

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LE

CALCUL DES PROBABILITÉS

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
40408 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LE

CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

R. de MONTESSUS,

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,
LAURÉAT DE L'INSTITUT.

PHILOSOPHIE DU HASARD. — PRINCIPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

JEUX DE HASARD. — JEUX SAVANTS. — LA SPÉCULATION.

PROBABILITÉ GÉOMÉTRIQUE. — PROBABILITÉ DES CAUSES. — TIR DES ARMES À FEU.

LES ASSURANCES. — LES SCIENCES MORALES ET ÉCONOMIQUES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1908

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

AVANT-PROPOS

Ces leçons ont pour but d'initier les curieux de choses savantes à l'étude du Calcul des Probabilités et de leurs applications.

Elles ne prétendent point épuiser le sujet, mais simplement permettre l'étude des grands Ouvrages.

Parmi ces Ouvrages, j'ai indiqué, à la fin de chaque Chapitre, ceux dont la lecture me paraît pouvoir conduire le plus rapidement au delà de ces leçons.

On trouvera la liste des principaux Mémoires originaux concernant le Calcul des Probabilités dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*.

J'ai donc touché à tout, et plutôt légèrement, cherchant surtout la clarté, me bornant le plus souvent à refondre les Ouvrages des nombreux auteurs qui ont écrit sur le sujet, énonçant parfois les résultats sans les démontrer.

Çà et là, cependant, j'ai développé quelques aperçus personnels, dont la plupart ont fait l'objet d'études spéciales, publiées soit dans les revues mathématiques, soit dans les revues de Philosophie.

Car le Calcul des Probabilités touche par ses bases à la Philosophie pure, comme chacune des branches des Mathématiques.

Le mathématicien, philosophe à ses heures, définit, conformément au sens commun, le hasard et la probabilité; et

par les moyens qui lui sont propres, il étudie la probabilité, ce que ne saurait faire le philosophe.

Celui-ci, à son tour, partira des résultats acquis par le mathématicien pour édifier une théorie logique du hasard....

Ainsi s'entraident, et sans allusion de ma part à l'allégorie de l'aveugle et du paralytique, les diverses catégories de penseurs qui se sont donné comme but de nous révéler l'âme humaine et en elle-même et dans ses relations avec le monde extérieur.

R. DE MONTESSUS.



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LE

CALCUL DES PROBABILITÉS.

INTRODUCTION.

DÉFINITION LOGIQUE DU HASARD (1).

1. J'ai donné, au Congrès de Philosophie de Genève de 1904, une définition du hasard qui me paraît à la fois logique et nouvelle.

Une théorie du hasard, très en faveur autrefois, mais désuète aujourd'hui, veut que le hasard ne soit qu'un mot dû à notre ignorance. Elle se trouve en germe dans les écrits de Laplace. Elle confère au hasard un caractère purement subjectif, elle le nie : c'est, pourrait-on dire, une théorie facile du sujet.

Une autre théorie, qui a trouvé son expression la plus nette dans les écrits de Renouvier, fait dériver le hasard de l'intervention des *Commencements absolus* dans la chaîne des événements autrement soumis au déterminisme. Cette théorie est en contradiction absolue avec celle de Cournot, qui a voulu concilier le hasard et le déterminisme.

A mon sens, ces théories, comme la plupart des théories philosophiques anciennes, ont le tort de s'appuyer sur des idées générales *a priori*, plutôt que sur des faits.

Les faits que nous ne pouvons rattacher par voie de causalité à d'autres faits bien définis éveillent en nous le sentiment du

(1) Voir divers articles de M. R. DE MONTESSUS : *II^e Congrès international de Philosophie*, Genève, 1904, p. 688 (et, à ce propos, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. IV, fasc. 1, p. 1, Paris, 1906, et *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1905, p. 109). — *Revue de Lille*, 1906. — *Revue du Mois*, 1907.

hasard. Ce sentiment disparaît ou subsiste selon que certains faits apparaissent ou non comme antécédents de ceux-ci.

Voici une urne ne renfermant que des boules noires. Vais-je tirer une boule noire ou une boule blanche? dis-je à un spectateur persuadé que l'urne renferme des boules noires et des boules blanches. Je tire une boule, elle est noire; elle ne peut être que noire, et cependant le spectateur éprouve le sentiment du hasard. Ce sentiment disparaît si je lui montre que l'urne ne renferme que des boules noires. Si l'urne renferme des boules blanches et des boules noires, identiques sauf quant à la couleur, qu'un aveugle tire une boule blanche, le sentiment du hasard s'éveille encore, et ici il subsiste, quoi que je puisse faire.

Le sentiment de hasard est complexe. On l'a confondu avec d'autres sentiments, l'étonnement par exemple. On a voulu à tort le faire dériver de l'ignorance. C'est qu'on a perdu de vue ce principe, qui doit être la base de toute étude du hasard : le hasard concernant les événements, son étude doit être basée sur l'étude *expérimentale* des événements, et non sur des idées *a priori*.

Ici, comme ailleurs, la Métaphysique ne peut aller que de la réalité aux concepts, et non pas des concepts à la réalité.

Partant de ce principe, je me demanderai tout d'abord quels sont les caractères expérimentaux immédiats des événements dus au hasard; de là, je conclurai à la nature métaphysique des événements dus au hasard : je pourrai alors donner une définition logique du hasard.

I.

2. Voici une urne renfermant 100 boules blanches et 100 boules noires mélangées; sauf la couleur, ces boules sont en tout semblables. Un aveugle tire une boule, la remet, mélange les boules, tire une nouvelle boule, la remet, mélange encore les boules, et ainsi de suite.

Eh bien, c'est un fait d'expérience, le rapport du nombre total des boules tirées au nombre des boules blanches extraites de l'urne diffère d'autant moins, en général, du nombre *deux* que le nombre des tirages est plus grand. A chaque nouveau tirage, ce rapport se rapproche pour l'ordinaire du nombre *deux*, les cas où il s'en éloigne étant de beaucoup les moins nombreux.

Autrement dit, le rapport tend vers *deux* quand le nombre des tirages croît, mais il tend *irrégulièrement* vers *deux*.

J'examine la statistique de la population des 36 000 communes de France et, dans cette statistique, je considère les chiffres de dizaines. Je constate ici encore que *le rapport du nombre de ces chiffres au nombre de ceux d'entre eux qui sont pairs tend vers deux à mesure que j'avance dans l'étude de la statistique*.

Je me promène à Paris, moi, provincial. Je rencontre sur le boulevard un ancien camarade de collège, provincial lui-même. Quel hasard! Puis-je me considérer comme étant dans les conditions de tout à l'heure, bien qu'ayant en vue un seul événement et non pas une collection d'événements? Sans doute, et je m'explique.

Deux personnes habitent la même maison et traversent l'une et l'autre un grand nombre de fois chaque jour la même pièce.

C'est un fait d'expérience que sur 1 an, 2 ans d'observation, le rapport du nombre des traversées au nombre des rencontres non préméditées tend vers une limite, irrégulièrement d'ailleurs.

Si deux individus habitent la même commune, mais en dehors du bourg, le rapport du nombre de leurs voyages au bourg au nombre de leurs rencontres non préméditées au bourg tendra aussi vers une limite, irrégulièrement encore, pourvu qu'un nombre d'années assez grand entre en jeu.

Si le chiffre de la vie moyenne ne suffisait pas à vérifier la loi, l'examen du nombre de rencontres mutuelles de 100 individus habitant la commune, ayant à peu près la même condition sociale, allant fréquemment au bourg, la justifierait.

Ainsi, dans ces suites d'événements, certain rapport tend irrégulièrement vers certaine limite. Cette limite était de 2 ans dans les deux premiers exemples. Si l'urne avait renfermé 10 000 boules blanches, 10 000 boules rouges et 10 000 noires, le rapport du nombre total des boules tirées au nombre des boules blanches extraites de l'urne eût tendu irrégulièrement vers le nombre *trois*.

Si l'on regarde les tirages comme constituant une *classe* d'événements, et l'arrivée de boules blanches, noires, rouges, comme constituant des *catégories* d'événements, on constate ainsi que le

rapport du nombre total d'événements de la *classe* (nombre des boules tirées) au nombre d'événements de l'une des *catégories* (nombre de boules blanches extraites de l'urne) tend irrégulièrement vers une limite. De même pour la statistique des populations, où la classe des chiffres comprendra la catégorie des chiffres pairs et la catégorie des chiffres impairs, de même encore pour les rencontres non préméditées des deux amis, la catégorie des rencontres et la catégorie des non-rencontres formant ensemble une classe.

3. Le fait d'expérience en question s'énoncera :

Certains événements ayant un caractère commun et, pour cette raison, constituant une classe, mais différant à certains points de vue, ce qui permet de les partager en catégories bien définies, donnent lieu à cette remarque que le rapport du nombre total d'événements de l'une des catégories tend irrégulièrement vers une limite déterminée quand le nombre d'événements considérés devient de plus en plus grand.

De tels événements, considérés comme définis par leur classe et leur catégorie, sont dits procéder du *hasard*.

Ces événements éveillent en nous le sentiment de hasard, et rien ne peut faire disparaître le sentiment de hasard qu'ils éveillent en nous : c'est un fait d'expérience.

C'est un fait d'expérience aussi que tout événement éveillant en nous le sentiment de hasard donne lieu à la remarque en question s'il ne peut être rattaché par voie de causalité à quelque fait bien défini.

Nous voici donc en possession des caractères expérimentaux immédiats, des événements dus au hasard.

II.

4. Je vais me poser ici deux questions :

Pourquoi le rapport du nombre d'événements de la classe au nombre d'événements de la catégorie tend-il vers une limite? Pourquoi tend-il irrégulièrement vers la limite?

Je conclurai de là à la nature métaphysique des événements dus au hasard.

Revenons à l'urne où sont en nombre égal les boules blanches et les boules noires et où, après chaque tirage, on remet la boule tirée. La question de la couleur n'est rien à l'aveugle qui tire les boules; blanche ou noire, c'est tout un pour lui. Il n'y a donc aucune relation entre les causes qui font tomber sur telle ou telle boule la main de l'aveugle et la couleur de cette boule.

Pour les chiffres de la colonne des dizaines des populations des communes de France, il n'y a aucune relation entre la place qu'occupe telle commune dans la statistique et la question de parité ou de non-parité du chiffre des dizaines de sa population.

Semblablement aussi pour la question des rencontres : la rencontre est non préméditée, c'est entendu; elle n'a rien à voir avec le motif ayant déterminé le voyage.

Ici et là, nous sommes en présence de classes de phénomènes, boules blanches et noires, chiffres pairs et impairs, rencontres ou non-rencontres, divisées en catégories : catégorie de boules blanches et catégorie de boules noires, catégorie de chiffres pairs ou impairs, catégorie des rencontres et catégorie des non-rencontres.

Ici et là, les causes rangeant tel événement dans telle catégorie, geste de l'aveugle, question d'ordre, motif propre du voyage, sont sans relations aucunes avec les caractères distinctifs de cette catégorie.

C'est en vertu de l'absence de telles relations que le rapport du nombre total d'événements de la classe au nombre d'événements de l'une des catégories tend vers une limite déterminée et que réciproquement, si le même rapport tend vers une limite déterminée, il y a absence de telles relations. Je n'énonce pas un aphorisme, je fais une constatation. Je sais en effet, par expérience, que deux cas seulement peuvent se présenter : ou bien le rapport tend vers une limite déterminée, ou bien il a une valeur immuable. Et ce second cas est toujours l'indice assuré d'une relation bien définie entre les causes rangeant tel événement dans telle catégorie et les caractères distinctifs de cette catégorie.

Constatation encore en ce qui concerne la seconde question : pourquoi le rapport du nombre total d'événements de certaines

classes au nombre d'événements de l'une des catégories tend-il irrégulièrement vers la limite?

Parce que l'ordre d'apparition des événements n'a pas d'influence immédiate sur le genre de leurs catégories.

L'aveugle a tiré un certain nombre de boules blanches et un certain nombre de boules noires de l'urne et, aussitôt tirées, les a remises dans l'urne : le rapport du nombre total des boules tirées au nombre des boules blanches extraites de l'urne est sans influence immédiate sur le tirage suivant.

Je calcule, pour la population des mille premières communes de France, le rapport du nombre 1000 au nombre des chiffres pairs de la colonne des dizaines : ce rapport n'a aucune influence immédiate sur la population de la commune qui vient au rang 1001 de la statistique.

Semblablement pour les rencontres : les rencontres effectuées sont, *sauf préméditation*, sans influence sur les rencontres à venir.

Dans aucun des cas étudiés, il n'existe donc de relation immédiate entre les rapports successifs du nombre d'événements de la classe au nombre d'événements de telle ou telle catégorie de la classe.

Ainsi, d'une part, dans les événements dus au hasard, l'ordre d'apparition des événements d'une même classe n'a aucune influence immédiate sur le genre de leurs catégories, et, d'autre part, il n'y a aucune relation entre les caractères distinctifs de la catégorie et les causes déterminantes de la catégorie.

III.

5. Le signe distinctif immédiat d'événements dus au hasard est que : *de tels événements étant partagés en classes et ces classes en catégories, le rapport du nombre total d'événements de la classe au nombre total d'événements de l'une quelconque des catégories tend irrégulièrement vers une limite déterminée, quand le nombre d'événements considéré devient de plus en plus grand.*

J'ai choisi à dessein l'exemple typique de la statistique de la population des communes de France.

6. M. Lechallas me demande (1) si, à mon sens, les chiffres 314159265, du nombre π , se succèdent au hasard ?

Je n'en sais rien. Ils ont le caractère de chiffres se succédant au hasard, M. Lechallas l'a montré, mais il se peut que ce caractère ne réponde pas à la réalité. Il se peut qu'il existe une loi faisant dépendre chaque chiffre du précédent ou des précédents.

A propos de faits *déterminés*, il sera donc des cas où l'on pourra *affirmer* le hasard (statistique des communes) ou seulement le *supposer* (chiffres du nombre π). Mais il nous suffit pour définir le hasard *en soi*, comme je vais le faire, de savoir qu'il existe des cas où le signe *distinctif* immédiat ou nécessaire du hasard correspond à ce sentiment de hasard que tous nous connaissons et à un sentiment de hasard que rien ne peut faire disparaître.

Je reviens au signe distinctif *immédiat* indiqué plus haut, signe distinctif qui caractérise le hasard, signe qui d'ailleurs n'est pas absolu.

La raison d'être d'un tel caractère est que, dans les événements dus au hasard, il n'y a aucune relation bien définie entre les caractères distinctifs de la catégorie et la cause déterminant la catégorie; aucun lien bien défini, non plus, entre les caractères distinctifs des catégories et l'ordre d'apparition des événements.

Et c'est ici le lieu de nous demander : *Qu'est-ce que le hasard ?*

La réponse est prévue :

Étant donné que certains événements ont un caractère commun et, pour cette raison, constituent une classe, mais diffèrent à certains points de vue, ce qui permet de les ranger en catégories bien définies, le hasard consiste dans l'absence de relations bien définies entre les causes rangeant tel événement de telle classe dans telle catégorie et les caractères distinctifs de cette catégorie.

7. Le **Calcul des Probabilités** a pour objet l'étude de la *fréquence relative* des événements dont l'arrivée dépend du hasard.

Le *Calcul des Probabilités*, tel que nous l'exposons ici, ne

(1) *Revue de Métaphysique et de Morale (loc. cit.)*.

nécessite pas des connaissances mathématiques très étendues. Sauf quelques points, en très petit nombre, les Mathématiques spéciales suffisent au lecteur. A supposer même qu'il connaisse seulement les Mathématiques élémentaires, le rappel que nous allons faire de certaines notions suppléeront à son défaut d'érudition. Il n'aura plus qu'à *admettre* çà et là quelques résultats.

A consulter : *Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1902 et janvier 1906.



RAPPEL DE NOTIONS GÉNÉRALES.

I. — ANALYSE COMBINATOIRE.

8. Arrangements, permutations simples, combinaisons. —

1° Soient m objets a, b, c, \dots, l , différents les uns des autres. Considérons l'ensemble des groupes formés avec p quelconques de ces objets, chaque objet figurant une fois seulement dans chaque groupe.

Ces groupes, qui peuvent différer entre eux soit par la nature, soit par l'ordre des objets (ainsi trois objets a, b, c donnent lieu aux groupes deux à deux ab, ba, ac, ca, bc, cb), s'appellent *arrangements* p à p des m objets.

Le nombre A_m^p des arrangements de m objets p à p est donné par la formule

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+2)(m-p+1).$$

2° Les arrangements de m objets m à m s'appellent *permutations* (permutations de trois objets a, b, c : $abc, acb, cba, cab, bca, bac$).

Le nombre P_m des permutations de m objets est donné par la formule

$$P_m = m(m-1)\dots 3.2.1.$$

Nota. — On écrit souvent

$$1.2.3\dots(m-1)m = m! \quad (\text{on remplace } 0! \text{ par } 1);$$

dans ces conditions

$$P_m = m!.$$

3° Les groupes formés avec m objets p à p , *abstraction faite de l'ordre de leurs lettres* (par exemple ab, ac, cb , où ba est éliminé comme identique à ab , de même ca, cb comme respectivement identiques à ac, bc), s'appellent *combinaisons* de m ob-

jets p à p . Ces combinaisons sont en nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{p!} = \frac{m!}{p!(m-p)!}.$$

9. Si, dans les arrangements, permutations, combinaisons, les mêmes lettres peuvent figurer plusieurs fois (exemple : aa , ab , ba , bb , ...), les groupes considérés prennent respectivement les noms d'*arrangements avec répétition*, *permutations avec répétition*, *combinaisons avec répétition*.

Les nombres $A_m^{p'}$ d'arrangements avec répétition, $P_m^{p'}$ de permutations avec répétition, $C_m^{p'}$ de combinaisons avec répétition, sont

$$A_m^{p'} = m^{p'}, \quad P_m^{p'} = m^m,$$

$$C_m^{p'} = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!p!}.$$

II. — ÉVALUATION APPROXIMÉE DE $m!$.

10. Nous rencontrerons souvent le produit des m premiers nombres entiers. On peut soit le calculer directement (cela devient impraticable dès que m dépasse 10), soit l'évaluer au moyen des Tables de la fonction Γ [$\Gamma(m+1) = m!$ pour m entier], soit se baser sur la double inégalité

$$\sqrt{2\pi m} m^m e^{-m} < m! < \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m + \frac{1}{12m}},$$

où $\pi = 3,14159\dots$ désigne le rapport de la circonférence à son diamètre, $e = 2,718\dots$ représente la base des logarithmes népériens.

Cette double inégalité permet d'écrire :

$$m! \equiv (\text{égale approximativement}) \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m},$$

$$m! = M \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m},$$

M tendant vers 1 quand m croît indéfiniment ;

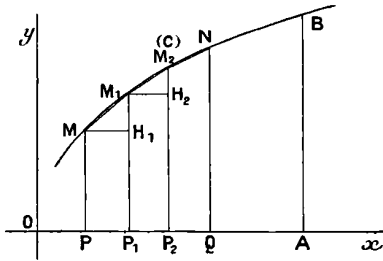
$$m! \sim (\text{tend vers}) \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m},$$

quand m croît indéfiniment.

III. — INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES.

11. Considérons une courbe (C) et deux axes rectangulaires Ox , Oy tracés dans son plan. Entre l'abscisse $OA = x$ et l'or-

Fig. 1.



donnée $AB = y$ d'un point quelconque B de la courbe existe une relation

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad F(x, y) = 0,$$

qui est l'équation de la courbe. Par exemple, si Ox est l'axe d'une parabole et si Oy est la tangente au sommet de cette courbe, la relation est $y^2 = 2px$, où $\frac{p}{2}$ est la distance du sommet au foyer.

Ayant divisé PQ en un certain nombre de parties égales PP_1 , P_1P_2 , ..., et mené les ordonnées P_1M_1 , P_2M_2 , ..., l'aire $MNPQ$ est la limite de la somme des trapèzes PMM_1P_1 , $P_1M_1M_2P_2$, P_2M_2NQ quand le nombre des points de division P_1 , P_2 , ... croît indéfiniment.

Si $PP_1 = P_1P_2 = \dots = \Delta x$, la somme de ces trapèzes a pour expression

$$(PMH_1P_1 + P_1M_1H_2P_2 + \dots) + (MM_1H_1 + M_1M_2H_2 + \dots),$$

ou

$$(PM \times PP_1 + P_1M_1 \times P_1P_2 + \dots) + (MM_1H_1 + M_1M_2H_2 + \dots),$$

ou

$$(PM + P_1M_1 + \dots) \Delta x + (MM_1H_1 + M_1M_2H_2 + \dots);$$

ce qu'on écrit

$$\sum_{x=OP_n}^{x=OP} y \Delta x + (MM_1H_1 + M_1M_2H_2 + \dots)$$

ou simplement

$$\sum_{OP_n}^{OP} y \Delta x + (MM_1H_1 + M_1M_2H_2 + \dots).$$

Quand le nombre des divisions de PQ croît indéfiniment, la somme des triangles $MM_1H_1, M_1M_2H_2, \dots$ tend vers zéro, OP_n

tend vers OQ, et la somme des trapèzes $\sum_{OP_n}^{OP} y \Delta x$ tend vers une limite qu'on écrit

$$\int_{OP}^{OQ} y dx \quad \text{ou} \quad \int_{OP}^{OQ} f(x) dx \quad [y = f(x)]$$

et que les règles du Calcul intégral permettent de calculer.

Cette limite est une *intégrale définie simple*.

Dans le cas de la parabole ($y^2 = 2px$),

$$\int_{OP}^{OQ} \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} OQ^3 - \frac{2}{3} \sqrt{2p} OP^3.$$

IV. — INTÉGRALES INDÉFINIES.

12. L'aire PMBA (OA = x) a pour expression

$$\int_{OP}^x f(x) dx;$$

c'est une fonction $\varphi(x)$ de x qu'on appelle l'*intégrale indéfinie* de $f(x)$.

A son tour, $f(x)$ est la *dérivée* de $\varphi(x)$. On démontre que $f(x)$ est la limite du rapport

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers zéro.

On peut toujours calculer une fonction dérivée. On ne peut pas toujours calculer une fonction intégrale. Quand on ne peut pas calculer la fonction intégrale $F(x)$ de $f(x)$, on écrit

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

et l'on calcule les valeurs de $F(x)$ pour

$$x = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad \text{ou} \quad x = 1; x = 1, 1; x = 1, 2, \dots$$

Par exemple, l'intégrale indéfinie de $y = \sqrt{2px}$ a pour expression

$$\int_a^x \sqrt{2px} = \sqrt{2px^3} + \sqrt{2pa^3};$$

au contraire, on ne connaît pas l'intégrale indéfinie $\Theta(u)$ de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t} dt$ (ou $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} dx$, ce qui est la même chose); on y supplée alors par la Table numérique de la page 44, que des procédés particuliers permettent de construire.

Note. — L'intégrale indéfinie $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ s'appelle aussi *fonction primitive* de $f(x)$.

V. — DÉRIVÉES.

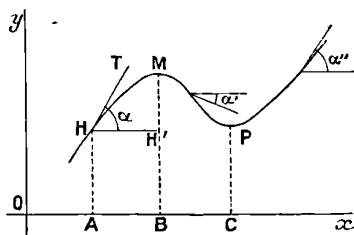
13. Nous avons dit ce qu'on doit entendre par dérivée d'une fonction $f(x)$. Considérons la courbe $y = f(x)$ et un point H, d'abscisse $OA = a$, de la courbe.

14. On démontre que la valeur de la dérivée $f'(x)$ pour $x = a$ est $\tan \alpha$, α étant l'angle de la parallèle HH' à Ox avec la tangente HT à la courbe :

$$\tan \alpha = f'(a).$$

La figure montre qu'en M, où $x = b$, la fonction y [ou $f(x)$]

Fig. 2.



passé par un *maximum*, et en P, où $x = c$, la fonction y passe par un *minimum*; de H à M, c'est-à-dire quand x varie de $OA = a$

à $OB = b$, la fonction y croît et sa dérivée $\text{tang } \alpha$ est positive; de M à P , c'est-à-dire quand x varie de $OB = b$ à $OC = c$, la fonction y décroît et sa dérivée $\text{tang } \alpha'$ est négative; au delà de P , la dérivée $\text{tang } \alpha''$ redevient positive. En M et P , la dérivée s'annule.

Le signe de la dérivée indique donc si la fonction croît ou décroît, passe par un *maximum* ou un *minimum* :

Si la dérivée est positive, la fonction croît;

Si la dérivée est négative, la fonction décroît;

Si la dérivée s'annule et change de signe pour $x = h$, la fonction présente un maximum ou un minimum pour $x = h$;

C'est un maximum (exemple $x = OB = b$) si la dérivée est positive pour $x < h$ et négative pour $x > h$;

C'est un minimum (exemple $x = OC = c$) si la dérivée est négative pour $x < h$ et positive pour $x > h$;

Si la dérivée s'annule sans changer de signe pour $x = h$, il n'y a ni maximum ni minimum au point d'abscisse h .

A consulter : E. PRUVOST et D. PIÉRON, *Leçon d'algèbre*. Paris, P. Dupont, 1893.



CHAPITRE I.

PRINCIPES ET DÉFINITIONS.

15. Le *Calcul des Probabilités* est d'origine toute moderne.

Le plus ancien exemple connu de l'emploi de la notion de *probabilité* dans un problème déterminé se trouve dans un commentaire de la *Divine Comédie* de *Dante Alighieri*, imprimé à Venise, en 1477. *Pascal*, puis *Fermat*, au xvii^e siècle, se sont posé quelques questions concernant la théorie des jeux, questions qui trouvent leur place dans le *Calcul des Probabilités*. Nous citerons ensuite *Jacques Bernoulli* et son Livre célèbre : *Ars conjectandi*, imprimé après sa mort en 1713. Nous parlerons dans la suite des Ouvrages modernes.

I. — DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ MATHÉMATIQUE. PROBLÈMES SIMPLES.

16. **Loi de Bernoulli.** — J'ai en main un jeu de 32 cartes. Je tire au hasard une carte. Je répète un grand nombre de fois l'opération. *Quand il sort un roi*, je le note. Quand la carte tirée n'est pas un roi, je ne note rien : les rois seuls m'intéressent.

Après 1000, 10 000 exercices de ce genre, *je constate* que le rapport du nombre des rois au nombre des expériences est à très peu près $\frac{1}{8}$ et que ce rapport se rapproche d'autant plus de $\frac{1}{8}$ que le nombre d'expériences est plus grand. Chacun peut le vérifier.

Je ne dis pas que j'aurai tiré environ 12 rois dans les 100 premiers coups, 125 dans les 1000 premiers coups, et que le nombre des rois diffère de moins en moins de la huitième partie du nombre des expériences, non. Je dis que *le rapport de l'un des nombres à l'autre tend vers $\frac{1}{8}$* , et cela est bien différent.

(1) 125, 1250, 12500, 125000,

sont les $\frac{1}{8}$ de

1000, 10000, 100000, 1000000. .. ;

les nombres

124, 1248, 12497, 124996, ...

s'éloignent *progressivement* des nombres (1) : cependant les rapports

$$\frac{124}{1000}, \quad \frac{1248}{10000}, \quad \frac{12497}{100000}, \quad \frac{124996}{1000000}, \quad \dots$$

se rapprochent progressivement de $\frac{1}{8}$.

En général, et sur un grand nombre d'épreuves, *le rapport du nombre d'arrivées d'un événement au nombre d'épreuves tend*, à mesure que croît le nombre d'épreuves, *vers le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.*

C'est le cas ici. Le nombre des rois (cas favorables) est 4 ; le nombre des cartes (cas possibles) est 32. Le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles est $\frac{4}{32}$ ou $\frac{1}{8}$. J'ajoute que les cas possibles doivent être *également possibles*. Cette restriction est nécessaire : nous le verrons bientôt.

La proposition que je viens d'énoncer est connue sous le nom de *loi de Bernoulli*. Elle est *purement expérimentale* ; non pas qu'on en ait poussé très loin la vérification (*Gauss* a cependant compté le nombre d'as que le sort lui attribuait dans ses quotidiennes parties de whist), mais plutôt que ses conséquences en font une *loi vérifiée à chaque instant*. Telles sont les lois de la *Mécanique rationnelle*.

Sur cette loi, *une fois admise*, sont fondés la définition de la *Probabilité mathématique* et le *Calcul des Probabilités* tout entier.

J'ajoute que, *comme il est naturel*, la loi de Bernoulli devient une conséquence de la définition de la Probabilité mathématique et qu'on peut la démontrer en partant de cette définition. Nous le ferons plus loin.

17. On peut, dans une certaine mesure, justifier *a priori* la loi de Bernoulli.

Je prends une Table statistique, la population des communes de France, par exemple, et dans cette Table la colonne des dizaines.

Il est aisé de constater que, dans cette colonne, le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre total des chiffres tend vers $\frac{1}{2}$. On peut dire qu'il n'y a pas de raison pour qu'il en soit autrement, qu'il sortira évidemment à peu près autant de chiffres pairs que de chiffres impairs, mais mieux vaut regarder le fait comme expérimental. *Le principe de raison suffisante ne saurait être ici une base sûre*, car nous ne connaissons rien des ultimes lois du monde physique. Nous ne savons même pas s'il existe de telles lois.

Ainsi nous admettrons que dans le cas de deux événements contraires, *également possibles* (chiffre pair, chiffre impair), le rapport du nombre d'arrivées de l'un des deux événements au nombre d'épreuves tend vers $\frac{1}{2}$ ou, ce qui est la même chose, que le rapport du nombre d'arrivées de l'un des deux événements au nombre d'arrivées de l'autre événement tend vers *un*.

De là, nous allons déduire la loi de Bernoulli.

Considérons, en effet, des événements *contradictaires* (l'un excluant les autres), E_1, E_2, E_3 , tels qu'il n'y ait pas de raison pour que l'un se produise plutôt que l'autre. Faisant abstraction des événements E_3 , qui n'influent pas sur les événements E_2 , je sais, d'après le cas particulier déjà étudié, que la différence entre l'unité et le rapport du nombre des arrivées des événements E_2 au nombre des arrivées des événements E_1 tend vers zéro. De même, la différence entre l'unité et le rapport du nombre des événements E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro. Donc, la différence entre 2 fois l'unité et le rapport du nombre des événements E_2 et E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro, et la différence entre 3 fois l'unité et le rapport du nombre total des événements au nombre d'arrivées de l'événement E_1 tend vers zéro. Autrement dit, si les nombres d'arrivées des événements E_1, E_2, E_3 sont respectivement l_1, l_2, l_3 , de ce que $1 - \frac{l_2}{l_1}, 1 - \frac{l_3}{l_1}$ tend vers zéro, je conclus que $2 - \frac{l_2 + l_3}{l_1}$ ou $3 - \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1}$ tend aussi vers zéro et enfin que $\frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3}$ tend vers $\frac{1}{3}$: *le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total des événements tend vers $\frac{1}{3}$.*

Nous sommes donc fondé à dire : *Si des événements contradictoires E_1, E_2, \dots, E_n sont en présence, et s'il n'y a pas de raison pour que l'un se produise plus souvent que les autres (les chiffres 0, 1, ..., q de la statistique par exemple), le rapport, dans un nombre donné d'épreuves, du nombre d'arrivées de l'un quelconque d'entre eux au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction $\frac{1}{n}$ que le nombre d'épreuves sera plus considérable.*

Dernière extension logique qu'on démontrerait tout semblablement : *Étant donnés des événements contradictoires E_1, E_2, \dots, E_n , si les événements E_1 peuvent être partagés en classes $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}$ contradictoires et ayant égale chance de se produire, si les événements E_2 peuvent, à leur tour, être partagés en classes $E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2q}$ contradictoires aussi et ayant égales chances encore de se produire et ainsi des autres, les événements E_n se partageant en classes $E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{ns}$ de même nature, si, de plus, les événements partiels $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2q}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{ns}$, qui sont contradictoires, ont égale chance de se produire, le rapport, dans un nombre donné d'épreuves, du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction $\frac{p}{p+q+\dots+s}$ que le nombre des épreuves sera plus grand, et ainsi des autres événements E_2, E_3, \dots , pour lesquels il faudra considérer les rapports $\frac{q}{p+q+\dots+s}, \dots, \frac{n}{p+q+\dots+s}$: c'est la loi de Bernoulli dans toute sa généralité.*

18. Définition de la probabilité mathématique. — On exprime le fait d'expérience révélé par la *loi de Bernoulli* en définissant la *probabilité mathématique* comme le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, étant admis que les cas envisagés sont tous également possibles.

Ce mot *probabilité* indique seulement que, sur un grand nombre d'épreuves, le rapport du nombre d'arrivées d'un événement au nombre d'expériences tendra précisément vers le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles : et rien de plus.

Calculer une probabilité mathématique, c'est donc simplement chercher le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.

19. Problème. — *Probabilité, en jetant deux dés, d'amener un point donné.*

(T)	{	1 et 1 = 2	2 et 1 = 3	3 et 1 = 4	4 et 1 = 5	5 et 1 = 6	6 et 1 = 7
		1 et 2 = 3	2 et 2 = 4	3 et 2 = 5	4 et 2 = 6	5 et 2 = 7	6 et 2 = 8
		1 et 3 = 4	2 et 3 = 5	3 et 3 = 6	4 et 3 = 7	5 et 3 = 8	6 et 3 = 9
		1 et 4 = 5	2 et 4 = 6	3 et 4 = 7	4 et 4 = 8	5 et 4 = 9	6 et 4 = 10
		1 et 5 = 6	2 et 5 = 7	3 et 5 = 8	4 et 5 = 9	5 et 5 = 10	6 et 5 = 11
		1 et 6 = 7	2 et 6 = 8	3 et 6 = 9	4 et 6 = 10	5 et 6 = 11	6 et 6 = 12

Le nombre des cas où l'on amène le point 2 (combinaison 1 et 1) est 1.

Le nombre des cas où l'on amène le point 3 (combinaison 1 et 2, 2 et 1) est 2, etc.

Or, les cas possibles sont au nombre de 36.

Les probabilités des points

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

sont donc respectivement (*par définition*):

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}.$$

Cette divergence dans la probabilité des divers points explique la modération apparente du tenancier d'un petit jeu que les amateurs de courses ont vu souvent pratiquer sur les hippodromes.

Dans un coin de la *pelouse*, loin de l'œil des agents (les jeux publics de hasard sont interdits en France), un individu installe une table pliante, sur laquelle figurent en deux colonnes les nombres 2, 3, 4, 5, 6 et 8, 9, 10, 11, 12; le numéro 7 étant, lui, placé au milieu.

Le *ponte* met un enjeu sur l'une des colonnes A ou B, A par exemple, et l'on jette les deux dés sur le tapis.

Si l'un des numéros de la colonne A sort, le *ponte* gagne 1 fois sa mise : on lui double la somme jouée. Si l'un des numéros de la colonne B ou le numéro 7 sort, le tenancier empêche l'enjeu déposé sur le Tableau A.

Instinctivement, le ponte se fait le raisonnement que voici : « J'ai pour moi les numéros 2, 3, 4, 5, 6, contre moi les numéros 7, 8, 9, 10, 11, 12. J'ai donc 5 chances sur 11 de gagner. Si je

Fig. 3.

②		⑧
③		⑨
④	⑦	⑩
⑤		⑪
⑥		⑫
A		B

gagne je devrais retirer les $\frac{11}{5}$ de mon enjeu, soit un peu plus du double. Mais il faut que le banquier vive et je consens une petite concession. *Un peu de chance* et je serai en gain. »

Le ponte fait un raisonnement faux. Il n'a pas 5 chances sur 11 de gagner. Il a, en effet, *pour lui* les numéros 2, 3, 4, 5, 6 qui figurent $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ fois dans le Tableau (T), tandis que le nombre des numéros pouvant sortir, des cas possibles, est 36. Il a donc seulement 15 chances de gain sur 36 ou 5 chances sur 12.

Le banquier donne 1 fois la mise. Puisque les chances du ponte sont représentées par la fraction $\frac{5}{12}$, il devrait donner la mise multipliée par $\frac{12}{5}$, soit 1 fois la mise plus les $\frac{2}{5}$ de la mise. Le ponte qui a joué 1^{fr} devrait retirer, s'il gagne, non pas 2^{fr}, mais

$$2^{\text{fr}} + \frac{2}{5} 1^{\text{fr}} = 2^{\text{fr}}, 40.$$

Quel est le gain moyen du banquier? Le ponte a 5 chances, le banquier 7; 5 de ces 7 chances *équilibrent* les 5 chances du ponte. Il reste donc 2 chances sur 12 au banquier. Sur 12 coups, le banquier en gagnera 5, le ponte en gagnera 5 aussi, le banquier en gagnera encore 2. Le banquier aura, *comme bénéfice*, 2 coups sur 12 ou 1 coup sur 6 et, si toutes les mises sont égales, il gagnera la sixième partie des mises. Une mise double, triple,

équivalant à 2, 3 mises simples, le tenancier du petit jeu gagnera, *en moyenne*, le $\frac{1}{6}$ des sommes engagées.

S'il a de la chance, il gagnera plus du $\frac{1}{6}$ des sommes engagées. *S'il a de la déveine* il gagnera moins, il perdra peut-être. Or, *l'expérience nous apprend que sur un grand nombre de coups chance et déveine se neutralisent. C'est la loi de Bernoulli.* Les gens qui jouent, tous les jours, au café, le même jeu ne savent-ils pas que, *en moyenne*, ils paient leur petite dépense quotidienne ? A la fin de la « saison », le tenancier du petit jeu aura donc réalisé un bénéfice assuré. S'il n'en était pas convaincu *par l'expérience*, il tournerait ses vues ailleurs.

Il connait, à sa manière, la loi de Bernoulli.

20. *Supposons qu'il s'agisse d'amener le point k avec n dés* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Chacun des nombres α peut recevoir 6 valeurs; donc le nombre des combinaisons possibles est celui des combinaisons avec répétitions de 6 lettres n à n , soit 6^n .

Calculons maintenant le nombre N des combinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ où la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$$

est vérifiée; pour cela, considérons l'identité

$$\begin{aligned} \sum t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n} &= (t_1 + t_1^2 + \dots + t_1^6)(t_2 + t_2^2 + \dots + t_2^6) \dots (t_n + t_n^2 + \dots + t_n^6) \\ &= \frac{t_1 - t_1^7}{1 - t_1} \times \frac{t_2 - t_2^7}{1 - t_2} \times \dots \times \frac{t_n - t_n^7}{1 - t_n}, \end{aligned}$$

le signe \sum désignant la somme de tous les monomes obtenus en donnant aux différents nombres α les valeurs 1, 2, 3, ..., n .

Si l'on suppose

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$$

l'identité devient

$$\sum t^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \sum N t^k = \left(\frac{t - t^7}{1 - t} \right)^n = \frac{(t - t^7)^n}{(1 - t)^n} = (t - t^7)^n (1 - t)^{-n},$$

et le coefficient de t^k dans le second nombre sera le nombre N. La probabilité cherchée sera $\frac{N}{6^n}$.

Exemple. — Quelle est la probabilité d'amener le point 7 avec 3 dés ?

Le second membre a pour expression

$$(t - t^7)^3 \times (1 - t)^{-3} = (t^3 - 3t^9 + 3t^{15} - t^{21}) \left(1 + \frac{3}{1}t + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}t^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \dots \right),$$

et t^7 y a pour coefficient

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15;$$

la probabilité est donc

$$\frac{15}{6^3} = \frac{5}{7^2}.$$

21. Problème. — Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ; on tire n boules. Quelle est la probabilité pour que, dans ces n boules, se trouvent k boules de numéros donnés d'avance ?

Le nombre des cas possibles est celui $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ des combinaisons de N objets n à n .

Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons où entrent les k boules désignées. Enlevons ces boules de l'urne et à chacune des combinaisons $N - k$ boules restantes mélangeons les k boules enlevées; nous aurons ainsi les combinaisons où entrent les k boules désignées; comme il reste, après cette suppression, $N - k$ boules dans l'urne, le nombre H de ces combinaisons est celui des combinaisons $N - k$ lettres $n - k$ à $n - k$, ou

$$\frac{(N - k)!}{(N - n)!(n - k)!},$$

de sorte que la probabilité est

$$\frac{(N - k)! n!}{N! (n - k)!}.$$

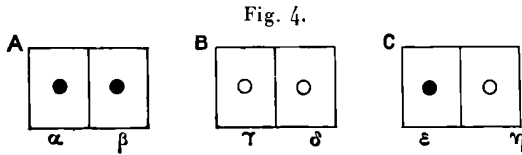
Exemple :

$$N = 10. \quad n = 4, \quad k = 2;$$

$$\frac{8! 4!}{10! 2!} = \frac{2}{15}.$$

Il faut que tous les cas envisagés soient *également probables*. Voici deux problèmes où une erreur, concernant l'égalité de probabilité, pourrait se glisser (tout comme dans le jeu dérivé du jeu de dés et usité sur les champs de courses) et entacher les résultats.

