

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE
DE
LA LUMIÈRE

PAR
LE D^r O. TUMLIRZ

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ ALLEMANDE DE PRAGUE.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR
G. VAN DER MENSBRUGGHE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE
DE BELGIQUE.

LA TRADUCTION FRANÇAISE EST ENRICHIE D'ADDITIONS
FAITES PAR L'AUTEUR.

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN,
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE,
8 - rue de la Sorbonne - 8

1892

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE
DE
LA LUMIÈRE

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE
DE
LA LUMIÈRE

PAR

LE D^r O. TUMLIRZ

PRIVATDOCENT A L'UNIVERSITÉ ALLEMANDE DE PRAGUE.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

G. VAN DER MENSBRUGGHE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE
DE BELGIQUE.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN,

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE,

8 — rue de la Sorbonne — 8

1892

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Bien longtemps après que Rumford, Davy, Marc Seguin et d'autres eurent exprimé leurs idées sur les rapports entre le travail et la chaleur, les physiciens méconnurent l'importance de cette corrélation; mais après les travaux si remarquables de Robert Mayer sur l'équivalence de la chaleur et du travail, et surtout après les expériences si variées du Dr Joule pour mettre cette équivalence en pleine lumière, le doute n'était plus permis et l'indifférence avait perdu ses droits; de toutes parts, on finit par étudier le merveilleux rapport entre la chaleur dépensée et le travail gagné ou réciproquement, et la découverte de Mayer, confirmée d'une manière si brillante par les expériences de Joule, fut proclamée par tous les savants.

De même, les idées de Gauss et de W. Weber sur la propagation successive des phénomènes électrodynamiques, ainsi que les vues de Riemann sur la manière dont se propage en différents points de l'espace la force ayant son siège dans une particule électrisée, ne parvenaient pas à soulever quelque peu le voile mystérieux qui cachait la nature de l'électricité, de cet agent dont le nom était sur toutes les lèvres, et que personne ne comprenait même d'une façon rudimentaire. Mais ce qui vint frapper vivement tous les esprits, c'est l'idée si féconde émise par Clerk Maxwell, d'après laquelle *les vibrations lumineuses sont iden-*

tiques à des courants électriques. Aussi, lorsque par l'organe de l'éminent Dr Hertz, l'observation directe eut fait entendre sa voix si puissante et si persuasive, et proclamé la propagation ondulatoire de l'électricité, cette voix retentit aussitôt dans le monde savant tout entier : partout on se mit à l'étude de cette étonnante mais bien difficile théorie, et l'on parvint à démontrer qu'un phénomène lumineux n'est en somme qu'un phénomène électromagnétique, et que l'électricité se réfléchit, se réfracte et se polarise comme la lumière.

C'est pour obéir à l'impulsion nouvelle que j'ai traduit le livre si intéressant du Dr Tumlriz, où se trouvent réunis les éléments épars de la théorie électromagnétique de la lumière; je ne destinais mon modeste travail qu'à mon propre enseignement, mais plusieurs collègues m'ont affirmé que ma traduction pourrait être fort utile à un grand nombre de lecteurs peu familiarisés avec la langue allemande : c'est ce qui m'a déterminé à la publier.

Sera-t-elle bien accueillie, même après huit ans écoulés depuis l'apparition de l'œuvre originale? J'ose l'espérer; car de même que le livre si consciencieux du Dr Tumlriz pourra être comparé à l'ouvrage intéressant dont M. le Dr L. Boltzmann vient de faire paraître la première partie et qui a pour titre : *Leçons sur la théorie de l'électricité et de la lumière d'après Maxwell* (1), de même la traduction publiée aujourd'hui sera utilement mise en parallèle avec les travaux récents de M. Poincaré sur le même sujet.

Gand, 8 septembre 1891.

G. VAN DER MENSBRUGGHE.

(1) *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, I Theil. Leipzig, J.-A. Barth, 1891.

DÉDICACE DE L'OUVRAGE ALLEMAND.

Comme témoignage de profond respect et de vive gratitude,
l'auteur a dédié cet ouvrage à son vénérable maître et protecteur

MONSIEUR LE D^r ERNEST MACH,

CONSEILLER D'ÉTAT IMPÉRIAL,
PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ ALLEMANDE DE PRAGUE,
MEMBRE EFFECTIF DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE VIENNE.

PRÉFACE

En recherchant quels sont les phénomènes similaires en acoustique et en optique, on a suivi une marche qui s'est montrée doublement fructueuse ; car non seulement elle a conduit à la découverte de nombreuses propriétés de la lumière, mais encore, par réciprocité, l'interprétation très claire des lois de certains phénomènes lumineux (réflexion, réfraction) a fait reconnaître comme exactes les lois des phénomènes acoustiques analogues et qui ne pouvaient être réalisés avec une netteté absolue par l'expérience. Quant à la théorie électromagnétique de la lumière, c'est la doctrine des phénomènes électromagnétiques qui sert de guide à l'optique. Par là les deux domaines ne peuvent que gagner ; cela est hors de doute. Car la théorie électromagnétique de la lumière tend à faire comparer entre eux les faits expérimentaux qui dans les deux branches, optique et électricité, ont été acquis non seulement en très grand nombre, mais encore par des méthodes tout à fait différentes. Il suit de là que, d'une part, bien des phénomènes optiques deviennent plus compréhensibles ; d'autre part, surgissent des questions dont l'explication exigera nos connaissances en électricité. C'est sur cette haute importance de la théorie nouvelle que mon attention a été appelée d'abord par mon vénérable

maitre, M. le professeur Mach; c'est encore à lui que je dois la première idée du travail actuel, dont le but principal consiste à offrir une image aussi complète que possible de l'état actuel de la science aux étudiants forcés jusqu'à présent de puiser leurs connaissances dans des mémoires fort épars (Maxwell, Lorenz, Helmholtz, Lorentz, Boltzmann, etc.).

La première partie de l'ouvrage traite des propositions générales sur le mouvement de l'électricité dans des conducteurs en repos; la seconde a pour objet la théorie électromagnétique de la lumière. Dans la déduction des équations du mouvement de l'électricité, on ne suppose que la connaissance des principes fondamentaux de la théorie de la fonction potentielle; voilà pourquoi la déduction ci-dessus est précédée de plusieurs propositions sur les propriétés principales des diélectriques, sur les phénomènes de l'électromagnétisme et de l'induction dans les courants fermés et sur le potentiel électrodynamique d'un système de courants fermés ou non fermés sur lui-même.

La seconde partie explique les lois de la propagation de la lumière dans les isolants isotropes ou anisotropes et dans les conducteurs isotropes, puis les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface limite des isolants ou des conducteurs isotropes et à la surface des milieux anisotropes. Quant à l'ordre et à l'exposition des matières, l'auteur ne s'est pas borné à réunir systématiquement ce qu'on a trouvé jusqu'ici, mais il a donné aussi bon nombre de développements qui lui sont propres, notamment dans la théorie de la réflexion et de la réfraction.

O. TUMLIRZ.

Prague, février 1883.

INTRODUCTION

La question de savoir en quoi consiste la lumière a exercé depuis longtemps la sagacité de l'homme et a reçu des solutions très nombreuses suivant l'état des connaissances naturelles. Toutefois, jusqu'à présent, il n'y a eu que deux manières de voir qui aient fait époque. L'une, la *théorie de l'émission*, regarde comme cause des phénomènes lumineux une matière très ténue qui s'échappe du corps éclairant; l'autre, la *théorie des ondulations*, invoque le mouvement vibratoire d'un milieu extrêmement subtil, très élastique, remplissant l'univers entier, et nommé *éther*. Qui a exprimé le premier chacune de ces idées? Nous l'ignorons; mais, en nous rangeant à l'avis de Verdet, nous devons regarder comme fondateur d'une théorie celui qui l'a rendue vivace par l'établissement d'un principe fécond, celui qui est parvenu à bâtir un édifice scientifique avec les éléments qui, avant lui, n'étaient que simplement soupçonnés; incontestablement, d'après ces vues, les fondateurs des deux théories de la lumière sont, d'un côté, Newton, de l'autre, Huyghens. Bien longtemps les deux théories ont été rivales, jusqu'à ce qu'enfin la théorie des ondulations obtint définitivement la prépondérance, grâce à la critique sévère de Fresnel et aux résultats des expériences de Foucault; aujourd'hui, cette théorie sert généralement de base à l'explication des phénomènes optiques.

Tout récemment a surgi une vue entièrement nouvelle sur la nature de la lumière, savoir, l'idée que la lumière est un phénomène électromagnétique, ou que les *vibrations de la lumière sont identiques aux courants électriques*. Cette vue doit son origine à la

conviction qui, dans les derniers temps, a gagné de plus en plus de terrain, que toutes les forces ont une seule et même source, puisqu'on a pu démontrer tant de rapports entre les différentes forces naturelles, entre l'électricité et le magnétisme, entre la chaleur, la lumière et les forces moléculaires ou chimiques.

L'idée de l'identité des vibrations lumineuses et des courants électriques a été développée de deux manières différentes par Clerk Maxwell (*Philos. Mag.*, 1865; *Treatise on Electricity and Magnetism*, art. 781-805, 1873), et par Lorenz (*Ann. de Poggendorff*, t. CXXXI, p. 243, 1867). Ce dernier est arrivé à cette assimilation si importante en ajoutant aux équations du mouvement des courants électriques, établies par Kirchhoff (*Ann. de Pogg.*, t. CII, p. 529, 1857), plusieurs termes qui n'ont aucune influence sensible sur les résultats constatés par l'expérience. Pour arriver à son but, il donna à la fonction potentielle une forme où se trouve exprimée l'hypothèse que *l'action d'une masse électrique sur les autres n'est pas instantanée, mais que la fonction potentielle produite par un point x', y', z' sur un autre point x, y, z , situé à la distance r , est égale à*

$$\frac{f\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)}{r},$$

lorsque, en ce point, au temps t , il se trouve la masse $-f(t)$; en d'autres termes, que la force qui, au temps t , a son siège dans une particule électrique, ne commence à agir sur une autre particule semblable située à une distance finie qu'à une époque postérieure $t + \Delta t$, et que l'action se propage avec la vitesse constante α (égale à la vitesse de la lumière).

La même hypothèse se trouve exposée dans un Mémoire de Riemann, présenté le 10 février 1858 à la Société royale des Sciences de Goettingen, et retiré plus tard; ce travail ne fut imprimé qu'après la mort de l'auteur dans les *Ann. de Pogg.* (t. CXXXI, p. 237, 1867). Riemann déduit le potentiel électrodynamique de deux courants électriques d'une forme modifiée de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

où V désigne la fonction potentielle électrostatique, ρ la densité des masses électriques et α une vitesse. Cette équation est de la même forme que celle qui exprime la propagation d'ondes et d'autres perturbations d'équilibre des milieux élastiques; elle comprend aussi complètement l'hypothèse précédente. En appliquant à la propagation des forces électriques l'équation différentielle ci-dessus, qui est identique à celle établie pour la propagation de la lumière et de la chaleur rayonnante, Riemann croyait démontrer une connexion intime entre la théorie de l'électricité et du magnétisme, d'une part, et celle de la lumière, d'autre part. (Ce travail a été vérifié par Clausius, qui n'admettait pas la justesse des développements analytiques.)

Gauss avait déjà l'idée d'expliquer les phénomènes électrodynamiques par une extension dans le temps des actions électriques. En essayant de rattacher l'électrodynamique à l'électrostatique, Gauss découvrit le premier, en juillet 1835 (1), la loi fondamentale des actions électriques, savoir, que deux particules électriques à l'état de mouvement relatif s'attirent ou se repoussent, mais non de la même manière que si elles se trouvent à l'état de repos relatif (2). Ainsi, tandis que $\frac{ee'}{r^2}$ est la grandeur de la force exercée entre deux particules électriques e, e' à la distance r et à l'état de repos relatif, on a, pour l'état de mouvement relatif,

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left\{ u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \right],$$

ou, suivant Weber,

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left\{ r \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \right],$$

où u désigne la vitesse relative des particules, t le temps et c le nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique. C'est grâce à cette modification que naissent les forces

(1) *Oeuvres de Gauss*, Goettingen, édition 1867, vol. V, p. 616.

(2) Cette loi ne fut pas publiée du vivant de Gauss, de sorte que, indépendamment de celui-ci, W. Weber a donné en 1846 la même loi dans ses *Electrodynamische Maassbestimmungen*.

électrodynamiques. Gauss a cherché aussi à établir théoriquement cette modification en considérant une action mutuelle qui ne s'exerce pas instantanément, mais *se propage avec le temps d'une manière analogue à la lumière*. Malheureusement il n'a pu mener cette recherche à bonne fin (1).

Quant à Maxwell, il arriva à cette relation extrêmement remarquable entre l'électricité et la lumière par sa théorie des phénomènes électriques et magnétiques. Nous pouvons considérer en effet l'action mutuelle de corps électrisés ou aimantés soit comme le résultat d'une action directe à distance ou bien comme le résultat de l'état du milieu interposé. Maxwell nie absolument les actions à distance. Suivant lui, l'action réciproque ne se produit pas subitement, mais avec le temps par une polarisation du milieu interposé, laquelle se propage continuellement. Le milieu se trouve ainsi dans un certain état de tension caractérisé par une traction suivant les lignes de force et par une pression normale à ces lignes; si à une action électromagnétique vient se joindre encore un effet électrostatique ou réciproquement, cet état doit être regardé comme composé des états de tension qui correspondent aux deux actions. Survient-il quelque part un changement dans le champ électrique ou magnétique, soit par le mouvement ou par la décharge des conducteurs, ou par la fermeture ou l'ouverture d'un courant, l'état de tension sera modifié dans tout le milieu, et cela de telle façon que ce changement ne se produit pas instantanément en tous les points, mais se propage successivement.

La base de cette explication a été posée par Faraday, qui montra le premier que la plupart des milieux peuvent être aimantés et qu'un état semblable à une polarisation magnétique se présente aussi dans les isolants électriques, état qu'on appelle *polarisation diélectrique*. Même, suivant Faraday, l'éther lumineux est susceptible d'une polarisation magnétique ou diélectrique. Maxwell donna aux idées de Faraday une expression mathématique et parvint ainsi au résultat extrêmement remarquable que des perturbations électriques se propagent dans les diélectriques suivant des ondes transversales avec une vitesse égale à celle de la lumière. Maxwell montra ensuite que

(1) Comparez la lettre de Gauss à W. Weber, du 19 mars 1845. (*Œuvres de Gauss*, vol. V, p. 620.)

le milieu qui transmet l'action mutuelle est susceptible de deux formes d'énergie, savoir l'énergie électrostatique et l'énergie électrocinétique. Si maintenant nous comparons ce milieu avec celui qui transmet les phénomènes lumineux, nous voyons que tous deux jouissent des mêmes propriétés :

1^o La vitesse de propagation des perturbations électriques est la même que celle de la lumière et cela non seulement dans l'air, mais encore dans d'autres corps transparents ;

2^o Le milieu qui transmet les phénomènes lumineux est aussi susceptible de prendre deux formes d'énergie ; car lorsqu'un corps éclairant rayonne de la lumière, il envoie par là une certaine quantité d'énergie ; la lumière est-elle absorbée par un corps, il s'échauffe, preuve qu'il a reçu de l'énergie dans son intérieur. Conséquemment, pendant l'intervalle la lumière doit avoir existé comme énergie dans le milieu interposé. Suivant la théorie des ondulations, cette énergie se compose de la partie potentielle et de la partie cinétique, par conséquent aussi de deux espèces d'énergie. La première, qui découle du déplacement relatif des particules élémentaires du milieu, donne lieu à l'hypothèse de l'élasticité de l'éther ; la seconde, consistant dans le mouvement vibratoire du milieu, fait conclure à la densité finie de ce dernier. Par cet accord, Maxwell se croit en droit d'admettre que *la lumière n'est autre chose qu'un courant électromagnétique.*

Cet accord se retrouve encore dans une autre relation fort importante que Maxwell n'a pas signalée et qui a été indiquée d'abord par Helmholtz, à savoir dans ce qui a lieu lors de la réflexion et de la réfraction des perturbations électriques à la surface de séparation de deux substances différentes.

Maxwell a déduit, comme il a été dit plus haut, l'accord du mouvement de l'électricité dans les diélectriques isolants avec celui de l'éther lumineux, de son hypothèse que les actions mutuelles électriques et magnétiques sont produites exclusivement par l'état de polarisation électrique ou magnétique du milieu ; mais cet accord se manifeste aussi, comme l'a fait voir Helmholtz ⁽¹⁾, de la même manière, quand on conserve l'ancienne hypothèse de l'action à distance et qu'on a égard à l'influence de la polarisation diélectrique

(1) *Journal de Borchardt*, t. LXXII, p. 57-129, 1870.

et magnétique du milieu, par laquelle cette action est augmentée ou diminuée. C'est ce dernier point de vue que nous allons conserver.

Dans ce qui va suivre, nous allons développer d'abord les équations du mouvement de l'électricité pour des corps conducteurs en repos, en leur donnant la forme générale exposée par Helmholtz ⁽¹⁾, puis nous leur donnerons une forme spéciale en posant, avec Maxwell, la constante $k = 0$.

Pour ce développement, il est fort important d'apprendre à connaître de plus près l'état de polarisation signalé plus haut. Nous commencerons donc par quelques notions fondamentales sur les propriétés des diélectriques, puis nous expliquerons les principales lois des phénomènes électromagnétiques ou de l'induction dans les courants fermés ou non fermés. Au moyen de ces propositions, nous pourrons obtenir une expression des forces agissantes électromotrices, en déduire les équations différentielles du mouvement de l'électricité et prendre celles-ci comme point de départ de la théorie électromagnétique de la lumière.

(1) *Journal de Borchardt*, t. LXXII, p. 57-129, 1870.

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

DE LA LUMIÈRE

PREMIÈRE PARTIE

Propositions générales sur le mouvement de l'électricité
dans les corps en repos.

PREMIÈRE SECTION

Propriétés principales des diélectriques.

§ 1. — Le moment électrique.

S'exerce-t-il en un point une force provenant de masses électriques distribuées dans l'espace d'une manière quelconque, nous comprenons par là la force exercée sur un très petit corps chargé de l'unité positive d'électricité, quand ce corps est amené au point en question sans troubler la distribution réelle de l'électricité. Cette force ne tend pas seulement à mettre en mouvement un corps électrisé; mais aussi l'électricité qui s'y trouve accumulée, de sorte que l'électricité positive tend à se mouvoir dans la direction de la force, la négative dans la direction opposée. Nous pouvons donc aussi désigner cette force électrique comme la force électromotrice en ce point. Si maintenant cette force agit sur un conducteur, il s'y produit un courant; mais si elle agit sur un isolant ou un diélectrique, il ne peut naître un courant; toutefois il s'ensuit une distribution électrique ou une polarisation dite *diélectrique*, absolument comme dans les

Théorie électromagnétique, etc.

corps aimantés l'influence de forces magnétiques détermine une séparation des fluides magnétiques.

Imaginons tout le diélectrique, que nous supposerons provisoirement isotropé, divisé en éléments, en cylindres infiniment petits et tels que les bases coïncident avec les surfaces de niveau et les génératrices avec les lignes de force; alors, dans tous ces éléments, les deux électricités seront séparées et repoussées vers les deux faces terminales. Quant à la position des masses électriques séparées dans l'élément, nous ferons seulement une hypothèse en vertu de laquelle l'action de celui-ci vers l'extérieur ne change que de quantités infiniment petites d'ordre supérieur, ce qui simplifie beaucoup notre exposé : nous supposerons notamment que les électricités développées soient réparties uniformément sur les deux bases du cylindre. De cette manière, il n'y a que les faces terminales de chaque élément qui paraissent chargées de quantités égales et de signes contraires, ou bien les éléments sont, comme on dit, *polarisés*.

Si nous multiplions maintenant la quantité d'électricité positive accumulée à l'une des bases par la longueur de l'élément correspondant, nous obtenons un produit qu'on appelle le *moment électrique* de l'élément cylindrique infiniment petit. Le quotient du moment électrique par le volume de l'élément représente le moment électrique par unité de volume au point x, y, z , que nous faisons coïncider avec le centre de gravité de l'élément. Nous désignons ce moment par \mathfrak{D} , et nous le supposerons, pour simplifier, proportionnel à la force électrique \mathfrak{E} agissant au point x, y, z :

$$(1) \quad \mathfrak{D} = \epsilon \cdot \mathfrak{E}$$

Le coefficient ϵ s'appelle la constante de la polarisation diélectrique et dépend de la nature du milieu.

Au fond, \mathfrak{D} n'est autre chose que la quantité d'électricité positive séparée dans l'élément, divisée par la section de l'élément cylindrique, ou la quantité d'électricité accumulée sur la surface de niveau par unité de surface ⁽¹⁾.

(1) En effet, si dq représente la quantité d'électricité répandue sur l'une des bases du cylindre de longueur λ , on a λdq pour le moment électrique de l'élément; or, par unité de volume, le moment devient $\frac{\lambda dq}{\lambda ds} = \frac{dq}{ds} = \mathfrak{D}$.

Dans les corps isotropes; les électricités se séparent dans la direction même de la force électromotrice. Mais cela n'a pas lieu pour des milieux anisotropes. Pour ceux-ci, nous admettons qu'en chaque point il y ait trois directions rectangulaires ou, comme on dit, trois directions principales, telles que, si les axes coordonnés coïncident avec elles et que $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ désignent les composantes de la force électrique suivant ces axes, la direction de la distribution électrique produite par chaque composante considérée isolément ne diffère pas de celle de cette composante même. Soient f, g, h les moments électriques par unité de volume, produits respectivement par les composantes de la force; nous pourrions alors écrire, comme pour les milieux isotropes,

$$(2) \quad f = \epsilon_1 \mathcal{E}_x, \quad g = \epsilon_2 \mathcal{E}_y, \quad h = \epsilon_3 \mathcal{E}_z,$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ représentent des constantes différentes parce que la nature du milieu doit être supposée différente suivant les trois directions principales.

Quant à ces directions, elles sont certainement les mêmes pour tous les points du milieu en général, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ pouvant varier d'un point à l'autre; toutefois il ne faut pas exclure l'hypothèse que dans beaucoup de substances les directions principales sont différentes pour différents points. Par exemple, on peut imaginer qu'une direction principale est la même pour tous les points, tandis que les autres directions principales changent continûment le long de la première.

Dans la suite, nous regarderons toujours les directions principales comme étant les mêmes en tous les points.

§ 2. — Charge électrique du milieu à l'état de polarisation.

Nous n'allons considérer particulièrement que l'action de la composante suivant l'axe des x de la force électrique, et, d'après cela, nous allons regarder tout le milieu comme partagé en éléments cylindriques parallèles à l'axe des x (fig. 1, p. 4).

Considérons quelque part deux éléments lm, mn juxtaposés. Soient $x, y, z, x + dx, y, z$ les coordonnées respectives de leurs centres de gravité, et f, g, h les moments électriques du point x, y, z . Si ω désigne la grandeur de la face m , la quantité d'électricité portée de lm

vers m est $f\omega$; au contraire, la quantité d'électricité qui arrive de

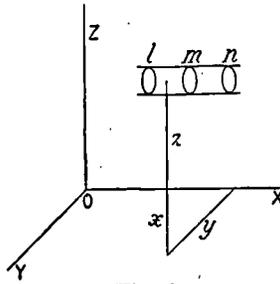


Fig. 1.

en m est $-(f + \frac{\partial f}{\partial x} dx)\omega$; donc, l'électricité libre en m est

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \omega dx.$$

Les bases de tous les éléments cylindriques sont chargées d'électricité libre. En divisant cette quantité d'électricité libre par le volume de l'élément ωdx , nous obtenons

$$-\frac{\partial f}{\partial x}$$

pour la densité de l'électricité libre au point x, y, z , produite par la composante \mathcal{E}_x . Si nous opérons de même pour l'action des composantes $\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$, nous obtenons pour la densité totale au point x, y, z

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right).$$

Considérons maintenant l'action des forces électriques à la limite de deux milieux différents. Relativement aux directions principales, admettons qu'elles soient les mêmes dans les deux milieux. Les moments électriques par unité de volume sont pour le premier milieu f, g, h , et pour le second milieu f', g', h' . Par la courbe du bord d'un élément σ (fig. 2, p. 5) de la surface limite S , dont la normale a pour cosinus de direction a, b, c , construisons des éléments cylindriques parallèles à l'axe des x de part et d'autre; les sections de ces éléments vaudront σa et les quantités d'électricité séparées par \mathcal{E}_x

vaudront $f\sigma a$, $-f\sigma a$, $f'\sigma a$, $-f'\sigma a$. L'élément σ contient donc d'un côté la quantité d'électricité $f\sigma a$ et de l'autre la quantité $-f'\sigma a$, donc l'électricité libre $(f - f')\sigma a$. En raisonnant de même pour

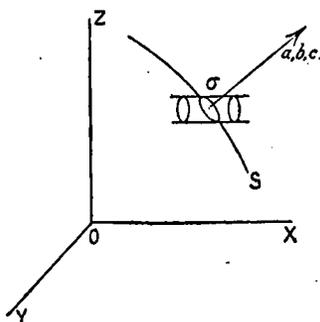


Fig. 2.

l'action des composantes \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z , nous obtenons pour l'électricité libre totale en σ l'expression

$$\sigma [(f - f') a + (g - g') b + (h - h') c],$$

ou pour la densité de la charge de la surface S au point considéré,

$$(f - f') a + (g - g') b + (h - h') c.$$

De là la proposition suivante :

Si un milieu est amené à l'état de polarisation par l'action de forces électriques, il est chargé partout d'électricité : à l'intérieur la densité est

$$(3) \quad - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right),$$

et, à la surface limite, la densité superficielle est

$$(4) \quad (f - f') a + (g - g') b + (h - h') c.$$

§ 3. — Influence de la polarisation sur la mesure électrostatique de l'électricité.

Les forces électriques agissantes proviennent en partie de masses électriques distribuées d'une manière quelconque avec la densité E,

en partie des électricités libres développées par la polarisation. Soit ψ le potentiel des premières, φ celui des dernières (1). Les composantes $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ valent alors

$$5) \quad \mathcal{E}_x = \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_y = \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y}, \quad \mathcal{E}_z = \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z},$$

et pour la densité en (3) on a, d'une part,

$$\frac{\Delta \varphi}{4\pi},$$

où le signe $\Delta \varphi$ représente $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$; d'autre part, en vertu des relations (2) et de (5), cette densité vaut

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_1 \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_2 \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_3 \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

En égalant ces deux expressions, on a

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_1 \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \right] - \dots = \frac{\Delta \varphi}{4\pi},$$

et en ajoutant de part et d'autre $E = \frac{\Delta \psi}{4\pi}$, nous obtenons, après une transformation simple, l'équation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi E &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + 4\pi\varepsilon_1) \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1 + 4\pi\varepsilon_2) \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + 4\pi\varepsilon_3) \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que les constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ soient partout égales à ε , non seulement aux points où E diffère de zéro, mais aussi en tous les autres points du milieu, et que de plus ε soit indépendant

(1) Voir Helmholtz, *Journal de Borchardt*, vol. LXXII, p. 116-117.

de la position. L'équation (6) prend alors la forme

$$(6_a) \quad \frac{E}{1 + 4\pi\epsilon} = \frac{\Delta(\psi + \varphi)}{4\pi}.$$

Le second membre n'est autre chose que la densité en un point déterminé; considérons seulement les points où E n'est pas nul; si le milieu ne se polarise point, $\epsilon = 0$ et $\varphi = 0$; la densité en ce point serait

$$E = \frac{\Delta\psi}{4\pi}.$$

Mais la polarisation ajoute encore la densité $-\frac{4\pi\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon} E = \frac{\Delta\varphi}{4\pi}$ de sorte que la densité E se trouve réduite à $\frac{E}{1 + 4\pi\epsilon}$.

Au contraire, pour les points où $E = 0$, nous obtenons $\frac{\Delta(\psi + \varphi)}{4\pi} = 0$.

De là on déduit la proposition suivante :

Si, en différents points isolés d'un milieu pouvant être polarisé, nous supposons les quantités d'électricité e_1, e_2, e_3, \dots , le potentiel provenant de ces masses électriques et des électricités libres développées par la polarisation se comportera comme si le milieu ne pouvait pas être polarisé et qu'on eût appliqué en ces points les quantités $\frac{e_1}{1 + 4\pi\epsilon}, \frac{e_2}{1 + 4\pi\epsilon}, \frac{e_3}{1 + 4\pi\epsilon}, \dots$

Il suit de là que la force exercée sur l'unité positive d'électricité, qu'on imagine placée en un point quelconque du milieu sans que par là la distribution effective des électricités soit modifiée, est aussi la fraction $\frac{1}{1 + 4\pi\epsilon}$ de la force qui, dans les mêmes conditions, agit sur un milieu non susceptible de polarisation. C'est encore ce qui aura lieu si nous faisons coïncider l'unité positive d'électricité avec l'une des masses e .

Si donc les masses e_1 et e_2 se trouvent concentrées dans un diélectrique isotrope en deux points distincts dont la distance est r , ces

masses se repousseront ou s'attireront avec la force $\frac{e_1 e_2}{(1 + 4\pi\epsilon) r^2}$ (1).

Si donc, dans un diélectrique isotrope, on détermine la quantité d'électricité qui repousse avec l'unité de force une quantité égale d'électricité à l'unité de distance, c'est-à-dire l'unité électrostatique d'électricité, on trouve une quantité trop grande en comparaison de celle qu'on obtient dans un milieu non polarisé, et cela dans le rapport $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon} : 1$.

§ 4. — La constante diélectrique.

De même que la densité $-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)$, la densité superficielle $(f - f') a + (g - g') b + (h - h') c$ peut s'exprimer à l'aide des potentiels ψ et φ , d'un côté par

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\},$$

où n désigne la normale à S , sur laquelle nous prenons à partir de S les distances infiniment petites $+\delta$ et $-\delta$; de l'autre côté par

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \right]_{-\delta} a + \epsilon_2 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} \right]_{-\delta} b + \epsilon_3 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} \right]_{-\delta} c \\ & - \epsilon'_1 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \right]_{+\delta} a - \epsilon'_2 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} \right]_{+\delta} b - \epsilon'_3 \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} \right]_{+\delta} c, \end{aligned}$$

où $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3$ expriment les constantes de polarisation du second milieu.

Supposons que les deux milieux aboutissant à S soient isotropes, c'est-à-dire $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$, $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = \epsilon'_3 = \epsilon'$ dès lors nous obtenons en égalant les deux expressions ci-dessus :

$$\epsilon \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial n} \right]_{-\delta} - \epsilon' \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial n} \right]_{+\delta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}.$$

(1) A la prière de M. Helmholtz, cette loi fut soumise par Silow à une vérification expérimentale pour l'essence de térébenthine, et fut trouvée exacte (*Ann. de Pogg.*, t. Cl.VI, p. 389).

Ajoutant membre à membre cette équation à la suivante :

$$0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\},$$

qui est toujours vraie quand on n'a pas amené de masses électriques aux points de la surface commune, on a

$$(7) \quad (1) \quad \frac{\left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial n} \right]_{-\delta}}{\left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial n} \right]_{+\delta}} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon'}{1 + 4\pi\varepsilon}.$$

Le second membre ne dépend que de la nature des deux milieux. Les quantités $1 + 4\pi\varepsilon$, $1 + 4\pi\varepsilon'$ sont les *constantes diélectriques* des deux milieux, prises dans le sens absolu. Si la première substance, ayant pour constante de polarisation ε , est de l'air, et que nous prenions pour unité la constante diélectrique de celui-ci, alors le quotient ci-dessus est la constante de polarisation dans le sens relatif.

Celle-ci peut encore se définir autrement; voici comment : Si un conducteur est isolé et que tous les conducteurs distribués autour du premier communiquent avec le sol, alors la capacité du conducteur est $\frac{E}{V}$, E étant la charge du conducteur et V le potentiel; cette capacité vaut la charge qui correspond au potentiel 1.

La même définition peut se donner pour la capacité d'un condensateur : c'est la quantité d'électricité sur l'une des armatures quand elle est chargée par une source d'électricité de potentiel 1, tandis que l'autre armature communique avec le sol. La capacité d'un condensateur ne dépend pas seulement de la grandeur et de la distance des armatures, mais aussi de la nature de l'isolant. Si un corps isolant est remplacé par un autre de nature différente, la capacité n'est plus la même. Si nous appliquons maintenant le résultat théorique (7) au calcul de la capacité d'un condensateur, nous obtenons encore une autre définition pour la constante diélectrique, savoir : la constante diélectrique d'un isolant, relativement à celle de l'air prise pour unité, est égale au rapport de la capacité d'un condensateur qui contient cet

(1) Voir Helmholtz, *loc. cit.*

isolant, à la capacité d'un autre condensateur de même forme et de même grandeur, mais rempli d'air. Telle est la définition donnée d'abord par Faraday pour la constante diélectrique.

§ 5. — *Le courant diélectrique.*

Si la force électromotrice change avec le temps, l'état de polarisation se modifie aussi ; il se produit ce qu'on appelle le courant diélectrique. Pour le déterminer, considérons de nouveau un milieu isotrope. Dans ce cas, \mathcal{D} désignait la quantité d'électricité positive séparée dans la direction de la force électromotrice par un élément cylindrique dont les bases coïncidaient avec les surfaces de niveau et les génératrices avec les lignes de force, quantité divisée par la section du cylindre. Si \mathcal{D} change avec le temps, $\frac{d\mathcal{D}}{dt} dt$ est l'accroissement positif ou négatif de cette grandeur pendant le temps dt ; donc

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt}$$

est égal à la quantité d'électricité positive en mouvement dans l'élément du cylindre pendant l'unité de temps dans la direction de la force électromotrice, quantité divisée par la section du cylindre. Si la section du cylindre devient infiniment petite et que les coordonnées du centre de gravité du cylindre soient x, y, z , $\frac{d\mathcal{D}}{dt}$ est appelé le courant diélectrique au point x, y, z dans la direction de la force électromotrice.

Si le milieu est anisotrope, le courant diélectrique au point x, y, z est donné respectivement par

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}$$

dans la direction des x , des y et des z .

Si le milieu possède, outre la faculté de la polarisation diélectrique, un pouvoir conducteur, il existe, à côté du courant diélectrique, un courant de conductibilité ordinaire dont les composantes au point x, y, z , suivant les directions des x , des y et des z , peuvent être représentées par i_1, i_2, i_3 ; ce sont les quantités d'électricité positive qui

traversent, dans l'unité de temps, un élément superficiel infiniment petit construit au point en question normalement aux x , aux y et aux z , ces quantités étant divisées par cet élément de surface.

Cela étant, mesurons les quantités d'électricité par la méthode électrostatique, c'est-à-dire prenons d'après Gauss, conformément à la loi de Coulomb, pour unité d'électricité la quantité d'électricité qui, à l'état de repos et à l'unité de distance, repousse une quantité égale avec l'unité de force; alors apparaissent les composantes du courant mesurées par voie électrostatique. En d'autres termes, si par un élément ω construit au point x, y, z normalement au mouvement électrique qui existe en ce point, il s'écoule dans l'unité de temps, l'unité électrostatique positive de l'électricité, l'intensité du courant ainsi produit doit être regardée comme unité d'intensité du courant mesurée par voie électrostatique. L'unité mécanique du courant a été introduite par W. Weber.

Les deux courants, le diélectrique et le courant de conductibilité, forment ensemble un courant résultant dont les composantes sont u, v, w , telles que

$$u = i_1 + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$v = i_2 + \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$w = i_3 + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Soit C le coefficient de conductibilité du milieu; on a dès lors, en vertu de la loi de Ohm,

$$i_1 = C\mathcal{E}_x = \frac{C}{\epsilon_1} f, \quad i_2 = C\mathcal{E}_y = \frac{C}{\epsilon_2} g, \quad i_3 = C\mathcal{E}_z = \frac{C}{\epsilon_3} h,$$

et les composantes u, v, w , deviennent

$$(8) \quad u = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{C}{\epsilon_1} f, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{C}{\epsilon_2} g, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{C}{\epsilon_3} h.$$

La constante C dépend de la nature du milieu. — On a d'ailleurs pour les composantes i_1, i_2, i_3 , partout à l'intérieur du milieu, la relation

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z} = 0;$$

et à la limite de deux milieux, la relation

$$(i_1 - i'_1) a + (i_2 - i'_2) b + (i_3 - i'_3) c = 0,$$

a, b, c représentant les cosinus de direction de la normale. — On déduit de là

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t}, \\ (u - u')a + (v - v')b + (w - w')c &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces relations, tout est mesuré en unités électrostatiques. Nous introduirons partout, dans la suite, des unités électrodynamiques. Nous entendons par unité électromagnétique d'électricité la quantité d'électricité (estimée algébriquement), qui, en traversant pendant l'unité de temps la section transversale d'un conducteur, fournit l'unité de courant électromagnétique, c'est-à-dire le courant qui, circulant autour de la surface de cercle 1, exerce la même action magnétique à distance qu'un aimant court de moment 1 placé normalement au cercle et à son centre. Soit v le nombre d'unités électrostatiques d'électricité contenues dans l'unité électromagnétique; alors le nombre d'unités de courant mécaniques contenues dans l'unité de courant électromagnétique est $\frac{v}{2}$.

Les relations (9) peuvent donc s'écrire aussi :

$$(9_a) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi v} \cdot \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t}, \\ (u - u')a + (v - v')b + (w - w')c &= \frac{1}{2\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}, \end{aligned} \right.$$

où u, v, w , sont exprimés en unités électromagnétiques, mais φ en unités électrostatiques. Si nous exprimons aussi φ en unités électromagnétiques, les équations (9_a) deviennent :

$$(9_b) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t}, \\ (u - u')a + (v - v')b + (w - w')c &= \frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière relation découle du raisonnement qui suit. Considérons le potentiel $\frac{1}{2} \Sigma (e\varphi)$, où e désigne la charge électrique en un point x, y, z , pour lequel le potentiel a la valeur φ et où la sommation doit s'étendre à tous les points de l'espace dans lesquels il y a des électricités libres : dans ce cas le travail est toujours exprimé par le même nombre, quelles que soient les unités de mesure employées, pourvu que dans les deux cas on emploie les mêmes unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. Cela posé, comme e devient ν fois moindre quand on passe des unités électrostatiques aux électromagnétiques, φ doit devenir ν fois plus grand, c'est-à-dire que le potentiel électrostatique est égal au potentiel électromagnétique divisé par ν .

Si le milieu n'est pas un isolant parfait, comme le verre par exemple, l'état de polarisation va disparaître peu à peu à cause de la conductibilité, et l'énergie potentielle électrique du milieu se changera graduellement en chaleur.

Pour faire mieux comprendre les propriétés des diélectriques, on peut se servir de l'image mécanique suivante, due à Maxwell.

§ 6. — Explication mécanique des propriétés d'un diélectrique.

La figure ci-dessous représente cinq tubes A, B, C, D et P de même section, quatre de ces tubes A, B, C, D étant verticaux, mais le

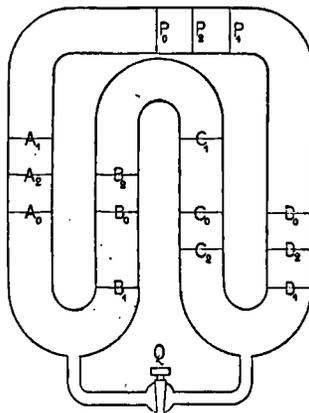


Fig. 3.

cinquième P étant horizontal. Les moitiés inférieures de A, B, C, D, sont remplies de mercure, les supérieures et le tube P sont remplis d'eau. Dans le tube horizontal se trouve en P_0 un piston qui peut marcher dans les deux sens, et en Q un robinet permet de faire communiquer les parties inférieures de A et B avec les parties inférieures de C et D.

