École
Polytechnique

1ère Division

1885-86.

1ère Conférence d'analyse.
Mr Pointcaré.

Trouver l'intégrale.

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$$

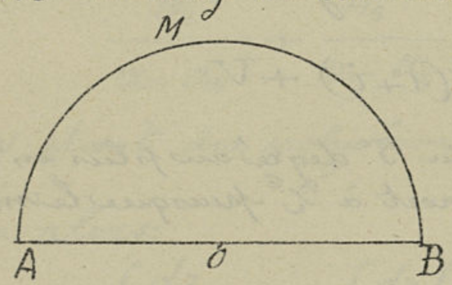
$$f(x) = \left[(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2 + x^2(x-2)^2(x-4)^2\right]$$

$$\varphi(x) = (x-1)(x-3)(x-5) \quad ; \quad \psi(x) = x(x-2)(x-4)$$

Cette intégrale est égale à la suivante:

(2) $$\int \frac{dz}{f(z)}$$

prise le long du contour suivant: AOBMA.



AOB est l'axe des x parcouru depuis un point A très-éloigné vers la gauche jusqu'à un point B très-éloigné vers la droite. BMA est une demi-circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon très-grand. L'intégrale prise le long de BMA est nulle; en effet; car le long de cette demi-circonférence de rayon infiniment grand du 1er ordre, $f(z)$ est infiniment grand du 6e ordre.

Nous avons:

(3) $$\frac{1}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots\dots\dots + \frac{A_6}{x-a_6}$$

L'intégrale cherchée est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus relatifs à celles des racines de $f(x)=0$ qui sont intérieures au contour.

Quelles sont d'abord ces racines? Il y en a évidemment 3; car ces racines sont toutes imaginaires; elles doivent être imaginaires conjugués deux à deux; il y en a par conséquent trois qui ont leur partie imaginaire positive et trois qui ont leur partie imaginaire négative. Les premières sont intérieures au contour, les secondes extérieures.

Considérons l'équation:

$$(4) \qquad \varphi(x) + i\psi(x) = 0.$$

Combien cette équation aura t-elle de racines intérieures au contour ? Pour cela, il faut prendre le long du contour:

$$(5) \qquad \int \frac{dz(\varphi'(z) + i\psi'(z))}{\varphi(z) + i\psi(z)}$$

Intégrale prise le long de la droite AOB. Il faut étudier les variations du rapport $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ quand x varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. On a alors $P = \varphi(x)$, $Q = \psi(x)$.

Pour $x = -\infty$, le rapport est égal à 1, pour $x = 0$ il saute de $+\infty$ à $-\infty$, pour $x = 1$ il change de signe en passant par 0, pour $x = 2$, il saute de $+\infty$ à $-\infty$, pour $x = 3$ il change encore de signe en passant par 0, pour $x = 4$ il saute de $+\infty$ à $-\infty$; pour $x = 5$ il change de signe en passant par 0, enfin pour $x = +\infty$, il est de nouveau égal à $+1$.

Prenons maintenant l'intégrale le long du demi-cercle BMA. Le long de ce demi-cercle, on a:

$$\varphi(z) + i\psi(z) = z^2(1+i) + V$$

V étant un ensemble de termes du 5^e degré au plus en z et par conséquent très-petits par rapport à z^6 puisque le module de z est infiniment grand.

On a donc:

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\omega + i \sin 3\omega)$$

et en négligeant V:

partie réelle de $\varphi(z) + i\psi(z) = P = \rho^3(\cos 3\omega - \sin 3\omega)$

partie imaginaire de $\varphi(z) + i\psi(z) = Q = \rho^3(\sin 3\omega + \cos 3\omega)$

d'où:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 - tg.\, 3\omega}{1 + tg.\, 3\omega}$$

Cette expression devient infinie pour les valeurs suivantes comprises sur le demi-cercle BMA, c'est-à-dire entre 0 et π.

pour $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, $\quad \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{d}{d\omega}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{-2(1+tg^2 3\omega)}{(1+tg\, 3\omega)^2}$$

c'est à dire que la dérivée de $\frac{P}{Q}$ est toujours négative et par conséquent que $\frac{P}{Q}$ saute toujours de $-\infty$ à $+\infty$.

Ainsi le rapport $\frac{P}{Q}$ saute trois fois de $+\infty$ à $-\infty$ le long de la droite AOB et trois fois de $-\infty$ à $+\infty$ le long du demi-cercle BMA. L'excès est donc nul. Donc l'intégrale (5) est nulle.

Donc l'équation (4) n'a aucune racine à l'intérieur du contour. Donc les trois racines a_1, a_2 et a_3 de l'équation $f(x)=0$ qui sont intérieures au contour sont celles de:

$$\varphi-i\psi=0.$$

Les trois racines a_4, a_5 et a_6 de $f(x)=0$ qui sont extérieures au contour sont celles de

$$\varphi+i\psi=0.$$

Posons donc:

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}=\frac{V+iW}{\varphi+i\varphi}$$

$$\frac{A_4}{x-a_4}+\frac{A_5}{x-a_5}+\frac{A_6}{x-a_6}=\frac{V-iW}{\varphi+i\psi},$$

V et W étant des polynômes entiers réels du second degré en x.