22. **Problème des trois coffrets.** — *Trois coffrets identiques A, B, C ont chacun deux tiroirs. Dans chacun des tiroirs de A est une pièce d'or, dans chacun des tiroirs de B est une pièce d'ar-*



gent, dans l'un des tiroirs de C est une pièce d'or, dans l'autre une pièce d'argent; quelle est la probabilité pour qu'en ouvrant l'un des tiroirs d'un des coffrets, on y rencontre une pièce d'or? (BERTRAND.)

Six cas sont également probables :

$$\begin{array}{ccc} A\alpha, & A\beta, & C\epsilon, \\ B\gamma, & B\delta, & C\zeta. \end{array}$$

Les trois premiers cas sont favorables. La probabilité est donc $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$

J'ouvre au hasard un des six tiroirs, j'y trouve une pièce d'or; quelle est la probabilité pour que la pièce du deuxième tiroir soit en argent ?

Trois cas sont également probables :

$$\begin{array}{ll} \text{j'ouvre } A\alpha, \text{ puis } A\beta, & \text{j'ouvre } C\epsilon, \text{ puis } C\zeta, \\ \text{» } A\beta, \text{ » } A\alpha, & \end{array}$$

et un seul cas est favorable : la probabilité est donc $\frac{1}{3}$.

Il faudrait se garder de dire : « Ou bien je suis tombé sur A, ou bien je suis tombé sur C. » Dans le premier cas, la deuxième médaille sera en or, dans le deuxième elle sera en argent; la probabilité est donc $\frac{1}{2}$.

23. **Problème sur le jeu de boules.** — *Deux joueurs également adroits, Pierre et Paul, jouent aux boules; Pierre a deux boules, A, B, à lancer, Paul une, B, et la victoire appartient à celui des deux dont l'une des boules approchera le plus près du but. Quelle est la probabilité pour que Paul gagne?*

Six cas possibles, en rangeant les boules suivant leur ordre de

distance au but O :

OABC, OACB, OBAC,
OBCA, OCAB, OCBA ;

les deux derniers sont favorables à Paul, donc la probabilité est $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$.

On raisonnerait mal en disant :

A est plus éloignée du but que C, ou bien C l'est plus que A :

de même $OA > OC$ ou $OA < OC$,
 $OB > OC$ ou $OB < OC$;

donc quatre cas possibles,

$OA > OC$ avec $OB > OC$,
 $OA < OC$ » $OB > OC$,
 $OA > OC$ » $OB < OC$,
 $OA < OC$ » $OB < OC$.

Un seul cas, le premier, étant favorable à Paul, sa chance est $\frac{1}{4}$;
or, ces cas ne sont pas également probables, car

$OA > OC$ avec $OB > OC$ correspond à deux combinaisons OCAB, OCBA,
 $OA < OC$ » $OB > OC$ » une combinaison OACB,
 $OA > OC$ » $OB < OC$ » une » OBCA,
 $OA < OC$ » $OB < OC$ » deux combinaisons OABC, OBAC.

24. Événements également probables. — J'ai parlé d'événements *également probables*. Que doit-on entendre ainsi? N'est-ce pas préjuger la question?

Les cas du Tableau (T) du jeu de dés sont *en théorie* également probables. Ils ne le sont plus si les dés sont pipés.

Le Calcul des probabilités ne s'inquiète pas plus de ces *accidents* que le géomètre ne se préoccupe de tracer une droite sans épaisseur.

En fait, les cas à étudier sont des cas tout d'abstraction comme le sont les nombres de l'Algèbre et les figures de la Géométrie. Il est vrai que la *réalité* correspond dans une large mesure à ces abstractions : *sinon, les sciences mathématiques n'auraient*

aucune raison d'être. Ce ne serait plus que vains jeux de l'esprit.

25. Valeur objective du Calcul des probabilités. — *Les questions de probabilité n'ont de raison d'être qu'autant qu'elles se rapportent à des épreuves répétées.*

Que conclure de leur objectivité? de leur valeur pratique?

Je joue tous les soirs au baccarat. J'ai intérêt à connaître les résultats que me donne le Calcul des probabilités quant à l'opportunité de tirer à 7 ou à 8, et encore dois-je combiner ces résultats avec la manière de jouer de mon partenaire; mais si, égaré par hasard dans une salle de jeu, je joue pour la première fois, étant décidé d'ailleurs à ne plus jamais prendre une carte en mains? Tous les coups ne sont-ils pas d'égale valeur, puisque le Calcul des probabilités ne s'applique qu'aux suites étendues d'événements?

La question est oiseuse. Mille événements se rencontrent où la loi de Bernoulli intervient, et ces événements sont, dans une certaine mesure, comparables les uns aux autres. Le joueur qui, chaque jour, jouerait à un jeu différent, aurait intérêt à jouer chaque jour les coups que la théorie donne comme les plus favorables : son gain serait la moyenne des gains moyens relatifs à chaque coup.

PRATIQUEMENT, *une suite relative à deux événements contradictoires tombe sous la loi de Bernoulli quand le nombre d'épreuves atteint 40.* On dit qu'à Monaco la série de 30 rouges ou 30 noires consécutives n'est jamais sortie. De fait, la probabilité de l'événement est $\frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{1\,073\,741\,824}$: et il y a peu de chances qu'il se produise avant qu'on ait joué un nombre de coups comparable au quotient du chiffre 1 073 741 824 du dénominateur par 40.

26. Probabilité nulle. Certitude. — La probabilité mathématique est une fraction *moindre que un*, car le nombre des cas favorables ne peut être supérieur au nombre des cas possibles.

Si tous les cas sont défavorables, le numérateur de la fraction est nul, la probabilité est nulle, *l'événement est impossible.*

Si tous les cas sont favorables, les deux termes de la fraction sont égaux, la probabilité est *un*, l'événement est certain.

Exemple : *Probabilité de tirer un « six » d'un jeu de 32 cartes* : $\frac{0}{32}$: impossible.

Probabilité de tirer une boule noire d'une urne renfermant 100 boules noires : $\frac{100}{100}$ ou 1 : certitude.

27. Problème de la loterie. — *La loterie royale, établie sous l'ancien régime, supprimée en 1793, rétablie en 1797 et supprimée définitivement en 1839, se composait de 90 numéros dont on tirait 5 au sort; on pouvait désigner 1, 2, 3 ou 4 numéros à l'avance et miser sur la combinaison choisie; on appelait cela jouer l'extrait, l'ambe, le terne, le quaterne. Le quine (5 numéros) était interdit; de plus, on ne pouvait dépasser 12 francs pour le quaterne.*

Les joueurs gagnant l'extrait, l'ambe, le terne, le quaterne recevaient respectivement 15 fois, 270 fois, 5500 fois, 75000 fois leurs mises.

Quelles probabilités avaient les joueurs de gagner l'extrait, l'ambe, le terne, le quaterne?

1° *Probabilité de l'extrait simple?*

Le nombre des cas possibles est C_{90}^5 , car on peut tirer une quelconque des combinaisons des 90 numéros 5 à 5. Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons de 90 objets pris 5 à 5 dans lesquelles un des objets désignés à l'avance se trouve compris; ôtons cet objet; on aura les combinaisons (et toutes les combinaisons) de 89 objets 4 à 4; donc, la probabilité cherchée est

$$C_{89}^4 : C_{90}^5 = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

2° *Probabilités de l'ambe, du terne, du quaterne, du quine?*

Cherchons la probabilité de tirer α numéros désignés à l'avance.

Le nombre des cas possibles est encore C_{90}^5 . Nous aurons le nombre des cas favorables en observant que ceux-ci sont les combinaisons de 90 numéros pris 5 à 5 où entrent α numéros

désignés; supprimons ces numéros; nous aurons des combinaisons de $90 - \alpha$ objets pris $5 - \alpha$ à $5 - \alpha$. (Nous aurons toutes les combinaisons de cette nature, car, en ajoutant aux combinaisons des $90 - \alpha$ numéros pris $5 - \alpha$ à $5 - \alpha$ les numéros ôtés d'abord, on retrouvera des résultats qui seront des combinaisons de 90 numéros pris 5 à 5 . Enfin les résultats considérés seront distincts, car s'ils ne l'étaient pas, en y remettant les lettres ôtées, on obtiendrait des cas favorables qui ne seraient pas distincts non plus.) La probabilité cherchée est donc

$$C_{90-\alpha}^{5-\alpha} : C_{90}^5.$$

Faisant $\alpha = 2, 3, 4, 5$, on trouve, pour les probabilités de l'ambe, du terne, du quaterne, du quine,

$$\frac{2}{801}, \quad \frac{1}{11748}, \quad \frac{1}{511038}, \quad \frac{1}{43949268}.$$

Nous verrons plus loin que, dans un jeu *équitable*, le gain doit être proportionné à la probabilité. L'État aurait donc dû donner 18 fois, 801 fois, 11 748 fois, 511 038 fois la mise au lieu de 15 fois, 270 fois, 5 500 fois, 75 000 fois.

28. Problème du jeu de rencontre. — *Quelle est la probabilité pour qu'en tirant n boules de suite dans une urne qui en contient μ , marquées 1, 2, 3, ..., μ , et remettant la boule sortie après chaque tirage, k numéros désignés sortent au moins une fois?*

1° Si $k = 1$, un seul numéro étant désigné, le nombre des combinaisons qui le contiennent est

$$\mu^n - (\mu - 1)^n,$$

car il faut retrancher du nombre total μ^n des combinaisons le nombre des combinaisons qui restent possibles quand le numéro désigné est laissé en dehors.

2° Pour avoir le nombre des combinaisons qui contiennent deux numéros désignés, il faut retrancher du résultat précédent le nombre des combinaisons qui, ne contenant pas le second numéro, contiennent le premier, c'est-à-dire

$$(\mu - 1)^n - (\mu - 2)^n,$$

d'où

$$\mu^n - 2(\mu - 1)^n + (\mu - 2)^n;$$

de même, on aura le nombre des combinaisons contenant 3 numéros désignés en retranchant de ce résultat le nombre

$$(\mu - 1)^n - 2(\mu - 2)^n + (\mu - 3)^n$$

des combinaisons qui, ne contenant pas le troisième numéro, contiennent les deux premiers; d'où, comme résultat,

$$\mu^n - 3(\mu - 1)^n + 3(\mu - 2)^n - (\mu - 3)^n.$$

3° La méthode est générale; le nombre des combinaisons qui contiennent k numéros désignés est (ce sont les coefficients du binôme qui interviennent)

$$\mu^n - k(\mu - 1)^n + \frac{k(k-1)}{1.2}(\mu - 2)^n - \dots \pm (\mu - k)^n;$$

en divisant ce nombre par μ^n , nombre des combinaisons possibles, on aura la probabilité demandée.

29. Problème des partis. — *Jean et Paul sont soumis à un scrutin de ballottage; l'urne contient j bulletins portant le nom de Jean et p portant le nom de Paul; j est plus grand que p et Jean sera élu. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, les bulletins sortent dans un ordre tel que Jean ne cesse pas un seul instant d'avoir l'avantage?*

Voici la solution de M. André :

1° Le nombre des cas possibles est celui des arrangements de $j + p$ lettres où j (représentant le nom de Jean) sont semblables entre elles et p (représentant le nom de Paul) sont également semblables entre elles; ce nombre est

$$\frac{1.2.3\dots(j+p)}{1.2.3\dots j.1.2.3\dots p}.$$

2° Nous allons partager ces cas possibles en trois groupes : ceux, en nombre N_1 , où Jean a la majorité au début et la conserve tout le temps, cas favorables; ceux, en nombre N_2 , où le premier

bulletin est au nom de Paul, cas défavorables, puisque pour ceux-ci Jean perd la majorité au début; ceux enfin, en nombre N_3 , où Jean a la majorité au début mais la perd ensuite; d'après l'énoncé, il retrouve la majorité à la fin de ces cas; néanmoins, ceux-ci sont encore défavorables. On a

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{(j+p)!}{j!p!},$$

et il s'agit de calculer

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3}.$$

Évaluons N_2 : le premier bulletin dépouillé porte le nom de Paul; supprimons-le; il reste j bulletins Jean et $p-1$ bulletins Paul; le nombre des cas possibles est

$$\frac{(j+p-1)!}{j!(p-1)!};$$

c'est N_2 .

THÉORÈME :

$$N_3 = N_2.$$

Considérons une combinaison γ du troisième groupe N_3 (où Jean a eu la majorité au début, mais la perd ensuite avant de la retrouver à la fin) :

$$(\gamma) \quad \text{JJPJP} \mid \text{PJPJJ} \parallel.$$

Jean a la majorité jusqu'au trait, puis la perd au bulletin suivant pour la première fois; à gauche du trait, s'il y a q bulletins J, il y a $q-1$ bulletins P, soit en tout $2q-1$ bulletins.

Formons l'arrangement

$$(\beta) \quad \mid \text{PJPJJ} \parallel \text{JJPJP},$$

déduit du précédent en en transposant les deux parties, et appelons-le *dérivé* du premier. Le 29^e bulletin étant, par définition, le premier qui fait perdre à Jean sa majorité, *chaque arrangement a un dérivé, et un seul.*

L'arrangement (β) appartient au *second* groupe et, en vertu de la remarque en italique, l'ensemble des arrangements (β) n'est

autre que le groupe N_2 . Donc $N_2 = N_3$ et

$$N_3 = \frac{(j+p-1)!}{j!(p-1)!}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3} &= 1 - \frac{N_2 + N_3}{N_1 + N_2 + N_3} \\ &= 1 - 2 \frac{(j+p-1)!}{j!(p-1)!} : \frac{(j+p)!}{j!p!} = 1 - \frac{2p}{j+p} = \frac{j-p}{j+p}. \end{aligned}$$

II. — PROBABILITÉ TOTALE. PROBABILITÉ COMPOSÉE.

30. **Probabilité totale.** — *Si les cas favorables à un événement se partagent en plusieurs groupes, les groupes réunis contenant tous les cas favorables, et chacun des cas favorables figurant une seule fois dans l'ensemble des groupes, la probabilité de l'événement, dite ici probabilité totale, sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chaque groupe.*

En effet, les probabilités partielles, relatives à chaque groupe, sont des fractions de même dénominateur

$$\frac{a_1}{D}, \quad \frac{a_2}{D}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{D}?$$

et la probabilité totale est évidemment

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{D}.$$

31. **Problème.** — *Probabilité en jetant deux dés d'amener un point supérieur à 8.*

La probabilité d'amener le point 9 est $\frac{4}{36}$,

» » 10 est $\frac{3}{36}$ (Cf. n° 19),

.....

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36}.$$

32. Probabilité composée. — Quelle est la probabilité que je tirerai un roi d'un jeu de 32 cartes *et*, qu'ayant tiré un roi, j'amènerai *ensuite* le point 7 avec deux dés?

Cas possibles. — A chacune des 32 cartes du jeu correspond l'un quelconque des 36 cas possibles des dés. Il y a donc 32×36 cas possibles.

Cas favorables. — A l'un quelconque des 4 rois correspond l'une quelconque des six manières d'amener le point 7 : donc 4×6 cas favorables.

La probabilité est donc

$$\frac{4 \times 6}{32 \times 36} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{32} \times \frac{6}{36},$$

c'est-à-dire *le produit des deux probabilités* ou $— \frac{1}{48}$.

Un événement composé est défini par le concours de plusieurs événements simples que le hasard doit produire successivement.

Le nombre N des cas possibles, LORSQUE LES ÉVÉNEMENTS SIMPLES SONT INDÉPENDANTS, est le produit des nombres de cas possibles n_1, n_2, \dots, n_p de chacune des catégories d'événements simples.

Le nombre A des cas favorables est lui-même le produit du nombre des cas favorables a_1, a_2, \dots, a_p de chaque catégorie.

La probabilité composée $\frac{A}{N}$ *est donc le produit*

$$\frac{a_1}{n_1} \times \frac{a_2}{n_2} \times \dots \times \frac{a_p}{n_p},$$

des probabilités simples.

33. Applications I. — *Probabilité d'amener une fois le point 1, et une fois seulement, en jetant quatre dés.*

La probabilité qu'un dé *déterminé* amènera le point *un* est $\frac{1}{6}$; la probabilité que l'un quelconque des trois autres dés n'amènera pas le point 1 est $\frac{5}{6}$; la probabilité qu'un dé déterminé et celui-là seul amènera le point 1 est donc

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}.$$

La probabilité cherchée, où le dé amenant le point *un* n'est plus désigné, est 4 fois plus grande, soit

$$4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{324}.$$

34. Problème de la poule. — *Trois joueurs, A, B, C, jouent aux conditions suivantes. Deux d'entre eux, A et B, jouent ensemble, C ne joue pas. Après la partie A, B, le perdant sort et il est remplacé par C. Et ainsi de suite, le perdant de chaque partie étant remplacé par le troisième joueur. Le jeu prend fin quand un joueur gagne deux fois de suite. Quelles sont les probabilités pour chaque joueur de gagner?*

1° A a gagné la première partie. Quelle est alors la probabilité pour chacun des joueurs B, C de gagner?

Si A gagne la deuxième partie, il est gagnant définitif; la probabilité qu'il la gagnera est $\frac{1}{2}$; s'il la perd, il peut encore gagner, mais il faut pour cela que C gagne la troisième partie, d'où plusieurs hypothèses comprises dans le Tableau suivant :

	1 ^{re} hypothèse.	2 ^e hypothèse.	3 ^e hypothèse.	...
1 ^{re} partie	A gagne	A gagne	A gagne	...
2 ^e »	A »	B »	B »	...
3 ^e » . . .		C »	C »	...
4 ^e »		A »	A »	...
5 ^e »		A »	B »	...
6 ^e »			C »	...
7 ^e »			A »	...
8 ^e »			A »	...

La probabilité de la première hypothèse est $\frac{1}{2}$, car B peut gagner au lieu de A; celle de la seconde est $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$; celle de la troisième est $\frac{1}{2^7}$; celle de la quatrième est $\frac{1}{2^{10}}$, ...; donc, la probabilité que A gagnera la poule après avoir gagné la partie est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} + \dots = \frac{4}{7}.$$

En dressant un Tableau analogue au précédent, on verrait que,

A ayant gagné la première partie, B a comme chances de gagner la poule $\frac{2}{7}$; par suite, C aura comme chances $1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$, car la somme des chances est 1, 1 représentant la certitude.

2° Rejetons cette hypothèse que A a gagné la première partie.

Deux hypothèses : A gagnera ou B gagnera. Si A gagne, B sort, C entre et les probabilités pour chacun deviennent

$$\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}.$$

Si B gagne, elles deviennent

$$\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}.$$

A peut gagner la poule soit en gagnant la première partie, soit en la perdant. La probabilité de la première hypothèse est $\frac{4}{7} \times \frac{1}{2}$; la probabilité de la seconde hypothèse est $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$; la probabilité totale que A gagnera la poule est donc

$$\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14};$$

de même, la probabilité que B gagnera la poule est $\frac{5}{14}$; la probabilité que C gagnera la poule est donc

$$1 - \frac{5}{14} - \frac{5}{14} = \frac{4}{14}.$$

Nota. — On peut envisager le problème sous d'autres aspects, par exemple calculer la probabilité que la poule sera gagnée après la $n^{\text{ième}}$ partie (1).

A consulter : H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*; Paris, 1896. — J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*; Paris, 1907. — H. LAURENT, *Traité du Calcul des probabilités*; Paris, 1873.

(1) Cf. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 42.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA RÉPÉTITION DES MÊMES ÉPREUVES.

35. La méthode directe, que nous avons employée jusqu'ici, fut tout d'abord le seul moyen qu'on appliquait à la recherche de la probabilité d'un événement.

Laplace sut dégager des quelques règles formulées avant lui deux principes précis, celui de la probabilité totale et celui de la probabilité composée, qui permettent de résoudre les problèmes plus simplement que par l'évaluation directe des chances.

Ces deux principes peuvent, comme l'a montré M. Poincaré, mais notre étude n'ira pas jusque-là, être déduits d'une formule unique.

I. — PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS DES MÊMES ÉVÉNEMENTS SIMPLES.

36. **Notation.** — Dans ce qui va suivre, le signe \approx indique une égalité approximative.

37. Nous nous sommes proposé de rechercher la probabilité pour qu'ayant tiré un roi d'un jeu de 32 cartes nous amenions ensuite le point 7 avec deux dés (*cf.* n° 32). On peut de même calculer la probabilité pour qu'ayant tiré une première fois un roi et que, ayant remis ce roi dans le jeu, on tire encore un roi à la seconde épreuve, un roi à la troisième épreuve, etc., ou, plus généralement, la probabilité pour que sur m épreuves on tire α fois le roi.

La solution des questions de cette nature est donnée par les propositions que voici :

38. **Théorème I.** — *Les probabilités respectives de deux événements contradictoires E , E' étant p et q , la probabilité que*

l'événement E se produira α fois dans une série de m épreuves (et que l'événement E' se produira $m - \alpha$ fois) est

$$T_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha}.$$

La probabilité que la *première épreuve* amènera l'événement E est p ; le théorème des probabilités composées montre ensuite que la probabilité *de l'événement E suivi de l'événement E'* est pq ; de même la probabilité de la suite d'événements E, E', E est pqp , et, en général, la probabilité d'amener α fois l'événement E et $m - \alpha$ fois l'événement E' est $p^\alpha q^{m-\alpha}$, cela *en supposant que les ordres respectifs d'arrivées des événements E, E' aient été fixés à l'avance.*

Si l'on ne suppose rien quant à cet ordre, le nombre des cas possibles, c'est-à-dire des suites de m événements dont α sont de genre E et $m - \alpha$ de genre E', étant $\frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!}$, on voit que la probabilité cherchée sera

$$T_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha}.$$

Si $p = q$, la probabilité devient, vu la relation $p + q = 1$,

$$\frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

39. Application. — Probabilités sur 2, 4, 6, 8, 10 coups joués à la roulette d'amener aussi souvent la rouge que la noire.

Ces probabilités sont

$$\begin{aligned} \frac{2!}{1!1!2^2} &= \frac{1}{2}, & \frac{4!}{2!2!2^4} &= \frac{3}{8}, & \frac{6!}{3!3!2^6} &= \frac{5}{16}, \\ \frac{8!}{4!4!2^8} &= \frac{35}{128}, & \frac{10!}{5!5!2^{10}} &= \frac{63}{256}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{128}{256}, \frac{96}{256}, \frac{80}{256}, \frac{70}{256}, \frac{63}{256}.$$

Ainsi, la probabilité décroît quand le nombre d'épreuves croît.

40. *Le nombre représentant la probabilité de l'événement est le terme en $p^\alpha q^{m-\alpha}$ du développement de $(p + q)^m$.*

41. Ce résultat peut être généralisé :

Les probabilités respectives de n événements contradictoires E_1, E_2, \dots, E_n étant p_1, p_2, \dots, p_n ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$), la probabilité que dans une suite de m épreuves E_1 se produira α_1 fois, E_2 : α_2 fois, ..., E_n : α_n fois ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$) est représentée par le terme en $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ du développement de

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^m.$$

42. **Théorème II.** — *Au cas de deux événements contradictoires E, E' de probabilités respectives p et q, le nombre d'arrivées le plus probable de l'événement E dans une série de m épreuves sera l'entier de la forme*

$$(m + 1)p - r \quad (r \leq 0 \leq 1).$$

Si $\alpha < p(m + 1)$, T_α croît avec α ; en effet,

$$\frac{T_\alpha}{T_{\alpha-1}} > 1$$

s'écrit

$$\frac{m - \alpha + 1}{\alpha} \frac{p}{q} > 1, \quad \text{ou} \quad \frac{m + 1}{\alpha} > \frac{q}{p} + 1, \quad \text{ou} \quad \frac{m + 1}{\alpha} > \frac{1}{p},$$

ou enfin

$$\alpha < p(m + 1).$$

Si $\alpha > (m + 1)p - 1$, T_α décroît quand α croît, car $\frac{T_{\alpha+1}}{T_\alpha} < 1$ s'écrit

$$\frac{m - \alpha}{\alpha + 1} \frac{p}{q} < 1,$$

ou

$$\frac{m - (\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1} \frac{p}{q} < 1, \quad \frac{m + 1}{\alpha + 1} - 1 < \frac{q}{p},$$

$$\frac{m + 1}{\alpha + 1} < \frac{1}{p}, \quad (m + 1)p < \alpha + 1.$$

Si donc l'entier α est compris entre les limites

$$(m + 1)p - 1 \quad \text{et} \quad (m + 1)p,$$

T_α sera plus grand que $T_{\alpha-1}$ et par suite que $T_{\alpha-2}$, etc., et plus grand aussi que $T_{\alpha+1}$ et par suite que $T_{\alpha+2}$, etc.

Ainsi le maximum de T_α répond au cas où l'entier α est compris entre les limites assignées, c'est-à-dire est de la forme

$$(m + 1)p - r \quad (0 < r < 1).$$

Si les nombres $(m + 1)p - 1$ et $(m + 1)p$ sont entiers,

$$T_{(m+1)p} = T_{(m+1)p-1}$$

sont l'un et l'autre plus grands que les nombres T_α , où α diffère de $(m + 1)p$ et de $(m + 1)p - 1$. Ils correspondront au maximum cherché. Ici, $r = 0$ ou $r = 1$. Si $p = q = \frac{1}{2}$, α , étant de la forme

$$\frac{m+1}{2} - r, \dots, m' + \frac{1}{2} - r, m'' + 1 - r,$$

selon que m est pair ($m = 2m'$) ou impair ($2m'' + 1$), sera égal dans le premier cas à m' et dans le second à $m'' + 1$.

43. Dans une série de 10 coups joués à la roulette, quel est le nombre d'arrivées le plus probable de la rouge?

Ce nombre sera représenté par l'entier de la forme

$$11 \frac{1}{2} - r \quad (0 < r < 1),$$

c'est-à-dire 5.

Cependant la probabilité d'amener 5 fois la rouge dans une série de 10 coups est seulement $\frac{252}{1024}$ ou $\frac{63}{256}$. Il est vrai que les probabilités d'amener 4, 3, 2, 1 fois la rouge, soit respectivement $\frac{210}{1024}$, $\frac{120}{1024}$, $\frac{45}{1024}$, $\frac{10}{1024}$, seraient moindres, comme le faisait prévoir la théorie.

44. Au cas où l'expression $T_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha}$ se rapporte à de grands nombres m , α , pratiquement à $m \geq 10$, $\alpha \geq 5$, il est avantageux de remplacer les expressions $h!$ par leurs valeurs approchées

$$e^{-h} h^h \sqrt{2\pi h}.$$

Dans ces conditions,

$$T_\alpha = \frac{m^m}{\alpha^\alpha (m-\alpha)^{m-\alpha}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\alpha(m-\alpha)}} p^\alpha q^{m-\alpha},$$

le signe \equiv indiquant, on l'a dit, une égalité approximative.

Il est parfois nécessaire de connaître deux limites approchées de T_α . On peut former ces limites comme il suit. On a

$$e^{-h} h^h \sqrt{2\pi h} < h^h < e^{-h} h^h \sqrt{2\pi h} e^{\frac{1}{12h}};$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-m} m^m \sqrt{2\pi m}}{e^{-\alpha} \alpha^\alpha \sqrt{2\pi\alpha} e^{\frac{1}{12\alpha}} \times e^{-(m-\alpha)} (m-\alpha)^{m-\alpha} \sqrt{2\pi(m-\alpha)} e^{\frac{1}{12(m-\alpha)}}} p^\alpha q^{m-\alpha} < T_\alpha \\ & < \frac{e^{-m} m^m \sqrt{2\pi m} e^{\frac{1}{12m}}}{e^{-\alpha} \alpha^\alpha \sqrt{2\pi\alpha} \times e^{-(m-\alpha)} (m-\alpha)^{m-\alpha} \sqrt{2\pi(m-\alpha)}} p^\alpha q^{m-\alpha}, \\ & e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha} + m - \frac{1}{m-\alpha}\right)} \times \frac{m^m}{\alpha^\alpha (m-\alpha)^{m-\alpha}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\alpha(m-\alpha)}} p^\alpha q^{m-\alpha} < T_\alpha \\ & \bullet < e^{\frac{1}{12m}} \times \frac{m^m}{\alpha^\alpha (m-\alpha)^{m-\alpha}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\alpha(m-\alpha)}} p^\alpha q^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

43. **Probabilité de la combinaison la plus probable.** — Sur une série de m épreuves, la combinaison probable étant celle où le nombre d'arrivées du premier événement est l'entier de la forme

$$(m+1)p - r \quad (0 < r < 1)$$

et où le nombre d'arrivées du second événement est

$$m - (m+1)p + r \quad \text{ou} \quad (m+1)q - (1-r),$$

la probabilité de la combinaison la plus probable sera (cf. n° 38)

$$\frac{m!}{[(m+1)p - r]! [(m+1)q - (1-r)]!} p^{m+1-r} q^{m+1-r};$$

si m est suffisamment grand, on peut prendre sans erreur sensible la *valeur approchée*

$$(1) \quad \frac{m!}{mp! mq!} p^{mp} q^{mq},$$

qui représente la probabilité de la combinaison la plus probable au cas où mp est un nombre entier.

La *valeur approchée* de cette expression ($q! \equiv e^{-q} q! \sqrt{2\pi q}$) a la forme particulièrement simple

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

La présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{m}}$ permet d'énoncer ce corollaire :

La probabilité de la combinaison la plus probable tend vers zéro quand le nombre d'épreuves m tend vers l'infini.

Cette démonstration, basée sur une valeur approchée, pouvant prêter au doute, nous observerons qu'on peut la justifier comme il suit.

On peut écrire (cf. n° 10)

$$n! = M n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

où M tend vers un quand n croît indéfiniment. Dans ces conditions, l'expression (1) s'écrit

$$\frac{M_1}{M_2 M_3 \sqrt{2\pi m p q}},$$

où M_1, M_2, M_3 , relatifs aux facteurs

$$m!, \quad mp!, \quad mq!,$$

tendent vers un . L'expression (1) tend donc bien vers zéro quand le nombre d'épreuves m tend vers l'infini.

II. — THÉORIE DES ÉCARTS.

46. **Notations.** — Dans ce qui suit, le signe \equiv indique comme précédemment une égalité approximative et le signe \sim est mis pour les mots *tend vers* (cf. n° 10).

47. La probabilité que l'événement E se produira un nombre de fois s'écartant au plus de λ de la combinaison où il se produit l fois ou, si l'on veut, que l'événement E se produira un nombre de fois compris entre $l - \lambda - 1$ et $l + \lambda + 1$ sera

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{l,\lambda} &= T_{l-\lambda} + T_{l-\lambda+1} + T_{l-\lambda+2} + \dots + T_{l+\lambda-1} + T_{l+\lambda} \\ &= \sum_{k=2\lambda}^{k=2\lambda} \frac{m!}{(l-\lambda+k)!(m-l+\lambda-k)!} p^{l+\lambda-k} q^{m-l+\lambda-k}. \end{aligned}$$

On peut dire que $\mathfrak{E}_{l,\lambda}$ est la probabilité de l'écart λ relatif à la combinaison où l'événement E se produit l fois.

Si $l = mp$, valeur très voisine, sinon valeur même du nombre d'arrivées le plus probable de l'événement E , on est en droit de désigner la probabilité que l'événement E se produira un nombre

de fois compris entre $mp - \lambda - 1$ et $mp + \lambda + 1$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{E}_{mp, \lambda} = \sum_{k=0}^{k=2\lambda} \frac{m!}{(mp - \lambda + k)! (mq + \lambda - k)!} p^{mp - \lambda + k} q^{mq + \lambda - k},$$

par le nom de *probabilité de l'écart* λ . $\mathfrak{E}_{mp, \lambda}$ est en effet une expression approchée de la probabilité de l'écart λ relatif à la combinaison la plus probable.

48. **Expression approchée de $\mathfrak{E}_{mp, \lambda}$.** — Cette expression importante se prête mal au calcul. Nous allons en donner une expression approchée.

En premier lieu, évaluons approximativement

$$T_{mp - \lambda + k} = \frac{m!}{(mp - \lambda + k)! (mq + \lambda - k)!} p^{mp - \lambda + k} q^{mq + \lambda - k},$$

en nous basant sur la formule

$$n! = M \sqrt{2\pi e} n^{n + \frac{1}{2}},$$

où M tend vers 1 quand n croît indéfiniment. On aura

$$\begin{aligned} T_{mp - \lambda + k} &\equiv \frac{M \sqrt{2\pi e} m^{m + \frac{1}{2}}}{M \sqrt{2\pi e} p^{mp + \lambda - k} (mp - \lambda + k)^{mp - \lambda + k + \frac{1}{2}} M \sqrt{2\pi e} q^{mq + \lambda - k} (mq + \lambda - k)^{mq + \lambda - k + \frac{1}{2}}} \\ &\times p^{mp - \lambda + k} q^{mq + \lambda - k} \\ &\equiv \frac{1}{M \sqrt{2\pi}} \times \frac{m^{m + \frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{k - \lambda}{mp}\right)^{mp - \lambda + k + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda - k}{mq}\right)^{mq + \lambda - k + \frac{1}{2}}} \\ &\times \frac{p^{mp - \lambda + k}}{p^{mp - \lambda + k + \frac{1}{2}}} \times \frac{q^{mq + \lambda - k}}{q^{mq + \lambda - k + \frac{1}{2}}} \times \frac{1}{m^{m + \frac{1}{2}}} \\ &\equiv \frac{1}{M \sqrt{2\pi m p q}} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{k - \lambda}{mp}\right)^{mp - \lambda + k + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda - k}{mq}\right)^{mq + \lambda - k + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$(M \sim 1).$$

Or (1),

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

(1) Le lecteur pourra admettre cette formule sans démonstration. Le logarithme indiqué est celui qui a pour base le nombre e : $\log_e 1 = 0$.

(si $|x| < 1$, c'est-à-dire si x est en valeur absolue moindre que un); donc, si

$$H = \left(1 + \frac{k - \lambda}{mp}\right)^{mp - \lambda + k + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda - k}{mq}\right)^{mq + \lambda - k + \frac{1}{2}},$$

$$\log H = \left(mp - \lambda + k + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{k - \lambda}{mp} - \frac{1}{2} \left(\frac{k - \lambda}{mp}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{k - \lambda}{mp}\right)^3 - \dots\right]$$

$$+ \left(mq + \lambda - k + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\lambda - k}{mq} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - k}{mq}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda - k}{mq}\right)^3 - \dots\right]$$

$(|k - \lambda| < mp, |\lambda - k| < mq),$

$$\log H = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{(k - \lambda)^2}{mp} + \frac{1}{3} \frac{(k - \lambda)^3}{m^2 p^2} - \dots - \frac{1}{2} \frac{(\lambda - k)^3}{mq} + \frac{1}{3} \frac{(\lambda - k)^3}{m^2 q^2} - \dots \\ + \frac{(k - \lambda)^2}{mp} - \frac{1}{2} \frac{(k - \lambda)^3}{m^2 p^2} - \dots + \frac{(\lambda - k)^2}{mq} - \frac{1}{2} \frac{(\lambda - k)^3}{m^2 q^2} + \dots \\ + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k - \lambda}{mp} + \frac{\lambda - k}{mq}\right) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k - \lambda}{mp}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - k}{mq}\right)^2 \right] + \dots \right\}. \end{array} \right.$$

Si $k - \lambda$ ne tend pas vers l'infini, tous les termes écrits tendent vers zéro et, $\log H$ tendant vers zéro, H tend vers 1. Alors

$$T_{mp - \lambda + k} \sim \frac{1}{\sqrt{2 m \pi p q}}.$$

Si $k - \lambda$ tend vers l'infini avec m , les termes du développement précédent ne resteront finis que si le premier d'entre eux, $\frac{(k - \lambda)^2}{mp}$, reste lui-même fini; cela exige que k et λ soient de la forme

$$k = f(m) + \alpha \sqrt{m} + \varphi(m), \quad \lambda = f(m) + \alpha' \sqrt{m} + \varphi'(m),$$

où $\frac{\varphi(m)}{\sqrt{m}}, \frac{\varphi'(m)}{\sqrt{m}}$ tendent vers zéro quand m croît indéfiniment; en ce cas,

$$\log H \sim + \frac{1}{2} \frac{(k - \lambda)^2}{mp} + \frac{1}{2} \frac{(\lambda - k)^2}{mq}$$

$$\sim \frac{(k - \lambda)^2}{2mpq} \quad (p + q = 1),$$

$$\log H \sim \frac{[(\alpha - \alpha') \sqrt{m} + \varphi(m) - \varphi'(m)]^2}{2mpq}$$

$$\sim \frac{(\alpha - \alpha')^2}{2pq},$$

$$H \sim e^{\frac{(\alpha - \alpha')^2}{2pq}} \quad (\log e = 1),$$

$$T_{mp - \lambda + k} \sim \frac{1}{M \sqrt{2 m \pi p q}} e^{-\frac{(\alpha - \alpha')^2}{2pq}} \quad (M \sim 1, \text{ quand } m \text{ croît indéfiniment}),$$

et

$$T_{mp, \lambda+k} \sim \frac{e^{-\frac{\alpha-\alpha'}{2pq}}}{\sqrt{2\pi pq}},$$

formule exacte si α et α' sont nuls, car, si $k - \lambda$ ne tend pas vers l'infini, tous les termes du développement de $\log H$ tendent vers zéro et H tend vers 1, tout comme si l'on fait $\alpha = \alpha' = 0$ dans la formule

$$H \sim e^{\frac{(\alpha - \alpha')^2}{2pq}}.$$

Nous écrivons donc

$$T_{mp, \lambda+k} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{\lambda-k^2}{2mpq}},$$

en nous rappelant que λ et k doivent avoir la forme

$$f(m) + \alpha\sqrt{m} + \varphi(m), \quad f(m) + \alpha'\sqrt{m} + \varphi'(m),$$

où $\frac{\varphi(m)}{\sqrt{m}}, \frac{\varphi'(m)}{\sqrt{m}}$ tendent vers zéro lorsque m croît indéfiniment.

Dans ces conditions, et toujours *approximativement*,

$$\mathfrak{E}_{mp, \lambda} \equiv \sum_{k=0}^{k=2\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{(k-\lambda)^2}{2mpq}}.$$

Avec une nouvelle approximation, qui consiste à substituer l'aire *curviligne* ABCD à la somme des trapèzes *rectilignes* AA'DD' (1),

$$\mathfrak{E}_{mp, \lambda} \equiv \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{k-\lambda^2}{2mpq}} dk;$$

posant $k - \lambda = x$, $dk = dx$, puisque k seul est variable,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{mp, \lambda} &= \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{x^2}{2mpq}} dx, \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{x^2}{2mpq}} dx, \\ &= 2 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{x^2}{2mpq}} dx. \end{aligned}$$

(1) Le lecteur pourra admettre sans démonstration ces diverses transformations d'intégrales.

Si l'on pose enfin

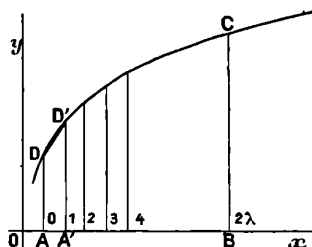
$$\frac{x}{\sqrt{2mpq}} = t,$$

on a

$$T_{m,p,\lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2} dt.$$

Cette formule suppose que $\frac{\lambda}{\sqrt{m}}$ tende vers une limite finie

Fig. 5.



quand m croît indéfiniment. En effet, si $\frac{\lambda}{\sqrt{m}}$ tend vers zéro, l'intégrale tend vers zéro, et, si $\frac{\lambda}{\sqrt{m}}$ tend vers l'infini, l'intégrale tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $T_{m,p,\lambda}$ tend vers 1, vers la certitude.

En particulier, λ peut avoir l'une des formes

$$a, \quad am^{\frac{1}{2}}, \quad am^{\frac{2}{3}}, \quad am^{\frac{4}{9}}, \quad am^{\frac{5}{12}}, \quad \dots, \quad am^{\frac{b+1}{2b}}, \quad \dots,$$

où a est une constante quelconque et b un entier positif.

Telle est, APPROXIMATIVEMENT, la probabilité que l'événement E se produira un nombre de fois s'écartant au plus de λ du nombre d'arrivées le plus probable de l'événement E ou, comme l'on dit souvent, telle est la probabilité APPROCHÉE de l'écart λ .

De même, la probabilité *approchée* d'un écart λ d'un sens

déterminé, soit en plus, soit en moins, serait

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2} dt.$$

49. Nous ignorons forcément le degré d'approximation que donne cette formule.

Une application nous fera pressentir qu'elle est exacte pour de grandes valeurs de λ .

Il est nécessaire que la somme

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

des probabilités de tous les écarts possibles représente la certitude. On doit donc avoir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1;$$

il en est bien ainsi, comme le montre la théorie des intégrales eulériennes (1).