Au commencement de l'expérience, admettons que le mercure soit au même niveau dans les quatre tubes en A_0, B_0, C_0, D_0 , que le piston soit en P_0 et que le robinet Q soit fermé. Si nous déplaçons maintenant le piston de P_0 en P_1 de la quantité a , les surfaces de mercure en A et C monteront de la quantité a et arriveront en A_1 et C_1 , tandis que celles de B et D descendront de a et viendront en B_1 et D_1 . Ainsi des deux côtés du piston il y aura une différence de pression proportionnelle à $4a$.

Cette disposition représente l'état d'un diélectrique soumis à une force électromotrice de grandeur constante. L'excès d'eau dans le tube D peut représenter la charge électrique positive d'un côté du diélectrique, tandis que l'excès de mercure tient lieu de la charge électrique négative de l'autre côté. Quant à l'excès de pression dans le tube P sur la face du piston vers D, il représentera l'excès du potentiel du côté positif du diélectrique.

Rendons maintenant libre le piston en P_1 , il retournera vers la position primitive, et l'équilibre sera rétabli.

Cette marche correspond à la décharge complète du diélectrique. De même que les liquides exécutent le mouvement contraire du premier, de même feront les électricités lors de la décharge.

Les choses se passent tout autrement, si nous maintenons le piston en P_1 et que nous ouvrons le robinet Q. Alors les niveaux en A_1 et D_1 , demeurent les mêmes, mais ceux en B et C s'égalisent et coïncident avec B_0 et C_0 . La différence des deux côtés du piston tombe de $4a$ à $2a$.

L'ouverture du robinet correspond au cas où une partie du diélectrique possède un pouvoir conducteur, mais qui ne s'étend pas au diélectrique en entier. Les charges des deux côtés opposés du diélectrique demeurent invariables, mais la différence des potentiels est moindre⁽¹⁾.

(1) La marche est alors analogue à ce qui se passe dans les bouteilles de Leyde, reliées suivant une batterie de Franklin, lorsqu'une bouteille isolée est déchargée au milieu de la série.

Fermons maintenant le robinet Q et laissons P se mouvoir librement; le piston s'arrêtera en P_2 , et la décharge ne sera évidemment que la moitié de la charge. Alors les surfaces de mercure en A et B se trouveront de $\frac{\alpha}{2}$ au-dessus de A_0 et B_0 , ou en A_2 et B_2 , celles en C et D de $\frac{\alpha}{2}$ au-dessous de C_0 et D_0 ou bien en C_2 et D_2 .

Fixons maintenant de nouveau le piston, et ouvrons le robinet; le niveau du mercure en B et C deviendra le même et coïncidera avec B_0 et C_0 . Mais cela produit maintenant des deux côtés de P une différence de pression proportionnelle à α . Il en résulte que si nous fermons maintenant Q et que nous abandonnions le piston, celui-ci se met en mouvement et arrive au repos en P_3 , à la moitié du chemin entre P_2 et P_0 .

Ce cas correspond au phénomène qu'on appelle *décharge secondaire*. Si l'on a déchargé un diélectrique chargé et puis qu'on l'ait abandonné à lui-même pendant longtemps, on obtient encore une deuxième décharge, puis encore une troisième, une quatrième, etc. C'est absolument la même chose pour notre image mécanique; si l'on continue la marche ci-dessus, on obtient une troisième, quatrième, etc., décharge, dont chacune est la moitié de la précédente, et par conséquent $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc., de la première décharge : la somme de toutes ces décharges partielles équivaut à la première décharge.

Si au lieu d'ouvrir et de fermer constamment le robinet, nous l'avons toujours laissé un peu ouvert, nous aurions eu l'image exacte d'un diélectrique qui montre le phénomène de l'absorption électrique.

DEUXIÈME SECTION

Quelques théorèmes sur la théorie des phénomènes électromagnétiques et des phénomènes d'induction dans les courants électriques fermés ⁽¹⁾.

§ 7. — *La fonction potentielle des forces électromagnétiques.*

La propriété caractéristique des courants fermés est exprimée par l'équation différentielle

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z} = 0,$$

où i_1, i_2, i_3 désignent les composantes du courant au point x, y, z . Cette équation a la même forme que l'équation de continuité des liquides incompressibles et exprime que la quantité totale d'électricité à l'intérieur d'une surface supposée fermée reste toujours la même.

L'expérience a montré que des courants galvaniques fermés exercent des actions magnétiques à distance précisément comme des masses magnétiques. Pour déterminer ces actions, on fait l'hypothèse qu'en dehors du conducteur elles suivent partout les mêmes lois que si elles provenaient de masses magnétiques (on doit se figurer le conducteur comme un fil infiniment mince dont le point final coïncide avec le point initial et qui entre ces deux points ne possède pas d'autres parties constitutives qui se coupent ou se couvrent mutuellement). On suppose ainsi que les composantes de la force X, Y, Z , partout dans l'espace infini en dehors du circuit soient finies, continues et simples (*eindeutig*), et qu'il existe une fonction V des

⁽¹⁾ Voir Riemann-Hallendorff, *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, p. 248-273 et 293-312.

coordonnées x, y, z telles que les composantes X, Y, Z puissent s'exprimer par

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

et que l'on ait en même temps l'équation différentielle $\Delta V = 0$, et la condition $V = 0$ pour $x^2 + y^2 + z^2 = \infty$.

Étendons main'enant l'intégrale

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

à une courbe se poursuivant dans un champ fini, dont le point final coïncide avec le point initial et dont les autres points ne sont rencontrés qu'une fois par tour simple; cette intégrale aura toujours une valeur nulle lorsque la courbe n'est pas rattachée en forme de chaîne au conducteur du courant galvanique. Mais si cela n'est pas le cas, disposons une surface S de telle sorte que le conducteur du courant galvanique forme ses limites complètes et exclusives, et, en un point quelconque de la surface, menons des deux côtés la normale sur laquelle nous prenons, infiniment près de la surface, deux points A et B ; la direction AB sera regardée comme positive. La normale

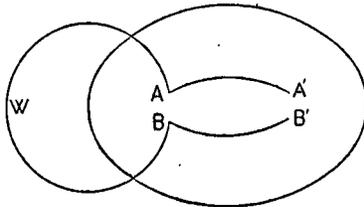


Fig. 4.

positive sera située relativement à la direction du courant de telle manière que le courant va d'un point de la normale positive, traverse le conducteur dans le sens d'une aiguille de montre. Si alors V_{+0} et V_{-0} désignent les valeurs de V aux points B et A , la valeur de l'intégrale étendue au chemin de A en B , ou, ce qui est la même chose, la valeur $V_{+0} - V_{-0}$ sera différente de zéro, mais toujours la même, que l'on choisisse les points A, B partout où l'on voudra sur la surface.

Ces deux propositions peuvent se démontrer aisément comme suit :

Théorie électromagnétique, etc.

Prenons une surface auxiliaire Σ dans un champ fini et qui a pour limite complète et unique le chemin exigé d'intégration. Alors l'équation de cette surface $z = f(x, y)$ nous donne la coordonnée z exprimée en fonction de x et y . Substituant z dans l'équation à intégrer, l'intégrale $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ devient

$$\int \left\{ \left(X + Z \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(Y + Z \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \right\} \quad \text{ou} \quad \int (P dx + Q dy),$$

P et Q étant des fonctions de x et y seulement; l'intégration doit s'étendre à la courbe fermée que nous obtenons par la projection du chemin d'intégration W sur le plan des xy . Or, l'intégrale ci-dessus peut, comme on sait, s'exprimer par une intégrale de surface de la forme

$$-\iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy,$$

où l'intégrale doit s'étendre à la portion limitée sur le plan des xy par la courbe obtenue par projection.

Or, si le chemin d'intégration W n'est pas engagé en forme de chaîne avec le conducteur, on a pour tous les points de Σ l'équation $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, ou

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et l'intégrale a une valeur égale à zéro. Dans le cas contraire, Σ aura toujours un point commun avec le conducteur, et la dernière équation ne sera pas satisfaite partout; l'intégrale a alors une valeur différente de zéro; soit a cette valeur.

Dans ce second cas, l'intégrale a encore la même valeur a pour tout autre couple de points $A'B'$ (fig. 4); car pour la courbe $AA'BB'$ qui n'est pas liée en forme de chaîne au conducteur, elle est nulle. Donc, pour tout point quelconque de la surface S on a $V_{+0} - V_{-0} = a$, tandis que partout ailleurs dans l'espace infini V est continu.

Puisque les composantes X, Y, Z sont finies et continues pour tout l'espace en dehors du circuit, on a en chaque point de la surface S

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{+0} = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{-0}$$

où p est la direction de la normale positive et où les indices $+0$ et -0 se rapportent aux points B et A; a sera une constante.

Si à ces conditions nous ajoutons encore $\Delta V = 0$ et $V = 0$ pour $x^2 + y^2 + z^2 = \infty$, nous sommes en état de déterminer le potentiel V à l'aide de la méthode de Green. Nous obtenons ainsi l'expression

$$(10) \quad V = \frac{a}{4\pi} \iint \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial p} d\sigma,$$

où $d\sigma$ est un élément de S, et r la distance de cet élément au point considéré. L'intégrale doit être étendue à la surface S. Maintenant joignons à cela l'hypothèse que les forces magnétiques exercées par plusieurs courants sur l'unité de masse magnétique positive concentrée au point x, y, z se composent d'après le parallélogramme des forces; il s'ensuivra immédiatement pour un courant unique qu'une intensité de courant n fois plus grande exerce aussi une force n fois plus considérable. Les composantes X, Y, Z sont donc proportionnelles à l'intensité J du courant (1), et par conséquent $a = kJ$, où k représente un facteur de proportionnalité (l'intensité J s'obtient en multipliant la section du conducteur par la composante du courant dans la direction du conducteur).

En mesures magnétiques, l'intensité du courant a la valeur 4π . Donc, on a

$$(10_a) \quad V = J \int \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial p} d\sigma.$$

§ 8. — Signification mécanique de l'expression du potentiel V.

L'expression de V est susceptible d'une signification mécanique intéressante. En effet, écrivons

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial p} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{r} \right)_{p-\delta} - \left(\frac{1}{r} \right)_{p=0}}{\delta} \text{ pour } \lim \delta = 0$$

(1) Pour un point quelconque du circuit, l'intensité du courant est égale au produit de la section droite par la composante du courant dans la direction du conducteur.

et

$$V = \lim \int d\sigma \left[\frac{J}{\delta} \left(\frac{1}{r} \right)_{p=\delta} - \frac{J}{\delta} \left(\frac{1}{r} \right)_{r=0} \right] \text{ pour } \lim \delta \Rightarrow 0.$$

V a donc la forme d'une fonction potentielle d'une distribution idéale de masses magnétiques. En effet, supposons que pour la surface S ($p = 0$) on construise une surface équidistante $p = \delta$ et que sur chaque élément de S on imagine la masse magnétique $d\mu = \frac{J}{\delta} d\sigma$, sur chaque élément de la deuxième surface la masse magnétique $d\mu = -\frac{J}{\delta} d\sigma$; dès lors, l'action de cette couche double magnétique est la même que celle du courant galvanique passant par les limites de la surface S. Les masses magnétiques des deux couches sont de signes contraires, de densité égale et constante, et cette densité est en raison inverse de la distance des deux couches.

On ne comprend pas là-dedans l'action d'un point situé dans l'espace intérieur entre les deux surfaces infiniment voisines.

Comme nous l'avons vu, la fonction V est continue, finie et de même sens pour tout l'espace, sauf pour la surface S où elle a plusieurs valeurs. Il est donc impossible de réaliser par une distribution quelconque de matière magnétique, un système correspondant sous tous les rapports à un courant électrique; car le potentiel du système magnétique a une seule valeur pour chaque point de l'espace, tandis que celui du système électrique a plus d'une valeur en bien des points. Mais inversement, il est toujours possible de réaliser avec un arrangement convenable de courants électriques infiniment petits, un système qui correspond sous tous les rapports à un système magnétique.

L'action à distance des aimants est tout à fait identique avec les courants électriques; si nous les rapportons à la même cause, il faut, puisque nous ne pouvons pas expliquer les courants électriques au moyen d'aimants, expliquer les aimants à l'aide de courants électriques moléculaires. C'est là l'idée d'Ampère (1).

(1) Voir Maxwell, t. II, art. 637.

§ 9. — *Rapports entre les composantes du courant et celle de la force électromagnétique.*

Nous avons vu plus haut que la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

étendue à une courbe fermée et reliée en chaîne au conducteur est égale à J , quand cette courbe, regardée comme limite d'une surface, est parcourue de telle sorte qu'un observateur qui suit le courant et qui a la tête dans la direction de celui-ci, ait toujours la surface à sa gauche. J désigne la quantité d'électricité (sommée algébriquement), qui traverse la surface en question dans la direction du courant pendant l'unité de temps.

Si nous étendons l'intégrale ci-dessus au cas d'un conducteur constamment traversé par un courant sur la limite d'un élément de surface $dx dy$ parallèle au plan des xy et dans le sens donné, on a pour sa valeur

$$i_3 dx dy,$$

ou bien, puisque $dz = 0$,

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

En égalant les deux valeurs, on a

$$4\pi i_3 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Par permutations tournantes, on aurait deux autres valeurs analogues, de sorte que l'on a

$$(11) \quad 4\pi i_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad 4\pi i_2 = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad 4\pi i_3 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

[Les composantes actuelles i_1, i_2, i_3 sont doubles de celles du § 5.] Ces équations servent à calculer les composantes du courant en un point x, y, z quand les composantes X, Y, Z de la force électromotrice sont données.

Le problème inverse consiste à déterminer X, Y, Z quand on connaît i_1, i_2, i_3 pour chaque point de l'espace. Pour résoudre ce problème, posons

$$(12) \quad X = \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial x},$$

et substituons ces relations dans les équations (11); nous obtenons ainsi les équations aux différentielles partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial z \partial x} &= 4\pi i_1, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} &= 4\pi i_2, \\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} &= 4\pi i_3, \end{aligned}$$

d'où nous avons à tirer les fonctions U_1, U_2, U_3 . Mais leur détermination n'est pas simple; car si, par hypothèse, nous avons trouvé une solution U_1, U_2, U_3 , les fonctions $U_1 + \frac{\partial F}{\partial x}, U_2 + \frac{\partial F}{\partial y}, U_3 + \frac{\partial F}{\partial z}$ satisfont aussi aux équations aux dérivées partielles ci-dessus, si F est une fonction de x, y, z qui est finie et continue ainsi que ses dérivées; les dernières fonctions donnent pour X, Y, Z les mêmes valeurs que les solutions U_1, U_2, U_3 . Pour déterminer complètement ces fonctions, il faut donc y ajouter encore une équation. Nous choisissons la suivante :

$$(13) \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0.$$

De cette manière les équations différentielles ci-dessus prennent la forme

$$(14) \quad \Delta U_1 = 4\pi i_1, \quad \Delta U_2 = 4\pi i_2, \quad \Delta U_3 = 4\pi i_3,$$

d'où il résulte

$$(14a) \quad U_1' = -\int \frac{i_1 d\Gamma}{r}, \quad U_2' = -\int \frac{i_2 d\Gamma}{r}, \quad U_3' = -\int \frac{i_3 d\Gamma}{r},$$

i_1, i_2, i_3 désignent les composantes du courant au point x, y, z ,

dT l'élément de volume touchant à ce point, r la distance de celui-ci au point x', y', z' pour lequel U_1, U_2, U_3 ont les valeurs respectives U'_1, U'_2, U'_3 . L'intégration doit être étendue à tous les conducteurs traversés par des courants,

§ 10. — *Potentiel électrodynamique mutuel de deux courants constants linéaires.*

Considérons maintenant l'action mutuelle de deux courants linéaires; si, par attraction ou par répulsion réciproque, ils se déplacent infiniment peu l'un par rapport à l'autre, ce travail élémentaire (électrodynamique comme on l'appelle) peut toujours s'exprimer par la variation infiniment petite d'une certaine fonction qui dépend de la position relative des deux courants et qui porte le nom de *potentiel électrodynamique*. La détermination de cette fonction n'offre aucune difficulté. En effet, comme nous l'avons vu, tout courant galvanique, en ce qui concerne ses actions magnétiques, peut être remplacé par une couche double magnétique. Si maintenant nous formons le potentiel magnétique de ces couches doubles, nous arrivons au potentiel électrodynamique.

Nous pouvons l'obtenir sous la forme

$$(15) \quad P = \frac{1}{4\pi} \int dT (XX' + YY' + ZZ') \quad (1),$$

où X, Y, Z, X', Y', Z' désignent les composantes des forces magnétiques des deux courants en un point x, y, z , et dT l'élément de volume attenant, ou bien sous la forme

$$(15_a) \quad P = - \int dS' (U_1 i'_1 + U_2 i'_2 + U_3 i'_3),$$

où dS' désigne un élément d'un des conducteurs, i'_1, i'_2, i'_3 les composantes du courant qui traverse celui-ci, et U_1, U_2, U_3 les intégrales

$$U_1 = - \int \frac{i_1 dS}{r}, \quad U_2 = - \int \frac{i_2 dS}{r}, \quad U_3 = - \int \frac{i_3 dS}{r},$$

dans lesquelles dS, i_1, i_2, i_3 ont les significations correspondantes

(1) Voir Riemann Hattendorf, p. 297 et 300.

pour le second conducteur, et r désigne la distance de dS , dS' . L'intégration doit être chaque fois étendue à tout le conducteur dont il est question.

Dans la première expression de P (15), nous devons étendre l'intégration à tout l'espace infini, à chaque partie du champ où il y a des forces magnétiques; dans la seconde (15_a), il ne faut l'étendre qu'aux parties où il y a des courants électriques.

La dernière expression correspond à la théorie des actions à distance, tandis que la première suppose que l'action mutuelle des courants est transmise par le milieu interposé.

Nous pouvons encore obtenir d'autres formes de P . La substitution des valeurs de U_1 , U_2 , U_3 dans (15_a) nous donne

$$(15_b) \quad P = JJ' \iint \frac{\cos(ds, ds')}{r} ds ds',$$

où J , J' sont les intensités du courant, ds , ds' les éléments de la courbe axiale dans les deux conducteurs linéaires et r la distance entre ds et ds' ; l'intensité du courant doit être prise dans le sens suivant lequel l'arc s du conducteur augmente.

La dernière expression de P peut encore prendre la forme

$$(15_c) \quad P = -JJ'Q, \quad Q = \frac{1}{2} \iint \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}.$$

L'intégrale doit encore être étendue aux deux conducteurs du courant.

§ 11. — Loi intégrale de Neumann sur l'induction de Volta.

Soient deux anneaux de fil A , B parcourus par des courants électriques J , J' et animés d'un mouvement quelconque; alors les intensités varieront avec le temps même quand il s'exercera dans les deux conducteurs des forces électromotrices constantes. Cela provient de ce que le changement de position relative des courants donne lieu à une nouvelle production d'électricité, c'est-à-dire à de nouveaux courants.

Ce phénomène, qui a été constaté d'abord expérimentalement par Faraday, porte le nom d'*induction*.

Le mouvement des conducteurs ne produit pas seulement un

travail électrodynamique, mais encore un travail électromoteur. Mais au travail électrodynamique seul, qui se manifeste par l'action mutuelle des courants variables, ne correspond plus un potentiel. Toutefois, si l'on suppose que le travail total effectué par l'action réciproque des deux courants soit tel qu'il y ait encore un potentiel, c'est-à-dire une fonction qui dépend non seulement des coordonnées, mais aussi des vitesses des particules en mouvement, mais qui ne contient pas explicitement le temps; en d'autres termes, si pour les mouvements sur lesquels reposent les actions mutuelles des deux courants, la loi de la conservation de la force vive est satisfaite, nous obtenons

$$(16) \quad \frac{d(QJ')}{dt},$$

pour la valeur intégrale de la force électromotrice induite par B sur A, et

$$(17) \quad \frac{d(QJ)}{dt},$$

pour la valeur de la force électromotrice induite par A sur B. Cette loi de l'induction est dite loi de Neumann pour deux courants linéaires fermés. L'expérience l'a confirmée. Si la position relative des deux courants ne change pas, mais bien leur intensité, alors les expressions ci-dessus deviennent

$$(16_a) \quad Q \frac{\partial J'}{\partial t} \quad \text{et} \quad (17_a) \quad Q \frac{\partial J}{\partial t}.$$

TROISIÈME SECTION

Étude d'un système de courants électriques fermés et non fermés.

§ 12. — *Le potentiel électrodynamique d'un pareil système sur lui-même.*

Considérons la première des équations (9) du § 5; nous verrons qu'en général la propriété caractéristique des courants fermés n'appartient pas aux courants diélectriques. Mais comme dans la suite ces derniers jouent un rôle prépondérant, il est très important d'apprendre à connaître le potentiel électrodynamique d'un système de courants fermés et non fermés sur lui-même et de déterminer en conséquence les expressions des composantes de la force électromotrice produite en un point quelconque du milieu, par le changement non pas de la position relative des courants, mais de leur intensité. Nous résolvons ce problème en considérant l'action électrodynamique réciproque de deux éléments de courants linéaires regardés comme ayant un potentiel. Pour le déterminer, remarquons que le potentiel électrodynamique réciproque de deux courants fermés (loi de Neumann), peut être trouvé directement, sans avoir égard à la détermination de l'action mutuelle de deux éléments de courants linéaires (1), et que de plus jusqu'à présent cette loi seule a été susceptible d'une vérification expérimentale. Le chemin le plus naturel pour arriver à la loi de l'action électrodynamique mutuelle de deux éléments de courant, ou, en un mot, à la loi *élémentaire*, aura donc pour point de départ la loi intégrale de Neumann. Or, ce problème revient à déduire la fonction intégrée des valeurs données de l'intégrale, qui doit se rap-

(1) Comparez Lippich : *Zur Theorie der Elektrodynamik (Sitzungsber. de Vienne, t. LXXV, 1877)*.

porter au moins à un courant fermé. Il suit de là que la loi élémentaire ne peut être entièrement déterminée (1),

L'expression de Neumann pour le potentiel de deux courants linéaires fermés

$$P = JJ' \iint \frac{\cos(ds, ds')}{r} ds ds',$$

peut être regardée comme formée par la somme des potentiels des éléments de courants; d'après cela, le potentiel électrodynamique réciproque de deux éléments de courant a pour expression

$$(18) \quad JJ' \frac{\cos(ds, ds')}{r} ds ds',$$

où, on le sait, J, J' sont mesurées en unités magnétiques.

Mais à cette expression nous pouvons ajouter, avec Helmholtz, un complément de la forme

$$\frac{1-k}{2} JJ' \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} ds ds',$$

ou bien

$$\frac{JJ'}{2r} \cdot \frac{1-k}{2} [\cos(r, ds) \cos(r, ds') - \cos(ds, ds')] ds ds',$$

sans que l'action totale d'un courant fermé sur un autre courant quelconque soit changée; k est une constante à déterminer. De cette façon, le potentiel élémentaire prend la forme

$$(18a) \quad JJ' \left\{ \frac{\cos(ds, ds')}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right\} ds ds',$$

ou

$$(18b) \quad \frac{JJ'}{2r} [(1+k) \cos(ds, ds') + (1-k) \cos(r, ds) \cos(r, ds')] ds ds'.$$

(1) Déjà Gauss, dans sa lettre célèbre adressée le 19 mars 1845 à W. Weber (*Oeuvres*, t. V, p. 629), appelle l'attention sur cette incertitude, en disant :

« J'ai bientôt acquis et conservé la conviction que la transformation du magnétisme en courants galvaniques exige impérieusement la formule d'Ampère et ne permet aucune autre qui ne devienne pas identique à celle-là pour un courant fermé, quand l'action doit s'effectuer dans la direction de la droite joignant les deux éléments de courant; mais quo l'on peut choisir une infinité d'autres formes, quand on s'affranchit de cette condition, et que ces formes doivent toujours donner le même résultat final que la formule d'Ampère. »

En réalité, cette condition qu'Ampère regarde comme naturelle, est absolument arbitraire, car l'application de ce cas à l'action mutuelle de deux points matériels (c'est ainsi qu'Ampère se figurait la chose), n'est nullement permise. (Voir Stefan, *Berichte de Vienne*, LIX.)

Ainsi que l'a montré Helmholtz, k ne peut être négatif. Une valeur négative voudrait dire que l'équilibre de l'électricité à l'état de repos est instable. $k = 1$ donne la valeur (18), et $k = 0$ donne le potentiel élémentaire d'après Maxwell.

Pour résoudre le problème proposé plus haut, imaginons le milieu traversé continûment par des courants ordinaires et par des courants électriques. Désignons de nouveau par u , v , w les composantes du courant total en un point quelconque suivant les directions des x , des y et des z . Considérons maintenant le volume élémentaire voisin $dx dy dz$; le courant qui le traverse peut être remplacé par trois éléments de courant ayant respectivement pour longueurs

$$(19) \quad \begin{cases} dx \text{ avec l'intensité } u dy dz, \\ dy \text{ avec l'intensité } v dx dz, \\ dz \text{ avec l'intensité } w dx dy. \end{cases}$$

Le potentiel électrodynamique entre tous les courants en présence et le premier élément de courant s'obtient en écrivant dans (18_a) ou (18_b) pour J , $u dy dz$; pour ds , dx ; pour J' et pour ds' successivement $u' dy' dz'$, $v' dx' dz'$, $w' dx' dy'$ et $w' dy' dz'$, et en formant la somme pour tous les éléments $dx' dy' dz'$ où les composantes du courant u' , v' , w' diffèrent de zéro. Comme de plus

$$\cos(dx, dx') = 1, \quad \cos(dx, dy') = 0, \quad \cos(dx, dz') = 0, \quad \cos(r, dx) \\ = \cos(r, dx') = \frac{x-x'}{r}, \quad \cos(r, dy') = \frac{y-y'}{r}, \quad \cos(r, dz') = \frac{z-z'}{r},$$

le potentiel a pour expression

$$- U u dx dy dz,$$

où

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = - \iiint \left[\frac{u'}{r} + \frac{1-k}{2} \left(u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial x} + v' \frac{\partial^2 r}{\partial y' \partial x} + w' \frac{\partial^2 r}{\partial z' \partial x} \right) \right] dx' dy' dz' \\ \text{ou bien} \\ U = - \iiint \left\{ \frac{1+ku'}{2r} + \frac{1-k}{2} \frac{x-x'}{r^3} [u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')] \right\} dx' \end{array} \right.$$

Développant de même les expressions relatives au deuxième et au troisième élément, nous obtenons

$$- V v dx dy dz \quad \text{et} \quad - W w dx dy dz,$$

où

$$(20a) \left\{ \begin{array}{l} V = -\iiint \left[\frac{v'}{r} + \frac{1-k}{2} \left(u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial y} + v' \frac{\partial^2 r}{\partial y' \partial y} + w' \frac{\partial^2 r}{\partial z' \partial y} \right) \right] dx' dy' dz', \\ \text{ou} \\ V = -\iiint \left[\frac{1+k}{2} \cdot \frac{v'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{y-y'}{r^3} [u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')] \right] dx' dy' dz', \end{array} \right.$$

et

$$(20b) \left\{ \begin{array}{l} W = -\iiint \left[\frac{w'}{r} + \frac{1-k}{2} \left(u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial z} + v' \frac{\partial^2 r}{\partial y' \partial z} + w' \frac{\partial^2 r}{\partial z' \partial z} \right) \right] dx' dy' dz', \\ \text{ou } (1) \\ W = -\iiint \left[\frac{1+k}{2} \cdot \frac{w'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{z-z'}{r^3} [u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')] \right] dx' dy' dz', \end{array} \right.$$

Pour obtenir maintenant le potentiel électrodynamique du système total sur lui-même, il faut former toutes les expressions analogues pour tous les éléments de volume $dx dy dz$ où il y a des courants, et en prendre la demi-somme

$$(21) \quad -\frac{1}{2} \iiint (Uu + Vv + Ww) dx dy dz.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ provient de ce que, dans l'intégration, chaque combinaison de deux éléments se présente deux fois, et qu'il ne faut la compter qu'une seule fois.

§ 13 (suite). — Les fonctions U, V, W.

Considérons dans les équations (20), (20a), (20b), les deuxièmes valeurs des fonctions U, V, W; chacune d'elles peut se décomposer en quatre intégrales, qui peuvent être regardées elles-mêmes comme des fonctions potentielles, si nous regardons comme des densités les grandeurs $\frac{1+k}{2} u'$, $\frac{1+k}{2} v'$, $\frac{1+k}{2} w'$, $\frac{1-k}{2} u' \cos^2(r, x)$, $\frac{1-k}{2} v' \cos(r, x) \cos(r, y)$, $\frac{1-k}{2} w' \cos(r, x) \cos(r, z)$, etc.

(1) Voir *Journal de Borchart*, t. LXXII, p. 76 et 77.

Nous déduisons de là la proposition suivante :

Les fonctions U, V, W et leurs dérivées sont partout finies et continues, sauf aux points où le courant est infini.

Les premières expressions de U, V, W conduisent à d'autres relations importantes. Considérons l'intégrale

$$\iiint (u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial x} + v' \frac{\partial^2 r}{\partial y' \partial x} + w' \frac{\partial^2 r}{\partial z' \partial x}) dx' dy' dz',$$

et remarquons que u' , v' , w' ne dépendent que de x' , y' , z' et t , mais non de x , y , z . Nous pouvons donc l'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dx} \iiint (u' \frac{\partial r}{\partial x'} + v' \frac{\partial r}{\partial y'} + w' \frac{\partial r}{\partial z'}) dx' dy' dz',$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \iint r \{ (u' - u'_1) a + (v' - v'_1) b + (w' - w'_1) c \} d\omega \\ - \frac{d}{dx} \iiint r \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

La première intégrale doit s'étendre à toutes les surfaces limites des différents milieux, la deuxième à l'espace infini. Dans la première, on a négligé toutes les parties relatives à des surfaces limites infiniment éloignées, parce que l'on admet que les composantes du courant y sont nulles. u' , v' , w' et u'_1 , v'_1 , w'_1 désignent les composantes du courant de part et d'autre de la surface limite dont il s'agit, a , b , c les cosinus de direction de la normale n à cette surface et $d\omega$ un élément de surface.

En vertu des relations (96) et de l'indépendance entre r et t , ces intégrales deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \iint r \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\} d\omega \\ + \frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \iiint r \Delta \varphi dx' dy' dz', \end{aligned}$$

ou bien, si l'on applique le théorème de Green,

$$\frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \iiint \varphi \Delta r dx' dy' dz',$$

ou enfin, puis $\Delta r = \frac{2}{r}$:

$$\frac{1}{\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \iiint \frac{\varphi}{r} dx' dy' dz'.$$

La première intégrale ci-dessus a disparu ainsi, puisque $\frac{\partial r}{\partial n}$ est continu dans toutes les surfaces limites.

L'expression de U prend ainsi la forme suivante :

$$U = -\iiint \frac{u'}{r} dx' dy' dz' - \frac{1-k}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \iiint \frac{\varphi}{r} dx' dy' dz'.$$

Nous obtenons de même pour V et W :

$$V = -\iiint \frac{v'}{r} dx' dy' dz' - \frac{1-k}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \iiint \frac{\varphi}{r} dx' dy' dz',$$

$$W = -\iiint \frac{w'}{r} dx' dy' dz' - \frac{1-k}{2\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \iiint \frac{\varphi}{r} dx' dy' dz'.$$

En appliquant enfin à ces trois valeurs le théorème de Poisson, nous obtenons

$$(22) \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 4\pi u + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \\ \Delta V = 4\pi v + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}, \\ \Delta W = 4\pi w + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}. \end{array} \right.$$

Comme les seconds membres se rapportent au point x, y, z , les composantes du courant doivent être désignées par u, v, w .

Il nous reste à déduire une relation extrêmement importante entre les fonctions U, V, W. À cet effet, examinons l'expression $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$, et formons-la au moyen des dernières valeurs des fonctions U, V, W; nous trouvons qu'elle équivaut à

$$-\iiint \left[u' \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} + v' \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} + w' \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \right] dx' dy' dz' + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

(1) Comparez Helmholtz, cité plus haut, p. 80.

Dans cette intégrale, nous allons faire les substitutions suivantes :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'},$$

tirées de la relation

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

L'intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned} & \iint [(u' - u_i) a + (v' - v_i) b + (w' - w_i) c] \frac{d\omega}{r} \\ & - \iiint \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \frac{dx' dy' dz'}{r} + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Il faut éendre la première intégrale à toutes les surfaces terminales non situées à l'infini, et la seconde à l'espace infini. Les quantités placées sous le signe d'intégration ont la même signification que plus haut.

Si nous appliquons maintenant les relations (9_b), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\} \frac{d\omega}{r} \\ & + \frac{2}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{\Delta \varphi}{4\pi} \frac{dx' dy' dz'}{r} + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned}$$

ou bien, puisque les intégrales soumises au signe $\frac{\partial}{\partial t}$, prises négativement, ne sont autre chose que la fonction potentielle des électricités libres qui existent, en raison de la polarisation des milieux, aux points pris séparément dans les surfaces limites :

$$-\frac{2}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{ou bien} \quad -\frac{2k}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Nous obtenons ainsi la relation

$$(23) \quad (1) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{2k}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

(1) Comparez Helmholtz, *loc. cit.*, p. 80.

§ 14. — Composantes de la force électromotrice induite par la variation des courants.

Supposons que le système de courants considéré se compose de courants fermés et non fermés, et d'une intensité variable avec le temps, la position restant fixe. Pour déterminer alors la force électromotrice produite par induction en un point x, y, z , il faut chercher d'abord la part qui est fournie par un élément de courant.

Nous avons vu (16_a) que la valeur intégrale de la force électromotrice produite par induction par le courant B dans le conducteur A, quand l'intensité du courant change en B, la position demeurant la même, équivaut à

$$(24) \quad \begin{cases} Q \frac{dJ'}{dt} = - \frac{\partial J'}{\partial t} \iint \frac{\cos(ds, ds')}{r} ds ds' = \int \Pi ds \\ \text{si } \Pi = - \frac{\partial J'}{\partial t} \int \frac{\cos(ds, ds')}{r} ds'. \end{cases}$$

L'intégrale $\int \Pi ds$ doit être étendue à tout le conducteur du courant, et Π désigne la force électromotrice qui agit en un de ses points suivant la direction de l'élément voisin ds . Cette grandeur peut être regardée comme composée des parts fournies par les éléments de B; nous pouvons donc écrire, pour la grandeur de la force électromotrice produite par un élément de courant de B en un point du conducteur de A (voir 18_a),

$$(25) \quad \Pi ds' = - \frac{\partial J'}{\partial t} \left[\frac{\cos(ds, ds')}{r} + \frac{(1-k)}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] ds'.$$

Envisageons maintenant le milieu traversé continûment par le courant. Remplaçons, comme dans (19), le courant dans un élément de volume $dx' dy' dz'$ par trois courants élémentaires que nous tirons de (19) en accentuant toutes les lettres; alors la force électromotrice produite en un point x, y, z dans la direction des x par l'élément du courant parallèle à l'axe des x sera

Théorie électromagnétique, etc.

égale à

$$\begin{aligned} -\frac{du'}{dt} dy' dz' \left[\frac{\cos(dx, dx')}{r} + \frac{(1-k)}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x'} \right] dx' \\ = -\frac{d}{dt} \left[\frac{u'}{r} + \frac{(1-k)}{2} u' \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x'} \right] dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Les forces électromotrices produites au même point x, y, z par le même élément de courant dans la direction des y et des z sont égales à

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial y} \right] dx' dy' dz',$$

et

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} u' \frac{\partial^2 r}{\partial x' \partial z} \right] dx' dy' dz',$$

puisque $\cos(dy, dx') = 0$, $\cos(dz, dx') = 0$.

Les composantes de la force électromotrice provenant des éléments de courant en x', y', z' et parallèles aux axes des y et des z , se déduisent des précédentes par des permutations tournantes.

L'élément parallèle à l'axe des y donne les composantes :

$$\text{dans la direction des } x : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} v' \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{dans la direction des } y : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} v' \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial y'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{dans la direction des } z : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} v' \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y'} \right] dx' dy' dz'.$$

L'élément parallèle à l'axe des z donne :

$$\text{dans la direction des } x : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} w' \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{dans la direction des } y : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} w' \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{dans la direction des } z : -\frac{d}{dt} \left[\frac{1-k}{2} w' \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial z'} \right] dx' dy' dz'.$$

Répétant les mêmes raisonnements pour tous les éléments de

l'espace parcouru par des courants, et formant la somme de toutes les composantes respectivement suivant les x , les y et les z , nous obtenons, eu égard aux équations (20), (20_a) et (20_b), pour les composantes de la force électromotrice totale produite au point x, y, z , par induction par tous les courants, respectivement dans les directions des x , des y et des z :

$$(26) \quad \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Les grandeurs U, V, W , peuvent être regardées comme les composantes d'une grandeur \mathcal{U} qui représente précisément en grandeur et en direction l'intégrale suivant le temps de la force électromotrice produite au point x, y, z par le développement de tous les courants dans l'espace. Cette grandeur \mathcal{U} désigne d'après Maxwell le moment électrocinétique au point x, y, z .

§ 15. — *Le milieu est susceptible d'être polarisé magnétiquement. — Composantes de la force électromotrice induite par la variation de la polarisation magnétique.*

Jusqu'à présent nous avons appris à connaître deux genres de forces électromotrices; le premier avait une origine électrostatique et provenait de certaines masses électriques distribuées dans l'espace; l'autre tirait au contraire sa source dans l'induction produite par la variation temporaire d'intensité des courants électriques distribués dans l'espace. Actuellement nous allons parler d'un troisième genre de forces électromotrices provenant également de l'induction, mais seulement dans le cas où le milieu peut être polarisé magnétiquement.

En ce qui concerne la polarisation magnétique, nous pouvons répéter mot à mot tout ce que nous avons dit de l'état de polarisation électrique.

Soient λ, μ, ν , les moments magnétiques par unité de volume au point x', y', z' , χ le potentiel magnétique en ce point, potentiel provenant en partie de masses magnétiques données, en partie des magnétismes libres dus à la polarisation; enfin soient $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ les composantes magnétiques dues à tous les courants circulant dans

l'espace, et \mathfrak{A} la constante de polarisation magnétique; nous pouvons écrire alors, comme pour l'équation (2),

$$(27) \quad \lambda = \mathfrak{A} \left(\mathcal{L} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \quad \mu = \mathfrak{A} \left(\mathcal{M}b + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \quad \nu = \mathfrak{A} \left(\mathcal{N}c + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right).$$

\mathfrak{A} sera pris égal dans les trois directions principales, et le milieu sera considéré comme isotrope quant à l'état de polarisation magnétique.

Le magnétisme libre produit par la polarisation a dans le milieu la densité [Voir l'équation (3)]

$$-\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \chi}{\pi},$$

et à la surface limite de deux milieux [comme pour (4)] la densité superficielle

$$(\lambda - \lambda')a + (\mu - \mu')b + (\nu - \nu')c \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\};$$

λ, μ, ν et λ', μ', ν' sont les moments magnétiques par unité de volume pour les deux milieux qui se touchent, et a, b, c les cosinus de direction de la normale n de la surface limite.