On a alors:

$$\int\frac{dz}{f(z)}=\int\frac{dz(V+iW)}{\varphi-i\psi}+\int\frac{dz(V-iW)}{\varphi+i\psi}$$

La seconde intégrale est nulle puisque le dénominateur $\varphi(z)+i\psi(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur du contour. L'intégrale cherchée se réduit donc à

$$\int\frac{dz\left[V(z)+iW(z)\right]}{\varphi(z)-i\psi(z)}$$

Evaluons cette dernière intégrale. Pour cela, je remarque qu'il est indifférent de la prendre le long du contour AOBMA, ou le long d'un cercle de rayon infini. L'un et l'autre contour contient également tous les infinis ; l'une et l'autre intégrale est donc égale à la somme des résidus.

Posons :

$$V = Bz^2 + Cz + D$$

$$W = B'z^2 + C'z + D'$$

Si nous posons, $z = Re^{i\omega}$, R étant très-grand, il viendra :

$$dz = Ri\,d\omega\, e^{i\omega}$$

$V + iW = (B + iB'')R^2e^{2i\omega} +$ des termes du 1^{er} degré au plus en R.

$\varphi - i\psi = (1-i)R^3e^{3i\omega} +$ des termes du 2^e degré au plus en R.

R étant très-grand ; il suffit de conserver les termes de degré le plus élevé.

d'où :

$$\int \frac{dz(V+iW)}{\varphi - i\psi} = \int^{2\pi} i\,d\omega\, \frac{B+iB''}{1-i} = 2\pi\, \frac{-B''+iB}{1-i}$$

L'intégrale du premier membre qui n'est autre que (1) est essentiellement réelle ; elle est donc égale à $-2\pi B$.

On doit avoir :

$$B = B''$$

Il reste à déterminer B.

Pour cela, nous partirons de l'identité :

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{V+iW}{\varphi - i\psi} + \frac{V-iW}{\varphi + i\psi}$$

d'où :

$$1 = 2V\varphi + 2W\psi.$$

Si nous faisons successivement $z = 0$, 2 et 4 ; $\psi(z)$ s'annulle et $\varphi(z)$ devient nécessairement égal à -15, à 2 et à -3.

On a donc :

$$V(0) = -\frac{1}{30}$$

$$V(2) = \frac{1}{6}$$

$$V(4) = -\frac{1}{6}$$

Décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$$(6) \qquad \frac{V(z)}{\psi(z)} = \frac{H_1}{z} + \frac{H_2}{z-2} + \frac{H_3}{z-4}.$$

Les trois résidus H_1, H_2 et H_3 sont égaux respectivement à:

$$\frac{V(0)}{\psi'(0)}, \quad \frac{V(2)}{\psi'(2)}, \quad \frac{V(4)}{\psi'(4)}$$

On a:

$$\frac{-\left(\frac{1}{30}\right)}{8}, \quad \frac{\frac{1}{6}}{-4}, \quad \frac{-\frac{1}{6}}{8}$$

ou a:

$$-\frac{1}{240}, \quad -\frac{1}{24}, \quad -\frac{1}{48}$$

d'où:

$$H_1 + H_2 + H_3 = -\frac{1}{15}.$$

Or, nous avons:

$$\frac{zV}{\varphi(z)} = H_1 + \frac{zH_2}{z-2} + \frac{zH_3}{z-4}$$

Si dans cette égalité on fait $z = \infty$, le premier membre devient B et les trois termes du second membre deviennent respectivement

$$H_1, \; H_2 \text{ et } H_3$$

On a donc:

$$B = H_1 + H_2 + H_3.$$

Donc l'intégrale cherchée qui est égale à $-2\pi B$ est égale à:

$$\frac{2\pi}{15}.$$

La somme des résidus d'une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots\ldots}{A'z^m + B'z^{m-1} + \ldots\ldots}$$

est égale à $\frac{A}{A'}$.

En effet, prenons l'intégrale

$$\int dz\, f(z)$$

le long d'un cercle de rayon infini.

Cette intégrale sera égale à $2i\pi$ multipliée par la somme des résidus.

Posons: $z = Re^{i\omega}$

L'intégrale s'écrira:

$$\int \frac{dz}{z}\left[z f(z)\right]$$

On a:

$$z f(z) = \frac{Az^m + Bz^{m-1} + \ldots\ldots}{A'z^m + B'z^{m-1} + \ldots\ldots}$$

Donc quand R, et par conséquent z, tend vers l'infini, on a:

$$\lim.\ z f(z) = \frac{A}{A'}$$

l'intégrale cherchée a donc pour limite:

$$\int \frac{A}{A'}\,\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{A}{A'}\, i\,d\omega = 2i\pi \frac{A}{A'}.$$

Donc la somme des résidus est égale à $\frac{A}{A'}$.

L'intégrale $\int \frac{z f'(z)\,dz}{f(z)}$

prise le long d'un contour quelconque est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des racines de l'équation $f(z) = 0$.