« L'épreuve réussit mieux qu'on n'était en droit de l'espérer; toute formule approchée doit en effet laisser craindre une erreur. Le résultat, ici, est rigoureusement exact », dit J. Bertrand.

50. Voici le Tableau des valeurs numériques les plus usuelles de la fonction

$$\theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt.$$

$u.$	$\theta.$	$u.$	$\theta.$	$u.$	$\theta.$
0,00....	0,0000000	0,08....	0,0900781	0,16....	0,1790117
0,01....	0,0112833	0,09....	0,1012806	0,17....	0,1899923
0,02....	0,0225644	0,10....	0,1124630	0,18....	0,2009357
0,03....	0,0338410	0,11....	0,1236230	0,19....	0,2118398
0,04....	0,0451109	0,12....	0,1347584	0,20....	0,2227025
0,05....	0,0563718	0,13....	0,1458671	0,21....	0,2335218
0,06....	0,0676215	0,14....	0,1569470	0,22....	0,2442958
0,07....	0,0788577	0,15....	0,1679959	0,23....	0,2550225

(1) Le lecteur pourra admettre ce résultat sans démonstration.

<i>u.</i>	$\theta.$	<i>u.</i>	$\theta.$	<i>u.</i>	$\theta.$
0,24....	0,2657000	0,68....	0,6637820	1,12....	0,8867879
0,25....	0,2763263	0,69....	0,6708399	1,13....	0,8899707
0,26....	0,2868997	0,70....	0,6778010	1,14....	0,8930823
0,27....	0,2974182	0,71....	0,6848654	1,15....	0,8961238
0,28....	0,3078800	0,72....	0,6914330	1,16....	0,8990962
0,29....	0,3182834	0,73....	0,6981038	1,17....	0,9020004
0,30....	0,3286267	0,74....	0,7046780	1,18....	0,9048374
0,31....	0,3389081	0,75....	0,7111556	1,19....	0,9076083
0,32....	0,3491259	0,76....	0,7175367	1,20....	0,9103140
0,33....	0,3592785	0,77....	0,7238216	1,21....	0,9129555
0,34....	0,3693644	0,78....	0,7300104	1,22....	0,9155339
0,35....	0,3793819	0,79....	0,7361035	1,23....	0,9180501
0,36....	0,3893296	0,80....	0,7421010	1,24....	0,9205052
0,37....	0,3992059	0,81....	0,7480033	1,25....	0,9229001
0,38....	0,4090093	0,82....	0,7538108	1,26....	0,9252359
0,39....	0,4187380	0,83....	0,7595238	1,27....	0,9275136
0,40....	0,4283922	0,84....	0,7651427	1,28....	0,9297342
0,41....	0,4379690	0,85....	0,7706680	1,29....	0,9318987
0,42....	0,4474676	0,86....	0,7761002	1,30....	0,9340080
0,43....	0,4568867	0,87....	0,7814398	1,31....	0,9360632
0,44....	0,4662251	0,88....	0,7866873	1,32....	0,9380652
0,45....	0,4754818	0,89....	0,7918432	1,33....	0,9400150
0,46....	0,4846555	0,90....	0,7969082	1,34....	0,9419137
0,47....	0,4937452	0,91....	0,8018828	1,35....	0,9437622
0,48....	0,5027498	0,92....	0,8067677	1,36....	0,9455614
0,49....	0,5116683	0,93....	0,8115635	1,37....	0,9473124
0,50....	0,5204999	0,94....	0,8162710	1,38....	0,9490160
0,51....	0,5292437	0,95....	0,8208908	1,39....	0,9506733
0,52....	0,5378987	0,96....	0,8254236	1,40....	0,9522851
0,53....	0,5464641	0,97....	0,8298703	1,41....	0,9538524
0,54....	0,5549392	0,98....	0,8342315	1,42....	0,9553762
0,55....	0,5633233	0,99....	0,8385081	1,43....	0,9568573
0,56....	0,5716157	1,00....	0,8427008	1,44....	0,9582966
0,57....	0,5798158	1,01....	0,8468105	1,45....	0,9596950
0,58....	0,5879229	1,02....	0,8508380	1,46....	0,9610535
0,59....	0,5959365	1,03....	0,8547842	1,47....	0,9623729
0,60....	0,6038561	1,04....	0,8586499	1,48....	0,9636541
0,61....	0,6116812	1,05....	0,8624360	1,49....	0,9648979
0,62....	0,6194114	1,06....	0,8661435	1,50....	0,9661052
0,63....	0,6270463	1,07....	0,8697732	1,51....	0,9672768
0,64....	0,6345857	1,08....	0,8733261	1,52....	0,9684135
0,65....	0,6420292	1,09....	0,8768030	1,53....	0,9695162
0,66....	0,6493765	1,10....	0,8802050	1,54....	0,9705857
0,67....	0,6566275	1,11....	0,8835330	1,55....	0,9716227

$u.$	$\theta.$	$u.$	$\theta.$	$u.$	$\theta.$
1,56....	0,9726281	2,00....	0,9953223	2,44....	0,9994408
1,57....	0,9736026	2,01....	0,9955248	2,45....	0,9994694
1,58....	0,9745470	2,02....	0,9957195	2,46....	0,9994966
1,59....	0,9754620	2,03....	0,9959063	2,47....	0,9995226
1,60....	0,9763484	2,04....	0,9960858	2,48....	0,9995472
1,61....	0,9772069	2,05....	0,9962581	2,49....	0,9995707
1,62....	0,9780381	2,06....	0,9964235	2,50....	0,9995930
1,63....	0,9788429	2,07....	0,9965822	2,51....	0,9996143
1,64....	0,9796218	2,08....	0,9967344	2,52....	0,9996345
1,65....	0,9803756	2,09....	0,9968805	2,53....	0,9996537
1,66....	0,9811049	2,10....	0,9970205	2,54....	0,9996720
1,67....	0,9818104	2,11....	0,9971548	2,55....	0,9996893
1,68....	0,9824928	2,12....	0,9972836	2,56....	0,9997058
1,69....	0,9831526	2,13....	0,9974070	2,57....	0,9997215
1,70....	0,9837904	2,14....	0,9975253	2,58....	0,9997364
1,71....	0,9844070	2,15....	0,9976386	2,59....	0,9997505
1,72....	0,9850028	2,16....	0,9977472	2,60....	0,9997640
1,73....	0,9855785	2,17....	0,9978511	2,61....	0,9997767
1,74....	0,9861346	2,18....	0,9979505	2,62....	0,9997888
1,75....	0,9866717	2,19....	0,9980459	2,63....	0,9998003
1,76....	0,9871903	2,20....	0,9981372	2,64....	0,9998112
1,77....	0,9876910	2,21....	0,9982244	2,65....	0,9998215
1,78....	0,9881742	2,22....	0,9983079	2,66....	0,9998313
1,79....	0,9886406	2,23....	0,9983878	2,67....	0,9998406
1,80....	0,9890905	2,24....	0,9984642	2,68....	0,9998494
1,81....	0,9895245	2,25....	0,9985373	2,69....	0,9998578
1,82....	0,9899431	2,26....	0,9986071	2,70....	0,9998657
1,83....	0,9903467	2,27....	0,9986739	2,71....	0,9998732
1,84....	0,9907359	2,28....	0,9987377	2,72....	0,9998803
1,85....	0,9911110	2,29....	0,9987986	2,73....	0,9998870
1,86....	0,9914725	2,30....	0,9988568	2,74....	0,9998933
1,87....	0,9918207	2,31....	0,9989124	2,75....	0,9998994
1,88....	0,9921562	2,32....	0,9989655	2,76....	0,9999051
1,89....	0,9924793	2,33....	0,9990162	2,77....	0,9999105
1,90....	0,9927904	2,34....	0,9990646	2,78....	0,9999156
1,91....	0,9930899	2,35....	0,9991107	2,79....	0,9999204
1,92....	0,9933782	2,36....	0,9991548	2,80....	0,9999250
1,93....	0,9936557	2,37....	0,9991968	2,81....	0,9999293
1,94....	0,9939226	2,38....	0,9992369	2,82....	0,9999334
1,95....	0,9941794	2,39....	0,9992751	2,83....	0,9999372
1,96....	0,9944263	2,40....	0,9993115	2,84....	0,9999409
1,97....	0,9946637	2,41....	0,9993462	2,85....	0,9999443
1,98....	0,9948920	2,42....	0,9993793	2,86....	0,9999476
1,99....	0,9951114	2,43....	0,9994108	2,87....	0,9999507

<i>u.</i>	<i>θ.</i>	<i>u.</i>	<i>θ.</i>	<i>u.</i>	<i>θ.</i>
2,88...	0,9999536	3,29...	0,9999967	3,69...	0,99999981957
2,89...	0,9999563	3,30...	0,9999969	3,70...	0,99999983285
2,90...	0,9999589	3,31...	0,9999971	3,71...	0,99999984517
2,91...	0,9999613	3,32...	0,9999973	3,72...	0,99999985663
2,92...	0,9999636	3,33...	0,9999975	3,73...	0,99999986726
2,93...	0,9999658	3,34...	0,9999977	3,74...	0,99999987712
2,94...	0,9999679	3,35...	0,9999978	3,75...	0,99999988629
2,95...	0,9999698	3,36...	0,9999980	3,76...	0,99999989477
2,96...	0,9999716	3,37...	0,9999981	3,77...	0,99999990265
2,97...	0,9999733	3,38...	0,9999982	3,78...	0,99999990995
2,98...	0,9999750	3,39...	0,9999984	3,79...	0,99999991672
2,99...	0,9999765	3,40...	0,9999985	3,80...	0,99999992200
3,00...	0,9999779	3,41...	0,9999986	3,81...	0,99999992881
3,01...	0,9999793	3,42...	0,9999987	3,82...	0,99999993421
3,02...	0,9999805	3,43...	0,9999988	3,83...	0,99999993921
3,03...	0,9999817	3,44...	0,9999989	3,84...	0,99999994383
3,04...	0,9999829	3,45...	0,9999989	3,85...	0,99999994812
3,05...	0,9999839	3,46...	0,99999900780	3,86...	0,99999995208
3,06...	0,9999849	3,47...	0,99999907672	3,87...	0,99999995575
3,07...	0,9999859	3,48...	0,99999914101	3,88...	0,99999995915
3,08...	0,9999867	3,49...	0,99999920097	3,89...	0,99999996230
3,09...	0,9999876	3,50...	0,99999925691	3,90...	0,99999996522
3,10...	0,9999884	3,51...	0,99999930905	3,91...	0,99999996790
3,11...	0,9999891	3,52...	0,99999935766	3,92...	0,99999997039
3,12...	0,9999898	3,53...	0,99999940296	3,93...	0,99999997260
3,13...	0,9999904	3,54...	0,99999944519	3,94...	0,99999997482
3,14...	0,9999910	3,55...	0,99999948452	3,95...	0,99999997678
3,15...	0,9999916	3,56...	0,99999952115	3,96...	0,99999997860
3,16...	0,9999921	3,57...	0,99999955527	3,97...	0,99999998028
3,17...	0,9999926	3,58...	0,99999958703	3,98...	0,99999998183
3,18...	0,9999931	3,59...	0,99999961661	3,99...	0,99999998327
3,19...	0,9999936	3,60...	0,99999964414	4,00...	0,99999998459
3,20...	0,9999940	3,61...	0,99999966975	4,10...	0,99999999330
3,21...	0,9999944	3,62...	0,99999969358	4,20...	0,99999999714
3,22...	0,9999947	3,63...	0,99999971574	4,30...	0,99999999880
3,23...	0,9999951	3,64...	0,99999973636	4,40...	0,99999999951
3,24...	0,9999954	3,65...	0,99999975551	4,50...	0,99999999981
3,25...	0,9999957	3,66...	0,99999977333	4,60...	0,99999999992
3,26...	0,9999960	3,67...	0,99999978990	4,70...	0,99999999997
3,27...	0,9999962	3,68...	0,99999980528	4,80...	0,99999999999
3,28...	0,9999965				

§1. Ce Tableau permet de résoudre *approximativement* plusieurs questions importantes se rapportant au *Calcul des probabilités*. Laplace a montré comment on pouvait le calculer à l'aide de séries appropriées.

EXEMPLE. — La probabilité d'un événement est 0,45 et la probabilité de l'événement contraire est 0,55. On fait entre eux 20000 épreuves; quelle est la probabilité que l'écart dépassera 1000 en faveur de l'événement le moins probable?

La probabilité d'un écart de sens *donné* inférieur à 1000 est *approximativement*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1000}{\sqrt{2 \cdot 20000 \cdot 0,45 \cdot 0,55}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{10,06} e^{-t^2} dt < \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{4,8} e^{-t^2} dt,$$

donc moindre que $\frac{0,999999 \dots}{2}$.

D'autre part, si m est très grand, la probabilité que l'écart sera compris entre 0 et mp est, à très peu près, $\frac{1}{2}$, puisque mp est une valeur très voisine, sinon la valeur même du nombre d'arrivées le plus probable de l'événement de probabilité p .

La probabilité cherchée

$$\frac{1}{2} - \frac{0,999999 \dots}{2}$$

est si voisine de zéro que l'événement doit être regardé comme à peu près impossible.

§2. — Écart probable. — On a

$$\theta(0,4769363) = \frac{1}{2}.$$

L'écart α , défini par l'équation

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}} = 0,4769363,$$

a donc probabilité égale d'être ou de ne pas être dépassé.

Exemple. — A la roulette, l'écart probable relatif à une série

de 32 coups sur rouge et noire est

$$\alpha = 0,4769363 \times \sqrt{2.32 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1,8077$$

ou *deux*.

Sur 32 coups, la différence entre les nombres de rouges et de noirs sera donc *le plus souvent* 4.

53. **Écart moyen.** — On nomme ainsi la valeur probable de l'écart ou l'expression

$$\sqrt{\frac{2mpq}{\pi}} = 0,79789 \sqrt{mpq}.$$

A la roulette, l'écart moyen relatif à une série de 32 coups est

$$0,79789 \times 2 \sqrt{2} = 2,04\dots;$$

ce nombre sera la *moyenne des écarts*.

54. L'écart probable et l'écart moyen sont l'un et l'autre proportionnels à la racine carrée du nombre des épreuves. Leur rapport est 0,8463\dots

55. **Nombre probable d'arrivées de l'événement de probabilité p .** — On peut représenter ce nombre par

$$mp \pm \rho \sqrt{2mpq},$$

où ρ est un facteur indépendant de m , p , q .

La probabilité pour que le nombre d'arrivées soit compris entre les limites indiquées par cette formule, soit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho} e^{-t^2} dt = \theta(\rho),$$

est un nombre fixe indépendant de m , p , q .

Ainsi, de ce que

$$\theta(0,477) = \frac{1}{2}, \quad \theta(1,163) = \frac{8}{9}, \quad \theta(2,327) = \frac{999}{1000},$$

on conclut que, dans une série quelconque de m épreuves, il y a respectivement 1 à parier contre 1, 9 à parier contre 1, 1000 à

parier contre 1 que l'événement de probabilité p ne sortira pas des limites

$$mp \pm 0,477 \sqrt{2mpq}, \quad mp \pm 1,163 \sqrt{2mpq}, \quad mp + 2,327 \sqrt{2mpq}.$$

§6. **Écart absolu, écart relatif.** — L'*écart absolu* n'est autre que l'*écart*, déjà défini.

L'*écart relatif* est le quotient de l'écart absolu par le nombre m d'épreuves.

L'*écart absolu probable croît indéfiniment avec le nombre des épreuves. L'écart relatif probable, quotient de l'écart absolu probable par le nombre des épreuves, tendra vers zéro.*

En effet, l'écart absolu probable a pour expression

$$0,4769363\dots \times \sqrt{2mpq}$$

et l'écart relatif probable a pour expression

$$\frac{0,4769363\dots \times \sqrt{2mpq}}{m} = \frac{0,4769363\dots \sqrt{2pq}}{\sqrt{m}}.$$

Semblablement, l'*écart moyen croît indéfiniment, et son quotient par le nombre des épreuves tend vers zéro.*

III. — THÉORÈMES DE BERNOULLI ET DE POISSON.

§7. Nous énonçons, d'après Cournot (1), les théorèmes de J. Bernoulli (2) :

1. *Quand l'arrivée de l'événement A ou de l'événement B dépend d'une épreuve aléatoire et qu'on répète plusieurs fois l'épreuve, la répartition qui offre la plus grande probabilité est celle pour laquelle le rapport du nombre des événements A au nombre des événements B est égal au rapport de la probabilité de A à la probabilité de B, ou en diffère le moins possible. Les probabilités des autres répartitions vont en diminuant à mesure que le rapport du nombre des événements A*

(1) COURNOT, *Exposition de la théorie des chances*, p. 54.

(2) Ces théorèmes ont été indiqués par Jacques Bernoulli dans la quatrième Partie de son Livre *Ars conjectandi*, imprimé après sa mort, en 1713.

à celui des événements B s'écarte davantage du rapport de la probabilité de A à celle de B.

Soient p et q les probabilités respectives des événements contradictoires A, B. On fait m épreuves.

La répartition *la plus probable* est celle où le nombre d'arrivées de l'événement A est l'entier

$$(m + 1)p - r \quad (0 < r < 1),$$

le nombre d'arrivées de B étant l'entier

$$(m + 1)q - (1 - r) \quad (\text{cf. n}^\circ 42).$$

Le rapport de ces deux nombres est

$$(1) \quad \frac{p}{q} + \frac{(1 - r)p - qr}{(m + 1)q - (1 - r)} \times \frac{1}{q}.$$

La répartition qui, *après celle-ci*, est la plus probable [le nombre d'arrivées de l'événement A étant diminué : le cas où il serait augmenté donnerait lieu au même raisonnement (cf. n^o 42)] est celle où le nombre d'arrivées de A est l'entier

$$(m + 1)p - r - 1,$$

le nombre d'arrivées de B étant

$$(m + 1)q - (1 - r) + 1.$$

T_α croît, en effet, avec α quand $\alpha < p(m + 1)$ (cf. n^o 42).

Le rapport de ces deux nombres est

$$(2) \quad \frac{p}{q} + \frac{(1 - r)p - qr - 1}{(m + 1)q - (1 - r) + 1} \times \frac{1}{q}.$$

Semblablement, pour la répartition la plus probable après celle-ci (le nombre des événements A ayant diminué), le rapport prend la forme

$$(3) \quad \frac{p}{q} + \frac{(1 - r)p - qr - 2}{(m + 1)q - (1 - r) + 2} \times \frac{1}{q},$$

etc.

Ainsi, les rapports (1), (2), (3) vont en diminuant, puisque leurs numérateurs diminuent à chaque fois d'une unité et puisque leurs dénominateurs croissent au contraire à chaque fois d'une

unité. Donc ces rapports s'éloignent du rapport $\frac{p}{q}$ de la probabilité de l'événement A à la probabilité de l'événement B.

Il en est de même dans le cas où le nombre d'arrivées de l'événement A dépasse la répartition la plus probable.

§8. II. *A mesure qu'on multiplie les épreuves, le nombre des répartitions possibles augmentant, la probabilité de chaque valeur, pour le rapport du nombre des événements A à celui des événements B, va en diminuant, mais d'autant plus rapidement que le rapport en question s'écarte plus du rapport entre les probabilités de A et de B, et d'autant plus lentement qu'il s'en rapproche davantage.*

La probabilité que sur m épreuves l'événement A se produira $m\alpha$ fois ($0 < \alpha < 1$) est donnée par l'expression approchée (cf. n° 44)

$$T_{m\alpha} \equiv \frac{m^m}{(m\alpha)^{m\alpha} (m - m\alpha)^{m - m\alpha}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi m\alpha(m - m\alpha)}} p^{m\alpha} q^{m - m\alpha},$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha(1 - \alpha)}} \left[\frac{1}{\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1 - \alpha}} p^\alpha q^{1 - \alpha} \right]^m.$$

Ici, l'événement B se produit $m - m\alpha$ fois et le rapport du nombre d'arrivées des deux événements est $\frac{1}{1 - \alpha}$.

Faisons $m + k$ épreuves. Si l'événement A se produit $(m + k)\beta$ fois, l'événement B se produira $(m + k) - (m + k)\beta$ fois et le nombre des deux événements sera $\frac{1}{1 - \beta}$.

Les rapports $\frac{1}{1 - \alpha}$, $\frac{1}{1 - \beta}$ ne pourront être égaux que si $\alpha = \beta$; $m\alpha$ étant un entier et $(m + k)\beta = (m + k)\alpha$ étant lui-même un entier, $k\alpha$ devra être un entier.

Si k est le plus petit entier tel que $k\alpha$ soit entier, $2k\alpha$, $3k\alpha$, ... seront eux-mêmes des entiers, et ce seront d'ailleurs les seuls de la forme $H\alpha$, où H est un nombre entier.

Les séries composées de m , $m + k$, $m + 2k$, $m + 3k$, ... épreuves seront donc les seules où l'on pourra rencontrer les répartitions

$m\alpha$	événements A	et	$m - m\alpha$	événements B,
$(m + k)\alpha$	»	\	$m + k - (m + k)\alpha$	» B,
$(m + 2k)\alpha$	»	A	$m + 2k$	$(m + 2k)\alpha$ » B,

où le rapport du nombre d'arrivées de l'événement A au nombre d'arrivées de l'événement B est constamment $\frac{1}{1-\alpha}$.

Or,

$$T_{m\alpha} < e^{\frac{1}{12m}} \frac{m^m}{(m\alpha)^{m\alpha} (m-m\alpha)^{m-m\alpha}} \sqrt{\frac{m}{2\pi m\alpha(m-m\alpha)}} p^{m\alpha} q^{m-m\alpha}$$

ou

$$T_{m\alpha} < e^{\frac{1}{12m}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha(1-\alpha)}} \left[\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^\alpha q^{1-\alpha} \right]^m;$$

de même,

$$T_{(m+k)\alpha} > e^{-\frac{1}{12} \left[\frac{1}{(m+k)\alpha} + \frac{1}{(m+k)(1-\alpha)} \right]} \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(m+k)\alpha(1-\alpha)}} \left[\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^\alpha q^{1-\alpha} \right]^{m+k};$$

donc

$$\frac{T_{(m+k)\alpha}}{T_{m\alpha}} < e^{-\frac{1}{12} \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)(m+k)} \right]} \left[\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^\alpha q^{1-\alpha} \right] \sqrt{\frac{m}{m+k}}.$$

Étudions la *fonction de p*

$$\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^\alpha (1-p)^{1-\alpha},$$

dont la dérivée est

$$\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^{\alpha-1} (1-p)^{-\alpha} (\alpha-p).$$

Quand $p < \alpha$, la dérivée étant positive, la fonction croît; quand $p > \alpha$, la dérivée étant négative, la fonction décroît (cf. n° 14); la fonction est donc *maximum* pour $p = \alpha$. Or, pour $p = \alpha$, la fonction prend la valeur 1. Donc 1 est un maximum et

$$\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} p^\alpha (1-p)^{1-\alpha} \leq 1.$$

Par suite,

$$\frac{T_{(m+k)\alpha}}{T_{m\alpha}} \leq e^{-\frac{1}{12} \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)(m+k)} \right]} \sqrt{\frac{m}{m+k}} < 1;$$

donc, la probabilité que le rapport du nombre d'événements A au nombre d'événements B sera $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ décroît quand le nombre d'épreuves passe de m à $m+k$.

De même quand on passe de $m + k$ à $m + 2k$ épreuves, et ainsi de suite.

La fonction

$$\frac{1}{x^\alpha(1-x)^{1-\alpha}} p^\alpha(1-p)^{1-\alpha}$$

étant d'autant moindre que p est plus éloigné de x , ou, ce qui est la même chose, que x est plus éloigné de p , la probabilité que le rapport du nombre d'événements A au nombre d'événements B sera $\frac{x}{1-x}$ décroît d'autant plus vite, quand le nombre des épreuves croît, que x s'écarte plus de la probabilité p de l'événement A ou que le rapport $\frac{x}{1-x}$ du nombre d'arrivées de l'événement A au nombre d'arrivées de l'événement B s'écarte davantage du rapport $\frac{p}{q}$ des probabilités respectives des événements A, B.

§9. III. *On a une probabilité toujours croissante que le rapport du nombre des événements A à celui des événements B ne s'écartera pas du rapport de leurs probabilités respectives p, q au delà de certaines limites données; et, quelque resserrées qu'on prenne ces limites, la probabilité dont il s'agit pourra approcher de l'unité autant qu'on le voudra, pourvu qu'on augmente suffisamment le nombre des épreuves.*

Cette proposition est la base du CALCUL DES PROBABILITÉS, car, en la regardant comme un fait d'expérience, nous avons défini à son aide la PROBABILITÉ MATHÉMATIQUE. Il est bon de constater, comme nous allons le faire, qu'elle est une conséquence de la définition de la Probabilité.

Soient p et $q = 1 - p$ les probabilités de deux événements contradictoires A, B. La probabilité que sur m épreuves successives B se présentera α fois et A, $m - \alpha$ fois, est représentée par le terme en $p^{m-\alpha}q^\alpha$ du développement du binôme $(p + q)^m$ et est donnée par la formule

$$T_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^{m-\alpha}q^\alpha \quad (\text{cf. n}^\circ 38).$$

On en déduit

$$(1) \quad \frac{T_x}{T_{x-1}} = \frac{m-x+1}{x} \frac{q}{p} = \frac{m-x+1}{x} \frac{q}{1-q},$$

rapport > 1 ou < 1 selon que

$$x < (m+1)q \quad \text{ou} \quad x > (m+1)q.$$

Le plus grand terme sera donc T_n , n étant le plus grand entier contenu dans $(m+1)q$. Ce nombre n sera $> (m+1)q - 1$, mais $\leq (m+1)q$.

Cela posé, nous allons étudier la somme

$$S = T_n \lambda + \dots + T_n + T_{n+1} + \dots + T_{n+\lambda-1},$$

λ étant un entier fixe ou variable, dont nous donnerons la forme plus loin.

Nous allons montrer que

$$(p+q)^m - S$$

tend vers 0 quand m croît indéfiniment; $(p+q)^m = 1^m$ étant égal à 1, il en résultera que S tend vers 1 quand m croît indéfiniment, et le théorème précédemment énoncé sera démontré.

n est l'entier immédiatement supérieur à $(m+1)q - 1$ ou $m - (1-q) = mq - p$; on peut donc poser

$$n = mq - p + \varepsilon,$$

d'où

$$m - n = (m+1)p - \varepsilon,$$

$$n + 1 = (m+1)q + \varepsilon.$$

Il vient alors (1)

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n \frac{m-n}{n+1} \frac{q}{p} = T_n \frac{(m+1)p - \varepsilon}{(m+1)q + \varepsilon} \frac{q}{p} \\ &= T_n \frac{1 - \frac{\varepsilon}{(m+1)p}}{1 + \frac{\varepsilon}{(m+1)q}} < \frac{T_n}{1 + \frac{\varepsilon}{(m+1)pq}}, \end{aligned}$$

$$T_{n+2} = T_{n+1} \frac{m-n-1}{n+1+1} \frac{q}{p} = T_{n+1} \frac{1 - \frac{\varepsilon+1}{(m+1)p}}{1 + \frac{\varepsilon+1}{(m+1)q}} < \frac{T_{n+1}}{1 + \frac{\varepsilon+1}{(m+1)pq}}$$

et

$$\begin{aligned} T_{n+\lambda+1} &= T_{n+\lambda} \frac{m-n-\lambda}{n+1+\lambda} \frac{q}{p} \\ &= T_{n+\lambda} \frac{1 - \frac{\varepsilon + \lambda}{(m+1)p}}{1 + \frac{\varepsilon + \lambda}{(m+1)q}} < \frac{T_{n+\lambda}}{1 + \frac{\varepsilon + \lambda}{(m+1)pq}}. \end{aligned}$$

Multiplions ces inégalités membre à membre; il vient *a fortiori*, en négligeant ε ,

$$\frac{T_{n+\lambda+1}}{T_n} < \prod_{x=1}^{x=\lambda} \frac{1}{1 + \frac{x}{(m+1)pq}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{T_{n+\lambda+1}}{T_n} < \prod_{x=1}^{x=\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\lambda+1-x}{(m+1)pq}}.$$

Multiplions ces deux inégalités membre à membre, facteur par facteur, et extrayons la racine carrée; comme

$$\left(1 + \frac{x}{(m+1)pq}\right) \left(1 + \frac{\lambda+1-x}{(m+1)pq}\right) > 1 + \frac{\lambda+1}{(m+1)pq},$$

il vient *a fortiori* ($T_n < 1$)

$$T_{n+\lambda+1} < T_n \left(1 + \frac{\lambda+1}{(m+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} < \left(1 + \frac{\lambda}{(m+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

Cette inégalité est symétrique en p, q . On en conclut que *tout terme à une distance supérieure à λ du terme T_n est moindre que*

$$\left(1 + \frac{\lambda}{(m+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}},$$

donc, *la somme de tous ces termes (dont le nombre est $< m$) est moindre que*

$$\frac{m}{\left(1 + \frac{\lambda}{(m+1)pq}\right)^{\frac{\lambda}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$(p + q)^m - S = 1 - S < \frac{m}{\left(1 + \frac{\lambda}{(m+1)pq}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Ce résultat acquis, soit l un nombre fixe aussi petit qu'on veut. Prenons λ supérieur à $l(m+1)$; on aura

$$1 - S < \frac{m}{\left[\left(1 + \frac{l}{pq}\right)^{\frac{l}{2}}\right]^{m+1}}.$$

Quand m croît indéfiniment, le dénominateur croît comme une exponentielle et est infiniment grand par rapport à m ; le quotient tend donc vers zéro et S tend vers un (1).

Nota. — On a donné des démonstrations des théorèmes de Bernoulli basées sur l'expression approchée de T_α . Ces démonstrations n'ont aucune valeur.

60. En de beaux travaux, MM. Mansion (2) et de la Vallée-Poussin (3) ont donné des limites inférieures de la probabilité d'un écart déterminé.

La limite indiquée par M. de la Vallée-Poussin est plus resserrée que celle indiquée par M. Mansion.

61. Le cas d'un écart de la forme

$$\lambda = \mu \sqrt{2mpq}$$

est particulièrement intéressant. La probabilité qu'il ne soit pas dépassé est en effet

$$\mathfrak{E}_{mp, \mu \sqrt{2mpq}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\mu e^{-t^2} dt.$$

Cette probabilité tend rapidement vers la *certitude* quand le

(1) Démonstration communiquée par M. de la Vallée-Poussin. — Cf. aussi JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II, n° 183 et suivants, et GOEDSELS, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XVII, p. 8.

(2) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXVI, 2^e Partie, p. 191.

(3) *Même Ouvrage*, t. XXXI, 2^e Partie, p. 219.

nombre μ croît. En effet,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{mp, \sqrt{2mpq}} &= 0,8427008, & \mathfrak{E}_{mp, 2\sqrt{2\mu p}} &= 0,9953223, \\ \mathfrak{E}_{mp, 3\sqrt{2\mu p}} &= 0,9999779, & \mathfrak{E}_{mp, 4\sqrt{2mpq}} &= 0,9999998. \end{aligned}$$

Pratiquement, on peut regarder l'écart $2\sqrt{2mpq}$ comme n'étant presque jamais dépassé.

Pour $m = 32$, $m = 50$, $m = 72$, $m = 98$, et des probabilités $\frac{1}{2}$, les écarts correspondants sont

$$8, \quad 10, \quad 12, \quad 14.$$

A la roulette, il n'y a donc qu'une très faible chance pour que sur 32, 50, 72, 98 coups l'une des billes sorte respectivement moins de 8 fois et plus de 24 fois, moins de 15 fois et plus de 35 fois, moins de 24 fois et plus de 48 fois, moins de 35 fois et plus de 63 fois.

Il y a en effet 995 à parier contre 5 *au moins* (199 contre 1) que ces écarts ne seront pas dépassés.

Il y aurait plus de 33332 à parier contre 1 que les écarts

$$12, \quad 15, \quad 18, \quad 21$$

ne seraient pas dépassés.

Il y a cependant lieu de se rappeler que ces résultats sont approximatifs, comme la formule qui leur sert de base.

On remarquera que, si le rapport du nombre d'arrivées de l'événement A au nombre d'arrivées de l'événement B tend vers le rapport $\frac{p}{q}$ des probabilités respectives des événements A, B, l'écart moyen

$$\lambda = \sqrt{\frac{2mpq}{\pi}}$$

croît indéfiniment avec m .

Les limites moyennes du nombre d'arrivées de l'événement A, qui sont

$$mp - \sqrt{\frac{2mpq}{\pi}} \quad \text{et} \quad mp + \sqrt{\frac{2mpq}{\pi}},$$

diffèrent de plus en plus l'une de l'autre.

62. **Théorème de Poisson** (démontré par M. Mansion) ⁽¹⁾. — *Dans les applications du Calcul des probabilités aux sciences d'observation, on ne peut presque jamais appliquer directement le troisième théorème de Bernoulli. La probabilité des événements en jeu est, en effet, variable d'ordinaire d'une série d'épreuves à l'autre.*

Posons

$$p + q = 1, \quad p_1 + q_1 = 1, \quad p_2 + q_2 = 1$$

$$(0 < p_1 \leq p \leq p_2 < 1),$$

$$T = l \sqrt{\frac{m}{2pq}} = l_1 \sqrt{\frac{m}{2p_1q_1}} = l_2 \sqrt{\frac{m}{2p_2q_2}},$$

où m et T sont constants et où l, l_1, l_2 sont des fractions respectivement inférieures à p et q, p_1 et q_1, p_2 et q_2 .

L'expression $p - l$ croît ou décroît en même temps que p , car

$$p - l = p - \frac{T \sqrt{2pq}}{\sqrt{m}} = \sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{T \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{1-p} \right).$$

L'expression

$$p + l = 1 - (q - l)$$

croît aussi avec p ; en effet, si p croît, $q = 1 - p$ décroît, et il en est de même de $q - l$; donc $p + l$ croît.

Il résulte de là que

$$p_1 - l_1 \leq p - l \leq p_2 - l_2, \quad p_1 + l_1 \leq p + l \leq p_2 + l_2,$$

et aussi

$$m(p_1 - l_1) \leq m(p - l) \leq m(p_2 - l_2),$$

$$m(p_1 + l_1) \leq m(p + l) \leq m(p_2 + l_2).$$

Donc, lorsque p varie de p_1 à p_2 , l'intervalle

$$m(p - l), m(p + l)$$

est toujours compris dans l'intervalle I plus grand

$$m(p_1 - l_1), m(p_2 + l_2).$$

Or, M. Mansion a montré ceci : la probabilité que, sur m

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

épreuves, le nombre d'arrivées de l'événement A sera compris dans l'intervalle

$$m(p-l), m(p+l)$$

dépassera l'expression

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2mp_3q_3}},$$

où p_3q_3 est le plus petit des produits p_1q_1, p_2q_2 , pourvu que :

1° l soit inférieur à la plus petite des quantités $\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}q_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}q_2$;

2° m soit au moins égal à 10 et à la plus grande des quantités

$$\frac{1}{p_1^2}, \frac{1}{q_1^2}, \frac{1}{p_2^2}, \frac{1}{q_2^2}.$$

La probabilité que, sur m épreuves, le nombre des répétitions de l'événement A sera compris dans l'intervalle

$$m(p_1-l_1), m(p_2+l_2)$$

surpassera évidemment P' , c'est-à-dire sera de la forme

$$P' + \alpha \quad (\alpha > 0).$$

Supposons donc qu'un certain événement A soit soumis, ainsi que son contraire, à m épreuves répétées, et cela k fois. Supposons que sa probabilité p varie d'une épreuve à l'autre dans les limites $p_1 \leq p \leq p_2$, la probabilité étant invariable lors de chaque épreuve :

DANS CHACUNE DE CES SÉRIES D'ÉPREUVES, LA PROBABILITÉ QUE LE NOMBRE D'APPARITIONS DE L'ÉVÉNEMENT SERA COMPRIS DANS L'INTERVALLE $m(p_1-l_1), m(p_2+l_2)$ SURPASSE L'EXPRESSION

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2mp_3q_3}}.$$

A consulter : H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*; Paris, 1896. — LAPLACE, *Théorie analytique du Calcul des probabilités*; Paris, 1812, ou éditions suivantes.



CHAPITRE III.

LES JEUX DE HASARD ET L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.

63. L'étude des jeux de hasard a donné naissance au Calcul des probabilités. C'est une de ses plus intéressantes applications.

Il est évident que, Pierre et Paul jouant une partie d'un jeu déterminé, si Pierre a p chances de gagner et Paul q chances de gagner, l'enjeu de Pierre doit être np et celui de Paul nq . En effet, si l'on joue $p + q$ parties, Pierre en gagnera p , il gagnera p fois l'enjeu de Paul, il gagnera $p \times nq$; Paul gagnera de même $q \times np$; ces deux nombres sont égaux, comme le veut la justice.

I. — JEUX DE PUR HASARD.

64. **Jeux de dés.** — Nous avons parlé de ce jeu précédemment. On peut se poser à son sujet diverses questions que le lecteur pourra résoudre sans peine.

65. **Jeu de la roulette.** — Nous examinerons seulement le jeu de *rouge et noire*. Encore admettrons-nous que la roulette n'a pas de zéro (on sait qu'à Monaco la roulette porte 18 numéros rouges, 18 noirs et un zéro; quand un numéro rouge, par exemple, sort, les joueurs qui ont misé sur la couleur rouge voient leur enjeu doublé, les joueurs qui ont misé sur la couleur noire se voient prendre leur mise; si le zéro sort, les mises sur rouge et les mises sur noir sont emprisonnées : les joueurs n'y peuvent plus toucher (1). Au coup *suivant*, les joueurs dont la couleur sort retirent leur enjeu tel quel, les autres le perdent). Supposer

(1) La banque prend les enjeux des joueurs ayant misé sur un numéro particulier.

l'absence de zéro revient à accroître légèrement les chances des joueurs.

Examinons les coups qui peuvent avoir lieu, en supposant le premier coup *noir*.

Premier coup :

N.

Ensemble du premier et du deuxième coups :

NN, NR.

Ensemble des trois premiers coups :

NNN, NNR, NRN, NRR.

Ensemble des quatre premiers coups :

NNNN, NNNR, NNRN, NNRR, NRNN, NRNR, NRRN, NRRR.

Ici, nous avons 1 coup de 4 noires, 3 coups de 3 noires, 3 coups de 2 noires, 1 coup de 1 noire.

En adjoignant à ces coups ceux qui commencent par une rouge, nous aurions en plus :

1 coup de 4 rouges, 3 coups de 3 rouges, 3 coups de 2 rouges, 1 coup de 1 rouge, ce qui équivaut à :

1 coup de 0 noire, 3 coups de 1 noire, 3 coups de 2 noires, 1 coup de 3 noires; donc, pour les 16 combinaisons également possibles que peuvent donner 4 coups consécutifs :

1 coup de 4 noires, 4 coups de 3 noires, 6 coups de 2 noires, 4 coups de 1 noire, 1 coup de 0 noire.

Ainsi, comme on l'a dit plus haut (*cf.* nos 42, 43), il y a plus de chances d'amener un coup composé de 2 noires et 2 rouges qu'un coup composé de 1 noire et 3 rouges ou 3 noires et 1 rouge...

Pour 1 coup de 4 noires, l'écart est... $mp - 4 - 4 \frac{1}{2} - 4 = -7$

» 1 » 3 » » ... $mp - 3 - 4 \frac{1}{2} - 3 = -1$

» 1 » 2 » » ... $mp - 2 = 4 \frac{1}{2} - 2 = 0$

» 1 » 1 » » ... $mp - 1 = 4 \frac{1}{2} - 1 = 1$

» 1 » 0 » » ... $mp - 0 - 4 \frac{1}{2} - 0 = 2$

($m = 4, p = 2$).

Nous avons donc

1	coup	avec	l'écart	— 2	et	1	avec	l'écart	2
4	»	»	»	— 1	et	4	»	»	1
6	»	»	»	0					

Il y a 6 à parier contre 10 que l'écart sera nul, 8 à parier contre 8 qu'il sera 1 ou — 1, 14 contre 2 à parier que l'écart sera compris entre — 2 et 2, etc.

66. **Problème.** — *Pierre s'assied à une table de roulette; peut-il jouer sur l'écart de 4 coups à venir avec quelques chances de gain?*

Si Pierre pouvait parier que l'écart 0 est le plus probable, que l'écart sera compris entre 2 et — 2, il pourrait jouer sur l'écart avec quelque chance de gain; cela dépendrait des conditions du jeu, c'est évident. Mais Pierre ne peut que jouer *rouge* ou jouer *noire*.

Supposons que *noire* sorte au premier coup.

La *partie* portera sur l'une des 8 combinaisons :

NNNN, NNNR, NNRN, NNRR, NRNN, NRNR, NRRN, NRRR.