Si maintenant l'intensité des courants varie, alors les quantités $\mathcal{L}, \mathcal{M}b, \mathcal{N}c$ et par conséquent les magnétismes libres cités plus haut changent aussi. Or c'est cette variation des magnétismes libres qui produit une nouvelle force électromotrice.

Pour déterminer cette force, considérons d'abord la composante de la force magnétique suivant les x : $\mathcal{L} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$; concevons un volume infiniment petit dx', dy', dz' ; ses bases $dy' dz'$ coïncideront avec les surfaces de niveau et ses côtés avec les lignes de force correspondant à cette composante. Les magnétismes libres séparés dans cet élément par polarisation et accumulés uniformément aux deux faces terminales $dy' dz'$ auront pour grandeurs

$$\lambda dy' dz' \quad \text{et} \quad -\lambda dy' dz'.$$

Le volume élémentaire nous apparaît ainsi comme une couche double magnétique qui peut être remplacée quant à son action

magnétique à distance, par un courant électrique fermé d'intensité $-\lambda dx'$ et circulant dans le sens des flèches (fig. 5) par les côtés de

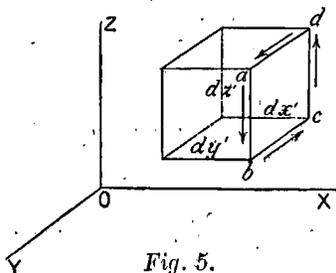


Fig. 5.

la base $dy' dz'$ où se trouve accumulée la masse magnétique positive $\lambda dy' dz'$ [Comparez le § 8 (1)].

Si maintenant λ varie avec le temps, ce courant $abcd$ produira par induction une force électromotrice. La relation (24) nous donne les composantes de la force électromotrice produite en un point x, y, z , suivant les directions des x , des y et des z , si nous y remplaçons ds successivement par dx, dy et dz . Mais alors $ds' \cos(ds, d's')$ n'est autre chose que la projection de ds' sur l'axe des x, y ou z . Comme le courant $abcd$ est normal à l'axe des x , la composante de la force électromotrice suivant l'axe des x est nulle. Les deux autres composantes valent :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} dx' \int \frac{dy'}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} dx' \int \frac{dz'}{r},$$

ou en substituant aux intégrales linéaires les intégrales superficielles correspondantes :

$$\text{suivant les } x : 0, \quad \text{suivant les } y : \frac{\partial \lambda}{\partial t} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} dx' dy' dz',$$

$$\text{suivant les } z : \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} dx' dy' dz'.$$

Considérant de la même manière l'influence de la variation tempo-

(1) $J = \frac{d\mu \cdot \delta}{d\sigma} = \frac{\lambda dy' dz' \cdot \delta}{dy' dz'} = \lambda \delta$. — δ doit être pris ici avec le signe + dans la direction des x négatifs, donc égal à $-dx'$.

raire des moments magnétiques μ et ν , nous trouverons que les composantes de force électromotrice provenant de là se déduisent des précédentes par de simples permutations tournantes de toutes les quantités. Nous obtenons ainsi pour les composantes dues à l'influence de μ :

$$\text{suivant les } x : - \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} dx' dy' dz', \quad \text{suivant les } y : 0,$$

$$\text{suivant les } z : \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} dx' dy' dz',$$

et pour les composantes dues à l'influence de ν :

$$\text{suivant les } x : + \frac{\partial \nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} dx' dy' dz',$$

$$\text{suivant les } y : - \frac{\partial \nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} dx' dy' dz', \quad \text{suivant les } z : 0.$$

En ajoutant les expressions de même espèce, nous obtenons les valeurs suivantes des composantes de la force électromotrice produite au point x, y, z pour la variation temporaire du moment magnétique qui se trouve en $dx' dy' dz'$:

$$\text{suivant les } x : \left[\frac{\partial \nu}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} - \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{suivant les } y : \left[\frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} - \frac{\partial \nu}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} \right] dx' dy' dz',$$

$$\text{suivant les } z : \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} \right] dx' dy' dz'.$$

Nous pouvons transformer un peu ces expressions. On a en effet :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}.$$

Faisons ces substitutions et remarquons que les moments λ , μ , ν dépendent bien de x' , y' , z' , mais non de x , y , z , et qu'ensuite x , y , z sont indépendants de t : alors les composantes ci-dessus peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \left(\frac{\nu}{r} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\partial z} \right] dx' dy' dz', \\ & -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \left(\frac{\lambda}{r} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{\nu}{r} \right)}{\partial x} \right] dx' dy' dz', \\ & -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{r} \right)}{\partial y} \right] dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Formons maintenant ces grandeurs pour tous les éléments $dx' dy' dz'$ où existe une polarisation magnétique (et il faut en admettre une en tous les points de l'espace infini) (voir l'introduction) et posons

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \iiint \frac{\lambda}{r} dx' dy' dz' &= L, & \iiint \frac{\mu}{r} dx' dy' dz' &= M, \\ \iiint \frac{\nu}{2} dx' dy' dz' &= N; \end{aligned} \right.$$

dès lors les composantes de la force électromotrice produite en x , y , z par la variation temporaire de l'état de polarisation magnétique de l'espace infini, deviennent :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{suivant les } x &: \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right], \\ \text{suivant les } y &: \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right], \\ \text{suivant les } z &: \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right.$$

§ 16. — Composantes de la force électromotrices totale. — Récapitulation.

Réunissons toutes les forces électromotrices considérées plus haut et désignons par X , Y , Z les composantes de la force électromotrice

d'origine thermo ou hydroélectrique; dès lors nous aurons les expressions suivantes pour la force électromotrice totale en un point x, y, z :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right] + X; \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right] + Y, \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right] + Z. \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons vu, il existe de nombreuses relations entre les grandeurs qui entrent dans ces expressions, Nous allons les réunir pour récapituler.

Les relations (22_a) établissent les relations entre les fonctions U, V, W d'une part, et les composantes de courant u, v, w et la fonction potentielle φ d'autre part

$$\Delta U = 4\pi u + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \Delta V = 4\pi v + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t},$$

$$\Delta W = 4\pi w + \frac{2(1-k)}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}.$$

et la relation (23) donne

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{2k}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Les relations (9) donnent les liaisons entre u, v, w et φ , savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t};$$

$$(u-u')a + (v-v')b + (w-w')c = \frac{1}{2\pi v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}.$$

Pour la surface limite de l'espace situé à l'infini, on a

$$U = V = W = \varphi = 0.$$

Il y a des relations analogues entre λ, μ, ν et γ , savoir :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = -\frac{\Delta \gamma}{4\pi},$$

$$(\lambda - \lambda')a + (\mu - \mu')b + (\nu - \nu')c = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} \right)_{+\delta} - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} \right)_{-\delta} \right\}.$$

Entre les fonctions L, M, N et χ on peut obtenir une relation analogue à (23), savoir :

$$(31) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \chi.$$

On obtient cette relation de la même manière que l'équation (23).

Pour terminer, nous allons présenter encore les relations entre les composantes de la force magnétique \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} , d'une part, et les fonctions U, V, W de l'autre. Considérons les relations (12) et (14_a), et supposons que les composantes de forces magnétiques entrant dans ces équations proviennent de la sommation des composantes analogues dues aux éléments isolés; nous pourrons ainsi en déduire aisément les composantes de forces magnétiques dues à un seul élément. Appliquons alors ce résultat au système de courants et nous obtiendrons, en tenant compte des valeurs trouvées pour U, V, W (voir § 13), les expressions suivantes des fonctions \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} :

$$(32) \quad \mathcal{L} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \mathcal{N} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

§ 17. — Cas particulier ; Le coefficient k est nul.

Si nous donnons une valeur nulle au coefficient encore indéterminé k , les expressions (30) trouvées pour les composantes de force électromagnétique se simplifient beaucoup; en effet, l'équation (23) donne

$$(32_a) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Considérons ensuite les relations (27) et (32) qui se réduisent à

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{S}} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{\mathfrak{S}} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\nu}{\mathfrak{S}} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Au lieu des trois fonctions U, V, W, introduisons trois autres fonctions R_1 , R_2 , R_3 , telles que

$$U = \frac{\partial R_2}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial R_3}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial x}.$$

(1) Voir Helmholtz, mémoire cité plus haut, p. 123.

La substitution donne

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\mathfrak{s}} &= \frac{\partial^2 R_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \frac{\mu}{\mathfrak{s}} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \frac{\nu}{\mathfrak{s}} &= \frac{\partial^2 R_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 R_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_3}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Entre les fonctions R_1 , R_2 , R_3 nous pouvons supposer une certaine relation, telle que

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial R_3}{\partial z} = 0;$$

les équations précédentes deviennent ainsi :

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{s}} = -\Delta R_1 + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{\mathfrak{s}} = -\Delta R_2 + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\nu}{\mathfrak{s}} = -\Delta R_3 + \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

d'où nous déduisons :

$$\begin{aligned}4\pi R_1 &= \iiint \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{s}} - \frac{\partial \chi}{\partial x'} \right) \frac{dx' dy' dz'}{r}, & 4\pi R_2 &= \iiint \left(\frac{\mu}{\mathfrak{s}} - \frac{\partial \chi}{\partial y'} \right) \frac{dx' dy' dz'}{r}, \\ 4\pi R_3 &= \iiint \left(\frac{\nu}{\mathfrak{s}} - \frac{\partial \chi}{\partial z'} \right) \frac{dx' dy' dz'}{r},\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (28),

$$\begin{aligned}4\pi R_1 &= \frac{L}{\mathfrak{s}} - \iiint \frac{\partial \chi}{\partial x'} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r}, \\ 4\pi R_2 &= \frac{M}{\mathfrak{s}} - \iiint \frac{\partial \chi}{\partial y'} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r}, \\ 4\pi R_3 &= \frac{N}{\mathfrak{s}} - \iiint \frac{\partial \chi}{\partial z'} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r},\end{aligned}$$

où

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Substituons maintenant les expressions de R_1 , R_2 , R_3 dans les relations de U , V , W , et tout d'abord dans celle de U :

$$\begin{aligned}4\pi U &= \frac{1}{\mathfrak{s}} \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \iiint \frac{\partial \chi}{\partial y'} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \iiint \frac{\partial \chi}{\partial z'} \cdot \frac{dx' dy' dz'}{r},\end{aligned}$$

ou

$$4\pi U = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \iiint \frac{\partial \chi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} dx' dy' dz' \\ + \iiint \frac{\partial \chi}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} dx' dy' dz'.$$

Utilisons maintenant les relations $\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'}$, $\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z}$

$$= -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'}$$

et intégrons par parties; nous aurons :

$$\iiint \frac{\partial \chi}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} dx' dy' dz' = -\iiint \frac{\partial \chi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} dx' dy' dz' \\ = -\iint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y'} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y'} \right) \cos c \cdot d\omega + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y' \partial z'} dx' dy' dz'.$$

On a de même :

$$\iiint \frac{\partial \chi}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} dx' dy' dz' = -\iiint \frac{\partial \chi}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} dx' dy' dz' \\ = -\iint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z'} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z'} \right) \cos b \cdot d\omega + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y' \partial z'} dx' dy' dz'.$$

Les intégrales doubles doivent être étendues à toutes les surfaces limites des différents milieux et les intégrales triples à tout l'espace infini. χ et χ_1 désignent les valeurs du potentiel magnétique des deux côtés de la surface limite, a , b , c sont les cosinus de direction de la normale n à la surface limite et $d\omega$ un élément de cette dernière.

Rappelons-nous maintenant que χ est une fonction continue pour toutes les surfaces limites et que

$$\frac{\partial \chi}{\partial y'} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y'} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \right) \cos b, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z'} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z'} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \right) \cos c;$$

on a donc simplement

$$\text{et par conséquent } \left. \begin{aligned} 4\pi\mathfrak{S}U &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ 4\pi\mathfrak{S}V &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ 4\pi\mathfrak{S}W &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Les composantes de la force électromotrice prennent ainsi une forme très simple, savoir :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} + (1 + 4\pi\mathfrak{S}) \frac{\partial U}{\partial t} + X, \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} + (1 + 4\pi\mathfrak{S}) \frac{\partial V}{\partial t} + Y, \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} + (1 + 4\pi\mathfrak{S}) \frac{\partial W}{\partial t} + Z. \end{aligned} \right.$$

Si le milieu n'a pas de polarisation magnétique, $\mathfrak{S} = 0$ et les composantes deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + X, \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t} + Y, \\ \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial t} + Z. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, dans un milieu susceptible d'être aimanté, les composantes de la force électromotrice produite par induction sont agrandies dans le rapport de 1 à $1 + 4\pi\mathfrak{S}$.

Représentons-nous que tout le système de courants s'évanouisse complètement dans un temps extrêmement minime τ ; le travail effectué pendant ce temps par les forces électromotrices dues à l'induction sera alors égal au potentiel électrodynamique actuel de tout le système sur lui-même. Il suit de là que cette fonction est aussi augmentée dans le rapport de 1 à $1 + 4\pi\mathfrak{S}$ par la polarisation magnétique du milieu. Naturellement il en est encore ainsi dans le cas de deux courants linéaires fermés. Or le potentiel électrodyna-

mique de ces derniers est égal à [voir l'équation (15)]

$$\frac{1}{4\pi} \iiint KK' \cos(\mathbf{K}, \mathbf{K}') dx dy dz,$$

où \mathbf{K} , \mathbf{K}' désignent les forces magnétiques dues aux deux courants en un point quelconque x, y, z ; il suit de là que la force magnétique agissant en un point quelconque et due à un courant linéaire fermé est $\sqrt{1 + 4\pi\mathfrak{E}}$ fois plus grande pour un milieu susceptible d'être aimanté que pour un autre qui ne l'est pas.

L'action magnétique d'un courant est, comme nous l'avons vu § 7 et dans l'équation (10_a), proportionnelle à l'intensité du courant. Si nous déterminons donc l'intensité du courant par l'action magnétique, celle-ci est trop grande dans un milieu susceptible d'être aimanté et cela dans le rapport de 1 à $\sqrt{1 + 4\pi\mathfrak{E}}$, c'est-à-dire que la véritable intensité du courant est égale à celle qu'on mesure, divisée par $\sqrt{1 + 4\pi\mathfrak{E}}$.

Supposons maintenant aussi $k = 0$ dans (22), en nous rappelant que d'après les relations (2) et (8), où nous regardons maintenant toutes les grandeurs comme exprimées en unités électromagnétiques; on a

$$\begin{aligned} u &= \left(C + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_x, \\ v &= \left(C + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_y, \\ w &= \left(C + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_z, \end{aligned}$$

substituant à $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ les composantes de la force électromotrice (34) et puis les valeurs de u, v, w dans l'équation (12), nous aurons les équations différentielles suivantes :

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \Delta U &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 4\pi \left(C + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} + (1 + 4\pi\mathfrak{E}) \frac{\partial U}{\partial t} + X \right], \\ dV &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + 4\pi \left(C + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial y} + (1 + 4\pi\mathfrak{E}) \frac{\partial V}{\partial t} + Y \right], \\ dW &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + 4\pi \left(C + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial z} + (1 + 4\pi\mathfrak{E}) \frac{\partial W}{\partial t} + Z \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent les équations générales du mouvement de l'électricité dans des corps en repos, dans l'hypothèse toutefois que la constante encore indéterminée k soit nulle.

Dans la suite, nous supposerons toujours $k = 0$, et nous prendrons ces équations différentielles comme le point de départ de nos considérations ultérieures.

DEUXIÈME PARTIE

Théorie électromagnétique de la lumière.

QUATRIÈME SECTION

Lois de la propagation de la lumière.

§ 18. — *Propagation de la lumière dans un mauvais conducteur isotrope.*

Si la lumière est réellement un phénomène électromagnétique, elle doit nécessairement être soumise aux lois exprimées par les équations générales du mouvement de l'électricité; en d'autres termes, ces équations doivent conduire aux lois des phénomènes optiques.

Quant aux équations différentielles (35), nous avons à faire remarquer aussitôt que dans toutes les questions que nous avons à traiter, les forces X , Y , Z et le potentiel ψ provenant des électricités libres (non produites par polarisation) peuvent être égalés à zéro, et que, en outre, la constante de polarisation magnétique \mathfrak{S} est à peu près la même pour toutes les substances, à l'exception du fer, comme l'a montré Boltzmann (1); de cette manière, nous pourrions, sans erreur sensible, admettre partout la constante de polarisation magnétique de l'air.

Si le milieu est isotrope, on a $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$. En dérivant les équations (35) par rapport à x , y , z et les ajoutant, nous obtenons

$$0 = \frac{2}{v^2} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + 4\pi \left(C + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \varphi \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \varphi}{4\pi} = F e^{-\frac{2\pi v' C t}{1 + 2\pi v' \epsilon}},$$

où F est une fonction de x , y , z à déterminer.

(1) Voir *Ann. de Pogg.*, t. CLIII, p. 530, 1874.

Cette équation exprime que la densité de l'électricité libre produite par polarisation en un point x, y, z , décroît avec le temps jusqu'à s'annuler dans un milieu conducteur isotrope, et cela d'autant plus rapidement que le coefficient de conductibilité C est plus grand, tandis que, dans un mauvais conducteur isotrope, la densité est, au contraire, indépendante du temps.

En intégrant, pour le cas d'un isolant parfait où $C = 0$, l'équation différentielle

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

nous obtenons

$$\varphi = [F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)] t + F_3(x, y, z).$$

Ainsi φ croît proportionnellement au temps, mais en réalité les phénomènes lumineux sont de nature périodique; nous devons donc supposer

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \quad (4).$$

Il suit de là (équation 9), que tous les courants sont fermés, ou que la quantité totale d'électricité dans une surface fermée demeure toujours la même.

Les équations différentielles prennent alors la forme suivante :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 4\pi\epsilon (1 + 4\pi\epsilon) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \Delta V = 4\pi\epsilon (1 + 4\pi\epsilon) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \Delta W = 4\pi\epsilon (1 + 4\pi\epsilon) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{array} \right.$$

forme identique à celle des équations du mouvement d'un corps élastique incompressible. Pour abréger, posons $\frac{1}{\Lambda^2} = 4\pi\epsilon (1 + 4\pi\epsilon)$. Concevons autour d'un point quelconque x, y, z comme centre, une

(4) L'expérience montre bien que, dans tous les phénomènes optiques, il ne se produit nulle part de l'électricité ou du magnétisme libre, mais cela ne prouve rien, attendu que $\frac{\Delta \varphi}{4\pi}$ peut changer de signe pendant une vibration lumineuse et que cette grandeur est en outre excessivement minime et du même ordre que les composantes u, v, w .

sphère décrite avec le rayon r ; si l'on multiplie la première des équations (36) par $dx dy dz$ puis qu'on intègre pour tout l'espace limité par la sphère (4), on obtient, à l'aide du théorème de Green,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint U dx dy dz &= A^2 \iiint \Delta U dx dy dz = A^2 \iint \frac{\partial U}{\partial r} dS \\ &= A^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint U d\omega, \end{aligned}$$

où dS et $d\omega$ désignent des éléments des surfaces sphériques de rayon r et de rayon 1. Si nous écrivons dans l'intégrale de gauche $dx dy dz = \rho^2 d\omega d\rho$, nous parvenons à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint d\omega \int_0^r U \rho^2 d\rho = A^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint U d\omega.$$

En dérivant de part et d'autre par rapport à r , nous obtenons

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint U d\omega = A^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint U d\omega \right),$$

ou bien, si \bar{U} désigne l'expression $\frac{1}{4\pi} \iint U d\omega$, c'est-à-dire la moyenne de toutes les valeurs de U sur la surface de la sphère de rayon r ,

$$(37) \quad \frac{\partial^2 (\bar{U} r)}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 (\bar{U} r)}{\partial r^2}.$$

Cette équation différentielle a l'intégrale connue

$$\bar{U} r = F(r - At) + f(r + At);$$

où F et f sont des fonctions à déterminer; elle exprime que la *valeur moyenne de U , prise pour une surface sphérique de rayon r et ayant pour centre le point x, y, z du milieu, se propage d'après les mêmes lois qu'une onde sonore sphérique symétrique.*

Si les fonctions U et $\frac{dU}{dt}$ sont données au temps $t = 0$ pour tout le milieu par les relations $U = \psi(x, y, z)$, $\frac{dU}{dt} = \chi(x, y, z)$, on peut tirer de là les fonctions F et f de la manière suivante :

(4) Liouville, *Journal de Mathématique*, 1836, p. 4-6.

Et tout d'abord, pour $t = 0$, on a

$$\bar{U} = \frac{1}{4\pi} \iint \psi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega,$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega.$$

Ici, l, m, n désignent les cosinus de direction du rayon r appartenant à $d\omega$. D'autre part, on a pour $t = 0$,

$$\bar{U} = \frac{1}{r} F(r) + \frac{1}{r} f(r), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{\Lambda}{r} F'(r) + \frac{\Lambda}{r} f'(r).$$

D'après cela,

$$f(r) = \frac{1}{8\pi\Lambda} \iint \psi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega \int_0^r dr.r$$

$$+ \frac{r}{8\pi} \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega - \frac{\text{const.}}{2\Lambda},$$

$$F(r) = \frac{r}{8\pi} \iint \psi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega$$

$$- \frac{1}{8\pi\Lambda} \int_0^r dr.r \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega + \frac{\text{const.}}{2\Lambda},$$

et, par conséquent, pour le temps t ,

$$38) \quad \bar{U}_r = \begin{cases} \frac{1}{8\pi}(r + \Lambda t) \iint \psi[x + l(r + \Lambda t), y + m(r + \Lambda t), z + n(r + \Lambda t)] d\omega \\ + \frac{1}{8\pi\Lambda} \int_0^{r + \Lambda t} dr.r \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega \\ + \frac{1}{8\pi}(r - \Lambda t) \iint \psi[x + l(r - \Lambda t), y + m(r - \Lambda t), z + n(r - \Lambda t)] d\omega \\ - \frac{1}{8\pi\Lambda} \int_0^{r - \Lambda t} dr.r \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega. \end{cases}$$

Si l'on fait $r = 0$, on obtient l'expression de U au point x, y, z pour le temps t . Mais on y arrive bien plus simplement en déri-

vant l'équation par rapport à r , puis en faisant $r = 0$. Il faut tenir compte de ce que, en vertu de la symétrie relative au point x, y, z , on a

$$\iint \psi(x + lr, y + \dots) d\omega = \iint \psi(x - lr, \dots) d\omega,$$

$$\iint \chi(x + lr, \dots) d\omega = \iint \chi(x - lr, \dots) d\omega.$$

La dérivation donne

$$(\bar{U})_0 = \frac{1}{4\pi} \iint \psi(x + lAt, y + mAt, z + nAt) d\omega$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint \psi(x + lAt, \dots) d\omega + \frac{t}{4\pi} \iint \chi(x + lAt, \dots) d\omega,$$

ou

$$(38_a) \left\{ \begin{array}{l} (\bar{U})_0 = \frac{t}{4\pi} \iint \chi(x + lAt, y + mAt, z + nAt) d\omega \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t \iint \psi(x + lAt, \dots) d\omega \right\}. \end{array} \right.$$

Ici $(\bar{U})_0$ désigne la valeur de U au point x, y, z ($r = 0$) au temps t . De là le théorème suivant :

A chaque instant l'état au point (x, y, z) dépend de l'état qui s'est produit à la distance At avant le temps t , ou bien les perturbations électriques se propagent à travers le milieu avec la vitesse

$$\text{constante } A = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon(1 + 4\pi\epsilon)}}.$$

Admettons par exemple que les fonctions U et $\frac{dU}{dt}$ soient nulles au temps $t = 0$ en tous les points, à l'exception d'un certain espace S . Pour déterminer alors l'état en un point P en dehors du volume S , concevons deux sphères décrites autour de P comme centre, de manière qu'elles touchent S en l'enveloppant. Soit At_1 le rayon de la plus petite sphère, At_2 celui de la plus grande. D'après ce qui précède, la perturbation en P commencera seulement au temps t_1 , durera jusqu'au temps t_2 , puis s'évanouira pour toujours.

De là deux conséquences importantes :

1° Si au temps $t = 0$, le champ de la perturbation est un plan indéfini, alors le lieu géométrique de tous les points atteints par elle au temps t se compose en général de deux plans parallèles au premier et distants de Λt de celui-ci ;

2° Si nous imaginons un autre plan incliné de l'angle α sur les précédents, et des droites menées dans ce plan parallèlement aux autres, la perturbation commencera simultanément en tous les points d'une même droite et se propagera d'une droite à une autre proportionnellement au temps avec une vitesse constante $\frac{\Lambda}{\sin \alpha}$. Réciproquement, si une perturbation se propage dans un plan de manière que si nous y menons une série de droites parallèles, la perturbation commence simultanément en tous les points d'une même droite et passe d'une droite à l'autre avec une vitesse constante Λ' , le lieu géométrique de tous les points où arrive en même temps la perturbation émanée du plan en question consistera en général en deux plans inclinés sur le premier d'un angle α tel que $\sin \alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda'}$.

Nous utiliserons ces conséquences dans l'explication de la réflexion et de la réfraction.

§ 49 (suite). — Vitesse de la propagation.

Pour la vitesse de propagation des perturbations électriques nous avons trouvé l'expression $\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon(1 + 4\pi\epsilon')}} \cdot$ Quelle est la valeur de cette vitesse? Pour la trouver, nous devons connaître l'énergie électrostatique du milieu considéré dans ses différents points pour le cas où il est polarisé par des masses électriques données.

Concevons un conducteur chargé à un certain niveau (élevé à un certain potentiel). Admettons que tout l'espace soit rempli de l'isolant isotrope considéré plus haut. La polarisation de ce dernier produit de l'électricité libre aux différents points et à la surface limite de l'isolant et du conducteur. Or, soit ϕ le potentiel dû aussi bien aux quantités d'électricité libre accumulées sur le conducteur qu'à celles

développées par polarisation; désignons par n la normale tirée vers l'intérieur du conducteur; alors l'énergie électrostatique totale vaut

$$-\frac{1}{8\pi} \iint \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi \, d\sigma + \frac{1}{2} \iint \left(f \frac{\partial x}{\partial n} + g \frac{\partial y}{\partial n} + h \frac{\partial z}{\partial n} \right) \psi \, d\sigma \\ - \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \psi \, dx \, dy \, dz.$$

Les deux premières intégrales doivent être étendues à la surface du conducteur, la troisième à tout l'isolant. Cette dernière intégrale peut se transformer par intégration partielle en

$$-\frac{1}{2} \iint \left(f \frac{\partial x}{\partial n} + g \frac{\partial y}{\partial n} + h \frac{\partial z}{\partial n} \right) \psi \, d\sigma \\ + \frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{\partial \psi}{\partial x} + g \frac{\partial \psi}{\partial y} + h \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

La première intégrale doit de nouveau s'étendre à la surface du conducteur, la deuxième à tout l'isolant. L'intégrale relative à la surface limite infiniment éloignée de l'isolant est négligée, car là le produit du potentiel par les moments électriques f, g, h sont des infiniment petits du troisième ordre.

L'énergie électrostatique totale devient donc

$$-\frac{1}{8\pi} \iint \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi \, d\sigma + \frac{1}{2} \iiint \mathfrak{D} \mathfrak{E} \, dx \, dy \, dz.$$

Ici \mathfrak{D} et \mathfrak{E} ont le même sens que dans (1). Comme le milieu est supposé isotrope, $\cos(\mathfrak{E}, \mathfrak{D})$ est égal à 1.

L'énergie totale se compose de deux parties : la première se rapporte à la surface du conducteur, la deuxième à tout l'isolant et notamment à toutes les parties où se présentent des forces électriques et des distributions d'électricité. Conséquemment l'énergie électrostatique de l'isolant en un point x, y, z et par unité de volume vaut $\frac{1}{2} \mathfrak{D} \mathfrak{E}$ ou, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{1}{2\epsilon} \mathfrak{D}^2.$$

D'après sa nature, cette grandeur exprime un travail relativement

à l'unité de volume; elle a donc pour dimension $[ML^{-1}T^{-2}]$, soit dans le système électrostatique, soit dans le système électromagnétique.

Désignons maintenant les grandeurs \mathcal{D} , \mathcal{E} et ε mesurées en unités électromagnétiques par \mathcal{D} , \mathcal{E} , ε et mesurées en unités électrostatiques par \mathcal{D}_1 , \mathcal{E}_1 , ε_1 ; dès lors, en prenant pour base dans les deux systèmes les mêmes unités de longueur, de masse et de temps, nous aurons $\mathcal{D}\mathcal{E} = \mathcal{D}_1\mathcal{E}_1$ ou

$$\frac{\mathcal{D}^2}{\varepsilon} = \frac{\mathcal{D}_1^2}{\varepsilon_1} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon} = \left(\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}}\right)^2 = v^2.$$

Imaginons actuellement la quantité d'électricité qu'on considère, mesurée dans l'air en unités électrostatiques; nous obtenons alors une valeur \mathcal{D}'_1 qui, d'après le § 3, se rapporte à la vraie valeur \mathcal{D}_1 de manière que

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 \sqrt{1 + 4\pi\varepsilon_0},$$

ε_0 étant la constante de polarisation électrique de l'air en unités électrostatiques. Si nous supposons que la mesure soit encore effectuée dans l'air mais en unités électromagnétiques, nous avons une valeur \mathcal{D}' telle que (§ 17)

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}'}{\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon}}$$

En conséquence, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{4\pi\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon} = \left(\frac{\mathcal{D}'_1}{\mathcal{D}'}\right)^2 (1 + 4\pi\varepsilon_0) (1 + 4\pi\varepsilon),$$

ou

$$(39) \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon} \sqrt{1 + 4\pi\varepsilon}} = \frac{\mathcal{D}'_1}{\mathcal{D}'} \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_1}}$$

Si l'isolant isotrope considéré est l'air atmosphérique, on a $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$; dès lors, si nous admettons de plus, avec Maxwell, que ε_0 soit très grand, nous obtenons $\mathcal{D}'_1 : \mathcal{D}'$ pour vitesse de propagation des perturbations électriques.

En vertu de ce qui précède, ce quotient désigne le nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique, dans

l'hypothèse où les deux déterminations de ces unités soient prises dans l'air.

Or, ce quotient, d'après sa nature, est une vitesse. Voici la preuve. Désignons toujours par L, M, T les unités fondamentales de la longueur, de la masse et du temps, et considérons d'abord un milieu non susceptible d'être polarisé; alors, d'après la loi de Coulomb, la dimension de l'unité électrostatique d'électricité est $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$, celle de l'unité électromagnétique, au contraire, $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$. La dernière résulte de la valeur de la force qu'un élément de courant ds parcouru par un courant J (en mesure électromagnétique) exerce sur un pôle magnétique d'intensité μ à la distance r . Cette force est égale à

$$\mu J \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds),$$

et a pour dimension

$$[LMT^{-2}].$$

Or, μ a pour dimension, d'après la loi de Coulomb, $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$ et $\frac{ds}{r^2}$ a pour dimension $[L^{-1}]$; donc, celle de J est $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$, et, par conséquent, la dimension de l'unité électromagnétique d'électricité est $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

Il suit de là que la grandeur v a pour dimension $[LT^{-1}]$ et exprime une vitesse. En effet, une recherche précise montre (1) que cette grandeur est identique à la constante de la loi fondamentale de Weber

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) \right]$$

c'est-à-dire que $v \sqrt{2}$ est la vitesse relative avec laquelle des particules électriques doivent se mouvoir, sans accélération relative, dans un milieu non susceptible d'être polarisé, lorsque leur action réciproque doit être nulle,

Nous avons trouvé pour le quotient $\frac{\mathcal{D}'_1}{\mathcal{D}_1}$ la relation

$$\frac{\mathcal{D}'_1}{\mathcal{D}_1} = \frac{v}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \sqrt{1 + 4\pi\epsilon}}$$

(1) Maxwell, art 769; Riemann-Hattendorff, p. 323.

Pour déterminer sa dimension, nous avons encore besoin de chercher celle de ϵ_0 et \mathfrak{S} ; ϵ_0 est la constante de polarisation de l'air mesurée en unités électrostatiques. L'énergie électrostatique de l'air en un point quelconque, prise par unité de volume est, comme nous l'avons vu,

$$\frac{\mathcal{D}'^2}{2\epsilon_0},$$

où \mathcal{D}' est mesuré en unités électrostatiques; cette énergie a pour dimension $[L^{-1} T^{-2} M]$. Mais la grandeur \mathcal{D}' considérée comme quantité d'électricité rapportée à l'unité de surface, a pour dimension $[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$; donc ϵ_0 a pour dimension $[0]$. On peut démontrer de même que \mathfrak{S} a pour dimension $[0]$; donc, le quotient $\frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}}$ a même dimension que v , et représente naturellement une vitesse.

Si la lumière est un phénomène électromagnétique, la vitesse de la lumière dans l'air doit coïncider avec la grandeur $\mathcal{D}' : \mathcal{D}$. Les deux grandeurs ont été déterminées par des méthodes tout à fait différentes et complètement indépendantes entre elles. On a trouvé :

VITESSE DE LA LUMIÈRE.		RAPPORT DES UNITÉS ÉLECTRIQUES POUR L'AIR.	
	mètres par 1 ^r		mètres par 1 ^r
Fizeau	314,000,000	Weber	310,740,000
Aberration, etc., et parallaxe du soleil. }	308,000,000	Maxwell.....	288,000,000
Foucault	298,360,000	Thomson.....	282,000,000

Il suit de là que la vitesse de la lumière et le rapport des deux unités électriques sont du même ordre de grandeur. Ni l'une ni l'autre n'ont été déterminées avec précision, de sorte que l'on ne peut affirmer que l'une soit supérieure ou inférieure à l'autre. Assurément la comparaison des deux résultats n'est pas en contradiction avec la théorie électromagnétique de la lumière. Il suit immédiatement de là que l'hypothèse précédente, d'après laquelle ϵ_0 serait extrêmement grand, doit être regardée comme exigée par la théorie de la lumière.

§ 20 (suite). — Rapport de l'indice de réfraction
avec la constante diélectrique.

D'après l'équation (39), la vitesse de propagation des perturbations électriques dans un isolant isotrope ayant ϵ_1 pour constante de polarisation électrique, est à celle relative à l'air comme $\sqrt{4\pi\epsilon_0} : \sqrt{4\pi\epsilon_1}$, ou bien, puisque ϵ_0 et ϵ_1 sont très grands, comme $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} : \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_1}$, ou comme $1 : \sqrt{D}$, D étant la constante diélectrique de l'isolant considéré, prise dans le sens relatif.

D'autre part, les vitesses de la lumière dans le milieu considéré et dans l'air sont comme $1 : n$, n étant l'indice de réfraction.

Notre théorie nous conduit donc à la conséquence

$$(40) \quad n^2 = D,$$

c'est-à-dire que le carré de l'indice de réfraction est égal à la constante diélectrique.

En général, l'indice de réfraction est différent pour les diverses couleurs, plus grand pour les vibrations plus rapides, moindre pour les vibrations lentes. Mais notre théorie nous conduit à la conséquence que, dans un milieu isotrope, la vitesse de propagation de toutes les couleurs est la même. Cette circonstance étonne au premier abord; toutefois nous verrons dans la suite comment nous devons l'expliquer.

C'est L. Boltzmann (1) qui le premier a donné une vérification expérimentale (2) de la loi extrêmement remarquable exprimée par l'équation (40).

La figure 6 (page 58) montre le dispositif servant à la détermination de la constante diélectrique. CC est un condensateur de Kohlrausch entre les plaques duquel sont amenés les isolants à examiner en lames à faces parallèles. Le déplacement de l'une des plaques est obtenu à l'aide d'un réseau en verre (*Glasgitter*) G, divisé en dixièmes

(1) *Sitzungsber. de l'Académie de Vienne*, t. LXVI, LXVII, LXVIII, LXIX, LXX. — *Annales de Pogg.*, t. CLI, CLIII et CLV, 1874, 1875.

(2) Des essais de détermination de constantes diélectriques de plusieurs substances ont été faits avant Boltzmann par Cavendish (1771-1781), Faraday (gomme laque, soufre, verre, essence de térébenthine, 1837), Siemens (soufre, 1857), Gibson et Barclay (paraffine, 1871); toutefois Boltzmann a été le premier qui, dans la détermination des constantes électriques, ait eu égard en même temps à la loi (40).

de millimètre, d'une bande de verre H portant un réticule, et d'un microscope M grossissant 100 fois. K et L sont des cordons en caoutchouc. I, II, III sont les extrémités de fils perpendiculaires au plan du papier. Si I est descendu jusqu'au contact avec DF, alors l'électromètre de Thomson E est déchargé. Si l'on fait descendre II, on

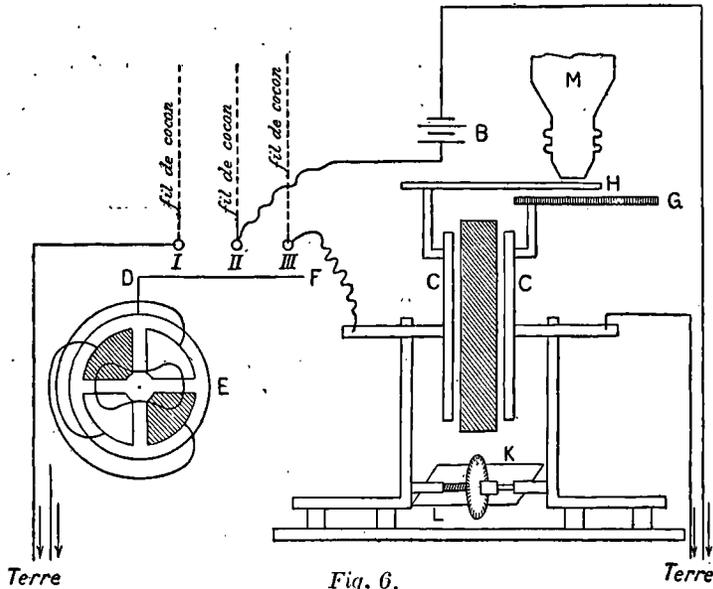


Fig. 6.

charge l'électromètre par la batterie B, composée de plusieurs éléments Daniell. On obtient alors une déviation b , ou ce qu'on appelle la déviation de batterie. Quand on soulève III, on charge le condensateur C C par la batterie; si on descend III jusqu'au contact avec DF, on relie le condensateur C C à l'électromètre. C'est ainsi qu'on obtient la déviation du condensateur c . Ces deux déviations permettent de calculer la capacité K du condensateur d'après la formule (4)

$$K = E \left(1 + \frac{c}{50000} \right) \frac{c}{b - c}$$

E, qui dépend seulement de l'électrisation de la plaque d'aluminium,

(4) Pour plus de précision, Boltzmann faisait communiquer constamment l'électromètre avec l'une des plaques d'un second électromètre de petites dimensions, dont l'autre plaque était naturellement mise en communication avec le sol.

n'a pas besoin d'être déterminé exactement, car dans le calcul de la constante diélectrique il ne s'agit que du rapport de deux capacités mesurées pour une électrisation égale de la plaque d'aluminium. On peut donc écrire immédiatement $E = 1$.