Si le contour ne contient qu'une racine, cette racine est ainsi exprimée par une intégrale définie.

Supposons que le contour soit un cercle de rayon infini, l'intégrale sera $2i\pi$ multiplié par la somme de toutes les racines.

Soit:

$$f(z) = z^m - Az^{m-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$f'(z) = mz^{m-1} - (m-1)Az^{m-2} + \ldots\ldots$$

On a:

$$\frac{z f'(z)}{f(z)} = \frac{mz^m - (m-1)Az^{m-1} + \ldots\ldots}{z^m - Az^{m-1} + \ldots\ldots}$$

$$= m + \frac{Az^{m-1} + \ldots\ldots}{z^m + \ldots\ldots}$$

Donc la somme des racines est égale à A.

Si $f(z)$ est une fonction rationnelle, l'intégrale

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$$

prise le long d'un contour est égale au nombre des zéros <u>moins</u> le nombre des infinis à l'intérieur du contour, le tout multiplié par $2i\pi$.

Application à l'équation transcendante:

$$\operatorname{tg} z = \alpha z \qquad \alpha > 1$$

Cette équation a une infinité de racines réelles.

Si nous construisons en effet les courbes:

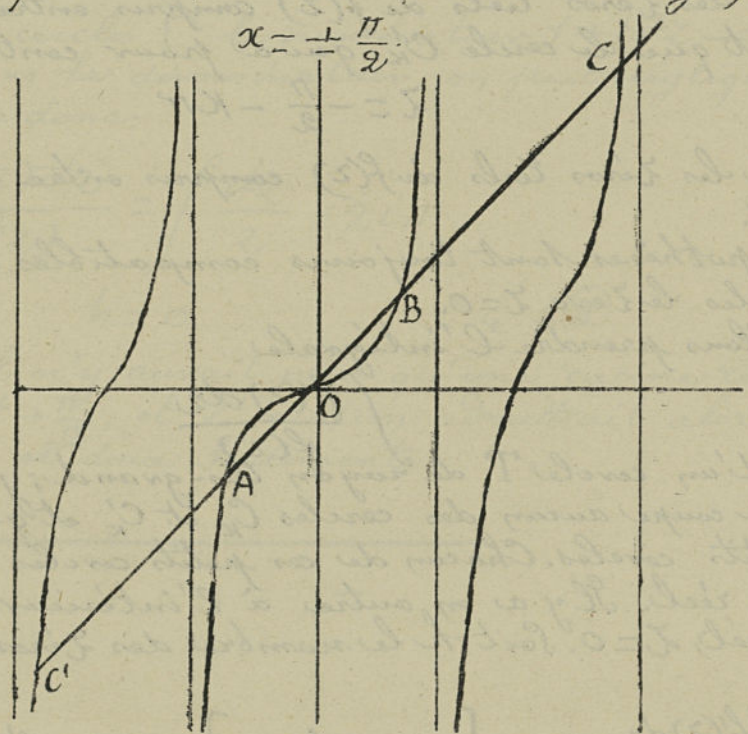
$$y = \alpha x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$

la dernière a une infinité d'asymptotes,

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} + K\pi \ (K \text{ entier, positif et négatif.})$$

La figure (1) qui représente ces deux courbes montre qu'elles se coupent en trois points A, O et B entre les deux asymptotes

$$x = \pm\frac{\pi}{2}.$$



$^{\times}$ et au moins en un point (tels que C ou que C') entre deux asymptotes quelconques.

Cela posé, je me propose de démontrer que cette équation n'a pas de racine imaginaire.

Représentons maintenant la quantité imaginaire z par la position d'un point dans un plan et soit:

$$f(z) = \operatorname{tg} z - \alpha z$$

Cette fonction aura une infinité d'infinis:

$$z = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad \text{et} \quad z = -\frac{\pi}{2} - K\pi$$

$$(K = 0, 1, 2, \ldots\ldots \ \alpha \text{ d'infinis})$$

et une infinité de zéros réels.

De chacun des infinis comme centre, je décris des cercles C_K et C'_K de rayon ρ et je suppose:

1° Que le rayon ρ soit le même pour tous ces cercles.

2° Que ce rayon soit assez petit pour que ces cercles ne se coupent pas.

3° Qu'il soit assez grand pour que le cercle C_K qui a pour centre l'infini

$$z = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

contienne les zéros réels de $f(z)$ compris entre $\frac{\pi}{2} + (K-1)\pi$ et $\frac{\pi}{2} + K\pi$ et que le cercle C'_K qui a pour centre l'infini:

$$z = -\frac{\pi}{2} - K\pi$$

contienne les zéros réels de $f(z)$ compris entre $-\frac{\pi}{2} - (K-1)\pi$ et $-\frac{\pi}{2} - K\pi$.

Ces hypothèses sont toujours compatibles. Il restera en dehors de ces cercles le zéro $z = 0$.

