\alpha-1)!\,1!\,2!\,3! \ldots (\beta-1)! \ldots 1!\,2!\,3! \ldots (\lambda-1)! \quad (107)$$

Par conséquent, si nous posons $\sigma = m_1^\alpha\, m_2^\beta\, m_3^\gamma \ldots m_p^\lambda$ nous avons dans le cas actuel

$$Q(x) = \sigma^x q, \qquad (108)$$

q étant une constante par rapport à x et $q \mp 0$.

Cela posé, nous allons considérer (en suivant la marche du § 12) le déterminant $Q_r(x)$ qui se rencontre dans les relations générales (84) en supposant d'abord que $1 \leqq r \leqq \alpha$.

Ce déterminant, comme le déterminant $Q(x)$ que nous venons de considérer, peut se transformer d'abord dans la forme

$$Q_r(x) = \left(\frac{\sigma}{m_1}\right)^x \Delta_{n-1}$$

où Δ_{n-1} est le déterminant d'ordre $n-1$ tel que ses $\alpha-1$ premières lignes horizontales sont

$$\left\{\begin{array}{l} 0\,0\,0\dots0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\mu_1 \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\mu_1^2\dots \\ \qquad\qquad \dots\frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\mu_1^{n-r_1-1}; \qquad r_1=1,2,\dots,r-1 \\ p_{r_1,0}(\mu_1) \quad p_{r_1,1}(\mu_1) \quad p_{r_1,2}(\mu_1)\dots p_{r_1,n-2}(\mu_1); \qquad r_1=r+1,\ r+2,\dots,\ \alpha. \end{array}\right.$$

tandis que ses $n-\alpha$ autres lignes sont égales respectivement aux lignes correspondantes du déterminant Δ_n quand on y néglige les éléments de la dernière colonne.

D'ailleurs, d'après la relation

$$p_{r,s}(\mu_1) - s\mu_1 p_{r,s-1}(\mu_1) + \frac{s(s-1)}{2}\mu_1^2 p_{r,s-2}(\mu_1) - \dots +$$
$$+(-1)^{s-1}s\mu_1^{s-1}p_{r,1}(\mu_1) + (-1)^s\mu_1^s p_{r,0}(\mu_1) =$$
$$= \frac{(r-1)!}{(r-s-1)!}\mu_1^s x^{(r-s-1)},$$

ce dernier déterminant se transforme directement dans un déterminant dans lequel les $\alpha-1$ premières lignes sont

$$\left\{\begin{array}{l} \overbrace{0\,0\,0\dots0}^{r_1-1} \quad (r_1-1)! \quad 0\,0\,0\dots0; \quad r_1=1,2,\dots,r-1 \\ x^{(r_1)} \quad \frac{r_1!}{(r_1-1)!}m_1x^{(r_1-1)} \quad \frac{r_1!}{(r_1-2)!}m_1^2x^{(r_1-2)}\dots \ r_1!\,m_1^{r_1-1}x \quad r_1!\,m_1^{r_1} \quad 0\,0\,0\dots0; \\ \qquad\qquad r_1=r,\quad r+1,\quad r+2,\dots,\quad \alpha-1. \end{array}\right.$$

tandis que les $n-\alpha$ autres lignes sont déterminées respectivement par les formules suivantes dans lesquelles $\nu_t = m_t - m_1$

$$0\,0\,0\dots0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\nu_2 \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_2^2\dots\frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_2^{n-r_1-1};$$
$$r_1=1,2,3,\dots,\beta,$$
$$0\,0\,0\dots0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\nu_3 \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_3^2\dots\frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_3^{n-r_1-1};$$
$$r_1=1,2,3,\dots,\gamma,$$

. . . .

$$0\ 0\ 0 \ldots 0 \quad (r_1-1)! \quad r_1!\,\nu_p \quad \frac{(r_1+1)!}{2}\nu_p^2 \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_p^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \lambda.$$

Ainsi, le déterminant Δ_{n-1} prend la forme

$$\Delta_{n-1} = \frac{1!\,2!\,3!\ldots(\alpha-1)!}{(r-1)!}\, m_1^{(\alpha-r)(r-1)}\, \Delta_{n-r+1} \tag{109}$$

où Δ_{n-r+1} est le déterminant d'ordre $n-r+1$ dans lequel les $\alpha-r+1$ premières lignes sont

$$\frac{x^{(r_1)}}{r_1!} \quad \frac{m_1\,x^{(r_1-1)}}{(r_1-1)!} \quad \frac{m_1^2\,x^{(r_1-2)}}{(r_1-2)!} \cdots m_1^{r_1-1}\,x^{(1)} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0 \ldots 0;$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ (\alpha-r)$$

tandis que les $n-\alpha$ autres lignes sont respectivement

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_2^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_2^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_2^{r-r_1+2} \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_2^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \beta,$$

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_3^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_3^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_3^{r-r_1+2} \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_3^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \gamma,$$

. . . .

$$\frac{(r-1)!}{(r-r_1)!}\nu_p^{r-r_1} \quad \frac{r!}{(r-r_1+1)!}\nu_p^{r-r_1+1} \quad \frac{(r+1)!}{(r-r_1+2)!}\nu_p^{r-r_1+2} \ldots \frac{(n-2)!}{(n-r_1-1)!}\nu_p^{n-r_1-1};$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \lambda.$$