D'autre part on obtient pour K l'expression

$$K = \frac{QF}{4\pi \left(m - n + \frac{n}{D} \right)},$$

où Q désigne la surface d'une plaque du condensateur, F une grandeur qui dépend du système d'unités employées (en mesures absolues $F = 1$), D la constante diélectrique, n l'épaisseur de la plaque isolante et m la distance des plaques du condensateur. Si la plaque isolante ne se trouve pas entre les plaques du condensateur, la capacité est alors égale à

$$K_0 = \frac{QF}{4\pi m}.$$

On se sert de ces trois formules pour déterminer la valeur réciproque de la capacité et l'on arrive ainsi à la constante diélectrique D après qu'on a donné à m les valeurs m , $m + dm$, $m + 2dm$, etc., dans lesquelles il suffit de mesurer dm , $2dm$, etc.

Boltzmann a examiné ainsi quatre substances, le soufre, la paraffine, la colophane et la résine (*Hartgummi*). Les constantes diélectriques de cette dernière substance et de la paraffine ont encore été déterminées par lui au moyen d'un condensateur à mercure de son invention.

Il a obtenu les résultats suivants :

	D	n_∞
Soufre.....	3,84	4,06
Paraffine	2,32	2,33
Colophane.....	2,55	2,38
Hartgummi.....	3,15	—

n_∞ désigne l'indice de réfraction pour la lumière de longueur d'onde infinie. En effet, si nous voulons vérifier l'équation (40), nous devons choisir les indices correspondant à des ondes de plus longue période, car ce sont les seules ondes dont le mouvement puisse être comparé à la marche lente par laquelle nous déterminons la constante diélectrique.

Les constantes diélectriques des quatre substances ci-dessus ont encore été déterminées par Boltzmann à l'aide d'une autre méthode, qui repose essentiellement sur l'action diélectrique à distance et qui sera expliquée plus tard quand il s'agira de la double réfraction. Les valeurs trouvées ainsi diffèrent peu des précédentes.

Boltzmann a vérifié aussi la loi (40) pour une série de gaz. Pour en déterminer les constantes D , il amenait le condensateur sous un récipient et reliait l'une des plaques avec une batterie de 300 éléments Daniell, l'autre avec l'électromètre. Sur le fil l conduisant à l'électromètre, se trouvait un deuxième fil communiquant avec le sol. Ainsi l'électromètre ne montrait pas de déviation, pas plus lorsque m était détaché de l . Boltzmann introduisait encore un élément Daniell et obtenait ainsi la déviation β . Puis il ôtait de nouveau cet élément du circuit, annulait β par le contact de m et de l , soulevait encore m et raréfiait le gaz. De là une nouvelle déviation — α . Les déviations α et β permettent de calculer D . En effet, si D_1 et D_2 sont les valeurs de D avant et après la raréfaction, on a

$$\frac{D_1}{D_2} = 1 + \frac{\alpha}{300\beta}.$$

Il y avait en outre la loi : *L'accroissement de la constante diélectrique est proportionnel à l'accroissement de la pression du gaz.* Nous pouvons donc écrire :

$$D_1 = c \left\{ 1 + \lambda \frac{b_1}{760} \right\}, \quad D_2 = c \left\{ 1 + \lambda \frac{b_2}{760} \right\}.$$

b_1 et b_2 désignent les pressions du gaz mesurées en millimètres de mercure, avant et après la raréfaction; c et λ sont des constantes.

Si l'on admet que la proportionnalité de l'accroissement de la constante diélectrique et de l'augmentation de la pression se maintient jusqu'à évacuation complète, la grandeur λ a une signification très simple. Car on a $1 + \lambda = D_{760}$; D_{760} est la constante diélectrique du gaz à la pression de 760^{mm}, celle du vide absolu étant égale à l'unité.

Si μ est l'accroissement de l'indice de réfraction du gaz pour une augmentation de pression de 760^{mm}, on doit avoir, en vertu de (40),

$$\mu = \frac{\lambda}{2}.$$

Or, Boltzmann a obtenu les valeurs suivantes :

	$\frac{\lambda}{2}$	μ
Air.....	0,000279	0,000278
Acide carbonique....	0,000446	0,000424
Hydrogène.....	0,000125	0,000130
Oxyde de carbone....	0,000325	0,000321
Oxyde d'azote.....	0,000469	0,000475
Gaz oléfiant.....	{ 0,000604	0,000641
	{ 0,000633	
Gaz des marais.....	0,000445	0,000419

Si λ a été déterminé à la température t , alors, dans l'hypothèse où $1 + \lambda$ ou D_{760} varie avec la température de la même manière que l'indice de réfraction, l'expression $1 + \frac{\lambda}{2} (1 + 0,00366 t)$ est la racine carrée de la constante diélectrique du gaz à la température 0° centigrade et 760^{mm} de pression, celle du vide étant supposée égale à l'unité. Nous allons la désigner par $\sqrt{D_{0,760}}$; $n_{0,760}$ sera l'indice de réfraction à la température 0° et à la pression de 760^{mm} .

Boltzmann a obtenu les valeurs suivantes pour les gaz déjà cités et avec les suppositions faites plus haut :

	$\sqrt{D_{0,760}}$	$n_{0,760}$
Air.....	1,000295	1,000294
Acide carbonique....	1,000473	1,000449
Hydrogène.....	1,000132	1,000138
Oxyde de carbone....	1,000345	1,000340
Oxyde d'azote.....	1,000497	1,000503
Gaz oléfiant.....	1,000656	1,000678
Gaz des marais.....	1,000472	1,000443

Toutes les expériences montrent un accord très satisfaisant de la loi (40) avec l'expérience.

D'autres expériences de vérification de la même loi ont été faites par Schiller (1). Il a trouvé :

	D	n^2
Paraffine (refroidie lentement, d'un blanc laiteux)....	2,47	2,34
— (refroidie rapidement, presque transparente)	1,92	2,19
Caoutchouc pur.....	2,34	2,25

(1) *Ann. de Pogg.*, t. CLII, p. 533, 1874.

Les valeurs de n se rapportent aux valeurs moyennes des indices de réfraction dans le spectre.

Silow (1) a trouvé pour l'essence de térébenthine $D = 2,220$, $\sqrt{D} = 1,490$, $n_{\infty} = 1,459$. Gordon (2) s'est livré à des recherches plus longues (voir son ouvrage pour le dispositif de ses expériences) :

	\sqrt{D}	n_{∞}
Flint double très dense.....	1,778	1,672
Flint très dense.....	1,747	1,620
Flint léger.....	1,734	1,555
Crown dur.....	1,763	1,504
Paraffine.....	1,4119	1,4220

Gordon a trouvé aussi que la constante diélectrique du verre change avec le temps.

Hopkinson (3) a montré que la méthode de Gordon n'est pas entièrement satisfaisante et a conséquemment répété ses expériences. Il a trouvé :

	D
Flint double très dense.....	9,896
Flint dense.....	7,376
Flint léger.....	6,72 à 6,69
Flint très léger.....	6,61
Crown dur.....	6,69
Verre à vitre anglais.....	8,45

LIQUIDES.

	n_{∞}^2	D
Essence de pétrole.....	1,922	1,92
Pétrole (de Field).....	2,075	2,07
— ordinaire.....	2,078	2,10
<i>Ozokeritschieferöl</i> (Field).....	2,086	2,13
Térébenthine du commerce.....	2,128	2,23
Huile de ricin.....	2,153	4,78
Spermaceti.....	2,135	3,02
Huile d'olive.....	2,131	3,16
<i>Klaunenöl</i>	2,125	3,07

Les carrés des indices de réfraction pour des longueurs d'onde

(1) Silow, *Annli de Pogg.*, t. CLVI, p. 399, 1875.

(2) Gordon, *Phil. Transact.*, 1878; *Physical Treatise on Electricity and Magnetism*, I, 118; II, 273, 1880.

(3) *Phil. Mag.*, t. II, 1881, p. 353-373. — *Beiblätter de Wiedemann*, 1881.

infinies sont bien d'accord avec les constantes diélectriques pour les hydrocarbures, mais non pour les espèces de verre et les huiles grasses animales ou végétales.

Du défaut de concordance entre les valeurs de D et de n_{∞}^2 pour bien des substances, il ne faut pas conclure que la loi (40) n'est pas applicable à ces dernières, par la raison bien simple que pour elles nous ne connaissons pas la vraie valeur de n_{∞} , car les valeurs de n_{∞} introduites plus haut dans la comparaison n'ont pas été établies par voie expérimentale, mais déduites de la formule de Cauchy; on a déterminé les constantes de cette formule au moyen des valeurs de deux ou trois indices relatifs à deux ou trois couleurs du spectre *visible*, et par conséquent à des longueurs d'onde qui non seulement sont extrêmement petites, mais sont en outre relativement très rapprochées l'une de l'autre. Au surplus la formule de Cauchy ne concorde pas absolument avec la marche réelle de l'indice de réfraction dans le spectre visible.

§ 21 (suite). — Ondes planes.

Dans le cas particulier où le mouvement se propage en ondes planes (1), toutes les grandeurs à considérer ne dépendent que de z et de t , si nous choisissons l'axe des z dans la direction de la propagation; elles sont donc indépendantes de x et de y . Dès lors les équations différentielles (36) prennent une forme très simple et deviennent, eu égard à l'équation (23_a) du § 17 :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\varepsilon) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\varepsilon) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

L'intégration donne

$$U = F_1(z - At) + F_2(z + At),$$

$$V = F_3(z - At) + F_4(z + At),$$

$$W = B_1(z) + B_2(z)t.$$

F_1, F_2, F_3, F_4, B_1 et B_2 désignent des fonctions arbitraires, et A la

(1) Voir Maxwell, déjà cité, art. 790 et 791.

valeur $\frac{1}{\sqrt{(1 + 4\pi\beta)4\pi\epsilon}}$. Suivant la valeur qu'on donne aux fonctions B_1 et B_2 , W change avec le temps, ou bien dans un rapport proportionnel, ou pas du tout. Comme nous n'avons en vue que des perturbations périodiques, nous pouvons faire complètement abstraction de W .

Les composantes du courant u , v , w s'obtiennent par les équations

$$4\pi u = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$4\pi v = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$w = 0.$$

Elles expriment que la direction du courant et conséquemment aussi la direction de la force électromotrice (qui coïncide avec la première, car nous supposons qu'on ait affaire à un isolant isotrope), se trouve dans le plan de l'onde.

Si nous considérons les composantes de force magnétiques,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\mathcal{M} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\mathcal{N} = 0,$$

elles font voir que *la direction de la force magnétique tombe également dans le plan de l'onde.*

Admettons que V soit nul; alors la direction des courants électriques serait partout parallèle à l'axe des x , mais celle de la force magnétique partout parallèle à l'axe des y , c'est-à-dire que le plan des vibrations électriques serait normal au plan des forces magnétiques. Une pareille onde correspond entièrement à un rayon de lumière polarisée rectilignement. Lequel des plans considérés plus haut correspond au plan de polarisation? C'est ce que l'on verra dans le sujet traité aux paragraphes suivants. Si nous posons $U = 0$, nous sommes conduits de même à une onde dont les courants sont parallèles à l'axe des y . Nous pouvons donc regarder le cas général où U et V diffèrent de zéro comme résultant des deux cas particuliers, ou décomposer toujours une onde plane en deux vibrations polarisées à angle droit.

Si $U = C \sin(z - At)$, $V = 0$, et que C désigne une constante, on peut représenter les relations indiquées plus haut, comme suit : dans la figure 7, les ordonnées représentent les valeurs de la force

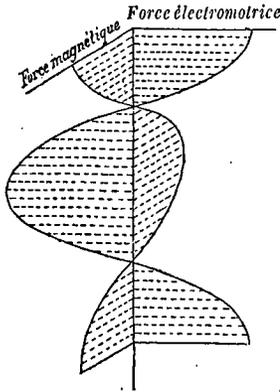


Fig. 7.

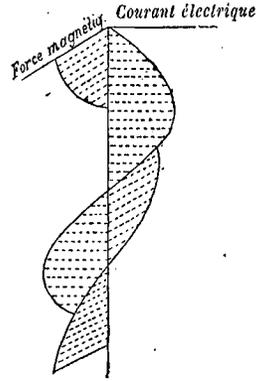


Fig. 8.

magnétique et de la force électromotrice pour un moment donné aux différents points du rayon ; dans la figure 8, on voit la représentation du courant électrique et de la force magnétique.

§ 22. — Propagation de la lumière dans de mauvais conducteurs anisotropes.

Reprenons les équations différentielles générales (35) et supposons seulement $X = Y = Z = 0$, $\psi = 0$ et $C = 0$; nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 4\pi \epsilon_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right], \\ \Delta V &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + 4\pi \epsilon_2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right], \\ \Delta W &= \frac{2}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + 4\pi \epsilon_3 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right], \end{aligned}$$

ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 étant actuellement des grandeurs différentes. A ces équations ajoutons encore la relation (23_a), savoir :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0;$$

supposons maintenant que les courants électriques se propagent en forme d'ondes planes dont l'équation est donnée par

$$lx + my + nz - \mathfrak{V}t = d;$$

l, m, n sont les cosinus de direction de la normale, \mathfrak{V} la vitesse de propagation, et d la distance du plan de l'onde à l'origine des coordonnées au temps $t = 0$; admettons de plus que les courants électriques s'effectuent parallèlement à une droite ayant pour cosinus de direction $\alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Quelles sont alors les conditions nécessaires en vertu des équations différentielles qui précèdent, pour que ce plan de l'onde puisse se mouvoir sans obstacle?

Puisque x, y, z et t sont liés par l'équation

$$lx + my + nz - \mathfrak{V}t = d,$$

les fonctions $U, V, W, \varphi, u, v, w$ devront être considérées comme fonctions de d seulement. Désignons les dérivées de ces fonctions par rapport à d , par les fonctions elles-mêmes affectées d'un ou de deux accents, de manière que

$$\frac{dU}{dx} = lU', \quad \frac{d^2U}{dx^2} = l^2U'', \quad \text{etc.}$$

Les équations ci-dessus se ramènent alors à la forme

$$\begin{aligned} U'' &= -\frac{2l\mathfrak{B}\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_1 [-l\mathfrak{B}\varphi'' + (1 + 4\pi\varepsilon)\mathfrak{B}^2 U''], \\ V'' &= -\frac{2m\mathfrak{B}\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_2 [-m\mathfrak{B}\varphi'' + (1 + 4\pi\varepsilon)\mathfrak{B}^2 V''], \\ W'' &= -\frac{2n\mathfrak{B}\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_3 [-n\mathfrak{B}\varphi'' + (1 + 4\pi\varepsilon)\mathfrak{B}^2 W'']. \end{aligned}$$

Si maintenant i est le courant au point x, y, z , de sorte que $u = \alpha i$, $v = \mathfrak{b}i$, $w = \mathfrak{c}i$, on a, d'après (22) où $k = 0$,

$$\begin{aligned} U'' &= 4\pi\alpha i - \frac{2l\mathfrak{B}\varphi''}{v^2}, & V'' &= 4\pi\mathfrak{b}i - \frac{2m\mathfrak{B}\varphi''}{v^2}, \\ W'' &= 4\pi\mathfrak{c}i - \frac{2n\mathfrak{B}\varphi''}{v^2}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (23_a) donne en outre : $lU'' + mV'' + nW'' = 0$,

ou bien, si nous dérivons encore par rapport à d et que nous substituions à U' , V' , W' les valeurs précédentes,

$$4\pi i (l\alpha + m\beta + n\gamma) = \frac{2\mathfrak{B}\varphi'}{v^2}.$$

Les équations différentielles générales se ramènent ainsi à la forme

$$(41) \begin{cases} \frac{\alpha}{\varepsilon_1 v^2} = -2\pi l (l\alpha + m\beta + n\gamma) + 4\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D}) \frac{\mathfrak{B}^2}{v^2} [\alpha - l(l\alpha + m\beta + n\gamma)], \\ \frac{\beta}{\varepsilon_2 v^2} = -2\pi m (l\alpha + m\beta + n\gamma) + 4\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D}) \frac{\mathfrak{B}^2}{v^2} [\beta - m(l\alpha + m\beta + n\gamma)], \\ \frac{\gamma}{\varepsilon_3 v^2} = -2\pi n (l\alpha + m\beta + n\gamma) + 4\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D}) \frac{\mathfrak{B}^2}{v^2} [\gamma - n(l\alpha + m\beta + n\gamma)]. \end{cases}$$

Ici ε_1 , ε_2 , ε_3 désignent les constantes de polarisation électrique pour les trois directions principales et mesurées en unités électromagnétiques. Nous savons d'ailleurs que $\varepsilon_1 v^2$, $\varepsilon_2 v^2$, $\varepsilon_3 v^2$ représentent les mêmes constantes en unités électrostatiques; nous désignerons celles-ci simplement par ε'_1 , ε'_2 , ε'_3 .

Multiplions les équations (41) respectivement par l , m , n , puis ajoutons; nous aurons

$$\frac{l\alpha}{\varepsilon'_1} + \frac{m\beta}{\varepsilon'_2} + \frac{n\gamma}{\varepsilon'_3} = -2\pi (l\alpha + m\beta + n\gamma).$$

Si nous admettons que ε'_1 , ε'_2 , ε'_3 sont extrêmement grands, de sorte que leurs valeurs réciproques soient négligeables à côté de 1, nous obtenons

$$(42) \quad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

c'est-à-dire que les vibrations sont transversales. L'hypothèse qui conduit à ce résultat est légitime: c'est ce qu'il est facile à démontrer. En effet, si les variations ont lieu parallèlement aux trois directions principales, on a, d'après (41), pour les vitesses de propagations correspondantes,

$$a = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_1(1 + 4\pi\mathfrak{D})}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_2(1 + 4\pi\mathfrak{D})}}, \\ c = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_3(1 + 4\pi\mathfrak{D})}},$$

c'est-à-dire que les indices de réfraction de ces ondes par rapport à l'air sont

$$\sqrt{\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_0}}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon'_2}{\epsilon_0}}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon'_3}{\epsilon_0}}.$$

Or, ces indices sont en général finis et supérieurs à l'unité, et de plus ϵ_0 est extrêmement grand (voir § 19); donc ϵ'_1 , ϵ'_2 , ϵ'_3 sont aussi extrêmement grands.

Si nous éliminons des équations (41) les quantités \mathfrak{B}^2 et $(l\alpha + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c})$, nous avons

$$(43) \quad \frac{l}{\alpha} (b^2 - c^2) + \frac{m}{\mathfrak{b}} (c^2 - a^2) + \frac{n}{\mathfrak{c}} (a^2 - b^2) = 0.$$

Multipliant les équations (41) respectivement par α , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , ajoutant et négligeant les termes infiniment petits des ordres supérieurs, nous obtenons

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{\epsilon'_1} + \frac{\mathfrak{b}^2}{\epsilon'_1} + \frac{\mathfrak{c}^2}{\epsilon'_3} = 4\pi (1 + 4\pi\epsilon) \frac{\mathfrak{B}^2}{b^2}, \\ \text{ou bien} \quad a^2\alpha^2 + b^2\mathfrak{b}^2 + c^2\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{B}^2. \end{array} \right.$$

Les équations (42), (43), (44) représentent les conditions sous lesquelles l'onde plane peut se propager.

Construisons l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

et menons par son centre un plan parallèle au plan de l'onde; alors les cosinus de direction α , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} que l'on tire des équations (42), (43) et de $\alpha^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = 1$ appartiennent aux deux axes de l'ellipse d'intersection E, et \mathfrak{B} équivaut à l'inverse de la longueur du diamètre correspondant à la direction α , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} .

De là le théorème suivant :

Dans un mauvais conducteur anisotrope, il peut se propager dans toute direction des ondes planes à vibrations électriques transversales; dans une direction donnée, il ne peut se propager en général que deux ondes pareilles, puisque les vibrations électriques doivent avoir lieu soit dans l'une soit dans l'autre direction des axes de l'ellipse E. La vitesse de propagation équivaut à

l'inverse du demi-diamètre de E, correspondant à la direction de vibration (1).

Le même résultat a été obtenu par Fresnel dans l'hypothèse où le plan de polarisation de la lumière est à angle droit sur le plan de vibration. Les conséquences déduites de là par Fresnel s'appliquent naturellement encore ici.

Pour terminer, nous allons déterminer encore la direction de la force électromotrice. Soit \mathcal{E} la force électromotrice agissant en un point, et $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ ses composantes suivant les axes coordonnés; on a [équation (2)],

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}} = \frac{\frac{f}{\varepsilon_1}}{\sqrt{\left(\frac{f}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{g}{\varepsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{h}{\varepsilon_3}\right)^2}}$$

ou
$$= \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{a^4 \alpha^2 + b^4 \beta^2 + c^4 \gamma^2}}$$

ou
$$= \frac{a^2 x}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}};$$

x, y, z sont les coordonnées de l'extrémité du rayon de E, ayant la direction α, β, γ ; de même, on a

$$\mathcal{E}_y : \mathcal{E} = \frac{b^2 y}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}}, \quad \mathcal{E}_z : \mathcal{E} = \frac{c^2 z}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}}.$$

La force électromotrice est donc parallèle à la normale à l'ellipsoïde au point x, y, z , et se trouve ainsi dans le plan de vibration.

Au point (x, y, z) que nous désignerons par B, menons un plan tangent TT à l'ellipsoïde (*fig. 9*, p. 70); menons ensuite (2) un plan normal à OB à la distance $OB' = \frac{1}{OB}$, et enfin abaissons du point O une perpendiculaire à TT', laquelle, prolongée, coupe le plan PP en C; il suffit alors de faire tourner OB'C de 90° autour du point O pour que PP devienne le plan de l'onde P'P', OB' la normale OB'' à l'onde

(1) Voir Lorenz: *Die Reflexion und Brechung des Lichtes* (Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Physik, 22^e année), puis Maxwell, art. 794-797.

(2) Voir Beer, *Höhere Optik.*, 2^e édition, p. 319.

et OC le rayon OC'. L'angle formé par la force électromotrice avec la direction de vibration est donc le même que celui du rayon avec la normale à l'onde, c'est-à-dire que *la force électromotrice est à*

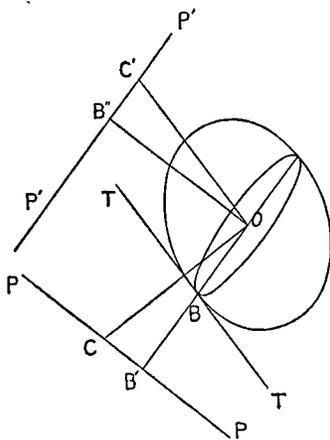


Fig. 9.

angle droit sur le rayon, précisément comme dans de mauvais conducteurs isotropes.

§ 23 (suite). — Expériences de Boltzmann.

La constante diélectrique des corps cristallins anisotropes doit être différente, suivant que les forces électriques agissent sur eux dans différentes directions, et cette variation peut, d'après ce qui précède, être déterminée exactement d'avance par les propriétés optiques. L'examen de cette question a été entrepris par Boltzmann (1), et a fourni une nouvelle confirmation de la théorie électromagnétique de la lumière.

La théorie de la polarisation diélectrique a une marche exactement parallèle à celle de la polarisation magnétique; de même qu'un pôle magnétique attire un morceau de fer doux, non aimanté, par suite de l'état de polarisation où se trouve ce dernier, de même un corps

(1) *Sitzungsberichte* de l'Acad. de Vienne, t. LXVI, LXVIII, LXX; *Ann. de Pogg.*, t. CLIII, 1874.

électrisé doit attirer un mauvais conducteur sans que celui-ci s'électrise, simplement en vertu de sa polarisation diélectrique. Effectivement, c'est ce que l'expérience montre aussi, et même l'attraction de corps isolants non électrisés (petites balles de sureau, découpures de papier, etc.) par des corps électrisés (verre ou bâton de résine frotté) appartient aux premiers phénomènes électriques qu'on a connus.

Boltzmann a trouvé par le calcul qu'une sphère non conductrice est attirée $\frac{D-1}{D+2}$ fois plus fortement qu'une sphère de même grandeur mais conductrice, sous l'influence des mêmes forces, lorsque la dernière est isolée et primitivement non électrisée, de sorte qu'elle ne s'électrise que par influence. D désigne la constante diélectrique de la sphère non conductrice par rapport à celle de l'air prise pour unité.

Posons $\frac{D-1}{D+2} = N$; nous pourrions aussitôt tirer de cette formule deux conséquences importantes :

Si l'isolant est isotrope et possède un certain pouvoir de conductibilité, les densités des électricités libres produites par la polarisation s'évanouiront avec le temps à l'intérieur de l'isolant; $\Delta\varphi$ prendra la valeur 0 pour $t = \infty$, ou le potentiel dans l'isolant après un temps infiniment long suivra la même loi que dans un conducteur. Le rapport N se rapproche dans ce cas avec le temps de plus en plus de l'unité; ainsi la constante D , qui devient ∞ pour $N = 1$, affecte une valeur d'autant plus grande que nous faisons agir plus longtemps les forces électriques lors de la détermination de N .

N est +, 0 ou —, suivant que D est supérieur, égal ou inférieur à 1. Ici donc, le principe d'Archimède s'applique de la même manière que dans le magnétisme.

Voici le dispositif des expériences de Boltzmann : une sphère faite avec l'isolant à examiner est attachée par des fils parfaitement isolants à l'un des bras du fléau d'une balance très sensible, dont l'autre est équilibré à l'aide d'un miroir qui permet de lire les rotations de la balance. A une certaine distance se trouve une sphère fixe qu'on peut charger par des étincelles d'une machine à influence, ou bien décharger de nouveau. Exactement au point de la sphère isolante

peut être suspendue une sphère conductrice de même grandeur (primitivement non électrisée), et l'on peut comparer ainsi l'action subie par les deux. Comme la sphère fixe ne peut pas toujours recevoir exactement la même charge, elle communique avec une deuxième sphère fixe placée en regard d'une balance tout à fait semblable à la première, mais dont la sphère communique avec le sol et se trouve équilibrée par un miroir. La déviation de la deuxième balance sert de mesure à la charge communiquée. Comme les déviations sont très petites, on peut les regarder comme proportionnelles à la force. La déviation de la première balance divisée par celle de la seconde est appelée par Boltzmann l'attraction de la sphère isolante. Mais si celle-ci est remplacée par une sphère conductrice de même grandeur, le quotient en question s'appelle l'attraction de la sphère conductrice. Soit E le quotient de l'attraction de la sphère isolante par celle de la sphère conductrice : ce quotient s'est montré souvent comme variable avec la durée de l'influence. C'est pourquoi Boltzmann a attaché le fil conduisant aux sphères fixes à un diapason électromagnétique vibrant, de telle manière que celui-ci choquât plus de cent fois par seconde l'électrode positive et autant de fois l'électrode négative de la machine à influence; ainsi la sphère à étudier était soumise alternativement à de l'électricité positive et à de la négative.

C'est d'après cette méthode que Boltzmann a examiné deux sphères taillées dans des cristaux de soufre naturel. Le soufre jouit notamment de la propriété d'isoler si parfaitement que la durée de l'influence n'intervient pour ainsi dire pas du tout. Il a fait agir l'électricité tantôt dans la direction de la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques, tantôt dans celle de la bissectrice de l'angle obtus, tantôt perpendiculairement aux deux. Soient A , C , B ces directions successives. De plus Boltzmann a calculé la quantité E au moyen des indices de réfraction correspondant à ces directions, en tenant compte de la loi exprimée par l'équation (40) ⁽¹⁾. Le tableau suivant donne les valeurs de E obtenues d'une part par le calcul, de l'autre par l'observation :

⁽¹⁾ Ici on suppose que les vibrations d'un rayon de lumière polarisé rectilignement se font normalement au plan de polarisation.

	CALCULÉ.	OBSERVÉ	
		avec la 1 ^{re} sphère.	avec la 2 ^e sphère.
Direction A.....	1,82	1,79 (1,73 1,82)	1,805 (1,80 1,81)
Direction B.....	2,04	2,02	2,00
Direction C.....	2,16	2,06 (2,04 2,07)	2,07 (2,03 2,10)

On a constaté avec soin que l'asymétrie observée n'était pas due à des causes extérieures accidentelles. Par là se trouve définitivement démontré que la lumière vibre normalement au plan de polarisation.

Boltzmann a examiné d'après la même méthode la paraffine, la colophane et la gomme dure; il a obtenu des résultats peu différents de ceux que fournissent les expériences avec le condensateur.

Plus tard la même méthode a été appliquée par trois élèves de Boltzmann (Romich, Novak et Faydiga) à des sphères de spath d'Islande, de verre, de spath-fluor, de quartz et de sélénium. Mais, pour toutes ces substances, la durée de l'action a montré une grande influence; c'est pourquoi les valeurs des constantes diélectriques ont été trop fortes pour être conformes à la théorie électromagnétique de la lumière.

§ 24. — Propagation de la lumière dans les conducteurs isotropes.

Si un milieu isotrope possède, outre la propriété de la polarisation diélectrique et magnétique, un certain pouvoir conducteur, nous n'avons qu'à poser dans les équations (35)

$$X = Y = Z = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{et} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon.$$

On voit alors, comme nous l'avons dit, que la densité de l'électricité libre $\frac{\Delta \varphi}{4\pi}$ décroît très vite avec le temps, à cause de la conductibilité du milieu, et s'annule complètement pour $t = \infty$. Nous pourrions donc pour ce motif faire complètement abstraction du potentiel φ .

Nous supposons que le mouvement se propage en ondes planes. Comme les conditions sont les mêmes dans toutes les directions, nous pouvons choisir la direction de propagation pour axe des z et nous obtenons ainsi toutes les variables en fonction de z et de t seulement.

Dans ce cas les équations différentielles prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= 4\pi (1 + 4\pi\mathfrak{D}) \left(C + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= 4\pi (1 + 4\pi\mathfrak{D}) \left(C + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial t}, \\ 0 &= \left(C + \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial t}.\end{aligned}$$

Comme nous n'avons en vue que des mouvements périodiques, nous pouvons négliger W . Posons en outre $V = 0$; nous aurons affaire alors à une onde plane où les vibrations électriques ont toutes lieu parallèlement à l'axe des x . Une intégrale particulière de la première équation différentielle est donnée par

$$U = e^{-pz} \cos \left(\frac{z}{\mathfrak{B}} - t \right),$$

si p et \mathfrak{B} satisfont aux conditions

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} - p^2 = 4\pi\varepsilon (1 + 4\pi\mathfrak{D}), \quad \frac{p}{\mathfrak{B}} = 2\pi (1 + 4\pi\mathfrak{D}) C.$$

Le mouvement est lié à une absorption dont le coefficient est

$$(45) \quad p = \frac{C \sqrt{2\pi (1 + 4\pi\mathfrak{D})}}{\sqrt{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}}}$$

et croît avec C . La vitesse de propagation

$$(46) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi (1 + 4\pi\mathfrak{D}) [\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}]}}$$

décroit au contraire de plus en plus avec C . Tandis que p croît dans le rapport $\sqrt{1 + 4\pi\mathfrak{D}} : 1$ en vertu de la polarisation magnétique du milieu, \mathfrak{B} décroît au contraire dans le même rapport.

La relation (45) correspond au fait que la plupart des corps transparents sont de bons isolants, et tous les bons conducteurs sont opaques (1). La loi en vertu de laquelle l'opacité d'un corps est

(1) Maxwell, déjà cité, art. 798-800,

d'autant plus grande que sa conductibilité est plus forte, est soumise à de nombreuses exceptions. Tels sont avant tout plusieurs électrolytes qui, malgré une grande transparence, se laissent pourtant traverser par le courant électrique. Mais cela ne doit pas nous étonner, car lors de l'établissement des équations différentielles, nous n'avons pas eu en vue de pareils milieux où des courants électriques sont capables d'opérer une décomposition, c'est-à-dire de transporter de la matière.

Si $C = \infty$, alors $\mathfrak{B} = 0$; le mouvement des ondes ne se propage pas du tout. L'or, le platine, l'argent sont de bons conducteurs, mais comme leur conductibilité est une quantité finie, ils doivent laisser passer la lumière. En effet, de petites plaques très minces se montrent transparentes. Maxwell a étudié l'absorption de la lumière dans une feuille d'or, et a trouvé que la quantité de lumière transmise calculée théoriquement était beaucoup moindre que celle déterminée par l'expérience. Pour expliquer cette discordance, Maxwell suppose que la perte d'énergie est moindre quand les forces électromotrices changent de signe à chaque demi-vibration de la lumière, que lorsque ces forces agissent pendant longtemps dans la même direction. Et certes aucun fait expérimental ne nous autorise à conclure que des courants non stationnaires, notamment ceux qui changent de direction aussi vite que les vibrations de la lumière, ont même conductibilité que des courants stationnaires, comme ceux qui nous servent à mesurer la conductibilité dans nos expériences.

Ici la conductibilité C est très grande par rapport à ϵ , de sorte qu'on peut négliger complètement $\frac{\epsilon}{C}$ à côté de 1; on a

$$(45_a) \quad p = \sqrt{C} \sqrt{2\pi(1 + 4\pi\epsilon)},$$

$$(46_a) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\sqrt{C} \sqrt{2\pi(1 + 4\pi\epsilon)}}.$$

Si $C = \infty$, $\mathfrak{B} = 0$. Cela s'explique aisément, car imaginons un courant linéaire fermé donné dans un pareil milieu au temps $t = 0$, et puis abandonné à lui-même: comme son travail a toujours pour valeur zéro d'après la loi de Joule, il ne diminuera jamais, donc nulle part ne se développeront des forces électromotrices par induction, par

conséquent il ne pourra naître nulle part des courants électriques hors de la trajectoire donnée.

REMARQUE. — Si, pour traiter le dernier cas, nous faisons avec Maxwell (1) l'hypothèse dans les équations différentielles, nous obtenons

$$\Delta U = 4\pi C (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$\Delta V = 4\pi C (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\Delta W = 4\pi C (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial W}{\partial t},$$

ou, dans le cas spécial ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi C (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Ces équations sont entièrement de même forme que celles de Fourier (2) pour la propagation de la chaleur. Les fonctions U , V , W varieraient avec le temps et la position de la même manière que la température d'un corps solide homogène, si les conditions de temps et de surface coïncidaient dans les deux cas et que la quantité $4\pi C (1 + 4\pi \vartheta)$ fût égale au produit de la chaleur spécifique par la densité, divisé par la conductibilité calorifique. Mais le mode de propagation des perturbations électriques n'aurait pas lieu avec une vitesse déterminée; car, si au temps $t = 0$, les composantes du courant u , v , w n'étaient différentes de zéro que dans une étendue finie déterminée, ces composantes deviendraient simultanément différentes de zéro pour tous les points de l'espace en dehors de cette partie de l'espace (excepté à une distance infinie), aussitôt que t croit continûment à partir de zéro. Mais ce mode de propagation est en contradiction complète avec celui qui est marqué par l'équation (46_a); donc l'hypothèse faite dans les équations différentielles n'est absolument pas permise.

(1) Voir l'art. 801 de l'ouvrage cité.

(2) Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, art. 372.

CINQUIÈME SECTION

Réflexion et réfraction de la lumière à la surface de contact
de deux milieux isotropes.

§ 25. — *Réflexion et réfraction de la lumière à la surface de séparation
des milieux isotropes.*

Nous allons rechercher maintenant ce qui se passe quand une onde plane arrive à la surface de séparation (supposée plane) de deux milieux différents, et s'y divise en deux ondes, l'une réfléchie, l'autre réfractée. Nous prenons la surface en question pour plan des yz d'un système de coordonnées rectangulaires, et la normale pour axe des x ,

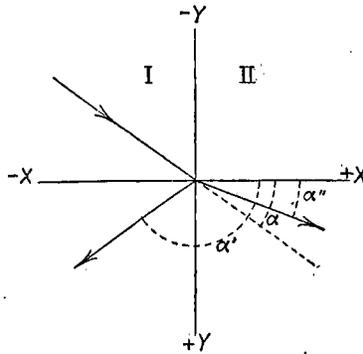


Fig. 10.

positif dans la direction de I vers II. Si les deux milieux qui se touchent sont isotropes, alors, en vertu des corollaires du § 18, l'onde réfléchie et l'onde réfractée sont planes. Le plan d'incidence est déterminé par la normale au plan de l'onde incidente et par la normale à la surface de séparation. Comme tout est symétrique par

rappart à ce plan, il faut que les normales aux plans de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée se trouvent aussi dans le plan d'incidence. C'est ce qui résulte d'ailleurs des corollaires déjà rappelés. Quant au plan d'incidence, nous le déterminons en le faisant coïncider avec le plan des xy .

Si la vitesse de propagation dans le premier milieu est \mathfrak{B} , dans le second milieu \mathfrak{B}' , si de plus α est l'angle d'incidence, α' l'angle de réflexion et α'' l'angle de réfraction, on doit faire $\Lambda' = \frac{\mathfrak{B}}{\sin \alpha}$ dans le corollaire 2 du § 18, et l'on obtient ainsi

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \sin \alpha'' = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}} \sin \alpha,$$

ou

$$(47) \quad \alpha' = 180 - \alpha, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$$

En ce qui concerne l'onde incidente, nous allons maintenant examiner deux cas principaux, en ayant égard à ce qui est dit § 21 :

I. Les vibrations électriques ont lieu parallèlement à l'axe des z ou normalement au plan d'incidence.

II. Les vibrations électriques ont lieu normalement à l'axe des z ou dans le plan d'incidence.

Désignons respectivement par $u, v, w, u', v', w', u'', v'', w''$ les composantes du courant de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée, et par $U, V, W, U', V', W', U'', V'', W''$ les fonctions correspondantes. Nous supposerons de plus que la phase soit la même dans les trois ondes au plan de séparation. Nous verrons plus tard jusqu'à quel point cette hypothèse est permise.

1^{er} CAS. — Soit l'onde incidente représentée par

$$(48) \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right).$$

Nous admettrons que les vibrations électriques ont aussi lieu parallèlement à l'axe des z dans l'onde réfléchie et dans l'onde réfractée, c'est-à-dire que $u' = v' = u'' = v'' = 0$. Alors $\Delta U' = \Delta V' = \Delta U''$

$= \Delta V'' = 0$, d'où nous concluons, puisqu'il ne s'agit que de mouvements périodiques, que $U' = V' = U'' = V'' = 0$.

Les fonctions W' et W'' peuvent avoir la forme

$$(48a) \quad W' = aF \left\{ \frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right\},$$

$$(48b) \quad W'' = a'F \left\{ \frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t \right\},$$

où a et a' sont deux constantes à déterminer.

En un point quelconque de la surface de séparation, menons des deux côtés la normale, et prenons sur celle-ci, de part et d'autre de la surface, deux points qui en sont infiniment rapprochés; alors, en vertu du § 13, la fonction W et sa dérivée première ne varieront qu'infiniment peu, quand on passe d'un point à l'autre, et l'on a

$$W + W' = W'', \quad \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W'}{\partial x} = \frac{\partial W''}{\partial x},$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial y} = \frac{\partial W''}{\partial y} \text{ pour } x = 0.$$

Substituant les valeurs tirées de (48), (48a), (48b), nous obtenons, eu égard à l'équation (47), les deux conditions servant à déterminer a et a' :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + a = a', \\ \frac{\cos \alpha}{\mathfrak{B}} (1 - a) = a' \frac{\cos \alpha''}{\mathfrak{B}'}, \end{array} \right.$$

d'où

$$(49a) \quad a = - \frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')},$$

$$(49b) \quad a' = \frac{2 \sin \alpha \sin \alpha''}{\sin(\alpha + \alpha'')},$$

La relation qui lie les fonctions W , W' , W'' est vraie aussi pour les courants w , w' , w'' .

