INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD DE LA FRANCE

# LEÇONS

# DE

# MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

par

A. BOULANGER

DOCTEUR ÈS SCIENCES,
MAITRE DE CONFÉRENCES DE MÉCANIQUE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

1902

Imprimerie BARREZ-DUBREUCQ, Lille

INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD DE LA FRANCE

# Leçons de Mécanique Élémentaire

PROFESSEUR : Mr Boulanger

## PROGRAMME

### Introduction

§ 1. – Le mouvement et le repos : leur relativité

§ 2. – La Mécanique : ses divisions.

### 1ère Partie – Cinématique du Point.

§ 1 – Trajectoire – Équation horaire d'un mouvement

§ 2 – Vitesse moyenne

§ 3 – Mouvement uniforme.

§ 4 – Vitesse à un instant donné ; exemples simples de son calcul ; sa représentation géométrique ; son utilité.

§ 5 – Accélération dans le mouvement rectiligne ; mouvement uniformément varié.

§ 6 – Chute verticale d'un point matériel pesant dans le vide.

§ 7 – Courbe horaire ; cas du mouvement uniforme ; application aux graphiques des trains.

§ 8 – Courbe des vitesses ; cas du mouvement uniformément varié.

§ 9 – Mouvement circulaire ; vitesse angulaire.

## 2e Partie – Composition des mouvements –

§ 1 – Système invariable animé d'un mouvement de translation ; mouvement relatif et mouvement composé d'un point.

§ 2 – Composition de deux mouvements suivant la même droite.

§ 3 – Composition de deux mouvements rectilignes suivant des directions différentes.

§ 4 – Mouvement des projectiles dans le vide.

§ 5 – Aperçu de la définition de l'accélération dans un mouvement curviligne quelconque.

## 3e Partie – Dynamique du point matériel

§ 1 – Principe de l'inertie ; force et masse.

§ 2 – Mesure des forces et des masses ; unités C.G.S.

§ 3 – Principe de causalité ; déterminisme mécanique.

§ 4 – Somme géométrique d'un système de vecteurs.

## 4ᵉ Partie — Statique du solide invariable.

# Appendice. — Notions sur le frottement.

**Nota.** — La rédaction autographiée est un sommaire dont le cours est le développement et le commentaire.

Les paragraphes marqués d'un astérisque ne sont pas exigés à l'examen.

# Introduction

## §1 — Le mouvement et le repos ; leur relativité.

Un point matériel est une particule de matière occupant un volume assez petit pour qu'on puisse en négliger les dimensions, on regarde la matière dont est formé ce point matériel comme concentrée en un point géométrique.

Un point matériel $M$ est en mouvement ou en repos par rapport à un autre point $P$ selon que la distance de ces deux points varie ou ne varie pas avec le temps ; — dans le second cas on dit que les deux points sont invariablement liés ou forment un système invariable. Plus généralement, un système de points $P_1, P_2, P_3$ …… est invariable quand les distances mutuelles de ces points restent constantes ; un corps solide est un système invariable.

Un point matériel $M$ est en mouvement par rapport à un système invariable $S$ de points de repères $P_1, P_2 P_3$ …… quand les distances $MP_1$, $MP_2$, …… de $M$ aux divers points de $S$ (ou quelques unes d'entre elles) varient avec le temps ; il est en repos par rapport à $S$ dans le cas contraire.

Un ensemble de points matériels $M_1, M_2$ …… (un corps solide par exemple) est en mouvement ou en repos par rapport à un système invariable $S$ selon que ces points (ou quelques uns d'entre eux) sont en mouvement par rapport à $S$, ou qu'ils sont tous en repos par rapport à $S$.

Le repos ou le mouvement, soit d'un point matériel, soit d'un corps, est un phénomène essentiellement relatif au système de repères S auquel on le rapporte. Ainsi lorsqu'une bille roule sur le pont d'un bateau naviguant sur une rivière, cette bille est en mouvement par rapport aux objets fixés au bateau, et, dans des conditions convenables, elle peut être en même temps en repos par rapport aux objets fixés au rivage.

## § 2. – La Mécanique ; ses divisions.

La Mécanique a pour objet l'étude des phénomènes de mouvement ; elle s'occupe du repos comme cas particulier.

Ces phénomènes peuvent être envisagés à deux points de vue :

1° dans leurs relations avec l'espace et le temps ; c'est l'objet de la Cinématique

2° dans leurs relations avec la matière ; c'est l'objet :

a) de la Dynamique : étude des lois du mouvement de la matière,

et b) de la Statique : étude des lois du repos de la matière.

# 1ère PARTIE

# Cinématique du point

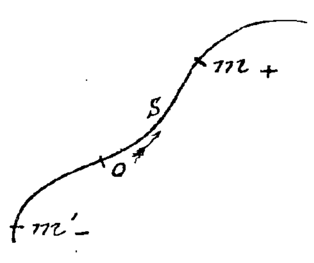
## §1. Trajectoire; équation horaire du mouvement d'un point.

§1. – Prenons un système invariable de comparaison S. (le plus commode au point de vue théorique est un trièdre trirec=tangle) et étudions le mouvement d'un point matériel M par rapport à S.

Le point dont on considère le mouvement s'appelle mobile.

Le mobile M occupe à chaque instant une certaine position m dans le système de comparaison; le lieu géométrique de ces points m est dit la trajectoire du mobile.

Supposons la trajectoire connue et marquons sur elle un point O arbitrairement choisi et dit origine. Chaque position m du mobile sur sa trajectoire est représentée par une grandeur algébrique S. Cette grandeur que l'on nomme l'espace est positive ou négative suivant que le point m est placé d'un




côté déterminé de l'origine ou du côté opposé, et sa valeur absolue est le nombre des unités de longueur de l'arc om terminé à l'origine et au mobile.

D'autre part, on définit chaque instant de la durée par un nombre algébrique ; ce nombre est positif ou négatif suivant que l'instant considéré est postérieur ou antérieur à un certain instant particulier, choisi à volonté et dit instant initial ; sa valeur absolue est le nombre des unités de temps écoulées entre l'instant initial et l'instant considéré.

Sans entrer dans les considérations philosophiques qui conduisent à la mesure du temps, nous supposons que le temps est mesuré par une bonne montre. L'unité de temps est la seconde (1) du jour solaire moyen, c'est-à-dire la seconde donnée par une excellente horloge destinée aux usages civils. La minute vaut 60 secondes, l'heure 60 minutes.

Les longueurs s'évaluent en centimètres.

Cela posé, dans son mouvement, le mobile occupe à chaque instant $t$ une position unique et bien déterminée ; cela équivaut à dire que, pour chaque valeur de $t$, $S$ a une valeur unique et déterminée ; $S$ est donc une fonction uniforme de $t$, soit

$$S = f(t). \qquad (1)$$

Cette équation est dite l'équation horaire du mouvement.

$f(t)$ est une fonction uniforme et continue ; $f(t)$ ne peut avoir qu'une seule valeur pour chaque valeur utile de la variable $t$ ; en outre, pour la suite continue des valeurs ~~continues~~ ~~des valeurs~~ réelles de $t$ correspondant au mouvement, $f(t)$ présente une suite continue

---

(1) La seconde est le temps nécessaire pour qu'un pendule de 0$^m$,99356 de longueur exécute, à la latitude de 45°, son oscillation.

de valeurs réelles, car le mobile ne peut passer d'une position à une autre sur sa trajectoire qu'après avoir passé par chacun des points intermédiaires.

L'équation horaire permet de déterminer l'instant du passage du mobile en un point donné de sa trajectoire : S étant donné, il faut résoudre l'équation (1) par rapport à t, soit :

$$t = F(S) \qquad (2)$$

La fonction F peut avoir plusieurs valeurs pour une valeur donnée de S, car le mobile peut repasser plusieurs fois au même point.

Il est clair que le mouvement d'un point est complètement déterminé quand on connait <u>la trajectoire</u>, <u>l'origine</u> choisie sur cette trajectoire et <u>l'équation horaire</u>.

Le mouvement dit <u>rectiligne</u> ou <u>curviligne</u> selon que la trajectoire est une ligne droite ou courbe.

§ 2.– <u>Vitesse moyenne</u>.– On appelle <u>vitesse moyenne</u> Vm d'un mobile, pour un parcours donné E, le rapport du chemin parcouru E au temps T employé à le réaliser.

Ce rapport s'appelle aussi vitesse moyenne pour cet intervalle de temps T.

Ainsi par définition :

$$V_m = \frac{E}{T}$$

Soit par exemple un train mettant 3 heures pour aller de Paris à Lille ; le parcours est de 245 kilomètres.

$E = 24500000$ c.m $\qquad T = 3 \times 60 \times 60 = 10800$ sec.

$$V_m = \frac{245\,000\cancel{00}}{108\,\cancel{00}} = 2269$$

La vitesse moyenne n'a de sens que si les unités sont précisées.— Si l'on prenait comme unités le kilomètre et l'heure on aurait

$$V_m = \frac{245}{3} = 81 \text{ environ.}$$

La trajectoire étant donnée et le mouvement étant supposé avoir toujours lieu dans le même sens sur cette trajectoire pendant l'intervalle de temps considéré, on convient de donner un signe à la vitesse moyenne et de la regarder?

comme positive si le mouvement a lieu dans le sens des arcs $\underline{S}$ positifs, comme négative si le mouvement a lieu en sens contraire.

Dans le premier cas le mouvement est dit <u>direct</u>, et dans le second cas, <u>rétrograde</u>.

L'équation horaire du mouvement donne simplement l'expression algébrique de la vitesse moyenne correspondant à un intervalle de temps $\theta$ consécutif à un instant $\underline{t}$, cet intervalle étant assez petit pour que le parcours ait lieu constamment dans le même sens. $\theta$ est essentiellement positif.

Soit $\sigma$ l'accroissement algébrique de $S$ de l'instant $t$ à l'instant $t+\theta$; d'après l'équation horaire

$$S+\sigma = f(t+\theta). \qquad (3)$$

Si le mouvement est direct, $\sigma$ est positif, et comme la vitesse $V_m$ par convention est positive on a :

$$V_m = \frac{\sigma}{\theta}.$$

Si le mouvement est rétrograde $\sigma$ est négatif; la valeur absolue du chemin parcouru est $-\sigma$, et comme la vitesse $V_m$ est alors par convention négative, on a :

$$V_m = -\left(\frac{-\sigma}{\theta}\right) = \frac{\sigma}{\theta}.$$

Donc : <u>la vitesse moyenne, en grandeur et en signe, pendant un intervalle de temps $\theta$ durant lequel le sens du mouvement reste invariable est égale au rapport de l'accroissement algébrique de l'arc à l'intervalle $\theta$ de temps.</u>

Les équations (1) et (3) donnent

$$\sigma = f(t+\theta) - f(t).$$

Donc $$V_m = \frac{f(t+\theta)-f(t)}{\theta}.$$

§ 3.– <u>Mouvement uniforme.</u> On donne le nom de mouvement uniforme à celui dont l'équation horaire est de la forme :

$$S = at + b.$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes.

Dans un tel mouvement on a :

$$V_m = \frac{[a(t+\theta)+b]-[at+b]}{\theta} = \frac{a\,\theta}{\theta} = a.$$

$V_m$ est indépendant de $t$ et de $\theta$ ; c'est une constante $a$. Donc <u>dans un mouvement uniforme, la vitesse moyenne est constante pour un intervalle de temps quelconque consécutif à un instant quelconque</u>

Réciproquement, si dans un mouvement la vitesse moyenne est constante, le mouvement est uniforme.– En effet, par hypothèse :

$$\frac{f(t+\theta)-f(t)}{\theta} = a ;$$

ou $$\frac{f(t+\theta)-f(t)}{[t+\theta]-t} = a.$$

Laissons $t$ constant et posant $t+\theta = T$, on a :

$$f(T) = a(T-t) + f(t).$$

Quand $\theta$ varie, $T$ varie, mais $-at+f(t)$ est une constante $b$ ; donc :

$$f(T) = aT+b.$$

Ainsi $f(T)$ est une fonction du 1er degré de son argument $T$; le mouvement correspondant est donc uniforme.

§4. — Vitesse à un instant donné. — En dehors de ce cas particulier du mouvement uniforme, $V_m$ dépend de $t$ et de $\theta$: les mouvements correspondants sont dits variés.

1er Exemple. — Soit: $\qquad S = at^2+bt+c,$

$a, b, c$ étant des constantes. On a:

$$S+\sigma = a(t+\theta)^2+b(t+\theta)+c$$

Par différence, il vient:

$$\sigma = 2at\theta + a\theta^2 + b\theta.$$

Donc
$$V_m = \frac{\sigma}{\theta} = \underline{2at+b+a\theta}.$$

2e Exemple Soit:

$$S = a \sin kt,$$

$a$ et $k$ étant des constantes. On a:

$$S+\sigma = a \sin k(t+\theta)$$

Donc
$$\sigma = a\left[\sin k(t+\theta) - \sin kt\right]$$

Cette expression peut se transformer en utilisant l'identité connue:

$$\sin p - \sin q = +2 \sin \frac{p-q}{2} . \cos \frac{p+q}{2}$$

Il vient
$$\sigma = +2a \sin\left(\frac{k\theta}{2}\right) . \cos\left(kt+\frac{k\theta}{2}\right).$$

Donc:

$$V_m = \frac{\sigma}{\theta} = \underline{+ ak . \left[\frac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)}{\frac{k\theta}{2}}\right] . \cos\left(kt+\frac{k\theta}{2}\right)}.$$

La valeur de la vitesse moyenne pour un intervalle de temps assez long ne renseigne pas sur l'allure du mobile à un instant quelconque du mouvement. Pour juger de cette allure à proximité d'un instant donné, il convient de prendre la vitesse moyenne pendant un temps très court consécutif à cet instant, et le nombre obtenu donnera un renseignement d'autant plus précis que cet intervalle sera plus court.

Cette considération conduit à appeler <u>vitesse à un instant donné</u> <u>$t$</u> la limite vers laquelle tend la vitesse moyenne prise à partir de cet instant quand l'intervalle de temps $\theta$ pour lequel on la prend décroît jusqu'à zéro.

La limite $V$ est, comme $V_m$, une grandeur algébrique :

$$V = \lim V_m = \lim \frac{f(t+\theta) - f(t)}{\theta} \qquad \text{p}^{r} \ \theta = 0$$

On dit aussi que $V$ est la dérivée de $f(t)$ par rapport à $t$.

Reprenons les exemples précédents, et pour chacun d'eux, calculons la vitesse $V$.

<u>1er Exemple.</u> $\qquad S = at^2 + bt + c$

on a : $\qquad V = \lim \left[ 2at + b + a\theta \right] = 2at + b$

<u>2e Exemple.</u> $\qquad S = a \sin kt$

on a : $\qquad V = + ak . \lim \left[ \dfrac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)}{\frac{k\theta}{2}} \right] . \cos\left(kt + \frac{k\theta}{2}\right).$

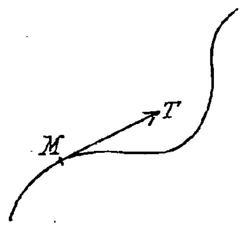
On sait que la limite d'un produit de deux facteurs est égale au produit des limites de ces facteurs ; le premier facteur, rapport d'un sinus à son arc, tend vers <u>un</u> quand cet arc tend vers zéro ; le second facteur tend vers $\cos kt$. Donc :

$$V = + ak \cos kt.$$

Les méthodes de calcul de $V$ seront exposées dans le cours de

Mathématiques Spéciales sous le nom de théorie des dérivées.

La vitesse à un instant donné $t$ se représente par un segment de droite $MT$, porté sur la tangente à la trajectoire au point $M$ qu'occupe le mobile à cet instant, segment porté dans le sens du mouvement et égal en grandeur à la valeur absolue de la vitesse. Ce segment s'appelle le vecteur-vitesse à l'instant $t$.




Voici en particulier comment on peut avoir à utiliser l'expression calculée de $V$.

Soit à déterminer les positions du mobile sur sa trajectoire, pour lesquelles le sens du mouvement change.

Durant des intervalles extrêmement courts précédant et suivant l'instant d'un tel changement de sens, la vitesse moyenne a des valeurs l'une positive, l'autre négative ; la vitesse à cet instant, limite à la fois d'une quantité positive et d'une quantité négative, est nulle. Ainsi, les instants des changements de sens s'obtiendront en résolvant l'équation

$$V = 0.$$

Par exemple, pour le mouvement d'équation horaire

$$S = a \sin kt,$$

les instants des changements de sens seront définis par

$$\cos kt = 0\,;$$

ou

$$kt = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$m$ étant un entier arbitraire. — Il y a une infinité de tels instants $T$:

$$T = (2m+1)\frac{\pi}{2k}.$$

Remarque : Si la vitesse d'un mobile à un instant donné est la même quel que soit cet instant, le mouvement est uniforme. — En effet, si l'on a quel que soit $t$ :

$$\lim \frac{f(t+\theta)-f(t)}{\theta} = a \qquad p^r\ \theta = 0$$

en posant $f(t) = at + \mathcal{F}(t)$, on en conclut que :

$$\lim \frac{\mathcal{F}(t+\theta)-\mathcal{F}(t)}{\theta} = 0, \qquad p^r\ \theta = 0$$

et on démontre dans le cours de Mathématiques spéciales que cette égalité exige que $\mathcal{F}(t)$ se réduise à un constant $b$.

§ 5. — Accélération dans le mouvement rectiligne; mouvement uniformément varié. — En langage vulgaire, un mouvement est accéléré quand le mobile marche de plus en plus vite; retardé quand il va de plus en plus lentement. Nous préciserons cette notion en disant qu'un mouvement est accéléré ou retardé suivant que la grandeur de sa vitesse augmente ou diminue quand le temps croît.

Dans le cas particulier du mouvement étudié :

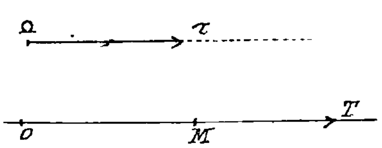
$$S = at^2 + bt + c,$$

nous avons trouvé

$$V = 2at + b;$$

le mouvement sera accéléré si $a > 0$, retardé si $a < 0$.

Lorsque le mouvement est rectiligne, si par un point fixe $\Omega$ du système de comparaison, nous menons un segment $\Omega\tau$ égal et parallèle au vecteur vitesse $MT$, et du même sens que $MT$, le point $\tau$ décrira, quand $t$ variera, une droite parallèle à la trajectoire de $M$.




Le déplacement du point $\tau$ sur sa trajectoire et en particulier le signe de sa vitesse permettra d'apprécier les variations de la vitesse $V$ du mobile

M.

On appelle <u>accélération</u> du mobile M à l'instant $t$ la vitesse du point $\tau$ à cet instant.

Si l'on a trouvé : $\quad V = \varphi(t)$,

on aura pour valeur de l'accélération à l'instant $t$ la grandeur algébrique

$$\gamma = \lim \frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(t)}{\theta}$$

pour $\theta = 0$,

car $\varphi(t)$ représente l'abcisse curviligne du point $\tau$.

Dans le cas particulier précédent :

$$\varphi(t) = 2at+b$$

$$\varphi(t+\theta) = 2a(t+\theta)+b,$$

et l'on a :

$$\gamma = \lim \frac{2a\theta}{\theta} = 2a;$$

ce mouvement est à accélération constante : on dit qu'il est <u>uniformément varié</u>.

En général, $\gamma$ dépendra du temps $t$. Ainsi pour le mouvement

$$S = a \sin kt,$$

on a trouvé $\quad V = +ak \cos kt$;

un calcul analogue à celui qui a donné $V$ conduit à :

$$\gamma = -ak^2 \sin kt;$$

ainsi $\quad \gamma = -k^2 S.$

Ce mouvement, d'une grande importance en physique, s'appelle <u>mouvement harmonique simple</u> ou <u>mouvement pendulaire</u>.

Revenons au mouvement :

$$S = at^2 + bt + c.$$

Nous pouvons donner une interprétation des constantes $a, b, c$:

$\underline{c}$ est l'abcisse $S_0$ du mobile à l'instant $t=0$;

$\underline{b}$ est la vitesse $V_0$ du mobile à l'instant $t=0$;

$\underline{2a}$ est l'accélération constante $\gamma$ du mobile.—

On peut donc écrire cette équation:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad (\alpha)$$

Réciproquement quand un mouvement est à accélération constante son équation horaire est de la forme $(\alpha)$.

En effet, soit $\gamma$ cette accélération.— D'après la définition de l'accélération: la vitesse du point $\tau$ associé au mobile sera constante et aura pour valeur $\gamma$. Le mouvement du point $\tau$ sera uniforme (remarque du § 4), et l'on aura:

$$V = \Omega\tau = \gamma t + \text{Const.}$$

La constante se réduit à la valeur $V_0$ de la vitesse à l'instant $t=0$

Si alors

$$S = f(t)$$

est l'équation horaire du mouvement, on a par définition

$$\lim \frac{f(t+\theta) - f(t)}{\theta} = \gamma t + V_0.$$

pour $\theta = 0$

Posons $f(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + \sigma(t)$. La condition précédente s'écrit:

$$\lim \left[\frac{\sigma(t+\theta) - \sigma(t)}{\theta} + \gamma t + \frac{\gamma\theta}{2} + V_0\right] = \gamma t + V_0$$

pour $\theta = 0$

ou $$\lim \frac{\sigma(t+\theta) - \sigma(t)}{\theta} = 0$$

pour $\theta = 0$

Ceci exige, comme on l'établira en Mathématiques Spéciales, que $F(t)$ se réduise à une constante. — Donc :

$$S = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + A$$

La constante $A$ est l'abcisse $S_0$ du mobile à l'instant $t = 0$.

Si l'on a pris comme origine sur la trajectoire la position du mobile à l'instant $t = 0$ on a : $S_0 = 0$ et $(\alpha)$ se réduit à :

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Si de plus à cet instant la vitesse $V_0$, dite vitesse initiale, est nulle, $(\alpha)$ devient :

$$S = \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad (\beta)$$

Ainsi dans un mouvement uniformément varié, sans vitesse initiale, l'espace parcouru varie proportionnellement au carré du temps employé à le parcourir.

Il est évident que, inversement, si dans un mouvement rectiligne, l'espace parcouru varie proportionnellement au carré du temps, ce mouvement est uniformément varié et sans vitesse initiale ; car si :

$$\frac{S}{t^2} = \text{Const} = k,$$

on a

$$s = k t^2; \qquad v = 2kt; \quad \gamma = 2k \quad \text{et} \quad V_0 = 0.$$

Dans l'équation $(\beta)$ faisons $t = 1$ ; nous aurons $\gamma = 2S$.
Donc dans un tel mouvement, l'accélération est le double de l'espace parcouru durant la première unité de temps.

## § 6. — Chute verticale d'un point matériel pesant dans le vide.

L'expérience montre qu'un corps abandonné dans le vide à l'action de la pesanteur tombe suivant la verticale et que les espaces qu'il parcourt sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir; on reconnait de plus que le chemin parcouru dans la première seconde est 490 cm 44.

Donc le mouvement d'un point matériel pesant tombant librement dans le vide est un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, d'accélération $g = 2 \times 490,44 = 980,88$ (les unités étant la seconde et le centimètre). Si $h$ est la hauteur de chute :

$$h = \frac{1}{2} g t^2.$$

La vitesse à l'instant $t$ est :

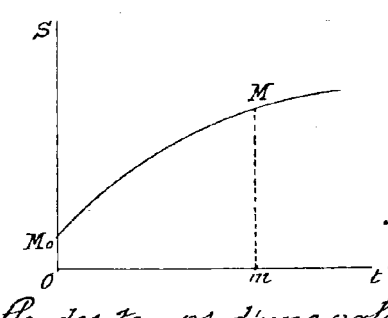
$$V = gt.$$

De ces deux équations on déduit :

$$V = \sqrt{2gh}.$$

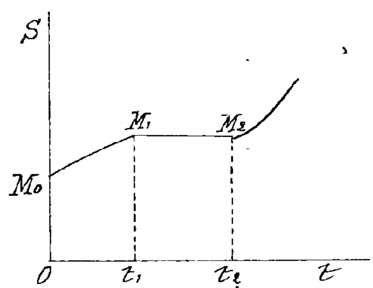
Cette formule fournit la vitesse acquise, en bas de sa chute, par un corps tombant dans le vide d'une hauteur $h$.