Mais, on voit directement que les $\alpha-r+1$ premières lignes de Δ_{n-r+1} données plus haut peuvent se remplacer respectivement par ces autres

$$\overbrace{0\ 0\ 0 \ldots 0}^{r_1-1} \quad \frac{(x+r_1-1)\,m_1^{r_1-1}}{r_1} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0 \ldots 0$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \alpha-r.$$

Ainsi, en développant ce déterminant Δ_{n-r+1} par rapport aux mineurs d'ordre $\alpha - r + 1$ qui se trouvent dans ses $\alpha - r + 1$ premières lignes, on arrive à l'équation

$$\Delta_{n-r+1} = \sum_{s=0}^{s=\alpha-r} \varepsilon_{r,s}\, D_s(x,\, m_1)\, E_s \tag{110}$$

où $\varepsilon_{r,s}$ représente une puissance convenable de -1 et $D_s(x,\, m_1)$ et E_s sont des déterminants d'ordres $\alpha - r$, $n - \alpha + 1$ définis comme il suit: les s premières lignes du déterminant $D_s(x,\, m_1)$ sont

$$\overbrace{0\ 0\ 0 \ldots\ 0}^{r-1} \quad \frac{(x - r_1 - 1)!\, m_1^{r_1 - 1}}{r_1} \quad m_1^{r_1} \quad 0\ 0\ 0 \ldots\ 0$$

$$r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ s$$

et ses $\alpha - r - s$ autres lignes sont

$$\overbrace{0\ 0\ 0 \ldots\ 0}^{r_1-1} \quad \frac{(x + r_1)\, m_1^{r_1}}{r_1 + 1} \quad m_1^{r_1+1} \quad 0\ 0\ 0 \ldots\ 0$$

$$r_1 = s, \quad s + 1, \quad s + 2, \ldots, \quad \alpha - r - 1$$

de sorte que

$$D_s(x,\, m_1) = m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha-r+1)}{2}}\ \frac{(x + s - 1)^{(s)}}{s!}, \tag{111}$$

tandis que les lignes du déterminant E_s sont

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)}\, \nu_2^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha - r_1)}\, \nu_2^{\alpha - r_1 + 1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha - r_1 + 1)}\, \nu_2^{\alpha - r_1 + 2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n - r_1)}\, \nu_2^{n - r_1 - 1}; \quad r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \beta$$

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)}\, \nu_3^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha - r_1)}\, \nu_3^{\alpha - r_1 + 1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha - r_1 + 1)}\, \nu_3^{\alpha - r_1 + 2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n - r_1)}\, \nu_3^{n - r_1 - 1}; \quad r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \gamma$$

. . . .

$$\frac{(r+s-1)!}{\Gamma(r+s-r_1+1)}\, \nu_p^{r+s-r_1} \quad \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha - r_1)}\, \nu_p^{\alpha - r_1 + 1} \quad \frac{(\alpha+1)!}{\Gamma(\alpha - r_1 + 1)}\, \nu_p^{\alpha - r_1 + 2} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-2)!}{\Gamma(n - r_1)}\, \nu_p^{n - r_1 - 1}; \quad r_1 = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \lambda.$$

Enfin, pour la valeur spéciale $s = \alpha - r$ (pour laquelle il suffit dans le but que nous avons en vue d'évaluer E_s) il résulte sans difficulté, d'après la relation $\nu_t = m_t - m_1$, que

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha-r} = \frac{t_0\,[(m_2-m_1)^{\alpha-1}]^\beta\,[(m_3-m_1)^{\alpha-1}(m_3-m_2)^\beta]^\gamma \ldots}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!} \\ \frac{\ldots[(m_p-m_1)^{\alpha-1}(m_p-m_2)^\beta\ldots(m_p-m_{p-1})^\chi]^\lambda}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!} \end{aligned} \right\} \tag{112}$$

où t_0 est défini par l'équation (107).

Par conséquent, en se rappelant les relations (110) et (112) et en observant que $\varepsilon_{r,\alpha-r} = 1$, on arrive à l'équation

$$\Delta_{n-r+1} = (x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}\,\frac{E_{\alpha-r}\,m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha-r+1)}{2}}}{(\alpha-r)\,!\,m_1^\alpha}\left[1+\frac{\eta_1}{(x+\alpha-r-1)^{(1)}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta_2}{(x+\alpha-r-1)^{(2)}}+\cdots+\frac{\eta_{\alpha-r}}{(x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}}\right]$$

où $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{\alpha-r}$ représentent des quantités indépendantes de x.

D'après les équations (109) et (110) nous pouvons donc écrire

$$Q_r(x) = (x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}\left(\frac{\sigma}{m_1}\right)^x q_r(x); \qquad (1 \leqq r \leqq \alpha)$$

où

$$\left. \begin{aligned} q_r(x) = \frac{1}{(r-1)\,!\,(\alpha-r)\,!}\,1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(\alpha-1)\,!\,1\,!\,2\,!\ldots \\ \ldots(\beta-1)\,!\ldots1\,!\,2\,!\ldots(\lambda-1)\,!\,m_1^{\frac{(\alpha-r)(\alpha+r+1)}{2}} \times \\ \times[(m_2-m_1)^{\alpha-1}]^\beta\,[(m_3-m_1)^{\alpha-1}(m_3-m_2)^\beta]^\gamma\ldots \\ \ldots[(m_p-m_1)^{\sigma-1}(m_p-m_2)^\beta\ldots(m_p-m_{p-1})^\chi]^\lambda \times \\ \times\left[1+\frac{\eta_1}{(x+\alpha-r-1)^{(1)}}+\frac{\eta_2}{(x-\alpha-r-1)^{(2)}}+\cdots+\right. \\ \left.+\frac{\eta_{\alpha-r}}{(x-\alpha-r-1)^{(\alpha-r)}}\right], \end{aligned} \right\} \tag{113}$$

les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\alpha-r}$ étant indépendantes de x de sorte que $\lim\limits_{x=\infty} q_r(x) = k_r = \textit{une constante} \neq 0$.