Ce qui précède nous montre que les composantes de la force magnétique peuvent s'exprimer au moyen des dérivées premières des fonctions U , V , W . Lors du passage à travers la surface de séparation,

elles éprouveront donc également une variation continue. Nous obtenons pour les composantes les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\sin \alpha}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{M} &= \frac{\cos \alpha}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{L}' &= -\frac{\alpha \sin \alpha}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{M}' &= -\frac{\alpha \cos \alpha}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{L}'' &= -\frac{\alpha' \sin \alpha'}{\mathfrak{B}'} F' \left(\frac{x \cos \alpha' + y \sin \alpha'}{\mathfrak{B}'} - t \right), \\ \mathcal{M}'' &= \frac{\alpha' \cos \alpha'}{\mathfrak{B}'} F' \left(\frac{x \cos \alpha' + y \sin \alpha'}{\mathfrak{B}'} - t \right). \end{aligned}$$

La continuité de ces composantes conduit aux mêmes équations que dans (49). La force magnétique tombe entièrement dans le plan d'incidence et est toujours normale au rayon correspondant. La force magnétique dans l'onde incidente se rapporte, pour un point de la surface de séparation ($x = 0$), à celles de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée comme

$$1 : \alpha : \alpha' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}.$$

2^e CAS. — Soit l'onde incidente donnée par

$$(50) \quad \begin{cases} U = \sin \alpha F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ V = -\cos \alpha F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \end{cases} \quad W = 0.$$

Nous supposons que les vibrations électriques se font dans le plan d'incidence pour l'onde réfléchie et pour l'onde réfractée, ou que $w' = w'' = 0$. Nous pouvons écrire aussi $W' = W'' = 0$. Les fonctions U' , V' et U'' , V'' sont de la forme

$$(50_a) \quad \begin{cases} U' = \alpha \sin \alpha F \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ V' = \alpha \cos \alpha F \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \end{cases}$$

$$(50_b) \quad \begin{cases} U'' = a' \sin \alpha'' F \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\mathfrak{R}'} - t \right), \\ V'' = -a' \cos \alpha'' F \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\mathfrak{R}'} - t \right). \end{cases}$$

Lors du passage à travers la surface, les fonctions U , V et leurs dérivées premières varient continûment, ce qui conduit aux équations de condition

$$\left. \begin{array}{ll} (1) \quad U + U' = U'' & (2) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial x} = \frac{\partial U''}{\partial x} \\ (3) \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U'}{\partial y} = \frac{\partial U''}{\partial y} & (4) \quad V + V' = V'' \\ (5) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial x} = \frac{\partial V''}{\partial x} & (6) \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial y} = \frac{\partial V''}{\partial y} \end{array} \right\} \text{ pour } x = 0.$$

Substituant ici les équations tirées de (50), (50_a) et (50_b), nous obtenons

$$\begin{aligned} (1) \quad & (1 + a) \sin \alpha = a' \sin \alpha', \\ (2) \quad & \frac{1 - a}{\mathfrak{R}} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a' \sin \alpha' \cos \alpha'}{\mathfrak{R}'}, \\ (3) \quad & \frac{1 + a}{\mathfrak{R}} \sin^2 \alpha = \frac{a' \sin^2 \alpha'}{\mathfrak{R}'}, \\ (4) \quad & (1 - a) \cos \alpha = a' \cos \alpha', \\ (5) \quad & \frac{1 + a}{\mathfrak{R}} \cos^2 \alpha = \frac{a' \cos^2 \alpha'}{\mathfrak{R}'}, \\ (6) \quad & \frac{1 - a}{\mathfrak{R}} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a' \sin \alpha' \cos \alpha'}{\mathfrak{R}'}. \end{aligned}$$

Les conditions (2), (4) et (6) sont identiques, ainsi que (1) et (3). Il reste donc seulement (3), (4) et (5). Ajoutant (3) et (5), nous obtenons

$$(51) \quad \frac{1 + a}{\mathfrak{R}} = \frac{a'}{\mathfrak{R}'}, \quad \text{et l'équation (4)} \quad (1 - a) \cos \alpha = a' \cos \alpha'.$$

De ces deux équations on tire

$$(51_a) \quad a = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')},$$

Théorie électromagnétique, etc.

et

$$(51_b) \quad \alpha' = \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin (\alpha + \alpha'') \cos (\alpha - \alpha'')}.$$

Quant aux forces magnétiques, elles se réduisent aux composantes suivant les z (normales au plan d'incidence), et ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{H}' &= \frac{a}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ \mathcal{H}'' &= \frac{\alpha'}{\mathfrak{B}} F' \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\mathfrak{B}} - t \right). \end{aligned}$$

La continuité de la force magnétique conduit à la première des équations (51). Le rapport des forces en un point de la surface de séparation est $1 : a : \alpha' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''}$.

Si le rayon lumineux incident est polarisé et que le plan de vibration forme avec le plan d'incidence un angle différent de 0 et de 90°, nous pouvons décomposer les vibrations en deux composantes linéaires, l'une parallèle, l'autre normale au plan d'incidence, et les examiner séparément quant à leur affaiblissement par la réflexion et la réfraction, en appliquant les formules (49_a), (49_b), (51_a) et (51_b). Comme nous avons supposé qu'à la surface de séparation il n'y a pas de différence de phase, les vibrations réfléchies et réfractées seront aussi linéaires. Mais comme les coefficients a , α' sont généralement différents pour les deux composantes, le plan de vibration du rayon réfléchi et du rayon réfracté fera avec le plan d'incidence un autre angle que celui du rayon incident.

Déterminons maintenant le rapport des intensités du rayon incident, réfléchi et réfracté. Pour cela, imaginons dans la direction de l'onde incidente un cylindre de section ω construit, et considérons le mouvement entre les sections normales A et B (*fig. 11*). Ce mouvement se partage à la surface commune en un mouvement réfléchi et un mouvement réfracté, dont le premier se propage dans un cylindre de section ω entre les plans A', B', et le second dans un cylindre de section ω' entre les plans A'', B''. Les deux derniers cylindres passent

par le contour de la surface découpée dans la surface commune par le premier cylindre. Soit t le temps auquel le mouvement a lieu entré

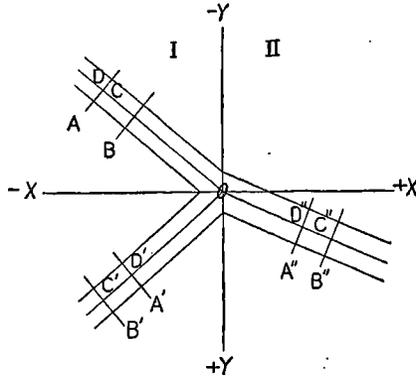


Fig. 11.

les plans A et B, t' le temps auquel le mouvement suit entre les plans A', B' et A'', B''. Les sections ω et ω' ont entre elles la relation

$\frac{\omega}{\cos \alpha} = \frac{\omega'}{\cos \alpha'}$ tandis que les distances des plans A, B, A', B'; A'', B'' ont pour valeurs relatives $\Lambda, \Lambda, \Lambda \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha}$. L'énergie du mouvement

incident se partage en deux, celle du mouvement réfléchi et celle du mouvement réfracté. Chacune de ces énergies se compose de l'énergie potentielle électrostatique et de l'énergie électrodynamique. L'énergie potentielle électrostatique s'annule, car le potentiel ϕ est partout posé égal à 0. Il ne reste donc que l'énergie potentielle électrodynamique. Elle se détermine par (21) et nous conduit à

$$2) \iiint (uU + vV + wW) dx dy dz = \left\{ \begin{array}{l} \iiint (u'U' + v'V' + w'W') dx' dy' dz' \\ + \iiint (u''U'' + v''V'' + w''W'') dx'' dy'' dz'' \end{array} \right.$$

où l'intégration doit s'étendre au volume des cylindres compris entre A, B, A', B', A'', B''.

Supposons que les vibrations incidentes soient linéaires et s'opèrent dans un plan faisant avec le plan d'incidence un angle différent de 0

et de 90° . Soient respectivement $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$ les cosinus de direction des rayons incident, réfléchi et réfracté. Nous pouvons écrire les fonctions $U, V, W, U', V', W', U'', V'', W''$ sous la forme

$$\begin{aligned} U &= \lambda F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ V &= \mu F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ W &= \nu F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right), \\ U' &= b \lambda' F \left(\frac{-x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t' \right), \\ V' &= b \mu' F \left(\frac{-x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t' \right), \\ W' &= b \nu' F \left(\frac{-x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t' \right), \\ U'' &= b' \lambda'' F \left(\frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t'' \right), \\ V'' &= b' \mu'' F \left(\frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t'' \right), \\ W'' &= b' \nu'' F \left(\frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t'' \right). \end{aligned}$$

b et b' désignent les constantes qui, pour les cas principaux considérés plus haut, coïncident avec a et a' . L'équation (52) devient ainsi, eu égard aux relations (22),

$$52_a) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \iiint F \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right) F'' \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right) dx dy dz \\ &+ \frac{b^2}{\mathfrak{B}^2} \iiint F \left(\frac{-x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t' \right) F'' \left(\frac{-x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t' \right) dx' dy' dz' \\ &+ \frac{b'^2}{\mathfrak{B}'^2} \iiint F \left(\frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t'' \right) F'' \left(\frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t'' \right) dx'' dy'' dz'' \end{aligned} \right.$$

Le mouvement qui a lieu au temps t en un point $C(x, y)$ (fig. 11), sera parvenu au temps t' en $C'(x', y')$ et en $C''(x'', y'')$. Posons

$$DC = E, D'C' = E', D''C'' = E'', DO = \Delta, OD' = \Delta' \text{ et } OD'' = \Delta''.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha &= OC = OD + DC = -\Delta + E, \\ -x' \cos \alpha + y' \sin \alpha &= OC' = OD' + D'C' = \Delta' + E', \\ x'' \cos \alpha'' + y'' \sin \alpha'' &= OC'' = OD'' + D''C'' = \Delta'' + E'', \\ t' &= t + \frac{\Delta + \Delta'}{\mathfrak{B}} = t + \frac{\Delta}{\mathfrak{B}} + \frac{\Delta'}{\mathfrak{B}'}. \end{aligned}$$

Posons en outre $dx dy dz = \omega dE$, $dx' dy' dz' = \omega dE'$ et $dx'' dy'' dz'' = \omega' dE''$: toutes ces substitutions dans (52a) donnent

$$\begin{aligned} \int_0^{\Lambda} F\left(\frac{E-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) F'\left(\frac{E-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) dE &= b^2 \int_0^{\Lambda} F\left(\frac{E'-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) F'\left(\frac{E'-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) dE' \\ &+ \frac{b'^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \int_0^{\Lambda \frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha}} F\left(\frac{E''}{\mathfrak{B}''} - \frac{\Delta}{\mathfrak{B}} - t\right) F'\left(\frac{E''}{\mathfrak{B}''} - \frac{\Delta}{\mathfrak{B}} - t\right) dE''. \end{aligned}$$

Si nous posons $\frac{E''}{\mathfrak{B}''} = \frac{y}{\mathfrak{B}'}$, on a $dE'' = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''} dy$, et la limite supérieure de la troisième intégrale est Λ . Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\Lambda} F\left(\frac{E-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) F'\left(\frac{E-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) dE &= b^2 \int_0^{\Lambda} F\left(\frac{E'-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) F'\left(\frac{E'-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) dE' \\ &+ \frac{b^2 \cos \alpha'' \mathfrak{B}}{\cos \alpha \mathfrak{B}'} \int_0^{\Lambda} F\left(\frac{y-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) F'\left(\frac{y-\Delta}{\mathfrak{B}}-t\right) dy, \end{aligned}$$

ou

$$(52b) \quad 1 = b^2 + b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha'}.$$

c'est-à-dire : l'intensité du mouvement des ondes incidentes est à celles des mouvements des ondes réfléchies et des ondes réfractées comme

$$1 : b^2 : b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\sin \alpha'' \cos \alpha}.$$

Si nous appliquons ce résultat aux deux cas principaux traités ci-dessus, on a, dans le cas où les vibrations ont lieu normalement au plan d'incidence, le rapport d'intensité

$$(52c) \quad 1 : \frac{\sin^2(\alpha - \alpha'')}{\sin^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'')},$$

et pour le cas où les vibrations ont lieu dans le plan d'incidence,

$$(52_d) \quad 1 : \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'') \cos^2(\alpha - \alpha'')}.$$

Tous les résultats (49_a), (49_b), (51_a), (51_b), (52_c), (52_d) sont identiques à ceux de Fresnel, obtenus dans l'hypothèse où le plan de vibration est normal au plan de polarisation (1). Les conséquences déduites de là par Fresnel s'appliquent naturellement encore ici mot à mot.

§ 26 (suite). — La réflexion totale.

Considérons maintenant le cas spécial où le premier milieu possède une vitesse de propagation moindre, de sorte que le quotient $\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} = n$ est supérieur à 1. Pour une valeur de α telle que $\sin \alpha = \frac{1}{n}$, on a $\alpha'' = 90^\circ$, et pour toute valeur supérieure à cet angle α , il y a ce qu'on appelle la *réflexion totale*. Ce même angle se nomme l'*angle limite* de la réflexion totale; nous le désignerons par N.

Comme ci-dessus, nous traiterons à part les deux cas principaux (plan de vibration perpendiculaire ou parallèle au plan d'incidence).

1^{er} CAS. *Plan de polarisation normal au plan d'incidence.* — Nous avons obtenu pour α et α' les expressions (49_a) et (49_b)

$$\alpha = -\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')}, \quad \alpha' = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha''}{\sin \alpha \cos \alpha'' + \cos \alpha \sin \alpha''},$$

et le rapport des trois intensités (52_c)

$$1 : \frac{\sin^2(\alpha - \alpha'')}{\sin^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'')}.$$

L'intensité de l'onde réfractée se rapproche de zéro (2) à mesure

(1) Voir *Ann. de Chim. et de Phys.* (2), XVII, 490, 312, 1821. — *Œuvres complètes*, t. I, p. 640. — Pour plus de détails, voir *Mémoires de l'Acad. des Sciences*, XI, 393. *Ann. de Chim. et de Phys.* (2), XLVI, 223, 1823. *Œuvres complètes*, t. I, p. 767.

(2) L'onde plane du rayon réfracté devient parallèle au plan des xz pour $\alpha'' = 90^\circ$.

que l'angle α se rapproche de N , tandis que α' se rapproche de 2. Si α devient plus grand que N , α et α' sont imaginaires et l'on a

$$\alpha = \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \sin^2 \alpha}{n^2 - 1} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n^2 - 1},$$

$$\alpha' = \frac{2n^2 \cos^2 \alpha}{n^2 - 1} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n^2 - 1},$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ces valeurs montrent que, dans ce cas, toutes les hypothèses faites ne sont pas valables. Et en effet, écrivons α et α' sous la forme $Ae^{-i\psi}$ et $A'e^{-i\psi'}$, et choisissons pour la fonction F la forme

$$e^{i \left\{ \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right\}};$$

nous aurons pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée les expressions

$$e^{i \left\{ \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right\}}, \quad Ae^{i \left\{ \frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t - \psi \right\}},$$

$$A'e^{i \left\{ \frac{x \cos \alpha' + y \sin \alpha'}{\mathfrak{B}'} - t - \psi' \right\}}$$

Comparons à ces valeurs celles qui conviennent au cas où $\alpha < N$, savoir :

$$e^{i \left\{ \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right\}}, \quad ae^{i \left\{ \frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t \right\}},$$

$$a'e^{i \left\{ \frac{x \cos \alpha' + y \sin \alpha'}{\mathfrak{B}'} - t \right\}},$$

où a et a' sont des quantités réelles; nous verrons que les valeurs imaginaires de α et α' sont simplement dues à ce que l'hypothèse de la phase égale n'est plus exacte. La valeur du changement de phase est

$$\psi = \arctg \left(\frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n^2 + 1 - 2n^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

$$\psi' = \arctg \left(\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha} \right),$$

tandis que

$$A^2 = 1, \quad A'^2 = \frac{4n^2 \cos^2 \alpha}{n^2 - 1}.$$

Quant au mouvement dans le second milieu, il est donné par

$$A' e^{-\frac{x}{\mathfrak{B}} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}} e^{i \left\{ \frac{y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t - \psi' \right\}}$$

attendu que

$$\cos \alpha'' = i \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}.$$

L'équation $\frac{y \sin \alpha}{\mathfrak{B}} - t - \psi = \text{const.}$ représente un plan qui se propage parallèlement au plan des xz avec une vitesse \mathfrak{B} ; $\sin \alpha$, laquelle change avec l'angle d'incidence et n'est autre que la vitesse avec laquelle l'excitation se propage dans le plan de séparation. Comme de cette manière α'' vaut 90° , l'intensité de l'onde réfractée est égale à zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'onde réfractée. L'intensité de l'onde réfléchie est alors naturellement égale à celle de l'onde incidente.

2^e Cas. *Le plan de vibration est parallèle au plan d'incidence.*

-- Les coefficients a et a' valent alors (51_a) et (51_b):

$$a = \frac{\text{tg}(\alpha - \alpha'')}{\text{tg}(\alpha + \alpha'')}, \quad a' = \frac{2 \sin \alpha'' \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')},$$

et le rapport des intensités (52_d):

$$1 : \frac{\text{tg}^2(\alpha - \alpha'')}{\text{tg}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'') \cos^2(\alpha - \alpha'')}.$$

Si $\alpha = N$, l'intensité de l'onde réfractée s'annule, a' , au contraire, est égal à $2n$. Si $\alpha > N$, a' et a deviennent imaginaires:

$$a = \frac{\cos^2 \alpha - (n^2 \sin^2 \alpha - 1) n^2}{\cos^2 \alpha + (n^2 \sin^2 \alpha - 1) n^2} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha + (n^2 \sin^2 \alpha - 1) n^2},$$

$$a' = \frac{2n \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} - i \frac{2n^2 \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}.$$

On peut montrer ici, comme dans le premier cas, que les imaginaires ne doivent leur origine qu'à l'hypothèse, inexacte ici, de l'égalité

de phase. Posons

$$\begin{aligned} a &= B e^{-i\chi}, \\ a' &= B' e^{-i\chi'}; \end{aligned}$$

la différence de phase est donnée par

$$\begin{aligned} \chi &= \text{arc tg} \left(\frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha - n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} \right), \\ \chi' &= \text{arc tg} \left(\frac{n \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos \alpha} \right), \end{aligned}$$

tandis que

$$B^2 = 1, \quad B'^2 = \frac{4n^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}.$$

Quant au mouvement dans le second milieu, tout se passe comme dans le premier cas. Il n'y a pas ici non plus de rayon réfracté, et ainsi l'intensité de l'onde réfléchie égale celle de l'onde incidente.

Si le plan d'oscillation de la lumière incidente fait avec le plan d'incidence un angle différent de 0 et de 90°, nous pouvons concevoir le rayon lumineux décomposé en deux autres dont les vibrations se font parallèlement et normalement au plan d'incidence. Lors de la réflexion totale, les deux composantes n'éprouvent pas d'affaiblissement, mais bien une variation de phase, différente pour chacune d'elles. Le rayon réfléchi formé par l'ensemble des deux composantes sera donc, en général, polarisé elliptiquement. La différence de phase des deux composantes réfléchies s'obtient par

$$\phi - \chi = \text{arc cos} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1)}{(1 + n^2) \sin^2 \alpha - 1} \right\}.$$

§ 27 (suite). — Application et représentation graphique des formules (52_c) et (52_d).

Pour mieux comprendre les formules (52_c) et (52_d), nous allons les appliquer à un cas spécial, savoir, au calcul des intensités du rayon réfléchi et du rayon réfracté pour le crown-glas n° 13 (1) dont

(1) A la vérité, le verre possède un peu de conductibilité; ce n'est donc pas une des substances auxquelles s'appliquent rigoureusement les formules rappelées; toutefois la conductibilité y est si faible que nous pouvons très bien regarder les formules comme applicables.

l'indice de réfraction est 1,5243 pour la ligne B et 1,545 pour la ligne H.

Nous considérons d'abord le cas où le premier milieu est l'air, le second le verre. L'intensité de la lumière incidente sera posée égale à 1 et celle de la lumière réfléchie égale à J . La couleur à laquelle se rapporte J , comme aussi la direction de la vibration, sera indiquée pour des indices. Ainsi J_{B_n} représente l'intensité de la lumière réfléchie rouge, de longueur d'onde B et vibrant normalement au plan d'incidence; J_{B_p} représente l'intensité de la lumière réfléchie de même couleur, mais où la direction de la vibration est parallèle au plan d'incidence. Signification analogue de J_{H_n} , J_{H_p} . Les intensités de la lumière réfractée ne sont pas contenues dans les tableaux, car elles ne sont autre chose que la différence entre 1 et l'intensité de la lumière réfléchie.

Le tableau suivant donne les angles de réfraction correspondant aux angles consécutifs d'incidence de 5° en 5° pour la ligne B et H, et les intensités correspondantes de la lumière réfléchie.

α	α''_B	J_{B_n}	J_{B_p}	α''_{H_1}	J_{H_n}	J_{H_p}
0°	0°	0.04314	0.04314	0°	0.045858	0.045858
5°	3° 46' 40"	0.04357	0.04270	3° 14' 15"	0.04606	0.04537
10°	6° 32' 30"	0.04489	0.04140	6° 27' 12"	0.04771	0.04404
15°	9° 46' 35"	0.04720	0.03923	9° 38' 32"	0.05015	0.04175
20°	12° 58'	0.05063	0.036185	12° 47' 20"	0.053727	0.03858
25°	16° 3' 48"	0.05544	0.032256	15° 52' 30"	0.05878	0.03435
30°	19° 3' 57"	0.06194	0.02747	18° 33'	0.0655	0.02947
35°	22° 6' 12"	0.07065	0.02194	21° 47' 35"	0.07465	0.023556
40°	24° 56' 39"	0.08222	0.01581	24° 35' 5"	0.08661	0.017166
45°	27° 38' 19"	0.09774	0.00955	27° 14' 12"	0.10244	0.01049
50°	30° 10' 9"	0.11854	0.003905	29° 45' 42"	0.12358	0.004434
55°	32° 39' 30"	0.14662	0.000326	31° 1' 8"	0.15260	0.000465
56° 43' 58.5"	33° 16' 1.5"	0.15858	0	32° 45' 50"	0.165045	0.000015
57° 5' 13.5"	33° 25' 8"	0.161466	0.000015	32° 54' 46.5"	0.1677	0
60°	34° 37' 20"	0.18487	0.00147	34° 5' 35"	0.1918	0.001203
65°	36° 29'	0.23733	0.012183	35° 55'	0.24487	0.01154
70°	33° 3'	0.30977	0.041307	37° 27' 40"	0.31793	0.04023
75°	39° 19' 26"	0.4036	0.10531	38° 41' 47"	0.4175	0.10405
80°	40° 14' 50"	0.54798	0.23524	39° 36'	0.5556	0.23374
85°	40° 48' 44"	0.72735	0.49193	40° 9'	0.73117	0.49118
90°	40° 59' 59"	1	1	40° 20' 4"	1	1

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, si donc les vibrations sont normales à celui-ci, l'intensité de la lumière réfléchie augmentera d'une manière continue et finira par devenir égale à l'unité, tandis que celle de la lumière réfractée diminuera constamment jusqu'à s'annuler. De plus, l'intensité des rayons réfléchis est d'autant plus forte, et celle des rayons réfractés d'autant plus faible que leur réfrangibilité est plus petite. Si la lumière incidente est polarisée à angle droit sur la ligne d'incidence, l'intensité des rayons réfléchis diminue jusqu'à zéro quand l'angle d'incidence croît jusqu'à l'angle de polarisation, mais croît ensuite avec l'angle d'incidence jusqu'à devenir égale à 1. L'intensité des rayons réfractés croît alors respectivement jusqu'à l'unité, puis décroît jusqu'à zéro. Quant à l'influence de la couleur, l'intensité des rayons réfléchis, quand l'angle d'incidence croît depuis zéro jusqu'à l'angle de polarisation, devient d'autant plus grande que l'indice est plus faible. Mais si l'angle d'incidence croît depuis l'angle de polarisation jusqu'à 90° , l'intensité des rayons réfléchis sera la plus grande pour les rayons les moins réfrangibles. Pour la réfraction, c'est précisément l'inverse qui a lieu.

Dans ce qui suit, ces relations sont représentées graphiquement. La figure 12 (p. 93) correspond à la polarisation dans le plan d'incidence, la figure 13 (p. 93) à la polarisation normale au plan d'incidence. Le rayon des cercles vaut 1. Le quadrant 1 contient la lumière incidente, le quadrant 2 la lumière réfléchie et le quadrant 3 les rayons réfractés. L'intensité d'un rayon est représenté par la portion que limite la partie de la surface plus fortement teinte.

Considérons maintenant le cas où le premier milieu est du verre et le second milieu de l'air. La signification de l'intensité est la même que dans le premier cas. (Voir tableau, p. 92.)

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, les choses se passent comme dans le premier cas. Si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, l'intensité d'une couleur déterminée varie avec l'angle d'incidence toujours de la même manière que dans le premier cas, seulement l'angle de polarisation est autre; il est égal à l'angle de réfraction correspondant à l'angle primitif de polarisation, et réciproquement l'angle de réfraction correspondant à l'angle actuel de polarisation est égal à l'angle

α	α''_B	J_{Bn}	J_{Bp}	α''_{H_1}	J_{H_1n}	J_{H_1p}
0°	0°	0.04314	0.04314	0°	0.045858	0.045858
5°	7° 38' 3''	0.04415	0.042127	7° 41' 19''	0.046958	0.044771
10°	15° 20' 54''	0.047393	0.039054	15° 33' 44''	0.050459	0.044458
15°	23° 14' 7''	0.053565	0.033741	23° 34' 14''	0.057134	0.035717
20°	31° 25' 18''	0.064122	0.025971	31° 53' 56''	0.063651	0.02730
25°	40° 6' 16''	0.082526	0.01569	40° 45' 50''	0.088764	0.016149
30°	49° 39' 9''	0.116879	0.004252	50° 34' 44''	0.126951	0.003881
32° 54' 46.5''	55° 55' 2''	0.15279	0.000075	57° 5' 13.5''	0.1677	0
33° 16' 1.5''	56° 43' 58.5''	0.158564	0	57° 56' 26''	0.174339	0.000094
35°	60° 57' 36''	0.193708	0.002584	62° 23' 48''	0.215305	0.004527
40°	78° 27' 30''	0.500454	0.185326	83° 16' 10''	0.67206	0.038147
40° 20' 4''	80° 36' 7''	0.56785	0.257761	90°	1	1
40° 59' 59''	90°	1	1			

primitif de polarisation. Mais si nous comparons deux couleurs différentes, on constate que si l'angle d'incidence croît depuis zéro jusque dans le voisinage de l'angle de polarisation de la couleur la plus réfrangible, l'intensité des rayons réfléchis est d'autant plus grande que l'indice de réfraction est plus élevé. A partir de là, les choses se renversent jusqu'à ce que l'angle d'incidence ait dépassé l'angle de polarisation de la teinte la plus réfrangible et soit arrivé dans le voisinage de l'angle de polarisation de la teinte moins réfrangible. Dès ce moment, l'intensité de la teinte la plus réfrangible est plus forte que celle de l'autre. Pour les rayons réfractés, c'est précisément l'inverse qui a lieu.

Les figures 14 et 15 (p. 95) nous représentent les relations indiquées ci-dessus, de la même manière que nous l'avons vu au sujet des figures 12 et 13.

Quant à l'accord des formules (49_a), (49_b), (51_a), (51_b), (52_c), (52_d), ou en un mot des formules de Fresnel avec l'observation, elles sont confirmées d'abord par les lois de Malus et de Brewster trouvées avant

elles. La première, que l'on a l'équation $\frac{\sin A}{\sin B} = n$, si n représente l'indice de réfraction lors des passages de la lumière d'un milieu dans un autre, A l'angle de polarisation correspondant, et B l'angle de polarisation lors du passage de la lumière du second milieu dans le premier.

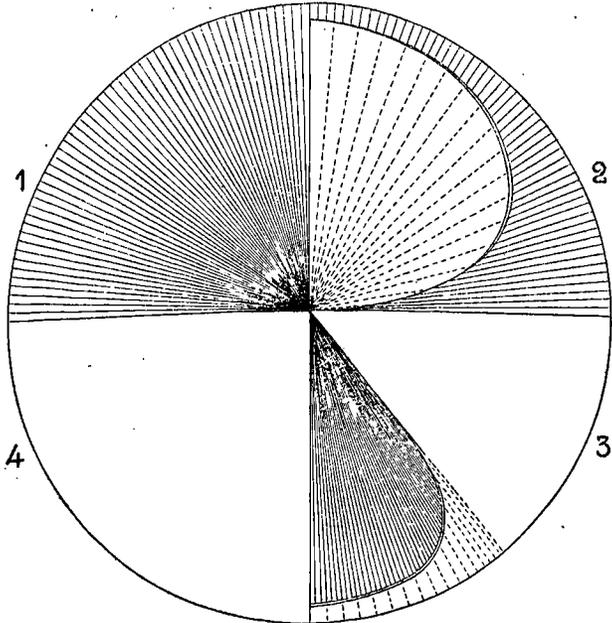


Fig. 12.

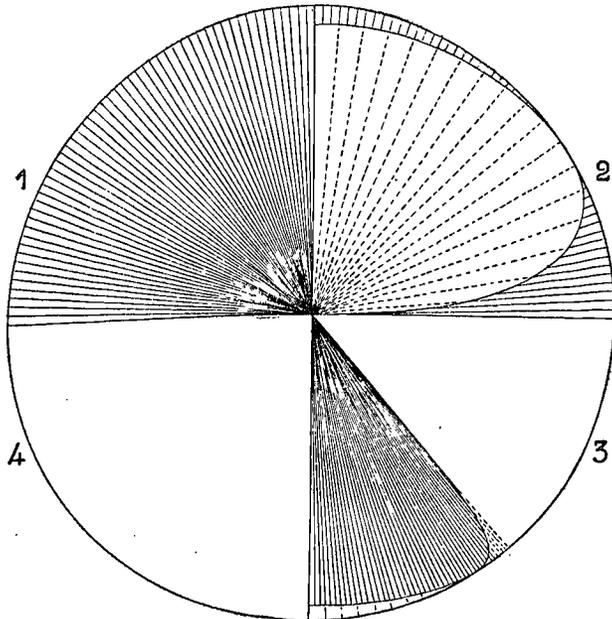


Fig. 13.

Suivant la loi de Brewster, la tangente de l'angle de polarisation est égale à l'indice de réfraction, c'est-à-dire $\operatorname{tg} \Lambda = n$.

Fresnel et Brewster ont pu confirmer expérimentalement la rotation du plan de polarisation assignée par la théorie dans la lumière réfléchie ou réfractée, et qui se présente quand le plan de vibration du rayon incident fait avec le plan d'incidence un angle compris entre 0 et 90°.

En s'appuyant sur sa théorie de la réflexion totale, Fresnel a construit ensuite son parallépipède et a pu changer ainsi de la lumière polarisée rectilignement en lumière polarisée circulairement. La confirmation de la rotation du plan de polarisation, exigée par les formules de Fresnel, comporte en même temps, ainsi que l'a dit F. Neumann, la vérification des intensités assignées par la théorie. Néanmoins, pour les vérifier, Bouguer et Arago ont entrepris des recherches photométriques dont les résultats ne s'accordent qu'approximativement avec ceux de la théorie, sans doute à cause des grandes difficultés.

Enfin, il faut encore remarquer que presque toutes ces expériences ont été faites avec des plaques de verre, donc avec une substance douée d'une certaine conductibilité. D'après notre théorie, les formules de Fresnel ne sont, à la rigueur, exactes que pour les substances dont le pouvoir conducteur est nul. Mais comme la conductibilité du verre est extrêmement petite, l'accord de la théorie avec l'observation s'explique de tout point.

§ 28. — *Réflexion et réfraction de la lumière à la limite
de corps isotropes.*

Nous supposons que la surface de séparation des corps isotropes soit plane et représente en même temps le plan des yz d'un système de plans coordonnés. La normale à la surface, comptée positivement dans la direction du premier milieu au second, est l'axe des x . Nous supposons que l'onde incidente soit plane et que la normale à l'onde soit dans le plan des xy (plan d'incidence), et que la même chose ait lieu pour l'onde réfléchie et pour l'onde réfractée. Les perturbations électriques dans l'un des milieux considérés sont soumises aux lois

DE LA LUMIÈRE.

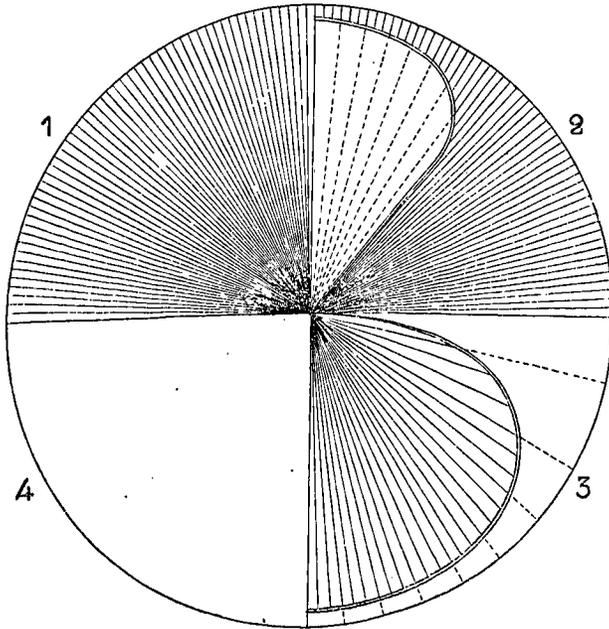


Fig. 14.

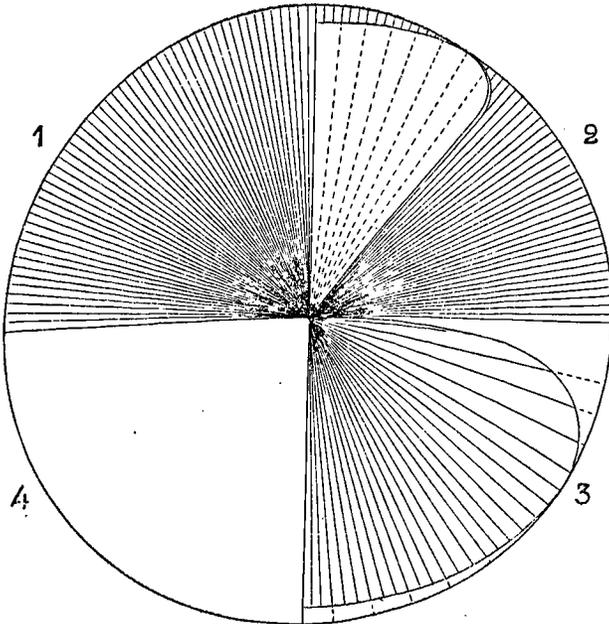


Fig. 15.

exprimées par les équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 4\pi (1 + 4\pi \mathcal{S}) \left(C + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 4\pi (1 + 4\pi \mathcal{S}) \left(C + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= 4\pi (1 + 4\pi \mathcal{S}) \left(C + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial W}{\partial t}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Nous désignerons les fonctions U, V, W et les composantes de courant u, v, w relatives à l'onde incidente, réfléchi et réfractée, de la même manière qu'au § 25. Ici comme là-bas, nous distinguerons deux cas principaux, savoir, celui où les courants électriques sont normaux au plan d'incidence, et celui où ils sont parallèles à ce plan.

1^{er} Cas. *Les courants électriques sont perpendiculaires au plan d'incidence.* — Pour le rayon réfléchi et l'onde réfractée, nous supposerons qu'ici encore les courants électriques soient dirigés perpendiculairement au plan d'incidence. Nous pouvons donc écrire exactement comme au § 25 : $U = V = U' = V' = U'' = V'' = 0$. Si α est l'angle d'incidence, α' l'angle de réflexion, α'' l'angle de réfraction, p le coefficient d'absorption du premier milieu quand une onde plane s'y propage, p' le coefficient analogue du second milieu, enfin $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ les vitesses de propagation, $\varepsilon, \varepsilon'$ les constantes de polarisation électrique dans le premier et dans le second milieu, ψ_r, ψ_a les changements de phase lors de la réflexion et de la réfraction, nous pourrions écrire les fonctions W, W', W'' sous la forme

$$\begin{aligned}W &= e^{-p(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \frac{i}{e} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{B}} [x \cos \alpha + y \sin \alpha] - t \right\}, \\ W' &= ae^{-p(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')} \frac{i}{e} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{B}'} [x \cos \alpha' + y \sin \alpha'] - t + \psi_r \right\}, \\ W'' &= a'e^{-p'(x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'')} \frac{i}{e} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{B}''} [x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''] - t + \psi_a \right\}.\end{aligned}$$

a et α' désignent deux constantes à déterminer au moyen des conditions aux limites.

Substituant ces expressions, dans les équations différentielles correspondantes, aux fonctions W , W' , W'' , nous obtenons

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} = 2\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D})(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}), \\ p = \frac{C\sqrt{2\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D})}}{\sqrt{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}}}, \end{cases}$$

$$(53_a) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{B}'^2} = 2\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D})(\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + C'^2}), \\ p' = \frac{C'\sqrt{2\pi(1 + 4\pi\mathfrak{D})}}{\sqrt{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + C'^2}}}. \end{cases}$$

A la limite on doit avoir les conditions

$$\text{pour } x = 0 \quad \begin{cases} W + W' = W'', & \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W'}{\partial x} = \frac{\partial W''}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial y} = \frac{\partial W''}{\partial y}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}}\right) - it} + \alpha e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}'}\right) - it + i\psi} \\ = \alpha' e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'}\right) - it + i\psi'} \\ \cos \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}}\right) e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}}\right) - it} \\ + \alpha \cos \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}}\right) e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}}\right) - it + i\psi} \\ = \alpha' \cos \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'}\right) e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'}\right) - it + i\psi'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} \\
 & + a \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it + i\psi_r} \\
 & = a' \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) - it + i\psi_a}
 \end{aligned}$$

Ces équations seront satisfaites pour toutes les valeurs de y et de t , si l'on a les relations

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) &= \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) = \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right), \\
 1 + a e^{i\psi_r} &= a' e^{i\psi_a}, \\
 \cos \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) + a \cos \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{i\psi_r} \\
 &= a' \cos \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) e^{i\psi_a},
 \end{aligned}$$

qui se réduisent à

$$(54) \left\{ \begin{aligned}
 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} &= \frac{-p' \mathfrak{B}' + i \mathfrak{B}}{-p \mathfrak{B} + i \mathfrak{B}'} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{1 + p p' \mathfrak{B} \mathfrak{B}'}{1 + p^2 \mathfrak{B}^2} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} - i \frac{p \mathfrak{B} - p' \mathfrak{B}'}{1 + p^2 \mathfrak{B}^2} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}, \\
 \alpha' &= 180^\circ - \alpha, \\
 1 + a e^{i\psi_r} &= a' e^{i\psi_a} \\
 \cos \alpha \sin \alpha'' (1 - a e^{i\psi_r}) &= a' \cos \alpha'' \sin \alpha e^{i\psi_a}.
 \end{aligned} \right.$$

L'angle de réflexion est à l'angle d'incidence dans le même rapport que pour les isolants isotropes, mais l'indice de réfraction est imaginaire, ce qui veut dire qu'une ou plusieurs des hypothèses mises en avant ne sont pas entièrement admissibles.