## § 7 — Courbe horaire; cas du mouvement uniforme; application aux graphiques des trains.




Prenons deux axes de coordonnées, l'axe des temps Ot et l'axe des espaces OS; on porte en abcisses et en ordonnées les valeurs correspondantes de $t$ et de $S$, mesurées à des échelles convenues. — Soit $\overline{Om}$ la mesure à l'échelle des temps d'une valeur $t$. Calculons à l'aide de l'équation horaire (1), la valeur correspondante de $S$, et portons en $\overline{mM}$ la mesure de $S$ à l'échelle choisie des espaces. Quand on fait varier $t$ d'une manière continue, le point $M$ décrit une courbe dite courbe horaire du mouvement.

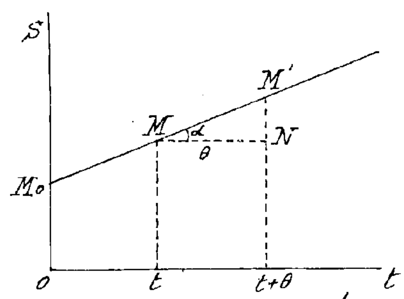
Un arrêt ou repos du mobile, en un point donné de la trajectoire, pendant l'intervalle de temps de $t_1$ à $t_2$, est figuré par un segment de droite $M_1M_2$ parallèle à l'axe des temps.




Le mouvement uniforme, d'équation horaire

$$S = at + b,$$

a pour courbe horaire une droite. En effet considérons deux instants quelconques $t$ et $t+\theta$; soient $M$ et $M'$ les points correspondants de la courbe horaire, d'ordonnées $S$ et $S+\sigma$.




L'angle $\alpha$ de la direction $\overline{MM'}$ avec la direction $Ot$ vérifie la relation

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sigma}{\theta} = a,$$

en supposant, pour fixer les idées, qu'on ait adopté une même longueur pour représenter les unités de temps et d'espace.

Cet angle est donc constant, et par suite, si $M$ une fois choisi, $M'$ varie, ce point $M'$ décrira une droite.

Cette droite coupe l'axe des $S$ en un point $M_0$ d'ordonnée $b$.

La pente de la droite horaire mesure la vitesse du mobile; et le mouvement est direct ou rétrograde selon que $\alpha$ est aigu ou obtus.

Ces notions s'appliquent à l'établissement des graphiques des chemins de fer. Dans un tel graphique, on représente sur une même feuille le mouvement de tous les trains qui parcourent en une journée une ligne donnée et, pour cette représentation, on considère tous les mouvements comme des successions de mouvements uniformes séparés par des arrêts dans les gares. La ligne horaire d'un train est dès lors composée d'une série de segments de droites.

Nous indiquons comme exemple ci-après, le graphique des trains express entre Lille et Calais, et vice versa, pour le service d'hiver commencé le 3 Novembre 1901.

Sur l'axe des temps, on figure les heures de minuit à minuit par 24 intervalles égaux, subdivisés chacun en 6 parties égales valant 10 minutes (dans les grandes lignes, chaque partie est encore subdivisée en 5 éléments valant 2 minutes). — Par les points obtenus, on mène des parallèles à l'axe des espaces. — Sur l'axe des espaces, on porte, à partir du point de départ, les distances des stations successives à une échelle convenable; aux points marqués on marque les noms des stations, leurs distances à la station origine, et par ces points on mène des parallèles à l'axe des temps.

On représente ensuite sur ce réseau de lignes pour chaque train: la durée des arrêts pour chaque gare par un segment de parallèle à l'axe des temps; la marche entre deux gares par une droite unissant l'heure du départ à la première gare à l'heure du départ à la seconde gare. — Le diagramme ainsi construit fournira donc l'heure de départ de chaque train, son heure d'arrivée, la vitesse du train, l'instant du passage à chaque lieu, la durée

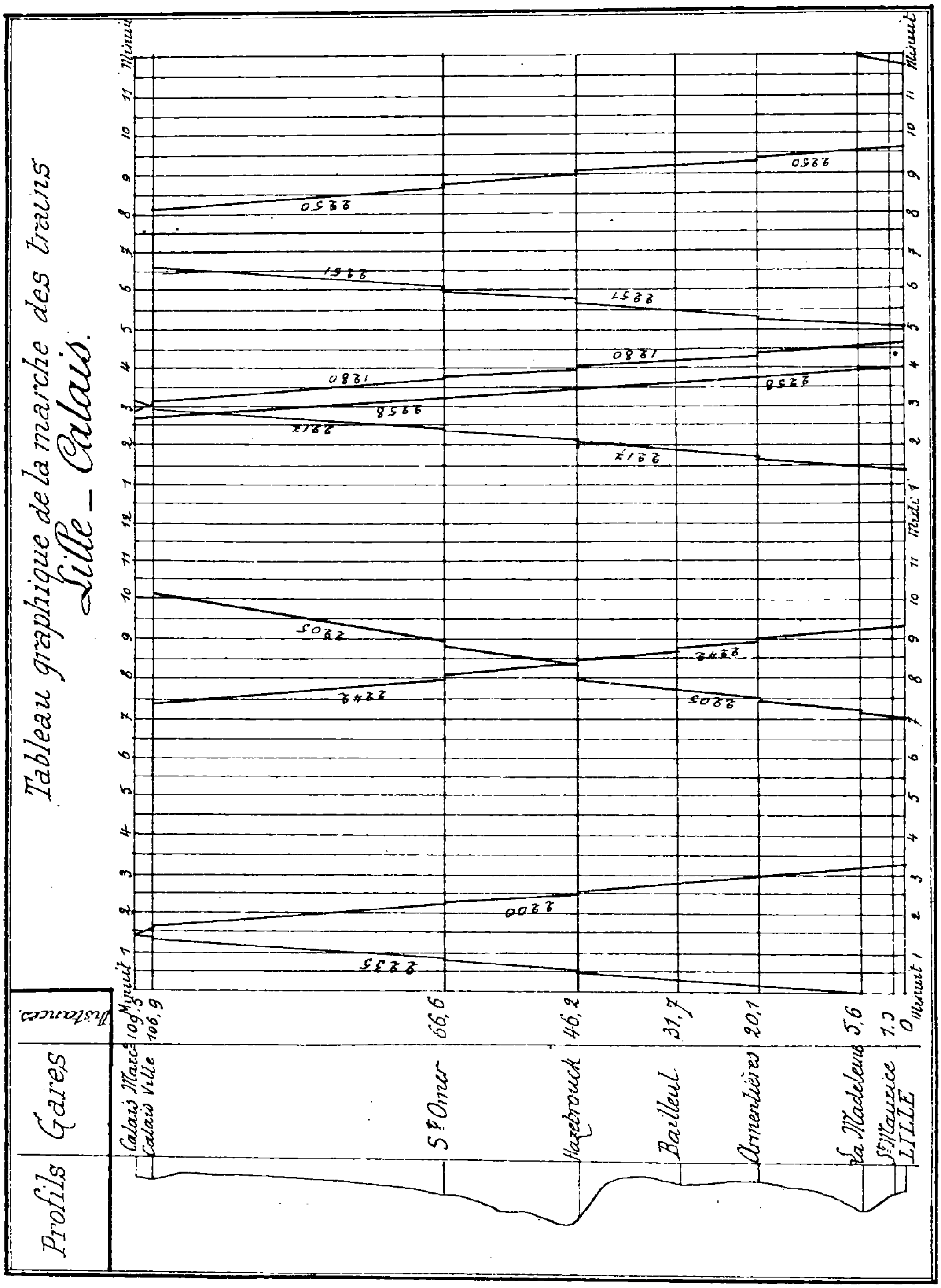
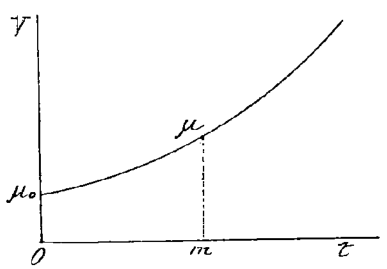


Tableau graphique de la marche des trains
Lille _ Calais.
Profils
Gares
Distances
Calais Marit.
Calais Ville
St Omer
Hazebrouck
Bailleul
Armentières
La Madeleine
St Maurice
LILLE
109,5
106,9
66,6
46,2
31,7
20,1
5,6
1,3
0
Minuit
Midi
2235
2200
2242
2205
2203
2212
1280
2250
2257
2261

de marche, celle des arrêts, les points de croisements des trains montants et des trains descendants, les instants de ces croisements. La comparaison des inclinaisons, sur l'horizontale, des lignes qui correspondent à plusieurs trains, permet de déterminer la vitesse relative de ces trains; par la nature du trait dont la ligne est formée, on sait d'ailleurs distinguer les trains de marchandises des trains de voyageurs, les express, les omnibus, etc. .........

§ 8 _ Courbe des vitesses; _ cas du mouvement uniformément varié _ Portons maintenant en abcisses les temps $t$ et en ordonnées les valeurs correspondantes de la vitesse $V$ mesurés à des échelles convenables. _ En procédant d'une manière analogue




à celle développée au § précédent, mais en remplaçant la relation (1) par la relation $V = \varphi(t)$, on obtient une courbe dite courbe des vitesses.

Dans le cas du mouvement uniforme, $V$ est constant : $V = a$. La courbe des vitesses est une parallèle à l'axe des temps; elle coupe la partie positive ou la partie négative de l'axe OV suivant que $a$ est positif ou négatif.

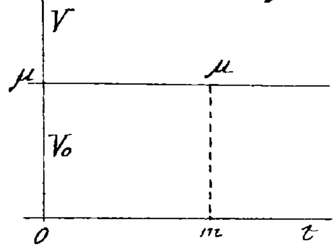
Dans le cas du mouvement uniformément varié, d'équation horaire

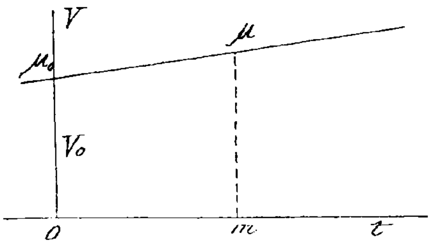
$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

on a

$$V = V_0 + \gamma t.$$

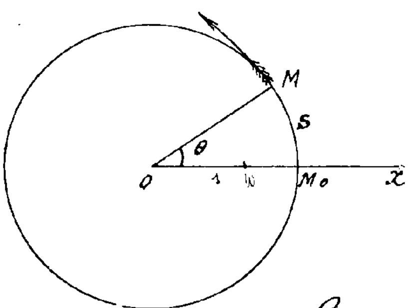
En raisonnant comme au § 7, on reconnait que la courbe des vitesses est alors une droite, coupant l'axe des V en un point μ d'ordonnée $V_0$. La pente de cette droite mesure l'accélération γ du mobile ; le mouvement est uniformément accéléré ou retardé suivant




que cette droite est dirigée en dessus ou au dessous de l'axe ot.

## § 9. – Mouvement circulaire, vitesse angulaire. –




Supposons qu'un mobile M soit assujetti à se déplacer d'un mouvement quelconque sur une circonférence de rayon R. La position M dans le plan sera définie à chaque instant par la distance connue OM = R et par l'angle :

$$\theta = F(t)$$

que fait avec une direction fixe ox. – cet angle étant compté algébriquement comme en Trigonométrie.

L'arc de cercle compté à partir de ox a pour valeur

$$S = R.\theta = R.\,F(t)$$

L'expression de la vitesse est :

$$\text{Lim}\,\frac{RF(t+\theta)-RF(t)}{\theta}$$

pour $\theta = 0$

ou $$R\,\text{Lim}\,\frac{F(t+\theta)-F(t)}{\theta}\,.$$

pour $\theta = 0$

La limite $\omega$ du rapport $\frac{F(t+\theta)-F(t)}{\theta}$ s'appelle vitesse angulaire. On a :

$$V = R\omega.$$

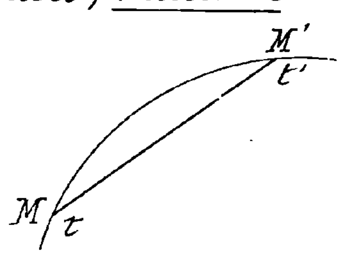
$\omega$ est la vitesse qu'aurait le point homothétique du mobile sur le cercle concentrique de rayon un.

Le mouvement uniforme est caractérisé par la constance de $\omega$.

# 2^eme^ PARTIE

## Composition des Mouvements

§ 1. – Systèmes invariables ; mouvement de translation ; mouvements relatifs et composés. – Un système invariable est un ensemble de points dont les distances mutuelles ne changent pas. Un tel système est géométrique lorsqu'il est pénétrable ; matériel lorsqu'il est impénétrable.




Le déplacement d'un point M, d'un instant $t$ à un instant $t'$ est le segment de droite MM' mené de la position de ce point à l'instant $t$ à sa position à l'instant $t'$. Ce déplacement est donc la corde de l'arc de trajectoire que décrit le mobile pendant le temps $t'-t$.

Quand un système invariable A se meut dans un système invariable B, les déplacements des divers points de A d'un instant $t$ à un instant $t'$ sont, en général inégaux et non parallèles; lorsqu'en particulier tous ces déplacements sont égaux et parallèles, le mouvement de A se nomme un <u>mouvement de translation</u>. Tous les systèmes que nous allons considérer sont animés de mouvements de translation.

Tous les points d'un système invariable animé d'un mouvement de translation décrivent des trajectoires superposables et, à chaque instant, leurs vitesses sont égales et parallèles. La position d'un tel système est définie à un instant quelconque quand on connaît le mouvement de l'un de ses points et sa position à l'instant initial.

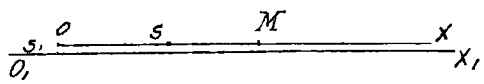
Lorsqu'un point matériel M se meut dans un système invariable A, et que celui-ci, entraînant M est animé d'un mouvement de translation par rapport à un système invariable B, M se meut par rapport à B; on a alors à considérer trois mouvements:

le mouvement de M par rapport à A ou <u>mouvement relatif</u>.
" " A " B ou <u>mouvement d'entraînement</u> ou de <u>translation</u>
" " M " B ou <u>mouvement résultant</u>

Les deux premiers sont encore dits <u>mouvements composants</u> et le dernier <u>mouvement composé</u>.

Un point matériel peut être animé d'un nombre quelconque de mouvements simultanés: ainsi un point matériel M peut se mouvoir par rapport à un système invariable A, A dans un système invariable B ; B dans un système invariable C et C dans un système invariable D ; M est alors animé d'un certain mouvement par rapport à D et ce dernier est le mouvement résultant de la composition de quatre mouvements.

§ 2 _ Composition de deux mouvements suivant la même droite _ Un point matériel M se meut sur une règle OX ;




l'équation de son mouvement est :

$$s = f(t).$$

La règle OX glisse sur une règle fixe $O_1X_1$ et l'équation du mouvement de l'origine O liée à la règle mobile est :

$$s_1 = f_1(t).$$

L'abcisse du mobile par rapport au point fixe $O_1$ est :

$$S = s + s_1$$

L'équation du mouvement résultant est donc :

$$S = f(t) + f_1(t).$$

1er cas particulier. Les 2 mouvements composants sont uniformes :

$$s = a + vt \qquad\qquad s_1 = a_1 + v_1 t$$

Alors :
$$S = a + a_1 + (v + v_1)t.$$

Le mouvement résultant est donc un mouvement uniforme dont la vitesse $V = v + v_1$ est la somme algébrique des vitesses des mouvements composants.

2e cas particulier. _ Les 2 mouvements composants sont uniformément variés et sans vitesses initiales :

$$S = a + \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad S_1 = a_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 t^2$$

Alors : $$S = a + a_1 + \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1) t^2.$$

Le mouvement résultant est donc uniformément varié, sans vitesse initiale et son accélération $\Gamma = \gamma + \gamma_1$ est la somme algébrique des accélérations des mouvements composants.

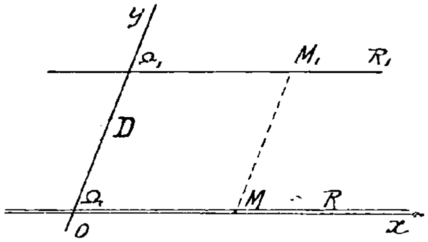
3^e^ cas particulier. — L'un des mouvements composants est uniforme et l'autre uniformément varié sans vitesse initiale.

$$S = a + vt, \qquad S_1 = a_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 t^2$$

Alors $$S = a + a_1 + vt + \frac{1}{2}\gamma_1 t^2.$$

Le mouvement résultant est uniformément varié, sa vitesse initiale est celle de son mouvement composant uniforme, et son accélération celle de son mouvement uniformément varié.

§ 3. — Composition de 2 mouvements rectilignes suivant des directions différentes. — Un point matériel $M$ se meut sur une règle $R$ tandis que celle-ci se déplace parallèlement à elle même et que l'un de ses points $\Omega$ décrit une droite fixe $D$. La règle supposée de section infiniment petite, engendre un plan et le point $M$ se meut dans ce plan.




Prenons pour axe $ox$ la position initiale de la règle et pour axe $oy$ la droite décrite par le point $\Omega$ de la règle, occupé initialement par le mobile. Si la règle était en repos, le mobile occuperait à l'instant $t$ une position $M$ dont l'abscisse est :

$$x = f(t) \qquad (1)$$

Mais à cet instant la règle, ou trajectoire relative du mobile, occupe la position $\Omega_1 M_1$, parallèle à $ox$, et le point $\Omega$ occupe la position $\Omega_1$ dont l'ordonnée est

$$y = g(t) \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont fournies par les définitions du mouvement relatif et du mouvement de translation.

Comme $x$ et $y$ sont, à l'instant $t$, les coordonnées du mobile, on pourra, par le calcul, trouver sa position à un instant quelconque quand on connaîtra les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

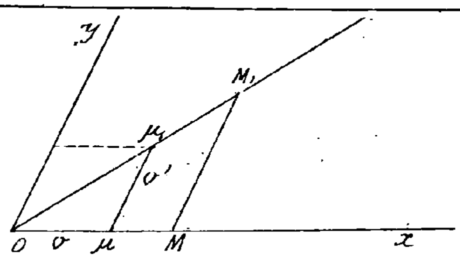
L'élimination de $t$ entre les équations (1) et (2) fournit une certaine équation

$$F(x . y) = 0.$$

représentant la trajectoire résultante ou absolue.

On va signaler quelques cas où cette trajectoire absolue est simple.

1° <u>Cas de 2 mouvements rectilignes et uniformes</u>. En tenant compte du choix des axes, les équations (1) et (2) s'écrivent ici:




$$x = vt \qquad y = v't.$$

Donc $\frac{y}{x} = \frac{MM_1}{OM} = \frac{v'}{v} = Const.$

Le triangle $OMM_1$ reste donc semblable à lui-même, et le point $M_1$ décrit une droite passant par $O$: le mouvement résultant est rectiligne.

Soient $M_1$ et $\mu_1$ les positions du mobile aux instants $t$ et $1$; en vertu de la similitude signalée on a:

$$\frac{OM_1}{O\mu_1} = \frac{OM}{O\mu} = \frac{vt}{v.1} = t \quad \text{ou};$$

$$OM_1 = O\mu_1 . t.$$

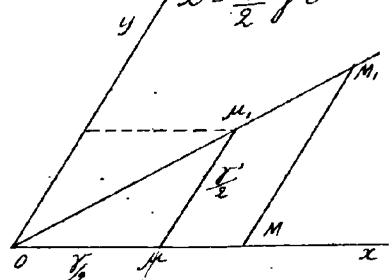
donc le mouvement résultant est uniforme et sa vitesse est représentée par le segment $o\mu_1$, le point $\mu_1$ ayant pour coordonnées $v$ et $v'$.

Donc la vitesse résultante est, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses composantes.

## 2° Cas de 2 mouvements rectilignes uniformément variés sans vitesses initiales.

Les équations (1) et (2) s'écriront ici :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad y = \frac{1}{2}\gamma' t^2$$



Donc $\frac{y}{x} = \frac{MM_1}{OM} = \frac{\gamma'}{\gamma} =$ Const.

Le triangle $OMM_1$ reste donc semblable à lui-même, et le point $M_1$ décrit une droite passant par $O$ : le mouvement résultant est donc rectiligne.

Soient $M_1$ et $\mu_1$ les positions du mobile aux instants $t$ et $1$ ; on a :

$$\frac{OM_1}{O\mu_1} = \frac{OM}{O\mu} = \frac{\frac{1}{2}\gamma t^2}{\frac{1}{2}\gamma 1} = t^2 \quad \text{ou} \quad OM_1 = O\mu_1 . t^2 ;$$

donc le mouvement résultant est uniformément varié sans vitesse initiale, et son accélération est $\frac{O\mu_1}{2}$, le point $\mu_1$ ayant pour coordonnées $\frac{1}{2}\gamma$ et $\frac{1}{2}\gamma'$. Donc : l'accélération résultante est, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations composantes.

## 3° Cas de 2 mouvements, rectilignes, l'un uniforme, l'autre uniformément varié sans vitesse initiale.

Soit $v$ la vitesse du premier mouvement et $\gamma$ l'accélération du second. Les équations (1) et (2) s'écriront ici :

$x = vt$ $\qquad\qquad y = \frac{1}{2}\gamma t^2$

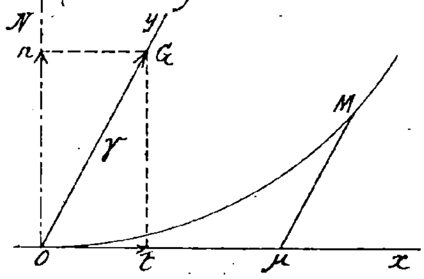
$x^2 = v^2t^2$

L'élimination de $t$ entre ces deux relations donne:

$\frac{y}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}\gamma}{v^2} \qquad y = \frac{\gamma}{2v^2}\, x^2$;

donc la trajectoire absolue ou résultante est une portion de parabole.

La droite $ox$ que décrirait le mobile s'il n'était animé que de son mouvement composant uniforme est tangente à la trajectoire résultante, et la droite $oy$ qu'il décrirait s'il n'était animé que de son mouvement composant uniformément varié est un diamètre (droite parallèle à l'axe) de cette parabole.



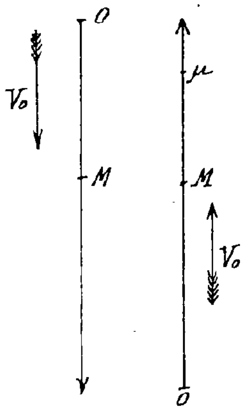

Remarque. L'accélération du mouvement varié composant peut être regardée comme étant la résultante des accélérations $ot$, $on$ de deux mouvements rectilignes uniformément variés sans vitesses initiales, dirigés l'un suivant la tangente $ox$, l'autre suivant la normale $on$, menées à la trajectoire parabolique du mobile par sa position initiale $O$.
Ces accélérations se nomment: $ot$ l'accélération tangentielle, $on$ l'accélération normale, $oG$ l'accélération totale

## § 4. — Mouvement des projectiles dans le vide. —

Un projectile est un corps quelconque lancé avec une vitesse donnée dans une direction donnée, puis abandonné à l'action de la pesanteur. On verra que le mouvement d'un projectile dans le vide résulte de la composition de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme dans la direction donnée et dont la vitesse est la vitesse donnée $V_0$, l'autre uniformément varié, sans vitesse initiale, dont l'accélération est verticale, dirigée de haut en bas et ayant pour valeur ; avec les unités mètre et seconde :

$g = 9^m 8088$ (à Paris)

1<sup></sup>er Cas. Lorsque $V_0$ est verticale, la trajectoire du projectile est verticale ;




prenons pour origine O sa position initiale et comptons les espaces positivement dans le sens de $V_0$, l'équation de ce mouvement est :

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

ou

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 ;$$

suivant que ce projectile est lancé de haut en bas ou de bas en haut.