Supposons que la combinaison NNRN sorte.

Pierre joue à combler l'écart. Il joue donc, comme il est indiqué en lettres minuscules :

NNRN
r r r

et perd 1 mise.

De même pour les autres coups, sauf si rouge sort au second coup; alors il s'arrête, car il n'y a plus d'écart à combler :

NNNN	NNNR	NNRN	NNRR	NRNN	NRNR	NRRN	NRRR
r r r	r r r	r r r	r r r	r	r	r	r
— 3	— 1	— 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1

En dessous de chaque combinaison, on a indiqué le gain (+) ou la perte (—).

Que résulte-t-il de ce Tableau? Que les chances de perte et de gain se balancent.

Donc : *Pierre ne peut pas jouer sur l'écart de 4 coups à*

venir avec quelque chance de gain. La présence du zéro fait même qu'il est assuré de perdre.

Ce qui est vrai de l'écart de 4 l'est de l'écart de 5, de celui de 6, etc.

67. Avantage du banquier à la roulette (d'après les règles de jeu de Monaco). — Quand le zéro sort, personne ne touche aux mises.

Si rouge sort après le zéro, le banquier rend les mises rouges et prend les mises noires. Il gagne les mises noires, sans rien perdre sur les rouges.

De même si noire sort après le zéro.

Le banquier gagne donc, en moyenne, la moitié des mises chaque fois que le zéro sort.

Le zéro sortant *en moyenne* une fois sur 37 fois, le banquier gagne *en moyenne* la moitié du $\frac{1}{37}$ des enjeux, soit le $\frac{1}{74}$ des enjeux.

68. Petits chevaux. — Le jeu des petits chevaux peut tout à fait se comparer au jeu de roulette, sauf que le zéro a ici plus d'importance : on donne en effet sept fois la mise et le nombre des chevaux est 8. On peut jouer quatre numéros à la fois, ce qui revient à jouer à rouge et noire.

Il est à remarquer que, dans la plupart des jeux de petits chevaux, un, deux, trois numéros sortent de préférence aux autres, ces numéros variant d'ailleurs d'un jour à l'autre. Cela tient soit à un défaut de l'appareil, soit au coup de main du banquier. Remarquer ces numéros peut conduire à un gain, que le Calcul des probabilités ne prévoit pas.

69. Trente et quarante. — *Le trente et quarante se joue, comme la roulette et les petits chevaux, entre un banquier et un nombre indéterminé de pontes. On y emploie 6 jeux complets qu'on a mêlés ensemble. Les figures valent dix points; les autres cartes, y compris l'as qui compte pour un point, comptent pour les points qu'elles marquent. Le tapis porte deux cartons, un rouge et un noir. Les pontes placent leur mise*

sur la couleur qui leur convient. Cela fait, le banquier tire une à une les cartes du jeu et les étale sur le tapis, les unes à côté des autres. Il s'arrête quand la somme des points que marquent les cartes dépasse 40, après avoir atteint 31; il commence alors une nouvelle rangée, le nombre de points de la première n'étant pas inférieur à 31, ni supérieur à 40, et termine la seconde rangée comme il a terminé la première.

La première rangée correspond à la couleur noire et la seconde à la couleur rouge.

Si les rangées ont chacune 31 points, le banquier prend la moitié de chacun des enjeux.

Si les rangées ont même nombre de points, sauf 31, le coup est nul; on dit qu'il y a refait.

Si le nombre de points de la première rangée est plus proche de 31 que le nombre de points de la seconde rangée, les noirs gagnent et les rouges perdent; le banquier double les enjeux du tableau noir et prend les enjeux du tableau rouge. Les rouges gagnent dans le cas contraire.

Quelle est la probabilité du refait de 31, autrement dit, quelle est la chance du banquier?

Poisson a trouvé pour valeur approchée du refait 31 le nombre

$$0,021967.$$

Il suppose qu'on ait réuni 8 jeux.

Nous allons traiter le problème (1) en négligeant l'influence des cartes sorties sur les probabilités des divers points. Nous trouverons un nombre sensiblement égal à celui de Poisson.

Soit P_n la probabilité pour que, en abattant successivement les cartes, la somme prenne à un certain moment la valeur n .

La somme 1 ne peut se produire qu'au premier coup, si l'on abat un as. La probabilité pour cela est $\frac{1}{13}$; on a

$$P_1 = \frac{1}{13}.$$

La somme 2 peut se produire de deux manières : 2 au premier

(1) BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 35.

coup; as au premier, as au second. On a

$$P_2 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{13} \left(1 + \frac{1}{13}\right).$$

La somme 3 peut se produire de trois manières : 3 au premier coup; 2 et as; as et 2; 3 as; d'où

$$P_3 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} P_2 + \frac{1}{13^2} = \frac{1}{13} \left(1 + \frac{1}{13}\right)^2.$$

On a, en général, tant que n est inférieur à 10,

$$P_n = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} P_1 + \frac{1}{13} P_2 + \dots + \frac{1}{13} P_{n-1}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{array}{lll} P_1 = 0,076927, & P_4 = 0,096075, & P_7 = 0,117995, \\ P_2 = 0,072846, & P_5 = 0,108465, & P_8 = 0,129226, \\ P_3 = 0,089212, & P_6 = 0,111424, & P_9 = 0,139166. \end{array}$$

A partir du point 10, les conditions changent; 4 cartes différentes, en effet, les dix et 3 figures, peuvent amener 10 points.

On a

$$P_{10} = \frac{4}{13} + \frac{1}{13} (P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_9) = 0,380641.$$

Au-dessus de $n = 10$, la formule évidente

$$P_n = \frac{1}{13} (P_{n-1} + P_{n-2} + \dots + P_{n-9}) = \frac{4}{13} P_{n-10}$$

donne

$$\begin{array}{lll} P_{11} = 0,120218, & P_{18} = 0,151978, & P_{25} = 0,149593, \\ P_{12} = 0,124908, & P_{19} = 0,156021, & P_{26} = 0,151192, \\ P_{13} = 0,129613, & P_{20} = 0,213024, & P_{27} = 0,152728, \\ P_{14} = 0,134304, & P_{21} = 0,140033, & P_{28} = 0,154272, \\ P_{15} = 0,139398, & P_{22} = 0,142640, & P_{29} = 0,155382, \\ P_{16} = 0,143167, & P_{23} = 0,145089, & P_{30} = 0,168488, \\ P_{17} = 0,147143, & P_{24} = 0,147362, & P_{31} = 0,148218. \end{array}$$

La probabilité d'obtenir 31 étant P_{31} , celle de l'obtenir 2 fois

est $(P_{3,1})^2$, soit

$$0,0219686.$$

Ce nombre diffère peu de celui donné par Poisson. On peut donc admettre que le banquier a 22 chances sur 1000 qu'il gagnera la $\frac{22}{1000}$ partie des enjeux ou un peu plus du $\frac{1}{50}$.

A la roulette (rouge et noire) le banquier gagne le $\frac{1}{74}$ des enjeux, soit les $\frac{15}{1000}$; le ponté a donc avantage à jouer à la roulette (rouge ou noire) plutôt qu'au trente et quarante.

70. Baccara. — *Le jeu de baccara se joue entre un banquier d'une part et des pontes formant un ou deux tableaux. Le banquier a devant lui plusieurs jeux de 52 cartes, mêlés, et il taille, il distribue les cartes. A chaque coup, il donne deux cartes par tableau et en prend deux pour lui-même en les distribuant une par une. Chacun dissimule son jeu. Cela fait, il additionne les points marqués sur ses cartes, l'as comptant pour un, les basses cartes pour les points qu'elles marquent, les figures pour zéro. Toutes les fois que les points additionnés donnent 10, on retranche ce nombre. Le maximum possible est donc 9. L'addition faite, deux hypothèses peuvent se présenter : ou bien le total des points du banquier est 8 ou 9, ou bien il est inférieur à ce chiffre. Dans la première, le banquier abat son jeu. Il gagne les enjeux de l'un des tableaux si le point de ce tableau est inférieur à 8; le coup avec ce tableau est nul si le point du tableau est 8; ce tableau gagne si son point est 9; en ce cas le banquier double les enjeux du tableau; de même pour l'autre tableau, qui est indépendant du premier. Dans la seconde hypothèse le banquier est obligé d'offrir une carte; l'adversaire abat s'il a 8 ou 9 et le banquier double les enjeux du tableau; si l'adversaire n'a pas 8 ou 9, il accepte ou refuse la carte, à son idée : son jeu est de s'approcher de 9, sans le dépasser. Le banquier, s'il n'a pas 8 ou 9, peut toujours prendre une carte, on dit : tirer. Ces opérations finies, banquiers et pontes abattent leurs jeux. Le banquier gagne et prend les mises si son point est le plus fort (il ne doit pas dépasser 9, on retranche 10 autant qu'il est possible); il perd et double les mises si son point est le plus faible.*

Nous traiterons la seule question que voici :

Est-il avantageux pour le ponte ou pour le banquier de demander une carte quand il a le point 5 (')?

Le ponte reçoit deux cartes, le banquier en prend deux. Le ponte a le droit de demander une carte qui s'adjoint aux deux premières ou de s'y tenir en gardant son jeu.

Le banquier a les mêmes droits, mais il a l'avantage, avant de prendre sa décision, de savoir si l'adversaire a demandé une carte et de connaître celle qu'il a reçue.

Tous les points *sauf* 10 (ou zéro) ont comme probabilité, quand on donne les cartes, $\frac{16}{169} = 0,09467$; 10 a comme probabilité $\frac{25}{169} = 0,1479$: il est aisé de le voir.

Quand un joueur demande une carte, quel que soit le point qu'il ait, il a la probabilité $\frac{4}{13}$ de le conserver en recevant un *dix* et la probabilité $\frac{1}{13}$ de le changer pour un quelconque des autres points, qui deviennent tous également probables.

A propos de la question posée, il faut résoudre quatre problèmes :

α. Le ponte ayant 5 et ne demandant pas de carte, quelle est pour lui la probabilité de gagner et quelle est celle de faire coup nul, lorsque le banquier, ignorant qu'il a le point 5, sait qu'il a l'habitude, quand il a ce point, de demander une carte?

β. Le ponte ayant 5 et ne demandant pas de carte, quelles sont pour lui les probabilités de gagner ou de faire coup nul, lorsque le banquier, ignorant qu'il a le point 5, croit qu'il a l'habitude, quand il a ce point, de demander une carte?

γ. Le ponte ayant 5 et demandant une carte, quelles sont pour lui les probabilités de gagner ou de faire coup nul, lorsque le banquier connaît son habitude de demander une carte dans cette circonstance, ou

δ. Lorsqu'il croit savoir qu'il n'en demande pas?

Résolvons le premier problème.

Le ponte a 5. Le banquier l'ignore. En le voyant s'y tenir, il

(') BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 38.

apprend qu'il a 5, 6 ou 7. Ces trois cas ont chacun pour probabilité $\frac{1}{3}$. Huit suppositions peuvent être faites : le banquier peut avoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Les probabilités des huit hypothèses étaient $\frac{25}{169}$ pour le point 0 et $\frac{16}{169}$ pour les autres, au moment où les cartes ont été données. Mais on n'a pas abattu. Les points 8 et 9 ne sont pas possibles. Les probabilités deviennent

$$\frac{25}{137} = 0,18248 \quad \text{et} \quad \frac{16}{137} = 0,01679.$$

Que fera le banquier? S'il a 0, 1, 2, 3 ou 4, il prendra une carte. Il pourra hésiter s'il a 5 ou 6, et il faut résoudre cette question incidente : dans les circonstances supposées, c'est-à-dire le ponté s'y étant tenu et ayant l'habitude de ne pas tirer à 5, le banquier doit-il tirer à 6, doit-il tirer à 5?

Nous ferons le calcul pour le cas où le banquier a le point 6; il se compose de deux autres :

*Quelle est la probabilité de gagner pour le banquier qui, ayant 6, demande une carte dans les conditions supposées ?
Quelle est la probabilité s'il ne demande pas de carte ?*

Si le banquier ayant 6 ne tire pas, il a la probabilité $\frac{1}{3}$ de perdre le ponté ayant 7, $\frac{1}{3}$ de gagner le ponté ayant 5, $\frac{1}{3}$ de faire coup nul.

Si le banquier ayant 6 prend une carte, il acquiert la probabilité $\frac{1}{13}$ d'avoir chacun des 9 points autres que 6 et $\frac{4}{13}$ d'avoir celui-là.

La probabilité de perdre contre l'adversaire dont le point est 5, 6, 7 doit s'évaluer par l'énumération des cas :

Il a la probabilité $\frac{5}{13}$ de perdre avec les points 0, 1, 2, 3, 4; la probabilité $\frac{1}{13}$ pour avoir, avec le point 5, probabilité $\frac{1}{3}$ de faire coup nul et $\frac{2}{3}$ de perdre; la probabilité $\frac{4}{13}$ pour avoir, avec le point 6, probabilité $\frac{1}{3}$ de gagner, $\frac{1}{3}$ de faire coup nul et $\frac{1}{3}$ de perdre; probabilité $\frac{1}{13}$ pour acquérir, avec le point 7, probabilité $\frac{2}{3}$ de

gagner, $\frac{1}{3}$ de faire coup nul ; probabilité $\frac{2}{13}$ enfin, de gagner avec le point 8 ou avec le point 9.

La probabilité de gagner est, d'après cette énumération,

$$\frac{4}{13} \frac{1}{3} + \frac{1}{13} \frac{2}{3} + \frac{2}{13} = \frac{4}{13} ;$$

celle de faire coup nul,

$$\frac{1}{13} \frac{1}{3} + \frac{4}{13} \frac{1}{3} + \frac{1}{13} \frac{1}{3} = \frac{2}{13} .$$

La probabilité de gagner était $\frac{1}{3}$; elle devient $\frac{4}{13}$: elle a diminué. Celle de faire coup nul a également diminué ; *le banquier dans les conditions supposées ne doit pas tirer à 6, mais il doit tirer à 5, comme le montre un calcul tout semblable.*

De même, si le ponte se tient à 5, le banquier sachant qu'il a cette habitude, *le ponte a comme probabilités :*

De gagner.....	0,441694
De faire coup nul.....	0,087907
De perdre.....	0,469400

De même encore, si le ponte qui a 5 demande une carte, le banquier sachant qu'il a cette habitude, *le ponte a comme probabilités :*

De gagner.....	0,441348
De faire coup nul.....	0,120935
De perdre.....	0,434717

Si le ponte qui a 5 s'y tient, faisant croire au banquier qu'il a l'habitude de demander des cartes, *les probabilités en faveur du ponte sont :*

De gagner.....	0,489612
De faire coup nul.....	0,094890
De perdre.....	0,415497

Si le ponte ayant 5 demande une carte en faisant croire au banquier qu'il a l'habitude de s'y tenir, *les probabilités en sa faveur sont :*

De gagner.....	0,447113
De faire coup nul.....	0,126463
De perdre.....	0,426424

Le lecteur pourra faire, à titre d'exercices, les calculs qui conduisent à ces résultats, et qui sont en tout semblables à ceux indiqués au début.

Et si le banquier ignore ce que fait le ponte quand il a 5 ? On ne peut rien dire. On ne peut calculer la chance du ponte qui a 5, car elle dépend de la chance incalculable que le ponte a de tirer à 5.

En résumé :

Si, sans jouer au plus fin, dès le début de la partie, le ponte déclare franchement ses habitudes, il doit tirer à 5 ;

Si les conventions du jeu permettent la ruse, il doit se tenir à 5, faisant croire au banquier, s'il le peut, qu'il a l'habitude de tirer.

Voici quelques indications complémentaires concernant le jeu propre du banquier; nous les donnons sans démonstration.

En aucun cas, le banquier ne doit s'y tenir à moins de 3, ni tirer à 7.

Dans le cas d'un ponte ne tirant pas à 5, le banquier doit s'y tenir :

Seulement à 3 s'il donne un 8 ou un 9, seulement à 4 s'il donne un 10 ou un as, seulement à 5 s'il donne un 2 ou un 3.

Il doit indifféremment s'y tenir ou tirer à 5 s'il donne un 4.

Il doit tirer seulement à 6 s'il donne un 5 ou si le ponte s'y est tenu, et seulement à 7 s'il donne un 6 ou un 7.

Quand on a affaire à un ponte qui a l'habitude de tirer à 5, le banquier doit s'y tenir :

Seulement à 3 s'il donne un 8, seulement à 4 s'il donne un 9 ou un 10, seulement à 5 s'il donne un as, un 2, un 3, seulement à 6 s'il donne un 4, un 5, un 6, seulement à 7 s'il donne un 7 ou si le ponte s'y est tenu.

Dans le cas d'un ponte douteux, c'est-à-dire s'y tenant ou tirant indifféremment à 5, le banquier doit s'y tenir seulement à 3 s'il donne un 8, indifféremment s'y tenir ou tirer à 3 s'il donne un 9, s'y tenir seulement à 4 s'il donne un 10 ou un as, seulement à 5 s'il donne un 2 ou un 3, seulement à 6 s'il donne un 4 ou un 5 ou si le ponte s'y est tenu, seulement à 7 s'il donne un 6 ou un 7 (1).

(1) E. DORMOY, *Théorie mathématique du jeu de baccara.*

II. — PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG. RUINE DES JOUEURS.

71. **Problème.** — *Pierre et Paul jouent aux conditions suivantes : on jette une pièce de monnaie en l'air. Si elle montre face, Pierre donne 1 franc à Paul. Si elle montre pile, la pièce est jetée de nouveau; si face arrive à ce second coup, Pierre donne 2 francs à Paul; si la pièce montre pile, elle est lancée à nouveau et ainsi de suite. La partie est terminée, soit après n coups (n est un nombre fixé au début) si face ne s'est pas montrée, soit dès que face se montre; si cela a lieu au $p^{\text{ième}}$ coup, Pierre donne 2^{p-1} francs à Paul. Quel sera le gain moyen de Paul?*

Au premier coup, pile et face ont égale chance de se montrer, soit $\frac{1}{2}$; le gain moyen de Paul pour le premier coup est $\frac{1}{2}$.

Au second coup, qui a une chance sur deux d'être joué, pile et face ont égale chance de se montrer, soit encore $\frac{1}{2}$; pile et face ont donc chacune

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

chance de se montrer au second coup; Pierre payant 2^{fr} si face arrive, le gain moyen de Paul au second coup est

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

De même, au troisième coup le gain moyen de Paul sera

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2^2 = \frac{1}{2}.$$

Et ainsi de suite.

Le gain moyen de Paul sera

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2},$$

où $\frac{1}{2}$ est répété n fois, soit

$$\frac{n}{2}.$$

Si donc Pierre et Paul jouent un jeu équitable, Paul devra donner à Pierre $\frac{n}{2}$ francs quand pile se montrera.

72. ET SI LE NOMBRE DES COUPS N'EST PAS LIMITÉ? SI L'ON JETTE INDEFINIMENT LA PIÈCE JUSQU'A CE QUE FACE SE MONTRE?

Si $n = 3$, Paul doit donner 1^{fr}, 50. Cela ne choque pas le bon sens. Il peut gagner tout au plus $2^2 = 4^{\text{fr}}$.

Si $n = 6$, Paul doit donner 3^{fr}. Il peut gagner cependant $2^5 = 32^{\text{fr}}$. Cela prête déjà à réflexion. Sans doute, en jouant souvent à ce jeu, il gagnera bien rarement 32^{fr}. Mais, si Pierre dispose seulement de 500^{fr} par mois pour ses plaisirs, cette perte lui sera sensible.

Pour $n = 14$, Paul peut gagner $2^{13} = 8192^{\text{fr}}$ et n'en perdra que 7.

Pour $n = 32$, Pierre ne pourrait payer, quelque riche qu'il soit, les 2 147 483 648^{fr} qu'il pourrait perdre, du moins dans l'état actuel de nos fortunes. Impossible donc de jouer en supposant $n = 32$, bien que Paul n'ait alors que 16^{fr} à payer au cas où il perdrait.

Bien plus impossible encore de jouer si l'on ne limite pas n .

Le cas d'ailleurs devient bizarre.

Si l'on ne limite pas le nombre de coups, si n est infini, l'enjeu de Paul, qui est $\frac{n}{2}$, devient lui-même infini et Paul doit payer une somme infinie à Pierre quand la pièce montre pile.

On a beaucoup épilogué sur cette question, appelée PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG.

La manière dont nous l'exposons éclaircira peut-être les idées qu'on se fait communément à son sujet.

73. **Problème** (1). — *Pierre et Paul font un nombre illimité de parties à un jeu dont les conditions sont équitables; leur fortunes sont m et n . Quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner l'autre?*

Le jeu devant se prolonger jusqu'à la ruine de l'un des joueurs peut être assimilé à une seule partie dans laquelle celui qui risque m francs devrait, s'il est vainqueur, en obtenir $m + n$. La probabilité que Pierre ruinera son adversaire est donc $\frac{n}{m + n}$.

(1) BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 115.

On peut faire directement le calcul.

Soit y_x la probabilité pour que Pierre ruine Paul au moment où il possède x francs et où Paul, par conséquent, en possède $m + n - x$. On pourra écrire

$$(1) \quad y_x = p y_{x+b} + q y_{x-a}.$$

Lorsque Pierre, en effet, possède x francs, il peut, à la fin de la partie suivante, selon qu'il la gagne ou qu'il la perd, posséder $x + b$ ou $x - a$ francs; il y a donc probabilité p pour que y_x se change en y_{x+b} et probabilité q pour qu'il devienne $x - a$; l'équation en est la conséquence.

pb étant égal à qa , car le jeu est équitable, la solution générale de (1) est de la forme

$$y = \alpha_n + \beta.$$

On a, pour déterminer les constantes,

$$y_0 = 0, \quad y_{m+n} = 1;$$

on en déduit

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{m+n},$$

d'où

$$y_x = \frac{x}{m+n} \quad \text{et} \quad p = y_m = \frac{m}{m+n}.$$

74. Corollaire. — RUINE DES JOUEURS. — *Si Paul est JOUEUR, il joue contre des adversaires en nombre très grand, disposant à eux tous d'un enjeu n très grand. La probabilité*

$$\frac{m}{m+n}$$

qu'il sera finalement ruiné est donc très voisine de un, c'est-à-dire de la certitude. Ainsi, TOUT JOUEUR FINIT PAR SE RUINER, même s'il joue un jeu équitable, un jeu où le banquier n'ait nul avantage. Si le banquier a un avantage, $\frac{1}{78}$, comme à la roulette, par exemple, le joueur perd en moyenne $\frac{1}{78}$ des sommes mises en jeu et se ruine, en moyenne, quand 78 fois sa fortune a passé sur le tapis vert. Les coups de tête font que sa ruine est d'ordinaire plus

rapide. Ce sont, à notre avis, les coups de tête qui, dans un jeu équitable, ruinent les joueurs. Nul ne s'est jamais ruiné à jouer constamment au whist à 1 centime la fiche.

III. — ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.

75. On appelle *espérance mathématique* d'un bénéfice éventuel le produit de ce bénéfice par la probabilité correspondante. L'*espérance mathématique totale* d'un joueur sera la somme des produits des bénéfices éventuels par les probabilités correspondantes. Il est évident qu'un joueur ne sera ni avantagé ni lésé si son espérance mathématique totale est nulle.

On dit alors que le jeu est *équitable*.

Les jeux de hasard ne sont pas équitables, car les pontes jouent avec une espérance mathématique totale négative. L'espérance mathématique nous indique si un jeu est avantageux ou non; elle apprend ce que le jeu doit logiquement faire gagner (par exemple, avantage du banquier au jeu de roulette); mais elle ne donne pas un coefficient représentant, en quelque sorte, la valeur intrinsèque du jeu.

M. Bachelier⁽¹⁾ introduit ici la notion de l'*avantage mathématique*, qui est le rapport de son espérance positive à la somme arithmétique de ses espérances positive et négative. L'avantage mathématique varie, comme la probabilité, de zéro à un. Il est égal à $\frac{1}{2}$ quand le jeu est équitable.

IV. — APERÇU SUR QUELQUES JEUX SAVANTS.

LE WHIST.

76. *Le whist se joue à deux contre deux, avec un jeu de 52 cartes. Les joueurs placés en face l'un de l'autre jouent ensemble contre les deux autres. (Parfois l'un des quatre partenaires est remplacé par un jeu, dit mort, étalé sur la table. Nous ne nous occuperons pas de ce jeu particulier.)*

(¹) *Loc. cit., infra*

L'as est la plus forte carte; viennent ensuite roi, dame, valet, dix, neuf, etc.

Le donneur distribue les cartes une à une (de gauche à droite et non pas de droite à gauche comme dans la plupart des autres jeux). Il retourne la dernière, qui est l'atout, et la met dans son jeu (quand son voisin de gauche a joué sa première carte).

Le premier à jouer, celui qui est à gauche du donneur, joue une carte, le joueur en face du donneur, son partenaire, joue ensuite, le troisième joueur après celui-ci, enfin le donneur. Celui qui a jeté la plus forte carte de la couleur jouée par le premier à jouer ou, de préférence, le joueur qui a coupé (on doit fournir de la couleur jouée par le premier joueur, si l'on en a; si l'on n'en a pas, on peut couper ou jouer une carte quelconque; jouer, en ce cas, une carte quelconque, ne pas couper, s'appelle se défosser) ramasse la levée et la passe à son partenaire qui la met devant lui.

Le joueur qui a fait la levée joue ensuite le premier et les trois autres joueurs jouent comme au premier tour, toujours de gauche à droite.

Les levées vont s'accumulant devant un joueur de l'un et l'autre parti. Une fois les cartes épuisées, on compte les levées de chaque parti. Le parti qui a 7 levées compte 1 point (on dit qu'il fait le trick), celui qui en a 8 compte 2 points, etc., celui qui en a 12 compte 6 points, celui qui les a toutes compte 8 points; on dit qu'il fait schelem. Au whist, les points prennent le nom spécial de fiches. 10 points font gagner la partie.

L'as, le roi, la dame et le valet d'atout s'appellent honneurs.

Avant que la dernière carte soit retournée, le jeu comprend 16 cartes susceptibles de devenir des honneurs et 36 qui ne le sont pas. Après que la dernière carte a été retournée, le jeu se compose de 4 honneurs et de 48 autres cartes.

Lorsque deux partenaires ont ensemble 3 honneurs, ils marquent 2 points; lorsqu'ils ont 4 honneurs, ils marquent 4 points.

Si deux partenaires ont 8 points et qu'ils se trouvent avoir

3 ou 4 honneurs dans leur jeu, ils gagnent la partie sans jouer, par le fait même qu'ils ont les honneurs.

A 9 points les honneurs ne comptent plus et l'on ne peut gagner la partie que par les levées.

La probabilité de retourner un honneur a pour expression $\frac{16}{52}$ ou $\frac{4}{13}$; celle de retourner une carte non marquante est $\frac{36}{52}$ ou $\frac{9}{13}$.

Lorsque la retourne est un honneur, la probabilité qu'une autre carte du jeu est un honneur est $\frac{3}{51}$ ou $\frac{1}{17}$; la probabilité qu'elle n'est pas un honneur est $\frac{48}{51}$ ou $\frac{16}{17}$.

Lorsque la retourne est une basse carte (2 à 10 inclus), la probabilité qu'une autre carte du jeu est un honneur est $\frac{4}{51}$; la probabilité qu'elle ne l'est pas est $\frac{47}{51}$.

Désignons par A l'ensemble des deux partenaires dont l'un a donné les cartes, par B l'autre parti.

Supposons que A ait retourné une carte marquante. En vertu du théorème des probabilités composées, la probabilité pour A d'avoir un second honneur (une seconde carte marquante) dans ses 25 autres cartes est

$$\frac{16}{52} \times \frac{3}{51} \times 25.$$

Si A a retourné une carte non marquante, la probabilité qu'il a 1 honneur dans ses 25 autres cartes est

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times 25.$$

Pour B, ces probabilités sont, dans le premier cas,

$$\frac{16}{52} \times \frac{3}{51} \times 26;$$

dans le deuxième,

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times 26.$$

De même, les probabilités pour A et B d'avoir dans leurs jeux 2 honneurs sont, dans le premier cas,

$$\frac{16}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{25}{1} \times \frac{24}{2} \quad \text{et} \quad \frac{16}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{26}{1} \times \frac{25}{1},$$

et, dans le deuxième cas,

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{3}{50} \times \frac{25}{1} \times \frac{24}{2} \quad \text{et} \quad \frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{3}{30} \times \frac{26}{1} \times \frac{25}{2}.$$

La probabilité de 3 cartes marquantes s'obtiendrait en multipliant les chiffres ci-dessus respectivement par $\frac{23}{3}$, $\frac{24}{3}$, $\frac{23}{1}$, $\frac{24}{3}$.

Enfin la probabilité de 4 cartes marquantes, par distribution de cartes, serait pour A

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{3}{50} \times \frac{2}{49} \times \frac{1}{48} \times \frac{25}{1} \times \frac{24}{2} \times \frac{23}{3} \times \frac{2}{4},$$

et pour B

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{3}{50} \times \frac{2}{49} \times \frac{1}{48} \times \frac{26}{1} \times \frac{25}{2} \times \frac{24}{3} \times \frac{23}{4}.$$

Problème I. — Déterminer les probabilités qu'a A d'avoir dans son jeu 1, 2, 3, 4 honneurs, de ne pas en avoir.

Si la retourne est un honneur, A a 1 honneur. La probabilité pour qu'il en soit ainsi se calculera en remarquant que le jeu se composera de cette retourne et de 25 cartes non marquantes; la probabilité d'une telle composition de jeu est

$$\frac{16}{52} \times \frac{48}{51} \times \frac{47}{50} \times \frac{46}{49} \times \dots \times \frac{24}{27} = \frac{32}{833}.$$

Si la retourne n'est pas un honneur, le jeu se composera de cette retourne, d'une carte marquante et de 24 cartes non marquantes; la probabilité :

$$\frac{36}{52} \times \frac{4}{51} \times 25 \times \frac{47}{50} \times \dots \times \frac{24}{27} = \frac{150}{833}.$$

La probabilité pour A d'avoir dans son jeu 1 honneur et un seul est la somme de ces deux probabilités, soit $\frac{182}{833}$.

On trouve de même que la probabilité de 2 honneurs est $\frac{325}{833}$, que celle de 3 honneurs est $\frac{234}{833}$, que celle de 4 honneurs est $\frac{1127}{13 \times 833}$ et que celle de n'avoir pas d'honneurs est $\frac{69}{2.833}$.

La probabilité la plus grande est donc que A aua 2 honneurs.

Problème II. — Déterminer les probabilités que B aura dans son jeu 1, 2, 3, 4 honneurs ou pas du tout.

Ces probabilités sont $\frac{234}{833}$, $\frac{225}{833}$, $\frac{182}{833}$, $\frac{69}{2 \cdot 833}$, $\frac{759}{13 \times 833}$.

On fera le calcul comme dans le problème précédent.

Corollaire. — A, par le fait même qu'il donne, a plus de chances que B pour les honneurs.

Corollaire. — On peut déduire aisément les résultats du problème II de ceux du problème I.

En effet, $\frac{325}{833}$ est pour A comme pour B la probabilité d'avoir 2 honneurs dans leur jeu; $\frac{234}{833}$ est pour A la probabilité d'avoir dans son jeu 3 honneurs et est aussi celle qu'a B d'avoir 1 honneur, etc.

Problème III. — Déterminer la probabilité pour les tricks, au moment où l'on commence à distribuer les cartes.

La probabilité de faire dans un coup un ou plusieurs tricks est $\frac{1}{2}$ pour A comme pour B.

Dans un coup, il se fait de part et d'autre 13 mains. Élevons $a + b$ à la puissance 13. Toutes les combinaisons de 2 lettres seront représentées par les termes de cette puissance :

$$a^{13} + 13a^{12}b + 78a^{11}b^2 + 286a^{10}b^3 + 715a^9b^4 \\ + 1287a^8b^5 + 1716a^7b^6 + 1716a^6b^7 + \dots$$

Le nombre de toutes les permutations a pour expression

$$2^{13} = 8192;$$

la probabilité, soit pour A, soit pour B, de faire un seul trick a pour expression $\frac{1716}{8192}$, celle de faire plusieurs tricks a pour expression $\left(\frac{1}{2} \text{ étant la probabilité de faire un ou plusieurs tricks}\right)$

$$\frac{1}{2} - \frac{1716}{8192} = \frac{2380}{8192}.$$

Il y a donc plus de chances de faire plusieurs tricks que d'en faire un seul.

Problème IV. — *Probabilités des tricks une fois les cartes données.*

Ces probabilités dépendent de la répartition des honneurs.

Si B se trouve avoir 4 honneurs dans les cartes qui lui ont été distribuées, A, pour faire un ou plusieurs tricks, n'a plus les chances que lui donneraient toutes les compositions de jeu dans lesquelles il entre quelque honneur; il n'a donc plus que celles où il n'entre point d'honneurs. Or, les chances de B pour avoir 4 honneurs, comme celles de A pour n'avoir point d'honneurs, sont (cf. p. 79) $\frac{69}{1666}$; dans ce cas, la probabilité pour A de faire un ou plusieurs tricks est $\frac{69}{1666} \times \frac{1}{2}$.

La probabilité de faire plusieurs tricks sera

$$\frac{69}{1666} \times \frac{2380}{8192}$$

et celle de faire un seul trick sera

$$\frac{69}{1666} \times \frac{1716}{8192}.$$

Si B se trouve avoir 3 honneurs dans les cartes qui lui ont été distribuées, A n'a plus que les compositions de jeu où il n'entre que 1 honneur. Or, les chances de B pour avoir 3 honneurs sont $\frac{182}{833}$. Dans ce cas particulier, la probabilité pour A de faire un ou plusieurs tricks a pour expression

$$\frac{182}{833} \times \frac{1}{2}.$$

La probabilité de faire plusieurs tricks sera

$$\frac{182}{833} \times \frac{2380}{8192}$$

et celle de faire un seul trick sera

$$\frac{182}{833} \times \frac{1716}{8192}$$

Si par la distribution des cartes les honneurs sont également partagés entre A et B, les probabilités de faire un ou plusieurs tricks, de faire plusieurs tricks, un seul trick, seront

$$\frac{325}{833} \times \frac{1}{2}, \quad \frac{325}{833} \times \frac{2380}{8192}, \quad \frac{325}{833} \times \frac{1716}{8192}.$$

Si A se trouve avoir 4 honneurs dans les cartes qui lui ont été distribuées, B n'a plus pour les tricks que les compositions de jeu dans lesquelles il n'entre point d'honneurs. Or (*cf.* p. 78), les chances de A pour avoir 4 honneurs sont $\frac{1127}{10829}$; les probabilités pour B de faire un ou plusieurs tricks, plusieurs tricks, un seul trick, seront respectivement

$$\frac{1127}{10829} \times \frac{1}{2}, \quad \frac{1127}{10829} \times \frac{2380}{8192}, \quad \frac{1127}{10829} \times \frac{1716}{8192}.$$

Admettons maintenant que A ait 3 honneurs dans son jeu. B n'a plus pour les tricks que les compositions de jeu dans lesquelles il n'entre que 1 honneur. Or (*cf.* p. 78), les chances de A pour avoir 3 honneurs étant $\frac{234}{833}$, la probabilité pour B de faire un ou plusieurs tricks sera $\frac{234}{833} \times \frac{1}{2}$. Les probabilités de faire plusieurs tricks, un seul trick, seront enfin

$$\frac{234}{833} \times \frac{2380}{8192}, \quad \frac{234}{833} \times \frac{1786}{8192}.$$

Problème V. — *On suppose que A a 8 points et B 9; on demande quelles sont pour A et pour B les chances respectives de gagner la partie.*

La probabilité pour A d'avoir 3 honneurs dans son jeu est $\frac{234}{833}$, celle d'en avoir 4 est $\frac{1127}{13 \times 833}$. Ainsi, la probabilité que A gagnera la partie sans jouer, en comptant les seuls honneurs, est

$$\frac{4169}{10829} = 0,385.$$

La probabilité que A ne gagnera pas la partie par les seuls hon-

neurs est

$$1 - \frac{4169}{10829} = \frac{6660}{10829}. \quad (\text{certitude} = 1).$$

Examinons maintenant les hypothèses que voici : A fait plusieurs tricks dans le coup engagé, ce qui lui fait gagner la partie, A fait un trick dans le coup engagé et un trick (ou plus) dans le coup suivant, ce qui lui fait encore gagner la partie, et cherchons les probabilités relatives à ces hypothèses.

A, ne comptant pas les honneurs, en a, d'après les règles du jeu, 0, 1 ou 2. B en a 4, 3 ou 2. La probabilité de cette éventualité est

$$\frac{69}{1666} + \frac{182}{833} + \frac{325}{833} = \frac{1001}{1666}.$$

Pour A, la probabilité de ne pas compter les honneurs est $\frac{6660}{10829}$ et celle de faire plusieurs tricks est $\frac{2380}{8192}$.

La probabilité du concours de ces trois éventualités est

$$\frac{6660}{10829} \times \frac{1001}{1666} \times \frac{2380}{8192} = 0,107.$$

La probabilité que A ne compte pas les honneurs, que B ait dans son jeu 4, 3 ou 2 honneurs, que A fasse un seul trick dans le coup qui se joue, que le coup suivant il fasse un ou plusieurs tricks, a pour expression

$$\frac{6660}{10829} \times \frac{1001}{1666} \times \frac{1716}{8196} \times \frac{1}{2} = 0,043.$$

La probabilité pour A de gagner la partie, somme des trois probabilités que l'on vient de déterminer, est donc

$$0,385 + 0,107 + 0,043 = 0,535.$$

Cherchons maintenant les chances qu'a B de gagner la partie, ce qu'il ne peut faire que si A ne l'a pas lui-même gagnée en comptant les honneurs.

B gagnera la partie si, dans le coup qui se joue, il fait un ou plusieurs tricks (à 9 points les honneurs ne comptent plus), ou si A ne comptant pas d'honneurs, mais faisant un trick dans le coup

qui se joue, ce qui le met à 9, comme B, B fait un ou plusieurs tricks dans le coup qui suivra celui qu'on joue.

Au premier de ces deux coups, B a au moins 2 honneurs, sinon A gagnerait. A ayant comme probabilité de faire un ou plusieurs tricks

$$\frac{1001}{1666} \times \frac{1}{2},$$

B aura comme probabilité de faire un ou plusieurs tricks

$$1 - \frac{1001}{1666} \times \frac{1}{2} = \frac{2331}{3332}.$$

La probabilité du concours de ces deux éventualités sera

$$\frac{6660}{10829} \times \frac{2331}{3332} = 0,430.$$

A n'ayant pas compté les honneurs et n'ayant fait qu'un seul trick pendant le coup qui se joue, A et B seront l'un et l'autre à 9 à la fin de ce coup et auront chance égale de gagner la partie. Cette probabilité, nous venons de le voir pour A, est 0,043. Or, la probabilité pour B de gagner la partie est la somme des deux probabilités qu'on vient de calculer, soit

$$0,430 + 0,043 = 0,473.$$

Donc, dans la position de la partie où A est à 8 et B à 9, les probabilités du gain de la partie pour A et pour B sont respectivement 0,535 et 0,473.

Corollaire. — Après que les cartes ont été distribuées, si A n'a point les honneurs (3 ou 4), les probabilités du gain de la partie seront 0,150 pour A et 0,473 pour B.

Problème VI. — *Dans la position de la partie où B est à 8 et où A est à 9, quelles sont les probabilités pour B et A de gagner la partie?*

Les mêmes éventualités qui, dans le problème précédent, ont donné le gain de la partie à A, le donneront ici à B; mais les probabilités de ces éventualités à l'égard de B ne sont pas les mêmes qu'à l'égard de A.

Ainsi, pour B, la probabilité d'avoir ou 4 ou 3 honneurs étant $\frac{69}{2 \times 863} + \frac{182}{833}$, la probabilité pour B de gagner la partie par les honneurs sans jouer le coup est $\frac{433}{1666} = 0,260$.

La probabilité que B ne gagnera pas la partie par les honneurs sans jouer le coup est $\frac{1233}{1666}$.

La probabilité pour A d'avoir dans son jeu 4, 3 ou 2 honneurs est $\frac{1127}{10\ 829} + \frac{234}{833} + \frac{325}{833} = \frac{7394}{10\ 829}$, et le nombre des compositions de jeu dans lesquelles A aura ou 4, ou 3, ou 2 honneurs est au nombre total de toutes les compositions de jeu possibles dans le rapport de 7394 à 10829.