Nous allons prendre l'intégrale

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$$

le long d'un cercle T de rayon très-grand; je supposerai que ce cercle ne coupe aucun des cercles C_K et C'_K et qu'il contienne n de ces petits cercles. Chacun de ces petits cercles contient un infini et un zéro réel. Il y a en outre à l'intérieur du grand cercle un zéro réel, $z = 0$. Soit h le nombre des zéros imaginaires. On aura:

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = 2i\pi\left[(n+1+h) - n\right] = 2i\pi(h+1)$$

Mais on a:

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int \frac{1 + tg^2 z - \alpha}{tg z - \alpha z}\,dz$$

Dans toute la partie du plan extérieure aux petits cercles C_K et C'_K, $tg z$ est fini. Pour les valeurs de z dont la partie imaginaire est positive et très-grande, on a:

$$tg z = i$$

Car:

$$tg z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y} e^{ix} = 0 \quad \text{si } y = \infty.$$

$$e^{-iz} = \infty.$$

Par conséquent:
$$1 + tg^2 z = 0$$

De même si la partie imaginaire de z est négative, et très grande, on a:
$$tg z = -i$$

et par conséquent:
$$1 + tg^2 z = 0$$

Ainsi le long des cercles Γ, le numérateur $1 + tg^2 z - \alpha$ se réduit à $-\alpha$; et dans le dénominateur, on peut négliger $tg z$ devant $-\alpha z$. Il reste donc:

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

et par conséquent:
$$k = 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si on avait $\alpha < 1$, il n'y aurait plus qu'une racine réelle $x \neq 0$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'équation admettrait alors deux racines imaginaires et deux seulement.

Ecole Polytechnique.

1ère Division.

1885-86.

2e Conférence d'analyse.

Mr Poincaré.

Dérivées sucessives de sin am u.

Dérivée de sin am u = cos am u Δ am u;
Dérivée de cos am u = − sin am u Δ am u;
Dérivée de Δ am u = − K^2 sin am u cos am u.

Ecrivons maintenant, pour abréger, S, C et Δ au lieu de sin am u, cos am u, Δ am u, et appelons D_n la dérivée n^e de sin am u; il viendra:

$$D_1 = C\Delta$$

$$D_2 = - S\Delta^2 - K^2 S C^2$$

$$D_3 = - C\Delta^3 + K^2 S^2 C\Delta + k^2 S^2 C\Delta$$
$$- k^2 \Delta C^3 + k^2 S^2 C\Delta + k^2 S^2 C\Delta.$$

Les termes de la dérivée 1ère sont un produit de deux fonctions elliptiques, chacun des termes de la dérivée 2e est un produit de trois fonctions elliptiques; ceux de la dérivée 3ème de 4 pareilles fonctions, etc. La dérivée $n^{ème}$ sera une somme de termes et chacun de ces termes contiendra en facteurs $(n+1)$ fonctions elliptiques.

La dérivée 1ère a un seul terme; la 2ème en a deux, la 3e en a six, etc — la dérivée $n^{ème}$ en aurait $1 \times 2 \ldots\ldots \times n$; en effet, chacun des termes de la dérivée $(n-1)^{ème}$ est un produit de n facteurs elliptiques. Comme on doit différentier successivement par rapport à chacun de ces facteurs, chaque terme de la dérivée $(n-1)^e$ nous donnera n termes de la dérivée n^e. Outre les $(n+1)$ facteurs elliptiques, chacun des termes de la dérivée n^e contient un coëfficient numérique. Ce coëfficient est toujours plus petit que 1 en valeur absolue, car chaque différentiation introduit un facteur +1, ou −1, ou $-K^2$ $(k^2 < 1)$.

De plus, si u est réel, S, C et Δ sont plus petits que 1, en valeur absolue. Donc la dérivée $n^{\text{ième}}$ est plus petite en valeur absolue, que $1.2.3\ldots n$.

Si donc on développe $\sin \operatorname{am} u$ par la formule de Mac-Laurin, le développement

$$\frac{D_1 u}{1} + \frac{D_2 u^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{D_n u^n}{1.2\ldots n} + \ldots\ldots$$

est convergent si le module de u est plus petit que 1; Car chacun des termes est plus petit, en valeur absolue, que le terme correspondant de la Série:

$$u + u^2 + \ldots\ldots\ldots + u^n + \ldots\ldots$$

qui est convergente si

$$\operatorname{mod.} u < 1.$$

Ce développement est donc valable à l'intérieur du cercle qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon.

Donc, à l'intérieur de ce cercle, $\sin \operatorname{am} u$ est fini et bien déterminé. Donc $\omega' > 1$ puisque $\sin \operatorname{am} \omega' i = \infty$.

On trouverait même

$$\omega' > \frac{\pi}{2} \qquad \omega > \frac{\pi}{2}.$$

Le $\sin \operatorname{am}$ est une fonction bien déterminée.

En effet, nous venons de voir qu'il en est ainsi à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 1; et alors, il en est évidemment de même de la dérivée $\cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u$.