Dans les deux dernières équations (54) posons $a e^{i\psi_r} = A$, $a' e^{i\psi_a} = A'$; elles deviennent

$$1 + A = A', \quad (1 - A) \cos \alpha \sin \alpha'' = A' \cos \alpha'' \sin \alpha,$$

d'où

$$A = -\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')}, \quad A' = 1 + A = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha''}{\sin(\alpha + \alpha'')}.$$

Or, ces formules ne sont autres que celles de Fresnel (49_a), (49_b), pour le cas où la lumière est polarisée dans le plan d'incidence. Nous pouvons les amener à une autre forme en écrivant les indices imaginaires sous la forme $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = M e^{-i\chi}$, et en déterminant M et χ par les formules

$$M^2 = \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}'^2} \left\{ \left(\frac{1 + pp'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}{1 + p^2\mathfrak{B}^2} \right)^2 + \left(\frac{p\mathfrak{B} - p'\mathfrak{B}'}{1 + p^2\mathfrak{B}^2} \right)^2 \right\},$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{p\mathfrak{B} - p'\mathfrak{B}'}{1 + pp'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$$

Si $p = 0$ et $p' = 0$, $M = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$, et, par conséquent, positif. Comme

M ne s'annule pour aucune valeur des coefficients d'absorption p et p' , qui sont des quantités essentiellement positives, nous devons prendre la racine positive quand nous déduisons M de la valeur de M^2 .

Quant à la valeur de $\operatorname{tg} \chi$, elle ne peut jamais devenir infinie, car le dénominateur ne peut jamais s'annuler, et le numérateur ne peut devenir infini, puisqu'on exclut les cas où l'une des quantités p , p' , \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' est infinie. Pour $p = 0$ et $p' = 0$, nous avons $\chi = 0$; d'après cela,

$$\frac{\pi}{2} > \chi > -\frac{\pi}{2}.$$

Il suit de ce qui précède que

$$\sin \alpha' = \frac{e^{i\chi} \sin \alpha}{M}, \quad \cos \alpha' = \sqrt{1 - \frac{e^{2i\chi} \sin^2 \alpha}{M^2}}.$$

Écrivons encore cette dernière expression sous la forme $\cos \alpha' = P e^{-i\omega}$, en déterminant P et ω à l'aide des équations

$$P^2 = 1 + \frac{\sin^4 \alpha}{M^4} - \frac{2 \sin^2 \alpha}{M^2} \cos 2\chi, \quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{\sin^2 \alpha \sin 2\chi}{M^2 - \sin^2 \alpha \cos 2\chi}.$$

Cette détermination revient à résoudre un triangle dont on connaît un côté 1, un second $\frac{\sin^2 \alpha}{M^2}$ et l'angle 2χ compris entre eux, et à

chercher le troisième côté P^2 et l'angle 2ω compris entre le côté 1 et le côté P^2 (fig. 16).

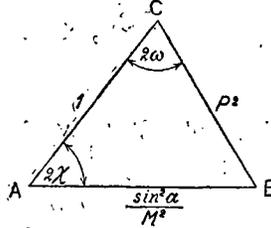


Fig. 16.

Si $\chi = 0$, alors 2ω est nul ou égal à π suivant que $\frac{\sin^2 \alpha}{M^2}$ est plus petit ou plus grand que 1. Dans le premier cas, ω et χ deviennent négatifs à la fois, et la valeur absolue de la somme des angles $2\chi + 2\omega$ est toujours plus petite que π . C'est ce qui est encore vrai dans le second cas, aussi longtemps que χ est positif. Mais si χ est négatif, 2ω croît au delà de π , la somme $2\omega + 2\chi$ devient supérieure à π , tout en restant toujours moindre que 2π . Quant à P , le carré P^2 , obtenu à l'aide de la valeur P^2 , devra être nécessairement positif, car nous supposons P réel. Pour $\chi = 0$ et $\frac{\sin^2 \alpha}{M^2} = 1$, on a $P^2 = 0$. Si nous tirons P de P^2 , il faut prendre la racine positive aussi longtemps que $\chi + \omega$ (valeur absolue) est moindre que $\frac{\pi}{2}$; et la racine négative au contraire quand $\chi + \omega$ est $> \frac{\pi}{2}$.

Tant que la valeur absolue de $\chi + \omega$ est $< \frac{\pi}{2}$, il en est de même de $\chi - \omega$. Mais si $\chi + \omega > \frac{\pi}{2}$, la valeur absolue de $\chi - \omega$ est aussi plus grande que $\frac{\pi}{2}$, quoique toujours moindre que $\frac{3\pi}{2}$. Écrivons maintenant

$$A = - \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha' - \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha' + \cos \alpha} = - \frac{MPe^{-i(\chi + \omega)} - \cos \alpha}{MPe^{-i(\chi + \omega)} + \cos \alpha}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{MP - \cos \alpha e^{i(\chi + \omega)}}{MP + \cos \alpha e^{i(\chi + \omega)}} \\ \text{ou bien} \\ \frac{MP - \cos \alpha \cos(\chi + \omega) - i \cos \alpha \sin(\chi + \omega)}{MP + \cos \alpha \cos(\chi + \omega) + i \cos \alpha \sin(\chi + \omega)} \end{array} \right.$$

D'autre part,

$$A = a \cos \psi_r + ia \sin \psi_r.$$

D'où

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = \frac{M^2 P^2 + \cos^2 \alpha - 2MP \cos \alpha \cos(\chi + \omega)}{M^2 P^2 + \cos^2 \alpha + 2MP \cos \alpha \cos(\chi + \omega)}, \\ \operatorname{tg} \psi_r = - \frac{2MP \cos \alpha \sin(\chi + \omega)}{M^2 P^2 - \cos^2 \alpha}. \end{array} \right.$$

Posons maintenant

$$M = m, \quad MP = D, \quad \omega = -\chi';$$

alors les valeurs données ici pour a^2 et $\operatorname{tg} \psi_r$ deviennent identiques à celles que Mac-Cullagh (1) a déduites en partant d'un tout autre point de vue.

La quantité a ne peut jamais s'annuler, car le dénominateur ne peut jamais devenir égal à l'infini, et le numérateur jamais nul, sauf quand $\chi + \omega = 0$ et $MP = \cos \alpha$. Or, d'après ce qui précède, $\chi + \omega$ n'est nul que si $\chi = 0$ et $\omega = 0$. Mais alors $P^2 = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{M^2}$ et $M^2 = 1$. De là il suit que $p = p'$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, c'est-à-dire que les deux milieux sont identiques.

Nous avons trouvé

$$A' = \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')} = \frac{2 \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} \cos \alpha'' + \cos \alpha}$$

Substituant ici les valeurs de l'indice de réfraction et de $\cos \alpha''$, nous obtenons

(1) Comparer les *Leçons d'optique physique* de Verdet, II, p. 568.

$$A' = \frac{2 \cos \alpha}{MP e^{-i(\chi + \omega)} + \cos \alpha}$$

$$= \frac{2 [\cos \alpha \cos (\chi + \omega) + i \cos \alpha \sin (\chi + \omega)]}{MP + \cos \alpha \cos (\chi + \omega) + i \cos \alpha \sin (\chi + \omega)}$$

Comme d'autre part

$$A' = a' \cos \psi_a + i a' \sin \psi_a,$$

il s'ensuit que

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{M^2 P^2 + \cos^2 \alpha + 2MP \cos \alpha \cos (\chi + \omega)}, \\ \operatorname{tg} \psi_a = \frac{MP \sin (\chi + \omega)}{MP \cos (\chi + \omega) + \cos \alpha}. \end{array} \right.$$

Si les rayons tombent normalement sur la surface de séparation, si donc $\alpha = 0$, alors $a' = 0$, $\omega = 0$, $P^2 = 1$, et, par conséquent,

$$a^2 = \frac{M^2 + 1 - 2M \cos \chi}{M^2 + 1 + 2M \cos \chi}, \quad \operatorname{tg} \psi_r = -\frac{2M \sin \chi}{M^2 - 1},$$

$$a'^2 = \frac{4}{M^2 + 1 + 2M \cos \chi}, \quad \operatorname{tg} \psi_a = \frac{M \sin \chi}{M \cos \chi + 1}.$$

Pour $\alpha = 90^\circ$, on trouve

$$a^2 = 1, \quad \operatorname{tg} \psi_r = 0, \quad a' = 0, \quad \operatorname{tg} \psi_a = \operatorname{tg} (\chi + \omega).$$

Si l'angle d'incidence se rapproche de 90° , le mouvement dans le deuxième milieu diminue donc jusqu'à s'annuler, mais le changement de phase correspondant tend vers une limite déterminée. Si le premier milieu est un isolant isotrope, $p = 0$, et que le second soit un conducteur isotrope, $p' > 0$, on a

$$M^2 = \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}'^2} + p'^2 \mathfrak{B}^2, \quad \operatorname{tg} \chi = -p' \mathfrak{B}'.$$

Si alors $\alpha = 0$, on trouve

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} - 1\right)^2 + p'^2 \mathfrak{B}^2}{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} + 1\right)^2 + p'^2 \mathfrak{B}^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_r = \frac{2p' \mathfrak{B} \mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}^2 (1 + p'^2 \mathfrak{B}'^2) - \mathfrak{B}'^2},$$

$$\alpha'^2 = \frac{4}{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} + 1\right)^2 + p'^2 \mathfrak{B}^2}, \quad \text{tg } \psi_a = -\frac{p' \mathfrak{B} \mathfrak{B}'}{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'}$$

Réciproquement, si le premier milieu est un conducteur isotrope, $p' > 0$, et le second un isolant isotrope, $p' = 0$, on trouve

$$M^2 = \frac{\mathfrak{B}^2 : \mathfrak{B}'^2}{1 + p^2 \mathfrak{B}^2}, \quad \text{tg } \chi = p \mathfrak{B},$$

et pour $\alpha = 0$,

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} - 1\right)^2 + p^2 \mathfrak{B}^2}{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} - 1\right)^2 + p^2 \mathfrak{B}^2}, \quad \text{tg } \psi_r = \frac{2p \mathfrak{B} \mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}'^2 (1 + p^2 \mathfrak{B}^2) - \mathfrak{B}^2}$$

$$\alpha'^2 = 4 \frac{1 + p^2 \mathfrak{B}^2}{\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} + 1\right)^2 + p^2 \mathfrak{B}^2}, \quad \text{tg } \psi_a = \frac{p \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}' + p^2 \mathfrak{B}^2 \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}}$$

Si les deux milieux sont isolants isotropes, on a

$$p = 0, \quad p' = 0 \quad \text{et} \quad \chi = 0, \quad \omega = 0, \quad \psi_r = 0, \quad \psi_a = 0,$$

$$a = A = -\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')}, \quad a' = A' = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha''}{\sin(\alpha + \alpha'')}.$$

Ces dernières formules ne sont autres que les formules de Fresnel (49_a), (49_b). Si dans la valeur de a^2 (55) nous substituons les valeurs de M , P , χ , ω correspondant à ce cas, nous voyons que nous devons prendre la racine négative pour obtenir la valeur de a ci-dessus. Nous arrivons de la même manière à conclure que pour tirer a' de l'expression de a'^2 (56), nous devons prendre la racine positive.

§ 29 (suite).

2^e CAS. *Les courants électriques (vibrations) de l'onde incidente sont parallèles au plan d'incidence.* — Nous supposons que dans l'onde réfléchie et dans l'onde réfractée les vibrations aient aussi lieu parallèlement au plan d'incidence; nous pourrions alors écrire, comme au § 25, $W = W' = W'' = 0$. Pour les fonctions U , V , U' , V' ,

U^r, V^r , nous pouvons poser

$$\begin{aligned}
 U &= \sin \alpha e^{-p(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - t \right]}, \\
 V &= -\cos \alpha e^{-p(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - t \right]}, \\
 U' &= b \sin \alpha' e^{-p(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}'} (x \cos \alpha' + y \sin \alpha') - t + \psi_r' \right]}, \\
 V' &= -b \cos \alpha' e^{-p(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}'} (x \cos \alpha' + y \sin \alpha') - t + \psi_r' \right]}, \\
 U'' &= b' \sin \alpha'' e^{-p'(x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'')} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}''} (x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'') - t + \psi_d' \right]}, \\
 V'' &= -b' \cos \alpha'' e^{-p'(x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'')} e^{i \left[\frac{1}{\mathfrak{B}''} (x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'') - t + \psi_d' \right]}.
 \end{aligned}$$

Lors du passage par le plan de séparation, les fonctions U, V et leurs dérivées premières changent d'une manière continue, d'où les équations de condition

$$\left. \begin{aligned}
 U + U' &= U'', & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial x} &= \frac{\partial U''}{\partial x}, & \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U'}{\partial y} &= \frac{\partial U''}{\partial y}, \\
 V + V' &= V'', & \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial x} &= \frac{\partial V''}{\partial x}, & \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial y} &= \frac{\partial V''}{\partial y},
 \end{aligned} \right\} \text{ pour } x=0.$$

Substituant ici les expressions ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha e^{-p \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} + b \sin \alpha' e^{-p' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) - it + i\psi_r'} \\
 & = b' \sin \alpha'' e^{-p' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) - it + i\psi_d'} \\
 & \sin \alpha \left(-p \cos \alpha + \frac{i \cos \alpha}{\mathfrak{B}} \right) e^{-p \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} \\
 & + b \sin \alpha' \left(-p \cos \alpha' + \frac{i \cos \alpha'}{\mathfrak{B}'} \right) e^{-p' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) - it + i\psi_r'} \\
 & = b' \sin \alpha'' \left(-p' \cos \alpha'' + \frac{i \cos \alpha''}{\mathfrak{B}''} \right) e^{-p' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) - it + i\psi_d'}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} \\
& + b \sin^2 \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) - it + i\psi_r'} \\
& = b' \sin^2 \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) - it + i\psi_d'} \\
& \cos \alpha e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} + b \cos \alpha' e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it + i\psi_r'} \\
& = b' \cos \alpha'' e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) - it + i\psi_d'} \\
& \cos^2 \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{y \sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it} \\
& + b \cos^2 \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{y \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) - it + i\psi_r'} \\
& = b' \cos^2 \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) e^{y \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) - it + i\psi_d'}
\end{aligned}$$

La sixième équation de condition est identique à la deuxième, à cause des relations

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U''}{\partial x} + \frac{\partial V''}{\partial y} = 0.$$

Si ces équations doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de y et t , on doit avoir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) &= \sin \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) = \sin \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right), \\
\sin \alpha + b \sin \alpha' e^{i\psi_r'} &= b' \sin \alpha'' e^{i\psi_d'}, \\
\cos \alpha + b \cos \alpha' e^{i\psi_r'} &= b' \cos \alpha'' e^{i\psi_d'}, \\
\cos^2 \alpha \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) + b \cos^2 \alpha' \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{B}} \right) e^{i\psi_r'} \\
&= b' \cos^2 \alpha'' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}''} \right) e^{i\psi_d'};
\end{aligned}$$

si nous ajoutons la troisième et la cinquième équation de condition, nous avons

$$\left(-p + \frac{i}{\mathfrak{R}}\right) + b \left(-p + \frac{i}{\mathfrak{R}}\right) e^{i\psi'} = b' \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{R}'}\right) e^{i\psi'}$$

De ces relations résulte immédiatement que

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \quad \text{ou} \quad \alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad \text{et} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{-p' + \frac{i}{\mathfrak{R}'}}{-p + \frac{i}{\mathfrak{R}}}$$

L'angle de réflexion est encore dans le même rapport avec l'angle d'incidence que précédemment. L'indice de réfraction est ici encore complexe imaginaire et peut s'exprimer absolument comme dans le premier cas par $Me^{-i\chi}$, où M et χ doivent être déterminés par les mêmes équations que là. Il va de soi que $\cos \alpha'$ peut s'exprimer également ici par $Pe^{-i\omega}$.

Posons $be^{i\psi'} = B$, $b'e^{i\psi'} = B'$; alors, la troisième et la cinquième relation donnent

$$(1 - B) \cos \alpha = B' \cos \alpha',$$

$$(1 + B) \sin \alpha' = B' \sin \alpha,$$

d'où,

$$B = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')},$$

$$B' = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')}.$$

Ce sont de nouveau les formules de Fresnel pour le cas où la lumière est polarisée normalement au plan d'incidence.

Substituant dans ces deux formules la valeur de l'indice trouvée plus haut et l'expression de $\cos \alpha'$, nous obtenons

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha' \cos \alpha'} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha - \cos \alpha'}{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha + \cos \alpha'} \\ &= \frac{Me^{-i\chi} \cos \alpha - Pe^{-i\omega}}{Me^{-i\chi} \cos \alpha + Pe^{-i\omega}} = \frac{M \cos \alpha - Pe^{i(\chi - \omega)}}{M \cos \alpha + Pe^{i(\chi - \omega)}} \\ &= \frac{M \cos \alpha - P \cos(\chi - \omega) - iP \sin(\chi - \omega)}{M \cos \alpha + P \cos(\chi - \omega) + iP \sin(\chi - \omega)} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$B = b \cos \psi'_r + i b \sin \psi'_r;$$

on tire de là les équations

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} b'^2 = \frac{M^2 \cos^2 \alpha + P^2 - 2MP \cos \alpha \cos (\chi - \omega)}{M^2 \cos^2 \alpha + P^2 + 2MP \cos \alpha \cos (\chi - \omega)}, \\ \operatorname{tg} \psi'_r = - \frac{2MP \cos \alpha \sin (\chi - \omega)}{M^2 \cos^2 \alpha - P^2}. \end{array} \right.$$

On obtient de même les expressions de b'^2 et $\operatorname{tg} \psi'_d$. On a en effet

$$\begin{aligned} B' &= (1 + B) \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha e^{i\chi}}{M \cos \alpha + P e^{i(\chi - \omega)}} \\ &= 2 \cos \alpha \frac{\cos \chi + i \sin \chi}{M \cos \alpha + P \cos (\chi - \omega) + iP \sin (\chi - \omega)}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$B' = b' \cos \psi'_d + i b' \sin \psi'_d.$$

Il suit de là que

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} b'^2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{M^2 \cos^2 \alpha + P^2 + 2MP \cos \alpha \cos (\chi - \omega)}, \\ \operatorname{tg} \psi'_d = \frac{M \cos \alpha \sin \chi + P \sin \omega}{M \cos \alpha \cos \chi + P \cos \omega}. \end{array} \right.$$

Si dans les formules (57) nous faisons $M = m$, $MP = D$, $\omega = -\chi'$, elles deviennent identiques avec celles qu'a établies Mac-Cullagh pour le même cas⁽¹⁾.

La quantité b devient nulle quand $\chi - \omega = 0$ et $M \cos \alpha = P$. Multipliant la deuxième de ces équations de part et d'autre par $e^{-i\chi}$, nous pouvons l'écrire, en tenant compte de la première, sous la forme

$$M e^{-i\chi} \cos \alpha = P e^{-i\omega},$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}, \quad 2\alpha' = \pi - 2\alpha$$

ou

$$(59) \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

(1) Comparez Verdet, *Leçons d'optique physique*, II, p. 570.

L'intensité du rayon réfléchi s'évanouit donc pour le cas où l'angle d'incidence et l'angle de réfraction sont complémentaires.

Dès que M et χ sont connus, nous pouvons aussi déterminer l'angle de polarisation α . En effet, combinons

$$M^2 \cos^2 \alpha = P^2 \quad \text{avec} \quad P^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \cos 2\chi,$$

et exprimons $\sin^2 \alpha$ et $\cos^2 \alpha$ au moyen de $\operatorname{tg}^2 \alpha$; nous aurons

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{M^2 \{ \cos 2\chi - M^2 \pm \sqrt{(\cos 2\chi - M^2)^2 + (M^2 - 1)(M^2 - 2M^2 \cos 2\chi + 1)} \}}{M^2 - 2M^2 \cos 2\chi + 1}$$

ou bien

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{M^2 \{ \cos 2\chi - M^2 \pm \sqrt{M^2 (M^2 - \cos^2 2\chi)^2 + (M^2 - 1) \sin^2 2\chi} \}}{(\cos^2 2\chi - M^2)^2 + \sin^2 2\chi}.$$

Comme pour $p = 0$ et $p' = 0$ on a $\chi = 0$ et $\operatorname{tg} \alpha = M$, nous devons prendre le radical avec le signe $+$; donc

$$(60) \quad \operatorname{tg} \alpha = M \sqrt{\frac{(\cos 2\chi - M^2) + \sqrt{M^2 (M^2 - \cos^2 2\chi)^2 + (M^2 - 1) \sin^2 2\chi}}{(\cos^2 2\chi - M^2)^2 + \sin^2 2\chi}}.$$

Si dans la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$, nous posons $M \cos \alpha = P$ et $\chi - \omega = 0$, elle prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Considérons l'expression...

$$\frac{\sin(\chi - \omega)}{M^2 \cos^2 \alpha - P^2}.$$

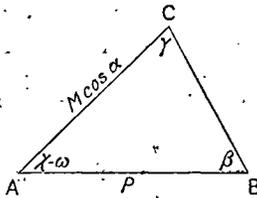


Fig. 17.

Le triangle de la figure 17 donne

$$M^2 \cos^2 \alpha - P^2 = \overline{BC}^2 - 2 \overline{BC} \cdot P \cos \beta,$$

et

$$\frac{\sin(\chi - \omega)}{M^2 \cos^2 \alpha - P^2} = \frac{\sin(\chi - \omega)}{\overline{BC}} \cdot \frac{1}{BC - 2P \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{M \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\overline{BC} - 2P \cos \beta}$$

La condition $M \cos \alpha = P$ conduit à $\beta = \gamma$ et la condition supplémentaire $\chi - \omega = 0$ à $\beta = 90^\circ$ et $\gamma = 90^\circ$. Comme ces conditions entraînent l'annulation de \overline{BC} , nous obtenons dans ce cas

$$\operatorname{tg} \psi_r' = \pm \infty, \quad \psi_r' = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Si l'angle d'incidence se rapproche de l'angle de polarisation, l'intensité du rayon réfléchi se rapproche de 0, mais la différence de phase tend vers une valeur limite déterminée, savoir, un quart de longueur d'onde.

Les valeurs de b'^2 et $\operatorname{tg} \psi_d'$ aussi prennent dans ce cas une forme très simple; savoir : $b'^2 = \frac{1}{M^2}$, $\operatorname{tg} \psi_d' = \operatorname{tg} \chi$. Si les rayons sont normaux, $\alpha = 0$, et alors $\alpha' = 0$, $P^2 = 1$, $\omega = 0$, et

$$b'^2 = \frac{M^2 + 1 - 2M \cos \chi}{M^2 + 1 + 2M \cos \chi}, \quad \operatorname{tg} \psi_r' = -\frac{2M \sin \chi}{M^2 - 1}$$

$$b'^2 = \frac{4}{M^2 + 1 + 2M \cos \chi}, \quad \operatorname{tg} \psi_d' = \frac{M \sin \chi}{M \cos \chi + 1}$$

Toutes ces expressions sont absolument identiques aux expressions correspondantes du premier cas. Considérons maintenant le cas de l'incidence rasante ($\alpha = 90^\circ$); on a alors $b^2 = 1$, $\operatorname{tg} \psi_r' = 0$, $b'^2 = 0$, $\operatorname{tg} \psi_d' = \operatorname{tg} \omega$.

Si l'angle d'incidence se rapproche de 90° , l'intensité du rayon réfracté converge vers 0, mais le changement de phase, vers une valeur limite déterminée, qui diffère de la valeur correspondante du premier cas (1).

(1) Comparez Ketteler : *Das Complexe als Ausdruck des Zusammenhanges zwischen der elliptischen Polarisation der Spiegelung und Brechung und der Dispersion der Farben*. Bonn, 1875, p. 80.

Les expressions que nous obtenons pour α dans les cas $p = 0$, $p' > 0$ et $p > 0$, $p' = 0$ sont identiques aux expressions analogues du premier cas principal. Si $p = 0$, $p' = 0$, alors

$$\chi = 0 \quad \text{et} \quad \psi_r = 0, \quad \psi_d = 0,$$

$$b = B = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha'')}, \quad b' = B' = \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')}.$$

Les deux dernières formules sont les formules de Fresnel (51_a) et (51_b).

§ 30 (suite). — *Le plan de vibration du rayon incident polarisé rectilignement fait avec le plan d'incidence un angle différent de 0° et de 90°.*

Si les vibrations électriques d'une onde incidente à polarisation rectiligne font avec le plan d'incidence un angle différent de 0 et de 90°, nous pouvons les supposer décomposés en deux composantes parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence. Ces composantes subissent, tant à la réflexion qu'à la réfraction, une perte différente d'intensité et un changement de phase distinct. Il en résulte que le rayon réfléchi et le rayon réfracté doivent être polarisés elliptiquement. Si l'angle du plan de vibration avec le plan d'incidence est de 45°, les amplitudes des composantes sont égales pour le rayon incident, mais non pour le rayon réfléchi ou réfracté. Dans ce cas, nous poserons $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} h$ et $\frac{b'}{a'} = \operatorname{tg} h'$; il faut déterminer les angles h , h' et la différence de phase des deux composantes considérées pour la réflexion et la réfraction. A cet effet, cherchons les expressions des rapports $\frac{B^2}{A^2}$ et $\frac{B'^2}{A'^2}$. D'une part,

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\cos^2(\alpha + \alpha'')}{\cos^2(\alpha - \alpha'')} = \left[\frac{\cos \alpha \cos \alpha'' - \sin \alpha \sin \alpha''}{\cos \alpha \cos \alpha'' + \sin \alpha \sin \alpha''} \right]^2$$

$$= \left[\frac{\cos \alpha P e^{-i\omega} - \frac{\sin^2 \alpha}{M} e^{i\chi}}{\cos \alpha P e^{-i\omega} + \frac{\sin^2 \alpha}{M} e^{i\chi}} \right]^2 = \left[\frac{MP \cos \alpha - \sin^2 \alpha e^{i(\chi + \omega)}}{MP \cos \alpha + \sin^2 \alpha e^{i(\chi + \omega)}} \right]^2.$$

D'autre part,

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{b^2}{a^2} e^{2i(\psi_r' - \psi_r)} = \text{tg}^2 h \cdot e^{2i(\psi_r' - \psi_r)}.$$

En égalant les deux expressions, nous obtenons

$$\text{tg}^2 h = \frac{[\text{MP} \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos(\chi + \omega)]^2 + \sin^4 \alpha \sin^2(\chi + \omega)}{[\text{MP} \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos(\chi + \omega)]^2 + \sin^4 \alpha \sin^2(\chi + \omega)},$$

ou bien, si l'on fait usage de la formule $\cos 2h = \frac{1 - \text{tg}^2 h}{1 + \text{tg}^2 h}$,

$$(61) \left\{ \begin{aligned} \cos 2h &= \frac{2\text{MP} \cos \alpha \sin^2 \alpha \cos(\chi + \omega)}{\text{M}^2 \text{P}^2 \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \cos(\chi + \omega) \frac{2 \frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha}}{1 + \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha}\right)^2} \\ &= \cos(\chi + \omega) \sin \left[2 \text{arc tg} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha} \right) \right]; \end{aligned} \right.$$

d'autre part,

$$(62) \left\{ \begin{aligned} \text{tg}(\psi_r' - \psi_r) &= \sin(\chi + \omega) \frac{2 \frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha}}{1 - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha}\right)^2} \\ &= \sin(\chi + \omega) \text{tg} \left[2 \text{arc tg} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Les formules (61) et (62) ne sont rien d'autre que les formules de Cauchy dans la forme que leur a donnée Eisenlohr. Quincke a comparé ces équations à ses mesures, et trouvé un accord suffisant avec des plaques métalliques.

Pour un certain angle d'incidence, $\frac{\sin^2 \alpha}{\text{MP} \cos \alpha}$ devient égal à 1, et la différence de phase $\psi_r' - \psi_r$ égale à $\frac{\pi}{2}$. On nomme cet angle l'angle d'incidence principal, et la valeur correspondante de h , l'azimut principal. Nous désignerons ces quantités respectivement par E et H. Nous trouvons de même les propriétés du rayon réfracté. En effet,

on a

$$\begin{aligned} \frac{B'^2}{A'^2} &= \frac{1}{\cos^2(\alpha - \alpha')} = \frac{1}{(\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha')^2} \\ &= \frac{1}{\left(\cos \alpha P e^{-i\omega} + \frac{\sin^2 \alpha}{M} e^{i\chi}\right)^2} = \frac{M^2 e^{2i\omega}}{[MP \cos \alpha + \sin^2 \alpha e^{i(\chi + \omega)}]^2}, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\frac{B'^2}{A'^2} = \frac{b'^2}{a'^2} e^{2i(\psi'_d - \psi_d)} = \operatorname{tg}^2 h' e^{2i(\psi'_d - \psi_d)}.$$

En égalant ces deux expressions, nous obtenons

$$\operatorname{tg}^2 h' = \frac{M^2}{M^2 P^2 \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha + 2MP \cos \alpha \sin^2 \alpha \cos(\chi + \omega)}$$

ou

$$(61_a) \quad \cot^2 h' = P^2 \cos^2 \alpha \left\{ 1 + \left(\frac{\sin^2 \alpha}{MP \cos \alpha} \right)^2 + 2 \frac{\sin^2 \alpha}{MP \cos \alpha} \cos(\chi + \omega) \right\},$$

et

$$(62_a) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}(\psi'_d - \psi_d) &= \frac{MP \cos \alpha \sin \omega - \sin^2 \alpha \sin \chi}{MP \cos \alpha \cos \omega + \sin^2 \alpha \cos \chi} \\ &= \frac{\sin \omega - \sin \chi \frac{\sin^2 \alpha}{MP \cos \alpha}}{\cos \omega + \cos \chi \frac{\sin^2 \alpha}{MP \cos \alpha}} \end{aligned} \right.$$

Si l'angle d'incidence devient égal à l'angle d'incidence principal, on a

$$\cos 2h = \cos 2H = \cos(\chi + \omega), \quad \psi'_d - \psi_d = \frac{\pi}{2},$$

$$\cot h = 2P \cos E \cos H, \quad \psi'_d - \psi_d = \frac{\omega - \chi}{2}.$$

Si nous déterminons expérimentalement E et H, nous trouvons, par la première équation, la valeur de $(\chi + \omega)$, et par la relation $MP = \frac{\sin^2 E}{\cos E}$, celle de MP. Or, P et ω sont liés à M et à χ par deux équations déterminées; nous pouvons donc aussi trouver M et χ . La

détermination de M et χ est très simple, si l'on peut trouver, outre E et H , les valeurs de h' et de $\psi'_d - \psi_d$.

§ 31 (suite). — *L'indice de réfraction est une fonction de l'angle d'incidence.*

Nous avons trouvé dans le premier cas, pour l'onde réfractée, l'expression suivante :

$$a'e \frac{-p'(x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'')}{e} i \left[\frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{\mathfrak{B}'} - t + \psi_d \right]$$

avec les relations

$$\sin \alpha'' = \frac{\sin \alpha}{M} e^{i\chi}, \quad \cos \alpha'' = P e^{-i\omega}.$$

Substituant les valeurs de $\sin \alpha''$, $\cos \alpha''$, dans l'expression ci-dessus, nous trouvons

$$a'e P \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) (\cos \omega - i \sin \omega) x + \frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' + \frac{i}{\mathfrak{B}'} \right) (\cos \chi + i \sin \chi) y - i(t - \psi_d)$$

$$\begin{aligned} & a'e P \left(-p' \cos \omega + \frac{\sin \omega}{\mathfrak{B}'} \right) x + \frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' \cos \chi - \frac{\sin \chi}{\mathfrak{B}'} \right) y \\ & \times e \left\{ P \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right) x + \frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' \sin \chi + \frac{\cos \chi}{\mathfrak{B}'} \right) - t + \psi_d \right\} \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation

$$P \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right) x + \frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' \sin \chi + \frac{\cos \chi}{\mathfrak{B}'} \right) y - t + \psi_d = \text{Const.},$$

où α , p , \mathfrak{B} , p' , \mathfrak{B}' ainsi que M , χ , ω sont donnés; alors elle représente un plan qui s'avance dans une direction déterminée par les cosinus

$$\lambda = \frac{P \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right)}{\sqrt{\left\{ P^2 \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \left(-p' \sin \chi + \frac{\cos \chi}{\mathfrak{B}'} \right)^2 \right\}}}$$

Théorie électromagnétique, etc.

$$\mu = \frac{\frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' \sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{\mathfrak{B}'} \right)}{\sqrt{\left\{ P^2 \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \left(-p' \sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{\mathfrak{B}'} \right)^2 \right\}}},$$

$$\nu = 0,$$

avec une vitesse égale à

$$\frac{1}{\sqrt{P^2 \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \left(-p' \sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{\mathfrak{B}'} \right)^2}}.$$

Ainsi nous obtenons pour l'indice de réfraction l'expression

$$(63) \quad \mathfrak{B} \sqrt{P^2 \left(p' \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\mathfrak{B}'} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \left(-p' \sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{\mathfrak{B}'} \right)^2}.$$

On le voit, cet indice dépend de l'angle d'incidence α (1) et des grandeurs p , \mathfrak{B} , p' , \mathfrak{B}' , qui elles-mêmes sont fonctions des grandeurs ϵ , C , ϵ' , C' , \mathfrak{S} .

D'abord, l'indice de réfraction a été obtenu sous forme imaginaire; cela provient de ce que nous avons fait une supposition fautive, savoir, que la vitesse de propagation de l'onde réfractée est indépendante de l'angle d'incidence.

Si les deux milieux sont des isolants isotropes, $p = 0$ et $p' = 0$, de plus $M = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$, $\gamma = 0$, $2\omega = 0$ ou π suivant que $\frac{\sin \alpha}{M}$ est inférieur ou supérieur à 1, et $P^2 = \pm \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{M^2} \right)$. Le signe + convient au cas où $\frac{\sin \alpha}{M} < 1$, le signe - pour $\frac{\sin \alpha}{M} > 1$. Ce dernier cas est celui de la réflexion totale. Si elle n'a pas lieu, alors l'indice vaut $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ ou $\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}}$. Si $p' = 0$, mais $p > 0$, l'indice est égal à

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} \sqrt{\frac{P^2 + 1}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2M^2}}.$$

Si p et p' diffèrent de zéro, mais sont suffisamment petits pour qu'on

(1) Comparez Ketteler, déjà cité; voir p. 70.

puisse négliger leur produit et leurs carrés, on a $M = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$,
 $\operatorname{tg} \chi = p\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'p'$, et à cause de cela, à peu près

$$\begin{aligned} p' \sin \chi &= 0, & p' \sin \omega &= 0, & \cos \chi &= 1, & \cos \omega &= 1, \\ \cos 2\chi &= 1 & \text{et} & & P^2 &= 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{M^2}. \end{aligned}$$

Dans l'expression pour P^2 nous avons omis le double signe, car nous nous bornons au cas où $\frac{\sin \alpha}{M} < 1$. Exécutons les substitutions indiquées, nous aurons pour l'indice l'expression $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$, ou

$$\sqrt{\frac{\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + C'^2}}{\epsilon' + \sqrt{\epsilon^2 + C^2}}}.$$

Donc, si les coefficients d'absorption p , p' sont différents de 0, mais assez petits pour qu'on puisse négliger leur produit et leurs carrés, alors l'indice est indépendant de l'angle d'incidence.

L'expression générale de l'indice nous permet enfin de conclure encore le théorème suivant : Si l'un des coefficients d'absorption p , p' varie, l'indice de réfraction varie également.

§ 32 (suite). — Loi de l'absorption.

Dans l'expression relative à l'onde réfractée, le facteur qui concerne l'absorption a la forme

$$P \left(-p' \cos \omega + \frac{\sin \omega}{\mathfrak{B}'} \right) x + \frac{\sin \alpha}{M} \left(-p' \cos \chi - \frac{\sin \chi}{\mathfrak{B}'} \right) y$$

Comme on voit, l'absorption ne dépend pas seulement du chemin parcouru et des coefficients d'absorption, mais aussi de l'angle d'incidence α .

Le chemin parcouru et le coefficient d'absorption p' du second milieu exercent sur l'absorption une influence différente, car M , χ , P , ω dépendent de p' . Si nous substituons au second milieu une

substance ayant un coefficient d'absorption p' double, alors l'absorption s'accroît, toutes choses égales d'ailleurs, dans un tout autre rapport que pour la première substance où l'on doublerait le chemin parcouru. Il n'y a d'exception que pour les rayons tombant normalement, car alors $\alpha = 0$, $\omega = 0$, $P = 1$ et le facteur d'extinction égal à $e^{-p'x}$ (4).

(4) En 1877, M. Lippich (*Anzeiger* de l'Académie de Vienne) a fait connaître qu'une solution de nitrate de didyme examinée sous l'incidence normale entre deux plaques parallèles, montrait une absorption un peu différente quand on doublait la couche que lorsqu'on doublait le degré de concentration. Mais ce résultat n'est pas en contradiction avec ce qui est dit plus haut, car pour établir les équations générales (33), on n'a pas considéré des corps qui montrent une électrolyse. (Voir § 24.)

SIXIÈME SECTION

Réflexion et réfraction de la lumière à la surface
des mauvais conducteurs anisotropes.§ 33. — *Expression pour la conservation de l'énergie.*

Dans l'étude de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la limite des mauvais conducteurs anisotropes, nous allons envisager tout d'abord le cas particulier où le premier milieu est isotrope et le second milieu un isolant anisotrope. Plaçons l'origine des coordonnées en un point de la surface commune, que nous supposons plane, et menons les axes coordonnés parallèles aux trois directions principales du second milieu. Si L, M, N sont les cosinus de direction de la normale à la surface commune dont nous supposons la partie positive dans le second milieu, l'équation du plan de séparation est

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Supposons que sur ce plan tombe une onde plane et s'y partage en une onde réfléchie et deux ondes planes réfractées. L'onde réfléchie a de commun avec l'incidente la propriété que la normale à l'onde coïncide avec le rayon : dans les ondes réfractées, la normale à l'onde et le rayon différent en général. Désignons respectivement par $l, m, n, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l'_2, m'_2, n'_2$ les cosinus de direction des normales à l'onde incidente réfléchie, et réfractées ; quant aux courants électriques, supposons qu'ils soient partout linéaires et possèdent dans les quatre ondes considérées les cosinus de direction $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$. Quant aux fonctions U, V, W relatives aux quatre ondes, nous les désignerons respectivement par $U, V, W,$

$U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U'_2, V'_2, W'_2$. Nous pourrions écrire alors

$$U = \alpha J \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right),$$

$$V = \beta J \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right),$$

$$W = \gamma J \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right);$$

$$U_1 = a_1 \alpha_1 J \left(\frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{\mathfrak{B}_1} - t + p_1 \right);$$

$$V_1 = a_1 \beta_1 J \left(\frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{\mathfrak{B}_1} - t + p_1 \right),$$

$$W_1 = a_1 \gamma_1 J \left(\frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{\mathfrak{B}_1} - t + p_1 \right);$$

$$U_2 = a_2 \alpha_2 J \left(\frac{l_2 x + m_2 y + n_2 z}{\mathfrak{B}_2} - t + p_2 \right),$$

$$V_2 = a_2 \beta_2 J \left(\frac{l_2 x + m_2 y + n_2 z}{\mathfrak{B}_2} - t + p_2 \right),$$

$$W_2 = a_2 \gamma_2 J \left(\frac{l_2 x + m_2 y + n_2 z}{\mathfrak{B}_2} - t + p_2 \right);$$

$$U'_2 = a'_2 \alpha'_2 J \left(\frac{l'_2 x + m'_2 y + n'_2 z}{\mathfrak{B}'_2} - t + p'_2 \right),$$

$$V'_2 = a'_2 \beta'_2 J \left(\frac{l'_2 x + m'_2 y + n'_2 z}{\mathfrak{B}'_2} - t + p'_2 \right),$$

$$W'_2 = a'_2 \gamma'_2 J \left(\frac{l'_2 x + m'_2 y + n'_2 z}{\mathfrak{B}'_2} - t + p'_2 \right).$$

Les grandeurs p, p_1, p_2, p'_2 désignent des différences de phase, et $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}'_2$ les vitesses de propagation de l'onde incidente ou réfléchie et des deux ondes réfractées. Ces dernières se déterminent au moyen de la relation (44),

$$a^2 \alpha_2^2 + b^2 \beta_2^2 + c^2 \gamma_2^2 = \mathfrak{B}_2^2, \quad a'^2 \alpha'_2{}^2 + b'^2 \beta'_2{}^2 + c'^2 \gamma'_2{}^2 = \mathfrak{B}'_2{}^2.$$

Quant aux cosinus de direction des vibrations $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$, ils s'expriment à l'aide des cosinus de direction des normales aux ondes

correspondantes en vertu des relations (42) et (43),

$$\begin{aligned}
 l_2 \alpha_2 + m_2 \beta_2 + n_2 \gamma_2 &= 0, \\
 \frac{l_2}{\alpha_2} (b^2 - c^2) + \frac{m_2}{\beta_2} (c^2 - a^2) + \frac{n_2}{\gamma_2} (a^2 - b^2) &= 0, \\
 \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 l'_2 \alpha'_2 + m'_2 \beta'_2 + n'_2 \gamma'_2 &= 0, \\
 \frac{l'_2}{\alpha'_2} (b^2 - c^2) + \frac{m'_2}{\beta'_2} (c^2 - a^2) + \frac{n'_2}{\gamma'_2} (a^2 - b^2) &= 0, \\
 \alpha'^2_2 + \beta'^2_2 + \gamma'^2_2 &= 1.
 \end{aligned}$$

Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_2$ sont des constantes qui sont liées à l'intensité du mouvement des ondes réfléchies ou réfractées. Dès que ces quantités sont déterminées, ainsi que les valeurs des phases, des cosinus de direction des normales aux ondes réfractées et la direction de vibration du rayon réfléchi, nous pouvons regarder le problème comme résolu. Nous atteindrons ce but par l'emploi des équations aux limites et du principe de la conservation de l'énergie.