La probabilité pour B de gagner la partie sans compter les honneurs, en faisant au cours du coup qui se joue plusieurs tricks, aura pour expression

$$\frac{1233}{1666} \times \frac{7394}{10\ 829} \times \frac{2380}{8192} = 0,147.$$

La probabilité pour B de gagner la partie sans compter les honneurs, en faisant un trick au cours du coup qui se joue et en faisant un ou plusieurs tricks, a pour expression

$$\frac{1233}{1666} \times \frac{7394}{10\ 829} \times \frac{1716}{8192} \times \frac{1}{2} = 0,053.$$

La probabilité pour B de gagner la partie est la somme de ces trois probabilités, soit 0,460.

Deux éventualités semblables à celles qui, dans le problème précédent, ont donné le gain de la partie à B, le donneront ici à A.

B n'ayant pas compté les honneurs, la probabilité pour lui de faire pendant le coup qui se joue un ou plusieurs tricks est $\frac{7394}{10\ 829} \times \frac{1}{2}$. La probabilité pour A de faire un ou plusieurs tricks sera $1 - \frac{7394}{10\ 829} \times \frac{1}{2} = \frac{14\ 264}{21\ 658}$ et le concours de ces deux éventualités, que B ne compte pas les honneurs et que A fasse un ou plusieurs tricks, a pour expression

$$\frac{1283}{1666} \times \frac{14\ 264}{21\ 658} = 0,487.$$

La probabilité que B ne compte pas les honneurs, que pendant le coup qui se joue il ne fasse qu'un trick et que le coup suivant A fasse un ou plusieurs tricks est 0,053, expression de la probabilité pour B que nous venons de déterminer dans le concours des mêmes éventualités.

Or, la probabilité pour A de gagner la partie dans la position donnée est la somme de ces deux probabilités, soit

$$0,487 + 0,053 = 0,540.$$

Donc, dans la position de la partie où B est à 8, et où A est à 9, les probabilités du gain de la partie pour B et pour A sont dans le rapport de 460 à 540.

Corollaire. — L'avantage est toujours du côté qui donne, qu'il soit à 8 ou à 9.

LE JEU DE PIQUET.

77. *Le piquet se joue avec 32 cartes entre deux joueurs : l'un est premier et donne les cartes (deux par deux ou trois par trois) et l'autre est dernier. Chacun a 12 cartes. Il reste un talon de 8 cartes.*

Le premier choisit dans son jeu 5 cartes, ou moins, qu'il met à l'écart, et les remplace par le même nombre de cartes qu'il prend parmi les premières du talon.

Le second écarte 3 cartes, ou moins, et les remplace de même.

On peut ne pas écarter.

Le second annonce ensuite son point, qui est la plus forte somme des points réalisés dans son jeu par les cartes d'une même couleur (l'as compte 11, les figures 10, les basses cartes pour le nombre de points qu'elles figurent); le premier répond qu'il est satisfait s'il n'a pas un nombre de points équivalent, que le point est payé s'il a même nombre de points, que le nombre de points ne vaut pas s'il a un nombre de points supérieur. Le joueur qui a le point compte autant de points qu'il a de cartes lui donnant le point.

Le second annonce ensuite les quatorze (quatre as, rois, dames, valets ou dix) qu'il peut avoir; le 14 d'as chez l'un des

deux joueurs lui permet de compter les autres 14 qu'il peut avoir, mais empêche son adversaire de compter les siens; le 14 de rois chez l'un des deux joueurs lui permet de compter les autres 14 qu'il peut avoir, mais empêche son adversaire de compter les 14 inférieurs (de dames, valets, dix) qu'il peut avoir; de même pour les 14 de dames, de valets.

Le joueur qui compte un 14 se compte 14 points.

De même pour 3 as, 3 rois, 3 dames, 3 valets, 3 dix. Mais un 14 empêche l'adversaire de compter les 3 points afférents à chacune de ces collections de cartes.

Après cela le second annonce sa plus forte suite de cartes d'une même couleur (8 cartes s'appellent une dix-huitième et comptent 18; 7 cartes une dix-septième et comptent 17; 6 et 5 cartes une seizième, une quinte et comptent 16, 15; 4 et 3 cartes une quatrième, une tierce et comptent 4 et 3 points) et compte les points que lui valent cette suite.

Une seizième est plus belle qu'une quinte, quarte, etc. Une quinte à l'as (on dit majeure) est plus belle qu'une quinte au roi ou au valet, etc.

Le second compte le nombre de points afférent à sa plus forte suite, sauf si le premier a une suite équivalente (par exemple, l'un et l'autre ont une quinte au roi), en ce cas le premier répond : « Payé », ou une suite plus forte, en ce cas le premier répond : « Elle ne vaut pas ».

Dans le cas du payé, le second énonce la suite de son jeu qui vient comme équivalence après la plus belle, et le dialogue s'engage sur cette suite comme sur la première.

Le possesseur de la plus belle suite, en dehors des payés, compte pour leurs points toutes les autres suites qu'il a dans son jeu.

Le second montre son point, s'il l'a ou s'il est payé, ses quatorze, ses dix-huitième, dix-septième, etc., fait le total de ses points et joue sa première carte en comptant un point supplémentaire pour cette carte.

Le joueur qui joue une carte compte d'ailleurs toujours un point supplémentaire en jouant.

Le premier montre alors son point, s'il l'a ou s'il est payé, ses quatorze, etc., et joue une carte de la couleur, s'il en pos-

sède. Si la carte est plus forte que celle jouée, il prend et joue à son tour. S'il n'a pas de couleur il perd la levée.

La dernière levée compte pour 2 points.

Lorsque le joueur premier en cartes compte 30 avant que la première carte soit jouée et que le donneur ait compté un seul point, il ajoute 60 points à son actif.

Lorsque l'un des deux joueurs compte 30 avant que l'autre ait compté un seul point, qu'il y ait eu ou non des cartes jouées, il compte 30 points supplémentaires.

Le joueur qui fait toutes les levées compte 40 de capot.

Si l'un des deux joueurs, avant de faire son écart, n'a pas une seule figure, il annonce cartes blanches et compte 10, dit 10 de blanc.

Nous supposerons que les joueurs écartent comme s'ils connaissent leurs écarts. Cette supposition simplifie l'étude mathématique du piquet, qui est des plus compliquées, et donne des résultats très approchés des résultats vrais.

Pour nous, le premier aura donc dans son jeu 17 cartes et il en écartera 5, et le second aura dans son jeu 15 cartes, dont il écartera 3.

Si le premier a 8 cartes d'une même couleur, le second en a zéro; si le premier a 7 cartes, le second a 1, etc.; ce qu'on peut écrire

$$8, 7, a, b, \quad 0, 1, 8 - a, 8 - b \quad \text{ou} \quad 8 - b, 8 - a, 7, 8;$$

d'une manière générale, on peut avoir la composition de jeux que voici :

Ces jeux			Ces jeux			Ces jeux		
Premier joueur.	Deuxième joueur.	sont au nombre de	Premier joueur.	Deuxième joueur.	sont au nombre de	Premier joueur.	Deuxième joueur.	sont au nombre de
8 8 1 0	8 7 0 0	96	7 7 3 0	8 5 1 1	43 008	6 6 5 0	8 3 2 2	526 848
8 7 2 0	8 6 1 0	5 376	7 7 2 1	7 6 1 1	172 032	6 6 4 1	7 4 2 2	5 268 480
8 7 1 1	7 7 1 1	6 144	7 6 4 0	8 4 2 1	37 620	6 6 3 2	6 0 2 2	14 751 744
8 6 3 0	8 5 2 0	37 632	7 6 3 1	7 5 2 1	2 408 448	6 5 5 1	7 3 3 2	8 422 848
8 6 2 1	7 6 2 0	75 264	7 6 2 2	6 6 2 1	2 107 392	6 5 4 2	6 4 3 2	73 758 720
8 5 4 0	8 4 3 0	940 080	7 5 5 0	8 3 3 1	300 816	6 5 3 3	5 5 3 2	59 006 976
8 5 3 1	7 5 3 0	602 112	7 5 4 1	7 4 3 1	6 021 120	6 4 4 3	5 4 4 2	92 198 400
8 5 2 2	6 6 3 0	526 848	7 5 3 2	6 5 3 1	16 859 136	5 5 5 2	6 3 3 3	19 668 992
8 4 4 1	7 4 4 0	470 400	7 4 4 2	6 4 4 1	13 171 200	5 5 4 3	5 4 3 3	147 517 440
9 4 3 2	6 5 4 0	2 634 240	7 4 3 3	5 5 4 1	21 073 920	5 4 4 4	4 4 4 3	76 832 000
8 3 3 3	5 5 5 0	702 464						

Nous avons là 31 jeux différents. Mais le nombre de jeux différents *possibles* est beaucoup plus élevé. Il s'élève à 566 600 112. En effet, par exemple, la composition de jeu

$$8810, 8700$$

suppose que 8 carreaux et 8 piques ou 8 trèfles ou 8 cœurs sont dans la même main, ou encore 8 trèfles et 8 piques ou 8 cœurs, ou encore 8 piques et 8 cœurs, ce qui donne 6 jeux différents; à chacun de ces jeux il faudra adjoindre 1 carte de chaque autre couleur, ce qui donne 8 T, 8 P, 1 C, 8 T, 8 P, 1 Q, ... ou, en tout, 12 combinaisons; mais le cœur (ou le carreau) qui figure dans ces combinaisons peut être l'un des 8 cœurs ou l'un des 8 carreaux, ce qui donne $12 \times 8 = 96$ jeux différents. Et ainsi des autres. Les nombres de jeux différents afférents à chaque cas sont inscrits plus haut en chiffres gras.

Problème I. — *Probabilité du point.*

La probabilité du point égal (en ce cas aucun des joueurs ne compte le point) est le rapport du nombre des compositions de cartes où deux chiffres ont pour somme 8 (par exemple, 8110, $8 + 0 = 8$; 8720, $8 + 0 = 8$, ...) au nombre total des jeux possibles, soit $\frac{24\ 474\ 675}{566\ 600\ 112}$.

En consultant le Tableau, on voit immédiatement que le premier a $\frac{469\ 565\ 721}{566\ 600\ 112}$ de faire le point, et le dernier $\frac{72\ 559\ 716}{566\ 600\ 112}$.

Problème II. — *Probabilité d'une dix-huitième.*

8 cartes d'une même couleur sont nécessaires et suffisantes.

Les jeux du premier soumis à cette condition sont au nombre (*voir* le Tableau) de

$$96 + 5376 + 6144 + \dots + 702\ 464 = 5\ 156\ 654.$$

La probabilité concernant le premier, celui qui reçoit les cartes, est donc $\frac{5\ 156\ 654}{566\ 600\ 112}$. On calculerait de même la probabilité pour celui qui donne les cartes.

Problème III. — *Probabilité d'une dix-septième.*

Le calcul se fera semblablement. Mais on observera que les 7 cartes doivent se suivre. S'il manque le 8, le 7, le 10, le valet, la dame, le roi, soit 6 cas sur 8 possibles, ce n'est pas une dix-septième. On devra donc diviser les sommes $5376 + 6144 + \dots$, $96 + 6144 + \dots$ du Tableau par 6.

Problème IV. — *Probabilité d'une seizième, d'une quinte, d'une quatrième, d'une tierce.*

On fera le calcul semblablement. On trouvera, par exemple, que la probabilité du premier d'avoir une quinte est $\frac{183\ 923\ 313}{566\ 600\ 112}$ et que celle du second est $\frac{112\ 106\ 739}{566\ 600\ 112}$.

Problème V. — *Probabilité pour le premier et le dernier d'avoir un quatorze.*

La probabilité d'avoir 4 cartes désignées (les rois, par exemple) d'un jeu de 32 cartes est, pour le premier qui a 17 cartes,

$$\frac{17}{32} \times \frac{16}{31} \times \frac{15}{30} \times \frac{14}{29} = \frac{119}{1798}.$$

La probabilité de ne pas les avoir est

$$1 - \frac{119}{1798} = \frac{1679}{1798} \quad (1 = \text{certitude}).$$

Il y a cinq quatorze. On suppose que dans cinq coups on prend successivement pour cartes désignées les quatre cartes formant un de ces cinq quatorze. La probabilité de n'avoir point le quatorze désigné dans aucun de ces cinq coups est la même que celle de n'avoir aucun de ces cinq quatorze en un seul coup. Or cette probabilité est

$$\left(\frac{1679}{1798}\right)^5 = 0,71.$$

La probabilité d'avoir dans un coup un des cinq quatorze est donc, pour le premier,

$$1 - 0,71 = 0,29.$$

On trouvera de même que, pour le second, elle est 0,1765.

Corollaire. — La probabilité (composée) pour le premier d'avoir quinte, quatorze et le point est

$$\frac{46\ 956}{56\ 660} \times \frac{18\ 392}{56\ 660} \times 0,29 = 0,07\ 801.$$

La probabilité pour le second est, de même, 0,00726.

Problème VI. — *Probabilité d'avoir 3 as.*

Pour le premier, $\frac{255}{899}$; pour le second, $\frac{1547}{28\ 768}$.

Problème VII. — *Probabilité que chacun aura 2 as.*

Pour l'un et l'autre $\frac{357}{899}$.

LE JEU D'ÉCARTÉ.

78. *L'écarté se joue avec un jeu de 32 cartes et ordinairement en 5 ou 7 points. On tire la main au sort en coupant le jeu et en découvrant la coupe. C'est celui qui a la plus forte carte qui a la main. La valeur des cartes est, par ordre de décroissance, roi, dame, valet, as, dix, neuf, huit, sept.*

Celui qui a la main distribue 5 cartes en deux fois. La onzième forme la retourne ou atout et se place à découvert sous le talon. Le joueur qui tourne un roi marque un point; celui qui a dans son jeu le roi d'atout marque un point (mais il doit l'annoncer avant de jouer; on peut encore annoncer le roi en le jouant, mais à la condition qu'il soit joué en premier).

Celui qui a reçu les cartes joue le premier.

Lorsque le premier à jouer n'est pas satisfait de son jeu, il demande des cartes en disant : « Je propose. » Si celui qui donne est dans les mêmes conditions, il accepte et demande : « Combien? », donne à son adversaire autant de cartes qu'il en désire et en prend pour lui-même autant qu'il souhaite,

jusqu'à concurrence de 5 cartes. On peut demander de nouvelles cartes dans les mêmes conditions, jusqu'à épuisement du talon. Le donneur a droit de refuser des cartes à l'adversaire, ce qu'il fait quand il a un jeu suffisant.

On est tenu de fournir de la couleur, ou de couper si l'on n'en a pas.

Le joueur qui fait 3 ou 4 levées marque un point; il en marque deux s'il fait les 5 levées.

Le joueur qui a donné les cartes et en a refusé à la première demande perd un point supplémentaire s'il fait moins de trois levées.

Le joueur qui a reçu les cartes et n'en a pas demandé perd également un point supplémentaire s'il fait moins de trois levées.

Trois questions se posent au jeu de l'écarté :

I. Avec un jeu déterminé, le premier en cartes doit-il jouer d'autorité, ou bien doit-il user de la faculté qui lui appartient de demander des cartes ?

II. Le second, de son côté, doit-il, avec un jeu déterminé, accepter ou refuser la proposition d'écart qui lui est faite ?

III. Les écarts étant finis, de quelle manière chacun doit-il jouer ses cartes (1) ?

Nous nous bornerons à donner un très court aperçu de la théorie de ce jeu, qui, fort longue, n'offre aucune difficulté.

31 objets pris 5 à 5 peuvent se combiner de

$$\frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 169911 \text{ manières différentes.}$$

C'est le nombre de jeux que peut avoir le premier. Eu égard à l'identité pratique des couleurs qui ne sont pas de l'atout, ces jeux sont seulement au nombre de 53851.

Le second peut avoir, avec

32 cartes — 1 carte qui tourne — les 5 cartes du premier = 26 cartes,

(1) E. DORMOY, *Traité mathématique du jeu de l'écarté.*

un nombre de jeux égal à

$$\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 65780.$$

Quel est le nombre de formes que le jeu du premier peut présenter ?

Il y a dans le jeu quatre familles de cartes, quatre couleurs; la famille d'atout contient 7 cartes, puisque 1 atout forme la retourne; les trois autres familles contiennent chacune 8 cartes. Donc le nombre de groupes, ou jeux de 5 cartes, qui contiennent, par exemple, 1 atout, 2 carreaux, 1 pique ou 1 trèfle, sera donné par la formule

$$\frac{7}{1} \times \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \times \frac{8}{1} \times \frac{8}{1} = 12544.$$

Ces questions résolues, nous allons seulement indiquer quelques résultats qui découlent de la théorie.

Il est facile de calculer qu'il existe :

21	jeux	ayant	5	atouts,
840	»	»	4	»
9660	»	»	3	»
42504	»	»	2	»
74382	»	»	1	»
42504	jeux	sans	atouts,	

et qu'il n'existe que 980 jeux réellement différents.

Quand on est 0 point à 0 point, l'avantage de jouer le premier compense exactement l'avantage de la donne.

Le premier a 0,54 chance de faire le point et le second 0,46.

Les cartes distribuées, mais la retourne non effectuée, il y a une probabilité de :

0,125	que	le	roi	tournera,			
0,19	qu'il	est	dans	le	jeu	du	premier,
0,19	»	»	»	du	second,		
0,495	»	resté	au	talon.			

Probabilité pour le premier d'avoir dans son jeu :

0	atout . . .	25	pour	100	3	atouts . . .	6	pour	100
1	» . . .	44			4	» . . .	$\frac{1}{200}$		
2	» . . .	25			5	» . . .	$\frac{1}{8000}$		

Tableau des jeux avec lesquels on doit jouer d'autorité.

LE PREMIER A EN ATOUT :	LE PREMIER A EN MAIN, INDÉPENDAMMENT DES ATOUTS :		
	1 COULEUR.	2 COULEURS.	3 COULEURS.
Pas d'atout.	Ces jeux ne sont jamais de règle.		1° Dans chaque couleur, le roi ou le petit mariage; 2° Les 3 rois et 1 as; 3° Deux fois roi et valet, plus 1 dame.
1 petit atout.	Il faut que la couleur unique commence par roi et dame.	1° Une carte troisième et une carte seule assez forte pour servir de rentrée; 2° Cartes secondes : A. 2 rois seconds, plus 1 as; B. 1 roi second, 1 dame seconde, plus 1 valet; C. 2 dames secondes, plus 1 valet et 1 as.	1° 3 rois; 2° 2 rois, dont 1 par l'as; 3° 2 rois seuls, plus huit et neuf dans la troisième couleur; 4° S'il n'y a pas plus de 1 roi, la limite minimum est la même qu'avec 2 atouts et 3 couleurs (cf. ci-dessous).
2 petits atouts.	Ces jeux sont toujours de règle, sauf s'ils remplissent les conditions ci-contre.	Il faut que le total des points, en dehors des atouts, fasse au moins 32, en comptant : Valet = 12, Dame = 14, Roi = 18.	Il faut avoir quatre cartes majeures : atouts, rois ou dames. Toutefois, 2 valets comptent pour une, et 3 valets pour deux cartes majeures.
3 petits atouts.		Ces jeux sont de règle, pourvu que les deux cartes isolées dépassent la force de 2 huit.	

NOTA. — *Jeu de règle* signifie qu'on doit jouer sans écarter quand la partie commence, mais que ces jeux sont insuffisants quand on est 3 à 3.

L'un et l'autre joueur ont :

1	chance	sur	1000	d'avoir	5	cartes	de	même	couleur,
3	»	»	100	»	4	»	»	»	»
31	»	»	100	»	3	»	»	»	»
66	»	»	100	»	2	»	»	»	»

Quand on est 4 à 4 points, le premier ne peut gagner que s'il a le roi ou le point; ses chances sont représentées par : 0,19, probabilité qu'il a le roi, $0,495 \times 0,54 = 0,27$, probabilité que le roi est au talon et qu'il fait le point. En tout, 0,46.

Avec 4 ou 5 atouts, on doit toujours jouer d'autorité.

V. — LA SPÉCULATION.

79. Les jeux de hasard pratiqués dans les cercles, les jeux savants, n'épuisent pas la question du jeu.

Les spéculations de Bourse sont des jeux, et des jeux qui portent sur des chiffres bien plus élevés que les jeux ordinaires.

Nous ne citerons que pour mémoire les opérations *fermes*. Acheter une valeur, la payer, la mettre en portefeuille, n'est pas jouer. C'est faire un placement, bon ou mauvais.

Jouer, c'est opérer dans les conditions suivantes, ce qu'on peut faire sur un ensemble de valeurs très en vue, dont la Rente.

On peut lire dans les carnets des financiers des indications telles que celles-ci : *Ach.* 3000^{fr} Rente 3 % à 95,50/25, ce qu'on lit : Acheté 3000^{fr} de rente 3 pour 100 à 96,50 dont 25 centimes.

Cela veut dire que le financier a acheté 100000^{fr} de rente 3 pour 100, valeur nominale, qui rapportent 3000^{fr}, au prix de 95^{fr},50 les 3^{fr} de rente, c'est-à-dire au prix de 95500^{fr}, et que l'avant-dernier jour du mois, à 2^h, il payera son achat et prendra possession des titres, les lèvera ou, s'il le préfère, résiliera le marché en payant 1000 fois 0^{fr},25 (*dont 25 centimes*).

S'il avait acheté 1500^{fr} de rente (c'est le minimum de rente qu'on puisse acheter dans ces marchés à *terme*), il aurait pu résilier en payant 500 fois 0^{fr},25.

Les 0^{fr},25 en question s'appellent *prime*.

Voici le mécanisme du contrat.

La prime dont /25^c est cotée tous les jours à la Bourse. Dans

l'exemple précédent, elle était cotée $95^{\text{fr}}, 50$. Le *comptant* est lui-même coté (ordinairement moins cher que la prime $/25^{\text{c}}$). Si l'avant-dernier jour du mois le comptant est supérieur à $95^{\text{fr}}, 50$, s'il est à $95,65$ par exemple, notre acheteur prendra livraison de ses 3000^{fr} de rente et les payera 95500^{fr} . Au comptant, il les payerait 95650^{fr} . Il aura donc gagné 150^{fr} , qu'il peut d'ailleurs réaliser en revendant immédiatement ses titres au comptant, pour la somme de 95650^{fr} .

Supposons maintenant que, l'avant-dernier jour du mois, le comptant soit compris entre $95^{\text{fr}}, 50$ et $95^{\text{fr}}, 25$, soit à $95^{\text{fr}}, 40$ par exemple. Si notre acheteur achetait 3000^{fr} de rente, il les payerait 95400^{fr} ; il prend livraison, à ce jour, des titres achetés avec prime et les paye 95500^{fr} , ou bien il donne 100^{fr} à son vendeur; de toute façon, il perd 100^{fr} .

Supposons enfin, et c'est le cas le plus intéressant, que, l'avant-dernier jour du mois, le comptant soit en dessous de $95^{\text{fr}}, 25$, qu'il soit par exemple à $95^{\text{fr}}, 15$; à ce cours, 3000^{fr} de rente coûtent 95150^{fr} ; notre acheteur avec prime a promis de les payer 95500^{fr} ; il perd 350^{fr} . Mais *il a le droit* de résilier le marché et il payera 1000 fois $0^{\text{fr}}, 25$, soit 250^{fr} . Sa perte est donc limitée, quelque bas que soit le cours, à 250^{fr} . On dit que $95^{\text{fr}}, 50$ est le *cours* de la prime $/25^{\text{c}}$. La différence $95^{\text{fr}}, 50 - 0^{\text{fr}}, 25$, soit $95^{\text{fr}}, 25$, est le *pied* de la prime : au-dessous du pied, on abandonne la prime. La différence entre le *comptant* et le *cours* de la prime est l'*écart* de la prime.

Ajoutons, pour compléter ces notions, que, le jour où se détache le coupon, l'acheteur en reçoit le montant du vendeur. En même temps, le cours du comptant et le cours de la prime baissent du montant du coupon. Acheteur et vendeur à prime se trouvent donc, avant et après le détachement du coupon, dans la même situation respective qu'auparavant.

On négocie trois sortes de primes sur les valeurs : les primes $/50^{\text{c}}$, $/25^{\text{c}}$, $/10^{\text{c}}$, chacune dite plus importante que les suivantes. Ces primes ont leur réponse l'avant-dernier jour du mois. Leur liquidation a lieu le dernier jour du mois.

On traite des primes fin prochain, dont la réponse a lieu l'avant-dernier jour du mois qui suit le mois en cours.

On traite encore des primes $/10^{\text{c}}$ et $/5^{\text{c}}$ pour le lendemain.

A chaque prime correspond un cours spécial, dont l'écart avec le comptant est d'autant plus grand que la prime est plus faible, comme il va de soi. Une prime /50^e doit coûter plus cher qu'une prime /25^e.

L'écart d'une prime *doit* décroître depuis le commencement du mois jusqu'au jour de la réponse, cela sauf événement imprévu faisant hausser ou baisser les cours, car le dernier jour du mois *comptant* et *terme* sont au même taux, puisque *terme* est synonyme de *comptant*.

Nous avons encore à définir les *reports* et les *dépôts*. Le mot *report* est synonyme d'*intérêt*. L'acheteur à terme qui veut maintenir plusieurs mois consécutifs sa position d'acheteur, parce qu'il croit à un mouvement futur de hausse, et qui n'a pas l'argent nécessaire pour prendre livraison des titres le jour de la liquidation, si cette prise de livraison lui est avantageuse (*supra*), a recours à un capitaliste qui, moyennant un prix débattu variable avec les besoins de la place, vient à son aide à chaque liquidation en prenant livraison des titres en ses lieu et place. Cela s'appelle se faire *reporter*. Le prix débattu s'appelle *report*. Lorsque la cote indique 0^{fr},05 de report sur la Rente, par exemple, l'acheteur qui se fait reporter doit payer 0^{fr},05 par 3^{fr} de rente. L'acheteur de 3000^{fr} de rente doit donc payer 1000 fois 0^{fr},05, c'est-à-dire 50^{fr}.

Acheter et se faire reporter sont des opérations à la *hausse*. Vendre est une opération à la baisse, qui suppose une baisse future. Elle conduit au *déport*.

Il arrive presque toujours, en effet, que le vendeur de titres n'a pas en mains les titres qu'il a vendus. Il est dit alors *vendeur à découvert*. Que va-t-il faire si, à la liquidation, l'acheteur exige la livraison des titres? Si l'on a beaucoup vendu à découvert, si l'on a vendu à découvert plus qu'il n'est possible de livrer de titres, la chasse aux titres qui se produit en fait monter le prix et tend à accroître la perte du vendeur. Alors le vendeur cherche à s'entendre avec l'acheteur et à se dispenser, moyennant une indemnité qui s'appelle *déport*, de la livraison des titres. Le déport a un cours qui s'indique par la lettre B (*bénéfice*).

Dans ce qui suit, nous nous référerons constamment au Chapitre II.

LA LOI DE PROBABILITÉ.

80. Désignons par $p_{x,t}dx$ la probabilité pour qu'à l'époque t le cours de la rente se trouve compris dans l'intervalle $x, x + dx$. Quelle sera la probabilité pour que : le cours à l'époque t_1 ayant été x , le cours à l'époque $t_1 + t_2$ soit z ?

Cette probabilité est composée. Elle a donc pour expression

$$p_{x,t_1}dx \times p_{z-x,t_2}dz = p_{x,t_1}p_{z-x,t_2}dx dz.$$

Le cours pouvant se trouver à l'époque t_1 dans tous les intervalles dx compris entre $-\infty$ et $+\infty$, la probabilité, pour qu'à l'époque $t_1 + t_2$ le cours soit z , sera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1}p_{z-x,t_2}dy dz.$$

Mais cette probabilité a aussi pour expression $p_{z,t_1+t_2}dz$; donc

$$p_{z,t_1+t_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1}p_{z-x,t_2}dx dz,$$

et, par suite,

$$p_{z,t_1+t_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1}p_{z-x,t_2}dx.$$

Un calcul purement analytique (cf. Chap. II, § II) montre que p est de la forme

$$p = \frac{H}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}},$$

où H est une constante, où t désigne l'époque, où π est le rapport de la circonférence à son diamètre.

L'espérance correspondant au cours x a pour expression, par définition (cf. n° 75),

$$px = \frac{Hx}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}};$$

l'espérance totale est donc (cf. n° 75)

$$\int_0^{\infty} px dx = \int_0^{\infty} \frac{Hx}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}} dx = \frac{\sqrt{t}}{2\pi H}.$$

M. Bachelier prend pour constante l'espérance mathématique k qui correspond à $t = 1$, en sorte que

$$k = \frac{1}{2\pi H} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2\pi k}.$$

Avec ces notations, les expressions définitives de la probabilité et de l'espérance mathématique sont :

$$\text{probabilité} = p = \frac{1}{2k\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}},$$

$$\text{espérance mathématique} = \int_1^{\infty} px \, dx = k\sqrt{t}.$$

Le coefficient k est le coefficient d'instabilité ou de nervosité de la valeur considérée. Pour le *Rio*, il est beaucoup plus élevé que pour la *Rente*. Il dépend des événements en cours. S'il est élevé, le marché est inquiet. S'il est faible, le marché est calme.

Nous le calculerons plus loin.

La fonction p est de la forme

$$p = p_0 e^{-\pi p_0^2 x^2} \left(p_0 - \frac{1}{2k\pi\sqrt{t}} - p_0 x \right)$$

et peut se représenter par la courbe

$$y = p_0 e^{-\pi p_0^2 x^2},$$

analogue à une courbe que nous rencontrerons plus loin (*cf.* fig. 9, p. 123); nous avons deux points d'inflexion pour

$$x = \pm \frac{1}{p_0\sqrt{2\pi}} = \pm\sqrt{2\pi} k\sqrt{t}.$$

Ces mêmes valeurs de x sont aussi les abscisses des maxima et minima des courbes d'espérance mathématique, dont l'équation est

$$y = \pm px = \pm p_0 x e^{-\pi p_0^2 x^2}.$$

La probabilité du cours x est une fonction de t ; elle croît jusqu'à une certaine époque et décroît ensuite. La dérivée $\frac{dp}{dt}$ est nulle quand $t = \frac{x^2}{2\pi k^2}$. La probabilité du cours x est donc maxima

quand ce cours correspond au point d'inflexion de la courbe des probabilités.

La probabilité dans un intervalle donné x a pour expression, en raison de l'expression qu'on a trouvée de la probabilité dans l'intervalle élémentaire dx (*cf. supra*),

$$\frac{1}{2k\pi\sqrt{t}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{4k^2\pi t}} dx.$$

On la calcule à l'aide des tables de la fonction

$$\theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad (\text{cf. n}^\circ 50 \text{ et p. } 43).$$

On aura évidemment

$$\int_0^x p dx = \frac{1}{2} \theta \left(\frac{x}{2k\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \right).$$

La probabilité

$$\int_x^\infty p dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

pour que le cours soit atteint ou dépassé à l'époque t , croît constamment avec le temps. Si t était infini, elle serait égale à $\frac{1}{2}$; c'est d'ailleurs évident.

La probabilité que le cours se trouve compris à l'époque t dans l'intervalle x_1, x_2 a pour expression

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}}^{\frac{x_2}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda;$$

elle est nulle pour $t = 0$ et $t = \infty$. Elle est maxima lorsque

$$t = \frac{1}{4\pi k^2} \frac{x_2^2 - x_1^2}{\log \frac{x_2}{x_1}},$$

ou, approximativement, si l'intervalle x_1, x_2 est très petit, lorsque

$$t = \frac{x^2}{2\pi k^2}.$$

81. **Écart probable.** — Nous appellerons ainsi l'intervalle $\pm \alpha$ tel que, au bout du temps t , le cours ait autant de chances de rester compris dans cet intervalle que de chances de le dépasser.

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} p \, dx = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \int_0^{\alpha} p \, dx = \frac{1}{4}$$

ou

$$\theta \left(\frac{\alpha}{2k\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{2};$$

on en conclut (*cf.* p. 44)

$$\alpha = 2 \times 0,4769k\sqrt{\pi}\sqrt{t} = 1,688\sqrt{t},$$

donc α est proportionnel à la racine carrée du temps.

Plus généralement, soit $\pm s$ un intervalle quelconque; soit u la probabilité que le cours, à l'époque t , sera compris dans cet intervalle. On aura

$$\int_0^s p \, dx = \frac{u}{2}, \quad \theta \left(\frac{s}{2k\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \right) = u;$$

s est donc proportionnel à la racine carrée du temps.

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DU SPÉCULATEUR.

82. **Cours équivalents, cours vrais.** — Tous les trois mois, le porteur de 3^{fr} de rente détache un coupon de 0^{fr},75. Le cours baisse alors de 0^{fr},75. Il remonte peu après de 0^{fr},75 pendant les trois mois qui suivent, sauf variations dues à des causes spéciales, une guerre par exemple.

Le cours doit donc monter de 0^{fr},25 en 30 ou 31 jours, de 0^{fr},125 en 15 jours, etc. M. Bachelier considère *tous* ces cours comme *équivalents* les uns aux autres, et il appelle *cours vrai* correspondant à une époque le cours équivalent correspondant à cette époque.

Dans les trois mois, 90 jours à peu près, qui séparent l'époque où l'on a détaché un coupon de la veille du jour où l'on détachera le suivant, la rente doit monter de 0^{fr},75; en un jour, elle montera de $\frac{0^{\text{fr}},75}{90} = 0^{\text{fr}},0083$.

Et le terme? De quelle quantité b doit-il logiquement varier en un jour?

Le terme est plus cher que le comptant de la quantité C , sauf le jour de la liquidation, où ces deux cours sont égaux. Si n jours nous séparent de la liquidation, le terme doit donc, pendant ces n jours, monter de la quantité

$$\frac{75n}{90} - C,$$

et pendant un jour de

$$b = \frac{1}{n} \left(\frac{75n}{90} - C \right) = \frac{1}{6n} (5n - 6C).$$

La moyenne de b est 0^{fr},00264.

On aura donc le cours vrai du comptant dans p jours en ajoutant au cours actuel la somme $\frac{75p}{90}$ et en retranchant de cette somme les 0^{fr},75 du coupon si le coupon tombe dans l'intervalle.

On aura le cours vrai du terme dans p jours en ajoutant pb au cours du jour, pourvu qu'on tienne compte du coupon, comme précédemment, et que p conduise à une époque non située au delà du dernier jour du mois.

83. Théorème de Bachelier. — *L'espérance mathématique du spéculateur est nulle.*

L'espérance mathématique de l'acheteur au comptant est positive, en raison des coupons. Un achat à terme avec report *nul* serait assimilable, comme résultat, à un achat au comptant, puisque, dans ces conditions, l'acheteur à terme pourrait conserver sa position sans bourse délier.

Considérons un achat à terme avec report de 0^{fr},25. A chaque liquidation, l'acheteur paie 0^{fr},25 de report; mais, entre temps, il touche 0^{fr},75 de coupons tous les trois mois, c'est-à-dire en moyenne 0^{fr},25 tous les mois, qui équivalent au report.

Or, on peut toujours considérer le report comme étant de 0^{fr},25 à la condition de remplacer le cours coté par le cours *vrai* : nous admettrons ce principe essentiel. Il en résulte que : les espérances mathématiques de l'acheteur et du vendeur sont toutes deux nulles.

C. Q. F. D.

LOI DES ÉCARTS DE PRIMES.

84. Nous allons appliquer à l'acheteur de primes le principe précédemment démontré, à savoir que *son espérance mathématique est nulle*.

Soit p la probabilité pour que, lors de la réponse des primes, le cours soit de $+x$ au-dessus du cours vrai du ferme ou de $-x$ au-dessous de ce même cours.

Soit $m + h$ l'écart vrai de la prime dont h .

Exprimons que l'espérance mathématique totale, c'est-à-dire du cours $-\infty$ au cours $+\infty$, est nulle.

Évaluons cette espérance pour les cours compris entre $-\infty$ et $+m$, entre m et $m + h$, entre $m + h$ et $+\infty$.

1° Pour tous les cours compris entre $-\infty$ et m , la prime est abandonnée, l'acheteur subit une perte h . Son espérance mathématique pour un cours compris dans l'intervalle donné est donc $-ph$ et pour tout l'intervalle

$$-h \int_{-\infty}^m p \, dx.$$

2° Pour un cours x compris entre m et $m + h$, la perte de l'acheteur sera $m + h - x$; l'espérance mathématique correspondante sera $-p(m + h - x)$ et pour l'intervalle entier

$$- \int_m^{m+h} p(m + h - x) \, dx.$$

3° Pour un cours x compris entre $m + h$ et $+\infty$, le bénéfice de l'acheteur sera $x - m - h$; l'espérance mathématique correspondante sera $p(x - m - h)$ et pour tout l'intervalle

$$\int_{m+h}^{\infty} p(x - m - h) \, dx.$$

Donc

$$\int_{m+h}^{+\infty} p(x - m - h) \, dx - \int_m^{m+h} p(m + h - x) \, dx - h \int_{-\infty}^m p \, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x) \quad h + m \int_m^\infty p \, dx = \int_m^\infty px \, dx,$$

relation entre les probabilités, les écarts de primes et leur importance.

Le cas le plus simple est celui où $m = 0$, c'est-à-dire celui où l'importance de la prime est égale à son écart. On appelle *prime simple* cette sorte de prime.

Soit a la valeur de la prime simple. Faisons $m = 0$ dans l'équation ci-dessus. Il vient

$$a = \int_0^\infty px \, dx = \int_0^\infty \frac{x}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2}} dx = k\sqrt{t}.$$

De $a = \int_0^\infty px \, dx$, on conclut que la prime simple est égale à l'espérance positive de l'acheteur ferme.

De $a = k\sqrt{t}$, on déduit ce principe que la valeur de la prime simple doit être proportionnelle à la racine carrée du temps.

Nous n'introduisons ici le principe simple a que pour énoncer le résultat suivant, qu'on déduit de l'équation (x); l'équation équivalant à celle-ci :

$$h - a + \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4\pi a} + \frac{m^4}{96\pi^2 a^3} - \frac{m^6}{1920\pi^3 a^5} + \dots = 0.$$

En admettant la forme approchée

$$h - a + \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4\pi a} = 0,$$

il vient

$$a = \frac{\pi(2h+m) \pm \sqrt{\pi^2(2h+m)^2 - 4\pi m^2}}{4\pi}, \quad m = \pi a \pm \sqrt{\pi^2 a^2 - 4\pi a(a-h)}.$$

OPÉRATIONS FERMES.

83. Dans les formules générales interviennent deux coefficients b et k dont on doit demander la valeur à l'expérience. C'est un fait que

$$b = 0,264 \text{ centime}, \quad k = 5 \text{ jours.}$$

Il en résulte que

$$a = 5\sqrt{t}$$

a les valeurs que voici :

$$\begin{array}{ll} \text{pour 45 jours} \dots & a = 33,54 \\ \text{pour 30 jours} \dots & a = 27,38 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{pour 20 jours} \dots & a = 22,36 \\ \text{pour 10 jours} \dots & a = 16,13 \end{array}$$

Calculons a pour un jour. On ne peut prendre $a = 5\sqrt{t} = 5$, car il n'y a pas 365 jours de bourse dans l'année, mais 307. Le jour moyen de bourse est donc, en fraction d'année, $\frac{365}{307}$ et, pour un jour,

$$a = 5\sqrt{\frac{365}{307}} = 5,45.$$

De même

$$b_{1 \text{ jour}} = b_1 = \frac{365}{307} b = 0,313.$$

86. Écart probable. — Quel est l'intervalle de cours — x , + x tel que, au bout d'un mois, la rente ait autant de chances de se trouver dans cet intervalle que de chances de se trouver au dehors?

On devra avoir

$$\int_0^x p \, dx = \frac{1}{4};$$

on en déduit

$$x = \pm 46 \text{ centimes.}$$

Pour un jour,

$$x = \pm 9 \text{ centimes.}$$

On remarquera qu'il s'agit de cours *vrais* et non de cours *cotés*. Si n est le nombre de jours séparant de l'échéance, le cours coté est inférieur au cours vrai de la quantité nb . Mais il est toujours facile de passer du cours coté au cours vrai, et réciproquement.

87. Probabilité de la hausse pour une période de n jours. — Si nb est l'écart du cours vrai au cours coté, cette probabilité est

$$\int_{nb}^{\infty} p \, dx.$$

La probabilité de la baisse sera

$$1 - \int_{nb}^{\infty} p \, dx \quad (1 = \text{certitude}).$$

88. **Problème.** — *Quelle est la probabilité de réussite d'un achat au comptant destiné à être revendu dans 30 jours?*

Ici, $nb = 25^c$, comme on l'a vu.

Il faut remplacer nb par 25 dans la formule précédente et l'on trouve que la probabilité est

$$0,64.$$

L'opération a deux chances sur trois de réussir.

Pour un an, il faut remplacer nb par 300 et l'on trouve que la probabilité est 0,89 : *neuf fois sur dix, un achat de rente au comptant produit un bénéfice au bout d'un an.*

89. **Problème.** — *Quelle est la probabilité de faire un bénéfice quand on effectue un achat ferme au début d'un mois et qu'on revend un an après?*

Réponse : $\frac{2}{3}$.