On a alors:

$$\sin \operatorname{am} 2u = \frac{2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} u}$$

C'est le quotient de deux fonctions bien déterminées si

$$\operatorname{mod.} u < 1$$

Donc, $\sin \operatorname{am} 2u$ est bien déterminé si

$$\operatorname{mod.} u < 1.$$

Mais si le point u décrit un contour intérieur au cercle de rayon 1, le point $2u$ décrira un contour intérieur au cercle concentrique de rayon 2. Ce contour devra ramener $\sin \operatorname{am} 2u$ à sa valeur primitive. Donc $\sin \operatorname{am} u$ est bien déterminé si

$$\operatorname{mod.} u < 2,$$

et il en est de même de sa dérivée.

En répétant indéfiniment le même raisonnement, on verrait successivement que $\sin \operatorname{am} u$ est bien déterminé quand $\operatorname{mod} u < 4$, quand $\operatorname{mod.} u < 8$, etc.

Donc cette fonction est bien déterminée dans tout le plan.

Une fonction bien déterminée ne peut avoir plus de deux périodes. (Démonstration de M. Kronecker.)

Soient α, β, γ trois périodes. Il n'y aura pas de relation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$$

à coëfficients entiers, sans quoi les périodes ne seraient pas distinctes. Alors $m\alpha + n\beta + p\gamma$ (où m, n et p sont entiers) sera une période. Je vais montrer que je puis choisir m, n, p de telle façon que cette période ait son module aussi petit que je veux, ou ce qui revient au même, que je puis trouver deux points

$$m\alpha + n\beta + p\gamma$$

$$m'\alpha + n'\beta + p'\gamma$$

dont la distance soit aussi petite que je veux.

En effet, considérons tous les points:

$$(1) \qquad m\alpha + n\beta + p\gamma$$

où $\qquad 0 \leqq m < q^2, \quad 0 \leqq n < q^2, \quad 0 \leqq p < q^2.$

Ces points sont au nombre de q^6.

De plus, supposons que:

$$\text{mod}\,\alpha < \rho, \quad \text{mod}\,\beta < \rho, \quad \text{mod}\,\gamma < \rho.$$

Il viendra:

$$\text{mod}\,(m\alpha + n\beta + p\gamma) < (m+n+p)\,\rho < 3q^2\rho$$

Ce qui prouve que tous les points (1) seront à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $3q^2\rho$; et par conséquent à l'intérieur du carré C de côté $6q^2\rho$ et de diagonale $6q^2\rho\sqrt{2}$.

Divisons chacun des côtés du carré C en $(q-1)^3$ parties égales; puis, menons par les points de division des parallèles aux côtés. Nous aurons divisé ainsi le grand carré en $(q-1)^6$ petits carrés.

Le nombre de points (1) qui est q^6 est plus grand que celui des carrés qui est $(q-1)^6$. Il y aura donc au moins un des petits carrés qui contiendra deux des points (1), M_1 et M_2.

La distance des deux points M_1 et M_2, intérieurs au petit carré, est plus petite que la diagonale de ce carré, c'est à dire que

$$6 \frac{q^2\rho\sqrt{2}}{(q-1)^3}$$

Or, je puis prendre q assez grand pour que cette expression soit aussi petite que je voudrai. Je puis donc trouver deux points M_1 et M_2 dont la distance soit aussi petite que je veux.

C. Q. F. D.

Résidus des fonctions elliptiques.

La fonction $\sin \operatorname{am} u$ a pour résidu $\frac{1}{k}$; car si je fais

$$u = v + \omega' i,$$

il vient:

$$\lim . \sin \operatorname{am} u \times (v - \omega' i) = \lim . v \sin \operatorname{am}(v + \omega' i) = \lim . \frac{v}{k \sin \operatorname{am} v} = \frac{1}{k}$$

Pour l'infini $3\omega' i$; le résidu est encore $\frac{1}{k}$, car

$$\sin \operatorname{am}(u + 2\omega' i) = \sin \operatorname{am} u$$

Pour l'infini $\omega' i + 2\omega$, le résidu est $-\frac{1}{k}$; car

$$\sin \operatorname{am}(u + 2\omega) = - \sin \operatorname{am} u.$$

Passons au $\cos \operatorname{am} u$.

Pour l'infini $\omega' i$; on a: pour $u = \omega' i$:

$$\frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} = -i \quad (\text{pour } z = \infty).$$

Le résidu est donc $\frac{-i}{k}$.

Pour l'infini $3\omega' i$, le résidu sera $\frac{+i}{k}$; car

$$\cos \operatorname{am}(u + 2\omega' i) = - \cos \operatorname{am} u,$$

Raisonnons de même pour le $\Delta \operatorname{am} u$; nous trouverons pour $u = \omega' i$:

$$\frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{z} = -ik \quad (\text{pour } z = \infty)$$

Le résidu est donc $-i$; et pour l'infini $3\omega' i$, il est égal à $+i$.

Considérons maintenant les trois fonctions:

$$\cos \operatorname{am}(u + \alpha), \quad \cos \operatorname{am} u \quad \text{et} \quad \sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(u + \alpha).$$

Elles ont mêmes périodes $2\omega + 2\omega' i$ et $2\omega - 2\omega' i$. Le parallélogramme des périodes est donc un losange ayant pour sommets les points 0, $2\omega+2\omega'i$, $-2\omega+2\omega'i$ et $4\omega'i$.