De la même manière on peut démontrer une relation analogue pour l'expression $Q_r(x)$ lorsque $\beta+1 \leqq r \leqq \gamma$, lorsque $\gamma+1 \leqq r \leqq \delta, \ldots$, lorsque $\chi+1 \leqq r \leqq \lambda$. Par conséquent, en posant $\sigma_r = \frac{\sigma}{m_r}$ et en se servant des relations générales (84) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} A(x) = \sigma_1^x \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r (x+\alpha-r-1)^{(\alpha-r)} q_r(x) + \\ + \sigma_2^x \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} (x+\beta-r-1)^{(\beta-r)} q_{\alpha+r}(x) + \\ + \sigma_3^x \sum_{r=1}^{r=\gamma} c_{\alpha+\beta+r} (x+\gamma-r-1)^{(\gamma-r)} q_{\alpha+\beta+r}(x) + \cdots + \\ + \sigma_p^x \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} (x+\lambda-r-1)^{(\lambda-r)} q_{n-\lambda+r}(x) \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

où les expressions $q_r(x)$, $1 \leqq r \leqq n$ sont telles que $\lim\limits_{x=\infty} q_r(x) = k_r = const. \mid- 0$. En même temps, on obtient une expression analogue pour la fonction $\overline{q}(x, x_1)$ en remplaçant les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de l'expression (114) par les fonctions $f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1)$ respectivement.

Cela posé, représentons par θ le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Nous pouvons alors écrire

$$\left.\begin{aligned} A(x) = (x+\theta-2)^{\theta-1} \Big\{ \sigma_1^x \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r \omega_r(x) + \sigma_2^x \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} \omega_{\alpha+r}(x) + \cdots + \\ + \sigma_p^x \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} \omega_{n-\lambda+r}(x) \Big\} \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

et

$$\left.\begin{aligned} \overline{q}(x, x_1) = (x+\theta-2)^{\theta-1} \Big\{ \sigma_1^x \sum_{r=1}^{r=\alpha} f_r(x_1) \omega_r(x) + \\ + \sigma_2^x \sum_{r=1}^{r=\beta} f_{\alpha+r}(x_1) \omega_{\alpha+2}(x) + \cdots + \\ + \sigma_p^x \sum_{r=1}^{r=\lambda} f_{n-\lambda+r}(x_1) \omega_{n-\lambda+r}(x) \Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

les expressions $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$ étant des fonctions de x qui tendent vers certaines limites $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ respectivement lorsque $x = \infty$. De plus, une au moins de ces limites est différente de zéro.

Mais (comme dans le cas précédent) nous avons

$$\varepsilon_n f_r(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \Delta^{n-s} [(a_s - \alpha_s) z_r]; \quad \varepsilon_s = (-1)^s,$$

de sorte que nous pouvons écrire dans le cas actuel

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_n f_r(x) &= x^{(r-1)} m_1^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_1^x]}{x^{(r-1)} m_1^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_1^x \overline{(a-\alpha)}\, g_r(x), \quad 1 \leqq r \leqq \alpha \\
\varepsilon_n f_{\alpha+r}(x) &= x^{(r-1)} m_2^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_2^x]}{x^{(r-1)} m_2^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_2^x \overline{(a-\alpha)}\, g_{\alpha+r}(x), \quad 1 \leqq r \leqq \beta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n f_{n-\lambda+r}(x) &= x^{(r-1)} m_p^x \sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \frac{\Delta^{n-s}[(a_s - \alpha_s) x^{(r-1)} m_p^x]}{x^{(r-1)} m_p^x} = \\
&= x^{(r-1)} m_p^x \overline{(a-\alpha)}\, g_{n-\lambda+r}(x), \quad 1 \leqq r \leqq \lambda
\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

où $\overline{a-\alpha}$ représente la plus grande des valeurs $a_s - \alpha_s$, $0 \leqq s \leqq n$ considérées pour une valeur donnée de x et où $g_r(x)$, $1 \leqq r \leqq n$ est une fonction de x qui tend vers une limite bien définie lorsque $x = \infty$.