OPÉRATIONS A PRIMES.

90. **Écart des primes.** — Connaissant la valeur de a pour une époque donnée, on calcule facilement l'écart vrai par la formule

$$m = \pi a \pm \sqrt{\pi^2 a^2 - 4\pi a(a - h)}.$$

De l'écart vrai, on déduit l'écart coté en ajoutant nb à l'écart vrai, où n est le nombre de jours qui séparent de la réponse. Dans le cas d'une prime fin prochain, on ajoute $25 + (n - 30)b$. On arrive ainsi aux résultats que voici :

<i>Primes dont 50.</i>	<i>Primes dont 25.</i>	<i>Primes dont 10.</i>
Écart coté.	Écart coté.	Écart coté.
à 45 jours... 50,01	à 45 jours... 72,70	à 30 jours... 66,19
à 30 » ... 20,69	à 30 » ... 37,78	à 20 » ... 48,62
à 20 » ... 13,23	à 20 » ... 25,17	à 10 » ... 26,91
	à 10 » ... 12,24	

Pour la prime dont 5^c pour le lendemain, nous avons :

$$h = 5, \quad a = 5,45, \quad \text{d'où} \quad m = 0,81;$$

l'écart vrai est donc 5,81; en y ajoutant $b_1 = \frac{365}{307} b = 0,31$, on obtient l'écart calculé 6,12. Ces écarts *calculés* concordent sensiblement avec la moyenne des écarts observés.

91. Probabilité de levée des primes. — Pour qu'une prime soit levée, il faut que le cours de la réponse des primes soit supérieur au cours du pied de la prime; la probabilité de levée est donc exprimée par l'intégrale .

$$\int_{\epsilon}^{\infty} p dx,$$

ϵ étant le cours vrai du pied de la prime.

Le calcul, facile d'après ce qui a été dit, donne :

Probabilité de levée des primes dont 50°.	Probabilité de levée des primes dont 25°.	Probabilité de levée des primes dont 10°.
à 45 jours... 0,63	à 45 jours... 0,41	à 30 jours... 0,24
à 30 » ... 0,71	à 30 » ... 0,47	à 20 » ... 0,28
à 20 » ... 0,77	à 20 » ... 0,53	à 10 » ... 0,36
	à 10 » ... 0,65	

La probabilité de la levée de la prime dont 5° pour le lendemain est, de même, 0,48.

92. Probabilité de bénéfice des primes. — Pour qu'une prime donne un bénéfice à son acheteur, il faut que la réponse des primes se fasse à un cours supérieur à celui de la prime. La probabilité de bénéfice est donc

$$\int_{\epsilon_1}^{\infty} p dx,$$

ϵ_1 étant le cours de la prime.

Le calcul de cette intégrale conduit aux résultats que voici :

Probabilité de bénéfice des primes /50° (1).	Probabilité de bénéfice des primes /25°.	Probabilité de bénéfice des primes /10°.
à 45 jours... 0,40	à 45 jours... 0,30	à 30 jours... 0,20
à 30 » ... 0,43	à 30 » ... 0,33	à 20 » ... 0,22
à 20 » ... 0,44	à 20 » ... 0,36	à 10 » ... 0,27
	à 10 » ... 0,41	

(1) Le signe / s'énonce *dont* (*supra*).

La probabilité de réussite de la prime /5^e pour le lendemain est 0,34.

Ces notions présentent un réel intérêt, et les approfondir pourrait donner des résultats éclairant d'un jour très particulier les spéculations de Bourse. Contentons-nous de citer ce fait, concernant les primes, énoncé par M. Bachelier :

L'opération suivante :

<i>Achat d'une unité.....</i>	<i>/1^{fr}</i>
<i>Vente de quatre unités....</i>	<i>/50^c</i>
<i>Achat de trois unités.....</i>	<i>/25^c</i>

donnerait un bénéfice à tous les cours, pourvu que l'écart du /25^c au /50^c soit au plus le tiers de l'écart du /50^c au 1^{fr}, ce qui, pratiquement, est toujours réalisé.

A consulter : BACHELIER, Théorie de la spéculation. Gauthier-Villars, 1900.



CHAPITRE IV.

PROBABILITÉ GÉOMÉTRIQUE.

93. Jusqu'ici nous avons envisagé les seules questions de probabilité où les événements peuvent se présenter un nombre fini de fois.

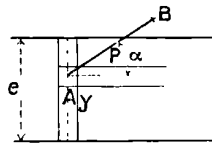
Dans d'autres questions telles que celle-ci, proposée par Buffon : « On jette une aiguille sur une table, sur laquelle on a tracé des parallèles équidistantes; quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles », il y a lieu d'étudier des cas favorables en nombre infini et des cas possibles en nombre également infini ou plutôt le rapport de ces infinis; cela conduit à comparer des variétés continues de 1, 2, ..., x dimensions.

De tels problèmes, *s'ils sont bien posés*, ne présentent pas en eux-mêmes de difficultés spéciales. Voici, pour donner une idée de ce qu'ils sont, la solution du problème de l'aiguille.

94. Soient e l'écartement des lignes parallèles, l ($l < e$) la longueur de l'aiguille.

Concevons le plancher divisé en bandes infinitésimales perpen-

Fig. 6.



diculaires aux traits. L'extrémité inférieure (sur notre dessin) de l'aiguille a autant de chances de tomber dans une bande que dans l'autre. Supposons qu'elle tombe dans une bande déterminée. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille coupe le trait supérieur?

Divisons la bande en rectangles infinitésimaux. La probabilité pour que l'extrémité inférieure soit comprise, dans le compartiment où elle tombe, entre les ordonnées y et $y + dy$, est $\frac{dy}{e}$. Soit A le point où elle tombe; divisons le plan autour de A en secteurs infinitésimaux; la probabilité pour que l'aiguille AB prenne un azimut compris entre α et $\alpha + d\alpha$ sera $\frac{d\alpha}{\pi}$, puisque B, étant au-dessus de A, α ne peut varier que de 0 à π ; la probabilité de chute dans ces conditions simultanées sera

$$\frac{dy}{e} \frac{d\alpha}{\pi},$$

et la condition de rencontre est

$$e - y < l \sin \alpha.$$

La probabilité de rencontre, somme des probabilités partielles, sera

$$P = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \int_{y=e-l \sin \alpha}^{y=e} \frac{dy}{e} \frac{d\alpha}{\pi} = \frac{l}{e\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha$$

ou enfin

$$P = \frac{2l}{\pi e}.$$

Un astronome de Zurich a voulu vérifier expérimentalement le résultat précédent, en prenant $e = 45^{\text{mm}}$, $l = 36^{\text{mm}}$, ce qui correspond à

$$P = 0,5093.$$

Il fit 5000 expériences: l'aiguille rencontra 2532 fois, ce qui conduisit à la probabilité

$$P' = 0,5064.$$

Le faible écart entre P et P' peut être regardé comme une vérification du théorème de Bernoulli.

Il arrive, dans des problèmes de ce genre, que l'énoncé prête à confusion. Telle est la question suivante:

95. Dans son *Traité du Calcul des probabilités*, J. Bertrand se propose de rechercher la probabilité pour qu'une corde quelconque

d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit et, à ce propos, il résout les trois problèmes particuliers que voici :

I. *D'un point quelconque A, pris à l'intérieur d'une circonférence O et sur un diamètre déterminé xOy , on mène une corde perpendiculaire à ce diamètre. Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence?*

Réponse : $\frac{1}{2}$.

II. *D'un point quelconque B, pris sur une circonférence, on mène une corde quelconque. Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{3}$.

III. *D'un point quelconque C, intérieur à une circonférence, on mène une corde perpendiculaire au rayon OC. Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{4}$.

De la divergence de ces réponses, J. Bertrand conclut que le problème de la probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est une question « mal posée » ; M. H. Poincaré dirait plutôt que « le bon sens ne suffit pas ici pour nous apprendre quelle *convention* il faut faire ».

Nous faisons, en effet, une convention en disant que le problème de Bertrand est identique à l'un des trois problèmes résolus au début. Nous convenons que les cordes dont on compare les longueurs sont construites d'une façon *déterminée* : et il se trouve que la solution du problème dépend de ce mode de construction.

En quoi la solution du problème de Bertrand dépend-elle du mode de construction? En ce qu'il n'est pas de *comparaison* possible entre les évaluations des nombres de cordes résultant de procédés de construction *différents*. Cette impossibilité, évidente s'il

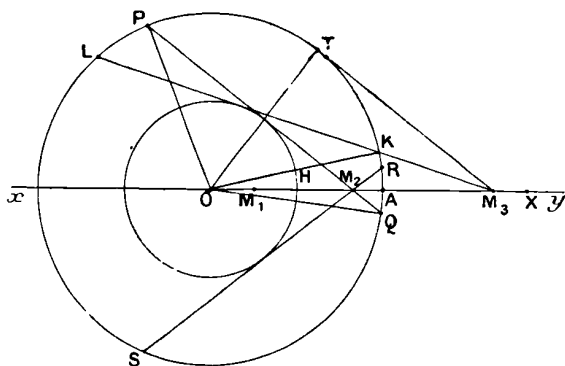
s'agit d'un nombre de cordes limité, s'étend d'elle-même au cas d'un nombre de cordes illimité.

Tout au plus peut-on prendre des conventions plus larges que celles admises dans les trois problèmes traités au début : chercher, par exemple, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque d'un diamètre déterminé xOy d'une circonférence O soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ou, mieux encore, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque du plan de la circonférence vérifie la condition imposée.

Ces problèmes sont faciles à traiter. Nous y trouverons lieu de confirmer l'indétermination du problème de Bertrand (1).

PROBLÈME I. — *D'un point quelconque M situé sur un diamètre déterminé et indéfini xOy d'un cercle O de rayon 1,*

Fig. 7.



on mène une corde quelconque ; quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

Le point M peut se trouver soit entre les points O et H , H milieu du rayon OA , soit entre les points H et A , soit au delà du point A .

Dans le deuxième cas, les cordes menées de M_2 sont plus grandes que le côté du triangle équilatéral si elles tombent dans

(1) R. DE MONTESSUS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1903.

l'un des angles $\widehat{PM_2O}$, $\widehat{RM_2A}$ définis par les cordes PM_2Q , RM_2S égales au côté du triangle équilatéral. Au contraire, les cordes qu'il est possible de mener de O tombent dans l'un des angles $\widehat{PM_2x}$, $\widehat{RM_2P}$, $\widehat{yM_2R}$. Ici, le nombre des cas favorables est représenté par la somme d'angles

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2A} = \widehat{PM_2x} + \widehat{AM_2Q} = 2\widehat{PM_2x} = 2\pi - 2\widehat{OM_2Q},$$

et le nombre des cas possibles par

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2P} + \widehat{yM_2R} = \pi.$$

Soit $OM_2 = x$; le triangle OM_2Q donne

$$\frac{OQ}{\sin \widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin \widehat{M_2QO}},$$

$$\frac{1}{\sin \widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin \frac{\pi}{6} \left(\text{ou } \frac{1}{2} \right)}$$

et

$$OM_2Q = \arcsin \frac{1}{2x}.$$

On remarquera que l'angle OM_2Q est obtus; si donc on prend pour \arcsin la détermination comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on devra écrire

$$OM_2Q = \pi - \arcsin \frac{1}{2x}.$$

Il en résulte que le nombre des cas favorables est représenté par

$$2 \arcsin \frac{1}{2x}.$$

Dans le premier cas, toutes les cordes vérifient la condition imposée; le nombre des cas possibles étant représenté par π , comme précédemment, le nombre des cas favorables sera également représenté par π .

Dans le troisième cas, où l'on prendra $OM_3 = y$, si M_3T , M_3KL sont respectivement la tangente et la corde égale au côté du triangle équilatéral menées de M_2 , les nombres des cas favorables et possibles seront représentés par les angles $\widehat{OM_3K}$, $\widehat{TM_3O}$. Le

triangle OKM_3 donne

$$\frac{\sin \widehat{OM_3K}}{OK} = \frac{\sin \widehat{OKM_3}}{OM_3},$$

d'où

$$\sin \widehat{OM_3R} = \frac{\sin \widehat{LKO} \left(\text{ou } \sin \frac{\pi}{6} \right)}{y},$$

donc

$$\widehat{OM_3K} = \arcsin \frac{1}{2y};$$

de plus,

$$OT = OM_3 \sin \widehat{TM_3O} \quad \text{et} \quad \widehat{TM_3O} = \arcsin \frac{1}{y}.$$

Ainsi, pour un point M_2 , situé à la distance x du centre, $\frac{1}{2} < x < 1$, la probabilité d'une corde plus grande que le côté du triangle équilatéral sera

$$\frac{2 \arcsin \frac{1}{2x}}{\pi}, \quad \left(1 < \frac{\arcsin \frac{1}{2x}}{\pi} < \frac{1}{3} \right);$$

pour un point M_3 , situé à la distance y du centre, la probabilité sera

$$\frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}} \quad \left(\frac{1}{3} < \frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}} < \frac{1}{2} \right);$$

LA PROBABILITÉ EST DONC FONCTION DE LA DISTANCE DU POINT M AU CENTRE.

Revenons au calcul de la probabilité pour un point M occupant une position quelconque sur un segment $OP = a$ de la droite xOy .

Partageons OH en n parties égales par les points H_1, H_2, \dots, H_{n-1} , situés aux distances

$$x_1 = \frac{1}{2n}, \quad x_2 = \frac{2}{2n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{2n}$$

du point O et prolongeons cette division jusqu'au point A par les

DE M

8

points $H_{n+1}, H_{n+2}, \dots, H_{n-1}$, d'abscisses

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\x_{n+2} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2n}, \\&\dots\dots\dots, \\x_{2n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n},\end{aligned}$$

et, enfin, jusqu'au point P par les points A_1, A_2, \dots, A_p d'abscisses

$$\begin{aligned}y_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2n}, \\y_{2n+2} &= 1 + \frac{2}{2n}, \\&\dots\dots\dots, \\y_{2n+p} &= 1 + \frac{p}{2n}.\end{aligned}$$

L'ensemble des cas favorables sera pour les points x_1, \dots, x_{n-1} :

$$(n-1)\pi;$$

pour les points $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}$:

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2 \arcsin \frac{1}{2x_i};$$

pour les points $y_{2n+1}, y_{2n+2}, \dots, y_{2n+p}$:

$$\sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{2y_j};$$

tandis que les ensembles des cas possibles seront respectivement

$$(n-1)\pi, \quad (n-1)\pi, \quad \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j}.$$

La probabilité pour l'ensemble des points considérés sera donc

$$\frac{(n-1)\pi + \sum_{i=2n+1}^{i=2n-1} 2 \arcsin \frac{1}{2x_j} + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{2y_j}}{2(n-1)\pi + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j}}.$$

Or,

$$y_{j+1} - y_j = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2n};$$

écrivait l'expression précédente comme suit :

$$\frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi + \sum_{i=1}^{2n+1} 2 \arcsin \frac{1}{2x_i} (x_{i+1} - x_i) + \sum_{j=2n+1}^{2n+p} \frac{1}{2y_j} (y_{j+1} - y_j)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi + \sum_{j=2n+1}^{2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j} (y_{j+1} - y_j)},$$

il résulte, en faisant croître n indéfiniment, que la formule

$$P = \frac{\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \arcsin \frac{1}{2x} dx + \int_1^a \arcsin \frac{1}{2y} dy}{\pi + \int_1^a \arcsin \frac{1}{y} dy}$$

représente la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point pris au hasard sur le segment

$$OX = a > 1$$

soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit.

Si l'on observe que

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + a \log \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right],$$

on pourra écrire

$$P = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{3}) + a \arcsin \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \log (2a + \sqrt{4a^2 - 1})}{\frac{\pi}{2} + a \arcsin \frac{1}{a} + \log (a + \sqrt{a^2 - 1})}.$$

Si a tend vers l'infini, $a \arcsin \frac{1}{a}$ a une limite finie et P a par suite même limite que

$$\frac{\frac{1}{2} \log (2a + \sqrt{4a^2 - 1})}{\log (a + \sqrt{a^2 - 1})},$$

soit $\frac{1}{2}$:

Ainsi, $\frac{1}{2}$ est la probabilité pour qu'une corde menée à un cercle d'un point quelconque d'une droite indéfinie, déterminée et homogène passant par son centre, soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.

PROBLÈME II. — D'un point quelconque du plan d'un cercle O de rayon 1, on mène une corde quelconque à ce cercle; quelle est la probabilité que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle?

Aux chances λ et μ trouvées tout à l'heure pour un point situé sur la droite xOy et à la distance d du centre de la circonférence, il faudra substituer les chances $\lambda \cdot 2\pi d$, $\mu \cdot 2\pi d$ de l'ensemble des points dont la distance au centre de cette même circonférence est précisément d .

On obtiendra ainsi les expressions

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2\pi x_i \arcsin \frac{1}{2x_i} + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \pi y_j \arcsin \frac{1}{2y_j}}{\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} \pi x_i + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \pi y_j \arcsin \frac{1}{y_j}}$$

et

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dx + x \int_{\frac{1}{2}}^1 2x \arcsin \frac{1}{2x} dx + \int_1^a y \arcsin \frac{1}{2y} dy}{\int_0^1 x dx + \int_1^a y \arcsin \frac{1}{y} dy}$$

Si l'on observe que

$$\int x \arcsin \frac{a}{x} dx = \frac{x^2}{2} \arcsin \frac{a}{x} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2},$$

on trouvera que la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque intérieur à un cercle de rayon a ($a > 1$), concentrique au cercle O, soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est

$$\frac{1 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + 4a^2 \arcsin \frac{1}{2a} + \sqrt{4a^2 - 1}}{4 - 2\pi + 4a^2 \arcsin \frac{1}{a} + 4\sqrt{a^2 - 1}};$$

LA PROBABILITÉ EST ENCORE UNE FONCTION DU NOMBRE α .

La limite de cette expression, quand α tend vers l'infini, est $\frac{1}{2}$:
La probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque du plan soit plus grande que le côté du triangle équilatéral est encore $\frac{1}{2}$.

Quoi qu'il en soit, le problème dépend d'une convention arbitraire et, pour cette raison, il admet une INFINITÉ de solutions.

Au fait, considérons, par exemple, les deux opérations suivantes qui chacune matérialisent le problème de Bertrand :

a. On lance une bille dans un canal creusé le long d'une circonférence; on la fixe en son point d'arrêt; on lui adapte un index rectiligne qu'on lance autour de ce point comme pivot.

b. On lance une bille sur le plan d'un cercle limité à la circonférence du cercle par un rebord; on fixe la bille en son point d'arrêt et on lui adapte un index rectiligne; on fait tourner l'index autour de la bille.

Dans l'une et l'autre de ces opérations, l'index, une fois arrêté, détermine dans le cercle une corde tantôt plus grande, tantôt plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit. Cela posé, répétons l'opération *a* un très grand nombre de fois et soit α le rapport du nombre des cordes plus grandes que le côté du triangle équilatéral inscrit au nombre des cordes plus petites que ce même côté; puis, reprenons l'opération *b* et calculons ici encore le rapport du nombre des cordes de la première catégorie au nombre des cordes de la seconde catégorie : *on trouvera que les nombres α , β tendent vers des limites NON IDENTIQUES quand le nombre des expériences s'accroît de plus en plus.*

Nous ne saurions nous en étonner, car, dans chacune de ces deux catégories d'expériences, le problème de Bertrand se trouve matérialisé au prix d'une CONVENTION spéciale, portant sur la manière de lancer la bille qui sert de pivot à l'index.

En dernière analyse, LA SOLUTION DU PROBLÈME DÉPEND D'UNE CONVENTION. J. Bertrand le savait, car, nous dit M. Darboux dans son bel éloge académique : « Cette question l'a préoccupé; il en avait trouvé la solution, mais il la laisse chercher à son lecteur ».



CHAPITRE V.

PROBABILITÉ DES CAUSES.

I. — PROPOSITIONS FONDAMENTALES.

96. Tout calcul renferme sa contre-partie. A toute opération correspond une opération inverse. La soustraction et la division sont l'inverse de l'addition et de la multiplication. Le calcul des intégrales indéfinies est l'inverse du calcul des dérivées. De même dans le Calcul des probabilités, nous allons le voir.

97. **Théorème de Bayes.** — Un événement A peut être le fait de l'une quelconque des causes C_1, C_2, \dots, C_n . La probabilité que la cause C_i produira l'événement A est p_i . La probabilité que la cause C_i soit mise en jeu est ω_i . L'événement A a eu lieu. *On demande la probabilité que ce soit la cause C_i qui l'ait produit.*

La probabilité que la cause ait été mise en jeu était ω_i , la probabilité que mise en jeu elle ait produit l'événement A étant p_i , la probabilité que la cause C_i sera mise en jeu et produira l'événement A est la probabilité *composée* $\omega_i p_i$.

D'autre part, la probabilité que l'événement se produira est

$$\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n;$$

par suite, x étant la probabilité pour qu'une fois produit il soit dû à la cause C_i ,

$$x(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n)$$

sera la probabilité : 1° que la cause sera mise en jeu et 2° qu'elle produira l'événement A. Donc

$$x(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n) = \omega_i p_i$$

et

$$x = \frac{\omega_i p_i}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n}.$$

L'expression donnée de la probabilité x constitue le *théorème de Bayes*.

On peut donner de ce théorème une démonstration d'apparence objective.

M urnes contenant chacune Q boules sont réparties en catégories C_1, C_2, \dots, C_n . Les urnes de la catégorie C_1 sont au nombre de $\omega_1 M$; les urnes de la catégorie C_2 , au nombre de $\omega_2 M$, etc. La probabilité que la cause C_i est en jeu est

$$\frac{\omega_i M}{M} = \omega_i.$$

Dans les urnes de catégorie C_1 il y a Q boules et $p_1 Q$ boules blanches; dans les urnes C_2 il y a Q boules et $p_2 Q$ boules blanches, etc.

On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie appartiendra à la catégorie C_i ?

Le nombre des cas favorables est le nombre des boules blanches de la catégorie C_i , soit $\omega_i p_i M Q$. Le nombre total des cas possibles est celui des boules blanches, soit

$$\frac{\omega_i p_i}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n}.$$

Le problème principal qui se pose ici est de chercher la probabilité pour qu'un événement E se produise m fois dans $m + n$ épreuves, étant donné qu'il s'est produit p fois dans $p + q$ épreuves.

98. Laplace encore ⁽¹⁾ présente la question sous forme objective, comme suit :

Supposons qu'on ait observé que, sur $p + q$ enfants, il est né p garçons et q filles, et que l'on cherche la probabilité P que, sur $m + n$ enfants qui doivent naître, il y aura m garçons et n filles ; si l'on nomme x la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon et $1 - x$ celle qu'il sera fille,

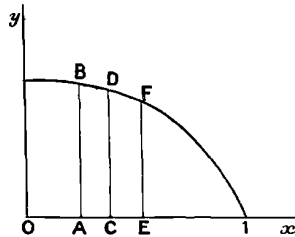
$$P_{1x} = \frac{(p+q)!}{p!q!} x^p(1-x)^q$$

(1) LAPLACE, *Œuvres : Mémoire sur les probabilités*, t. IX, p. 419.

sera la probabilité pour que, sur $p + q$ enfants, il y ait p garçons et q filles; ce sera le nombre des cas favorables, la probabilité étant x .

P_{1x} est fonction de x ; marquons en *ordonnées* AB, CD, EF, ... les différentes valeurs de P_{1x} , correspondant à $x = OA$, $x = OC$,

Fig. 8.



$x = OE$, ...; imaginons qu'on donne à x toutes les valeurs possibles (de 0 à 1, car n est une probabilité); les points B, D, F, ... dessineront une courbe dont l'aire

$$\int_0^1 P_{1x} dx$$

représentera l'*ensemble* des cas favorables.

De même

$$P_{2x} = \frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{(p+q)!}{p!q!} x^{p+m}(1-x)^{q+n}$$

sera la probabilité que, sur $p + q$ enfants qui naîtront d'*abord*, il y aura p garçons et q filles, et que sur $m + n$ enfants qui naîtront *ensuite*, il y aura m garçons et n filles; c'est le nombre des cas possibles, étant donné que la probabilité est x ; l'*ensemble* des cas possibles sera comme précédemment

$$\int_0^1 P_{2x} dx.$$

Or,

$$\int x^p(1-x)^q dx = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)},$$

$$\int x^{p+m}(1-x)^{q+n} dx = \frac{(q+n)!}{(p+m+1)(p+m+2)\dots(p+q+m+n+1)}.$$

on en déduit : *probabilité demandée*

$$\frac{\int_0^1 P_{1x} dx}{\int_0^1 P_{2x} dx} = \frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{(q+1)(q+2)\dots(q+n)(p+1)(p+2)\dots(p+m)}{(p+q+2)(p+q+3)\dots(p+q+m+n+1)}.$$

99. **Application.** — Deux joueurs d'échecs ont joué $a+b$ parties; le premier en a gagné a , le second b . Quelle est la probabilité que le premier joueur gagnera la $(a+b+1)^{i\grave{e}me}$ partie ?

Faisons $m=1$, $n=0$ dans la formule précédente que nous écrirons

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{(q+n)!(p+m)!(p+q+1)!}{q!p!(p+q+m+n+1)!};$$

il vient

$$\frac{(p+1)(p+q+1)!}{(p+q+2)!} = \frac{p+1}{p+q+2};$$

ici $p=a$, $q=b$; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{a+1}{a+b+2}.$$

II. — THÉORIE DES ERREURS.

100. **Erreurs systématiques et accidentelles.** — Dans les sciences d'observation, astronomie et autres, il est nécessaire d'étudier les erreurs dont les observations peuvent être affectées. C'est le seul moyen de se faire une idée de la précision des observations.

Les erreurs peuvent ici se classer en deux catégories bien définies : les erreurs *systématiques* et les erreurs *accidentelles*.

Les erreurs systématiques sont dites *instrumentales*, *personnelles* ou *théoriques* suivant qu'elles proviennent du défaut de l'instrument employé, de l'inhabileté de l'observateur ou de certaines causes dont les effets peuvent se calculer à l'avance.

Un exemple type d'erreur systématique est celui-ci : usage pour une série de mesures de longueur d'un *mètre* trop long. Il s'agit dans ce cas d'une erreur instrumentale.

Il n'y a pas lieu d'insister ici sur les erreurs systématiques, le calcul des probabilités ne concernant que les erreurs accidentelles.

D'après M. Gruy, « l'expérience prouve que les diverses mesures d'une même grandeur, faites soigneusement avec toute la précision dont la méthode employée est susceptible et purgées de toutes les erreurs systématiques, présentent encore de petites différences. Ces écarts sont dus à des causes irrégulières ou accidentelles et ont reçu le nom d'erreurs ACCIDENTELLES.

» Les erreurs accidentelles ne sont liées par aucune loi aux observations et ne peuvent être calculées *a priori*. N'étant pas calculables *a priori*, à cause de la nature capricieuse et irrégulière des causes qui les produisent, elles tombent dans le domaine du *Calcul des probabilités* car elles offrent, par définition même, les caractères suivants :

» 1^o Les erreurs positives ou négatives, d'égale valeur absolue, sont également probables et, sur un grand nombre d'observations d'une même quantité, également fréquentes ;

» 2^o Toutes les erreurs sont comprises entre des limites $-b$ et $+b$, limites variables avec l'espèce d'observation.

» 3^o Les erreurs ne sont pas distribuées uniformément entre les limites $-b$ et $+b$; les plus petites sont les plus fréquentes. »

101. Loi des erreurs accidentelles d'observation. — Bradley a mesuré 470 fois le même intervalle de temps, avec toute la précision que comportaient ses instruments.

Regardant comme mesure exacte la moyenne arithmétique n_0 des 470 nombres obtenus, regardant en conséquence la différence $u_p = n_0 - n_p$, prise avec son signe comme l'erreur dont la mesure n_p est affectée, il se trouve que, conformément au Tableau ci-après, 47 erreurs sont comprises entre $0^s, 0$ et $+0^s, 1$; 47 aussi entre $0^s, 0$ et $-0^s, 1$; etc. Bradley a trouvé :

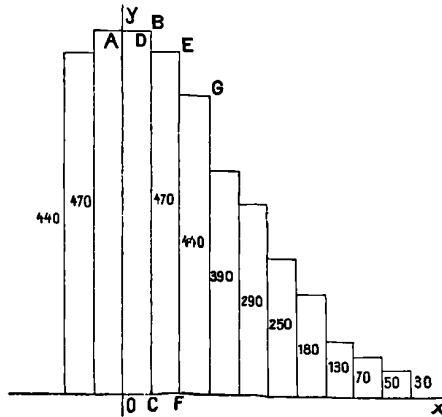
	$y.$	$x.$	$x + \Delta x.$
94 erreurs dont sensiblement...	47	$0,0$ et $+0,1$	
		$0,0$	$-0,1$
88 » »	44	$+0,1$	$+0,2$
		$-0,1$	$-0,2$
78 » »	39	$+0,2$	$+0,3$
		$-0,2$	$-0,3$

	y .	x .	$x + \Delta x$.
58 erreurs dont sensiblement...	29	entre + 0,3	+ 0,4
		- 0,3	- 0,4
51 » »	25	+ 0,4	+ 0,5
		- 0,4	- 0,5
36 » »	18	+ 0,5	+ 0,6
		- 0,5	- 0,6
26 » »	13	+ 0,6	+ 0,7
		- 0,6	- 0,7
14 » »	7	+ 0,7	+ 0,8
		- 0,7	- 0,8
10 » »	5	+ 0,8	+ 0,9
		- 0,8	- 0,9
7 » »	3	+ 0,9	+ 1,0
		- 0,9	- 1,0

en plus, 8 erreurs, tant positives que négatives, sont un peu supérieures à 1^s.

Si l'on porte en abscisses les nombres $x, x + \Delta x, \dots$ et en

Fig. 9.



ordonnées les nombres $\frac{y}{\Delta x}$ ou, ici, $10 y$, on obtient la figure 9, où les aires $\Delta x CB = 47, \Delta x EF = 44, \dots$ représentent les nombres d'erreurs compris entre 0 et Δx (0^s et $+ 0^s, 1$), Δx et $2 \Delta x$ ($+ 0^s, 1$ et $0^s, 2$), \dots

Or, les sommets B, E, G, ... se trouvent à très peu près sur la courbe

$$(1) \quad y = 47,365 + e^{-1,764^2 x^2},$$

comme le montrent les résultats suivants :

Erreur.	$2y$	
	calculé au moyen de (1).	observé.
$x = 0,05$	94	94
0,15	89	88
0,25	78	78
0,35	64	58
0,45	50	51
0,55	36	36
0,65	24	26
0,75	15	15
0,85	9	10
0,95	5	7

En général, l'expérience montre qu'à une série quelconque d'observations, faites avec toute la précision que comportent les instruments employés, répond une relation de la forme

$$(1) \quad y = y_0 e^{-h^2 x^2},$$

où $y \Delta x$ désigne le nombre d'erreurs comprises entre les intervalles x et $x + \Delta x$; y_0 et h^2 sont des constantes appropriées à la série d'expériences en jeu. On évalue les erreurs, comme il a été dit, en partant de la moyenne n_0 des chiffres trouvés.

102. Calcul des constantes y_0 et h^2 . — Soit y_1 le nombre d'erreurs comprises dans l'intervalle $0, + \Delta x$; on aura, en faisant $x = 0$ dans la formule (1),

$$y_1 = y_0,$$

ce qui déterminera y_0 .

La formule donnera ensuite

$$\frac{\log y_0 - \log y}{x^2} = h^2;$$

si y_2, y_3, y_4, \dots désignent les nombres d'erreurs comprises dans les intervalles $+ \Delta x, + 2 \Delta x; + 2 \Delta x, + 3 \Delta x; + 3 \Delta x, + 4 \Delta x, \dots$ il viendra

$$\frac{\log y_0 - \log y_2}{\Delta x^2} = h_1^2, \quad \frac{\log y_0 - \log y_3}{(2 \Delta x)^2} = h_2^2, \quad \frac{\log y_0 - \log y_4}{(3 \Delta x)^2} = h_3^2, \quad \dots,$$

où les nombres h_1, h_2, h_3, \dots sont peu différents les uns des autres. On prendra pour h la moyenne arithmétique de h_1, h_2, h_3, \dots

Revenant à la formule

$$y = y_0 e^{-h^2 x^2},$$

où l'on attribue à h la valeur calculée comme il a été dit, on reprendra le calcul de y_0 en calculant

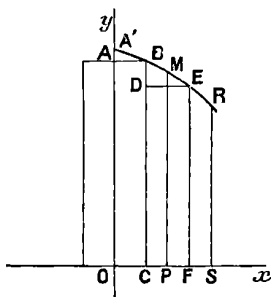
$$y_{01} = y_1, \quad y_{02} = y_2 e^{-h^2(\Delta x)^2}, \quad y_{03} = y_3 e^{-h^2(2\Delta x)^2}, \quad \dots,$$

et en prenant pour y_0 la moyenne arithmétique de $y_{01}, y_{02}, y_{03}, \dots$

Ce mode de calcul, tout schématique, donne une idée des méthodes dont on se sert usuellement pour calculer les constantes y_0 et h . En réalité, on prend ordinairement pour h la valeur que l'on va trouver *ci-après* et l'on en déduit y_0 comme il a été dit.

Nombre des erreurs comprises dans un intervalle $x_1 x_2$. — Les nombres d'erreurs comprises dans les intervalles $\Delta x; \Delta x, 2\Delta x; 2\Delta x, 3\Delta x; \dots$ sont représentés par les aires des rectangles

Fig. 10.



OABC, CDEF, ... figurant la courbe $A'BE \dots$ ou $y = y_0 e^{-h^2 x^2}$; il est commode de regarder ces nombres d'erreurs comme représentés par les aires *curvilignes* $OA'BC, OB'EF, \dots$. De la sorte, les aires *curvilignes* $OA'BC, OA'B'EF, \dots$ représenteront les nombres d'erreurs positives inférieures ou au plus égales à $\Delta x, 2\Delta x, \dots$. Plus généralement, l'aire $OA'MP$ représentera le nombre d'erreurs positives inférieures ou au plus égales à OP et une

aire PMRS représentera le nombre d'erreurs positives comprises entre OS, OP ou égales à OS, OP.

103. On constate *expérimentalement* que ces aires curvilignes

$$y_0 \int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2 x^2} dx$$

représentent bien les nombres d'erreurs comprises entre x_1 et x_2 pourvu qu'on attribue aux constantes y_0 et h des valeurs appropriées *qui ne sont plus les mêmes que précédemment*. Cette distinction se conçoit puisqu'on substitue les aires curvilignes O A'BC, CBEF, ... aux rectangles OABC, CDEF, ... et puisque, si $N\Delta x$ est la plus grande erreur positive, on ajoute aux erreurs constatées des erreurs hypothétiques en nombre $y_0 \int_{N\Delta x}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx$.

En effet, la courbe $y = y_0 \int e^{-h^2 x^2} dx$ est *asymptote* à Ox , tandis que, dans les expériences, les erreurs ne dépassent jamais un maximum $N\Delta x$. Mais si l'on considère que l'aire supplémentaire $y_0 \int_{N\Delta x}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx$ tend très rapidement vers zéro quand $N\Delta x$ croît, on se rend compte qu'elle ne puisse guère fausser les résultats de quantités appréciables, *les erreurs étant elles-mêmes approximatives*.

104. **Calcul des constantes y_0 et h .** — Le nombre total des erreurs positives est $y_0 \int_0^{N\Delta x} e^{-h^2 x^2} dx$, N étant le nombre total des observations donnant lieu à des erreurs positives. Or, nous l'avons dit, à cette intégrale on peut substituer, sans erreur sensible, l'intégrale

$$y_0 \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = y_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

De même, le nombre total des erreurs négatives est sensiblement $\frac{y_0 \sqrt{\pi}}{2h}$; si m est le nombre total des observations, on aura en fin de compte

$$m = y_0 \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

d'où

$$y_0 = \frac{mh}{\sqrt{\pi}}$$

et

$$y = \frac{hm}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx.$$

Posant $hx = t$, d'où $dx = \frac{dt}{h}$, il viendra

$$y = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2} dt = \frac{m}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2} dt$$

et l'on détermine h en donnant à y et x deux valeurs correspondantes.

Par exemple, pour les observations de Bradley, $m = 470$, et pour $y = 47$, $x = 0,1$, on a

$$47 = \frac{470}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,1h} e^{-t^2} dt,$$

$$0,2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,1h} e^{-t^2} dt.$$

Les Tables de la fonction $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$ donnant

$$0,2 = \Theta(0,18),$$

on aura

$$0,1h = 0,18,$$

d'où

$$h = 1,8.$$

A dire vrai, si l'on substitue à y et x plusieurs systèmes de valeurs correspondantes, on ne trouve pas pour h des valeurs *identiques*; ainsi, pour l'intervalle $0^s - 1^s$ des observations de Bradley, on aurait

$$230 = 235 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^h e^{-t^2} dt,$$

d'où

$$\frac{230}{235} = 0,98 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^h e^{-t^2} dt$$

et

$$h = 1,65.$$

En conséquence, on préfère ne pas donner à h la valeur se rapportant à tel ou tel système de valeurs correspondantes de y et x , mais plutôt la moyenne des valeurs que les différents systèmes (y, x) donnent à h . Ici, cette moyenne est $h = 1,764$, et la formule

$$y = 235 \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1,764x} e^{-t^2} dt$$

représente convenablement la série des mesures.

Pour $x_1 = 0, 1$, $x_2 = 0, 2$, $x_3 = 0, 3$, cette formule donne

$$y_1 = 47, \quad y_2 = 86, \quad y_3 = 138,$$

les nombres observés étant respectivement 47, 91, 130.

J'ajoute, comme précédemment, que ce mode de calcul de la constante h est encore schématique et donne seulement une idée de ce qui se fait pratiquement. Nous verrons un peu plus loin comment on calcule effectivement h (*cf.* n° 113).

PROBABILITÉ D'UNE ERREUR DONNÉE.

105. **Probabilité pour que l'erreur tombe entre x et $x + dx$.** — Par définition, cette probabilité est le rapport du nombre dy des cas où l'erreur tombe dans cet intervalle au nombre total m des cas, c'est-à-dire $\frac{dy}{m}$. Désignant cette probabilité, qui tend vers zéro avec dx , par dp ,

$$dp = \frac{1}{m} y_0 \int_x^{x+dx} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{m} y_0 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx;$$

dp se nomme *probabilité de l'erreur x* .

106. **Probabilité pour que l'erreur tombe entre 0 et x .** — Cette probabilité est évidemment

$$\sum_0^x dp = \int_0^x dp,$$

ou

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2} dt.$$

107. Probabilité pour que l'erreur tombe entre $-x$ et x :

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2} dt.$$

Cette probabilité peut se calculer au moyen des Tables de la fonction $\Theta(t)$. On peut aussi écrire

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} + \dots,$$

d'où, remplaçant t par $-t^2$ et intégrant dans les limites 0 à hx ,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{hx}{1} - \frac{h^3 x^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{h^5 x^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \frac{h^7 x^7}{7} + \dots \right),$$

série convergente, quel que soit hx .

Erreur probable. — Si nous voulons calculer pour quelle valeur t_1 de t ou x_1 de x la probabilité P est $\frac{1}{2}$, nous avons à résoudre l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{1} + \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{t^5}{5} - \dots \right),$$

qui donne, par approximations successives,

$$t_1 = hx_1 = 0,4769363\dots$$

L'erreur x_1 , qu'on écrit ordinairement r , se nomme l'*erreur probable*. Il y a autant de chances pour qu'une erreur tombe entre $-r$ et $+r$ qu'en dehors de cet intervalle. Si l'on rangeait les erreurs par ordre de grandeur absolue, en les répétant autant de fois qu'elles se présentent, r occuperait *théoriquement* le milieu de la série ainsi formée.

108. *Moyenne des erreurs.* — On nomme ainsi le quotient de la somme des erreurs, prises en valeurs absolues, par leur nombre total m .