A l'intérieur de ce parallélogramme, la première fonction a deux infinis :

$$\omega'i-\alpha,\ \text{avec le résidu } \frac{-i}{k},$$
$$3\omega'i-\alpha,\ \text{avec le résidu } \frac{+i}{k}.$$

La seconde fonction a deux infinis:

$$\omega'i,\ \text{avec le résidu } \frac{-i}{k}$$
$$3\omega'i\ \text{avec le résidu } \frac{+i}{k}.$$

La troisième fonction admet les quatre infinis:

$$\omega'i,\ \text{avec le résidu } \frac{\Delta\, am(\alpha+\omega'i)}{k}$$
$$3\omega'i,\ \text{avec le résidu } \frac{\Delta am(\alpha+3\omega'i)}{k} = -\frac{\Delta am(\alpha+\omega'i)}{k}$$
$$\omega'i-\alpha,\ \text{avec le résidu } -i\sin am(\omega'i-\alpha)$$
$$3\omega'i-\alpha,\ \text{avec le résidu } +i\sin am(\omega'i-\alpha)$$

La fonction:

$$F = B\cos am(u+\alpha) + A\cos am u + C\sin am u\, \Delta am(u+\alpha)$$

admettra donc les deux infinis $\omega'i$ et $3\omega'i$ avec les résidus:

$$\pm\left(\frac{-Ai}{k} + C\frac{\Delta am(\alpha+\omega'i)}{k}\right)$$

et les deux infinis $\omega'i-\alpha$ et $3\omega'i-\alpha$ avec les résidus:

$$\pm\left(\frac{-Bi}{k} - Ci\sin am(\omega'i-\alpha)\right)$$

Si donc on prend:

$$B = ik\sin am(\omega'i-\alpha)$$
$$C = i$$
$$A = \Delta am(\alpha+\omega'i) = \frac{i}{\sin am\,\alpha},$$

les quatre résidus sont nuls. La fonction F ne devenant pas infinie, doit donc se réduire à une constante. Il est aisé de voir en faisant $u=0$, que cette constante doit être nulle;

En effet, on a:

$$\Delta am(u+\omega'i) = \sqrt{1-\frac{k^2}{k^2\sin^2 am u}} = \frac{\pm i\cos am u}{\sin am u}$$

Pour voir quel signe il faut prendre, faisons $u = -\frac{1}{2}\omega' i$; $\Delta\,am\,\frac{\omega' i}{2}$ et $\cos am\left(-\frac{\omega' i}{2}\right)$ sont réels positifs, et $\sin am\left(\frac{-\omega' i}{2}\right)$ est imaginaire négatif.

Il faut donc prendre le signe $-$ de sorte que:

$$\Delta\,am(u+\omega' i) = \frac{-i\cos am\,u}{\sin am\,u}.$$

Il résulte de là que

$$F = \frac{-i\cos am\,\alpha\cos am\,u}{\sin am\,\alpha} + \frac{i\cos am(u+\alpha)}{\sin am\,\alpha} + i\sin am\,u\,\Delta\,am(u+\alpha)$$

D'où l'égalité:

$$C = \cos am\,\alpha\cos am\,u - \cos am(u+\alpha) - \sin am\,u\sin am\,\alpha\,\Delta\,am(u+\alpha)$$

En faisant $u=0$; on voit que la constante est nulle, et il reste:

$$\cos am(u+\alpha) = \cos am\,u\cos am(-\alpha) - \sin am\,u\sin am\,\alpha\,\Delta\,am(u+\alpha).$$

École
Polytechnique

2e Division

1885-86

9e Conférence d'analyse
M. Jordan

Solutions singulières

Une équation différentielle n'admet en général de solutions singulières. Soit en effet

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0 \qquad z = \frac{dy}{dx}$$

une équation différentielle. Si elle admet une solution singulière cette solution sera donnée par l'équation

$$\frac{dF}{dz} = 0$$

[illegible] une intégrale de l'équation proposée. Or en [illegible] l'équation (1) il viendra

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

[illegible] $\frac{dF}{dz}$ est nul

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}z = 0$$

Donc pour que y soit une solution singulière, il faut [illegible] par les trois équations

$$F = 0 \qquad \frac{dF}{dz} = 0 \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}z = 0$$

[illegible] les points [illegible] [illegible] [illegible] et elles ne [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Donc en général il n'y a pas de solutions singulières.

[illegible] [illegible] [illegible]

$$F = [illegible]$$

[illegible] l'intégrale générale [illegible]

$$(2) \qquad (y - C)^2 [illegible]$$

[illegible] [illegible] différentions par rapport à [illegible]

$$[illegible] = 0$$

[illegible]

$$\frac{dF}{dx} \qquad [illegible]$$

École Polytechnique

1ère Division.

1885-86.

3e Conférence d'analyse.

Mr Poincaré.

Solutions singulières.