Ainsi, l'expression $\overline{q}(x, x_1)$ prend la forme

$$\begin{aligned}
\overline{q}(x, x_1) = \varepsilon_n (x + \theta - 2)^{(\theta-1)} [\overline{a(x_1) - \alpha}] \Big\{ & \sigma_1^x m_1^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\alpha} x_1^{(r-1)} g_r(x_1)\, \omega_r(x) + \\
& + \sigma_2^x m_2^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\beta} x_1^{(r-1)} g_{\alpha+r}(x_1)\, \omega_{\alpha+r}(x) + \cdots + \\
& + \sigma_p^x m_p^{x_1} \sum_{r=1}^{r=\lambda} x_1^{(r-1)} g_{n-\lambda+r}(x_1)\, \omega_{n-\lambda+r}(x) \Big\}
\end{aligned}$$

ou

$$\overline{q}(x, x_1) = x^{\theta-1} [\overline{a(x_1) - \alpha}]\, x_1^{\theta-1} \sum_{t=1}^{t=p} \sigma_t^x m_t^{x_1} h_t(x, x_1) \tag{118}$$

où la fonction $h_t(x, x_1)$ considérée pour toutes les valeurs de x et x_1 suffisamment grandes est telle que $|h_t(x, x_1)| < h = const.$ indépendante de x et x_1.

De plus, la formule (115) nous permet d'écrire

$$A(x) = x^{\theta-1} \sum_{t=1}^{t=p} \sigma_t^x j_t(x) \tag{119}$$

où la fonction $j_t(x)$ considérée pour toutes les valeurs de x suffisamment grandes est telle que $|j_t(x)| < j = const.$ indépendante de x.

Par conséquent, dans le cas actuel les expressions

$$\Phi(x, x_1) = \frac{\bar{q}(x+1, x_1)}{a_0(x_1+n) Q(x_1+1)}, \quad \Psi(x, x_1) = A(x_1+1)\Phi(x, x_1)$$

qui jouent un rôle essentiel dans le théorème II, peuvent s'exprimer sous les formes suivantes:

$$\Phi(x, x_1) = \frac{(x+1)^{\theta-1}\,\overline{[a(x_1)-\alpha]}\, x_1^{\theta-1}}{a_0(x_1+n)q} \sum_{t=1}^{t=p} \frac{\sigma_t^{x-x_1} h_t(x+1, x_1)}{m_t}, \tag{120}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, x_1) = {} & \frac{(x+1)^{\theta-1}\,\overline{[a(x_1)-\alpha]}\, x_1^{\theta-1}(x_1+1)^{\theta-1}}{a_0(x_1+n)q} \\ & \sum_{t=1}^{t=p}\sum_{u=1}^{u=p} \sigma_t^{x+1}\left(\frac{m_t}{m_u}\right)^{x_1+1} h_t(x+1, x_1)\, j_u(x_1+1). \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

En se servant des propriétés des fonctions $h_t(x, x_1)$ et $j_t(x)$ il résulte maintenant que si l'on suppose que chacune des différences $a_s(x) - \alpha_s$, $0 \leq s \leq n$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de l'expression $\frac{\tau(x)}{x^{2\theta-1}}$ où $\tau(x)$ a les propriétés indiqués dans les paragraphes précédents, alors, en supposant aussi que toutes les racines $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_p$ ont le même module ρ, on peut écrire

$$\Phi(x, x_1) = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\theta-1} \rho^{(n-1)(x-x_1)} M(x, x_1), \tag{122}$$

$$\Psi(x, x_1) = x^{\theta-1} \rho^{(n-1)(x+1)} N(x, x_1), \tag{123}$$

les fonctions $M(x, x_1)$, $N(x, x_1)$ étant telles que pour toutes les valeurs de x et x_1 suffisamment grandes les relations suivantes existent:

$$\left.\begin{aligned} & |M(x, x_1)| < \Omega_2 \frac{\tau(x_1)}{x_1} \\ & \qquad\qquad (\Omega_2, \Omega_3 \text{ consts. indépendantes de } x \text{ et } x_1) \\ & |N(x, x_1)| < \Omega_3 \frac{\tau(x_1)}{x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Ainsi, on peut écrire aussi

$$u_m(x) = \Phi(x, x_1)\,\Phi(x_1, x_2)\ldots\Phi(x_{m-2}, x_{m-1})\,\Psi(x_{m-1}, x_m) =$$
$$= x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}\,P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

où $P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a les propriétés de la fonction $P(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'équation (100).

Il résulte maintenant, comme dans le cas du § 13, que pour toutes les valeurs de x suffisamment grandes la série infinie (qui se trouve dans l'énoncé du théorème II) $|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$ converge et a une somme $U(x)$ de la forme $U(x) = \theta(x)\,x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}$ où $\theta(x) < \Omega_4 = const.$ indépendante de x. De plus, d'après la relation (119) on peut écrire aussi

$$|\Phi(x, x_1)|\,U(x_1) = x^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x+1)}\,\theta(x, x_1) \tag{125}$$

où pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x et x_1 on a

$$\theta(x, x_1) < \Omega_5 \frac{\tau(x_1)}{x_1}, \quad \Omega_5 = const. \text{ indépendante de } x \text{ et } x_1$$

de sorte que cette expression a les propriétés demandées par le théorème II. En même temps, il résulte que

$$Y(x_1)\,f_r(x_1) = f_r(x_1) \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m(x_1) =$$
$$= \frac{f_r(x_1)}{a_0(x_1+n)} \left[\frac{A(x_1+1)}{Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1)\,x_1^{\theta-1}\,\rho^{(n-1)(x_1+1)}}{Q(x_1+1)}\right]$$

où pour toutes le valeurs de x_1 suffisamment grandes on a $|\theta_3(x_1)| \leqq 1$.