La vitesse du projectile à l'instant t est par suite :

$$V = V_0 + gt \qquad \text{ou } V = V_0 - gt.$$

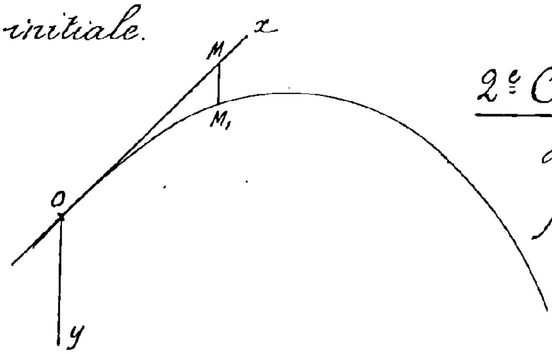
Lorsqu'un projectile est lancé dans le vide suivant la verticale et de bas en haut, il monte jusqu'à l'instant :

$$t = \frac{V_0}{g},$$

où sa distance au point de départ est :

$$O\mu = \frac{V_0^2}{2g},$$

puis il descend d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.




2e Cas. Lorsque la vitesse initiale $V_0$ d'un projectile n'est pas verticale, en prenant pour origine sa position initiale O, pour axe des x la direction ox de sa vitesse initiale, pour axe des y la verticale oy du point O, et en comptant les ordonnées positivement de haut en bas, les équations de son mouvement sont :

$$x = V_0 t, \qquad y = \frac{1}{2} g t^2$$

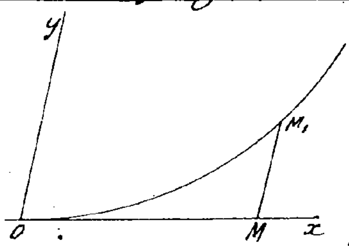
$$y = \frac{g}{2V_0^2}\, x^2.$$

§ 5. Aperçu de la définition de l'accélération dans un mouvement curviligne quelconque. Par extension des dénominations précédentes, appelons :

mouvement de projection tout mouvement composé de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme, l'autre uniformément varié sans vitesse initiale ;

projectile tout mobile animé d'un mouvement de projection ;

déviation d'un projectile à un instant $t$, le segment de droite




$MM_1$ mené de la position $M$ qu'eût occupé à cet instant le mobile s'il n'avait été animé que de son mouvement uniforme composant, à la position $M_1$ qu'il occupe à ce même instant, en vertu du mouvement de projection.

La déviation, à un instant $t$, d'un projectile, est toujours parallèle à son accélération totale et la valeur de celle-ci est (§ 3, 3°)

$$\gamma = \frac{2y}{t^2} = \frac{2.MM_1}{t^2}.$$

Ces définitions posées, résolvons le problème préliminaire suivant :

Trouver les mouvements composants d'un projectile connaissant ses positions $M_1$ et $M_1'$ à deux instants donnés $t$ et $t'$, la grandeur $V$ et la direction $MT$ de sa vitesse à l'instant $t$.

et appelé <u>masse</u> du point.

$$F = m\bar{\gamma}$$

Le point M est dit le point d'application de la force.

<u>Remarque</u> : Cette définition de la force suppose le mouvement rapporté à un système invariable fixe dans l'espace absolu. Dans la plupart des cas, on peut rapporter ce mouvement à un système invariable fixé à la terre et conserver la même définition : l'observation, d'accord avec la théorie des mouvements relatifs, montre qu'il n'en résulte aucune inexactitude appréciable.

## § 2. <u>Mesure des forces et des masses</u>. <u>Unités CGS</u>

Galilée a reconnu expérimentalement que, dans un espace vide, en un lieu déterminé, un corps <u>quelconque</u> abandonné à lui même tombe suivant la verticale, de façon que les chemins décrits soient proportionnels aux carrés des temps employés à les décrire, le coefficient de proportionalité étant le même pour tous les corps. Soit $\frac{1}{2} g$ ce coefficient ; $g$ accélération de ce mouvement, la même pour tous les corps est dite la <u>gravité</u>. ($g = 9^m,8088$ à Paris).

Cette loi, vraie pour un corps si petit qu'il soit, est applicable à un point matériel. La force qui produit cette accélération $g$ est dite le <u>poids</u> du point matériel.

Si <u>$m$</u> est la <u>masse</u> caractéristique du mobile, le <u>poids</u> est un vecteur appliqué au mobile, dirigé verticalement de haut en bas et de mesure

$$p = mg.$$

Ce poids varie comme $g$ avec le lieu.

On regarde un corps quelconque comme formé par la réunion d'un très grand nombre de points matériels ; de masses $m_1, m_2 \ldots$ et de poids $m_1 g$, $m_2 g$, ...... On appelle poids $P$ du corps au lieu considéré, la somme des poids des divers points qui le constituent, et masse $M$ du corps la somme des masses de ces points

$$P = m_1 g + m_2 g + \ldots\ldots = (m_1 + m_2 \ldots\ldots) g = Mg.$$

Si un point matériel n'est pas abandonné à lui-même, s'il est retenu par un obstacle, par la main par exemple, il peut rester immobile : c'est que l'obstacle exerce sur le point une force ou réaction qui empêche le poids de mettre le point en mouvement. Le point exerce sur l'obstacle une pression ou action égale à son poids. Cette pression, transmise aux muscles, dans le cas de la main, fera naître une sensation qui permettra de comparer grossièrement les poids.

D'une manière plus précise, la comparaison des poids se fait à l'aide de la balance (voir 4e Partie du Cours)

Leur mesure exige qu'on ait fait choix d'une unité nouvelle ; on adopte, avec le congrès des Electriciens de 1881, une unité de masse dite gramme masse ou masse d'un centimètre cube d'eau distillée à la température de 4° centigrades.

La force unité ou dyne sera alors celle qui imprimera au gramme-masse une accélération égale à l'unité : les unités de longueur et de temps étant le C et la S.

Le poids du gramme-masse, avec les unités centimètre, seconde sera mesuré à Paris par le nombre

On a : $V = \lim \frac{a(t+\theta)^3 - at^3}{\theta} = \lim a(3t^2 + 3t\theta + \theta^2) = 3at^2$

$$\gamma = \lim \frac{3a(t+\theta)^2 - 3at^2}{\theta} = \lim 6at + 3a\theta = 6at.$$

D'autre part :

$$2\,\frac{f(t+\theta) - f(t) - V\theta}{\theta^2} = 2a.\frac{(t+\theta)^3 - t^3 - 3at^2\theta}{\theta^2} = 2a\left[3t+\theta\right]$$

et la limite $6at$ de cette expression coïncide bien avec $\gamma$

C.Q.F.D.

# 3 ème PARTIE

## Dynamique du point matériel

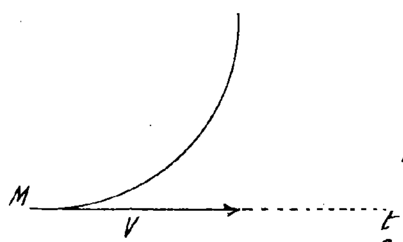
### §1. Principe de l'Inertie — Force et masse

La dynamique étudie les lois du mouvement de la matière. Elle est basée sur quelques postulats, non susceptibles de vérifications expérimentales à priori, mais dont toutes les conséquences se sont trouvées jusqu'ici confirmées par l'observation des faits.

Principe de l'inertie ou postulat de Kepler. — On admet que la matière est inerte, c'est-à-dire qu'un point matériel en repos ne peut pas de lui-même se mettre en mouvement ; qu'un point matériel en mouvement ne peut pas de lui-même modifier la direction de son mouvement qui par suite sera rectiligne ; qu'il ne peut enfin de lui-même modifier la grandeur de sa vitesse.

En d'autres termes, un point matériel supposé <u>isolé</u>, c'est-à-dire sans communication d'aucune sorte avec le reste de l'univers, resterait en repos, ou décrirait une droite d'un mouvement uniforme.

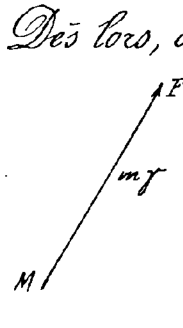
<u>Force</u> et <u>masse</u>. D'après cela, si nous observons un point matériel animé d'un mouvement curviligne ou rectiligne varié, c'est que ce point est en communication avec le monde extérieur, et que c'est celui-ci qui l'influence et qui l'incite à modifier son mouvement. Cette influence se nomme une <u>force</u>. et on l'estime par son effet.



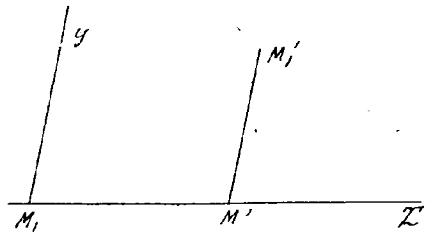

Si $V$ est la vitesse du mobile $M$ à l'instant $t$, cette influence pendant un temps infiniment petit consécutif à $t$, substitue à un mouvement uniforme de vitesse $V$, un mouvement assimilable à un mouvement de projection de durée infiniment petite; ce mouvement de projection s'obtient en composant avec le mouvement uniforme un mouvement uniformément varié sans vitesse initiale dont l'accélération est l'accélération $\gamma$ du mobile à l'instant $t$.

L'accélération $\gamma$ qui définit ce mouvement est déterminée en grandeur, direction et sens; et son existence est l'effet de la force.

Dès lors, on appelle <u>force</u> agissant sur le mobile $M$ à l'instant




$t$ un vecteur ayant pour origine le point mobile, pour direction et sens la direction et le sens de l'accélération $\gamma$ et pour longueur le produit de $\gamma$ par un coefficient positif <u>$m$</u> caractéristique du point




Tout d'abord, on peut considérer le projectile comme étant lancé à l'instant $t$ avec la vitesse $\underline{V}$ et suivant la droite $M_1 Z$ : son mouvement uniforme composant est donc connu. La position $M'$ que le mobile occuperait sur $M_1 Z$, s'il n'était animé que de son mouvement uniforme composant, est fournie par la relation :

$$M_1 M' = V(t'-t).$$

dès lors la déviation $M'M_1'$ est connue ; le mouvement uniformément varié composant, donc l'accélération, parallèle à $M'M_1'$ a pour valeur $\frac{2\,\overline{M'M_1'}}{(t-t')^2}$ est donc connu.

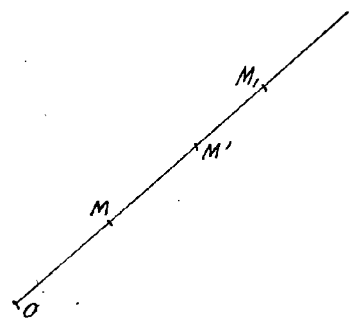
Ainsi, un mouvement de projection est déterminé quand on connait à deux instants donnés, les positions du projectile et, à l'un de ces instants, la direction et la grandeur de sa vitesse.

Nous sommes maintenant à même de définir l'accélération dans un mouvement curviligne quelconque.

Un mouvement curviligne quelconque peut toujours être considéré comme une succession de mouvements de projection dont les durées sont infiniment petites.

En effet soient $M_1\ M_2\ M_3$ ...... et $V_1\ V_2\ V_3$ ...... les positions et les vitesses du mobile $M$ aux instants $t_1\ t_2\ t_3$ ...... que l'on peut supposer aussi rapprochés que l'on voudra. Concevons qu'un projectile $\mu$ occupe les mêmes positions et soit animé des mêmes vitesses que $M$ aux instants $t_1\ t_2\ t_3$ ..., chacun de ces mouvements partiels de $\mu$ sera déterminé, et par suite, son accélération sera déterminée à un instant quelconque. En général, M et $\mu$ ne coïncideront pas, mais leur plus grand écart peut être supposé moindre qu'une longueur donnée. quelconque; puisqu'on peut supposer les différences $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$,.... aussi petites qu'on voudra; dès lors, lorsque celles-ci sont infiniment petites, on peut remplacer le mouvement du mobile proposé M par le mouvement du projectile $\mu$.

Cela étant, on nomme accélération totale, accélération tangentielle et accélération normale, à l'instant $t$ d'un mobile animé d'un mouvement quelconque, l'accélération totale, l'accélération tangentielle, l'accélération normale du mouvement de projection de durée infiniment petite dont le mobile est animé à cet instant.




Dans le cas d'un mouvement rectiligne, le mouvement de projection est aussi rectiligne, l'accélération totale, portée sur la direction du mouvement a pour valeur la limite de l'expression :

$$2\,\frac{MM_1 - V(t'-t)}{(t'-t)^2}\,;$$

posons $t'-t = \theta$; comme $MM_1 = f(t') - f(t)$, on est conduit à chercher la limite du rapport :

$$2.\frac{f(t+\theta) - f(t) - V\theta}{\theta^2}\,,$$

quand $\theta$ tend vers zéro. — On démontre en Mathématiques spéciales que cette limite coïncide avec l'expression donnée au § 5 de la 1ère partie pour l'accélération d'un mouvement rectiligne quelconque. Nous nous bornerons à le constater sur un cas particulier.

Soit $f(t) = at^3$

$$980,88 \times 1 \text{ soit } 981$$

La force unité ou dyne sera donc le poids, à Paris, d'un volume d'eau distillée à 4° égal à $\frac{1}{981}$ cmc. Le poids du gramme masse sera à Paris de 981 dynes.

La mégadyne vaut un million de dynes.

La balance permet de mesurer les masses.– Tout corps qui, dans la méthode de la double pesée, fait équilibre à la même tare que $n$ grammes-masse, a une masse mesurée par $n$, car si $P$ est le poids du corps, $M$ sa masse et $p$ le poids du gramme masse, on a :

$$P = np.$$

$$\text{ou} \quad Mg = n.1.g.$$

$$\text{ou enfin } M = n^{\text{unités}}.$$

La mesure des masses entraine la connaissance des poids en chaque lieu, une fois connue la gravité en ce lieu

Le système d'unités : centimètre, gramme-masse, seconde est dit système C.G.S

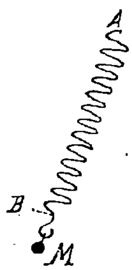
Supposons maintenant, à un instant $t$, qu'une force, de nature concrète quelconque, imprime à un point matériel de masse connue, une accélération de direction connue, et égale à $N$ fois la gravité $g$ au lieu considéré.– Sa mesure est :

$$F = m.N.g = Np$$

$p$ étant le poids du point matériel en ce lieu. Cette manière d'évaluer une force au moyen de la mesure de l'accélération exige l'enregistrement chronophotographique du mouvement et on y reviendra dans un cours ultérieur.

C'est la seule applicable lorsque la force dépend, non seulement de la position du point matériel, mais aussi de sa vitesse ; comme c'est le cas pour un projectile lancé dans l'air.

Dans le cas où cette force ne dépend que de la position du point sur lequel elle s'exerce, on peut l'estimer au moyen d'un <u>dynamomètre</u>.




Considérons un ressort à boudin parfaitement élastique ; plaçons-en l'axe moyen dans la direction de l'accélération qu'un milieu déterminé imprime au mobile, et fixons à une extrémité le point matériel considéré, l'autre extrémité étant maintenue invariable. Le ressort prendra une déformation bien déterminée.

Plaçons maintenant l'axe moyen du ressort verticalement, après avoir supprimé le milieu agissant et le point matériel. Suspendons au ressort des quantités croissantes d'une matière quelconque jusqu'à ce que la déformation devienne identique à la précédente ; le poids, au lieu considéré, de la quantité de matière produisant l'identité de déformation, a même mesure que la force mesurée par la méthode précédente. C'est là un <u>résultat expérimental</u> important qui permet la mesure directe des forces dans les conditions qu'on vient de préciser.

## § 3. <u>Principe de causalité _ déterminisme mécanique</u>

On admet que les phénomènes ne se succèdent pas au hasard et qu'à un moment quelconque les phénomènes précédents déterminent les phénomènes suivants.

Si un groupe A de phénomènes a été suivi d'un phénomène B, chaque fois que ce groupe A se reproduira, il sera suivi du phénomène B.

Les conditions qui précèdent un phénomène sont en nombre infini; mais l'expérience montre que certaines d'entre elles peuvent être modifiées sans que le phénomène cesse de se produire identique; celles ci supprimées, les circonstances qui restent sont les conditions nécessaires et suffisantes du phénomène, ou encore les causes du phénomène.

En ce qui concerne le phénomène de mouvement, chaque fois qu'un point matériel passe en un même point de l'espace, avec une même vitesse, étant soumis à l'action d'un même milieu, ce point est sollicité par la même force.

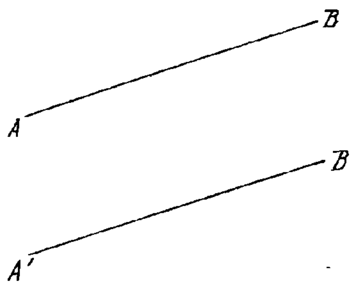
Supposons qu'on ait mesuré expérimentalement la force exercée par un milieu sur un point matériel, situé en diverses positions animé de différentes vitesses, et qu'on ait aperçu que, pour ces conditions en nombre fini mais assez grand toutefois, la force est liée d'une certaine manière à la position et à la vitesse du mobile._ On admet par induction que, dans tous les autres cas non expérimentés, la même liaison analytique existe entre la force, la position et la vitesse du mobile.

Dès lors si le point matériel se trouve soumis à l'action de ce milieu, dans des conditions où l'on n'expérimente pas, on pourra prédire son mouvement ultérieur. C'est cette prédiction qui constitue la dynamique.

La dite prédiction nécessite la résolution d'un problème difficile de Mathématiques qui sera posé et résolu (pour un certain nombre de cas usuels) dans le cours de mécanique rationnelle.

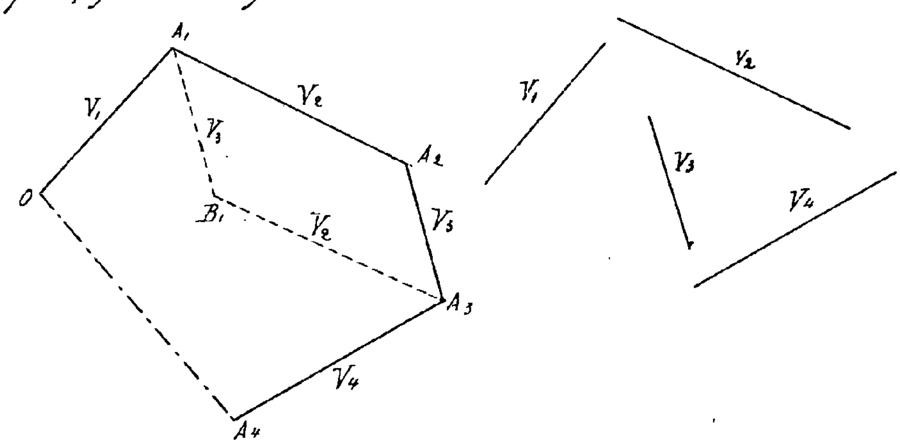
## § 4 Somme géométrique d'un système de vecteurs.

Un vecteur est une portion d'une droite donnée, de longueur donnée, comptée à partir d'un point donné dans un sens donné. La vitesse a été représentée par un tel vecteur.




Deux vecteurs AB et A'B' sont dits équipollents quand ils sont égaux, parallèles et de même sens.

Considérons un système de vecteurs $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, répartis d'une manière quelconque dans l'espace. Déplaçons les parallèlement à eux-mêmes de manière à les placer bout à bout dans un ordre de succession quelconque, par exemple dans l'ordre de leurs indices. Le vecteur $OA_4$




qui va de l'origine O à l'extrémité $A_4$ du polygone $OA_1A_2A_3A_4$ formé, se nomme la somme géométrique du système de vecteurs.

Cette somme géométrique est indépendante de l'ordre dans lequel on porte les vecteurs bout à bout. En effet, intervertir deux vecteurs consécutifs $V_2$ et $V_3$ revient à remplacer $A_1 A_2 A_3$ par $A_1 B A_3$ seconde moitié d'un parallélogramme dont $A_1$ et $A_3$ restent sommets. Dès lors, par une suite d'interversions pareilles, on peut amener un vecteur donné à occuper un rang quelconque dans la suite des cotés du polygone.

On ne change pas une somme géométrique en remplaçant certaines des valeurs qui la forment par leur somme partielle ou inversement en remplaçant certains d'entre eux par d'autres dont ils soient la somme. La chose est évidente pour des vecteurs consécutifs, et par suite elle est vraie pour des vecteurs quelconques qui peuvent être rendus consécutifs.

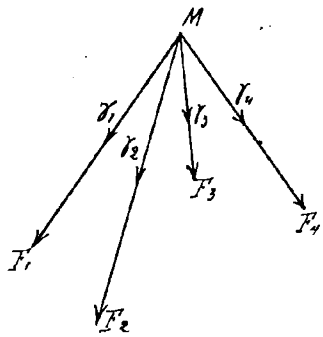
Enfin si on amplifie une série de vecteurs dans un même rapport, leur somme géométrique est amplifiée dans ce rapport car cela revient à tracer le polygone des vecteurs $OA$, $A_2 A_3 A_4$ à une échelle différente.

## § 5. Principe de l'indépendance des effets des forces simultanées – Composition des forces.

Considérons des milieux qui, agissant séparément sur un point matériel, lui impriment à l'instant $t$ des accélérations $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$; les forces produites par ces milieux sont $F_1 = m\gamma_1$, $F_2 = m\gamma_2$ ....... $F_n = m\gamma_n$.

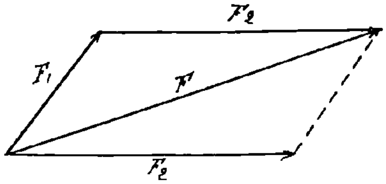
Supposons maintenant que ces divers milieux aient agi simultanément sur le même point au même instant; celui-ci aurait pris une accélération $\Gamma$ et par suite la force $F$ produite par les milieux agissant ensemble aurait été $m\Gamma$.

On admet que l'accélération $\Gamma$ produite par l'action simultanée est la somme géométrique des accélérations $\gamma_1\ \gamma_2 \dots \gamma_n$ produites par les actions séparées.



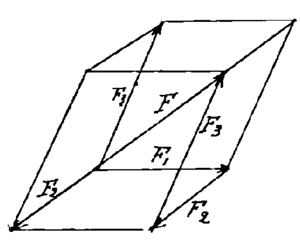

Les vecteurs $F_1, F_2 \dots F_n$ $F$ étant proportionnels à $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ $\Gamma$, d'après la remarque faite à la fin du § précédent, $F$ sera la somme géométrique de $F_1\ F_2 \dots F_n$. Ainsi l'accélération imprimée à un point à un instant quelconque est la même que si le point était sollicité par une force unique $F$ égale à leur somme géométrique.

Cette force unique $F$ est dite la résultante des forces $F_1, F_2 \dots F_n$, celles-ci prennent, par rapport à la résultante le nom de composantes. Dès lors, chaque fois que plusieurs forces agissent simultanément sur un point, on peut les remplacer par leur résultante. Cette opération s'appelle composition des forces appliquées à un point et elle est identique à celle qui consiste à faire la somme géométrique de vecteurs. On reconnait en particulier géométriquement que:

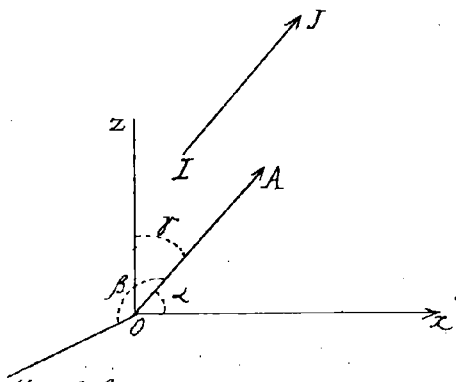



1° La résultante de deux forces est la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

2° La résultante de trois forces est la diagonale du parallél~~ogramme~~épipède construit sur ces forces.