Pour exprimer ce dernier, imaginons qu'on construise (*fig. 18*)

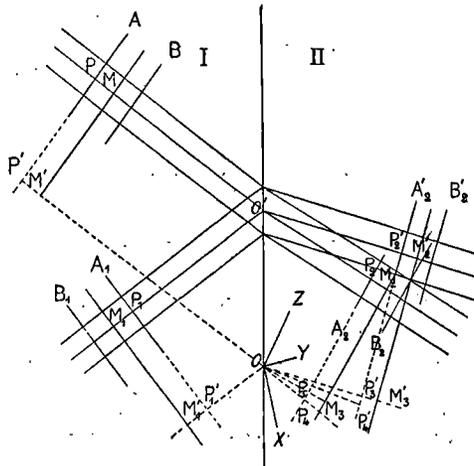


Fig. 18.

dans la direction des ondes incidentes un cylindre de section ω , et qu'on en isole une partie limitée par deux plans normaux A et B. Le

mouvement produit dans cet espace se partage à la surface commune en une onde réfléchie et deux ondes réfractées. La première se propage dans un cylindre construit dans la direction des rayons réfléchis avec une section ω_1 entre les deux plans normaux A_1 et B_1 ; les deux dernières, au contraire, dans des cylindres construits dans la direction des rayons réfractés avec des sections ω_2 , ω'_2 , entre les plans A_2 , B_2 et A'_2 , B'_2 parallèles aux plans des ondes. Quant aux trois derniers cylindres, il faut remarquer qu'ils passent par le contour de la surface découpée par le premier cylindre dans la surface de séparation.

L'énergie du mouvement se compose de l'énergie potentielle électrostatique et de l'énergie potentielle électrodynamique. Nous pouvons faire abstraction de la première, car le potentiel électrique φ est nul dans le premier milieu, et peut être regardé comme ayant une valeur extrêmement petite dans le second milieu. L'énergie potentielle électrodynamique se détermine par l'équation (21). Désignons par u , v , w , u_1 , v_1 , w_1 , u_2 , v_2 , w_2 , u'_2 , v'_2 , w'_2 les composantes de courant électrique pour les quatre ondes, et par dT , dT_1 , dT_2 , dT'_2 les éléments de volume des cylindres considérés; dès lors, comme les deux milieux sont supposés de mauvais conducteurs absolus et qu'ainsi se trouve exclue l'hypothèse d'une absorption ou d'une transformation partielle de l'énergie en chaleur, nous pouvons écrire l'équation de la conservation de l'énergie sous la forme suivante :

$$\iiint (Uu + Vv + Ww) dT = \iiint (U_1u_1 + V_1v_1 + W_1w_1) dT_1 \\ + \iiint (U_2u_2 + V_2v_2 + W_2w_2) dT_2 + \iiint (U'_2u'_2 + V'_2v'_2 + W'_2w'_2) dT'_2.$$

Il faut étendre l'intégration à l'espace compris respectivement entre les plans A et B, A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , A'_2 et B'_2 .

Imaginons maintenant que dans cette équation on exprime les composantes de courant par les fonctions U, V, W, à l'aide des relations (22), qui, en vertu de (42), peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta U &= 4\pi u, & \Delta V &= 4\pi v, & \Delta W &= 4\pi w, \\ \Delta U_1 &= 4\pi u_1, & \Delta V_1 &= 4\pi v_1, & \Delta W_1 &= 4\pi w_1, \\ \Delta U_2 &= 4\pi u_2, & \Delta V_2 &= 4\pi v_2, & \Delta W_2 &= 4\pi w_2, \\ \Delta U'_2 &= 4\pi u'_2, & \Delta V'_2 &= 4\pi v'_2, & \Delta W'_2 &= 4\pi w'_2; \end{aligned}$$

remarquons, d'autre part, que les fonctions U, V, W se rapportent au temps t , tandis que les fonctions $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U'_2, V'_2, W'_2$ se rapportent à une époque postérieure t' ; nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \iiint \mathfrak{J} \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right) \mathfrak{J}' \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right) dT \\ = & \frac{a_1^2}{\mathfrak{B}^2} \iiint \mathfrak{J} \left(\frac{l_1x + m_1y + n_1z}{\mathfrak{B}} - t' + p_1 \right) \mathfrak{J}' \left(\frac{l_1x + m_1y + n_1z}{\mathfrak{B}} - t' + p_1 \right) dT_1 \\ + & \frac{a_2^2}{\mathfrak{B}_2^2} \iiint \mathfrak{J} \left(\frac{l_2x + m_2y + n_2z}{\mathfrak{B}_2} - t' + p_2 \right) \mathfrak{J}' \left(\frac{l_2x + m_2y + n_2z}{\mathfrak{B}_2} - t' + p_2 \right) dT_2 \\ + & \frac{a_2'^2}{\mathfrak{B}_2'^2} \iiint \mathfrak{J} \left(\frac{l_2'x + m_2'y + n_2'z}{\mathfrak{B}_2'} - t' + p_2' \right) \mathfrak{J}' \left(\frac{l_2'x + m_2'y + n_2'z}{\mathfrak{B}_2'} - t' + p_2' \right) dT_2'. \end{aligned}$$

Pour déterminer mieux les éléments de volume dT, dT_1, dT_2, dT_2' , partageons les volumes en question en couches infiniment minces et parallèles aux plans limites A et B, A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_2' et B_2' . Désignons ensuite la distance normale d'un point situé dans un pareil volume aux plans A, A_1, A_2, A_2' par $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_2'$: on a

$$dT = \omega d\delta, \quad dT_1 = \omega_1 d\delta_1;$$

si d, d' désignent les angles formés par les rayons réfractés avec les normales aux ondes correspondantes,

$$dT_2 = \frac{\omega_2}{\cos d} d\delta_2 \quad \text{et} \quad dT_2' = \frac{\omega_2'}{\cos d'} d\delta_2'.$$

Substituons ces expressions dans l'équation ci-dessus; il s'agira encore avant tout de trouver les relations entre les sections ω et la grandeur des angles d, d' .

A cet effet, nous considérons la direction des rayons réfractés; soient $l_3, m_3, n_3, l_3', m_3', n_3'$ les cosinus de direction : comme nous l'avons vu au § 22, direction de vibration, normale à l'onde et rayon, se trouvent dans un seul et même plan, et la direction de la force électromotrice est perpendiculaire au rayon; de là les équations

$$(64) \quad \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(64a) \quad a^2 a_2 l_3 + b^2 b_2 m_3 + c^2 c_2 n_3 = 0$$

et

$$(64_b) \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1.$$

Nous obtenons les mêmes équations pour la détermination de l'_3, m'_3, n'_3 , si nous remplaçons toutes les lettres par les mêmes affectées chacune d'un accent. La direction de la vibration est, nous l'avons vu, déterminée dès que la normale à l'onde est connue; donc, la direction de la normale à l'onde détermine aussi celle du rayon.

Quant aux sections ω , nous obtenons pour elles, en désignant par Ω la section découpée par le faisceau incident dans la surface de séparation,

$$\omega = \Omega (Ll + Mm + Nn), \quad \omega_1 = -\Omega (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1) \quad (1), \\ \omega_2 = \Omega (Ll_2 + Mm_2 + Nn_2); \quad \omega'_2 = \Omega (Ll'_2 + Mm'_2 + Nn'_2).$$

Reste encore à déterminer les limites de δ . Nous supposons que les distances des plans A et B, A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , A'_2 et B'_2 soient égales aux chemins décrits par le mouvement lumineux pendant un temps déterminé (par exemple l'unité de temps, la durée d'une vibration, etc.); nous les désignerons par Λ pour l'onde plane incidente et la réfléchie, par Λ_1, Λ'_2 pour les ondes planes réfractées.

La substitution de toutes les expressions obtenues ici donne à l'équation générale obtenue plus haut la forme suivante :

$$\frac{Ll + Mm + Nn}{\mathfrak{B}^2} \int_0^{\Lambda} \int \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right) J^v \left(\frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} - t + p \right) d\delta \\ = - \frac{a_1^2 (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1)}{\mathfrak{B}^2} \int_0^{\Lambda} \int \left(\frac{l_1x + m_1y + n_1z}{\mathfrak{B}} - t' + p_1 \right) \\ \times J^v \left(\frac{l_1x + m_1y + n_1z}{\mathfrak{B}} - t' + p_1 \right) d\delta_1 \\ + \frac{a_2^2 (Ll_2 + Mm_2 + Nn_2)}{\mathfrak{B}_2^2 \cos d} \int_0^{\Lambda_2} \int \left(\frac{l_2x + m_2y + n_2z}{\mathfrak{B}_2} - t' + p_2 \right) \\ \times J^v \left(\frac{l_2x + m_2y + n_2z}{\mathfrak{B}_2} - t' + p_2 \right) d\delta_2$$

(1) Il faut mettre le signe —, car on doit prendre le cosinus de l'angle aigu formé par les deux surfaces.

$$+ \frac{a_2'^2 (Ll_2' + Mm_2' + Nn_2')}{\mathfrak{B}_2'^2 \cos d'} \int_0^{\Lambda_2'} J \left(\frac{l_2'x + m_2'y + n_2'z}{\mathfrak{B}_2'} - t' + p_2' \right) \\ \times J' \left(\frac{l_2'x + m_2'y + n_2'z}{\mathfrak{B}_2'} - t' + p_2' \right) d\delta_2'.$$

Concevons un point M placé dans le volume T compris entre les plans A et B; au temps t' correspondront à ce point dans le faisceau réfléchi et dans les faisceaux réfractés les points M_1, M_2, M_2' . Par ces points M, menons des plans parallèles aux ondes planes correspondantes, et sur ces plans traçons, de l'origine O des coordonnées, les perpendiculaires OM', OM_1', OM_2, OM_2' , perçant les plans A, A_1, A_2, A_2' en P', P_1, P_2, P_2' ; on aura pour le point M la relation

$$lx + my + nz = OM' = OP' + P'M' = -P'O + \delta;$$

pour le point M_1 ,

$$l_1x + m_1y + n_1z = OM_1' = OP_1' + P_1'M_1' = OP_1' + \delta_1;$$

pour le point M_2 ,

$$l_2x + m_2y + n_2z = OM_2 = OP_2 + P_2M_2 = OP_2 + \delta_2,$$

et pour le point M_2' ,

$$l_2'x + m_2'y + n_2'z = OM_2' = OP_2' + P_2'M_2' = OP_2' + \delta_2'.$$

Posons encore

$$-\frac{P'O}{\mathfrak{B}} + p = P,$$

et admettons que toutes les différences de phase soient égales, et qu'ainsi

$$p_1 = p_2 = p_2' = P + \frac{P'O}{\mathfrak{B}};$$

alors l'équation ci-dessus devient

$$\frac{Ll + Mm + Nn}{\mathfrak{B}^2} \int_0^{\Lambda} J \left(\frac{\delta}{\mathfrak{B}} - t + P \right) J' \left(\frac{\delta}{\mathfrak{B}} - t + P \right) d\delta \\ = - \frac{a_1'^2 (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1)}{\mathfrak{B}^2} \int_0^{\Lambda} J \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{B}} - t' + \frac{OP_1' + P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) \\ \times J' \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{B}} - t' + \frac{OP_1' + P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) d\delta_1,$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2^2 (Ll_3 + Mm_3 + Nn_3)}{\mathfrak{B}_2^2 \cos d} \int_0^{\Lambda_2} J \left(\frac{\delta_2}{\mathfrak{B}_2} - t' + \frac{OP_3}{\mathfrak{B}_2} + \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) \\
& \quad \times J' \left(\frac{\delta_2}{\mathfrak{B}_2} - t' + \frac{OP_3}{\mathfrak{B}_2} + \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) d\delta_2 \\
& + \frac{a_2'^2 (Ll_3' + Mm_3' + Nn_3')}{\mathfrak{B}_2'^2 \cos d'} \int_0^{\Lambda_2'} J \left(\frac{\delta_2'}{\mathfrak{B}_2'} - t' + \frac{OP_3'}{\mathfrak{B}_2'} + \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) \\
& \quad \times J' \left(\frac{\delta_2'}{\mathfrak{B}_2'} - t' + \frac{OP_3'}{\mathfrak{B}_2'} + \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + P \right) d\delta_2'.
\end{aligned}$$

Nous pouvons faire

$$t' = t + t'' \quad \text{et} \quad t'' = \frac{PO'}{\mathfrak{B}} + \frac{O'P_1}{\mathfrak{B}} = \frac{PO'}{\mathfrak{B}} + \frac{O'P_2}{\mathfrak{B}_3} = \frac{PO'}{\mathfrak{B}} + \frac{O'P_2'}{\mathfrak{B}_3'}$$

en désignant par \mathfrak{B}_3 et \mathfrak{B}_3' les vitesses des rayons. Le chemin $PO' + O'P_1$ est optiquement égal au chemin $P'O + O'P_1'$, c'est-à-dire que les deux chemins sont parcourus dans le même temps. Tirons de plus du point O, OP_4 parallèle à $O'M_2$, OP_4' parallèle à $O'M_2'$: alors le chemin $PO' + O'P_2$ avec $PO + OP_4$ et le chemin $PO' + O'P_2'$ avec $P'O + OP_4'$ sont optiquement égaux, c'est-à-dire qu'on a

$$t'' = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_4'}{\mathfrak{B}_3} = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_4}{\mathfrak{B}_3} = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_4'}{\mathfrak{B}_3'}$$

ou

$$t'' = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_4'}{\mathfrak{B}_3} = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_3}{\mathfrak{B}_2} = \frac{P'O}{\mathfrak{B}} + \frac{OP_3'}{\mathfrak{B}_2'}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente; nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
& \frac{Ll + Mm + Nn}{\mathfrak{B}^2} \int_0^{\Lambda} J \left(\frac{\delta}{\mathfrak{B}} - t + P \right) J' \left(\frac{\delta}{\mathfrak{B}} - t + P \right) d\delta \\
& = - \frac{a_1^2 (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1)}{\mathfrak{B}_1^2} \int_0^{\Lambda_1} J \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{B}_1} - t + P \right) J' \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{B}_1} - t + P \right) d\delta_1 \\
& + \frac{a_2^2 (Ll_3 + Mm_3 + Nn_3)}{\mathfrak{B}_2^2 \cos d} \int_0^{\Lambda_2} J \left(\frac{\delta_2}{\mathfrak{B}_2} - t + P \right) J' \left(\frac{\delta_2}{\mathfrak{B}_2} - t + P \right) d\delta_2 \\
& + \frac{a_2'^2 (Ll_3' + Mm_3' + Nn_3')}{\mathfrak{B}_2'^2 \cos d'} \int_0^{\Lambda_2'} J \left(\frac{\delta_2'}{\mathfrak{B}_2'} - t + P \right) J' \left(\frac{\delta_2'}{\mathfrak{B}_2'} - t + P \right) d\delta_2'.
\end{aligned}$$

Posons actuellement

$$\frac{\delta}{\mathfrak{B}} = \xi, \quad \frac{\delta_1}{\mathfrak{B}} = \xi_1, \quad \frac{\delta_2}{\mathfrak{B}_2} = \xi_2, \quad \frac{\delta'_2}{\mathfrak{B}'_2} = \xi'_2,$$

d'où

$$d\delta = \mathfrak{B}d\xi, \quad d\delta_1 = \mathfrak{B}d\xi_1, \quad d\delta_2 = \mathfrak{B}_2d\xi_2, \quad d\delta'_2 = \mathfrak{B}'_2d\xi'_2,$$

tandis que les limites ont pour valeurs

$$0 \text{ et } \frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}, \quad 0 \text{ et } \frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}, \quad 0 \text{ et } \frac{\Lambda_2}{\mathfrak{B}_2} = \frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}, \quad 0 \text{ et } \frac{\Lambda'_2}{\mathfrak{B}'_2} = \frac{\Lambda}{\mathfrak{B}};$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{Ll + Mm + Nn}{\mathfrak{B}} \int_0^{\frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}} J(\xi - t + P) J'(\xi - t + P) d\xi \\ = & - \frac{\alpha_1^2 (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1)}{\mathfrak{B}} \int_0^{\frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}} J(\xi_1 - t + P) J'(\xi_1 - t + P) d\xi_1 \\ & + \frac{\alpha_2^2 (Ll_2 + Mm_2 + Nn_2)}{\mathfrak{B}_2 \cos d} \int_0^{\frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}} J(\xi_2 - t + P) J'(\xi_2 - t + P) d\xi_2 \\ & + \frac{\alpha_2'^2 (Ll'_2 + Mm'_2 + Nn'_2)}{\mathfrak{B}'_2 \cos d'} \int_0^{\frac{\Lambda}{\mathfrak{B}}} J(\xi'_2 - t + P) J'(\xi'_2 - t + P) d\xi'_2, \end{aligned}$$

ou bien

$$(65) \left\{ \begin{aligned} \frac{Ll + Mm + Nn}{\mathfrak{B}} &= - \frac{\alpha_1^2 (Ll_1 + Mm_1 + Nn_1)}{\mathfrak{B}} \\ &+ \frac{\alpha_2^2 (Ll_2 + Mm_2 + Nn_2)}{\mathfrak{B}_2 \cos d} + \frac{\alpha_2'^2 (Ll'_2 + Mm'_2 + Nn'_2)}{\mathfrak{B}'_2 \cos d'} \end{aligned} \right.$$

§ 34. — Conditions de continuité.

A l'équation (65) qui exprime la conservation de l'énergie, nous devons encore ajouter les conditions de continuité auxquelles satisfait la surface de séparation.

Pour tous les points du plan limite dont l'équation est

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on a les relations

$$U + U_1 = U_2 + U_2', \quad V + V_1 = V_2 + V_2', \quad W + W_1 = W_2 + W_2';$$

en outre, il existe encore une deuxième série de conditions aux limites, contenant les dérivées premières des fonctions ci-dessus par rapport à x, y, z , de sorte que le nombre total de toutes les conditions de continuité est de douze.

Au moyen des trois premières, nous formons deux équations nouvelles, en les multipliant d'abord respectivement par les cosinus de direction des intersections du plan d'incidence et du plan de séparation, puis par les cosinus de direction de la normale au plan d'incidence et en ajoutant ensuite. Des neuf autres conditions, qui renferment les dérivées premières, nous formons une condition unique en formant les dérivées des U, V, W par rapport à la normale au plan de séparation, les multipliant respectivement par les cosinus de direction de la normale au plan d'incidence et ajoutant

$$\begin{aligned} & [M(Lm - Ll) - N(Nl - Ln)](U + U_1 - U_2 - U_2') \\ & + [N(Mn - Nm) - L(Lm - Ll)](V + V_1 - V_2 - V_2') \\ & + [L(Nl - Ln) - M(Mn - Nm)](W + W_1 - W_2 - W_2') = 0, \\ & (Nm - Mn)(U + U_1 - U_2 - U_2') + (Ln - Nl)(V + V_1 - V_2 - V_2') \\ & \quad + (Ml - Lm)(W + W_1 - W_2 - W_2') = 0, \\ & (Nm - Mn) \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) (U + U_1 - U_2 - U_2') \\ & + (Ln - Nl) \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) (V + V_1 - V_2 - V_2') \\ & + (Ml - Lm) \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) (W + W_1 - W_2 - W_2') = 0. \end{aligned}$$

Introduisons ici les expressions trouvées pour les U, V, W , et remarquons que $p = p_1 = p_2 = p_2'$, que de plus $t' = t$ pour ce cas; nous verrons dès lors que les conditions de continuité ne pourront exister pour toute valeur de t que si pour tous les points du plan

$$Lx + My + Nz = 0$$

on a

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{lx + my + nz}{\mathfrak{B}} &= \frac{l_1x + m_1y + n_1z}{\mathfrak{B}} = \frac{l_2x + m_2y + n_2z}{\mathfrak{B}_2} \\ &= \frac{l'_2x + m'_2y + n'_2z}{\mathfrak{B}'_2}, \end{aligned} \right.$$

et que, de plus, on a les relations suivantes :

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} (L \cos i - l) (\alpha + a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - a'_2\alpha'_2) \\ + (M \cos i - m) (\beta + a_1\beta_1 - a_2\beta_2 - a'_2\beta'_2) \\ + (N \cos i - n) (\gamma + a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - a'_2\gamma'_2) &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(67_a) \quad \left\{ \begin{aligned} (Nm - Mn) (\alpha + a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - a'_2\alpha'_2) \\ + (Ln - Nl) (\beta + a_1\beta_1 - a_2\beta_2 - a'_2\beta'_2) \\ + (Ml - Lm) (\gamma + a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - a'_2\gamma'_2) &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(67_b) \quad \left\{ \begin{aligned} (Nm - Mn) \left(\frac{\alpha \cos i + a_1\alpha_1 \cos i_1}{\mathfrak{B}} - \frac{a_2\alpha_2 \cos r}{\mathfrak{B}_2} - \frac{a'_2\alpha'_2 \cos r'}{\mathfrak{B}'_2} \right) \\ + (Ln - Nl) \left(\frac{\beta \cos i + a_1\beta_1 \cos i_1}{\mathfrak{B}} - \frac{a_2\beta_2 \cos r}{\mathfrak{B}_2} - \frac{a'_2\beta'_2 \cos r'}{\mathfrak{B}'_2} \right) \\ + (Ml - Lm) \left(\frac{\gamma \cos i + a_1\gamma_1 \cos i_1}{\mathfrak{B}} - \frac{a_2\gamma_2 \cos r}{\mathfrak{B}_2} - \frac{a'_2\gamma'_2 \cos r'}{\mathfrak{B}'_2} \right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dans cette équation, on a

$$\begin{aligned} Ll + Mm + Nn &= \cos i, & Ll_1 + Mm_1 + Nn_1 &= \cos i_1, \\ Ll_2 + Mm_2 + Nn_2 &= \cos r, & Ll'_2 + Mm'_2 + Nn'_2 &= \cos r'. \end{aligned}$$

Les équations (66) doivent être vraies pour tous les points de la surface commune, c'est-à-dire pour tous les points pour lesquels $x = -\frac{My + Nz}{L}$; d'après cela, elles prendront la forme

$$\begin{aligned} [L(m - m_1) - M(l - l_1)] y + [L(n - n_1) - N(l - l_1)] z &= 0, \\ [L(m\mathfrak{B}_2 - m_2\mathfrak{B}) - M(l\mathfrak{B}_2 - l_2\mathfrak{B})] y \\ + [L(n\mathfrak{B}_2 - n_2\mathfrak{B}) - N(l\mathfrak{B}_2 - l_2\mathfrak{B})] z &= 0, \\ [L(m\mathfrak{B}'_2 - m'_2\mathfrak{B}) - M(l\mathfrak{B}'_2 - l'_2\mathfrak{B})] y \\ + [L(n\mathfrak{B}'_2 - n'_2\mathfrak{B}) - N(l\mathfrak{B}'_2 - l'_2\mathfrak{B})] z &= 0. \end{aligned}$$

Comme y et z sont des quantités entièrement arbitraires, nous

tirons de là

$$(68) \quad \begin{cases} L(m - m_1) = M(l - l_1), \\ L(n - n_1) = N(l - l_1), \end{cases}$$

$$(68_a) \quad \begin{cases} L(m\mathfrak{B}_2 - m_2\mathfrak{B}) = M(l\mathfrak{B}_2 - l_2\mathfrak{B}), \\ L(n\mathfrak{B}_2 - n_2\mathfrak{B}) = N(l\mathfrak{B}_2 - l_2\mathfrak{B}), \end{cases}$$

$$(68_b) \quad \begin{cases} L(m\mathfrak{B}'_2 - m'_2\mathfrak{B}) = M(l\mathfrak{B}'_2 - l'_2\mathfrak{B}), \\ L(n\mathfrak{B}'_2 - n'_2\mathfrak{B}) = N(l\mathfrak{B}'_2 - l'_2\mathfrak{B}). \end{cases}$$

Ces équations peuvent être ramenées à la forme

$$\begin{aligned} Lm - Ml &= Lm_1 - Ml_1, \\ Ln - Nl &= Ln_1 - Nl_1, \\ (Lm - Ml)\mathfrak{B}_2 &= (Lm_2 - Ml_2)\mathfrak{B}, \\ (Ln - Nl)\mathfrak{B}_2 &= (Ln_2 - Nl_2)\mathfrak{B}, \\ (Lm - Ml)\mathfrak{B}'_2 &= (Lm'_2 - Ml'_2)\mathfrak{B}, \\ (Ln - Nl)\mathfrak{B}'_2 &= (Ln'_2 - Nl'_2)\mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Considérons d'abord les deux premières relations : on en tire immédiatement

$$Mn - Nm = Mn_1 - Nm_1.$$

Si $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ sont les cosinus de direction de la normale au plan passant par la normale à la surface de séparation et par le rayon incident, c'est-à-dire au plan d'incidence, et $\cos \lambda_1$, $\cos \mu_1$, $\cos \nu_1$ les cosinus de direction du plan déterminé par la normale à la surface de séparation et par le rayon réfléchi, nous pouvons écrire les trois équations en question sous la forme

$$\begin{aligned} \sin i \cos \lambda &= \sin i_1 \cos \lambda_1, & \sin i \cos \mu &= \sin i_1 \cos \mu_1, \\ \sin i \cos \nu &= \sin i_1 \cos \nu_1. \end{aligned}$$

Comme on voit, elles conduisent à la loi de la réflexion

$$\sin i_1 = \sin i \quad \text{ou} \quad i_1 = 180^\circ - i,$$

et à la conséquence que *le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence*.

En traitant d'une façon analogue les autres équations, nous arrivons à la loi de la réfraction

$$\frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r}{\mathfrak{B}_2} = \frac{\sin r'}{\mathfrak{B}'_2},$$

et au théorème que *les normales des deux ondes planes réfractées se trouvent aussi dans le plan d'incidence.*

En y joignant encore les équations

$$\begin{aligned} (69) \quad & l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \\ (69_a) \quad & l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \\ (69_b) \quad & l_2'^2 + m_2'^2 + n_2'^2 = 1, \end{aligned}$$

nous aurons neuf équations permettant de déterminer les cosinus de direction du rayon réfléchi et des normales aux deux ondes planes réfractées. Les vitesses de propagation $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2'$ sont, nous l'avons vu, déterminées par les directions de vibration correspondantes, et celles-ci le sont par la direction des normales d'onde correspondantes. A chaque normale à une onde appartient deux directions de vibration, c'est-à-dire que la direction de vibration peut se déterminer par la direction de la normale à l'onde à l'aide de deux fonctions différentes. Or, pour que les équations conduisant à la détermination de l_2, m_2, n_2 et l_2', m_2', n_2' ne soient pas identiques, il faut, dans l'évaluation de \mathfrak{B}_2 et \mathfrak{B}_2' , déterminer les cosinus de direction $\alpha_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{C}_2$ par l'une des fonctions, et $\alpha_2', \mathfrak{Y}_2', \mathfrak{C}_2'$ par la seconde fonction.

Dès qu'on connaît les directions des normales aux ondes, il en est de même, comme nous avons vu, de celles des rayons; il ne reste plus à déterminer que la direction de vibration du rayon réfléchi et les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_2' . Nous les obtenons par les équations (65), (67), (67_a), (67_b), en y joignant les équations

$$l_1 \alpha_1 + m_1 \mathfrak{Y}_1 + n_1 \mathfrak{C}_1 = 0, \quad \alpha_1^2 + \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2 = 1.$$

Il résulte de ce qui précède que les directions des normales des ondes planes réfractées, et avec elles les directions des vibrations et des rayons correspondants, sont indépendantes de la direction de la vibration du rayon incident, mais que, au contraire, il y a une liaison entre les coefficients a_1, a_2, a_2' , la direction de vibration du rayon réfléchi et la direction de vibration du rayon incident. Un rayon incident de lumière naturelle que nous pouvons nous représenter tel que les vibrations linéaires consécutives aient lieu normalement au rayon dans toutes les directions possibles, et que le passage de l'une de ces directions à une autre ait lieu toujours dans le même sens et

d'une manière continue, offre donc, lors de la réfraction, deux rayons de lumière polarisés rectilignement, de directions de vibration entièrement déterminées.

§ 35. — *Réflexion et réfraction à la limite d'une plaque cristalline à un axe et taillée perpendiculairement à cet axe.*

Considérons maintenant un cristal à un axe : la surface de séparation est normale à l'axe optique. Si ce dernier est l'axe des x , on a $c = b$, $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, et, pour l'équation du plan de séparation, $x = 0$. Comme tout est symétrique autour de l'axe des x , nous allons choisir le plan des xy pour plan d'incidence : alors $n = 0$, et, en outre, à cause des équations (68), (68_a), (68_b), $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n'_2 = 0$. La direction des normales aux ondes réfractées est entièrement connue dès que nous avons déterminé \mathfrak{B}_2 et \mathfrak{B}'_2 dans la loi de réfraction

$$\frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r}{\mathfrak{B}_2} = \frac{\sin r'}{\mathfrak{B}'_2}.$$

Pour cela nous avons besoin de connaître la direction de vibration des ondes réfractées. Mettons l'équation (43) sous la forme

$$l_2 \mathfrak{b}_2 c_2 (b^2 - c^2) + m_2 \alpha_2 c_2 (c^2 - a^2) + n_2 \alpha_2 \mathfrak{b}_2 (a^2 - b^2) = 0,$$

d'où, puisque $b = c$ et $n_2 = 0$,

$$m_2 \alpha_2 c_2 (b^2 - a^2) = 0.$$

Si nous supposons $m_2 = 0$, cela conduit, en vertu de (68_a), à $m = 0$ ou $\sin i = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut donc que poser $\alpha_2 = 0$ ou $c_2 = 0$; la première solution est relative à l'une des ondes; la seconde à l'autre; nous devons donc écrire $\alpha_2 = 0$, $c'_2 = 0$.

Dans la première onde plane, les vibrations sont normales à l'axe optique; ce dernier et la normale à l'onde se trouvent dans le plan de l'onde : donc les vibrations dans la première onde plane sont perpendiculaires au plan d'incidence. On a donc aussi $\mathfrak{b}_2 = 0$. Les vibrations dans la deuxième onde plane sont parallèles au plan d'incidence. Les équations

$$l'_2 \alpha'_2 + m'_2 \mathfrak{b}'_2 = 0, \quad n'_2 = 0, \quad c'_2 = 0$$

donnent

$$\alpha'_2 = -m'_2 = -\sin r'; \quad \delta'_2 = l'_2 = \cos r'.$$

Quant aux vitesses $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}'_2$, l'équation (44) donne

$$\mathfrak{B}_2 = b, \quad \mathfrak{B}'_2 = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'}.$$

La première vitesse est indépendante de l'angle d'incidence, mais non la seconde. Par là les lois de la réfraction prennent la forme

$$\frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r}{b}, \quad \frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r'}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'}}.$$

Quant aux rayons, nous obtenons par (64_a) $n_3 = 0$, et, en substituant dans (64), $l_3 = l_2, m_3 = m_2$. Le premier rayon coïncide avec la normale à l'onde. Quant au deuxième rayon, nous trouvons par (64)

$$n'_3 (l'_2 \delta'_2 - m'_2 \alpha'_2) = 0, \quad n'_3 (l'^2_2 + m'^2_2) = 0, \quad \text{ou} \quad n'_3 = 0.$$

Le second rayon se trouve donc dans le plan d'incidence, mais ne coïncide pas avec la normale de l'onde correspondante. Car (64_a) donne

$$a^2 l'_3 \sin r' - b^2 m'_3 \cos r' = 0,$$

ou

$$a^4 l'^2_3 \sin^2 r' - b^4 \cos^2 r' + b^4 l'^2_3 \cos^2 r' = 0,$$

ou

$$l'_3 = \frac{b^2 \cos r'}{\sqrt{b^4 + (a^4 - b^4) \sin^2 r'}},$$

ou, si l'on désigne par r'_1 l'angle du rayon avec l'axe,

$$\operatorname{tg} r'_1 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} r'.$$

Pour l'angle d' formé par le rayon et la normale à l'onde, nous obtenons

$$\cos d' = \frac{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'}{\sqrt{b^4 + (a^4 - b^4) \sin^2 r'}}.$$

Nous arrivons maintenant à la détermination des rapports d'intensité des rayons incident, réfléchi et réfracté.

Dans notre cas spécial, l'équation de la conservation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$(1 - a_1^2) \cos i = a_2^2 \frac{\cos r \sin i}{\sin r} + a_1'^2 \frac{b^2 \cos r' \sin i}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'] \sin r'}$$

tandis que les conditions de continuité (67), (67_a), (67_b) prennent la forme

$$\mathfrak{b} + a_1 \mathfrak{b}_1 = a_2' \cos r', \quad \mathfrak{c} + a_1 \mathfrak{c}_1 = a_2,$$

$$(\mathfrak{c} - a_1 \mathfrak{c}_1) \cos i = a_2 \frac{\cos r \sin i}{\sin r}.$$

Il faut encore y joindre les relations

$$\alpha_1 \cos i = \mathfrak{b}_1 \sin i, \quad \alpha_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2 = 1.$$

Éliminant a_2 et a_2' de la première équation, nous obtenons

$$(70) (1 - a_1^2) \cos i = (\mathfrak{c}^2 - \alpha_1^2 \mathfrak{c}_1^2) \cos i + \frac{(\mathfrak{b} + a_1 \mathfrak{b}_1)^2 b^2 \sin i}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'] \sin r' \cos r'}.$$

Nous distinguerons deux cas principaux : celui où la lumière de l'onde incidente vibre normalement au plan d'incidence, et celui où elle vibre parallèlement à ce plan.

1^{er} CAS. $\alpha = 0$, $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{c} = 1$. — L'équation (70) donne

$$\cos i (\mathfrak{c}_1^2 - 1) = \frac{\mathfrak{b}_1^2 b^2 \sin i}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'] \sin r' \cos r'}.$$

L'angle d'incidence i est compris entre 0° et 90° . Si nous excluons le cas de la réflexion totale, nous obtenons à droite une quantité essentiellement positive, et ainsi $\mathfrak{c}_1^2 = 1$, $\mathfrak{b}_1 = 0$. De là, en vertu des équations de continuité,

$$a_2' = 0, \quad \frac{1 + a_1}{1 - a_1} = \frac{\cos i \sin r}{\sin i \cos r},$$

ou bien

$$(71) \quad a_1 = - \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)},$$

et

$$(71_a) \quad a_2 = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r)}.$$

D'après cela, nous n'obtenons qu'une onde réfractée, et les intensités de l'onde incidente, réfléchie et réfractée sont comme

$$1 : \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} : \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}$$

2^e CAS. $\alpha = -\sin i$, $\beta = \cos i$, $\zeta = 0$. — De la deuxième et troisième équation de continuité il suit que $a_2 \sin(i+r) = 0$, ou $a_2 = 0$, et partant $c_1 = 1$, $\alpha_1 = -\sin i$, $\beta_1 = -\cos i$.

D'après cela, l'équation (70) donne

$$\frac{1 + a_1}{1 - a_1} = \frac{b^2 \sin i \cos i}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'] \sin r' \cos r'}$$

ou

$$(72) \quad a_1 = \frac{M \sin 2i - \sin 2r'}{M \sin 2i + \sin 2r'}$$

$$(72a) \quad a_2 = \frac{4 \sin r' \cos i}{M \sin 2i + \sin 2r'}$$

si l'on pose

$$M = \frac{b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'}$$

Ici encore nous n'obtenons qu'une onde, et les intensités des ondes incidente, réfléchie et réfractée sont comme

$$1 : \left[\frac{M \sin 2i - \sin 2r'}{M \sin 2i + \sin 2r'} \right]^2 : \frac{4M \sin 2i \sin 2r'}{[M \sin 2i + \sin 2r']^2}$$

Si $a = b$, on a les formules de Fresnel du § 25.

L'intensité du rayon réfléchi s'évanouit si $M \sin 2i = \sin 2r'$, ou bien

$$b^2 \sin 2i = b^2 \sin 2r' + (a^2 - b^2) \sin^2 r' \sin 2r'$$

En combinant cette équation avec la loi de réfraction

$$\frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r'}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r'}}$$

nous obtenons, pour déterminer l'angle de polarisation, l'équation

$$\cos i [\mathfrak{B}^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 i] = b \mathfrak{B}^2 \sqrt{\mathfrak{B}^2 - a^2 \sin^2 i}$$

Pour $a = b$, on a $\text{tg } i = \frac{\mathfrak{B}}{b}$.

Si le plan de vibration du rayon incident est incliné sur le plan d'incidence d'un angle différent de 0° et de 90° , alors il faut décomposer les vibrations en deux composantes, l'une parallèle, l'autre normale au plan d'incidence, et examiner isolément celles-ci quant à leur affaiblissement par la réflexion et par la réfraction. Il se produit deux rayons réfractés fournis respectivement par chaque composante. Dans le rayon réfléchi, nous avons à nous figurer les deux composantes de nouveau recombinaées.