Mais, d'après notre hypothèse relative aux différences $a_s - \alpha_s$ et les relations (117), on voit que pour une valeur quelconque de r, $1 \leqq r \leqq n$ on peut écrire

$$f_r(x_1) = \theta_4(x_1, r)\,\frac{\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}},$$
$$|\theta_4(x_1, r)| \leqq \Omega_6 \frac{\tau(x_1)}{x_1}, \quad \Omega_6 = const. \text{ indépendante de } x_1,$$

x_1 étant suffisamment grand. Par conséquent, le produit $Y(x_1)\,f_r(x_1)$ prend la forme

$$\frac{\theta_4(x_1, r)}{a_0(x_1+n)} \left[\frac{A(x_1+1)\,\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}\,Q(x_1+1)} + \frac{\theta_3(x_1)\,\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{Q(x_1+1)}\right]$$

et cette expression a les propriétés signalées dans le théorème II, ce qui résulte immédiatement des équations (108) et (115) puisque les expressions

$$\frac{\rho^{x_1}}{x_1^{\theta-1}}\left|\frac{A(x_1+1)}{Q(x_1+1)}\right| \quad \text{et} \quad \frac{\rho^{(n-1)(x_1+1)+x_1}}{|Q(x_1+1)|}$$

considérées pour toutes les valeurs de x_1 suffisamment grandes ne dépassent jamais certaines valeurs constantes.

Toutes les conditions demandées par le théorème II sont donc remplies en prenant nos fonctions actuelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pour fonctions auxiliaires et en adoptant notre hypothèse actuelle sur les différences $a_s - \alpha_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Nous allons considérer en plus de détail la forme de la série actuelle $Y(x)$.

Il résulte directement des équations (108) et (114) qu'on a

$$\left.\begin{aligned} Y(x) = \frac{1}{m_1^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r (x+\alpha-r)^{(\alpha-r)} q_r(x+1) + \\ + \frac{1}{m_2^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} (x+\beta-r)^{(\beta-r)} q_{\alpha+r}(x+1) + \cdots + \\ + \frac{1}{m_p^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} (x+\lambda-r)^{(\lambda-r)} q_{n-\lambda+r}(x+1) + \xi(x) \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

où

$$\begin{aligned} \xi(x) = - \frac{a_0(x+n)-\alpha_0}{a_0(x+n)} \Bigg[& \frac{1}{m_1^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\alpha} c_r (x+\alpha-r)^{(\alpha-r)} q_r(x+1) + \\ & + \frac{1}{m_2^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} (x+\beta-r)^{(\beta-r)} q_{\alpha+r}(x+1) + \cdots + \\ & + \frac{1}{m_p^{x+1}} \sum_{r=1}^{r=\lambda} c_{n-\lambda+r} (x+\lambda-r)^{(\lambda-r)} q_{n-\lambda+r}(x+1) \Bigg] + \\ & + \frac{1}{q\, a_0(x+n)\, \sigma^{x+1}} \left[u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Mais, d'après ce que nous avons dit des termes $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x), \ldots$, de la série $Y(x)$ nous avons $u_m(x) = x^{\theta-1}\rho^{(n-1)(x+1)} V_m(x)$ où $V_m(x)$ satisfait à la relation (102). Ainsi, en vertu de notre hypothèse relative aux différences $a_s - \alpha_s$, nous voyons que la fonction $\xi(x)$ a la forme $\dfrac{x^{\theta-1}\eta(x)}{\rho^{x+1}}$ où $\eta(x)$ devient un infiniment petit d'un ordre aussi grand que celui de

$$\tau_1(x) = \sum_{x_1=x+1}^{x_1=\infty} \frac{\tau(x_1)}{x_1}$$

lorsque $x = \infty$.

De plus, en nous rappelant que l'expression $(x-\alpha-r)^{(\alpha-r)}\, q_r(x+1)$ est un polynôme de degré $\alpha-r$ en x nous voyons que le premier terme du second membre de l'équation (126) a la forme

$$\frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_r\, x^{r-1},$$

$c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_\alpha$ étant des constantes arbitraires. De la même manière, le deuxième, troisième,..., $p^{ième}$ termes du second membre de l'équation (126) ont respectivement les formes

$$\frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1},\quad \frac{1}{m_3^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\gamma} c'_{\alpha+\beta+r}\, x^{r-1},\ldots,\quad \frac{1}{m_p^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\lambda} c'_{n-\lambda+r}\, x^{r-1},$$

$c'_{\alpha+1},\ c'_{\alpha+2},\ldots,\ c'_n$ étant des constantes arbitraires.

Pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{aligned} Y(x) = \frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_r\, x^{r-1} + \frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1} + \cdots + \\ + \frac{1}{m_p^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\lambda} c'_{n-\lambda+r}\, x^{r-1} + \frac{x^{\theta-1}\,\eta(x)}{\rho^{x+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

les constantes $c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_n$ et la fonction $\eta(x)$ ayant les propriétés données plus haut.