Une équation différentielle n'a pas en général de solution singulière. Soit en effet:

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad z = \frac{dy}{dx}$$

une équation différentielle. Si elle admet une solution singulière, cette solution nous sera donnée par l'équation:

$$\frac{dF}{dz} = 0.$$

Obtient-on ainsi une intégrale de l'équation proposée? Pour le savoir, différentions l'équation (1), il viendra:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

ou puisque $\frac{dF}{dz}$ est nul:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} z = 0.$$

Donc pour qu'il y ait une solution singulière, il faut et il suffit que les trois équations:

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} z = 0$$

soient satisfaites en tous les points d'une courbe. Or, cela n'arrivera pas en général, et elles ne pourront être satisfaites à la fois qu'en des points isolés. Donc en général, il n'y a pas de solution singulière.

Comment cela se fait-il puisque un système de courbes a toujours une enveloppe? Pour le voir, prenons un exemple:

$$F = 4 - 9yz^2 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$(2) \qquad (x-c)^2 - y^3 = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe, différentions par rapport à c, il vient:

$$x - c = 0 \qquad \text{d'où } y = 0.$$

L'enveloppe est l'axe des x; et en effet, on a:

$$\frac{dF}{dz} = -18yz \qquad \text{d'où } y = 0.$$

Mais si $y=0$, l'équation $F=0$ donne $z=\infty$; la tangente est donc parallèle à l'axe des y. En d'autres termes, la tangente à l'enveloppe n'est pas la même que la tangente à l'enveloppée.
Voici pourquoi, les courbes (2) sont des paraboles semi-cubiques ayant pour points de rebroussement $x=c$, $y=0$. Ce qu'on trouve comme enveloppe, c'est le lieu des points de rebroussement.
Quand l'enveloppe est le lieu des points de rebroussement, le raisonnement par lequel on montre que la tangente à l'enveloppe est la même que la tangente à l'enveloppée se trouve en défaut. En effet, soit:

$$\varphi(x, y, c)=0$$

l'équation de l'enveloppée. Appelant m et m_1 les coëfficients angulaires des deux tangentes, on démontre les deux égalités

$$\frac{d\varphi}{dx}+m\frac{d\varphi}{dy}=0, \quad \frac{d\varphi}{dx}+m_1\frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Mais, si on a un point de rebroussement, alors $\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dy}=0$. Par conséquent cela ne prouve pas que $m=m_1$.
Je dis maintenant que $\frac{dF}{dz}=0$ nous donne, en général, le lieu des points de rebroussement. En effet, considérons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les courbes définies par l'équation différentielle seront les projections sur le plan des xy de courbes gauches. Pour que la courbe projetée ait un rebroussement, il faut et il suffit que la tangente à la courbe gauche soit parallèle à l'axe des z, ou que:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=0$$

Mais on a:

$$F=0, \quad z=\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dF}{dx}+z\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

d'où:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{dF}{dx}+z\frac{dF}{dy}}, \quad \frac{dy}{dz}=-\frac{z\frac{dF}{dz}}{\frac{dF}{dx}+z\frac{dF}{dy}}$$

Ainsi les équations (3) se réduisent à:

$$\frac{dF}{dz}=0.$$

qui nous donne ainsi le lieu des points de rebroussement.
Quel est le lieu des points d'inflexion? Pour un point d'inflexion, il faut que: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=0.$

Mais:
$$\frac{dF}{dx}+z\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0$$
Il reste donc:
$$\frac{dF}{dx}+z\frac{dF}{dy}=0$$
qui nous donne le lieu cherché.

En conséquence, pour qu'il y ait une Solution Singulière, il faut et il suffit qu'en cherchant le lieu des points de rebroussement et le lieu des points d'inflexion, on trouve la même courbe.

Equations du 1er ordre. — 1er exemple, Soit:
$$y=xf(z)+\varphi(z) \qquad z=\frac{dy}{dx}.$$
Différentions, il vient:
$$z=f(z)+\frac{dz}{dx}\left[xf'(z)+\varphi'(z)\right]$$
d'où:
$$\frac{dx}{dz}=x\frac{f'(z)}{z-f(z)}+\frac{\varphi'(z)}{z-f(z)}$$
Si l'on regarde x comme la fonction inconnue et z comme la variable, cette équation est linéaire et peut s'intégrer par deux quadratures.

Soit par exemple à trouver les trajectoires orthogonales d'un système de droites. L'équation différentielle sera de la forme:
$$y=-\frac{x}{z}+\varphi(z)$$
On en tire:
$$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z(1+z^2)}+\frac{z\varphi'(z)}{1+z^2}$$
L'équation sans second membre:
$$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z(1+z^2)}$$
s'intègre immédiatement; on trouve:
$$x=\frac{cz}{\sqrt{1+z^2}},$$
d'où, pour l'équation à second membre:
$$x=\frac{cz}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\int\frac{\varphi'(z)\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$
On n'a donc qu'une quadrature à effectuer. On ne doit pas s'en étonner, car les trajectoires orthogonales d'un système de droites sont les développantes de l'enveloppe de ce Système; on en a les équations quand on connait l'arc de l'enveloppe qui s'obtient par une seule quadrature.

2ᵉ exemple_ Soit:

$$M\,dx + N\,dy + R\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

M et N sont homogènes et de degré m; R est homogène et de degré $p \gtrless m$.