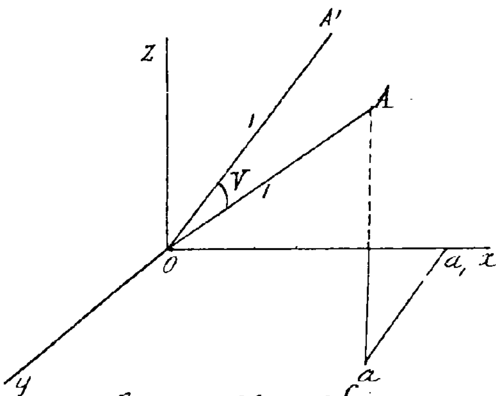



## § 6.(*) Détermination analytique de la résultante.




Pour définir une direction IJ, on donne les angles α, β, γ, qu'une parallèle OA menée à IJ par un point fixe O, fait avec trois axes fixes ox, oy, oz, menés par le point O. Le plus souvent ces axes sont rectangulaires. Prenons sur cette parallèle OA = 1 et considérons le parallélipipède rectangle, d'arêtes ox, oy, oz et de diagonale OA ; ses arêtes sont cos α, cos β, cos γ et sa diagonale 1 ; d'après le théorème de Pythagore généralisé on a :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1)$$




Soient a et $a_1$ les projections de A sur le plan xoy et sur l'axe ox ; on a : $\overline{oa_1} = \cos\alpha$, $\overline{a_1a} = \cos\beta$, $\overline{aA} = \cos\gamma$. Soit V l'angle formé par la direction considérée avec une autre direction faisant avec les mêmes axes les angles α', β', γ'. La projection de OA sur OA' est cos V ; d'autre part elle est, d'après la théorie des projections, égale à la somme algébrique des projections des éléments de la ligne brisée $oa_1$, aA ; donc :

$$\cos V = \overline{oa_1}\cos\alpha' + \overline{a_1a}\cos\beta' + aA\cos\gamma'$$

c'est-à-dire

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \ldots\ldots \qquad (2)$$

Pour que ces directions soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

Ces préliminaires posés, nous allons trouver par le calcul la résultante $F$ d'autant de forces qu'on voudra $F_1\, F_2$ ...... sollicitant un point $O$ lorsqu'on connait les grandeurs de ces forces et les angles qu'elles font deux à deux

Menons par le point $O$ trois axes rectangulaires quelconques $ox$, $oy$, $oz$; désignons par $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3$ .... et $\alpha$ les angles que $ox$ fait avec $F_1$ $F_2$ ..... et $F$; par $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ .... et $\beta$ les angles de $oy$ et des mêmes forces; par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .... et $\gamma$ les angles de $oz$ et des mêmes forces; projetons successivement $F$ et la ligne brisée de côtés $F_1, F_2, F_3$ ..... dont $F$ est la ligne de cloture, sur chaque axe. Nous aurons:

$$\begin{cases} F\cos\alpha = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \dots\dots \\ F\cos\beta = F_1 \cos\beta_1 + F_2 \cos\beta_2 + \dots\dots \\ F\cos\gamma = F_1 \cos\gamma_1 + F_2 \cos\gamma_2 + \dots\dots \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$$

Ces équations nous donneront $F, \alpha, \beta, \gamma$.—

Elevons au carré les trois premières équations et ajoutons les résultats membre à membre; nous aurons:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + \dots\dots + 2 F_1 F_2 \cos(F_1 F_2) + \dots\dots,$$

en représentant par $(F_1 F_2)$ l'angle que font les forces $F_1$ et $F_2$, ....

Donc: Le carré de la résultante des forces sollicitant un point matériel est égal à la somme des carrés de ces forces, plus la somme des doubles produits obtenus en multipliant ces forces deux à deux et par le cosinus de l'angle de leurs directions.

§7 – <u>Décomposition des forces – Composantes tangentielle et normale d'une force unique.</u> – Il peut parfois être utile de remplacer une force unique F appliquée à un point par d'autres en nombre quelconque dont elle serait la résultante, ou la somme géométrique — Remplacer ainsi une force par deux ou plusieurs autres, c'est la <u>décomposer</u> en ces dernières.

On peut en particulier décomposer une force d'une seule manière

1° en 2 autres arbitrairement choisies comme directions dans n'importe quel plan passant par la force (parallélogramme de diagonale connue et de directions de côtés connues)

2° en 3 autres de directions non situées dans un même plan et d'ailleurs arbitraires (parallélipipède de diagonale connue et de directions d'arêtes connues).

Le problème de la décomposition suivant plus de 3 directions, ou suivant trois directions dans un même plan avec la force est indéterminé.

Supposons qu'une force unique agisse sur un point matériel; on la décompose fréquemment:

1° soit suivant trois directions fixes rectangulaires deux à deux;

2° soit suivant trois directions rectangulaires deux à deux et liées à la trajectoire du point

La définition de ces dernières directions exige une petite digression géométrique.—(*)

La <u>tangente</u> AZ menée à une courbe C, plane ou gauche, par un de ses points A est la limite des positions d'une sécante AM tournant autour du point A jusqu'à ce que M et A se confondent

A est le point de <u>contact</u>.

Le plan N mené par le point A perpendiculairement à la tan=
=gente AΣ est le <u>plan normal</u> en A.

Tout plan conduit suivant la tangente AΣ est un plan <u>tan=
=gent</u> à la courbe.

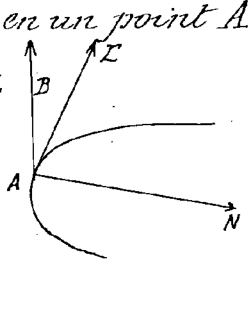
Le <u>plan osculateur</u> mené à une courbe par un de ses points A est la limite des positions d'un plan tangent en A, tournant autour de la tangente AΣ jusqu'à ce qu'un point M commun à la courbe et au plan se confonde avec A.

Toute droite menée perpendiculairement à la tangente par le point de contact est une <u>normale</u> à la courbe. Toutes les droites menées dans le plan normal par le point de contact sont des normales à la courbe.

L'intersection du plan normal et du plan osculateur est la <u>normale principale</u>. La normale perpendiculaire au plan osculateur est la <u>binormale</u>.

Tout cercle tangent à AΣ en A est un <u>cercle tangent</u> à la courbe. Le cercle tangent passant par un point M de la courbe infiniment voisin du point de contact A se nomme le cercle oscu=
=lateur en A.

Le <u>rayon de courbure</u> et le <u>centre de courbure</u> d'une courbe en un point A sont le rayon et le centre du cercle oscu=
lateur.




Cela posé, décomposons la force F en trois dirigées l'une suivant la tangente à la trajectoire, $F_t$, l'autre suivant la normale principale $F_n$, la troisième suivant la binormale $F_b$. On démontre que ces forces ont pour valeurs :

1° $$F_t = \lim\left(\frac{V'-V}{t'-t}\right) \text{ pour } t'=t,$$

V et V' désignant les vitesses du mobile aux instants t et t';

2° $$F_n = m\,\frac{V^2}{r},$$

r désignant le rayon du cercle osculateur au point A que le mobile occupe à l'instant <u>t</u>.

3° $$F_b = 0.$$

c'est-à-dire que la force, ainsi que l'accélération sont situées dans le plan osculateur à la trajectoire.

La force sollicitant un mobile animé d'un mouvement uniforme est dirigée suivant le rayon du cercle osculateur et inversement proportionnelle à ce rayon, car, comme $V'=V$, $F_t = 0$ et il ne reste que la composante $F_n$.

La force sollicitant un mobile animé d'un mouvement uniforme et circulaire est constante et dirigée vers le centre, car dans l'expression de $F_n$ qui coïncide avec $F$, V et r sont constants.

§ 8. – <u>Conditions d'équilibre des forces sollicitant un point matériel</u>. – Lorsque des forces sont capables de maintenir un point ou un corps en repos, on dit qu'elles se font <u>équilibre</u>.

Quelles sont les conditions d'équilibre des forces appliquées à un point matériel ? Ces forces peuvent être remplacées par leur résultante F; celle-ci, si elle n'était pas nulle, produirait une accélération définie par:

$$F = m\gamma;$$

mais pour que le point reste en repos, il faut que son accélération soit nulle; donc $F$ ne saurait être différente de zéro.

Réciproquement, si $F = 0$, l'accélération est nulle; or ceci exige que le point soit au repos ou animé d'un mouvement rectiligne ou uniforme. Si donc le point était en repos initialement ~~avant l'action des forces~~, il restera en repos: les forces se feront équilibre.-

Ainsi la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que la résultante soit nulle.

Si $F = 0$, on a (§7):

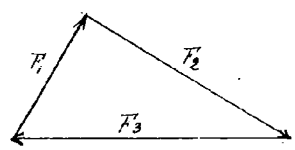
$$\left.\begin{array}{l} F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \dots\dots = 0 \\ F_1 \cos\beta_1 + F_2 \cos\beta_2 + \dots\dots = 0 \\ F_1 \cos\gamma_1 + F_2 \cos\gamma_2 + \dots\dots = 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

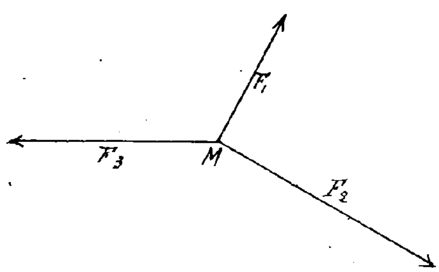
Si ces conditions sont réalisées, on a $F\cos\alpha = 0$, $F\cos\beta = 0$, $F\cos\gamma = 0$ et comme les trois cosinus ne peuvent être nuls à la fois, on en conclut $F = 0$.

Ainsi les équations (I) sont les conditions analytiques nécessaires et suffisantes de l'équilibre.

<u>Cas particuliers.</u> 1° Pour que deux forces soient en équilibre sur un point, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées.

2° Pour que trois forces soient en équilibre sur un point, il faut et il suffit qu'elles soient équivalentes aux trois côtés d'un triangle parcourus dans un même sens; autrement dit qu'elles





agissent dans un même plan, que chacune soit extérieure à l'angle des deux autres, et qu'elles vérifient les relations

$$\frac{F_3}{\sin(F_1,F_2)} = \frac{F_1}{\sin(F_2,F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3,F_1)}$$

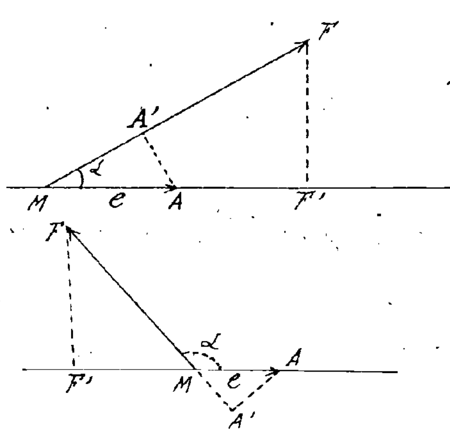
où $(F_1, F_2)$ désigne l'angle des deux forces $F_1$ et $F_2$.

## §9.- Travail et force vive. Théorème des forces vives.

Une force est constante quand, appliquée à un point, elle lui imprime une accélération constante en grandeur et en direction.

Le travail d'une force constante $F$ appliquée à un mobile $M$ animé d'un mouvement rectiligne est le produit de cette force, du chemin $e$ parcouru par le mobile, et du cosinus de l'angle $\alpha$ de la force et du chemin.

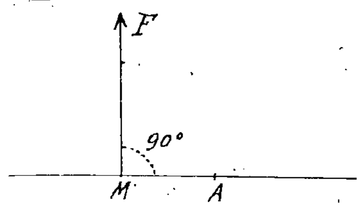
Dans le système C.G.S. l'unité de travail s'appelle l'erg. L'erg est le travail d'une force d'une dyne appliquée à un mobile parcourant un chemin rectiligne d'un centimètre, dans la direction de la force. Le joule vaut dix millions d'ergs.



En désignant par $T$ le travail, on a par définition :

$$T = F.e.\cos\alpha.$$

$F$ et $e$ étant des quantités positives, le travail est positif ou négatif selon que $\alpha$ est aigu ou obtus ; dans le premier cas, on dit que le travail est moteur et dans le second cas qu'il est résistant.




Le travail d'une force est nul dans trois cas : 1° quand la force est nulle ; 2° quand le mobile est au repos ; 3° quand la force est perpendiculaire au chemin parcouru par le mobile.

L'expression du travail peut s'écrire :

$$T = (F \cos\alpha)\, e \quad \text{ou} \quad T = (e \cos\alpha)\, F.$$

c'est-à-dire que le travail d'une force constante agissant sur un mobile animé d'un mouvement rectiligne est : ou bien le produit du chemin parcouru par le mobile par la projection de la force sur la direction du chemin ; - ou bien le produit de la force par la projection du chemin sur la direction de la force.

Une force est motrice ou résistante, selon que le travail qu'elle produit est moteur ou résistant, ou, en d'autres termes, selon que sa projection sur le chemin parcouru par le mobile est dirigée dans le sens de ce mobile ou en sens contraire.

La puissance est le quotient du travail par le temps employé à l'accomplir. L'unité de puissance est le watt correspondant à un travail d'un joule accompli en une seconde.

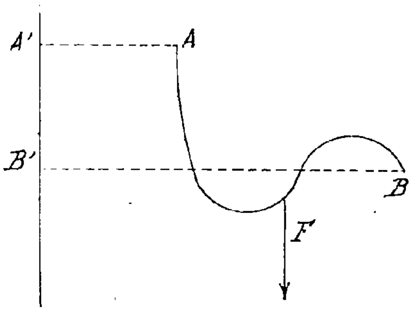
Ce qui précède ne suppose pas que la force considérée agit seule sur le mobile ; quel que soit le nombre des forces qui le sollicitent, chacune d'elles produit un travail auquel sont applicables les définitions et les remarques précédentes.

Quelle que soit la trajectoire d'un mobile, on peut toujours la décomposer en éléments rectilignes $e_1, e_2, e_3, \ldots$ infiniment petits.

On peut aussi supposer que chacune des forces qui sollicitent le mobile conserve la même grandeur et la même direction pendant qu'il décrit chacun de ces éléments.

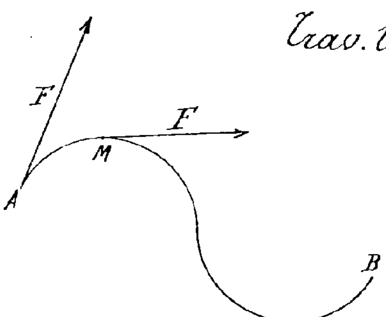
Soit $F$ une force appliquée au mobile $M$; désignons par $F_1, F_2, F_3$ ..... les valeurs respectives de cette force lorsque le mobile décrit les éléments de trajectoire $e_1, e_2, e_3$ ....; désignons encore par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ....; les angles que $F_1, F_2, F_3$ ..... font respectivement avec $e_1, e_2, e_3$ ......;
les produits $F_1 e_1 \cos\alpha_1$ , $F_2 e_2 \cos\alpha_2$ , $F_3 e_3 \cos\alpha_3$ ........
sont les travaux élémentaires de la force $F$ et leur somme est le travail total de cette force

Tout travail élémentaire d'une force variable agissant sur un mobile décrivant une trajectoire quelconque jouit des propriétés du travail d'une force constante appliquée à un mobile animé d'un mouvement rectiligne.




Le travail total d'une force constante en grandeur et en direction est le produit de cette force par la projection, sur la direction de la force, de l'arc décrit par son point d'application.

Trav. total $= F(e_1 \cos\alpha_1 + e_2 \cos\alpha_2 + ......) = F \times A'B'$.

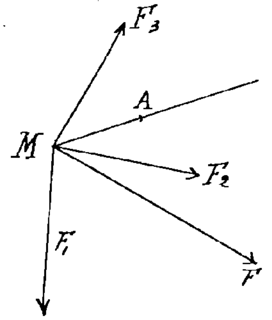



- Le travail total d'une force de grandeur constante, toujours tangente à la trajectoire du mobile, est le produit de la force par le chemin parcouru par le mobile.

$\cos\alpha = 1$ constamment.

$$\text{Trav. total} = F(e_1 + e_2 + \ldots\ldots\ldots) = F \times \text{Arc } \widehat{AMB}.$$

Le travail de la résultante de plusieurs forces agissant sur un même point, est égal à la somme des travaux de ces forces.




Supposons d'abord que les forces $F_1, F_2, F_3$ soient constantes et que leur point d'application M soit animé d'un mouvement rectiligne MA. En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ et $\alpha$ les angles que font avec MA les directions de $F_1, F_2 \ldots$, et de leur résultante $F$, on a :

$$F \cos\alpha = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots$$

et par suite, en multipliant par MA :

$$F.MA \cos\alpha = F_1 . MA \cos\alpha_1 + F_2 . MA \cos\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots$$

ou $\quad \text{Trav. de } F = \text{Trav. de } F_1 + \text{Trav. de } F_2 + \ldots\ldots\ldots$

Lorsque les forces $F_1, F_2$ ........ sont variables et lorsque leur point d'application décrit une courbe, tout travail élémentaire de leur résultante est la somme des travaux élémentaires correspondants de ces forces ; par suite, le travail total de la résultante est la somme des travaux totaux des composantes.

Lorsque les forces $F_1, F_2$ .... se font constamment équilibre, la somme de leurs travaux est nulle car on a $F = 0$.

Lorsque la somme des travaux de $F_1, F_2, \ldots$ est constamment nulle ces forces se font équilibre ou bien leur résultante est normale à la trajectoire du mobile.

A la notion de travail, Leibnitz (1) a adjoint la notion de force vive. La <u>force vive</u> d'un mobile est le produit de sa masse par le carré de sa vitesse: $mv^2$

On démontre, sous le nom de <u>théorème des forces vives</u>, le résultat suivant: <u>La demi variation de la force vive d'un mobile pendant un certain temps est égale à la somme des travaux totaux des forces agissant sur le mobile pendant ce temps.</u>

Soit <u>m</u> la masse du mobile, $v_0$ et $v$ les valeurs de ses vitesses aux instants $t_0$ et $t$; $T_1, T_2, T_3$.... les travaux totaux comptés de $t_0$ à $t$ des forces $F_1, F_2, F_3$, ..... qui sur le mobile pendant le temps $(t-t_0)$. On a:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots\ldots$$

Nous admettons ce résultat, nous bornant à le vérifier dans le cas où la seule force agissante est la pesanteur et où la trajectoire est la verticale descendante.

Prenons pour origine des temps l'instant initial $t_0$ et pour origine des espaces la position initiale.- Le chemin parcouru et la vitesse à l'instant $t$ sont:

$$V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{et } V_0 + g t.$$

Le travail total est donc:

$$mg\left[V_0 t + \frac{1}{2} g t^2\right]$$

et la demi variation de la force vive:

---

(1) G. W. <u>Leibnitz</u> (Leipzig. 1646 + Hanovre 1716) a été, avec Descartes, le plus grand philosophe du XVII<sup></sup>e siècle. Il est regardé comme l'inventeur du calcul différentiel dont il donna les règles en 1684; il partage d'ailleurs cette gloire avec Newton. Il s'est formé à Paris de 1672 à 1676.

$$\frac{1}{2} m(V_0+gt)^2 - \frac{1}{2} m V_0^2.$$

Il suffit d'effectuer la parenthèse pour reconnaître l'identité des deux expressions.

Remarque. Lorsque le mobile est animé d'un mouvement uniforme, rectiligne ou curviligne, $v = V_0$ constamment; la somme des travaux des forces qui sollicitent le mobile est constamment nulle; par suite, ou ces forces se font équilibre, ou leur résultante est normale à la trajectoire.

# 4ème PARTIE

## Statique du solide invariable

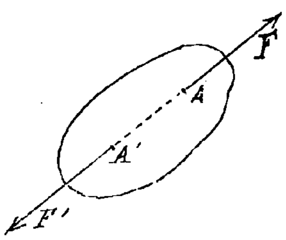
§1 Définition du solide théorique. Nous avons déjà donné le solide comme type de système de points matériels dont les distances mutuelles restent invariables.

On dit qu'une force est appliquée à un corps solide quand elle agit sur un des points matériels dont l'ensemble constitue le corps solide. Le point s'appelle le point d'application de la force.

On dit qu'un corps solide sollicité par plusieurs forces est en équilibre quand ce corps, abandonné à lui-même, sans vitesse, sous l'action des forces, reste immobile sans se déformer.

En réalité, les forces agissant sur les solides naturels modifient toujours leurs formes d'une manière passagère ou permanente; mais lorsque les forces ne dépassent pas certaines limites, et que les solides auxquels elles sont appliquées sont suffisamment résistants, ces déformations sont négligeables. Nous nous limiterons au cas où, les forces n'excédant pas ces limites et la rigidité des corps étant suffisante, les distances des points matériels qui constituent le solide peuvent être regardées comme invariables.

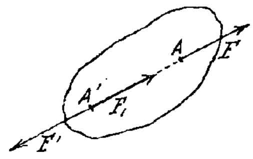
Nous admettons comme un axiome ce résultat d'origine expérimentale: Pour que deux forces appliquées à un corps solide se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées. (dans le cas d'un fil ou d'un ressort, cette condition nécessaire ne serait pas suffisante)




Nous admettrons de plus que, si un corps solide est sollicité par des forces en nombre quelconque, on peut, sans modifier son état de repos ou de mouvement, adjoindre aux forces qui agissent déjà, deux forces égales et directement opposées, ou supprimer l'ensemble de deux telles forces s'il se rencontre un pareil ensemble.

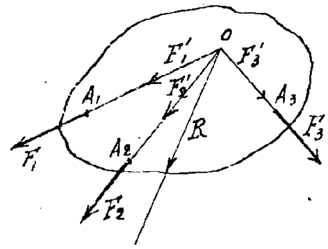
Il en résulte cette conséquence: On peut, sans changer l'effet d'une force sur un solide, transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction faisant partie du solide.

Car si A est le point d'application primitif, en appliquant en un




point A' du solide, situé sur la direction de la force F, deux forces égales à F et directement opposées $F_1$ et F' on ne modifie pas l'état de repos ou de mouvement du solide, ni en suite en supprimant F et F' et la force F est remplacée par la force $F_1$.

§ 2. Composition des forces concourantes. Supposons que des forces $F_1, F_2, F_3$ ...... soient appliquées en des points $A_1, A_2, A_3$ ..... d'un solide de telle façon que leurs lignes d'action prolongées concourent en un même point O à l'instant t. D'après ce qui précède, on peut, en liant invariablement le point O au solide y transporter les points d'application de toutes ces forces sans que le mouvement d'un point quelconque du corps, pendant un temps infiniment petit, soit changé.



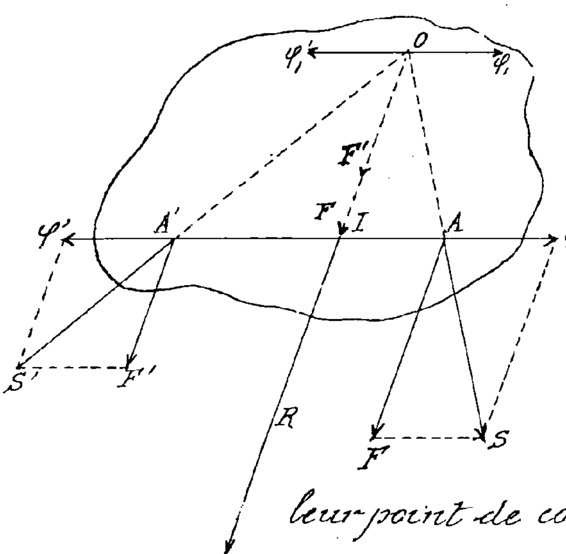

Mais alors les forces $F_1', F_2', F_3'$ ...... sont appliquées à un même point matériel O et peuvent être remplacées par leur résultante R. On peut d'ailleurs prendre pour point d'application de cette résultante un point quelconque de sa direction invariablement lié au premier.