Nous avons donc établi l'équation (127) en supposant que toutes les racines $m_1,\ m_2,\ldots,\ m_p$ ont le même module ρ. Si cette condition n'est pas remplie et que $m_1,\ldots,\ m_2,\ m_h$ $(h<p)$ représentent celles de ces racines dont le module est maximum, on trouve directement l'équation analogue

$$\begin{aligned} Y(x) = \frac{1}{m_1^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\alpha} c'_n\, x^{r-1} + \frac{1}{m_2^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\beta} c'_{\alpha+r}\, x^{r-1} + \cdots + \\ + \frac{1}{m_h^{x+1}}\sum_{r=1}^{r=\zeta} c_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+r}\, x^{r-1} + \frac{x^{\theta-1}\,\eta(x)}{\rho^{x+1}}, \end{aligned}$$

les constantes $c'_1,\ c'_2,\ldots,\ c'_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+\zeta}$ et la fonction $\eta(x)$ ayant les propriétés signalées plus haut. En effet, il suffit pour établir cette relation de suivre encore la marche de la recherche analogue du § 13.

Ainsi, en appliquant le théorème II et en faisant encore les observations relatives à l'équation (104) nous arrivons au résultat général suivant:

THÉORÈME IV : *Si, dans le théorème III, les racines* λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de l'équation algébrique*

$$B_0 \lambda^m + B_1 \lambda^{m-1} + \cdots + B_n = 0$$

ne sont pas distinctes, la racine λ_1 *se répétant* α *fois, la racine* λ_2 *se répétant* β *fois,..., la racine* λ_p *se répétant* ω *fois :* $(\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \omega = n)$ *ce théorème* (*les autres conditions étant les mêmes*) *reste encore vrai pourvu qu'en posant* $\theta =$ *le plus grand des nombres* α, β, $\gamma, \ldots, \omega$, *on remplace l'expression* $\frac{\tau(x)}{x}$ *par* $\frac{\tau(x)}{x^{2\theta-1}}$ ($\tau(x)$ *ayant la même signification qu'auparavant*) *et qu'on remplace les formes*

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_n \lambda_n^x + \lambda^x \varepsilon(x) \\ y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \cdots + c_h \lambda_h^x + \lambda^x \varepsilon(x) \end{array} \right.$$

par ces autres

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \lambda_1^x \sum\limits_{r=1}^{r=\alpha} c_r x^{r-1} + \lambda_2^x \sum\limits_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} x^{r-1} + \cdots + \lambda_p^x \sum\limits_{r=1}^{r=\omega} c_{n-\omega+r} x^{r-1} + x^{\theta-1} \lambda^x \varepsilon(x) \\ y(x) = \lambda_1^x \sum\limits_{r=1}^{r=\alpha} c_r x^{r-1} + \lambda_2^x \sum\limits_{r=1}^{r=\beta} c_{\alpha+r} x^{r-1} + \cdots + \lambda_h^x \sum\limits_{r=1}^{r=\zeta} c_{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon+r} x^{r-1} + x^{\theta-1} \lambda^x \varepsilon(x) \end{array} \right.$$

respectivement, les quantités λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_h$ $(h < p)$ *étant celles des racines* λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *dont le module est minimum et les constantes* c_1, $c_2, \ldots, c_n$ *étant encore arbitraires.*

Ann Arbor, Etats-Unis, décembre, 1906.

Sur la multiplication des séries trigonométriques.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

Il est bien connu que M. Pringsheim (*) a donné, il y a vingt ans à peu près, un théorème concernant la multiplication, selon la règle de Cauchy, de deux séries trigonométriques aux coefficients positifs ou alternés. Dans la Note que voici je me suis proposé de généraliser comme suit le théorème susdit de l'éminent géomètre allemand :

Supposons que les coefficients réels ou complexes des séries trigonométriques convergentes

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n x, \quad g_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin n x$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n x, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n x$$

satisfassent aux deux conditions suivantes, savoir 1.°

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=n-1} | a_s b_{n-s} | = 0 \tag{1}$$

2.° qu'une des quatre séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | a_n \pm a_{n+1} |, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n \pm b_{n+1} | \tag{2}$$

soit convergente ; tous les produits obtenus en multipliant une des quatre séries

$$f_1(x), \quad f_1(x-\pi), \quad g_1(x), \quad g_1(x-\pi)$$

(*) *Mathematische Annalen,* t. 26, p. 157-166 ; 1885.

par une des quatre autres séries

$$f_2(x),\quad f_2(x-\pi),\quad g_2(x),\quad g_2(x-\pi)$$

peuvent être développés d'après la règle de multiplication de CAUCHY.

Quant à la démonstration de ce théorème, désignons par

$$s=\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n\,,\quad s_1=\sum_{n=1}^{n=\infty}v_n\,,\tag{3}$$

deux séries convergentes, puis mettons

$$w_n=u_1\,v_{n-1}+u_2\,v_{n-2}+\cdots+u_{n-1}\,v_1\,,$$

ABEL (*) a démontré que la règle de CAUCHY, savoir

$$s\,s_1=\sum_{n=1}^{n=\infty}w_n\tag{4}$$

est appliquable, pourvu que la série infinie qui figure au second membre de (4) soit convergente aussi, condition qui est nécessaire et suffisante à la fois.

On sait que M. PRINGSHEIM a démontré son théorème susdit en prenant pour point de départ la proposition d'ABEL; dans ce qui suit, nous avons à appliquer une méthode entièrement différente. A cet effet, mettons dans (3)

$$s=s_n+R_n\,,\quad s_1=s'_n+R'_n\,,$$

un calcul direct donnera

$$s_n\,s'_n=\sum_{p=1}^{p=n}w_n+R''_n\,,\tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger

$$R''_n=\sum_{s=1}^{s=n}u_s\,(v_n+v_{n-1}+\cdots+v_{n-s+1}),\tag{6}$$

ce qui montrera que la condition

$$\lim_{n=\infty}|\,R''_n\,|=0\tag{7}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 1, p. 318; 1826. Œuvres, t. I. p. 226.

est aussi à la fois nécessaire et suffisante pour l'application de la règle de CAUCHY.