Intégrons d'abord l'équation:

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

Cette équation est homogène et peut s'intégrer; on trouvera:

$$\varphi(x,y) = C$$

$\varphi(x,y)$ étant homogène et de degré q; les facteurs intégrants seront alors de la forme générale:

$$\mu = \frac{\text{fonct. arb. de } \varphi}{Mx + Ny} = \frac{F(\varphi)}{Mx + Ny}.$$

De même, les facteurs intégrants de l'équation:

$$R\,(x\,dy - y\,dx)$$

seront de la forme:

$$\mu_1 = \frac{1}{R}\, f\left(\frac{y}{x}\right)$$

f étant une fonction arbitraire de $\frac{y}{x}$. Il faut que $\mu = \mu_1$. Or, μ_1 est homogène de degré $-p$; il doit en être de même de μ, ce qui ne peut avoir lieu que si:

$$F(\varphi) = \varphi^h,$$

h étant convenablement choisi. Or μ sera homogène de degré $hq - m - 1$, d'où: $hq = m - 1 - p$ $\quad h = \frac{m+1-p}{q}$.

Alors: $\frac{\varphi^h}{Mx + Ny}$ sera un facteur intégrant pour l'équation:

$$M\,dx + N\,dy + R\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Exemple: Soit:

$$(x^4 + y^4)\,dx - xy^3\,dy + x\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Intégrons d'abord:

$$(x^4 + y^4)\,dx - xy^3\,dy = 0.$$

Pour cela, posons: $y = tx$, d'où:

$$(1 + t^4)\,dx - t^3(t\,dx + x\,dt) = 0.$$

$$dx = t^3 x\,dt$$

d'où:

$$x = c\,e^{\frac{t^4}{4}}.$$

d'où l'intégrale générale:

$$\varphi = x\,e^{-\frac{y^4}{4x^4}} = c.$$

y est homogène et de degré 1.
Comme on a $m=4$, $p=1$, $q=1$,
on aura: $h=4$.
D'autre part:

$$Mx+Ny=x^5$$

et le facteur intégrant cherché est:

$$\frac{1}{x}e^{-\frac{y^4}{x^4}}$$

Equations linéaires.

1er exemple.– Soit:

$$A_m\frac{d^my}{dx^m}+A_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots\dots+A_1\frac{dy}{dx}+A_0y=e^{\lambda x}$$

Nous poserons pour abréger:

$$A_m\frac{d^mu}{dx^m}+A_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\dots+A_0u=\Delta u$$

$$A_m\alpha^m+A_{m-1}\alpha^{m-1}+\dots\dots+A_0=F(\alpha)$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est:

$$y=C_1e^{\alpha_1x}+C_2e^{\alpha_2x}+\dots\dots+C_ne^{\alpha_nx},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ étant les racines de l'équation $F(\alpha)=0$.
Il faut chercher une intégrale particulière de l'équation à second membre. Pour cela, substituons $e^{\lambda x}$, nous trouverons:

$$\Delta e^{\lambda x}=e^{\lambda x}F(\lambda)$$

et en différentiant par rapport à λ:

$$\Delta(xe^{\lambda x})=xe^{\lambda x}F(\lambda)+e^{\lambda x}F'(\lambda)$$

Posons:

$$y=Be^{\lambda x}$$

l'équation devient:

$$Be^{\lambda x}F(\lambda)=e^{\lambda x}$$

d'où:

$$B=\frac{1}{F(\lambda)},$$

ce qui est possible si $F(\lambda)$ n'est pas nul. Si $F(\lambda)$ est nul, nous poserons:

$$y=Bxe^{\lambda x},$$

l'équation devient:

$$Bxe^{\lambda x}F(\lambda)+Be^{\lambda x}F'(\lambda)=e^{\lambda x}$$

Mais $F(\lambda)$ est nul; il reste:

$$Be^{\lambda x}F'(\lambda)=e^{\lambda x}$$

d'où:

$$B = \frac{1}{F'(\lambda)}$$

si $F'(\lambda)$ était encore nul, on poserait:

$$y = Bx^2 e^{\lambda x}$$

et ainsi de suite.

2e Exemple_ soit:

$$\Delta y = x e^{\lambda x}$$

Nous poserons:

$$y = Ax e^{\lambda x} + B e^{\lambda x}$$

d'où:

$$Axe^{\lambda x} F(\lambda) + Ae^{\lambda x} F'(\lambda) + Be^{\lambda x} F(\lambda) = xe^{\lambda x}$$

d'où:

$$A = \frac{1}{F(\lambda)}, \quad B = -\frac{F'(\lambda)}{F^2(\lambda)}$$

3e Exemple.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{-x}$$

Posons:

$$y = z e^{-x}$$

l'équation devient:

$$e^{-x} \frac{d^3z}{dx^3} = x^2 e^{-x}.$$

d'où:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = x^2$$

$$z = A + Bx + Cx^2 + \frac{x^5}{60}$$

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x} + \frac{x^5}{60}e^{-x}$$

A, B, C constantes arbitraires.