Inversement, étant donnée une force R appliquée en O, on peut la décomposer en forces appliquées au même point et ensuite transporter chacune de ces composantes en un point quelconque de sa ligne d'action.

Il résulte de là, comme corollaire, que des forces concourantes sollicitant un solide peuvent toujours être transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées en un point quelconque de leur résultante.

## § 3. Composition des forces parallèles - Centre des forces parallèles _ Théorème des moments des forces parallèles par rapport à un plan

### 1° Composition de deux forces parallèles et de même sens.




Soient $F$ et $F'$ ces deux forces, $A$ et $A'$ leurs points d'application. Joignons $AA'$. On peut, sans changer l'état de repos ou de mouvement : 1° appliquer en $A$ et $A'$ deux forces égales $\varphi$ et $\varphi'$ agissant suivant $AA'$ et en sens contraire ; 2° composer $F$ et $\varphi$ en $S$ ; $F'$ et $\varphi'$ en $S'$ ; 3° transporter $S$ et $S'$ en leur point de concours $O$ ; décomposer alors, au point $O$, $S$ en $F$ et $\varphi$, $S'$ en $F'$ et $\varphi'$ ; 4° supprimer les forces $\varphi$ et $\varphi'$ 5° composer en $O$ $F$ et $F'$ en $F+F'$ ; 6° transporter le point d'application de la résultante $R=F+F'$ au point $I$ de sa direction situé sur $AA'$. Les triangles $OIA$, $OIA'$ sont respectivement semblables à $A\varphi S$, $A'\varphi'S'$ nous avons donc :

$$\frac{F}{\varphi}=\frac{OI}{AI}, \qquad \frac{F'}{\varphi_1}=\frac{OI}{A'I}$$

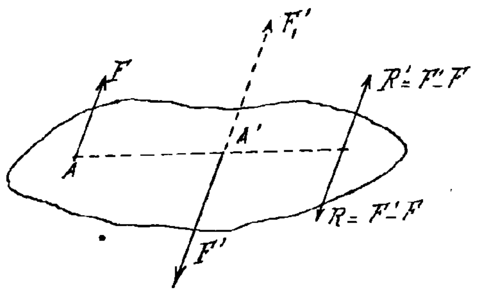
et par suite :

$$\frac{AI}{A'I}=\frac{F'}{F}.$$

Donc : deux forces parallèles et de même sens ont une résultante qui leur est parallèle, qui a leur sens, qui est égale à leur somme, et dont la direction partage intérieurement le segment de droite joignant les points d'application des forces proposées dans le rapport inverse des intensités de ces forces.

Le point où la direction de la résultante rencontre la droite qui joint les points d'application des deux composantes est généralement désigné sous le nom de point d'application de la résultante. Il s'en suit que la position de ce point est complètement indépendante de la direction commune des forces, quand leurs points d'application restent fixes, et aussi de leurs valeurs absolues, pourvu que leur rapport soit constant.

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraires. Soient $F$ et $F'$ ces forces, $A$ et $A'$ leurs points d'application. Supposons pour fixer les idées $F' > F$. Joignons $AA'$ et sur le prolongement de cette droite, au delà de $A'$ prenons le point $I$ tel que l'on ait




$$\frac{F'}{F} = \frac{AI}{A'I}.$$

Appliquons au point $I$ deux forces $R$ et $R'$ égales à $F'-F$, parallèles à $F$ et de sens contraires. La résultante $F_1'$ de $R'$ et de $F$ est égale et directement opposée à $F'$. Si nous supprimons le système $(F', F_1')$, il ne reste plus que la force $F$. Donc, deux forces inégales, parallèles, de sens contraire ont une résultante, égale à leur différence, parallèle à ces forces, de même sens que la plus grande et dont la direction (ou le point d'application) divise extérieurement la distance des points d'application des forces proposées dans le rapport inverse de leurs intensités.

3° Couple. Plus la différence entre $F$ et $F'$ est petite, plus la résultante est petite elle même, et plus son point d'application est éloigné. Si la différence est nulle, le résultat obtenu est dépourvu de sens. Ainsi deux forces parallèles, égales, de sens contraires et n'agissant pas suivant la même droite forment un ensemble (appelé couple par Poinsot) qui demande une étude spéciale.

Remarque : Il résulte de ce qui précède que, entre deux forces parallèles (ne composant pas un couple), leur résultante et les distances des points où elles rencontrent une droite, on a toujours les relations :

$$\frac{F}{IA'} = \frac{F'}{IA} = \frac{R}{AA'}.$$

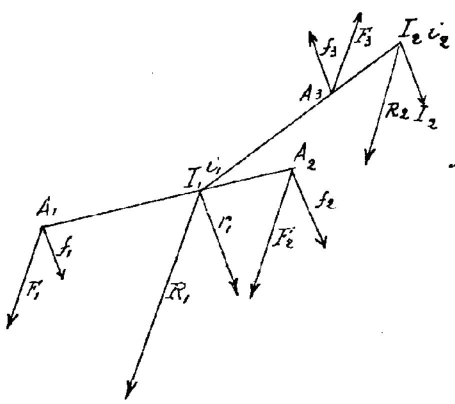
4° Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. Lorsque des forces parallèles $F_1, F_2, F_3$...... agissent dans le même sens, elles ont une résultante $R$ égale à leur somme, parallèle à ses composantes et agissant dans leur sens. Pour trouver son point d'application, on pourrait chercher le point d'application $I_1$ de la resultante $R_1$ de $F_1$ et $F_2$, puis le point d'application $I_2$ de la resultante $R_2$ de $R_1$ et $F_3$ et ainsi de suite.

Lorsque des forces parallèles agissent, les unes $F_1 F_2 F_3$...... dans un sens, et les autres $F_1'$, $F_2'$, $F_3'$...... en sens contraire, pour trouver leur résultante, on cherchera la résultante $R$ des premières et son point d'application $I$, puis la résultante $R'$ des secondes et son point d'application $I'$; et enfin si $R$ et $R'$ sont inégales, on cherchera leur résultante $R''$ et son point d'application $I''$, et le problème sera résolu.

Dans le cas où l'on aurait $R = R'$ et où ces deux résultantes n'agi=raient pas suivant la même droite, elles formeraient un couple

Dans le cas enfin où $R$ et $R'$ seraient égales ou agiraient suivant la même droite, les forces proposées se feraient équilibre sur le solide

5° Centre des forces parallèles. – Le point d'application de la résultante de plusieurs forces parallèles sollicitant un solide se nomme le centre de ces forces.




Le centre ne change pas quand on rempla=ce les forces par d'autres forces parallèles proportionnelles aux premières et ayant les mêmes points d'application. En effet, soient $F_1, F_2, F_3$ ..... des forces parallèles appliquées en des points $A_1, A_2, A_3$ et soient $f_1, f_2, f_3$ d'autres forces parallèles appli=quées aux mêmes points et telles que l'on ait :

$$\frac{f_1}{F_1} = \frac{f_2}{F_2} = \frac{f_3}{F_3} = \ldots\ldots$$

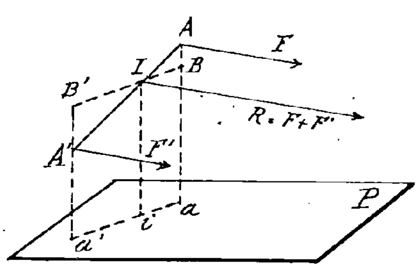
Le point d'application $I_1$ de la résultante $R_1$ de $F_1$ et de $F_2$ est le même que le point d'application $i_1$ de la résultante $r_1$ de $f_1$ et de $f_2$ ; pareil=lement le point d'application $I_2$ de la résultante $R_2$ de $R_1$ et $F_3$ est le même que le point d'application $i_2$ de la résultante $r_2$ de $r_1$ et de $f_3$ et ainsi de suite.

Lorsque les forces sont définies par leurs mesures et les coordon=nées rectangulaires du point d'application de chacune d'elles, la recherche des coordonnées de leur centre se fera en utilisant le théorème suivant:

6° Théorème des moments des forces parallèles. - On appelle moment d'une force par rapport à un plan le produit du nombre qui mesure la force par le nombre qui mesure la distance de son point d'application au plan. Pour considérer un tel moment comme une grandeur algébrique, on affecte du signe + les nombres qui correspondent aux forces dirigées dans un sens, et du signe − ceux qui correspondent aux forces dirigées en sens contraire; on fait la même convention pour les distances, suivant que les points d'application sont d'un côté ou de l'autre du plan des moments.

Le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Soient d'abord $F$ et $F'$ deux forces parallèles et de même sens, $A$ et $A'$ leurs points d'application que nous supposons placés d'un même côté du plan $P$. des moments; projetons $AA'$ sur le plan $P$ et par le point $I$ d'application de la résultante $R$ menons $BB'$ parallèle à cette projection $aa'$. Les triangles semblables $IAB$, $IA'B'$ et la propriété du point $I$ nous donnent:




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{IA}{IA'} = \frac{F'}{F};$$

d'où l'on déduit $F.AB = F'.A'B'$.

En remplaçant $AB$ par $Aa - Ii$, $A'B'$ par $Ii - A'a'$ et en ayant égard à $R = F + F'$, on a successivement:

$$F(Aa - Ii) = F'(Ii - A'a') \text{ ou } F.Aa + F'.A'a' = R.Ii.$$

ou enfin $\quad$ Mom$^t$ de $F$ + Mom$^t$ de $F'$ = Mom$^t$ de $R$.

Soient maintenant deux forces $F$ et $F'$ parallèles et de sens contraires, $A$ et $A'$ leurs points d'application que nous supposerons, ainsi que le point d'application $I$ de leur résultante, situé du même côté du plan des moments.

Une construction et un raisonnement analogues aux précédents nous donnent :

$$F.Aa - F'.A'a' = (F - F').Ii = R.Ii.$$

En considérant $F$ comme positive, la seconde composante sera représentée par $-F'$ et l'égalité précédente s'écrira :

$$\text{Mom}^t F + \text{Mom}^t F' = \text{Mom}^t R.$$

Soient $F_1 F_2 F_3 \ldots$ des forces parallèles en nombre quelconque, les unes positives, les autres négatives ; désignons par $R_1$ la résultante de $F_1$ et de $F_2$, par $R_2$ la résultante de $R_1$ et de $F_3$, etc ..... et $R$ la résultante de toutes les forces proposées. Si nous supposons que les points d'application de $F_1, F_2 \ldots R_1, R_2 \ldots R$ sont situés d'un même côté du plan des moments, nous aurons :

$$\mathfrak{M}^t R_1 = \mathfrak{M}^t F_1 + \mathfrak{M}^t F_2 \;;$$
$$\mathfrak{M}^t R_2 = \mathfrak{M}^t R_1 + \mathfrak{M}^t F_3$$

..............................................

puis par addition et après réduction :

$$\mathfrak{M}^t R = \mathfrak{M}^t F_1 + \mathfrak{M}^t F_2 + \ldots\ldots$$

Supposons enfin que les points d'application des forces soient situés de part et d'autre du plan $P$ des moments ; désignons par $z_1, z_2 \ldots$ et $Z$

les distances positives ou négatives de ces points et du point d'application de $R$ à ce plan, menons un plan auxiliaire $P_1$ parallèle à $P$ et à une distance $\underline{h}$ telle que les distances $z_1+h$, $z_2+h$ ...... $Z+h$ des mêmes points à $P_1$ soient toutes positives, nous aurons :

$$R(Z+h) = F_1(z_1+h) + F_2(z_2+h) + \ldots\ldots ;$$

mais on a déjà :

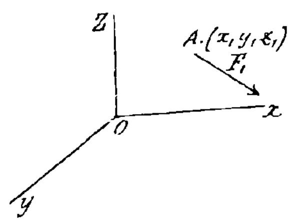
$$R.h = F_1.h + F_2.h + \ldots\ldots$$

en retranchant cette égalité de la précédente, on trouve :

$$R.Z = F_1.z_1 + F_2.z_2 + \ldots\ldots$$

ou $$\text{Mom}^t R = \text{Mom}^t F_1 + \text{Mom}^t F_2 + \ldots\ldots$$

## 7° Détermination analytique du centre des forces parallèles




On donne des forces parallèles, positives ou négatives, $F_1 F_2 F_3$ ..... et les coordonnées rectangulaires $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$ ...... de leurs points d'application. On demande les coordonnées $X, Y, Z$ de leur centre.

En prenant successivement les moments de ces forces par rapport aux plans coordonnés $yoz$, $zox$, $xoy$, et en désignant par $R$ la résultante des forces données, on a :

$$RX = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots\ldots$$

$$RY = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \ldots\ldots$$

$$RZ = F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots\ldots$$

$$R = F_1 + F_2 + \ldots\ldots$$

d'où l'on tire :

$$X = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots\ldots}{F_1 + F_2 + \ldots\ldots} \qquad (1)$$

$$Y = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \ldots\ldots}{F_1 + F_2 + \ldots\ldots} \qquad (2)$$

$$Z = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots\ldots}{F_1 + F_2 + \ldots\ldots} \qquad (3)$$

Quand les points d'application des forces parallèles sont dans un plan, leur centre est dans ce plan, et si l'on prend celui-ci pour plan $xoy$, les coordonnées de ce centre sont fournies par les formules (1) et (2)
Quand ces points sont en ligne droite, en prenant cette droite pour axe des $x$, la distance du centre des forces parallèles à l'origine est fournie par la formule (1).

§4. Centres de gravité. - Exemples simples de leur détermination. - Théorèmes de Guldin.

Les poids des points matériels qui constituent un corps sont des forces parallèles et de même sens: leur résultante, égale à leur somme, est le poids du corps; leur centre est le centre de masse ou centre de gravité du corps.

La position du centre de gravité d'un solide, par rapport à ce solide est invariable.

Un corps est homogène lorsque les masses ou les poids de ses diverses parties sont proportionnelles à leur volume.

La position du centre de gravité d'un corps homogène, par rapport à ce corps, ne dépend que de sa forme; dans la recherche des centres de gravité des corps homogènes, on peut donc faire abstraction de la nature de la matière qui les compose.

Si l'on connaissait les poids et les centres de gravité de plusieurs corps, invariablement liés entre eux, on trouverait le centre de gravité de leur ensemble à l'aide des règles de la composition des forces parallèles sollicitant un solide.

Nous ne nous occuperons que de la recherche des centres de gravité des corps homogènes.

Le centre de gravité d'une surface ou d'une ligne est le point d'application de la résultante de poids égaux uniformément répartis sur cette surface ou sur cette ligne.

Théorèmes facilitant la recherche du centre de gravité. - On dit qu'un corps matériel renferme un plan diamétral conjugué à une direction donnée x'x, lorsque, sur toute parallèle à la direction x'x, à un point matériel de masse m situé d'un côté du plan, correspond un point de même masse situé de l'autre côté et à la même distance du plan que le premier.

Si la droite x'x est normale au plan, celui-ci prend le nom de plan de symétrie. Il est clair que le centre des deux poids correspondant à ces deux masses est au milieu de leur distance, c'est à dire dans le plan diamétral. Tous les centres partiels étant dans ce plan, il en est de même du centre de toutes les forces parallèles ou du centre de gravité du corps. - Ainsi:

Si un corps renferme un plan diamétral ou un plan de symétrie, son centre de gravité est dans ce plan.

S'il en renferme deux, le centre de gravité est sur leur droite d'intersection. - S'il en renferme trois ou davantage, ils se coupent nécessairement en un même point qui est le centre de gravité du corps.

Centres de gravité des lignes homogènes. Le centre de gravité d'une droite homogène est évidemment le milieu de cette droite. Pour trouver le centre de gravité du périmètre d'un polygone homogène, ou plus généralement, d'un système de droites homo-gènes, on considérera les milieux des côtés du polygone, ou des droites, comme les points d'application de forces parallèles proportionnelles aux longueurs de ces côtés ou de ces droites et on cherchera le centre de ces forces.

Pour trouver approximativement le centre de gravité d'une ligne courbe homogène, on inscrira un polygone dans cette courbe; le centre de gravité du périmètre de ce polygone sera d'autant plus voisin du point cherché que les cotés du polygone seront plus nombreux et plus petits.

Centres de gravité des surfaces homogènes. Le centre de gravité de la surface d'un triangle est situé sur l'une quelconque de ses médianes, car chacune d'elles est un diamètre. Il est donc situé au point de concours de ces médianes.

Pour trouver le centre de gravité de la surface d'un polygone plan, on le décompose en triangles; on considère les centres de gravité des aires de ces triangles comme les points d'application de forces parallèles proportionnelles à ces aires et on cherche le centre de ces forces.

Pour trouver approximativement le centre de gravité d'une aire plane terminée par une ligne courbe, on inscrira un polygone dans cette ligne et le centre de gravité de la surface de ce polygone sera d'autant plus voisin du point cherché que la ligne polygonale inscrite différera moins de la courbe.

Pour trouver approximativement le centre de gravité d'une surface courbe, on y inscrira un polyèdre, on cherchera les centres de gravité de ses faces, on considèrera ces centres comme les points d'application de forces parallèles proportionnelles aux aires de ces faces, et le centre de ces forces sera approximativement le centre de gravité de la surface courbe proposée.

Centres de gravité des volumes homogènes. Dans un tétraèdre, un plan passant par une arète et par le milieu de l'arète opposée est plan diamétral. Les six plans diamètraux se coupent au centre de gravité du tétraèdre.

Par suite le centre de gravité d'un tétraèdre est le point de concours des quatre droites menées de ses sommets aux centres de gravité des faces opposées; — ou encore il est situé sur la droite menée d'un de ses sommets au centre de gravité de la face opposée et au quart de cette droite à partir de la base.

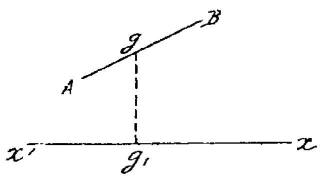
Pour trouver le centre de gravité du volume d'un polyèdre, on le décompose en tétraèdres, on cherche les centres de gravité de chacun d'eux, on considère ces centres de gravité comme les points d'application de forces parallèles, proportionnelles aux volumes des tétraèdres partiels; le centre de ces forces parallèles est le centre de gravité du polyèdre proposé.

Pour trouver approximativement le centre de gravité d'un volume homogène terminé par une surface courbe, on inscrit un polyèdre dans cette surface; le centre de gravité de ce polyèdre est d'autant plus voisin du point cherché que le polyèdre inscrit dans la surface courbe s'en écarte moins.

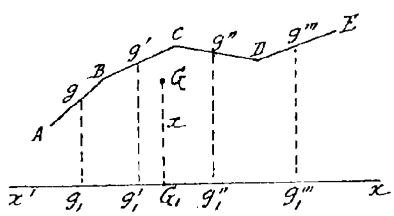
<u>Théorèmes de Guldin.</u>[1] – <u>Premier théorème</u>. – <u>Lorsqu'une ligne plane tourne autour d'un axe extérieur situé dans son plan, l'aire de la surface engendrée est le produit de la longueur de la ligne génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité</u>

Lorsque la génératrice est une droite $AB = l$, la surface engendrée est celle d'un tronc de cône et sa mesure est:

$$2\pi . gg_1 . AB = 2\pi \times \text{Mom}^t\, l.$$



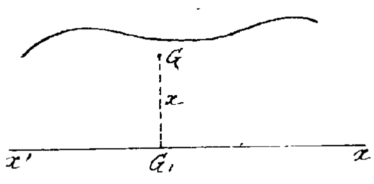

si l'on suppose que $AB$ est une droite pesante homogène, que le poids de l'unité de longueur est l'unité de poids et que le moment est pris par rapport au plan mené par l'axe $x'x$ perpendiculairement au plan de la figure.




Lorsque la génératrice est une ligne polygonale $ABCDE$, la surface engendrée $S$ a pour mesure

$$S = 2\pi(\text{Mom}^t\, l + \text{Mom}^t\, l' + \ldots\ldots),$$

$l, l' \ldots\ldots$ désignant les longueurs ou les poids des côtés de la génératrice. Mais en représentant par $L$ la longueur ou le poids de la génératrice entière, et par $x$ la distance de son centre de gravité $G$ à l'axe $x'x$, on a:




---

(1) Ces deux théorèmes furent d'abord énoncés par <u>Pappus</u>, géomètre d'Alexandrie, (fin du III$^e$ siècle après J.C.) dans la préface du livre VII$^e$ de sa <u>Collection mathématique</u> (ouvrage exhumé à la Renaissance et imprimé pour la première fois en 1588); on les nomme ordinairement théorèmes de <u>Guldin</u>, parce que ce savant jésuite les a démontrés et signalés à l'attention des géomètres par des applications élégantes dans son traité <u>De centro gravitatis</u> (1635)

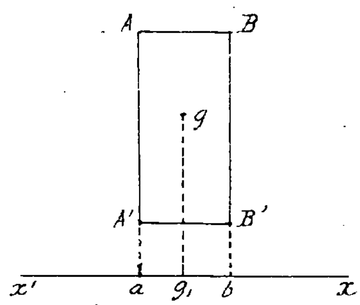
$$\text{Mom}^t\, l + \text{Mom}^t\, l' + \ldots\ldots = \text{Mom}^t\, L = L\,.\,x.$$

Donc : $S = 2\pi\,.L.x = L \times 2\pi x,$

et le théorème est établi quand la génératrice est polygonale ; comme la démonstration est indépendante de la grandeur et du nombre des côtés de la génératrice, le théorème est encore vrai quand cette génératrice est une ligne courbe.

Second théorème. — Lorsqu'une aire plane tourne autour d'un axe extérieur situé dans son plan, le volume du solide engendré est le produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Lorsque l'aire génératrice est un rectangle $AA'B'B = r$ dont les côtés $AA'$, $BB'$ sont perpendiculaires à l'axe $x'x$, le volume engendré est la différence des volumes de 2 cylindres de révolution ayant $x'x$ pour axe commun, et sa mesure



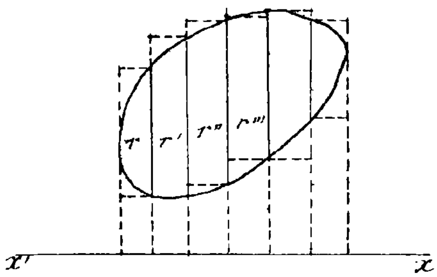

$$\pi\,\overline{AB}\,(\overline{Aa}^2 - \overline{A'a}^2) = 2\pi.\overline{AB}.\frac{Aa + A'a}{2}$$

peut s'écrire

$$2\pi.\text{Mom}^t\, r.$$

en supposant que $r$ est une surface pesante, que l'unité de surface est l'unité de poids et que le moment est pris par rapport au plan mené par $x'x$ perpendiculairement au plan de la figure.

Ceci posé, soit $S$ l'aire génératrice proposée ; menons des cordes perpendiculaires à l'axe et construisons des rectangles ayant ces cordes pour bases et leurs distances pour hauteur. Lorsque toute la figure tourne autour de $x'x$, la somme $S'$ de ces rectangles engendre un




volume $V'$ dont la mesure est

$$V' = 2\pi \left[ \mathrm{Mom}^t\, r + \mathrm{Mom}^t\, r' + \ldots\ldots \right]$$

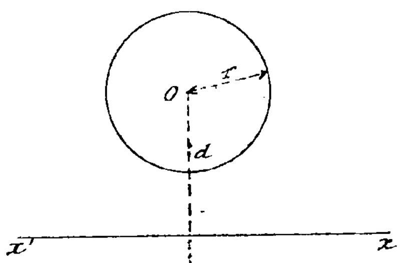
$r, r', \ldots\ldots$ désignant les aires ou les poids des rectangles partiels. Mais en représentant par $x$ la distance du centre de gravité de $S'$ à $x'x$, on a :

$$\mathrm{Mom}^t\, r + \mathrm{Mom}^t\, r' + \ldots\ldots = \mathrm{M}^t\, S' = S'.x\ ;$$

donc : $$V' = 2\pi .\, S'x = S' \times 2\pi x,$$

et le théorème serait démontré si $S'$ était l'aire génératrice proposée. Comme la démonstration est indépendante du nombre des rectangles dont $S'$ se compose et des grandeurs de leurs hauteurs, le théorème est vrai lorsque $S'$ se confond avec $S$.