On sait, d'après le théorème de M. MERTENS (*) que la condition (7) est certainement satisfaite pourvu qu'une seule au moins des séries (3) soit *absolument* convergente, ce qui n'est pas nécessaire.

Cela posé, considérons d'abord le produit

$$f_1(x) f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n x \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n x, \tag{8}$$

nous aurons pour le terme de reste (6) cette expression

$$\left. \begin{aligned} R''_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s x \,.\Big(b_n \cos n x + b_{n-1} \cos(n-1) x + \cdots + \\ + b_{n-s+1} \cos(n-s+1) x\Big)\,; \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

supposons maintenant convergente la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n - b_{n+1} |,$$

puis multiplions par $2 \sin \frac{x}{2}$ les deux membres de (9), nous aurons après une transformation très simple

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot R_n = A - B + C,$$

où nous avons posé pour abréger

$$A = b_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s x$$

$$B = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \, b_{n-s+1} \,.\, \cos s x \,.\, \sin\left(n - s + \frac{1}{2}\right) x$$

$$C = \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cos s x \,.\, (U_{n-s+1} + U_{n-s+2} + \cdots + U_{n-1}),$$

où il faut admettre dans C:

$$U_p = (b_p - b_{p+1}) \sin\left(p + \frac{1}{2}\right) x,$$

de sorte que la série à termes positifs $\Sigma \mid U_n \mid$ est convergente.

(*) *Journal de Crelle*, t. 79, p. 182; 1875.

Cela posé, il est évidemment possible de déterminer un positif entier N tel que pour $n \geqq N$:

$$|A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |B| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |C| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui donnera finalement pour $n \geqq N$

$$|R''_n| < \frac{\varepsilon}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

ce qui montrera que le produit (8) peut toujours être développé d'après la règle de Cauchy, pourvu que x ne soit pas un multiple de 2π.

Supposons convergente la série

$$\sum_{u=1}^{u=\infty} |b_n + b_{n+1}|,$$

nous avons à étudier de la même manière le produit

$$2 R''_n \cos\frac{x}{2}$$

et ainsi de suite pour tous les autres produits mentionnés dans le théorème; telle est la démonstration complète de notre théorème énoncé.

Supposons particulièrement *positifs* les deux suites de coefficients a_n et b_n, puis supposons

$$a_{n+1} \leqq a_n, \quad b_{n+1} \leqq b_n, \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0, \tag{10}$$

il saute aux yeux que deux des quatre séries (2) sont convergentes et que la condition (1) se réduira à celle-ci

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=n} a_s b_{n-s} = 0; \tag{11}$$

c'est-à-dire que les deux séries à termes alternés

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

peuvent être multipliées d'après la règle de Cauchy, d'où la proposition suivante:

Supposons multiplicables d'après la règle de Cauchy *les deux séries aux* *termes altérnés* $\Sigma(-1)^{n-1} a_n$ et $\Sigma(-1)^{n-1} b_n$, *tous les produits des séries trigonométriques mentionnées dans le théorème général peuvent être développés d'après la règle de* Cauchy *aussi.*

Dans ses recherches aussi profondes qu'ingénieuses sur la multiplication d'après la règle de Cauchy de deux séries non absolument convergentes M. Pringsheim (*) a remplacé la condition (11) par ces deux autres

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{u=\infty} a_n (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = 0 \\ &\lim_{n=\infty} b_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

qui sont équivalentes à (11) mais plus faciles à appliquer.

Posons par exemple

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)}, \quad b_n = \frac{1}{n^\beta}, \tag{13}$$

où α et β désignent des nombres positifs tels que $\alpha + \beta \geqq 1$, tandis que $\varphi(n)$ est une fonction positive de n qui croît constamment avec n, de sorte que

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \infty, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n} = \text{quantité finie.}$$

Pour étudier maintenant les deux conditions (12), posons pour abréger

$$\sigma_n = \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)} \left(\frac{1}{1^\beta} + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\beta} \right)$$

$$\sigma'_n = \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{1^\alpha \varphi(1)} + \frac{1}{2^\alpha \varphi(2)} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)} \right),$$

puis appliquons l'inégalité évidente

$$\frac{1}{n^\beta} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\beta},$$

nous aurons

$$\sigma_n < \frac{1}{n^\alpha \varphi(n)} \cdot \int_1^n x^{-\beta} \, d\beta < \frac{n^{1-\alpha-\beta}}{\varphi(n)} \leqq \frac{1}{\varphi(n)};$$

(*) *Mathematische Annalen,* t. 21, p. 327-328; 1883.

quant à σ'_n, désignons par p un positif entier qui deviendra infiniment grand avec n mais de sorte que

$$\lim_{n=\infty} (p \,.\, n^{-\beta}) = 0,$$

nous aurons

$$\sigma'_n < \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{p^\alpha}\right) + \frac{1}{n^\beta \varphi(p)}\left(\frac{1}{(p+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

d'où sans peine

$$\sigma'_n < \frac{p}{n^\beta} + \frac{n^{1-\alpha-\beta}}{\varphi(p)};$$

c'est-à-dire que les conditions (12) sont remplies dans ce cas.