Si nous avons affaire à une plaque à faces parallèles, taillée normalement à l'axe et en contact de part et d'autre avec le même milieu isotrope, les angles qui, à la première face, sont des angles d'incidence et de réfraction, échangeront leurs rôles à la seconde face. Les deux rayons réfractés se diviseront à la deuxième face en un rayon réfléchi et en un rayon réfracté. Nous allons de nouveau examiner les deux cas principaux cités plus haut.

Dans le premier cas, le coefficient a_2 devient $a_2 b_1$ par réflexion à la deuxième face, et $a_2 b_2$ par réfraction à cette face. L'expression de la loi de conservation de l'énergie prend ainsi la forme

$$(1 - b_1^2) \sin i \cos r = b_2^2 \cos i \sin r.$$

Cette relation combinée avec l'équation de continuité $1 + b_1 = b_2$ donne

$$b_1 = - \frac{\sin(r - i)}{\sin(i + r)} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(i + r)}.$$

On voit que par la substitution réciproque de i et r , ces formules découlent des relations (71) et (71_a).

L'intensité du rayon incident est à celle du rayon réfléchi à la seconde face comme

$$1 : a_2^2 b_1^2 \frac{\sin i \cos r}{\cos i \sin r} \quad \text{ou} \quad 1 : \frac{\sin 2i \sin 2r \sin^2(i - r)}{\sin^4(i + r)},$$

et à celle du rayon émergeant à la seconde face comme

$$1 : a_2^2 b_2^2 \quad \text{ou} \quad 1 : \frac{\sin^2 2i \sin^2 2r}{\sin^4(i + r)}.$$

Dans le second cas principal, le coefficient a_2' devient $a_2' b_1'$ par

réflexion à la seconde face, et $a'_2 b'_2$ par la réfraction à cette même face.

L'expression de la loi de conservation de l'énergie

$$(1 - b_1'^2) \frac{b^2 \cos r' \sin i}{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 r']} \cos i \sin r' = b_2'^2$$

ou

$$(1 - b_1'^2) M \cos r' \sin i = b_2'^2 \cos i \sin r',$$

combinée avec l'équation de continuité $(1 - b_1') \cos r' = b_2' \cos i$ donne

$$b_1' = - \frac{M \sin 2i - \sin 2r'}{M \sin 2i + \sin 2r'}, \quad b_2' = \frac{4M \cos r' \sin i}{M \sin 2i + \sin 2r'}.$$

Ces formules ne peuvent pas être tirées de (72) et (72_a) par l'intervention de i et de r' . L'intensité du rayon incident est à celle du rayon réfléchi à la seconde face comme

$$1 : a_2'^2 b_1'^2 M \frac{\cos r' \sin i}{\cos i \sin r'}$$

ou

$$1 : \frac{4M \sin 2i \sin 2r' (M \sin 2i - \sin 2r')^2}{(M \sin 2i + \sin 2r')^4},$$

et à celle du rayon émergent comme

$$1 : a_2'^2 b_2'^2 \quad \text{ou} \quad 1 : \frac{16 M^2 \sin^2 2i \sin^2 2r'}{[M \sin 2i + \sin 2r']^4}.$$

§ 36. — *Réflexion et réfraction à la surface d'une plaque cristalline à un axe et taillée parallèlement à cet axe.*

Prenons la normale pour axe des x et menons l'axe des y parallèlement à l'axe du cristal. Alors $a = c$ et $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$. Les relations (68), (68_a) et (68_b) donnent alors

$$\frac{m}{\mathfrak{B}} = \frac{m_1}{\mathfrak{B}} = \frac{m_2}{\mathfrak{B}_2} = \frac{m_2'}{\mathfrak{B}_2'} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\mathfrak{B}} = \frac{n_1}{\mathfrak{B}} = \frac{n_2}{\mathfrak{B}_2} = \frac{n_2'}{\mathfrak{B}_2'}.$$

La détermination de la direction des normales aux ondes planes réfractées exige la connaissance des vitesses de propagation \mathfrak{B} et \mathfrak{B}'_2 .

Mais elles sont connues dès que nous avons obtenu la direction de vibration des ondes réfractées.

Posons $a = c$ dans la relation (43) ramenée à la forme

$$l_2 \gamma_2 c_2 (b^2 - c^2) + m_2 c_2 \alpha_2 (c^2 - a^2) + n_2 \alpha_2 \gamma_2 (a^2 - b^2) = 0;$$

nous obtiendrons

$$\gamma_2 (l_2 c_2 - n_2 \alpha_2) = 0,$$

et, par conséquent, pour l'une des ondes, $\gamma_2 = 0$, et pour l'autre, $l_2 c_2 = n_2 \alpha_2$.

Les vibrations de la première onde se font normalement à l'axe du cristal. Combinons ce résultat avec la relation (44); nous aurons $\mathfrak{B}_2 = a$, c'est-à-dire que la vitesse de propagation de la première onde est indépendante de l'angle d'incidence; de là résulte pour la direction de la normale au plan de la première onde réfractée

$$m_2 = \frac{a}{\mathfrak{B}} \cdot m, \quad n_2 = \frac{a}{\mathfrak{B}} \cdot n,$$

puis, pour la loi de réfraction, $\frac{\sin i}{\mathfrak{B}} = \frac{\sin r}{a}$, et pour la direction de vibration correspondante,

$$\alpha_2 = - \frac{an}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - a^2 \sin^2 i + a^2 n^2}}, \quad \gamma_2 = 0,$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - a^2 \sin^2 i}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - a^2 \sin^2 i + a^2 n^2}}.$$

Quant à la deuxième onde, nous obtenons, en vertu de (42) et des valeurs précédentes des cosinus de la direction de vibration,

$$\alpha_2' = - \frac{l_2' m_2'}{\sqrt{1 - m_2'^2}}, \quad \gamma_2' = + \sqrt{1 - m_2'^2}, \quad c_2' = \frac{-m_2' n_2'}{\sqrt{1 - m_2'^2}},$$

et pour la vitesse de propagation,

$$\mathfrak{B}_2' = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \gamma_2'^2} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) m_2'^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{B}b}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 - (a^2 - b^2) m^2}}.$$

Substituant cette valeur dans les équations pour les cosinus de direction m'_2, n'_2 de la normale à l'onde, on peut déterminer complètement ceux-ci, et avec eux les cosinus de direction de la vibration.

Pour ce cas, la loi de réfraction prend la forme

$$\sin i = \sin r' \frac{\sqrt{B^2 - (a^2 - b^2) m^2}}{b}.$$

Cherchons maintenant la direction des rayons : nous trouvons, par (64a),

$$\alpha_3 l_3 + \zeta_3 n_3 = 0,$$

équation qui, combinée avec $\alpha_2 l_2 + \zeta_2 n_2 = 0$, donne

$$l_3 = \kappa l_2, \quad n_3 = \kappa n_2,$$

où κ désigne un facteur de proportionnalité. Substituons ces valeurs dans (64), nous aurons, en utilisant $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$, les relations

$$l_3 = l_2, \quad m_3 = m_2, \quad n_3 = n_2.$$

Le premier rayon coïncide donc avec la normale à l'onde.

Pour le second rayon, nous obtenons, après substitution des valeurs $\alpha'_2, \zeta'_2, \zeta'_2$ dans les équations (64) et (64a), les relations

$$l'_3 = \frac{l'_2}{n'_2} n'_3, \quad a^2 l'_2 m'_2 l'_3 + a^2 m'_2 n'_2 n'_3 = b^2 (1 - m'_2)^2 m'_3,$$

d'où

$$\frac{n'_3}{m'_3} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{n'_2}{m'_2}.$$

Ce rapport est fort intéressant. En effet, menons un plan par la normale et par le rayon considéré, et nommons θ, θ' les angles du plan d'incidence et du plan cité avec le plan des xy : alors les cosinus de direction peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} l'_2 &= \cos r', & m'_2 &= \cos \theta \sin r', & n'_2 &= \sin \theta \sin r', \\ l'_3 &= \cos r'_1, & m'_3 &= \cos \theta' \sin r'_1, & n'_3 &= \sin \theta' \sin r'_1. \end{aligned}$$

Comme on le voit, r'_1 est l'angle que le rayon fait avec l'axe des x . Substituons ces valeurs dans la relation ci-dessus, nous obtenons

$$(73) \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \theta.$$

Pour l'angle r'_1 , on a

$$\frac{n'_3}{l'_3} = \frac{n'_2}{l'_2},$$

d'où

$$\operatorname{tg} r'_1 \sin \theta' = \operatorname{tg} r' \sin \theta,$$

ou

$$(74) \quad \operatorname{tg} r'_1 = \frac{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta}}{b^2} \operatorname{tg} r'.$$

Les relations (73) et (74) déterminent entièrement la direction du rayon.

Si autour de l'origine O des coordonnées on décrit une sphère de rayon 1 et qu'on construise le triangle sphérique déterminé par les points d'intersection de la sphère avec l'axe des x , la normale à l'onde et le rayon, on a

$$\cos d' = \cos r' \cos r'_1 + \sin r' \sin r'_1 \cos (\theta' - \theta).$$

Nous allons déterminer maintenant l'intensité du mouvement de l'onde réfléchie et des ondes réfractées. L'expression pour la conservation de l'énergie (65) prend la forme

$$(1 - a_1^2) \frac{\cos i}{\mathfrak{B}} = a_2^2 \frac{\cos r}{a} + \frac{a_2'^2 \cos r'_1}{\mathfrak{B}_2 \cos d'},$$

tandis que les conditions de continuité se ramènent à

$$m (b + a_1 b_1 - a_2' b_2') + n (c + a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_2' c_2') = 0,$$

$$n (b + a_1 b_1 - a_2' b_2') - m (c + a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_2' c_2') = 0,$$

$$n \left(\frac{b - a_1 b_1}{\mathfrak{B}} \cos i - \frac{a_2' b_2' \cos r'}{\mathfrak{B}_2'} \right)$$

$$- m \left(\frac{c - a_1 c_1}{\mathfrak{B}} \cos i - \frac{a_2 c_2 \cos r}{\mathfrak{B}_2} - \frac{a_2' c_2' \cos r'}{\mathfrak{B}_2'} \right) = 0.$$

A ces relations il faut ajouter

$$l_1 a_1 + m_1 b_1 + n_1 c_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1.$$

Ces six équations servent à déterminer a_1 , a_2 , a_2' , α_1 , b_1 , c_1 . Nous n'allons pas résoudre le problème général, mais nous borner à quelques cas particuliers.

a) Soit

$$\theta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad c = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \theta' &= 0, & n &= n_1 = n_2 = n'_2 = n'_3 = 0, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 0, & c_2 &= 1, \\ \alpha'_2 &= -\sin r', & \beta'_2 &= \cos r', & c'_2 &= 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 - a_1^2 &= a_2^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'} + a_2'^2 \frac{\operatorname{tg} i \cos r'_1}{\sin r' \cos d'}, \\ a_1 \beta_1 &= a_2 \cos r', & 1 + a_1 c_1 &= a_2, & 1 - a_1 c_1 &= a_2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'}. \end{aligned}$$

Éliminons a_2 et a_2' de la première équation : nous obtenons

$$1 - a_1^2 = 1 - a_1^2 c_1^2 + \frac{a_1^2 \beta_1^2}{\cos^2 r'} \cdot \frac{\operatorname{tg} i \cos r'_1}{\sin r' \cos d'}$$

ou

$$a_1^2 (c_1^2 - 1) = \frac{a_1^2 \beta_1^2}{\cos^2 r'} \cdot \frac{\operatorname{tg} i \cos r'_1}{\sin r' \cos d'}$$

Le second membre ne peut être que nul ou plus grand que zéro ; donc, $c_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, et, par conséquent, $\alpha_1 = 0$ et $a_2' = 0$. Il n'y aura donc qu'un rayon réfracté. Pour les coefficients a_1 et a_2 , on a les équations

$$(75) \quad a_1 = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

$$(75_a) \quad a_2 = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}$$

L'intensité du rayon incident est à celle du rayon réfléchi et du rayon réfracté comme

$$1 : \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} : \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}$$

b) Soit

$$\theta = 0, \quad \alpha = -\sin i, \quad \beta = \cos i, \quad c = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \theta' &= 0, & n &= n_1 = n_2 = n'_2 = n'_3 = 0, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 0, & c_2 &= 1, \\ \alpha'_2 &= -\sin r', & \beta'_2 &= \cos r', & c'_2 &= 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$1 - a_1^2 = a_2^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} + a_2'^2 \frac{\operatorname{tg} i \cos r_1'}{\sin r' \cos d'},$$

$$\cos i + a_1 b_1 = a_2' \cos r', \quad a_1 c_1 = a_2, \quad a_1 c_1 = -a_2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}.$$

Les deux dernières équations donnent

$$0 = a_2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}\right) \quad \text{ou} \quad a_2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'il n'y a de nouveau qu'un seul rayon réfracté. Pour les cosinus de la direction de vibration dans le rayon réfléchi; on a

$$c_1 = 0, \quad \alpha_1 = -\sin i, \quad b_1 = -\cos i.$$

Les équations ci-dessus se réduisent par là à

$$1 - a_1^2 = a_2'^2 \frac{\operatorname{tg} i \cos r_1'}{\sin r' \cos d'},$$

$$(1 - a_1) \cos i = a_2' \cos r',$$

d'où

$$(76) \quad a_1 = \frac{\sin i \cos i \cos r_1' - \sin r' \cos^2 r' \cos d'}{\sin i \cos i \cos r_1' + \sin r' \cos^2 r' \cos d'},$$

$$(76a) \quad a_2' = \frac{2 \cos i \sin r' \cos r' \cos d'}{\sin i \cos i \cos r_1' + \sin r' \cos^2 r' \cos d'}.$$

L'intensité du rayon incident est à celle du rayon réfléchi et du rayon réfracté comme

$$1 : \left\{ \frac{\sin i \cos i \cos r_1' - \sin r' \cos^2 r' \cos d'}{\sin i \cos i \cos r_1' + \sin r' \cos^2 r' \cos d'} \right\}^2 \\ : \frac{\sin 2i \sin 2r' \cos r' \cos r_1' \cos d'}{(\sin i \cos i \cos r_1' + \sin r' \cos^2 r' \cos d')^2}.$$

c) Soient

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0, \quad b = 1, \quad c = 0.$$

Alors

$$\theta' = \frac{\pi}{2}, \quad r_1' = r', \quad d' = 0, \quad m = m_1 = m_2 = m_2' = m_3' = 0, \\ \alpha_2 = -\sin r, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = \cos r, \\ \alpha_2' = 0, \quad b_2' = 1, \quad c_2' = 0,$$

et

$$1 - a_1^2 = a_2^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} + a_2'^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'},$$

$$a_1 c_1 = a_2 \cos r, \quad 1 + a_1 \delta_1 = a_2', \quad 1 - a_1 \delta_1 = a_2' \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'}.$$

Éliminant a_2 et a_2' de la première équation, nous obtenons

$$1 - a_1^2 = a_1^2 \frac{c_1^2}{\cos^2 r} \cdot \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} + 1 - a_1^2 \delta_1^2,$$

ou

$$a_1^2 (\delta_1^2 - 1) = a_1^2 \frac{c_1^2}{\cos^2 r} \cdot \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r},$$

d'où, comme le second membre ne peut être que nul ou plus grand que zéro,

$$\delta_1 = 1, \quad c_1 = 0,$$

et par conséquent

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Nous n'obtenons donc ainsi qu'un rayon réfracté.

Pour les quantités a_r et a_2' nous obtenons

$$(77) \quad a_1 = - \frac{\sin(i - r')}{\sin(i + r')},$$

$$(77a) \quad a_2' = \frac{2 \sin r' \cos i}{\sin(i + r')},$$

et, par conséquent, pour les intensités, les rapports

$$1 : \frac{\sin^2(i - r')}{\sin^2(i + r')} : \frac{\sin 2i \sin 2r'}{\sin^2(i + r')}.$$

d) Soit

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = -\sin i, \quad \delta = 0, \quad c = \cos i.$$

Alors

$$\theta' = \frac{\pi}{2}, \quad r_1' = r', \quad d' = 0,$$

$$m = m_1 = m_2 = m_2' = m_3' = 0,$$

$$\alpha_2 = -\sin r, \quad \delta_2 = 0, \quad c_2 = \cos r, \quad \alpha_2' = 0, \quad \delta_2' = 1, \quad c_2' = 0,$$

ensuite

$$(1 - a_1^2) = a_2^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} + a_2'^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'},$$

$$\cos i + a_1 c_1 = a_2 \cos r, \quad a_1 \gamma_1 = a_2', \quad -a_1 \gamma_1 = a_2' \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'}.$$

Ajoutons les deux dernières équations; nous aurons

$$0 = a_2' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r'} \right), \quad \text{ou} \quad a_2' = 0.$$

Il n'y a donc que l'un des rayons réfractés.

Pour les cosinus de direction α_1 , γ_1 , c_1 , nous tirons de là les équations

$$\gamma_1 = 0, \quad \alpha_1 = -\sin i, \quad c_1 = -\cos i,$$

et, par conséquent, pour les équations ci-dessus,

$$(78) \quad 1 - a_1^2 = a_2^2 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}, \quad \cos i (1 - a_1) = a_2 \cos r, \quad a_1 = \frac{\operatorname{tg} (i - r)}{\operatorname{tg} (i + r)},$$

$$(78_a) \quad a_2 = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r) \cos (i - r)}.$$

L'intensité du rayon incident est à celle du rayon réfléchi et du rayon réfracté comme

$$1 : \frac{\operatorname{tg}^2 (i - r)}{\operatorname{tg}^2 (i + r)} : \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2 (i + r) \cos^2 (i - r)}.$$

e) Le rayon incident est normal à la surface de séparation, et son plan de vibration forme avec le plan des xy l'angle θ .

Imaginons les vibrations décomposées en deux composantes, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe des y , et examinons chacune d'elles isolément. L'intensité totale du rayon réfléchi se compose alors des intensités qui appartiennent à chaque composante après la réflexion, et devient égale à

$$\cos^2 \theta \left(\frac{\mathfrak{R} - b}{\mathfrak{R} + b} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\mathfrak{R} - a}{\mathfrak{R} + a} \right)^2,$$

tandis que l'intensité de l'un des rayons réfractés ayant ses vibrations

parallèles à l'axe des y devient égale à

$$\cos^2 \theta \frac{4b\mathfrak{B}}{(\mathfrak{B} + b)^2},$$

et celle de l'autre rayon réfracté dont les vibrations sont perpendiculaires à cet axe vaut

$$\sin^2 \theta \frac{4a\mathfrak{B}}{(\mathfrak{B} + a)^2}.$$

Dans le rayon réfléchi, les composantes se combinent de nouveau en une vibration linéaire dont le plan fait avec le plan des xy un angle θ_1 déterminé par

$$\operatorname{tg} \theta_1 = - \operatorname{tg} \theta \frac{\mathfrak{B} - a}{\mathfrak{B} + a} \cdot \frac{\mathfrak{B} + b}{\mathfrak{B} - b}.$$

Le plan de vibration se trouve maintenant, comme on voit, de l'autre côté du plan des xy .

FIN.

NOTES SUPPLÉMENTAIRES

AJOUTÉES PAR L'AUTEUR

§ 1^{er}. — La fonction potentielle dans un diélectrique isotrope (1).

Soit un diélectrique isotrope soumis à l'action d'un point matériel électrisé. Alors les surfaces de niveau sont des surfaces sphériques concentriques ayant le point électrisé comme centre; de plus, les couches comprises entre deux surfaces de niveau infiniment voisines (nous les appellerons couches de niveau) sont aussi des couches sphériques de densité uniforme; ayant encore le point électrisé comme centre. De telles couches sphériques agissent vers l'extérieur, on le sait, comme si toute leur masse se trouvait réunie au centre, tandis qu'à l'intérieur l'action est partout nulle. Considérons donc la marche des phénomènes entre deux surfaces de niveau infiniment rapprochées; nous pouvons faire abstraction aussi bien des surfaces de niveau extérieures, comme aussi des intérieures; il suffit donc de considérer seulement le point électrisé et les deux couches de niveau séparées par la polarisation et situées entre les surfaces de niveau; ou plutôt il suffit de ne considérer, outre le point électrisé, que les couches de niveau intérieures, puisque les couches extérieures n'exercent aucune action sur les points intérieurs, quelque rapprochés qu'ils soient.

Soient (+ e) la quantité d'électricité au point électrisé, (— σ) la quantité d'électricité qui se trouve sur l'unité de surface de la couche intérieure, r le rayon de la couche; la force entre les deux surfaces

(1) Comparez O. Tumlirz (*Schlömilch Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1888).

de niveau considérées est

$$\frac{e}{r^2} - \frac{4\pi r^2 \mathfrak{P}}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{e}{r^2} - 4\pi \mathfrak{P}.$$

Posons maintenant \mathfrak{P} proportionnel à cette force, et regardons le facteur de proportionnalité comme la constante de polarisation. Nous obtenons ainsi

$$\mathfrak{P} = \varepsilon \left[\frac{e}{r^2} - 4\pi \mathfrak{P} \right] \quad \text{ou} \quad \mathfrak{P} = \frac{\varepsilon e}{r^2 (1 + 4\pi \varepsilon)},$$

et pour la force

$$\frac{e}{r^2 (1 + 4\pi \varepsilon)}.$$

Ainsi, par la polarisation, la force, et en même temps la fonction potentielle en tous les points de l'espace, décroît dans le rapport de

$$1 : 1 + 4\pi \varepsilon.$$

Les mêmes choses se passent dans une bouteille de Leyde composée de deux sphères concentriques; les couches de niveau sont des couches sphériques concentriques dont l'action est nulle sur l'armature extérieure. Si donc $(+e)$ est la quantité d'électricité de l'armature intérieure, et que l'armature extérieure communique avec le sol, alors $(-e)$ est la quantité d'électricité sur l'armature extérieure, quelle que soit la nature du diélectrique entre les deux armatures. De même que précédemment, la force sera partout $1 + 4\pi \varepsilon$ fois moindre que s'il n'y avait pas de polarisation; or, la force n'est autre chose que la chute du potentiel; ainsi, en passant de l'armature extérieure comme du lieu de potentiel nul, à l'armature intérieure, nous constaterons sur celle-ci une valeur de la fonction potentielle $(1 + 4\pi \varepsilon)$ fois moindre que s'il n'y avait pas de polarisation, c'est-à-dire la valeur $-\frac{e(b-a)}{ab(1+4\pi\varepsilon)}$, a et b désignant les rayons respectifs de l'armature intérieure et de l'extérieure. Soient ε_0 la constante de polarisation à l'air, ε celle d'un autre diélectrique; alors le rapport des capacités, savoir $\frac{1+4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon_0}$, est la constante diélectrique de la dernière substance d'après Faraday.

Si entre les deux surfaces sphériques concentriques se trouvent deux diélectriques différents séparés par une surface sphérique concentrique aux premières, la force du côté intérieur de cette surface est $\frac{e}{c^2 (1 + 4\pi\epsilon_1)}$, et du côté extérieur $\frac{e}{c^2 (1 + 4\pi\epsilon_2)}$, c étant le rayon de la surface de séparation, ϵ_1 et ϵ_2 les constantes de polarisation des deux diélectriques. Formant le rapport des deux forces, nous obtenons $\frac{1 + 4\pi\epsilon_2}{1 + 4\pi\epsilon_1}$; la force est donc discontinue à la surface de séparation des deux diélectriques, et le rapport des valeurs qu'elle y affecte ne dépend que des constantes de polarisation des deux diélectriques.

Considérons maintenant un conducteur de forme quelconque chargé positivement; nommons Π la fonction potentielle due à cette charge et aux quantités d'électricité séparées dans le diélectrique, et concevons de nouveau deux surfaces de niveau infiniment rapprochées, N_1 , N_2 , dont N_1 est la surface intérieure.

Soient ds_1 , ds_2 deux éléments de ces surfaces dont les courbes du bord sont traversées par les mêmes lignes de force; $-dm_1$, $+dm_1$ les charges produites par la décomposition; nous pourrions écrire comme plus haut

$$+ dm_1 = \frac{\epsilon}{\partial n} \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds_2,$$

n étant la direction de la normale menée au dehors.

La fonction potentielle en un point A, qui est due à la couche de niveau à l'intérieur de N_2 , est $-\int \frac{dm_1}{r}$; celle qui provient de la couche de niveau à l'extérieur de N_1 est $\int \frac{dm_1}{r + dr}$; donc la fonction potentielle due aux deux couches est $-\int \frac{dm_1 dr}{r^2}$.

Quant à la direction de r , elle doit être regardée comme venant du point A. La quantité dr se rapporte aux éléments correspondants ds_1 , ds_2 , ayant entre eux la distance dn , et peut ainsi s'exprimer par

$$dr = dn \cos(n, r).$$

En tenant compte de ce que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} dn = d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2,$$

c'est-à-dire que la différence de potentiel des deux surfaces de niveau N_1, N_2 a même valeur pour tous les éléments de l'intégrale, nous obtenons pour la fonction potentielle des deux couches de niveau au point A l'expression

$$- \epsilon (\Pi_1 - \Pi_2) \int \frac{ds_2 \cos(n, r)}{r^2}.$$

Nous avons maintenant deux cas à considérer ici, suivant que A est intérieur ou extérieur relativement à N_1, N_2 . Les deux surfaces N_1, N_2 sont fermées, car une surface de niveau où le potentiel a une valeur différente de zéro ne peut s'étendre à l'infini. Si donc A est extérieur, l'intégrale ci-dessus est nulle d'après un théorème de Gauss. Au contraire, si A est intérieur, l'intégrale vaut 4π .

En d'autres termes : *La fonction potentielle des couches de niveau considérées est nulle en tous les points extérieurs, et vaut au contraire $-4\pi\epsilon (\Pi_1 - \Pi_2)$ aux points intérieurs.*

Il va de soi que ce théorème est vrai, que le point A se rapproche autant qu'on veut des surfaces N_1, N_2 . Des points de la surface N_2 sont extérieurs, des points sur la surface N_1 sont intérieurs.

Le théorème ci-dessus conduit immédiatement à la conséquence que le potentiel Π en un point quelconque A de l'espace se compose de la fonction potentielle V due à la charge du conducteur, et de la fonction potentielle due aux couches de niveau renfermant le point A, c'est-à-dire que

$$\Pi = V - 4\pi\epsilon \Sigma (\Pi_1 - \Pi_2),$$

la somme Σ se rapportant à toutes les surfaces de niveau situées entre la surface de niveau $\Pi = 0$ et la surface de niveau (Π) passant par le point A. Or, cette somme est égale à Π ; donc

$$\Pi = V - 4\pi\epsilon \Pi, \quad \Pi = \frac{V}{1 + 4\pi\epsilon}.$$

Donc la polarisation rend $(1 + 4\pi\epsilon)$ fois moindre en tous les points

de l'espace la fonction potentielle, et, par conséquent, aussi la force.

Naturellement, cela est vrai aussi pour le conducteur; donc, la capacité du conducteur devient $(1 + 4\pi\epsilon)$ fois plus grande.

Le résultat qu'on vient d'obtenir s'applique encore, on le voit aisément, lorsqu'on a affaire, non pas à un seul, mais à plusieurs conducteurs séparés entre eux dans l'espace et électrisés. Comme par la polarisation la fonction potentielle en tous les points de l'espace change dans le même rapport constant, cette polarisation n'exerce aucune influence sur la surface de niveau.

§ 1^b. — Sur l'énergie électrostatique.

L'élément cylindrique entre N_1 et N_2 avec les bases ds_1 , ds_2 fournit l'énergie électrostatique

$$\frac{1}{2} \Pi_2 dm_1 - \frac{1}{2} \Pi_1 dm_1 = \frac{1}{2} (\Pi_2 - \Pi_1) dm_1 = \frac{\epsilon}{2} (\Pi_2 - \Pi_1) \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds_2,$$

et comme

$$\Pi_2 - \Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial n} dn,$$

cette énergie vaut

$$\frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\partial \Pi}{\partial n} \right)^2 dn ds_2.$$

Désignons la force $\frac{\partial \Pi}{\partial n}$ par F , et divisons cette expression par le volume $ds_2 dn$ de l'élément cylindrique; nous aurons pour l'énergie électrostatique par unité de volume au point (x, y, z) la valeur

$$\frac{1}{2} \epsilon F^2 = \frac{1}{2} \wp F.$$

L'énergie électrostatique d'une bouteille dont les surfaces sphériques ont pour rayon a et b a pour valeur

$$\frac{e^2 (b - a)}{2ab (1 + 4\pi\epsilon)^2}$$

dans le cas où l'une de ces surfaces est chargée de la quantité d'élec-

tricité e , tandis que l'autre communique avec le sol. Si $\epsilon = 0$, cette valeur devient

$$-\frac{e^2 (b - a)}{2ab}.$$

§ 1^c. — *Pression et traction dans le corps diélectrique.*

L'énergie électrique de l'élément cylindrique considéré est

$$\frac{1}{2} (\Pi_2 - \Pi_1) dm_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \cdot dn \cdot dm_1 = \frac{1}{2} dm_1 F dn.$$

Imaginons maintenant l'élément matériel dm_1 déplacé de dn à l'égard de dm_2 , jusqu'à ce que dm_1 coïncide parfaitement avec dm_2 , alors l'énergie électrique de l'élément cylindrique serait annulée, car $dm_1 + dm_2 = 0$. Il se serait effectué ainsi, par ce déplacement, un travail négatif égal, en valeur absolue, à $\frac{1}{2} dm_1 F dn$. Comme c^e . travail équivalent au produit de la force sollicitant l'élément dm_1 par le déplacement dn , cette force est égale à $\frac{1}{2} dm_1 F$. En ds_2 la force F a une autre valeur qu'en ds_1 . Soit F_1 la force en ds_1 , et F_2 celle en ds_2 ; l'élément cylindrique sera sollicité par deux forces, savoir : $\frac{1}{2} dm_2 F_2$ et $\frac{1}{2} dm_1 F_1$ suivant des directions opposées, et ayant, suivant la normale, une résultante

$$\frac{1}{2} dm_2 F_2 - \frac{1}{2} dm_1 F_1 = \frac{1}{2} dm_2 (F_2 - F_1) = \frac{1}{2} dm_2 \frac{\partial F_2}{\partial n} \cdot dn,$$

ou, puisque $dm_2 = \epsilon F_2 ds_2$,

$$\frac{\epsilon}{2} F_2 \frac{\partial F_2}{\partial n} dn ds_2 = \frac{\epsilon}{4} \frac{\partial F_2^2}{\partial n} dn ds_2.$$

Divisant cette force par le volume $ds_2 dn$ de l'élément cylindrique, nous obtenons, pour la résultante par unité de volume, l'expression

$$\frac{\epsilon}{4} \frac{\partial F_2^2}{\partial n},$$

ou, en écrivant F pour F_x ,

$$\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial n}.$$

Tous les éléments du diélectrique sont sollicités par de pareilles résultantes. Si le diélectrique est un fluide, ces forces conduisent à certaines différences de pression qui leur font équilibre.

On sait que si μX , μY , μZ désignent les composantes suivant les x , les y et les z des forces agissant dans le liquide par unité de volume, et que p désigne la pression, les conditions d'équilibre sont données par

$$\mu X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu Z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Dans notre cas, nous pourrions écrire

$$\mu X = \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial x}, \quad \mu Y = 0, \quad \mu Z = 0,$$

si pour l'élément cylindrique considéré l'axe des x est parallèle à la normale; on tire de là

$$dp = \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial x} dx.$$

Formons cette équation pour chaque élément d'une ligne de force, et tenons compte de ce que à une distance infinie F et p s'évanouissent; nous aurons ainsi

$$p = \frac{\epsilon}{4} \cdot F^2.$$

D'après cela, la base ds_1 de notre élément cylindrique est soumise à la force électrique $\frac{1}{2} dm_1 F_1$ ou $\frac{\epsilon}{2} F_1^2 ds_1$ vers l'extérieur, et à la pression $p_1 ds_1 = \frac{\epsilon}{4} F_1^2 ds_1$ vers l'intérieur, et, par conséquent, à la résultante $\frac{\epsilon}{4} F_1^2 ds_1 - p_1 ds_1$ vers l'extérieur; de même la base ds_2 est soumise à une résultante vers l'extérieur $\frac{\epsilon}{4} F_2^2 ds_2 = p_2 ds_2$; au contraire, la surface latérale ne subit qu'une pression p vers l'inté-

rieur. L'élément cylindrique éprouve ainsi une traction p dans la direction des lignes de force, et une pression p dans le sens perpendiculaire.

Ce résultat a été obtenu spécialement au moyen de conditions d'équilibre des fluides; il n'est donc applicable, nous le déclarons formellement, qu'à des états d'équilibre.

§ 16^a. — Le potentiel électrodynamique.

Pour le potentiel électrodynamique de tout le système de courants sur lui-même, nous avons trouvé l'expression (équation 21),

$$-\frac{1}{2} \iiint (Uu + Vv + Ww) dx dy dz.$$

A l'aide des grandeurs \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{V} nous pouvons donner encore une autre expression à ce potentiel. En effet, on a par analogie avec les équations (11) les relations

$$4\pi u = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}, \quad 4\pi v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad 4\pi w = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}.$$

En substituant ces valeurs, on voit que le potentiel électrodynamique a la forme

$$-\frac{1}{8\pi} \iiint \left[U \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z} \right) + V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right) + W \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right) \right] dx dy dz.$$

Intégrant par parties et nous rappelant que U , V , W et \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{V} sont partout finis et continus et nuls à l'infini, nous obtenons

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \left[\mathcal{V} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \mathcal{L} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \mathcal{M} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] dx dy dz,$$

ou bien, eu égard aux équations (32),

$$\frac{1}{8\pi} \iiint (\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{V}^2) dx dy dz.$$

Si le milieu peut subir la polarisation magnétique, alors l'influence des forces magnétiques du système de courants détermine une polari-

sation magnétique dont l'énergie en chaque point et par unité de volume est donnée par

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S} \left[\left(\mathfrak{L} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\mathfrak{M} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 + \left(\mathfrak{N} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Si la polarisation est très faible, de sorte que les composantes $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$, dues aux fluides magnétiques libres développés, sont très faibles à l'égard des composantes \mathfrak{L} , \mathfrak{M} , \mathfrak{N} , nous pouvons écrire pour cette valeur

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S} (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2),$$

nous obtenons ainsi, en raison du potentiel électrodynamique cité et de la polarisation magnétique, pour chaque point de l'espace, une énergie par unité de volume égale à

$$\frac{1 + 4\pi\mathfrak{S}}{8\pi} (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2).$$

§ 21^a. — L'énergie des ondes planes.

Par unité de volume l'énergie électrostatique est égale dans ce dernier cas à

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S} F = \frac{1}{2} \epsilon F^2 = \frac{1}{2} \epsilon (1 + 4\pi\mathfrak{S})^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 = \epsilon_1;$$

au contraire, l'énergie électrodynamique par unité de volume est égale à

$$\frac{1 + 4\pi\mathfrak{S}}{8\pi} \mathfrak{M}^2 = \frac{1 + 4\pi\mathfrak{S}}{8\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = \epsilon_2.$$

Si

$$U = C \sin(z - At) 2\pi, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

on a.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -A \frac{\partial U}{\partial z},$$

et :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\mathcal{S})\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2,$$

et, par conséquent,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Les choses se passent ici comme pour une vibration lumineuse plane; ici nous avons aussi deux espèces d'énergie : une énergie potentielle et une énergie cinétique, et les deux sont égales entre elles.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE DU TRADUCTEUR	V
DÉDICACE DE L'OUVRAGE ALLEMAND.....	VII
PRÉFACE.....	IX
INTRODUCTION	XI

PREMIÈRE PARTIE

Propositions générales sur le mouvement de l'électricité dans les corps en repos.

PREMIÈRE SECTION

Propriétés principales des diélectriques.

§ 1. — Moment électrique.....	1
§ 2. — Charge électrique du milieu à l'état de polarisation	3
§ 3. — Influence de la polarisation sur la mesure électrostatique de l'élec- tricité.....	5
§ 4. — Constante diélectrique.....	8
§ 5. — Courant diélectrique.....	10
§ 6. — Explication mécanique des propriétés d'un diélectrique.....	13

DEUXIÈME SECTION

Quelques théorèmes sur la théorie des phénomènes électromagnétiques et des phénomènes d'induction dans les courants électriques fermés.

§ 7. — Fonction potentielle des forces électromagnétiques.....	16
§ 8. — Signification mécanique de l'expression du potentiel.....	19
§ 9. — Rapports entre les composantes du courant et celles de la force électromagnétique	21
§ 10. — Potentiel électrodynamique mutuel de deux courants constants linéaires	23
§ 11. — Intégrale de Neumann sur l'induction de Volta.....	24

TROISIÈME SECTION

Étude d'un système de courants électriques fermés et non fermés.

	Pages
§ 12. — Potentiel électrodynamique d'un pareil système sur lui-même	26
§ 13. — <i>Suite.</i> — Les fonctions U, V, W.	29
§ 14. — Composantes de la force électromotrice induite par la variation des courants	33
§ 15. — Le milieu est susceptible d'être polarisé. — Composantes de la force électromotrice induite par le changement de la polarisation magnétique	35
§ 16. — Composantes de la force électromotrice totale. — Récapitulation	39
§ 17. — Cas particulier : le coefficient k est nul.	41

DEUXIÈME PARTIE

Théorie électromagnétique de la lumière.

QUATRIÈME SECTION

Lois de la propagation de la lumière.

§ 18. — Propagation de la lumière dans un mauvais conducteur isotrope	47
§ 19. — <i>Suite.</i> — Vitesse de la propagation	52
§ 20. — <i>Suite.</i> — Rapport de l'indice de réfraction avec la constante diélectrique	57
§ 21. — <i>Suite.</i> — Ondes planes	63
§ 22. — Propagation de la lumière dans de mauvais conducteurs anisotropes.	65
§ 23. — <i>Suite.</i> — Expériences de Boltzmann.	70
§ 24. — Propagation de la lumière dans les conducteurs isotropes.	73

CINQUIÈME SECTION

Réflexion et réfraction de la lumière à la surface de contact de deux milieux isotropes.

§ 25. — Réflexion et réfraction de la lumière à la surface de contact des milieux isotropes	77
§ 26. — <i>Suite.</i> — Réflexion totale.	86
§ 27. — <i>Suite.</i> — Application et représentation graphique des formules (52 _c) et (52 _a).	89
§ 28. — Réflexion et réfraction de la lumière à la limite des corps isotropes.	95
§ 29. — <i>Suite.</i>	103
§ 30. — <i>Suite.</i> — Le plan de vibration de rayon incident polarisé rectilignement fait avec le plan d'incidence un angle différent de 0 et de 90°.	110

TABLE DES MATIÈRES.

157

	Pages
§ 31. — <i>Suite.</i> — L'indice de réfraction est une fonction de l'angle d'incidence.....	113
§ 32. — <i>Suite.</i> — Loi de l'absorption.....	115

SIXIÈME SECTION

Réflexion et réfraction de la lumière à la surface des mauvais conducteurs anisotropes.

§ 33. — Expression pour la conservation de l'énergie.....	117
§ 34. — Conditions de continuité.....	125
§ 35. — Réflexion et réfraction à la limite d'une plaque cristalline à un axe et taillée perpendiculairement à cet axe.....	130
§ 36. — Cas d'une lame taillée parallèlement à l'axe.....	135

NOTES SUPPLÉMENTAIRES

§ 1 ^a . — Fonction potentielle dans un diélectrique isotrope.....	145
§ 1 ^b . — Énergie électrostatique.....	149
§ 1 ^c . — Pression et traction dans le corps diélectrique.....	150
§ 16 ^a . — Potentiel électrodynamique.....	152