Application I. Cherchons la surface $S$ et le volume $V$ du tore engendré par un cercle de rayon $r$, $d$ étant la distance de son centre à l'axe de révolution.

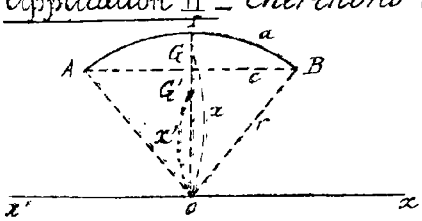



La longueur de la ligne génératrice de la surface est $2\pi r$ ; l'aire génératrice du volume est $\pi r^2$, et la circonférence décrite par le centre de gravité commun à cette ligne et à cette aire est $2\pi d$.

On a donc :

$$S = 4\pi^2 d.r \qquad \text{et} \qquad V = 2\pi^2 d r^2 = \frac{S.r}{2}$$

Application II. Cherchons le centre de gravité de l'arc de cercle.




Soient $a, c, r, x$ les longueurs de l'arc, de sa corde, de son rayon et la distance de son centre $O$ à son centre de gravité $G$ ; ce dernier est évidemment situé situé sur le diamètre OI mené au milieu de l'arc. Faisons tourner la figure autour du diamètre $x'ox$ perpendiculaire à OI. L'arc AIB engendre une zône dont la mesure est, comme on l'a vu en géométrie, $2\pi rc$, et en vertu du premier théorème de Guldin, $2\pi x a$. On a donc

$$2\pi x a = 2\pi r c, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} = \frac{r}{x}.$$

La distance du centre d'un arc de cercle à son centre de gravité est la quatrième proportionnelle à l'arc, à son rayon et à sa corde.

Application III. Cherchons le centre de gravité G' du secteur circulaire. Soit $x'$ la distance du centre du secteur à son centre de gravité G' situé évidemment sur le diamètre du milieu I de l'arc. La rotation du secteur, autour du diamètre perpendiculaire à OI engendre un secteur sphérique dont la mesure est, en vertu de la géométrie, $\frac{2}{3}\pi r^2 c$, et d'après le 2e théorème de Guldin $\pi a r x'$. On a donc:

$$x' = \frac{2}{3}\frac{rc}{a} = \frac{2}{3}x$$

La distance du centre d'un secteur circulaire à son centre de gravité est les $2/3$ de la distance de son centre au centre de gravité de son arc.

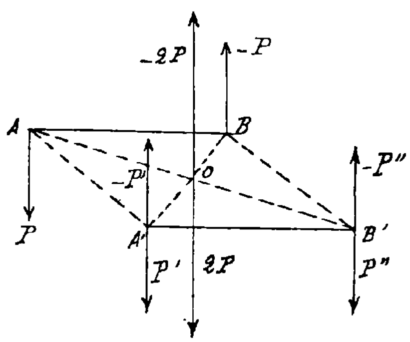
Exercices. — 1° Le centre de gravité d'une pyramide quelconque est situé sur la droite menée de son sommet au centre de gravité de sa base et au quart de cette droite à partir de la base. (On le démontre en décomposant la pyramide en tétraèdres.)

2° Le centre de gravité d'une zône sphérique est le milieu de la droite joignant les centres de ses bases. (On le démontre en s'aidant du théorème des moments des forces parallèles.)

§ 5 — Notions sur la théorie des couples. Un couple est un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires.

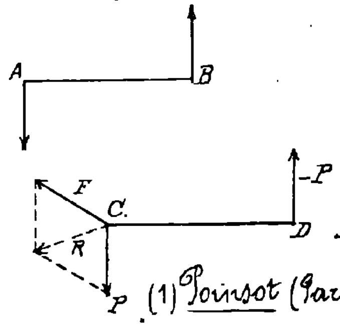
Le <u>bras de levier</u> d'un couple est la plus courte distance de ses deux forces. L'emploi des couples en Mécanique repose sur une série de théorèmes dus à <u>Poinsot</u>[1]

1° On peut, sans changer l'effet d'un couple appliqué à un solide, le transporter parallèlement à lui-même, dans son plan ou dans un plan parallèle.




Soit A'B' une droite quelconque du solide égale et parallèle au bras de levier AB du couple (P,-P). Nous pouvons, sans changer l'état du corps, appliquer en A' et en B' des forces (P',-P') et (P",-P") égales aux forces du couple et deux à deux directement opposées. Les forces (P,P") ont une résultante 2P appliquée au milieu de AB'; les forces (-P,-P') ont une résultante -2P appliquée au milieu de A'B; les milieux coïncident, car ABB'A' est un parallélogramme. Le système des forces P, -P, -P', P" est donc en équilibre, et le solide reste soumis à l'action du seul couple (P',-P").

Conséquence. — Un couple n'a pas de résultante, c'est-à-dire qu'une force et un couple ne peuvent se faire équilibre sur un solide.



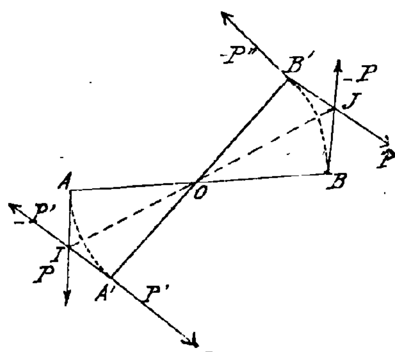

En effet, en transportant le couple parallèlement à lui-même, de façon que l'une de ses forces P ait même point d'application C que la force F, et

(1) <u>Poinsot</u> (Paris 1777-1859) a publié en 1803 ses Éléments de statique.

en composant P et F, il reste deux forces R et -P qui n'étant pas directement opposées, ne peuvent se faire équilibre.

2° On peut faire tourner un couple appliqué à un solide, autour du milieu de son bras de levier.

Soit A'B' une nouvelle position du bras de levier obtenue par une rotation autour de son milieu O. L'introduction en A' et B' de forces normales à A'B', (P'-P') et (P''-P'')

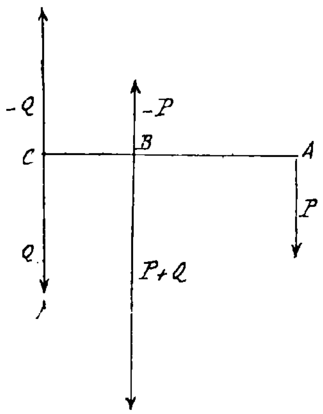



égales aux forces du couple et deux à deux égales et directement opposées, ne change pas l'effet du couple (P,-P). Mais les forces (P-P') appliquées en leur point de concours I ont une résultante dirigée suivant IO; les forces (P''-P) appliquées en leur point de concours J ont une résultante dirigée suivant JO. Par raison de symétrie, ces deux résultantes sont égales et directement opposées; on peut les supprimer et le solide reste soumis à l'action du couple (P'-P'')

3° On appelle <u>moment d'un couple</u> le produit de l'intensité commune des deux forces par leur bras de levier.

Deux couples situés dans des plans parallèles ont même <u>sens de rotation</u> quand, pour deux observateurs placés respectivement aux milieux O et O' des bras de levier de ces couples et orientés de la même façon, les couples tendent à produire des rotations de même sens.

On peut remplacer un couple appliqué à un solide par un autre situé dans le même plan, ayant même moment et même sens de rotation.




Supposons qu'on veuille remplacer un couple (P,-P) par un autre ayant pour bras de levier BC.– Nous pouvons déplacer le couple donné dans son plan de manière que son bras de levier vienne en AB dans le prolongement de BC. Appliquons en C au solide deux forces Q et -Q parallèles à P et telles que: $\frac{P}{Q} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$. On peut remplacer P et Q par une force P+Q appliquée en B d'après l'égalité précédente. Or P+Q et -P, directement opposées, ont une résultante Q, et le solide reste soumis à l'action du couple (Q en B, -Q en C) qui tend à faire tourner son bras de levier dans le même sens que le couple (P,-P); l'égalité: $P.\overline{AB} = Q.\overline{BC}$ montre que les deux couples ont même moment.

4°.– En combinant ces trois théorèmes, on voit qu'on peut remplacer un couple par un autre situé dans un plan parallèle ayant même moment et même sens de rotation.

Un nombre quelconque de couples, appliqués à un même solide, peuvent être remplacés par un couple unique, appliqué au même solide.

Il suffit de faire la démonstration pour le cas de deux couples.

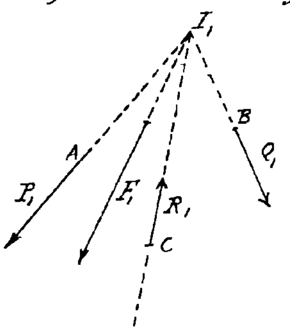
On peut leur donner d'abord le même bras de levier (en grandeur), et les déplacer ensuite, chacun dans leur plan, de manière que ces bras de levier coïncident avec l'intersection AB de leurs plans. Les forces appliquées en A d'une part et en B d'autre part, ont des résultantes qui, par raison de symétrie, sont égales, parallèles et de sens opposés.– Elles forment un couple. C.Q.F.D.

Poinsot a complété ce résultat en introduisant la notion d'axe d'un couple

## §6. _ Réduction des forces quelconques appliquées à un solide

Des forces quelconques sollicitant un solide peuvent toujours, d'une infinité de façons, être remplacées par deux forces, l'une d'elles étant appliquée à un point A invariablement lié au solide et arbitrairement choisi

1° Soient A,B,C trois points liés au solide et arbitrairement choisis, pourvu toutefois qu'ils ne soient pas en ligne droite; toute force $F_1$ appliquée au solide peut, d'une infinité de manières, être remplacée par trois forces $P_1$, $Q_1$, $R_1$ appliquées respectivement en A,B,C.

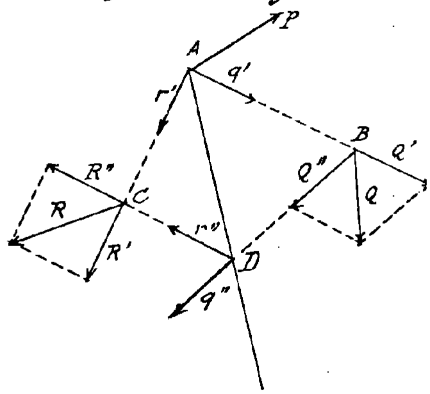



Car si $F_1$ n'agit pas dans le plan A,B,C, on pourra, d'une infinité de manières, prendre sur sa direction un point $I_1$ situé en dehors du plan A,B,C, appliquer $F_1$ en ce point en la décomposant en trois forces $P'_1$, $Q'_1$, $R'_1$ agissant suivant $I_1A$, $I_1B$, $I_1C$ et transporter ces dernières en A,B,C.

Si $F_1$ agit dans le plan ABC, on joindra $I_1$ aux deux points B et C, on décomposera $F_1$ en deux forces $Q_1$ $R_1$ agissant suivant $I_1B$ et $I_1C$, et appliquées en B et C.

2°_ Toutes les forces $F_1$, $F_2$, $F_3$ ..... qui sollicitent le solide peuvent être remplacées par trois forces P, Q, R appliquées respectivement en A, B et C. Car les composantes $P_1$, $P_2$, $P_3$ ..... de ces forces ont une résultante P appliquée en A; leurs composantes $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ ..... ont une résultante Q appliquée en B; et leurs composantes $R_1$, $R_2$ $R_3$ .... ont une résultante R appliqué en C.

3° Ces trois forces P, Q, R peuvent d'une infinité de manières, être remplacées par deux forces S et T, l'une d'elles S étant appliquée au point A.




Soit AD l'intersection de deux plans menés par le point A et contenant l'un la force Q, l'autre la force R; si ces deux plans se confondaient, AD serait une droite menée à volonté par le point A dans ce plan commun. Joignons B et C d'une part au point A, d'autre part à un point D pris à volonté sur AD. Décomposons la force Q en deux forces Q' et Q" agissant suivant AB et DB, et transportons la première en A et la seconde en D. Pareillement décomposons R en R' et R" agissant suivant AC et DC; et transportons la première en A et la seconde en D. Nous aurons ainsi trois forces P, q', r' qui agissent en A et qui ont une résultante S et deux forces q", r" agissant en D et qui ont une résultante T.

S et T sont les <u>réduites</u> du système des forces proposées $F_1, F_2, F_3$ .....

<u>Remarque</u>. La composition des couples conduit d'une façon évidente à cette réduction générale. Considérons un solide soumis à l'action des forces $F_1, F_2, F_3$ ..... et un point quelconque A de ce solide. L'introduction de deux forces $(F_1', -F_1')$ et une force $F_1'$ appliquée en A. En opérant de la sorte sur les autres forces $F_2, F_3$, ..... du système, on remplace chacune d'elles par un couple et une force; tous les couples pourront se composer en un seul et toutes les forces en une force unique

appliquée au point A. Donc: un système quelconque de forces agissant sur un solide est réductible à une force agissant sur un point arbitraire du solide et à un couple.

En transportant le couple parallèlement à lui même de manière que l'une de ses forces soit appliquée au point A, et en composant cette force avec celle qui est déjà appliquée en ce point, on a le théorème énoncé au début de ce §.–

§7 – <u>Conditions d'équilibre d'un solide.</u>

Un solide est <u>libre</u> quand il peut se déplacer dans toutes les directions à partir d'une position quelconque. Un solide libre se meut quand il est sollicité par une force unique.

Quand un solide contenant un point fixe A (réalisé par un genou ou une articulation sphérique) est sollicité par une force unique F, ce solide demeure en repos lorsque la direction F passe par le point A; il se meut dans le cas contraire.

Quand un solide contenant un axe fixe ou deux points fixes A et B (réalisé par une articulation cylindrique ou un ensemble de tourillons et coussinets) et primitivement en repos, est sollicité par une force unique F, ce solide demeure en repos lorsque la force F et l'axe AB sont dans un même plan; il se meut dans le cas contraire.

Ce sont là des résultats expérimentaux.

<u>Equilibre d'un solide libre</u>. Pour que des forces sollicitant un solide libre se fassent équilibre, il faut et il suffit que les deux réduites S et T se fassent équilibre c'est-à-dire (§1) qu'elles soient égales, agissent suivant la même droite et en sens contraire.

Equilibre d'un solide lié à un point fixe. — Pour que des forces sollicitant un solide contenant un point fixe A se fassent équilibre, il faut et il suffit que, l'une de leurs réduites S étant appliquée à ce point fixe A, l'autre réduite passe aussi par A.

Les réduites passant par A, ont une résultante R dite la charge du point d'appui A

Équilibre d'un solide lié à un axe fixe. — Pour que des forces sollicitant un solide contenant un axe fixe se fassent équilibre, il faut et il suffit que, l'une de leurs réduites S étant appliquée à un point de l'axe, l'autre T soit dans un plan contenant cet axe.

## § 8. — Projections et moments des forces relativement à un axe

Les conditions d'équilibre obtenues prendront une forme plus pratique moyennant l'établissement de propriétés importantes des réduites S et T.

Première propriété des réduites. — La somme algébrique des projections, sur un axe quelconque, des forces sollicitant un solide est égale à la somme des projections, sur le même axe, de leurs deux réduites.

Nous nous baserons sur cette double remarque : 1° la projection d'une force sur un axe ne change pas quand on l'applique en un point quelconque de sa direction.

2° Lorsque des forces sont concourantes, la somme algébrique de leurs projections sur un axe est égale à la projection de leur résultante, car celle-ci est la somme géométrique des forces proposées.

Reprenons la démonstration du théorème du § 6. — Projetons la figure sur un axe $x'x$. D'abord, en vertu de la 2° remarque.

$$\text{Proj. } F_1 = \text{Proj. } P_1' + \text{Proj. } Q_1' + \text{Proj. } R_1' ,$$

et en vertu de la première :

$$\text{Proj. } F_1 = \text{Proj. } P_1 + \text{Proj. } Q_1 + \text{Proj. } R_1$$

Chaque force donnerait une égalité analogue. Ajoutons les membre à membre et désignons par le signe $\Sigma$ une somme de termes analogues à celui qui est soumis à ce signe, nous aurons :

$$\Sigma \text{ Proj. } F_1 = \Sigma \text{ Proj. } P_1 + \Sigma \text{ Proj. } Q_1 + \Sigma \text{ Proj. } R_1 ,$$

c'est à dire d'après la seconde remarque :

$$\Sigma \text{ Proj. } F_1 = \text{Proj. } P + \text{Proj. } Q + \text{Proj. } R.$$

D'autre part on a :

$$\text{Proj. } Q = \text{Proj. } Q' + \text{Proj. } Q'' = \text{Proj. } q' + \text{Proj. } q''$$
$$\text{Proj. } R = \text{Proj. } R' + \text{Proj. } R'' = \text{Proj. } r' + \text{Proj. } r''$$

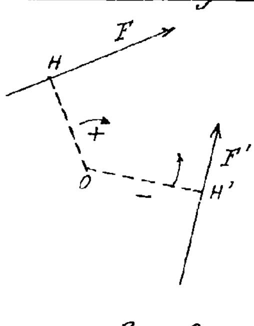
Donc $\Sigma \text{ Proj. } F_1 = (\text{Proj. } P + \text{Proj. } q' + \text{Proj. } r') + (\text{Proj. } q'' + \text{Proj. } r'')$

Comme $S$ est la résultante des trois forces concourantes $P, q'$ et $r'$, et $T$ la résultante des deux forces concourantes $q''$ et $r''$, il vient :

$$\Sigma \text{ Proj. } F_1 = \text{Proj. } S + \text{Proj. } T$$

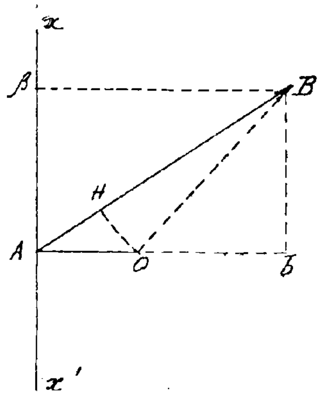
La première propriété est ainsi établie. _ La seconde propriété énoncée implique une notion nouvelle, celle de moment d'une force.

<u>Moment d'une force par rapport à un point</u>. Le moment d'une force $F$ par rapport à un point $O$ est le produit $F.OH$ de la force par la distance de ce point à la force.




Lorsqu'on a, dans un plan, plusieurs forces, on définit le moment de chacune d'elles par rapport à un point $O$ de son plan comme grandeur algébrique : si le solide sur lequel $F$ agit était lié à un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan, si de plus la force agissait seule sur le solide, celui-ci serait animé d'un mouvement de rotation dans un certain sens ; on considère comme positif le moment d'une force F qui ferait tourner le solide dans un sens et comme négatif le moment d'une force F' qui le ferait tourner en sens contraire.

Théorème de Varignon[1] Lorsque des forces concourantes agissent dans un même plan, la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à un point de leur plan est égale au moment de leur résultante par rapport au même point.




Soit A le point d'application d'une force F représentée par AB, O le point par rapport auquel on prend les moments ; F' la projection Aβ de F sur un axe x'Ax menée perpendiculairement à OA. On a : $OH \times AB = OA \times F' = 2$ Aire Tr. OAB. Considérons F' comme positive ou négative suivant qu'elle agit dans le sens Ax ou dans le sens Ax' ; nous donnerons ainsi au produit $OA \times F'$ la valeur algébrique du moment de F par rapport à O. Cela posé, soient $F_1, F_2, F_3$ .... des forces appliquées à un point A, agissant dans un même plan et admettant une résultante R. Soit O un point de ce plan, $F'_1, F'_2, F'_3$.... et R' les projections de $F_1 F_2 F_3$ .... et R sur un axe x'Ax perpendiculaire.

---

(1) Indiqué dans son "Projet d'une nouvelle Mécanique" (1687) Varignon a contribué beaucoup à débarrasser la Mécanique de vieilles démonstrations métaphysiques, à en éclaircir les principes et à en simplifier l'exposition (1654-1722).

à AO dans le plan considéré, projections considérées comme valeurs algébriques.. On a :

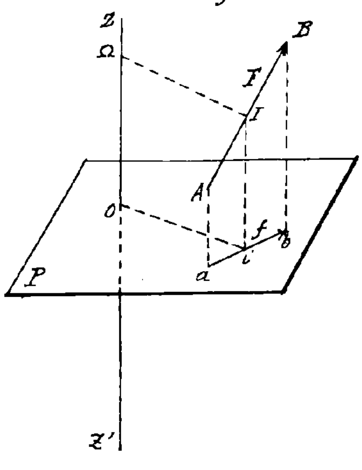
$$R' = F_1' + F_2' + F_3' + \ldots\ldots$$

et en multipliant par OA :

$$R'.OA = F_1'.OA + F_2'.OA + F_3'OA + \ldots\ldots$$

ou $$\text{Mom}^t R = \text{Mom}^t F_1 + \text{Mom}^t F_2 + \ldots\ldots \quad (C.Q.F.D.)$$

**Moment d'une force par rapport à un axe.** Le moment d'une force F par rapport à un axe $zoz'$ est le produit $f.\Omega I$ de la plus courte distance $\Omega I$ de la force à l'axe par la projection $f$ de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe P.




Si le solide sur lequel agit F était lié à l'axe $zoz'$, et si F agissait seule sur le solide, celui-ci serait animé d'un mouvement de rotation. On convient de considérer comme positif le mouvement d'une force qui ferait tourner le solide dans un sens et comme négatif le moment d'une force qui le ferait tourner en sens contraire. Il importe d'observer que le moment de F par rapport à $zoz'$ coïncide avec le moment de $f$ par rapport au point O où l'axe $zoz'$ rencontre le plan P.

**Théorème des moments par rapport à un axe.** Lorsque, dans l'espace, des forces sont concourantes, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est égale au moment de leur résultante par rapport au même axe.

Soient $F_1, F_2, F_3$ ..... et R les forces concourantes données et leur résultante

$f_1, f_2, f_3$ .... et $r$ leurs projections sur le plan P; $r$ est la résultante de $f_1, f_2, f_3$ ....; en prenant les moments par rapport au point O, on a :

$$\mathrm{Mom}^t r = \mathrm{Mom}^t f_1 + \mathrm{Mom}^t f_2 + \mathrm{Mom}^t f_3 + \ldots\ldots$$

d'après le théorème de Varignon; mais ces moments sont ceux de $R$, $F_1$, $F_2$ .... par rapport à l'axe $zoz'$; donc :

$$\mathcal{M}^t R = \mathcal{M}^t F_1 + \mathcal{M}^t F_2 + \mathcal{M}^t F_3 + \ldots\ldots \qquad (C.Q.F.D.)$$

<u>Seconde propriété des réduites S et T.</u> – <u>La somme algébrique des moments, par rapport à un axe quelconque, des forces $F_1, F_2, F_3$ ..... sollicitant un corps solide, est égale à la somme algébrique des moments, par rapport au même axe, de leurs deux réduites S et T.</u>

Nous nous appuierons sur le théorème des moments par rapport à un axe et sur cette remarque : Le moment d'une force par rapport à un axe ne change pas quand on applique cette force en un point quelconque de sa direction.

Reprenons encore les notations du § 6. – On a d'abord, quelque soit l'axe $zz'$ :

$$\mathcal{M}^t F_1 = \mathcal{M}^t P_1 + \mathcal{M}^t Q_1 + \mathcal{M}^t R_1$$

Donc :

$$\sum \mathcal{M}^t F_1 = \sum \mathcal{M}^t P_1 + \sum \mathcal{M}^t Q_1 + \sum \mathcal{M}^t R_1$$
$$\quad = \mathcal{M}^t P + \mathcal{M}^t Q + \mathcal{M}^t R$$

D'autre part :

$$\mathcal{M}^t Q = \mathcal{M}^t Q' + \mathcal{M}^t Q'' = \mathcal{M}^t q' + \mathcal{M}^t q''$$
$$\mathcal{M}^t R = \mathcal{M}^t R' + \mathcal{M}^t R'' = \mathcal{M}^t r' + \mathcal{M}^t r''$$

Donc $\quad \sum \mathcal{M}^t F_1 = (\mathcal{M}^t P + \mathcal{M}^t q' + \mathcal{M}^t r') + (\mathcal{M}^t q'' + \mathcal{M}^t r'')$

Or, S est la résultante de $P, q', r'$; T est la résultante de $q''$ et $r''$. Donc :

$$\sum \mathcal{M}^t F_1 = \mathcal{M}^t S + \mathcal{M}^t T.$$

(C.Q.F.D.)