Prenons comme second exemple

$$a_n = \frac{1}{\varphi(n)}, \quad b_n = \frac{1}{n}, \tag{14}$$

où $\varphi(n)$ est du même caractère que dans (13) mais telle que nous ayons ici

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n} = \infty, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\log n \,.\, \log(\log n)} = 0, \tag{15}$$

nous verrons par le même procédé que les conditions (12), sont remplies dans ce cas aussi.

Comme troisième exemple supposons convergente la série

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots \tag{16}$$

nous aurons de notre proposition susdite précisément le théorème énoncé de M. Pringsheim.

Remarquons en passant avec M. Pringsheim (*) que la convergence de la série (16) est *suffisante* mais point de tout *nécessaire* pour la multiplication d'après la règle de Cauchy les deux séries à termes alternés en question, comme le montrent clairement nos séries particulières (13) et (14) du reste.

Étudions maintenant plus amplement nos produits des séries trigono-

(*) *Mathematische Annalen,* t. 21, p. 349, t. 26, p. 165.

métriques, nous verrons que la condition relative à la convergence de la série (16) joue un rôle *essentiel* pour la transformation des produits susdits.

Étudions d'abord le produit

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n x \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos n x,$$

nous aurons un développement de la forme

$$f_1(x) f_2(x) = U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \cdots, \tag{17}$$

où nous avons posé pour abréger

$$U_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s b_{n-s} \cos s x \cos (n-s) x,$$

d'où, en mettant

$$w_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1, \tag{18}$$

nous aurons après une simple transformation

$$U_n = \frac{1}{2} w_n \cos n x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' (a_s b_{n-s} + b_s a_{n-s}) \cos (n - 2s) x. \tag{19}$$

Posons ensuite

$$f_1(x) g_2(x) = U'_2 + U'_3 + U'_4 + U'_5 + \cdots \tag{20}$$

$$g_1(x) g_2(x) = U''_2 + U''_3 + U''_4 + U''_5 + \cdots \tag{21}$$

nous aurons de même

$$U'_n = \frac{1}{2} w_n \sin n x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (a_s b_{n-s} - a_{n-s} b_s) \sin (n - 2s) x \tag{22}$$

$$U''_n = -\frac{1}{2} w_n \cos n x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' (a_s b_{n-s} + a_{n-s} b_s) \cos (n - 2s) x; \tag{23}$$

dans (19) et (23) l'accent fixé au signe de sommation indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui, pour n pair, correspond à $2s = n$.

Les formules (17), (20), (21) *sont appliquables pour les séries trigonométriques considérées dans notre théorème général.*

Ordonnons maintenant selon des fonctions trigonométriques des multiples de x les trois séries en question, nous aurons *formellement*, en posant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} A_n = b_1\, a_{n+1} + b_2\, a_{n+2} + b_3\, a_{n+3} + \cdots \\ B_n = a_1\, b_{n+1} + a_2\, b_{n+2} + a_3\, b_{n+3} + \cdots, \end{array}\right\} \tag{24}$$

ce qui donnera particulièrement

$$A_0 = B_0 = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 + \cdots, \tag{25}$$

ces développements

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) f_2(x) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (w_n + A_n + B_n) \cos n x \\ f_1(x) g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (w_n - A_n + B_n) \sin n x \\ g_1(x) g_2(x) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (-w_n + A_n + B_n) \cos n x, \end{array}\right\} \tag{26}$$

où il faut admettre $w_1 = 0$.

Cela posé, les formules *formelles* (26) donneront cette proposition remarquable et nouvelle, je le crois:

Supposons multiplicables d'après la règle de CAUCHY *deux séries trigonométriques, le produit ainsi obtenu ne peut pas généralement être ordonné selon des cos et sin des multiples de x, savoir être transformé formellement dans une série trigonométrique ordinaire.*

C'est précisement cette proposition qui montre clairement le rôle essentiel qui joue dans ce problème la condition de M. PRINGSHEIM.

En effet, supposons positifs les coefficients a_n et b_n et convergente la série (16), toutes les séries A_n et B_n définies par (24) sont évidemment convergentes aussi; de plus nous aurons facilement

$$\left.\begin{array}{c} A_{n+1} \leqq A_n, \quad B_{n+1} \leqq B_n \\ \lim_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} B_n = 0, \end{array}\right\} \tag{27}$$

ce qui montrera clairement la *convergence* des trois séries trigonométriques qui figurent aux seconds membres des formules (26).

Cela posé, il est très facile de démontrer rigoreusement dans ce cas les trois formules (26). En effet, nous n'avons qu'à transformer de la manière susdite les n premiers termes des séries qui figurent aux seconds membres de (18), (20), (21), la convergence des séries A_n et B_n et les formules (27) nous conduiront au but après une recherche non difficile des termes de reste.

Ces réductions faites, nous avons démontré cette autre proposition intéressante :

Parmi les séries trigonométriques à coefficients positifs ou alternés qui sont multiplicables d'après la règle de CAUCHY, *celles considérées par* M. PRINGSHEIM *sont les seules, dont les produits ainsi obtenus peuvent être transformés formellement dans des séries trigonométriques ordinaires.*

Copenhague, le 20 novembre 1906.