Les erreurs comprises entre x et $x + dx$ sont en nombre

$$dp = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx,$$

et, chacune étant égale, à un infiniment petit près, à x , leur somme a pour expression

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2 x^2} dx.$$

La somme totale des erreurs sera donc

$$\begin{aligned} \frac{mh}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2 x^2} dx \\ = \frac{m}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} d(h^2 x^2) = \frac{m}{h\sqrt{\pi}} (e^{-h^2 x^2})_{+\infty}^{-\infty} = \frac{m}{h\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

et leur moyenne

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

C'est un fait d'expérience que la moyenne des erreurs diffère peu de la moyenne arithmétique de la somme *algébrique*

$$\frac{|n_0 - n'| + |n_0 - n''| + \dots + |n_0 - n_m|}{m}$$

des *résidus*

$$u' = n_0 - n', \quad u'' = n_0 - n'', \quad \dots, \quad u_m = n_0 - n_m.$$

109. Moyennes des carrés, cubes, etc., des erreurs ou quotients des sommes des carrés, cubes, etc., des erreurs par leur nombre total m . — Les erreurs comprises entre x et $x + dx$ sont en nombre $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$, et, chacune étant égale, à un infiniment petit près, à x , les sommes de leurs carrés, cubes, etc., ont pour expressions

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2} dx, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^3 e^{-h^2 x^2} dx, \quad \dots$$

Les sommes des carrés, cubes, etc., des erreurs sont, par suite,

$$\frac{mh}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{m}{2k^2}, \quad \frac{mh}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{m}{k^3 \sqrt{\pi}}, \quad \dots,$$

et les moyennes des carrés, cubes, etc., des erreurs sont

$$\frac{1}{2k^2}, \quad \frac{1}{k^3 \sqrt{\pi}}, \quad \frac{3}{4k^4}, \quad \dots$$

On déduit de là des relations remarquables. S_1, S_2, S_3, S_4 désignant la somme algébrique des résidus, des carrés des résidus, des cubes des résidus, des quatrièmes puissances des résidus, c'est un fait d'expérience que l'on a sensiblement, nous l'avons déjà dit,

$$\frac{S_1}{m} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},$$

et aussi

$$\frac{S_2}{n} = \frac{1}{2k^2},$$

$$\frac{S_3}{n} = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{S_4}{n} = \frac{3}{4k^4}.$$

110. On en déduit

$$\frac{\frac{S_2}{n}}{\left(\frac{S_1}{n}\right)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\frac{S_3}{n}}{\left(\frac{S_1}{n}\right)^3} = \pi, \quad \frac{\frac{S_4}{n}}{\left(\frac{S_1}{n}\right)^4} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

Ces formules singulières méritent une telle confiance que, si elles se trouvent en défaut, il y a grande présomption que les résultats immédiats de l'expérience ont été altérés.

111. **Erreur moyenne** ε . — Soient x', x'', x''', \dots les erreurs commises sur les nombres n', n'', n''', \dots , donnés par l'observation de n . On appelle *erreur moyenne* ε la racine carrée de la somme des carrés des erreurs préalablement divisée par leur nombre m .

Le nombre des erreurs tombant entre x et $x + dx$ étant dy , la somme des carrés de ces erreurs sera, à un infiniment petit du deuxième ordre près,

$$x^2 dy = \frac{mh}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2} dx,$$

et l'on aura

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx.$$

Or,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{h};$$

différentiant par rapport à h ,

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{h^2},$$

d'où

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2h^2},$$

ce qui donne, pour les 470 observations de Bradley,

$$\varepsilon = \pm 0^s, 39.$$

L'erreur moyenne ε diffère peu du résidu moyen ρ ,

$$\rho = \sqrt{\frac{(n_0 - n')^2 + (n_0 - n'')^2 + \dots + (n_0 - n_m)^2}{m}}.$$

Pour les observations de Bradley,

$$\rho = \pm 0^s, 401.$$

On peut donc substituer l'erreur moyenne ε au résidu moyen ρ , ce qui confirme la légitimité de l'emploi de la fonction

$$\frac{mh}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx.$$

Égalant à zéro la dérivée seconde de la fonction

$$y = \frac{mh}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx,$$

il vient

$$x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

Le point d'inflexion de la courbe des erreurs correspond donc à la valeur de l'erreur moyenne. C'est là un fait remarquable.

112. Précision d'une série d'observations. — Lorsqu'il y a même probabilité pour que dans deux séries d'observations l'erreur tombe entre les mêmes limites $-x$ et $+x$, on dit que ces deux séries sont également précises.

Si la probabilité P pour que l'erreur, dans une première série, tombe entre $-x$ et $+x$, est égale à la probabilité P' pour que

l'erreur, dans une deuxième série, tombe entre $-x'$ et $+x'$, on dit que les précisions ω et ω' des deux séries sont inversement proportionnelles à x et x' , de sorte que, par définition,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x'}{x}.$$

Or,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{hx}{1} - \frac{h^3 x^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{h^5 x^5}{5} - \dots \right),$$

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h'x'}{1} - \frac{h'^3 x'^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{h'^5 x'^5}{5} - \dots \right),$$

h et h' étant les paramètres respectifs des deux séries d'observations. Pour que $P = P'$, il faut et suffit que $hx = h'x'$; donc

$$\frac{x'}{x} = \frac{h}{h'} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{h}{h'}.$$

Si h'' , h''' , ... sont les paramètres d'une troisième, d'une quatrième série d'observations P'' , P''' , ...

$$\frac{\omega}{h} = \frac{\omega'}{h'} = \frac{\omega''}{h''} = \frac{\omega'''}{h'''} = \dots$$

Les paramètres h sont donc proportionnels aux précisions ω , et l'on peut représenter les précisions ω par les paramètres h .

Nous écrirons en conséquence $\omega = h$.

Remarquer que, tout comme h , $\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ caractérise la précision de la série d'observations correspondante P .

113. Relations fondamentales. — Écrivant $h\delta = 1$, et joignant cette relation à celles-ci, déjà trouvées,

$$hr = 0,4769363\dots, \quad h\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \omega = h,$$

on voit qu'une des six quantités h , δ , r , ε , η , ω étant donnée, les cinq autres s'en déduisent par le calcul.

En particulier,

$$\frac{r}{\varepsilon} = 0,6744897\dots$$

Ordinairement, on calcule ε à l'aide de la série des résidus des observations et l'on en déduit h , δ , r , η , ω au moyen des formules précédentes.

Inversement, si l'on donne ε , on peut calculer h , puis, sur m observations, le nombre γ d'erreurs tombant entre x et $x + \Delta x$, ce qui permet, en fixant Δx et en faisant varier x , de reconstituer la série des erreurs x' , x'' , x''' , ..., avec une approximation d'autant plus grande que m est plus considérable.

Ainsi, donner la série des erreurs, c'est donner ε , et réciproquement. Le plus simple est de donner ε , qu'on peut regarder comme une constante caractéristique de la série correspondante d'observations.

Inscrivons, chacune sur une boule, les mesures n' , n'' , n''' , ... de n et plaçons les m boules dans une urne. Cette urne représentera la série des observations et l'on sera tenté d'inscrire sur sa surface externe l'erreur moyenne ε qui caractérise la précision de la série ou de la méthode suivie pour observer. Faire une observation dans cette méthode, c'est tirer au hasard une boule de l'urne et adopter comme mesure le nombre inscrit sur cette boule. On ne connaît pas l'erreur vraie de cette *observation isolée*; elle peut être également, mais avec des probabilités différentes, l'un quelconque des termes de la série x' , x'' , x''' , ..., qui se déduit de ε . C'est ce qu'on exprime en disant que *l'erreur moyenne de cette observation est ε* .

Lorsqu'il s'agit d'introduire dans un calcul un nombre erroné a , obtenu d'ailleurs par un procédé quelconque d'observation, et de se faire une idée de la précision du résultat, ce qu'il importe de connaître, à défaut de l'erreur vraie de a qui échappe toujours, c'est l'erreur moyenne ε de ce nombre, c'est-à-dire la série des erreurs fortuites qui peuvent affecter a , mais avec des probabilités différentes régies par la formule

$$dp = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

114. Erreur moyenne et probable d'une fonction. — Soient $F(XYZ)$ une fonction de quantités inconnues X , Y , Z , X_0 , Y_0 , Z_0 , des valeurs approchées connues de XYZ , et $X = X_0 + X'$, $Y = Y_0 + Y'$, $Z = Z_0 + Z'$; on aura

$$F(XYZ) = F(X_0 Y_0 Z_0) + \frac{\partial F}{\partial X_0} X' + \frac{\partial F}{\partial Y_0} Y' + \frac{\partial F}{\partial Z_0} Z' + \dots,$$

et, si X', Y', Z' sont assez petits pour que leurs carrés, cubes, etc., soient négligeables, $F(XYZ)$ diffère peu de

$$\begin{aligned} f(XYZ) &= F(X_0 Y_0 Z_0) + \frac{\partial F}{\partial X_0} X' + \frac{\partial F}{\partial Y_0} Y' + \frac{\partial F}{\partial Z_0} Z' \\ &= F_0 + aX' + bY' + cZ'. \end{aligned}$$

Soient X'_1, Y'_1, Z'_1 des valeurs de X', Y', Z' données par l'observation et x', y', z' les erreurs

$$x' = X'_1 - X', \quad y' = Y'_1 - Y', \quad z' = Z'_1 - Z';$$

la valeur de f correspondant à X'_1, Y'_1, Z'_1 sera

$$\begin{aligned} F_0 + aX'_1 + bY'_1 + cZ'_1 &= F_0 + aX' + bY' + cZ' \\ &\quad + a(X'_1 - X') + b(Y'_1 - Y') + c(Z'_1 - Z') \\ &= \text{valeur vraie de } f + ax' + by' + cz', \end{aligned}$$

en sorte que l'erreur commise sur f sera

$$f' = ax' + by' + cz'.$$

Considérons actuellement un système de valeurs de X', Y', Z' donné par l'observation, et soient $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ les erreurs moyennes commises sur X', Y', Z' ; soit encore ε_f l'erreur moyenne dont est par suite entaché f .

A m systèmes de valeurs observées répondent m erreurs vraies de f , dont la somme des carrés est, en la désignant par $[f'f'] = \Sigma f'f'$,

$$\begin{aligned} [f'f'] &= a^2[x'x'] + b^2[y'y'] + c^2[z'z'] \\ &\quad + 2ab[x'y'] + 2ac[x'z'] + 2bc[y'z'] \\ &= a^2[x'x'] + b^2[y'y'] + c^2[z'z'], \end{aligned}$$

car $[x'y'] = [x'z'] = [y'z'] = 0$ si le nombre m des observations est très grand. En effet, les termes alors sont sensiblement deux à deux égaux et de signes contraires dans la série des valeurs de x' répondant à ε_x , dans celle des valeurs de y' répondant à ε_y , dans celle des valeurs de z' répondant à ε_z , de sorte qu'il en est de même dans la série des valeurs de $x'y', x'z', y'z'$.

Mais, lorsque m est très grand,

$$[f'f'] = m\varepsilon_f^2, \quad [x'x'] = m\varepsilon_x^2, \quad [y'y'] = m\varepsilon_y^2, \quad [z'z'] = m\varepsilon_z^2;$$

donc enfin

$$\varepsilon_j^2 = a^2 \varepsilon_x^2 - b^2 \varepsilon_y^2 + c^2 \varepsilon_z^2.$$

115. Erreur moyenne ε déduite des observations. — Le résidu moyen d'une série d'observations est une valeur approchée de l'erreur moyenne ε ; mais on peut tirer des résidus une valeur plus exacte de cette erreur moyenne.

Soient :

$n', n'', n''', \dots, n_m$ les mesures, en nombre m , d'une même quantité n ;

n_0 leur moyenne arithmétique;

$u', u'', u''', \dots, u_m$ les résidus correspondants;

$x', x'', x''', \dots, x_m$ et x_0 les erreurs réelles des mesures et de n_0 .

On a

$$n = n_0 + x_0 = n' + x' = n'' + x'' = \dots = n_m + x_m,$$

$$n_0 = n' + u' = n'' + u'' = n''' + u''' = \dots = n_m + u_m,$$

d'où

$$x_0 = x' - u' = x'' - u'' = x''' - u''' = \dots = x_m - u_m,$$

c'est-à-dire

$$x' = u' + x_0,$$

$$x'' = u'' + x_0,$$

$$x''' = u''' + x_0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$x_m = u_m + x_0.$$

La somme, membre à membre, de ces équations élevées au carré donne

$$[xx] = [uu] + 2x_0[u] + mx_0^2.$$

Par définition de l'erreur moyenne ε d'une observation, $[xx] = m\varepsilon^2$ et, par définition des résidus, $[u] = 0$; d'ailleurs, x_0 étant inconnu, on ne peut faire mieux que de lui substituer la valeur moyenne ε_0 ou $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Donc l'équation précédente donnera

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[uu]}{m-1}}.$$

116. Poids des observations. — Soient $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \dots$ les erreurs moyennes respectives de plusieurs séries d'observations, S', S'', S''', \dots

S'' , ..., de même genre, mais de précisions inégales. Comme terme de comparaison, imaginons une série fictive S d'observations de même genre et d'erreur moyenne ϵ .

On peut admettre qu'une seule observation réelle de la série S' est aussi bonne ou de la même importance que p' observations assujetties à la seule condition que leur moyenne arithmétique ait, comme l'observation de la série S' , ϵ' pour erreur moyenne.

Appelons *poids* d'une observation de la série S' le nombre p' défini par la relation

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{p'}} = \epsilon',$$

en sorte que

$$\epsilon = \epsilon' \sqrt{p'},$$

et, si p'' , p''' , ... sont les poids des séries S'' , S''' , ...,

$$\epsilon = \epsilon' \sqrt{p'} = \epsilon'' \sqrt{p''} = \dots$$

On remarquera :

1° Que cette suite d'égalités suppose que le poids des observations de la série S est 1 ;

2° Que

$$\frac{p'}{\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)^2} = \frac{p''}{\left(\frac{1}{\epsilon''}\right)^2} = \dots,$$

d'où

$$\frac{p'}{p'^2} = \frac{p''}{p''^2} = \dots$$

Les poids des observations sont inversement proportionnels aux carrés de leurs erreurs moyennes et directement proportionnels aux carrés de leurs précisions.

Cela posé, proposons-nous de résoudre le problème que voici :

Trouver la valeur la plus probable de plusieurs mesures directes de poids différents.

Soient :

n' , n'' , n''' , ... les valeurs observées d'une grandeur X ;

p' , p'' , p''' , ... les poids respectifs de ces observations ;

x' , x'' , x''' , ... les erreurs vraies de n' , n'' , n''' , ... ;

ϵ' , ϵ'' , ϵ''' , ... les erreurs moyennes des mêmes quantités.

On peut regarder :

n' comme la moyenne de p' observations de poids 1 dont la somme serait $n'p'$;

n'' comme la moyenne de p'' observations de poids 1 dont la somme serait $n''p''$;

n''' comme la moyenne de p''' observations de poids 1 dont la somme serait $n'''p'''$.

Il est donc permis de remplacer la série d'observations réelles n' , n'' , n''' , ... de poids différents par une série d'observations fictives de poids 1 et en nombre $p' + p'' + p''' + \dots$; la moyenne arithmétique X_0 de ces observations fictives sera

$$X_0 = \frac{p'n' + p''n'' + p'''n''' + \dots}{p' + p'' + p''' + \dots}.$$

Elle se nomme la *moyenne générale* ou la *moyenne probable*, ou encore la *moyenne par poids* des valeurs observées n' , n'' , n''' , Le poids de X_0 , rapporté à la même unité que p' , p'' , p''' , ..., est évidemment

$$p' + p'' + p''' + \dots = [p],$$

et son erreur moyenne ε_0 est

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}},$$

ε désignant l'erreur moyenne des observations fictives de poids 1.

Si ε n'est pas connu, on peut le tirer comme il suit des observations elles-mêmes. Appelons *résidus* les différences $X_0 - n'$, $X_0 - n''$, $X_0 - n'''$, ..., et désignons-les par u' , u'' , u''' , On aura

$$\begin{aligned} X - n' &= x', & X_0 - n' &= u', \\ X - n'' &= x'', & X_0 - n'' &= u'', \\ X - n''' &= x''', & X_0 - n''' &= u''', \end{aligned}$$

et, multipliant par $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, $\sqrt{p'''}$, ...,

$$\begin{aligned} X\sqrt{p'} - n'\sqrt{p'} &= x'\sqrt{p'}, & X_0\sqrt{p'} - n'\sqrt{p'} &= u'\sqrt{p'}, \\ X\sqrt{p''} - n''\sqrt{p''} &= x''\sqrt{p''}, & X_0\sqrt{p''} - n''\sqrt{p''} &= u''\sqrt{p''}. \end{aligned}$$

Elles montrent que $x'\sqrt{p'}$ est l'erreur vraie commise sur $n'\sqrt{p'}$, pris pour valeur de $X\sqrt{p'}$, et que $u'\sqrt{p'}$ est le résidu correspondant. Mais l'erreur moyenne de n' étant ε' , celle de $n'\sqrt{p'}$ est $\varepsilon'\sqrt{p'}$

ou ϵ . Donc $x'\sqrt{p'}$ peut être considéré comme un terme d'une série d'erreurs caractérisées par l'erreur moyenne ϵ . Le même raisonnement montre que $x''\sqrt{p''}$, $x'''\sqrt{p'''}$, ... sont d'autres termes de la même série. Donc, si m est le nombre de ces termes ou des quantités observées n' , n'' , n''' , ..., on aura

$$\epsilon = \sqrt{\frac{[\rho u^2]}{m-1}}.$$

117. Application des formules précédentes. — On trouve, dans les OEuvres de Bessel, les 40 mesures suivantes du diamètre π de Saturne, réduites de façon à être comparables :

38 ^{''} ,91	39 ^{''} ,35	39 ^{''} ,41	39 ^{''} ,02
39,32	39,25	39,40	39,01
38,93	39,14	39,36	39,86
39,31	39,47	39,20	39,51
39,17	39,29	39,42	39,21
39,04	39,32	39,30	39,17
39,57	39,40	39,41	39,60
39,46	39,33	39,43	39,54
39,30	39,28	39,43	39,45
39,03	39,62	39,36	39,72

$$m = 40.$$

En les considérant comme également précises :

$$\begin{aligned} [uu] &= 1,5884, & n_0 &= 39,308, \\ \epsilon &= \pm 0'',202, & \epsilon_0 &= \pm 0,032, \\ x &= \pm 0'',136, & x_0 &= \pm 0,022. \end{aligned}$$

Groupant ces 40 observations de manière à les réduire à 10 de poids différent :

39 ^{''} ,179	sera la	moyenne de	7	observations
39,285	»	4	»	
39,294	»	5	»	
39,407	»	4	»	
39,410	»	1	»	
39,320	»	3	»	
39,379	»	3	»	
39,310	»	4	»	
39,127	»	3	»	
39,448	»	6	»	

Ici,

$$m = 10, \quad [p] = 40, \\ n_0 = 39^{\prime\prime}, 308, \quad \varepsilon = \pm 0^{\prime\prime}, 211, \quad \varepsilon_0 = \pm 0^{\prime\prime}, 033.$$

C'est en raison du petit nombre d'observations que ε et ε_0 concordent mal.

A consulter : GRUEY, Leçons d'Astronomie. Paris, Hermann. — BERTRAND, Calcul des probabilités. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Mêmes auteurs à consulter pour le paragraphe qui suit.

III. — COMBINAISON DES OBSERVATIONS.

118. Une grandeur a a été mesurée plusieurs fois.

Premier cas. — Les mesures prises, n_1, n_2, \dots, n_m , sont indépendantes les unes des autres et inspirent le même degré de confiance.

Alors, avons-nous dit, la valeur la plus probable de a est

$$\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{12}.$$

119. *Second cas.* — Les mesures prises, n_1, n_2, \dots, n_m , sont encore indépendantes les unes des autres, mais n'inspirent pas le même degré de confiance. Leurs poids sont respectivement

$$p_1, p_2, \dots, p_m;$$

alors,

$$\frac{p_1 n_1 + p_2 n_2 + \dots + p_m n_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}$$

est la valeur la plus probable de a . Nous l'avons encore dit.

120. Nous avons étudié en détail toutes les questions qui se rapportent au problème de l'évaluation d'une grandeur.

Il nous faut passer au problème plus général que voici :

On a fait pour déterminer n grandeurs inconnues $n + p$ mesures; mesures et grandeurs se rattachent par des équations nécessaires. En raison des erreurs commises sur les mesures,

en raison des erreurs commises sur les seconds membres n_1, n_2, \dots, n_{n+p} , ces équations donnent, selon la manière dont on les combine, des valeurs différentes pour x, y, \dots ; quel est le meilleur système de valeurs à adopter pour x, y, \dots ?

123. Un premier procédé, longtemps employé, et qui a donné de bons résultats, est le suivant. On choisit, dans le système, les équations où le coefficient de x est le plus élevé. On ajoute ces équations; soit

$$Ax + By + \dots = N$$

l'équation obtenue.

On fait de même pour les autres inconnues.

On obtient ainsi un système, qu'on résout par rapport aux inconnues.

Ce procédé se justifie par cette remarque que, y, \dots étant supposés connus, l'erreur commise en calculant x d'après l'équation

$$x = \frac{N - By - \dots}{A}$$

est d'autant moindre que A est plus grand.

Ce procédé a le défaut d'être irrégulier, de laisser une latitude trop grande au calculateur. Il a été perfectionné par Cauchy et Yvon Villarceau. Nous ne nous y arrêterons pas.

124. **Méthode des moindres carrés.** — Le principe de la méthode des moindres carrés est celui-ci. On cherche, parmi les différents systèmes de valeurs de x, y, \dots qui donnent les équations (1), celui qui rend minimum l'expression

$$H = (a_1x + b_1y + \dots - n_1)^2 + (a_2x + b_2y + \dots - n_2)^2 + \dots + (a_{n+p}x + b_{n+p}y + \dots - n_{n+p})^2.$$

Cette condition est aisée à remplir.

Il suffit qu'on donne à x, y, z, \dots des valeurs annulant les dérivées partielles de H :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = a_1(a_1x + b_1y + \dots - n_1) + a_2(a_2x + b_2y + \dots - n_2) + \dots + a_{n+p}(a_{n+p}x + b_{n+p}y + \dots - n_{n+p}) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = b_1(a_1x + b_1y + \dots - n_1) + b_2(a_2x + b_2y + \dots - n_2) + \dots + b_{n+p}(a_{n+p}x + b_{n+p}y + \dots - n_{n+p}) = 0,$$

Ces équations sont linéaires en x , y , ... et en nombre n , comme les inconnues. Elles donnent les valeurs les plus exactes pour les inconnues.

Pourquoi?

Tout d'abord, et surtout, c'est un fait d'expérience. Il résulte, de plus, d'un exposé historique et critique de la méthode des moindres carrés, fait par M. Mansion (¹), que la méthode des moindres carrés est difficile à exposer avec rigueur, quand on y fait intervenir la loi de probabilité supposée inconnue des erreurs accidentelles; les essais successifs des deux grands théoriciens de la méthode, Gauss et Laplace, le prouvent. On en induit que le mieux est d'essayer d'établir la théorie des erreurs par l'Algèbre seule, comme l'a fait récemment M. Goedseels.

M. Goedseels admet deux postulats :

a. Qu'on sache coter ou peser le degré de confiance que mérite une valeur observée, de même qu'on sait coter le mérite d'une composition ou d'un examen;

b. Qu'on sache coter les fonctions de valeurs observées en fonction du poids des variables; il examine les conditions que doit remplir la formule à l'aide de laquelle on détermine les poids des fonctions.

M. Goedseels considère la formule usitée à cette fin, en montre les avantages et les inconvénients, et constate en dernière analyse que cette formule ne répond pas à toutes les conditions requises, mais qu'on n'en connaît pas de meilleure.

Il montre enfin que, si l'on admet cette formule, on peut démontrer rigoureusement que la méthode des moindres carrés et les méthodes de la moyenne arithmétique et de la moyenne par poids, qui en sont des cas particuliers, fournissent les solutions du poids le plus élevé.

M. Mansion observe, à ce propos, qu'il est plus simple encore de prendre pour postulat la méthode des moindres carrés elle-même, comme l'a fait Legendre (²).

(¹) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXX, 1^{re} Partie, 1906, p. 169-174.

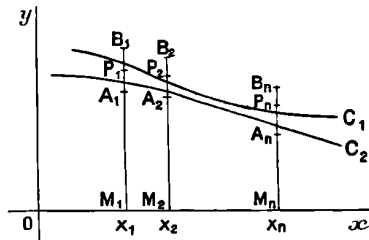
(²) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1902-1903, p. 64.

IV. — RECHERCHES DES LOIS DES PHÉNOMÈNES.

125. Soit y et x deux variables liées par une relation inconnue.

A des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de x correspondent des valeurs mesurées $M_1 P_1, M_2 P_2, \dots$ de y , que nous représenterons par y_1, y_2, \dots, y_n .

Fig. 11.



Figurons $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ en abscisses et ordonnées. Si l'on a calculé les erreurs $P_1 B_1, P_1 A_1, P_2 B_2, P_2 A_2, \dots, P_n B_n, P_n A_n, \dots$ dont peuvent être affectés en plus ou en moins $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, figurons-les également.

Il est clair que toute courbe, telle que C_1 ou C_2 , qui rencontre les segments $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n, \dots$, représentera la relation liant y et x , dans les limites mêmes de l'exactitude des mesures faites.

Une représentation graphique, faite avec soin, permet de voir l'allure générale des courbes C susceptibles de représenter la loi du phénomène. Avec un peu d'habitude de la Géométrie analytique, on écrit d'ordinaire, sans trop de tâtonnements, l'équation qui représente l'une de ces courbes.

On peut aussi chercher, par les méthodes algébriques d'interpolation, l'équation de la parabole $y = f(x)$ unissant entre eux les points A_1, A_2, \dots, A_n , puis l'équation de la parabole $y = \varphi(x)$ unissant les points B_1, B_2, \dots, B_n et prendre comme courbe C une des paraboles $y = \frac{\lambda f(x) + \mu \varphi(x)}{\lambda + \mu}$ ($\lambda, \mu > 0$, toutes les ordonnées $M_n A_n, M_n B_n$ positives), où λ, μ sont des constantes convenablement choisies. Le mot *convenablement* ne peut être précisé ici. Il a un sens attaché au phénomène étudié. On peut encore se

borner à chercher algébriquement l'équation de la parabole passant par les points P_1, P_2, \dots, P_n .

Le calcul de la relation liant y et x permet de calculer la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x . L'erreur commise sera intermédiaire entre $f(x)$ et $\varphi(x)$. On peut se demander quelle est l'erreur probable, c'est-à-dire l'erreur qui a chance égale d'être ou non dépassée, et la calculer. Cela serait sans objet ici. Nous avons en vue les seules lois de mortalité et nous n'aurons à faire à leur sujet aucun calcul de ce genre.

126. Statistiques. — C'est par les principes précédemment indiqués qu'on peut tirer partie des *statistiques*. L'exemple le plus probant est celui que donne les Tables de mortalité et leur usage par les Compagnies d'assurances. Nous en parlerons bientôt.

Auparavant, il ne sera pas inutile de réduire à ses justes limites le rôle de la statistique, méthode d'observation dont on a voulu tirer beaucoup plus qu'il ne convenait.

Toute étude physique, toute étude sociale repose sur des statistiques, c'est-à-dire sur un ensemble de documents concernant des faits observés.

Les statistiques concernant les faits mathématiques, qui sont pures abstractions, sont relativement aisées à interpréter; entre les mains des Égyptiens, l'arpentage devint promptement géométrie, au moins la tradition le veut ainsi. Les lois de la mécanique céleste, déduites de l'observation, sont peut-être un appui plus probant à ce dire.

Plus complexes déjà sont les statistiques des physiciens : à tel point qu'il est arrivé à celles-ci de ne pouvoir être traduites en lois; telles sont les statistiques météorologiques. Certains observatoires renoncent à enregistrer les variations atmosphériques, l'accumulation des documents enregistrés n'ayant donné lieu jusqu'ici à aucun résultat.

Et que dire des statistiques sociales dont les Darius et les César de l'antiquité étayaient, comme nous-mêmes, leurs budgets? N'avons-nous pas vu nos ministres des finances conclure, chiffres en mains, à la plus-value des recettes futures, au lieu qu'à l'aide des mêmes chiffres, les orateurs de l'opposition démolissaient l'échafaudage et prédisaient, eux, le déficit?

C'est que l'art de tirer de la statistique des conclusions vraies est plutôt malaisé, comme l'ont prouvé de récentes études critiques fort remarquées (1). Et ruiner la confiance fort mal placée que d'aucuns ont dans les « chiffres » doit être le but de tout homme éclairé.

S'il faut voir dans la Science un admirable monument de l'esprit humain, il faut se convaincre que ce monument, pour cette raison qu'il porte en lui la marque de l'homme, est loin d'avoir la perfection que telle école voudrait lui assigner.

127. On peut en général donner créance aux statistiques physiques.

Les savants sont gens consciencieux et désintéressés.

On peut souvent, non pas toujours, se fier aux statistiques économiques. Un exemple : les Tables de mortalité des Compagnies d'assurances. Aussi : les recensements monétaires faits à diverses reprises par M. de Foville. Les employés de l'État, au nombre de 20000, recevaient l'ordre de faire à jour dit, à heure dite, le recensement des monnaies figurant dans leurs caisses, en particulier d'en inscrire les millésimes. Cette remarque ingénieuse, que la Monnaie ne frappe point chaque année la série entière des pièces en circulation, permettait de surprendre les employés inscrivant au hasard les chiffres voulus, les millésimes en particulier : ils furent en nombre infime.

Par contre, d'après les statistiques françaises, les exportations de France en Angleterre, en 1900, furent de 609228000^{fr}, tandis que, d'après les statistiques anglaises, elles se réduisaient à 509519660^{fr}. Semblablement les importations étaient évaluées à 1238839000^{fr} et 1353894940^{fr}.

Si l'intérêt contraint les Compagnies d'assurances à établir des Tables de mortalité exactes, l'intérêt, qui prend alors la forme de fraude, fausse les statistiques douanières.

Autre cause d'erreur : le mode de transport. Les colis postaux, par exemple, échappent aux statistiques officielles. La destination *indiquée* des produits n'est, elle aussi, bien moins que certaine ; une bonne part des expéditions dirigée sur l'Angleterre ne fait

(1) J'ai principalement en vue ici l'Ouvrage de M. A. Liesse : *La Statistique*. Paris, Alcan, 1905.

que toucher barre à Londres ou à Liverpool et s'en va en Amérique.

Enfin, il faut compter avec la faiblesse ou la maladresse des employés chargés des statistiques.

D'après M. Sembat, rapporteur en 1904 du budget relatif au service des postes, télégraphes et téléphones, l'administration dresse des statistiques qui peuvent se partager en trois catégories : 1° les statistiques extraites des registres de comptabilité des bureaux ou qui ressortent des documents d'organisation de services, de constructions de lignes, etc. : elles offrent un très grand degré d'exactitude ; 2° les statistiques établies sur les registres d'inscription de lettres recommandées ou chargées, des objets recommandés, des envois de valeurs à recouvrer ou des recouvrements ou remboursements effectués : ces données ne sont pas suffisamment contrôlées, mais surveillées, elles pourraient présenter encore une certitude relative ; 3° en dernier lieu, les statistiques dressées après un comptage des objets de correspondances postales : à part certaines parties, celles-ci n'ont aucune valeur, elles sont faites au jugé ; les comptes ne peuvent être exécutés sérieusement, parce qu'ils doivent être faits dans les bureaux au moment où le public afflue et où le service est le plus intense.

Une science profonde des faits permet de distinguer, souvent à première vue, une statistique exacte d'une statistique fautive, tout aussi bien qu'un simple coup d'œil permet à un homme de science de juger la valeur d'un Ouvrage se rapportant à ses propres études.

Le profane, au contraire, ne peut que laisser surprendre sa bonne foi, heureux si ses conclusions erronées restent dans le domaine de la pure spéculation, s'il ne vient pas à s'imaginer que, la statistique aidant, les réformes sociales et autres, propres à faire le bonheur de l'humanité, voient leur avènement retardé par la simple mauvaise volonté des pouvoirs existants.

128. Je suppose dix, cent, mille statistiques établies comme il convient. De telles statistiques existent, les Tables de mortalité des Compagnies d'assurances en font foi. Qu'en conclure ? — Ce qu'on en doit conclure, sans plus. Ce n'est pas là vérité banale. En économie politique on a voulu tirer mille choses et plus encore

des statistiques : au point que d'aucuns veulent faire aujourd'hui avec Walras une économie politique mathématique. Le mouvement a été réduit en formules : pourquoi non la théorie des richesses, la théorie des échanges? J'y reviendrai quelque jour.

Sans doute on peut faire comme M. Pareto la statistique des revenus de 100, 200, 300, . . . , 1000 livres sterling des habitants de la Grande-Bretagne et de l'Irlande et vérifier qu'il existe dans les deux pays une même relation entre les chiffres de revenus et les nombres de personnes possédant ces revenus ; on peut vérifier que la relation s'étend à la Prusse, au Pérou, etc., et réduire ces résultats en une loi : c'est là de bonne besogne. Cette loi, qui s'applique à des peuples de mœurs très dissemblables, paraît être caractéristique des pays civilisés dont la constitution sociale a pour base la concurrence plus ou moins largement appliquée.

On peut aussi construire avec Galton la « pyramide sociale », représentant les proportions respectives d'hommes de génie, d'hommes de talent, d'hommes médiocres, d'hommes faibles, d'hommes à la charge de leurs semblables ; on peut dessiner à ce propos une courbe en forme de toupie et... se garder de rien conclure. Peut-être les comparaisons des « toupies » babyloniennes, égyptiennes, grecques, romaines et actuelles donneraient-elles un moyen de comparer la civilisation d'autrefois à la civilisation actuelle? On n'a point encore fait cette étude.

Mais que dire du procédé qui consiste à *définir* matériellement le bien-être, et à réunir les données par lesquelles se manifeste ou soi-disant cet état, recettes et tonnage des chemins de fer et de la navigation, production et consommation de la houille, rendement de divers impôts, mouvement des banques, émissions de valeurs, ventes d'immeubles, faillites, engagements au Mont-de-Piété, suicides?

D'une part le bien-être ne dépend que de loin des conditions matérielles de l'existence, il tient tout autant de l'imagination et de l'habitude que des faits observables ; puis les statistiques en jeu sont trop complexes pour que l'esprit le plus sagace parvienne à s'y reconnaître ; enfin, leur complexité même les rend sujettes à caution.

Il se peut que dans l'avenir les deux dernières causes d'erreurs que j'ai citées disparaissent ; il se peut que dans l'avenir on puisse

préciser de plus la part que la richesse a au bien-être et ainsi tarifer matériellement celui-ci. Pour l'heure, cela ne se peut et là les économistes ne feront pas meilleur usage des statistiques dressées à grand'peine que les météorologistes n'ont fait jusqu'ici des innombrables observations enregistrées depuis 30 ans dans leurs innombrables observatoires.

Chaque chose en son temps. L'art de la statistique est encore à ses débuts; ne lui demandons pas ce qu'il ne peut encore donner.

129. Du moins, les statistiques les plus rudimentaires mettent-elles en évidence un fait qui semble paradoxal et qu'il importe de connaître.

Süssmilch, pasteur au XVIII^e siècle d'une paroisse de Berlin, constatait alors que, chaque année, les nombres de mariages, de naissances et de décès étaient sensiblement égaux, cela dans un groupe social assez étendu.

Quételet, un peu plus tard, énonçait cet axiome : que le budget des prisons se répétait, d'une année à l'autre, avec une effrayante régularité. Il essayait aussitôt de baser sur cette donnée, et d'autres semblables, son « homme moyen » caractéristique d'une époque, sujet à des variations lentes. De nos jours, on parle volontiers de l'« âme des foules ».

Assurément, et ce n'est pas un des moindres résultats de la statistique, l'« homme moyen » n'est pas une fiction, l'homme moyen existe et c'est par l'homme moyen que l'économie politique sera un jour une science au strict sens du mot : elle en viendra à *prévoir* les modifications générales des faits qui l'intéressent, à établir des lois portant sur l'avenir comme sur le passé. Non pas des lois *immuables* comme les lois physiques, mais des lois laissant une certaine place à un large imprévu, comme serait la loi, jusqu'ici cherchée en vain, liant la production du blé à la fréquence des taches solaires, étant supposé (et il en est sans doute ainsi) que l'apparition des taches solaires est un phénomène impossible à prévoir. Rien d'hypothétique en cela : on ne peut préjuger de l'abondance des pluies d'un hiver à venir; mais, une fois observée la quantité d'eau tombée en hiver, on en conclut à coup sûr que telle ou telle source tarira ou ne tarira pas l'été suivant.

Ainsi, l'étude de l'« homme moyen », sur lequel la volonté humaine n'a, sauf cas exceptionnels, aucune prise immédiate, doit être un but de l'économie politique.

Là, point de ces statistiques à fluctuations déconcertantes, dont les relevés quotidiens de la Bourse sont l'image parfaite, mais des statistiques à variations lentes qui permettent au chercheur de ne pas perdre pied, de garder l'indépendance d'esprit que M. E. Levasseur assure être si nécessaire en l'occasion, statistiques qui ressemblent étrangement aux relevés d'expériences des physiciens.

Si ceux-ci ont pu édifier une cosmogonie du monde matériel, il est à croire que les économistes sauront eux-mêmes édifier une science avec les matériaux dont ils disposent.

Sans doute, leur tâche sera plus ardue; mais peut-on croire que l'intérêt qui s'attache à la collectivité humaine est inférieur à l'intérêt que nous nous sentons pour l'univers des êtres inconscients?

Aux statistiques bien faites, à celles-là seules, on peut, on pourra appliquer le Calcul des probabilités, en se basant sur la loi des grands nombres. Nous allons en donner un exemple dans les Chapitres qui suivent.



CHAPITRE VI.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AU TIR DES ARMES A FEU.

I. — TIR AU CANON.

130. Soit proposé d'atteindre un but en vue.

On commence par évaluer la distance du but. A cette distance correspond un angle α qui se trouve dans des Tables construites empiriquement. On détermine ensuite l'angle de *sûte* β , c'est-à-dire l'angle qui fait la ligne de mire avec l'horizon.

Ces données sont dites *initiales*.

Le pointeur donne à la pièce la direction latérale voulue et l'incline sur l'horizon de l'angle $\alpha + \beta$.

Si l'on tire un grand nombre de coups avec les données initiales, on constate :

1° Que les points d'impact des projectiles diffèrent les uns des autres ;

2° Que le point d'impact moyen diffère du but (ordinairement).

L'artilleur doit modifier les données initiales de façon que le point d'impact moyen se confonde avec le but. Il doit régler le tir.

Ce fait, que les points d'impact de projectiles tirés dans des conditions identiques diffèrent les uns des autres, apporte quelques difficultés à ce réglage. On ne peut le faire qu'une fois connus :

1° L'écart probable de la pièce en portée ;

2° L'écart probable de la pièce en direction.

131. Voici les définitions de ces deux écarts.

Soit π le plan horizontal passant par la pièce de canon H. Soient HX, HY deux droites quelconques tracées dans le plan π . Soient AA', AA'' les coordonnées d'un point d'impact A, x , la

moyens : c'est ce qu'on fait pratiquement en se basant sur ce que le rapport de ces deux écarts est (cf. n° 54)

$$0,8463\dots :$$

$$\text{écart probable} = \text{écart moyen} \times 0,8463\dots$$

132. La probabilité d'un écart (ou d'une erreur) compris entre $-x$ et x est (cf. n° 107)

$$P_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{hx}{1} - \frac{h^3 x^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{h^5 x^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \frac{h^7 x^7}{7} + \dots \right),$$

h étant lié à l'écart x_1 de probabilité $\frac{1}{2}$ par la relation (cf. n° 107)

$$h = \frac{0,4769363\dots}{x_1}.$$

En vertu de cette formule, la probabilité d'un écart nx_1 est

$$P_{nx_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n \cdot hx_1}{1} - \frac{n^3 (hx_1)^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{n^5 (hx_1)^5}{5} + \dots \right),$$

expression calculable, puisque hx_1 est numériquement connu

$$(hx_1 = 0,4769363\dots).$$

On trouve ainsi

$$P_{x_1} = \frac{1}{2}, \quad P_{2x_1} = 0,8227, \quad P_{3x_1} = 0,9570, \quad P_{4x_1} = 0,9930, \quad P_{5x_1} = 0,9993, \dots$$

La moitié des coups portant à droite de O aura donc l'écart probable x_1 , les 82 pour 100 l'écart $2x_1$, 96 pour 100 l'écart $3x_1$, en sorte que, divisant Ox (ou Oy) en zone

$$OA = OA' = AB = A'B' = \dots = x_1,$$

on aura, conformément au Tableau suivant, 25 pour 100, 16 pour 100, etc., des coups tirés dans ces diverses zones.

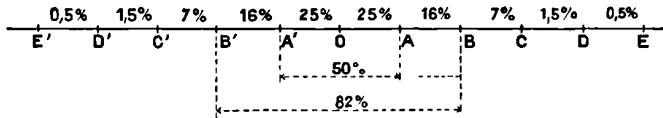
La probabilité de l'arrivée d'un coup dans la zone de rang n (CD est la zone de rayon 4) est

$$P_n = \frac{1}{2} \left(P_{nx_1} - P_{(n-1)x_1} \right).$$

On remarquera que 99 pour 100 des coups tombent dans une

bande mesurée par 8 fois l'écart probable, qu'on vérifie sans peine être un peu moins de 7 fois l'écart moyen, souvent le seul calculé et le seul qui figure dans les Tables de tir. Dans les tirs d'expé-

Fig. 13.



rience, les écarts extrêmes devront s'écarter au plus de 7 fois l'écart moyen.