## § 9. Nouvelles expressions des conditions d'équilibre d'un solide

Nous allons utiliser ces deux propriétés des réduites S et T pour donner une forme nouvelle aux conditions d'équilibre obtenues.

1^er^ Cas. Le solide est libre. Prenons dans l'espace trois axes concourants rectangulaires deux à deux ox, oy, oz, fixes dans l'espace auxquels on rapporte le solide.

Pour que le solide reste en repos, il faut et il suffit :

1° que la somme des projections sur chaque axe des forces qui sollicitent le solide soit nulle ;

2° que la somme des moments de ces forces par rapport à chaque axe soit nulle.

a. Les conditions sont nécessaires.

Soient S et T les réduites des forces proposées, S étant appliquée à l'origine O supposée rattachée au solide.

Si les forces proposées se font équilibre, S et T sont égales et agissent suivant la même droite en sens contraires ; leurs deux projections sur chaque axe sont donc égales et de signes contraires : la somme de ces deux projections est nulle, ~~et~~ la somme des projections des forces proposées sur chaque axe est nulle.

Puisque S et T passent par O, le moment de chacune d'elles par rapport à chacun des axes est nul, la somme de leurs moments par rapport à chaque axe est nulle, et par suite la somme des moments des forces proposées par rapport à chaque axe est nulle.

b. Les conditions sont suffisantes. Les forces proposées remplissent les conditions énoncées. Formons les réduites S et T. S passant par O.

La somme des moments de $S$ et de $T$ par rapport à chaque axe est nulle; le moment de $S$ par rapport à chaque axe étant nul, il en est de même pour $T$ et par suite $T$ passe par $O$.

Soient $(\sigma, \sigma', \sigma'')$ et $(\tau, \tau', \tau'')$ les angles des directions de $S$ et de $T$ avec $ox, oy, oz$; $\varphi$ l'angle de ces deux directions. Nous avons :

$$S\cos\sigma + T\cos\tau = 0$$

$$S\cos\sigma' + T\cos\tau' = 0$$

$$S\cos\sigma'' + T\cos\tau'' = 0$$

$$\cos\varphi = \cos\sigma\cos\tau + \cos\sigma'\cos\tau' + \cos\sigma''\cos\tau''.$$

Ajoutons membre à membre les équations $S^2\cos^2\sigma = T^2\cos^2\tau, \ldots$ nous aurons $S^2 = T^2$ et comme $S$ et $T$ sont des valeurs absolues, nous aurons $S = T$. Dès lors $\cos\tau = -\cos\sigma \ldots\ldots$ et par suite :

$$\cos\varphi = -(\cos^2\sigma + \cos^2\sigma' + \cos^2\sigma'') = -1$$

Dès lors $\varphi = \pi$ et les deux réduites $S$ et $T$ sont égales, parallèles, et de sens opposés; comme toutes deux passent par $O$, elles se font équilibre.

<u>2e Cas. – Le solide est invariablement lié à un point fixe.</u>

Prenons ce point fixe pour origine de 3 axes rectangulaires $ox, oy, oz$. <u>Pour que le solide demeure en repos, il faut et il suffit que la somme des moments, par rapport à chaque axe, des forces qui sollicitent le solide soit nulle.</u>

Supposons toujours que la réduite $S$ soit appliquée en $O$.

<u>a. – La condition est nécessaire.</u> Si les forces proposées se font équilibre, $T$ passe en $O$, la somme des moments de $S$ et de $T$, par rapport à chaque axe, est nulle, et il en est de même de la somme des

moments des forces proposées.

b. – La condition est suffisante. – En effet, quand elle est remplie, T passe au point O et les forces proposées se font équilibre.

3e Cas – Le solide est invariablement lié à un axe fixe.

Pour que le solide demeure en repos, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui le sollicitent, pris par rapport à cet axe soit nulle.

Supposons que la réduite S soit appliquée en un point O de l'axe fixe oz. – a – La condition est nécessaire. Si les forces proposées se font équilibre, T et ox sont dans un même plan, le moment de T est nul par rapport à ox comme celui de S, et la somme des moments des forces proposées par rapport à ox est nulle.

b – La condition est suffisante. – Si cette dernière somme est nulle, le moment de T par rapport à ox est nul; T et ox sont dans un même plan et les forces proposées se font équilibre.

§ 10 *Équations d'équilibre d'un solide. – Les conditions géométriques d'équilibre que nous venons d'obtenir ont été présentées sous la forme d'équations par d'Alembert dans ses "Recherches sur la précession des équinoxes." – Ch. II; 1749 (1)

---

(1) – Fils adultérin et abandonné de Mme de Tencin et du général d'artillerie Destouches, baptisé sous le nom de Jean Baptiste Leroud, le 17 novembre 1717, admis grâce à l'influence de la famille Destouches au collège des Quatre Nations sous le nom d'emprunt de Darenberg qui devint dans la suite d'Aremberg, d'Arenbert et d'Alembert, ce géomètre fut l'un des plus brillants esprits du 18e siècle; son traité de Dynamique (1743) fait époque dans l'histoire de la Mécanique; car il contient une méthode directe et générale pour mettre en équations tous les problèmes de la Mécanique.

Menons dans l'espace par un point O invariablement lié au solide trois axes rectangulaires ox, oy, oz. – Définissons chaque force active $F_i$ :

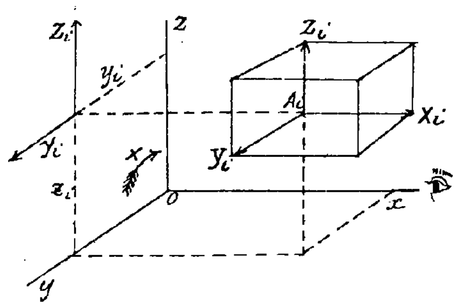
1° par les coordonnées de son point d'application : $x_i$, $y_i$, $z_i$ ;

2° par ses projections sur les axes ox, oy, oz ; $X_i$, $Y_i$, $Z_i$.

Si nous représentons par P, Q, R la somme des projections de toutes les forces sollicitant le solide sur ox, oy, oz, nous aurons :

$$P = \sum X_i$$
$$Q = \sum Y_i$$
$$R = \sum Z_i$$

Désignons par $l_i$, $m_i$, $n_i$ les moments, par rapport à ox, oy, oz, de la force $F_i$ ; nous considérerons comme positif le moment d'une force, par rapport à l'un des trois axes, lorsqu'elle tendra à faire tourner le solide dans le sens des aiguilles d'une montre, en supposant que le spectateur placé sur la partie positive de l'axe regarde l'origine.




Décomposons $F_i$ en trois forces parallèles aux axes ; ces composantes sont : $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ ; les moments de ces trois forces par rapport à ox sont, d'après la figure :

$$0, \quad -z_i Y_i, \quad +y_i Z_i.$$

On a donc $$l_i = y_i Z_i - z_i Y_i.$$

Cette valeur, obtenue en supposant que les composantes de $F_i$ et les coordonnées de son point d'application sont positives, est encore exacte lorsqu'une ou plusieurs de ces quantités sont négatives. En effet, si par exemple $y_i$ était négative et $Z_i$ positive, le moment de la dernière composante serait négatif, et sa valeur algébrique serait encore représentée par le produit $+ y_i . Z_i$

On trouverait de même :

$$m_i = z_i X_i - x_i Z_i$$

$$n_i = x_i Y_i - y_i X_i$$

Si nous représentons par $L, M, N$ la somme algébrique des moments de toutes les forces sollicitant le solide par rapport à ox, oy, oz, nous aurons

$$L = \sum l_i = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M = \sum m_i = \sum (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$N = \sum n_i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$$

Equilibre d'un solide libre. Il faut et il suffit que, l'origine étant un point quelconque, les forces vérifient les 6 équations d'Alembert.

$$P = 0 \qquad L = 0$$

$$Q = 0 \qquad M = 0$$

$$R = 0 \qquad N = 0$$

Equilibre d'un solide à point fixe. — Il faut et il suffit que, l'origine étant le point fixe, les forces vérifient les 3 équations :

$$L = 0 \qquad M = 0 \qquad N = 0.$$

Equilibre d'un solide à axe fixe. — Il faut et il suffit que, l'axe ox étant l'axe fixe, les forces vérifient l'équation

$$L = 0.$$

## §11 — Etude de machines simples à l'état d'équilibre et d'appareils de pesage.

A. Machines simples. — Une machine est formée d'un corps ou d'un système de corps mobiles gênés par des obstacles fixes.

Elle sert à vaincre une résistance, c'est-à-dire à obliger le point d'application d'une force dite dite résistance à se déplacer en sens contraire de la direction de cette force, ou en faisant avec cette direction un angle obtus, - en utilisant une force dite puissance agissant dans le sens du déplacement de son point d'application, ou en faisant avec ce déplacement un angle aigu.

Nous supposons que le mouvement imprimé aux machines considérées est assez lent ou assez régulier pour qu'à chaque instant la puissance et la résistance se fassent équilibre. Ce sont les conditions de cet équilibre que nous allons étudier, mais il faudra bien se garder d'étendre, sans examen, aux machines en mouvement variable ce que nous allons dire de leur état statique.

Dans chaque machine, on se donne, en grandeur, direction et sens la résistance à vaincre. On se propose de déterminer la grandeur de la puissance en en fixant la direction et le sens, dans des conditions telles que cette grandeur soit inférieure à celle de la résistance.

On appelle, depuis Coulomb (1784), machines simples, celles qui se composent d'un seul corps solide gêné par des obstacles fixes. Elles se rattachent à trois types :

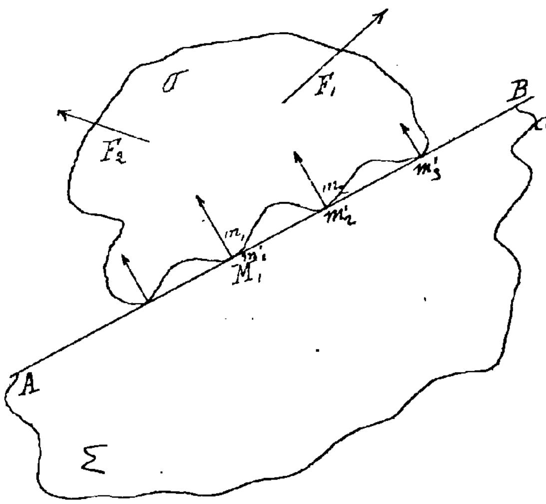
1° Solide reposant sur un plan inébranlable : plan incliné, haquet, binard

2° Solide qui a un point fixe : levier, pince à talon, brouette, etc

3° Solide qui a un axe fixe : treuil, poulies mouflées ou non.

a - Plan incliné. Considérons un solide fixe $\Sigma$ terminé par un plan AB impénétrable et parfaitement poli.

Soit $\sigma$ un autre solide ; les points $m_1$, $m_2$.... de sa surface sont




assujettis à demeurer sur AB.

Le point de contact $m_1$ par exemple cède à toute force tendant à lui donner un déplacement extérieur à $\Sigma$; au contraire tout déplacement normal à $\Sigma$ et dirigé vers l'intérieur est impossible. Si donc on exerce sur le point $m_1$ une force dans cette direction, elle sera de nul effet c'est-à-dire que le même point $m_1$ devra subir de la part de $\Sigma$ une autre force $r$ équilibrant la première et dite réaction de $\Sigma$. Ainsi en chaque point de contact, $\Sigma$ exercera sur $\sigma$ une force normale à AB et dirigée de $\Sigma$ vers $\sigma$.

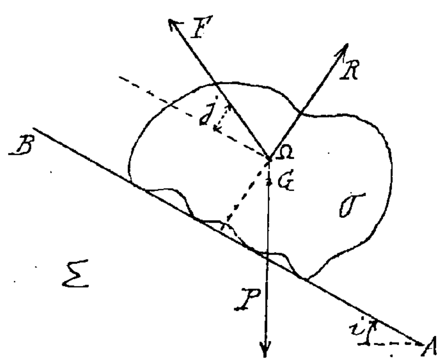
Supposons $\sigma$ soumis à l'action de forces extérieures $F_1 F_2$ .... et proposons nous de trouver les conditions que doivent remplir les forces pour que $\sigma$ soit en repos.

On peut considérer $\sigma$ comme un solide libre sollicité par deux systèmes de forces, savoir: les forces (F) et les réactions (r); or ces dernières ont une résultante R normale au plan, dirigée de $\Sigma$ vers $\sigma$ et passant par un point du plan situé à l'intérieur du polygone convexe que forment les points d'appui (polygone de sustentation)

Dans le cas de l'équilibre, les forces (F) ont une résultante égale et directement opposée à R. Donc pour que les forces (F) se fassent équilibre, il faut: 1° que les forces (F) soient réductibles à une seule (c'est-à-dire que les réduites S et T soient dans un même plan où elles ne forment pas un couple); 2° que cette réduite unique soit normale au plan AB et qu'elle soit dirigée du corps vers le plan; 3° qu'elle rencontre le plan à l'intérieur du polygone de sustentation.

Ces conditions sont suffisantes évidemment. La pression du corps sur le plan est la résultante des forces extérieures (F); les pressions sur les points d'appui $m_1'$, $m_2'$, $m_3'$..... sont (dans le cas idéal considéré) déterminées ou indéterminées selon que le nombre de ces points ne surpasse pas ou surpasse trois.

Limitons nous au cas où les forces (F) se réduisent au poids P du solide et à une force (F) Ces 2 forces devant avoir une réaction R normale à AB sont dans un même plan qui est vertical (direction du poids) normal à la face AB du plan incliné (direction de R) et passe par le centre de gravité G de $\sigma$ (position de P). Il faut donc que F soit située dans le plan mené par le centre de gravité G de $\sigma$ perpendiculairement à la trace horizontale du plan incliné. Dans ces conditions, F et P se coupent en un point $\Omega$, et pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit qu'une force R menée perpendiculairement à AB de $\Sigma$ vers $\sigma$, puisse équilibrer F et P. Les forces étant concourantes, on peut exprimer cet équilibre sous la forme indiquée à la fin du § 8. de la 3e partie. Soit $\underline{i}$ l'inclinaison du plan AB sur l'horizon et $\underline{j}$ l'angle de F avec la direction ascendante du plan incliné. Il vient :




$$\frac{P}{\sin(F,R)} = \frac{F}{\sin(R,P)} = \frac{R}{\sin(P,F)}$$

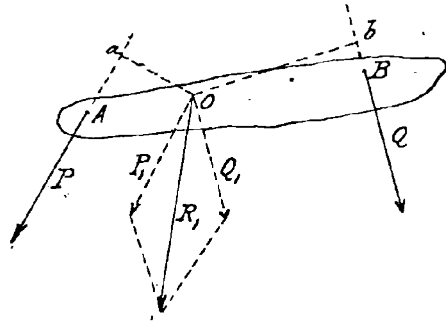
ou $$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-j\right)}=\frac{F}{\sin(\pi-i)}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+i+j\right)}$$

Ainsi la puissance $F$ capable d'équilibrer le poids ou résistance $P$ est:
$$F = P.\frac{\sin.i}{\cos j}.$$
La pression du corps sur le plan incliné est $P.\frac{\cos(i+j)}{\cos j}$. Le minimum de $F$ quand on fait varier sa direction correspond à $j=0$ ($F$ parallèle au plan incliné). Alors $F = P.\sin i$ est inférieure à $P$.

Le but du plan incliné est de soulever un fardeau avec une puissance $F$ inférieure au poids $P$ du fardeau.

La principale application du plan incliné se trouve dans le haquet (imaginé par Pascal), sorte de charette allongée qui sert à transporter les tonneaux. Pour charger ou décharger un tonneau, on accule la charette. de façon à faire reposer sur le sol sa partie postérieure. La force $F$ est fournie par un homme agissant sur le tonneau à l'aide d'une corde et d'un treuil sur lequel s'enroule la corde; on verra tout à l'heure que le treuil sert à diminuer la force à produire effectivement pour réaliser $F$.

b Levier. — On appelle levier tout solide mobile autour d'un point fixe $O$ dit point d'appui. Supposons un tel corps sollicité par deux forces, l'une $P$, dite puissance appliquée en $A$, l'autre $Q$, dite résistance appliquée en $B$, et négligeons le poids du levier.




Pour que ces deux forces se fassent équilibre, il faut et il suffit: 1° qu'elles agissent dans un même plan contenant le point d'appui; 2° qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire; 3°

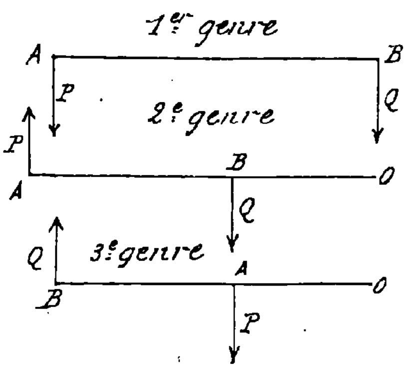
que la somme des moments de P et de Q par rapport à un axe perpendiculaire au plan de P, Q et O, soit nulle, ce qui donne l'égalité:

$$P.Oa = Q.Ob.$$

Oa et Ob sont les bras du levier; la puissance et la résistance doivent être inversement proportionnelles aux bras du levier.

La pression sur l'appui est la résultante des forces qui sollicitent le levier, transportées au point d'appui.

Le levier est droit quand il se réduit à une barre rigide contenant le point d'appui.




On distingue trois genres de levier:

1er genre. Le point d'appui est compris entre les points d'application de la puissance et de la résistance. Ex: pince à talon servant à soulever les pierres de taille; gouvernail des bateaux etc......

2e genre. Le point d'application de la résistance est placé entre le point d'application de la puissance et le point d'appui. Ex: brouette (inventée par Pascal)

3e genre. Le point d'application de la puissance est placé entre le point d'appui et le point d'application de la résistance. Ex: pédale du rémouleur, de la machine à coudre, etc......

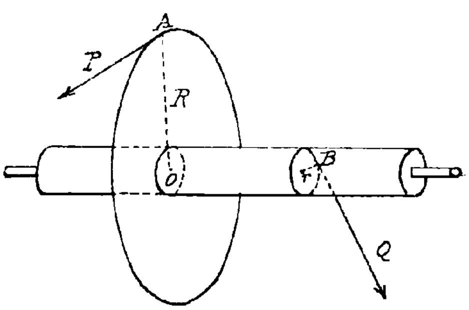
Dans les deux premiers genres, la résistance est pratiquement plus grande que la puissance; dans le 3e elle est toujours plus petite.

En réalité, dans tous les cas, le point fixe est remplacé par un axe fixe. Cela a peu d'importance parce que les forces y sont toujours dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

c. Treuil _ Un treuil est un solide assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe. _ Il se compose ordinairement : 1° d'un cylindre de révolution terminé par deux autres cylindres de même axe et ayant un diamètre plus petit que le premier ; ces petits cylindres, dits tourillons reposent sur des demi-cylindres concaves, fixes, de même diamètre, nommés coussinets ; 2° d'une roue ayant son centre sur l'axe du cylindre, dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre ; cette roue est solidaire de l'arbre du treuil.

Le treuil est assujetti à tourner autour de l'axe du cylindre. Exprimons les conditions d'équilibre du treuil en supposant cette machine sollicitée par une puissance $P$ tangente à la roue et par une résistance $Q$ tangente à la section droite de l'arbre.

Soient $R$ et $r$ les rayons de la roue et du cylindre ; les moments de la puissance et de la résistance, par rapport à l'axe de rotation, sont en valeur absolue $P \times R$ et $Q \times r$ ; la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que la somme algébrique de ces moments soit nulle ;



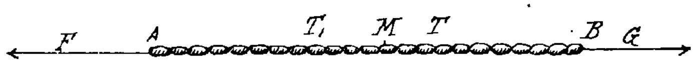

c'est-à-dire 1° que la puissance et la résistance tendent à faire tourner le treuil en sens contraire ; 2° que l'on ait :

$$P.R - Q.r = 0.$$

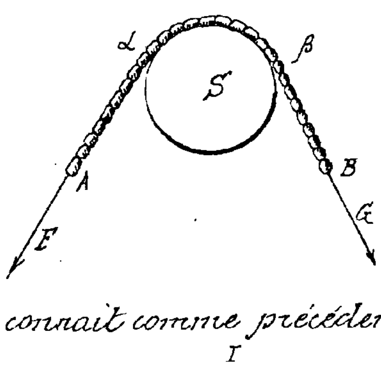
La puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

Dans la pratique, la résistance est appliquée par l'intermédiaire d'une corde. Comme nous utiliserons encore les cordes tout à l'heure, nous dirons quelques mots sur leur mode d'action.

Une corde ne résiste qu'aux efforts de traction. Autrement dit, pour que deux forces F et G, appliquées aux extrémités d'une corde rectiligne tendue AB, se fassent équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient égales et dirigées suivant les prolongements de la corde.




Partageons, par la pensée, la corde en deux morceaux AM et BM; la partie AM étant en équilibre sous l'action de la force F, le point M est soumis à l'action d'une force $T = F$ dirigée en sens inverse de F; de même la partie BM est soumise à une force $T_1 = G$ appliquée au point M en sens inverse de G. Donc au point M sont appliquées deux forces contraires égales à la valeur commune de F et G. Cette valeur des deux forces T et $T_1$ est la <u>tension de la corde</u>. Elle tend à rompre la corde au point M. D'après cela, la tension est la même tout le long d'une corde tendue libre.




Lorsqu'une corde s'appuie sur un obstacle, nous admettrons encore (en disant qu'il n'y a pas de frottement) que la condition d'équilibre est que les tractions F et G soient égales et appliquées suivant les prolongements des brins α A et β B. On reconnaît comme précédemment que la tension est la même tout le long de la corde.


Si une corde est fixée par un de ses points I, une force F appliquée au brin AI ne se communique pas à la partie IB où la tension peut être nulle et ne dépend que des forces appliquées au brin IB.

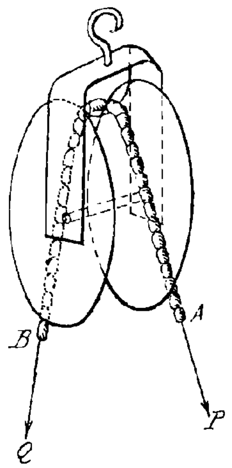
Ceci admis, dans le treuil à axe horizontal un poids Q suspendu à une extrémité d'une corde qui s'enroule sur l'arbre du treuil, et dont l'autre extrémité est fixée sur ce cylindre.— Cette force Q transmise en grandeur au point d'attache dans la direction de la corde en ce point constitue la <u>résistance</u>.

Dans le treuil des carriers, la puissance est un poids P (poids d'un homme) appliqué en un point M de la circonférence de la roue; soit $\alpha$ l'angle du rayon du point M avec l'horizon; le moment de la puissance est $P.R\cos\alpha$. D'où la condition d'équilibre: $$P.R\cos.\alpha = Q.r.$$

<u>Poulies et moufles.</u> Les poulies sont aussi des corps mobiles autour d'axes fixes.

Une <u>poulie</u> est un disque circulaire sur le pourtour duquel est creusée une rainure en forme de demi-tore qu'on appelle la <u>gorge</u> de la poulie et qui est destinée à recevoir une corde s'appliquant sur une portion de son contour. Elle peut tourner autour d'un axe de rotation qui coïncide avec l'axe de la poulie. Les tourillons de cet axe traversent deux ouvertures circulaires pratiquées dans deux plaques métalliques verticales, reliées entre elles par une pièce horizontale; l'ensemble de ces pièces forme un étrier renversé dit <u>chape</u> de la poulie; la chape porte un crochet qui permet de suspendre la poulie à un point fixe.

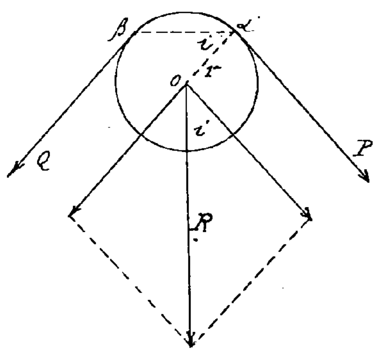
La poulie a simplement pour effet de changer la direction d'une force sans changer sa grandeur. En effet, soient P et Q la puissance et la résistance respectivement appliquées aux deux extrémités de la corde A.




l'état d'équilibre, $P$ et $Q$ sont égales d'après ce qu'on a admis sur le mode d'action d'une corde. On pourrait d'ailleurs s'en rendre compte en considérant l'ensemble de la poulie et de la corde comme solidifié et en écrivant la condition d'équilibre d'un corps à axe fixe.

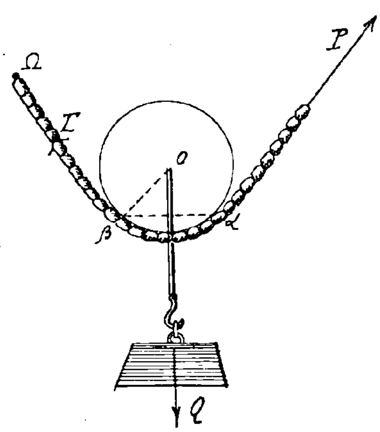
La poulie est <u>fixe</u> quand la chappe est suspendue par son crochet.

La charge de l'axe de la poulie est la résultante de $P$ et $Q$ transportées en $O$; si $2i$ est l'angle des deux brins cette charge est, $R = 2P\cos i$;




d'où : $\frac{R}{P} = \frac{2r\cos i}{r}$ ; la charge est à la puissance ce que la corde de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie ; si les deux brins sont parallèles $R = 2P$.

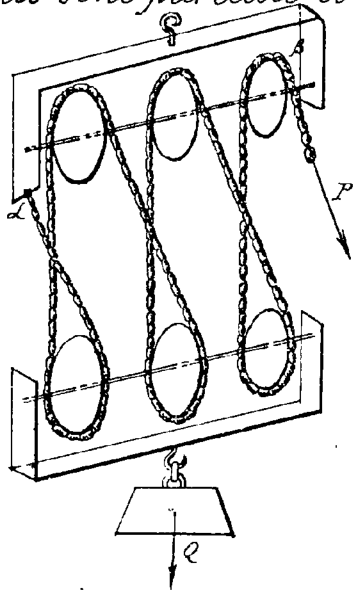
Dans la <u>poulie mobile</u>, une extrémité de la corde est attachée à un point fixe $\Omega$ et la puissance $P$ agit à l'autre extrémité ; la résistance appliquée au crochet de la chappe peut être transportée au centre de la poulie.— La poulie est alors sollicitée par trois forces : $P$, $Q$ et la tension $T$ du brin $\beta\Omega$. Dans l'état d'équilibre $T = P$. La condition d'équilibre résulte de ce qui a été dit ci-dessus : $Q = 2P\cos i$. La résistance est double de la puissance quand les deux brins de la corde sont parallèles.




La poulie, fixe ou mobile, sert à soulever des fardeaux.

Mais le plus souvent on l'utilise sous la forme de <u>moufles</u>.

On appelle <u>moufle</u> ou <u>palan</u> un ensemble de poulies fixes montées dans une même chape fixe et reliées par une corde continue à pareil nombre de poulies montées dans une chape mobile. Toutes les poulies sont pareilles et les brins sensiblement parallèles.




La figure ci-contre indique la disposition d'un palan formé de trois poulies fixes montées dans une chape supérieure et de trois poulies mobiles montées sur une chape inférieure et liées aux poulies fixes par une corde continue qui part de la chape fixe en α et passe d'abord sous une poulie mobile, puis sur la poulie fixe correspondante et ainsi de suite. La force à vaincre est un poids à soulever Q attaché, par un crochet, à la chape inférieure, tandis que la chape supérieure est suspendue à un point fixe. Il résulte de ce qu'on a dit pour la poulie que tous les brins ont une même tension égale à celle que leur donne la puissance P, donc égale à P. Comme les brins sont sensiblement verticaux, chacun d'eux supporte le sixième du poids Q donc : $P = \frac{Q}{6}$

S'il y avait $n$ poulies à chaque chape, on aurait $P = \frac{Q}{2n}$.

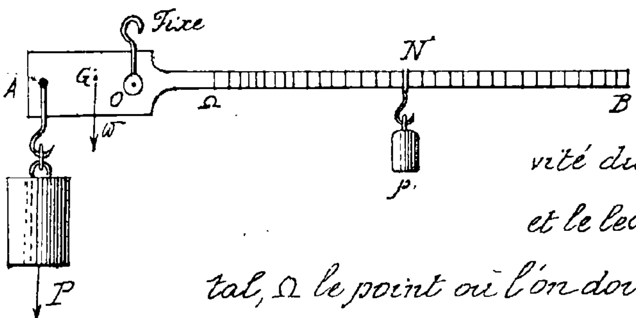
B <u>Appareils de pesage</u>. Une <u>balance</u> est un instrument destiné à comparer des poids et par suite à les mesurer. La théorie de la plupart des balances n'est qu'une application de la théorie du levier. La puissance est un poids étalonné connu le rapport des bras de levier est connu par la construction de la balance; l'équation d'équilibre du levier définit alors la résistance

La balance ordinaire se compose d'un levier droit de premier genre, nommé fléau, et de plateaux suspendus aux extrémités du fléau.

Lorsque les plateaux d'une balance ne sont pas chargés, le fléau doit être horizontal et le centre de gravité de l'instrument doit être sur la verticale du point d'appui et au dessous de ce point.

Pour qu'une balance soit juste, il faut que le fléau reste horizontal lorsque les plateaux sont chargés de poids égaux. — Cette condition nécessite l'égalité des bras du fléau.

La balance romaine se compose: 1° d'un levier de premier genre; 2° d'un plateau ou d'un crochet destiné à supporter les poids à évaluer, et suspendu à l'extrémité de l'un des bras du levier; 3° d'un poids invariable p. qu'on peut faire glisser le long de l'autre bras du levier.




Soit O le point de suspension de l'instrument, G le centre de gravité du système formé par le crochet et le levier lorsque celui-ci est horizontal, Ω le point où l'on doit placer le poids p. pour maintenir cette horizontalité lorsque le crochet n'est pas chargé, N le point où l'on doit placer le poids p pour faire équilibre à un poids P attaché au crochet.

On a, en désignant par ϖ le poids du levier et du crochet, pour équation d'équilibre dans les deux cas:

$$\overline{OG}.\overline{\varpi} = \overline{O\Omega}.p$$

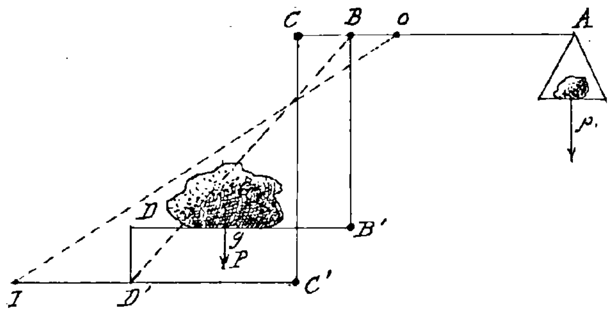
$$OG.\overline{\varpi} + P.OA = (O\Omega + \Omega N).p.$$

Par différence, on obtient:

$$P = p.\frac{\Omega N}{OA}..$$

Par suite, si, sur le bras de levier OB et à partir de $\Omega$, on a porté des longueurs consécutives égales à OA, en lisant la division sur laquelle est placé p lorsqu'il fait équilibre à P, on saura combien le second poids contient de fois le premier.

La <u>bascule du commerce</u> ou balance de <u>Quintenz</u> (du nom de son inventeur) se compose essentiellement:




1° d'un levier droit de premier genre AOBC; O est le point d'appui; A est le point de suspension d'un plateau destiné à recevoir des poids marqués; en B et C sont articulées des tringles BB' et CC'; d'ordinaire on a: $\overline{OA} = 10.\overline{OB}$.

2° d'un autre levier droit ID'C'; I est le point d'appui; l'extrémité C' est articulée à l'extrémité inférieure de la tringle CC', et l'on a:

$$\frac{ID'}{IC'} = \frac{OB}{OC},$$

c'est à dire que les droites OI et BD se coupent sur CC', les deux leviers étant parallèles.

3° d'un plateau DB' destiné à recevoir les corps à peser et qui est supporté d'une part par la tige BB', d'autre part par un couteau DD' dont l'arête

D repose sur le levier précédent. Lorsque la bascule n'est pas chargée, le levier AOBC doit être horizontal comme le plateau (par construction)

Lorsque la bascule est chargée, et lorsque ce levier est horizontal, le poids P placé en un point quelconque du plateau DB est égal à dix fois le poids p placé dans le plateau fixe en A, et nécessaire pour rétablir l'horizontalité du levier.

Soit en effet g la projection du centre de gravité G du corps, sur le plateau de la bascule. Le poids P peut être remplacé par deux forces verticales $P_1$ et $P_2$, appliquées l'une en D', l'autre en B et ayant pour valeurs :

$$P_1 = P.\frac{gB'}{DB'} \quad , \qquad P_2 = P.\frac{gD}{DB'} .$$

$P_1$ appliquée au second levier en D' peut se décomposer en deux forces l'une appliquée en I et détruite par la fixité de ce point, l'autre appliquée en C' et ayant pour valeur :

$$P_3 = P_1\frac{ID'}{IC'} = P \times \frac{gB'}{DB'} \times \frac{ID'}{IC'}$$

ou en tenant compte de l'hypothèse de construction :

$$P_3 = P \times \frac{gB'}{DB'} \times \frac{OB}{OC} .$$

Cette force transmise au premier levier en C peut aussi se décomposer en deux forces verticales, l'une appliquée en O et détruite par la fixité de ce point, l'autre appliquée en B et ayant pour valeur :

$$P_4 = P_3 \times \frac{OC}{OB} = P.\frac{gB'}{DB'} .$$

Ainsi l'action du poids sur le plateau de la bascule équivaut à une force $(P_2 + P_4)$ appliquée en B. Or :

$$P_2 + P_4 = P\frac{gD + gB'}{DB'} = P.$$

Donc le poids P, quelle que soit sa position sur le plateau, agit sur la bascule comme s'il était immédiatement appliqué au point B. L'équation d'équilibre du levier donne alors :

$$P \times OB = p \times OA ;$$

ou :

$$P = p \cdot \frac{OA}{OB} = 10p.$$

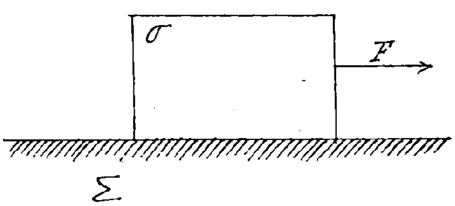
La règle énoncée plus haut est ainsi justifiée.

Les <u>bascules des gares de chemin de fer</u> sont une combinaison du principe de la romaine avec celui de la bascule.

# Appendice

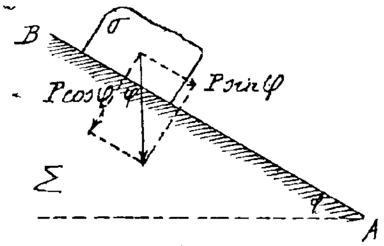
## Notions sur le frottement

Dans l'étude de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné, nous avons admis qu'un plan sur lequel est posé un point matériel ne s'oppose à aucun mouvement du point sur la surface; un tel plan a été dit parfaitement poli.— En réalité, il n'en est jamais ainsi; nous allons examiner brièvement ce qui se produit quand on essaie de déplacer un corps sur une surface naturelle.




Soit un corps σ en contact par une face plane avec une table horizontale fixe Σ. On constate qu'une force horizontale quelconque appliquée à σ ne parvient pas à déplacer ce corps: tant que cette force reste en dessous d'un certain minimum, σ reste au repos.— Par conséquent tout se passe comme s'il existait une certaine force horizontale dépendant de la nature des surfaces en contact et dirigée en sens inverse du déplacement que l'on cherche à produire. Cette force, dite <u>force de frottement</u> au départ, a même intensité que la force F au moment où celle-ci, graduellement croissante à partir de zéro, produit le déplacement.

On attribue l'existence de cette force à ce que les corps naturels sont plus ou moins compressibles, et toujours terminés par des surfaces qui présentent une multitude de petites aspérités.




Considérons maintenant un corps pesant placé sur un plan AB d'abord horizontal, mais mobile autour d'une horizontale de trace A. Faisons tourner ce plan d'une manière continue; le corps ne se déplacera que pour une certaine inclinaison φ du plan.

Au moment où le mouvement est sur le point de se produire, la composante P sin φ du poids du corps est la force qui tend à faire glisser le corps: elle mesure la force de frottement.

Lois du frottement au départ. Ces lois sont dues à Amontons [1] (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1699, p. 206); elles ont été vérifiées avec plus de précision par Coulomb [2] (Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences, Tome X - p. 163; 1785) puis par Arthur Morin [3] (Id. Tome IV - 2e série - 1833). En voici l'énoncé:

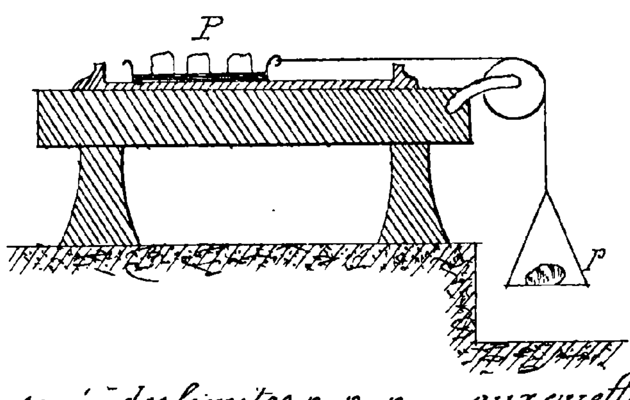
(1) Guillaume Amontons (Paris - 1663 - 1705) est l'inventeur du système de télégraphie aérienne découvert par Chappe un siècle plus tard.

(2) Coulomb, officier du génie et plus tard membre de l'Institut, a fait ses expériences à Rochefort en 1781. Il est mort en 1806 inspecteur général de l'Université.

(3) Le général Morin (1795 - 1880) a donné son nom à un appareil imaginé par Poncelet et permettant l'étude précise de la loi de la chute des graves. Ses expériences sur le frottement ont été faites à Metz de 1831 à 1834.

<u>1^e Loi</u>. – <u>Le frottement au départ est proportionnel à la pression normale</u>
<u>2^e Loi</u>. – <u>Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.</u>
<u>3^e Loi</u>. – <u>Il dépend de la nature et du degré de poli des surfaces en contact ainsi que de la nature des enduits.</u>

Les expériences faites par Amontons consistaient à chercher l'inclinaison sous laquelle les divers corps commencent à descendre sur un plan incliné. Les vérifications de Coulomb se firent ainsi. Sur la face supérieure d'une table formée de deux madriers parallèles et juxtaposés, était fixée une lame de la matière sur laquelle le corps devait frotter. Une caisse sous le fond de laquelle était fixée une lame d'une autre matière reposait sur les madriers. Un fil attaché à la caisse et passant sur une poulie fixe portait à l'autre extrémité un plateau.




Pour vérifier la 1^ère loi, Coulomb plaçait des poids successifs $P_1$, $P_2$, $P_3$ ...... dans la caisse (y compris le poids de la caisse) et déposait dans le plateau des poids graduellement croissants jusqu'à des limites $p_1, p_2, p_3$ ...... auxquelles correspondait le glissement de la caisse. Il constatait ainsi que $\frac{p_1}{P_1} = \frac{p_2}{P_2} = \frac{p_3}{P_3} \dots = \text{Const.}$ Or $P_1, P_2 \dots$ mesurent la pression normale et $p_1, p_2 \dots$ la force de frottement. D'où la vérification de la première loi.

En faisant varier l'étendue de la lame du fond de la caisse, on obtenait le <u>même</u> rapport constant. D'où la vérification de la 2^e loi.

En faisant varier la nature des surfaces, cette constante changeait.

On appelle coefficient de frottement au départ $f$ le rapport constant de la force de frottement au départ à la pression normale.

Dans l'expérience du plan incliné d'Amontons 1, la force de frottement est $P \sin \varphi$ et la pression normale $P \cos \varphi$. Donc :

$$f = \frac{P \sin \varphi}{P \cos \varphi} = \operatorname{Tang.} \varphi$$

$\varphi$ est dit l'angle de frottement au départ.

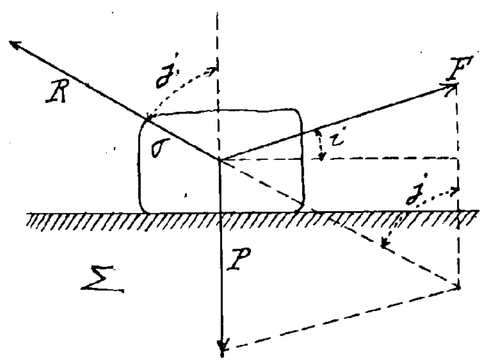
Morin a étendu les expériences de Coulomb à un grand nombre de corps et y a introduit divers perfectionnements importants. Nous empruntons à ses « Leçons de Mécanique pratique » les valeurs suivantes de $f$ et de $\varphi$.

| Nature des Surfaces Frottantes. | Coef.t de frottement au départ $f$. | Angle de frottement $\varphi$ |
|---|---|---|
| Bois sur bois à sec | 0,50 | 26° 40′ |
| " " avec enduit gras | 0,20 | 11° 20′ |
| Bois sur métal à sec | 0,60 | 31° |
| " " avec enduit gras | 0,12 | 6° 50′ |
| Métal sur métal à sec | 0,18 | 10° 10′ |
| " " avec enduit gras | 0,10 | 5° 40′ |
| Corde sur bois à sec | 0,65 | 33° |
| " " surfaces mouillées d'eau | 0,87 | 41° |
| Courroie de cuir sur bois à sec | 0,47 | 25° 10′ |
| " " " métal à sec | 0,54 | 28° 20′ |
| " " " " avec enduit gras | 0,28 | 15° 40′ |

On donnera pour éclaircir ces généralités une application simple.

Soit à déplacer un corps de poids P reposant sur un plan horizontal en faisant agir une force F rencontrant la verticale de son centre de gravité et inclinée d'un angle $i$ sur le plan.

Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre F, le coefficient de frottement au départ étant $f$?




Au moment du départ, la composante normale au plan de la force totale est

$$P - F \sin i ;$$

la composante tangentielle est $F \cos i$

Donc :

$$\frac{F \cos i}{P - F \sin i} = f.$$

Soit $\varphi$ l'angle de frottement ; $f = \tan \varphi$

$$F = \frac{f.P}{\cos i + f \sin i} = P. \frac{\sin \varphi}{\cos (i - \varphi)} \qquad (1)$$

Le minimum de F a lieu quand $\cos (i - \varphi)$ est l'unité, pour $i = \varphi$

Ex. numérique : Fonte sur bois à sec $\varphi = 31°$ ; $\sin \varphi = 0,515$ ; l'effort minimum est alors $0.515\ P$.

Au moment du démarrage, pour une accélération $i$ de F, la réaction est directement opposée à la résultante de F et de P ; soit $j$ son inclinaison sur la verticale. On a pour l'équilibre :

$$\frac{F}{\sin (\pi - j)} = \frac{P}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - i + j\right]} ;$$

d'où : $F = P. \dfrac{\tan j}{\cos i + \tan j . \sin i}$ ,

et par comparaison avec (1) : $\tan j = f$. Par suite $\varphi = j$.

L'angle de frottement n'est donc autre chose que l'angle que fait la réaction véritable du plan avec la verticale.

# Problèmes

Des exercices analogues à ceux qui forment la série suivante sont proposés aux élèves et résolus dans les interrogations.

1 _ On considère un mobile animé d'un mouvement rectiligne dont l'équation horaire est : $s = t^3 - 12t^2 + 48t$.

(unités : mètre et seconde). Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les commencements de la 1re et la 2e seconde. _ de la 3e et de la 5e seconde. _ de la 1e et de la 7e seconde.

Calculer la vitesse vraie à la fin de la 1re, de la 3e de la 5e et de la 7e seconde

Calculer l'accélération vraie aux mêmes instants.

(II) Deux points matériels pesants, abandonnés successivement en un même lieu, ~~distants de 0m,000001~~, tombent librement dans le vide suivant la verticale (leur écartement est de 0m,000001 au départ du second). Calculer leur écartement quand le premier est tombé de 300 mètres. _ (Explication de la division de l'eau dans les grandes chutes d'eau)

(III) Un projectile se déplaçant perpendiculairement à la voie rectiligne suivie par un wagon a traversé celui-ci de part en part. Connaissant la vitesse constante du wagon et les positions occupées par les traces du projectile, déterminer la vitesse du projectile supposé animé d'un mouvement uniforme.

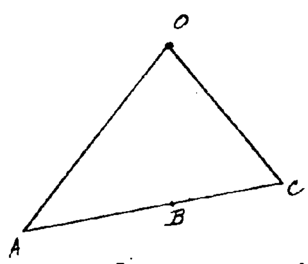
(IV) Un corps du poids de 75 mégadynes tombe d'une hauteur de 130cm sur un sol qui oppose à la continuation de son mouvement une résistance constante de 5000 mégadynes. Jusqu'à quelle profondeur s'y enfoncera-t-il ?

(V) Une boîte cubique sans couvercle est suspendue par un des sommets de la face supérieure ; elle est vide et ses parois sont d'épaisseur uniforme, mais négligeable. Trouver, dans la position d'équilibre, l'angle que fait avec la verticale la diagonale du point de suspension ($\operatorname{tang} x = \frac{5\sqrt{2}}{6}$)

(VI) Dans un plan vertical, on donne deux points fixes A et B. La distance horizontale des deux points est $\underline{d}$, leur distance verticale est $\underline{h}$. Aux deux points A et B est attaché un fil de longueur $l > AB$. Ce fil supporte une poulie P dont le rayon est négligeable et dont la chape porte un poids Q. On demande : 1° de construire géométriquement la position du fil en équilibre, 2° d'exprimer sa tension au moyen des données ; 3° de calculer cette tension lorsque

$d = 8^{m},25 \qquad h = 4^{m},24 ; \qquad l = 12^{m},42 ; \qquad Q = 1937$ dynes.

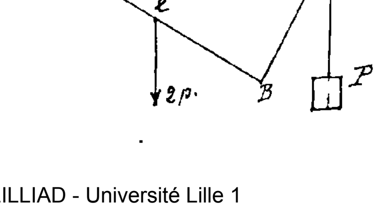
(VII) Une barre rectiligne rigide ABC est formée de 2 parties toutes deux homogènes




l'une AB de longueur L et de poids P, l'autre BC, de longueur l et de poids p. On réunit ses deux extrémités par un fil de longueur $\underline{d}$ que l'on peut faire passer sur un clou O sur lequel il peut glisser sans frottement. Déterminer la position d'équilibre. (on suppose négligeable la section de la barre.)

(VIII) Le pèse-lettre est composé d'un levier solidaire d'une aiguille qui est verticale dans la position d'équilibre, en l'absence de toute charge. On place une charge P sur le plateau que porte à cet effet le peson. L'aiguille s'est déplacée d'un angle i. Démontrer que $\operatorname{tg} i$ est proportionnelle à P. En déduire un mode de graduation de l'instrument.

(IX) Une barre AB pesante, de longueur $l$, de poids $2p$, peut tourner librement




autour d'une de ses extrémités A ; à l'autre bout est attaché un fil sans masse, qui passe sur une poulie C, de rayon négligeable et qui