Il est bon de connaître la probabilité d'un écart égal à n fois l'écart probable, n étant fractionnaire. Cette probabilité est donnée par le Tableau suivant :

Valeurs de n .	Probabilité de l'écart nx_1 .	Valeurs de n .	Probabilité de l'écart nx_1 .
0,25	0,1339	2,25	0,8709
0,50	0,2461	2,50	0,9083
0,75	0,3871	2,75	0,9364
1	0,50	3	0,9570
1,25	0,6008	3,25	0,9716
1,50	0,6883	3,50	0,9818
1,75	0,7621	3,75	0,9875
2	0,8227	4	0,9930

La probabilité d'un écart intermédiaire se calculera par interpolation simple, comme on fait dans les calculs logarithmiques.

Exemple : la probabilité d'un écart 3,2 est

$$0,9570 + \frac{9716 - 9570}{0,25} \times 0,2 = 9,9687.$$

133. Densité moyenne des points de chute dans une zone donnée : c'est le rapport du nombre de projectiles qui y tombent à la longueur (ou largeur) de la zone exprimée en mètres.

Dans les tirs, on estime d'ordinaire la densité nécessaire à la destruction d'un ouvrage, et l'on calcule à l'aide de cette donnée et des principes précédents le nombre de coups qu'il faut tirer. Une application fera comprendre le mécanisme de ces calculs.

Une batterie est chargée de détruire un ouvrage de 30^m de

profondeur. On estime qu'une densité moyenne de 4 coups suffit à cela. On demande le nombre de coups qu'il faut tirer, étant donné qu'à la distance du but l'écart probable est de 15^m.

Étant donné que 50 pour 100 des coups doivent tomber dans la bande (bande = 2 fois l'écart probable), le nombre x de projectiles est donné par la formule

$$\begin{aligned} \text{densité moyenne} &= \frac{0,50 \times x}{30^m}, \\ 4 &= \frac{0,50 \times x}{30}, \quad x = 240 : \end{aligned}$$

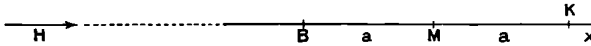
240 coups suffiront probablement.

134. **Réglage du tir en portée.** — Cette question revient à la solution du problème que voici :

Étant donnée la proportion observée N des coups longs (ou courts), en déduire la position du point moyen d'impact par rapport au but.

Soient Hx la ligne de tir, B le but, M le point moyen d'impact, situé à la distance connue a du but.

Fig. 14.



Le nombre de coups longs sera formé : 1° des coups tombant au delà de M, soit 50 pour 100 des coups tirés, puisque M est le point moyen d'impact ; 2° des coups tombant entre B et M qui sont la moitié de ceux tombant entre B et K, BK = 2a, toujours pour cette raison que M est le point moyen d'impact.

Si r désigne l'écart probable en portée, si $P\left(\frac{a}{r}\right)$ désigne le pour cent des coups tombant sur une profondeur $\frac{2a}{r}$ [$P\left(\frac{a}{r}\right)$ est donné par les Tables de tir en fonction de a et r],

$$\frac{\text{nombre de coups longs}}{\text{nombre de coups tirés}} = N = \frac{100}{2} + \frac{1}{2} P\left(\frac{a}{r}\right).$$

N et r sont connus ; on peut donc calculer a , qui est donné par des Tables.

En pratique il s'agit de régler promptement le tir, et l'on procède empiriquement comme il suit.

1° On tire avec les données initiales, on raccourcit ou l'on allonge de 8 écarts probables jusqu'à ce qu'on ait encadré le coup entre deux angles α et α' ; on resserre l'encadrement à 4 écarts probables. Soient α_1, α_2 les deux angles ayant donné 1 coup court, 1 coup long. On tire alors une salve de plusieurs coups avec l'angle $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Le résultat de cette salve donnera la hausse du but.

En effet, il résulte de ce qui précède qu'on peut déduire de la proportion des coups longs et courts la distance probable du but au point défini comme milieu de la zone contenant 993 coups sur 1000. Cette distance, exprimée en écarts probables, est donnée par le Tableau suivant (où il est question de salves et non de coups successifs, car, d'ordinaire, les batteries étant composées de plusieurs pièces, on substitue une salve générale, tirée avec les mêmes données, à des coups successifs, ce qui fait gagner du temps) :

Salve de 7 coups.		Salve de 6 coups.	
	Distance probable.		Distance probable.
7 courts.....	} $\pm 2,89$	6 courts.....	} $\mp 2,28$
7 longs.....		6 longs.....	
6 courts, 1 long....	} $\pm 1,57$	5 courts, 1 long....	} $\mp 1,23$
6 longs, 1 court....		5 longs, 1 court....	
5 courts, 2 longs...	} $\mp 0,84$	4 courts, 2 longs...	} $\mp 0,56$
5 longs, 2 courts...		4 longs, 2 courts...	
4 courts, 3 longs...	} $\mp 0,24$	3 courts, 3 longs...	0
4 longs, 3 courts...			

L'examen de ce Tableau indique de suite la modification à faire subir à l'angle de tir sous lequel on a tiré la salve.

Le procédé indiqué n'a d'ailleurs rien d'absolu. Quand il faut régler très promptement le tir : 1° on tire avec les données initiales et l'on raccourcit ou allonge de 8 écarts probables 1 fois, 2 fois, etc., jusqu'à ce qu'on ait encadré le coup entre deux hausses h_1, h_2 ; avec la hausse $\frac{h_1 + h_2}{2}$, on tire 4 coups.

Si les 4 coups sont courts, on augmente la hausse de 2 écarts probables (l'écart probable est donné par les Tables);

Si 3 coups sont courts et 1 long, on augmente de 1 écart probable ;

Si 2 coups sont courts et 2 longs, on conserve la hausse.

De même si les coups longs sont plus nombreux que les coups courts.

Ce procédé donne de bons résultats.

135. Réglage du tir en direction. — Les mêmes principes s'appliquent.

136. Répartition des points de chute autour du point moyen. — Soient (*cf.* n° 105)

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2} dx$$

la probabilité d'un écart en direction compris entre x et $x + dx$, et

$$\frac{K'}{\sqrt{\pi}} e^{-k'^2 y^2} dy$$

la probabilité d'un écart en portée compris entre y et $y + dy$; la probabilité que l'écart sera compris entre

$$x \text{ et } x + dx \text{ et aussi } y \text{ et } y + dy,$$

ou que le rectangle de coordonnées x, y et de dimension dx, dy sera atteint, est, en vertu du théorème des probabilités composées,

$$\frac{KK'}{\pi} e^{-(k^2 x^2 + k'^2 y^2)} dx dy.$$

Tous les points situés sur l'ellipse

$$K^2 x^2 + K'^2 y^2 = C$$

ont même chance d'être atteints. La probabilité d'atteindre une petite surface déterminée reste la même lorsque le centre de cette surface se déplace sur l'ellipse.

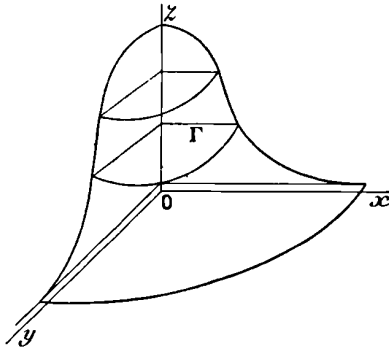
Le plan des axes coordonnés étant supposé horizontal, élevons en chacun de ses points une perpendiculaire dont la longueur soit proportionnelle à la probabilité d'atteindre un rectangle $dx dy$ ayant son centre sur ce point. Les extrémités de ces perpendiculaires définiront une surface dont la section par le plan zOx aura,

ainsi que la section par le plan zOy , la forme de la courbe de la figure 15; les sections horizontales de cette surface étant des ellipses

$$K^2x^2 + K'^2y^2 = C,$$

où seule la constance C varie, il est clair que la surface aura la

Fig. 15.



forme ci-contre : elle possède un sommet situé au-dessus du point moyen d'impact O , elle a une nappe asymptotique au plan xOy , au-dessus d'une certaine ellipse Γ sa convexité est tournée vers le haut, au-dessous de cette ellipse sa convexité est tournée vers le bas.

Cette surface est semblable à celle qu'on obtiendrait en plaçant l'un au-dessus de l'autre tous les projectiles tombés aux différents points.

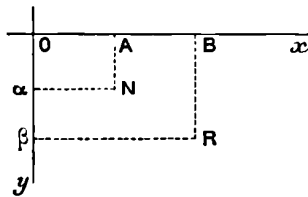
La probabilité d'atteindre une aire S du plan xOy est donnée par le volume du cylindre ayant pour base S et limité à la surface en question. Ce volume est calculable une fois connues les constantes K , K' , qui dépendent de chaque pièce ou de chaque série de pièces.

Enfin, connaissant le pour 100 des coups atteignant des bandes OA , OB , ... situées sur Ox (fig. 16), connaissant de même le pour 100 des coups atteignant des bandes $O\alpha$, $O\beta$, ... situées sur Oy , il est facile de calculer le pour 100 des coups atteignant les rectangles $OAN\alpha$, $OBR\beta$, ... construits sur ces bandes et de fixer le nombre des coups à tirer sur un ouvrage que n coups sont estimés devoir détruire.

Le théorème des probabilités composées donne la solution du problème.

En effet, si r_1 est la probabilité d'avoir un écart en portée inférieur à q fois l'écart probable en portée et si r_2 est la probabilité d'avoir un écart inférieur à q' fois l'écart probable en direction

Fig. 16.



(r_1 et r_2 sont calculables une fois connus les écarts probables en portée et direction), le produit $r_1 r_2$ représente la probabilité d'avoir un coup dans un rectangle ayant son centre au point moyen et ayant pour base $2q'$ fois l'écart probable en direction et $2q$ fois l'écart probable en portée. C'est à l'aide de ces données qu'a été construit le Tableau suivant, où les valeurs de q sont inscrites dans la première ligne horizontale et les valeurs de q' dans la première ligne verticale :

$\frac{q'}{q}$	1.	2.	3.	4.	5.
1.....	0,2500	0,4113	0,4785	0,4965	0,4997
2.....	0,4113	0,6768	0,7873	0,8169	0,8221
3.....	0,4785	0,7873	0,9158	0,9503	0,9563
4.....	0,4965	0,8169	0,9503	0,9860	0,9923
5.....	0,4997	0,8221	0,9563	0,9923	0,9986

II. — TIR DES FUSILS DE CHASSE.

137. Un coup de fusil chargé à plombs donne sur une cible verticale un ensemble de points d'impact assimilable à l'ensemble de points de chute de coups de canon tirés sur une aire horizontale.

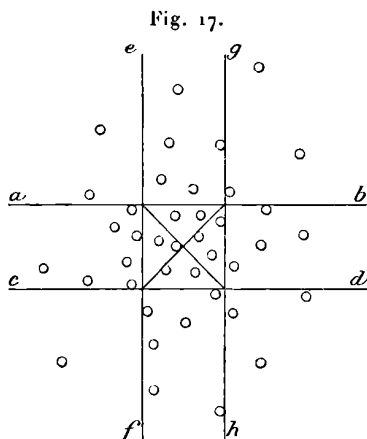
Le problème qui se pose ici est celui de la dispersion des plombs. On conçoit que cette dispersion peut être mesurée de telle sorte que, restant la même dans de mêmes conditions, elle puisse servir

à comparer entre elles diverses armes et à comparer entre eux divers modes de chargement.

La dispersion des plombs peut être caractérisée :

- 1° Par les écarts probables du groupement ;
- 2° Par le rayon ou le diamètre du cercle contenant 50 pour 100 des plombs ;
- 3° Par le pour 100 de plombs contenus dans un cercle de rayon déterminé et constant ;
- 4° Par le nombre moyen de plombs par décimètre carré au centre du groupement.

138. **Écart probable.** — L'écart probable est égal à la moitié de la largeur de la bande indéfinie soit en hauteur, soit en largeur, qui



contient la moitié des empreintes faites sur une cible verticale.

On distingue l'écart probable vertical de l'écart probable horizontal.

Ils sont sensiblement identiques. Quand on parle de l'écart probable, on entend la demi-somme des deux précédents.

On détermine l'écart probable comme il suit :

On trace la ligne ab laissant $\frac{1}{4}$ des empreintes au-dessus d'elle-même, la ligne cd en laissant $\frac{1}{4}$ en dessous, ef en laissant $\frac{1}{4}$ à gauche, gh en laissant $\frac{1}{4}$ à droite ; eg , bd sont les deux écarts probables. Le point de rencontre des deux diagonales est regardé comme étant le *point moyen*. Le point moyen déterminé, on peut dessiner le

cercle qui a pour centre ce point et qui contient 50 pour 100 des empreintes. Un calcul analogue à celui que nous avons fait pour le tir au canon permet de déterminer, une fois connu le rayon du cercle contenant 50 pour 100 des plombs, le pour 100 de plombs contenu dans un cercle de rayon déterminé ayant son centre au point moyen et le pour 100 de plombs ayant atteint un carré de 1^{dm} de côté dont le centre coïncide avec le point moyen.

139. A titre d'indication, nous donnons le Tableau suivant (1) :

Table du pour 100 contenu dans des cercles ayant leur centre au point moyen, en fonction du rapport du rayon r de ces cercles au rayon R_{50} du cercle contenant 50 pour 100 des coups.

$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.	$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.	$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.	$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.	$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.	$\frac{r}{R_{50}}$	POUR 100.
0,02	0,03	0,34	7,70	0,66	26,06	0,98	48,61	1,30	69,01	1,80	89,42
0,04	0,11	0,36	8,59	0,68	27,42	1,00	50,00	1,32	70,11	1,85	90,67
0,06	0,25	0,38	9,53	0,70	28,80	1,02	51,38	1,34	71,19	1,90	91,81
0,08	0,44	0,40	10,50	0,72	30,18	1,04	52,75	1,36	72,25	1,95	92,83
0,10	0,69	0,42	11,51	0,74	31,58	1,06	54,11	1,38	73,29	2,00	93,75
0,12	0,99	0,44	12,55	0,76	32,99	1,08	55,45	1,40	74,30	2,10	95,30
0,14	1,35	0,46	13,64	0,78	34,40	1,10	56,77	1,42	75,29	2,20	96,51
0,16	1,76	0,48	14,76	0,80	35,83	1,12	58,08	1,44	76,24	2,30	97,44
0,18	2,22	0,50	15,91	0,82	37,25	1,14	59,37	1,46	77,18	2,40	98,16
0,20	2,73	0,52	17,09	0,84	38,68	1,16	60,65	1,48	78,09	2,50	98,69
0,22	3,30	0,54	18,29	0,86	40,11	1,18	61,90	1,50	78,98	2,60	99,08
0,24	3,91	0,56	19,54	0,88	41,54	1,20	63,14	1,55	81,09	2,70	99,36
0,26	4,58	0,58	20,80	0,90	42,96	1,22	64,36	1,60	83,04	2,80	99,56
0,28	5,29	0,60	22,08	0,92	44,38	1,24	65,55	1,65	84,85	2,90	99,71
0,30	6,05	0,62	23,39	0,94	45,80	1,26	66,73	1,70	86,51	3,00	99,80
0,32	6,85	0,64	24,72	0,96	47,21	1,28	67,88	1,75	88,03	3,50	99,98

140. Ces principes ont permis de construire des Tableaux tels que celui-ci, où E_p désigne l'écart probable, R_{50} le rayon du cercle contenant 50 pour 100 des empreintes, D_{98} le diamètre du cercle contenant 98 pour 100 des coups (1) :

(1) JOURNÉE, *Tir du fusil de chasse*. Paris, Gauthier-Villars.

Dispersion du tir à plombs dans de bons fusils de chasse.

PLOMB.	Dureté.			Mou.			Chilled shot.			Durci.			Durci.											
	Numéro.			10.			6 (anglais).			1.			Chevrotines.											
Diamètre.			1 ^{mm} , 9.			2 ^{mm} , 6.			3 ^{mm} , 9.			5 ^{mm} à 7 ^{mm} .												
Poids du grain.			0 ^g , 037.			0 ^g , 103.			0 ^g , 375.			0 ^g , 7 à 2 ^g , 0.												
PORTÉES.													E _p .	R ₅₀ .	D ₉₈ .	E _p .	R ₅₀ .	D ₉₈ .	E _p .	R ₅₀ .	D ₉₈ .	E _p .	R ₅₀ .	D ₉₈ .
<i>Canons choke bored ordinaires.</i>																								
m	cm	cm	m	cm	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m										
10.....	4,3	7,5	0,36	4,1	7,2	0,34	3,0	5,3	0,25	3,2	5,6	0,26												
20.....	11	19,2	0,91	9,1	15,9	0,75	7,7	13,5	0,64	6,8	12	0,56												
30.....	22	38,4	1,8	14,7	25,6	1,2	13	22,7	1,1	11	19	0,91												
35.....	29,5	51,5	2,5	18,0	31,4	1,5	16,2	28,3	1,3	13	22,7	1,1												
40.....	38	66	3,1	21,5	37,6	1,8	19,5	34,0	1,6	15,5	27	1,3												
50.....	61	107	5,1	29,7	51,8	2,5	27,2	47,5	2,3	21,5	38	1,8												
60.....	85	148	7,0	39,4	68,5	3,3	36	63	3,0	28,5	50	2,4												
70.....	"	"	"	52,5	92	4,4	47	82	3,9	36	63	3,0												
80.....	"	"	"	"	"	"	63	110	5,2	45	79	3,7												
<i>Canons cylindriques.</i>																								
10.....	6,7	11,7	0,55	6,6	11,7	0,55	5,5	9,6	0,46	4,5	7,9	0,37												
20.....	15	26,2	1,2	13,7	24,0	1,1	11,6	20,3	0,96	9	16	0,75												
30.....	26	45,5	2,2	21,2	37,0	1,8	19,0	33,2	1,6	14	24	1,2												
35.....	33,7	59,0	2,8	25,0	43,7	2,1	22,8	40,1	1,9	17	30	1,4												
40.....	42	73	3,5	29,3	51,1	2,4	27,0	47	2,2	20	35	1,7												
50.....	67	117	5,6	38,1	66,5	3,2	35,5	62	3,0	27	47	2,2												
60.....	102	178	8,5	47,6	83	4,0	44,5	78	3,7	34	59	2,8												
70.....	"	"	"	58,5	102	4,9	54	94	4,5	42	73	3,5												
80.....	"	"	"	"	"	"	65	114	5,4	50	87	4,1												
<i>Canons choke bored donnant le tir le plus serré.</i>																								
20.....	"	"	"	7,9	13,8	0,66	"	"	"	"	"	"												
25.....	"	"	"	10,1	17,7	0,84	"	"	"	"	"	"												
30.....	"	"	"	12,5	21,8	1,04	"	"	"	"	"	"												
35.....	"	"	"	15,1	26,3	1,25	"	"	"	"	"	"												
40.....	"	"	"	17,9	31,3	1,48	"	"	"	"	"	"												
45.....	"	"	"	21,2	37	1,76	"	"	"	"	"	"												

141. Ce Tableau a permis de calculer les chiffres qui figurent dans le Tableau suivant (1) :

(1) JOURNÉE, *Tir du fusil de chasse*. Paris, Gauthier-Villars.

Pour 100 et nombre N absolu de grains mis dans une cible circulaire de 0^m,75 de diamètre en tirant du plomb durci dont le grain a 2^{mm},6 et pèse 0^g,105.

Poids du plomb..... Nombre de grains....		CANONS														
		CHOKE FORT.				CHOKE MOYEN.					CILINDRIQUES.					
				24 ^g	30 ^g	36 ^g			24 ^g	30 ^g	36 ^g			24 ^g	30 ^g	36 ^g
		229	286	343			229	266	343			229	286	343		
PORTÉES.		R ₅₀ .	POUR 100.	N.	N.	N.	R ₅₀ .	POUR 100.	N.	N.	N.	R ₅₀ .	POUR 100.	N.	N.	N.
		cm					cm					cm				
25 ^m	17,7	95,55	219	273	328	20,6	89,9	206	257	308	30,6	65,25	149	187	223	
30.....	21,8	87,08	200	249	299	25,6	77,35	177	221	265	37,0	50,96	117	146	175	
35.....	26,3	75,47	173	216	259	31,1	63,46	146	182	218	43,8	39,91	91	114	137	
40.....	31,3	62,95	144	180	216	37,6	49,93	114	143	171	51,1	31,32	72	98	112	

142. On voit de quelle importance sont pour l'appréciation d'une arme les résultats ci-dessus consignés. Nous croyons inutile de nous étendre sur les questions théoriques que soulèvent les études de ce genre.



CHAPITRE VII.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA THÉORIE DES ASSURANCES.

I. — TABLES DE MORTALITÉ.

143. Les Compagnies d'assurances ont à résoudre divers problèmes qui tous sont basés sur celui-ci : *Quelle est la probabilité pour qu'un individu d'âge donné vive jusqu'à un autre âge donné?*

Cela revient à déterminer la loi qui lie l'existence humaine au temps.

Cette loi est variable avec les circonstances. Elle n'est pas la même en France et au Brésil (¹), elle diffère actuellement en France de ce qu'elle était au XVIII^e siècle.

D'après les statistiques suédoises, qui embrassent le XIX^e siècle et la seconde moitié du XVIII^e, la mortalité tendrait à diminuer.

(¹) A titre d'indications, voici deux Tables mettant en comparaison les moyennes de vie des populations italiennes et allemandes, hommes et femmes :

Population allemande de 1871 à 1881.			Population italienne de 1876 à 1887.		
Age.	Nombre de survivants.		Age.	Nombre de survivants.	
	Hommes.	Femmes.		Hommes.	Femmes.
0.....	100 000	100 000	0.....	100 000	100 000
1.....	74 627	78 260	1.....	78 690	80 670
5.....	65 997	69 295	5.....	62 863	64 273
10.....	62 089	65 237	10.....	59 410	60 518
15.....	60 892	63 878	15.....	57 914	58 759
27.....	55 927	59 170	27.....	52 797	53 332
30.....	54 454	57 566	30.....	51 473	51 766
35.....	51 815	54 685	35.....	49 321	49 178
40.....	48 775	51 576	40.....	46 902	46 439
50.....	41 228	45 245	50.....	40 831	40 908
60.....	31 124	26 293	60.....	32 319	33 229
70.....	17 750	21 901	70.....	19 797	20 031

Elle diminuerait bien plus encore si l'on réussissait à assainir les grands centres industriels et à enrayer l'alcoolisme. Il n'est d'ailleurs pas douteux que la mortalité des enfants diminue; il en est vraisemblablement de même pour les jeunes gens; mais il y a aggravation pour les personnes âgées de plus de 50 ans, au moins dans la population ouvrière.

On peut distinguer les unes des autres :

La Table de mortalité de la population de la France d'après les résultats du recensement du 24 mars 1901 combinés avec les résultats de l'état civil de 1898 à 1903, qui donne la survivance de la population française d'après les documents les plus récents;

La Table C. R. de la Caisse nationale des retraites, résultant des faits observés parmi les rentiers entrés en jouissance de leur pension et les déposants à capital réservé;

La Table H^m des vingt Compagnies anglaises, dressée en 1862-1863 par l'Institut des Actuaire de Londres, d'après les observations faites dans les vingt principales Compagnies d'assurances sur la vie; établie avec grand soin, cette Table donne la mortalité des assurés observés (hommes seulement), c'est-à-dire d'un groupe assez homogène;

La Table des vingt-trois Compagnies allemandes, établie d'après les observations faites jusqu'au 31 décembre 1875 sur le nombre important de 546 084 contrats d'assurances placés dans des conditions identiques au point de vue de la sélection; s'applique, comme la précédente, à un groupe assez homogène;

La Table d'expérience américaine (1868), dite aussi Table de Hoomans; c'est la plus répandue en Amérique; elle sert de base aux tarifs de la plupart des Compagnies d'assurances sur la vie, en Amérique;

La Table A. F. (assurés français) et la Table R. F. (rentiers français), construites récemment par un groupe des principales Compagnies françaises et assimilables pour l'exactitude aux Tables anglaises, américaines et allemandes; comme celles-ci, elles s'appliquent à des groupes assez homogènes;

La Table de mortalité des pensionnaires civils de l'État, construite par MM. Charlon et Achard sur les faits observés jusqu'au 31 octobre 1877;

TABLE A. F.
des Compagnies françaises.

TABLE R. F.
des Compagnies françaises.

AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.
0	1 000 000	27	786 713,1	54	581 503,5	81	91 016,6	0	1 000 000	27	786 827,1	54	613 163,7
1	963 985	28	781 578,4	55	572 216,3	82	76 093,8	1	963 985	28	791 810,9	55	603 633,9
2	937 758	29	776 368,2	56	579 322,1	83	69 587,8	2	937 758	29	776 703,6	56	593 301,8
3	917 939	30	771 074,6	57	545 796,8	84	30 588,3	3	917 939	30	771 680,7	57	585 465,2
4	903 486	31	715 689,5	58	531 649,4	85	40 117,7	4	903 486	31	766 555,8	58	571 091,7
5	893 765	32	760 203,2	59	516 861,2	86	31 159,3	5	893 765	32	761 483,0	59	559 148,8
6	884 754	33	754 666,0	60	501 417,0	87	23 697,9	6	884 754	33	756 153,8	60	546 604,1
7	873 676	34	748 887,2	61	485 306,6	88	17 522,7	7	873 676	34	750 866,4	61	533 426,9
8	873 932	35	743 035,6	62	468 525,2	89	12 631,9	8	873 932	35	745 507,5	62	519 587,6
9	870 056	36	737 038,6	63	451 074,5	90	8841,1	9	870 056	36	740 070,0	63	503 059,8
10	866 684	37	730 883,6	64	432 964,3	91	5991,6	10	866 684	37	734 544,7	64	480 820,3
11	863 520	38	724 556,0	65	414 213,5	92	3920,0	11	863 520	38	728 921,7	65	473 850,8
12	860 371	39	718 041,5	66	394 851,3	93	2 671,9	12	860 371	39	723 190,9	66	457 138,9
13	857 013	40	711 323,8	67	374 918,2	94	1 489,9	13	857 013	40	717 357,7	67	439 680,0
14	853 426	41	704 385,8	68	354 467,7	95	859,2	14	853 426	41	711 352,1	68	421 478,3
15	849 446	42	697 209,8	69	333 567,3	96	471,3	15	849 446	42	705 219,3	69	402 548,6
16	845 069	43	689 777,0	70	312 298,8	97	244,8	16	845 069	43	698 914,5	70	382 918,6
17	840 298	44	682 056,8	71	290 730,4	98	119,8	17	840 298	44	692 431,7	71	362 630,3
18	835 173	45	674 658,2	72	269 061,5	99	54,9	18	835 173	45	685 983,8	72	341 741,3
19	829 759	46	665 728,9	73	247 332,5	100	23,4	19	829 759	46	678 902,0	73	320 327,6
20	824 159	47	657 055,9	74	225 713,7	101	9,3	20	824 159	47	671 879,0	74	298 483,9
21	818 171	48	648 014,8	75	204 358,5	102	3,4	21	818 171	48	664 417,2	75	276 324,5
22	812 809	49	638 580,6	76	183 420,6	103	1,1	22	812 809	49	656 770,3	76	253 984,3
23	807 271	50	628 274,4	77	163 096,4	104	0,3	23	807 271	50	648 822,5	77	231 617,8
24	801 926	51	618 429,0	78	143 529,5	105	0,1	24	801 926	51	640 548,4	78	209 397,7
25	796 786	52	607 658,5	79	124 896,2	106	0,0	25	796 786	52	631 921,0	79	187 512,4
26	791 780,2	53	596 388,8	80	107 354,4			26	791 780,2	53	622 912,6	80	166 161,0
27	786 713,1	54	584 593,5	81	91 046,0			27	786 713,1	54	613 493,7	81	145 552,6

La Table de Deparcieux, construite au XVIII^e siècle et qui ne représente plus la loi de la mortalité, mais offre un intérêt historique.

Nous donnons ici, à titre d'exemple, deux des Tables citées (1).

144. Problème. — *Quelle probabilité a un individu de 37 ans de vivre jusqu'à 45 ans ?*

Soient a le nombre des vivants de 37 ans qu'indique une Table, b le nombre des vivants de 45 ans que donne la même Table. De l'âge 37 ans à l'âge 45 ans, $a - b$ individus sur a disparaissent; la probabilité de disparition entre 37 et 45 ans est donc $\frac{a-b}{a}$; d'autre part, b survivent; la probabilité de survie est donc $\frac{b}{a}$. La somme de ces deux probabilités est 1, comme il fallait s'y attendre. Cela veut dire simplement qu'on est certain, soit de vivre, soit de mourir, entre 37 et 45 ans.

Avec les diverses Tables dont on a donné la liste plus haut, on trouve

$$\frac{59811}{64907}, \quad \frac{75894}{81454}, \quad \frac{77919}{84745}, \quad \frac{77707}{85662}, \quad \frac{74173}{80353}, \quad \frac{6740582}{7308836}, \quad \frac{6857838}{7345447}, \quad \frac{622}{678}.$$

Nous avons omis la Table de mortalité des pensionnaires civils de l'État, qui débute à l'âge 40 ans.

145. Problème. — *A quel âge a le plus de chances de mourir un individu âgé de 37 ans ?*

Soit A cet âge; soient a le nombre des vivants de 37 ans qu'indique une Table, b le nombre des vivants de l'âge A qu'indique la même Table. De l'âge 37 ans à l'âge A , la probabilité de disparition est $\frac{a-b}{a}$, et la probabilité de survie est $\frac{b}{a}$. Si l'individu devait vivre jusqu'à un âge A tel que $\frac{a-b}{a} > \frac{b}{a}$, sa probabilité de vie serait plus grande que sa probabilité de disparition; tout le contraire, si

(1) On trouvera toutes les Tables citées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1907*. Paris, Gauthier-Villars.

$\frac{a-b}{a} < \frac{b}{a}$. Il devra donc probablement vivre jusqu'à un âge tel que $\frac{a-b}{a} = \frac{b}{a}$ ou $a = 2b$.

Dans le cas présent, suivant les Tables,

$a = 59811, 75894, 77919, 77707, 74173, 6740582, 6857838, 622$;

on aura donc A en prenant pour b les moitiés de ces chiffres, soit

$29955, 37947, 38958, 38853, 37086, 3370291, 3428919, 311$,

et, en cherchant à quel âge les vivants sont réduits à ces nombres, on trouve

$70, 71, 70, 68, 70, 69, 72, 70$,

soit, en moyenne, 70 ans.

146. Problème. — *Quelle somme doit verser actuellement un individu âgé de 37 ans pour assurer à ses héritiers la somme de 100 000^{fr} le jour où il viendra à décéder? Le taux de capitalisation est 3 pour 100.*

Prenons 70 ans comme âge probable où adviendra le décès. Que valent *actuellement* ces 100 000^{fr}? Autrement dit, quelle est la somme qui, placée à 3 pour 100, à intérêts composés, devient 100 000^{fr} après $70 - 37 = 33$ années? Nous n'avons pas à le calculer. Nous prendrons le résultat dans une Table quelconque d'intérêts et nous trouverons 37 702^{fr}, 60.

Si l'assuré meurt avant d'avoir atteint 70 ans, l'assureur perdra à la combinaison, pour autant qu'il aura placé les fonds versés à 3 pour 100. C'est le contraire si l'assuré meurt après avoir atteint 70 ans.

Sur un grand nombre d'assurances, 1000 par exemple, la loi de Bernoulli intervient. Les assurés meurent, *en moyenne*, aux âges assignés par les Tables; les Compagnies d'assurances payent, *en moyenne*, les sommes versées plus les intérêts, sauf une différence provenant de ce qu'elles placent les fonds à un taux supérieur à celui calculé pour leurs clients. Elles calculeront, par exemple, sur le taux de 3 pour 100 pour leurs clients, faisant verser 37 702^{fr}, 60 à un client âgé de 37 ans et s'engageant à verser

100000^{fr} à ses héritiers le jour de son décès; d'autre part, elles placeront les 37000^{fr}, non à 3 pour 100, mais à 3,5 pour 100.

147. Les Tables de mortalité permettent de calculer la fonction $f(x)$ qui désigne le nombre des vivants d'âge x . Par exemple, Gompertz a indiqué la fonction

$$f(x) = f(0) G q^{x-1},$$

où $f(0)$ est le nombre d'individus de l'âge zéro indiqué dans la Table, et G, q des constantes convenablement choisies.

Makenham a indiqué une formule qui paraît plus exacte.

148. Il est facile de voir que

$$\frac{f(a+n)}{f(a)}$$

est la probabilité qu'une personne d'âge a arrivera à l'âge $a+n$; que

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} \times \frac{f(b+n)}{f(b)}$$

est la probabilité que deux personnes d'âges a et b ont de vivre encore ensemble n années; que

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} \times \frac{f(b+n)}{f(b)} \times \frac{f(c+n)}{f(c)}$$

est la probabilité que trois personnes d'âges a, b, c ont de vivre encore ensemble n années; que

$$\frac{f(a) - f(a+n)}{f(a)}$$

est la probabilité qu'une personne d'âge a mourra avant n années; que

$$\frac{f(a) - f(a+n)}{f(a)} \times \frac{f(b) - f(b+n)}{f(b)}$$

est la probabilité que deux personnes d'âges a et b mourront toutes deux avant n années; que

$$\frac{f(a) - f(a+n)}{f(a)} \times \frac{f(b+n)}{f(b)}$$

est la probabilité que la personne d'âge b survivra après n années à celle d'âge a ; que

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} + \frac{f(b+n)}{f(b)} - 2 \frac{f(a+n)f(b+n)}{f(a)f(b)}$$

est la probabilité que l'une des deux personnes d'âges a et b sera morte dans n années et l'autre en vie; que

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} + \frac{f(b+n)}{f(b)} - \frac{f(a+n)f(b+n)}{f(a)f(b)}$$

est la probabilité que l'une des deux personnes d'âges a et b au moins sera morte dans n années.

Nous admettons de plus, dans ce qui suit, qu'on connaît la valeur actuelle de 1^{fr} payable dans n années, le taux de capitalisation étant donné, et, d'une manière générale, tout ce qui concerne les annuités.

Ainsi, nous admettons qu'on sache calculer la somme qui, versée chaque année pendant 33 ans, équivaut à un versement *actuel* de 37702^{fr},60, 3 pour 100, et, par suite, la somme que devra verser un individu (n° 146) âgé de 37 ans pour qu'on paye 100000^{fr} à ses héritiers le jour de son décès.

II. — ASSURANCES EN CAS DE VIE.

ASSURANCES DE RENTES VIAGÈRES.

149. Problème. — *Une personne est âgée de n années. Elle donne à une Compagnie d'assurances la somme de A francs, à charge par celle-ci de lui servir, sa vie durant, et chaque année, une somme fixe que celle-ci calculera d'après l'époque présumée de sa mort. Quelle sera cette somme fixe?*

Soit x la somme en question.

La Compagnie payera x dans 1 an, x dans 2 ans, x dans 3 ans, . . . , x dans p_n années, p_n étant la date *probable* du décès de l'assuré.

Toutes ces sommes peuvent être réduites, au moyen des Tables d'intérêt, à leurs valeurs actuelles.

Ces valeurs devront éгал ensemble la somme A. On aura ainsi une équation permettant de calculer x .

150. **Problème.** — *Les conditions sont les mêmes que précédemment, sauf que la rente doit être payée seulement pendant un nombre d'années déterminé, 5 par exemple, si l'assuré vit plus de 5 ans et s'éteindre, comme précédemment, si l'assuré meurt avant 5 ans. Quelle somme lui payera chaque année la Compagnie?*

Soit $y = f(x)$ la loi de mortalité.

L'assuré fait partie d'un groupe d'individus actuellement vivants au nombre de $f(n)$; dans 5 années, ce groupe sera réduit à $f(n + 5)$.

Si tous les individus en nombre $f(n)$ s'assuraient aux conditions précédentes, la Compagnie payerait

$$x \times f(n + 1)$$

au bout de la première année,

$$x \times f(n + 2)$$

au bout de la deuxième, . . . ,

$$x \times f(n + 5)$$

au bout de la cinquième. Si x_1, x_2, \dots, x_5 sont ces sommes réduites à leurs valeurs actuelles,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

devra être égal à la somme totale que recevrait la Compagnie de ses $f(n)$ assurés; donc

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{f(n)}$$

doit être égal à la somme A que verse l'un d'eux, d'où une équation permettant de calculer x .

EXEMPLE. — *L'assuré a 90 ans. Le taux est 3,5.*

La Table R. F. indique que, sur 20791 personnes âgées de

90 ans, il n'en existe plus que

14874	après 1 an,
10296	» 2 ans,
6873	» 3 ans,
4408	» 4 ans,
2706	» 5 ans;

une Compagnie payant 1^{fr} aux 14874 personnes survivant après 1 an payera donc 14874^{fr} dans 1 an dont la valeur actuelle est 14371^{fr}, 10296^{fr} dans 2 ans dont la valeur actuelle est 9611^{fr}, 43, . . . , soit des sommes dont la valeur actuelle est

$$14371^{\text{fr}}, 9611^{\text{fr}}, 43, 6199^{\text{fr}}, 05, 3841^{\text{fr}}, 32, 2278^{\text{fr}}, 38,$$

soit

$$36301^{\text{fr}}, 18.$$

Cette somme, divisée par le nombre des vivants à l'âge de 90 ans, 20791, donne 1^{fr}, 746; telle est la somme que doit payer l'assuré pour obtenir 1^{fr} de rente pendant 5 ans. S'il paye A francs, il aura $\frac{A}{1,746}$ francs de rente, dans les conditions indiquées.

151. Le calcul d'une rente viagère différée peut se faire tout aussi facilement. D'après la Table de mortalité, sur 20791 personnes âgées de 90 ans, il n'en existe plus que 1583, 878, . . . après 6 ans, 7 ans, . . . ; 1583^{fr} dans 6 ans valent *actuellement* 1287^{fr}, 77, 877^{fr} payés dans 7 ans valent *actuellement* 690^{fr}, 10, . . . :

$$1287^{\text{fr}}, 77 + 690^{\text{fr}}, 10 + \dots$$

représenterait *actuellement* la somme qui sera payée par annuités aux 20791 assurés. A l'un d'eux on payera le quotient de cette somme par 20791.

ASSURANCE DE CAPITAUX DIFFÉRÉS.

152. Dotation d'enfants. — Cette question rentre dans celle-ci, plus générale : assurance de capitaux différés. Un exemple fera comprendre comment on peut traiter ce genre de questions.

Une personne âgée de 20 ans désire recevoir 1^{fr} dans 20 ans, si elle vit encore. En cas de décès avant l'expiration des vingt

ans, rien ne lui est payé. Quelle somme doit-elle donner à la Compagnie d'assurances ?

La Table R. F. nous indique que, sur 824 159 personnes âgées de 20 ans, il n'en existe plus que 717 338 à l'âge de 40 ans; par suite, le prix de cette assurance de 1^{er} faite pour les 824 159 personnes âgées de 20 ans sera de 717 338^{fr} payables dans 20 ans, dont la valeur actuelle est 360 509^{fr},66. Donc, le prix de l'assurance de 1^{er} pour 1 seule personne âgée de 20 ans sera

$$\frac{360\,509^{\text{fr}},66}{824\,159} = 0^{\text{fr}},43743.$$

Ainsi, en versant actuellement 43743^{fr}, l'assuré toucherait, en cas de vie, 100 000^{fr} dans 20 ans, sauf le cas où il viendrait à décéder d'ici là.

III. — ASSURANCES EN CAS DE DÉCÈS.

153. **Assurance temporaire.** — Une Compagnie s'engage à payer aux ayants droit d'un individu âgé actuellement de 20 ans une somme de 1^{er} si cet individu décède d'ici 20 ans. Que doit lui payer l'assuré ?

Nous nous servirons de la Table A. F.

La Table indique 771 075 personnes âgées de 30 ans; il en meurt 5385 pendant la première année, 5487 pendant la deuxième, . . . ; si la Compagnie assure 771 075 personnes, elle aura donc à payer 5385^{fr} pendant la première année, et nous supposerons qu'elle les paye au bout de la première année; la valeur *actuelle* de cette somme est 5202^{fr},90; de même la Compagnie payera 5487^{fr} au bout de la deuxième année, dont la valeur *actuelle* est 5122^{fr},20, etc. On trouve ainsi qu'elle payera, pour 771 075 assurés, 97 531^{fr},16, valeur *actuelle*. Donc, pour 1 assuré, elle payera, en moyenne, 97 531^{fr},15 : 771 075, soit 0^{fr},1264572 : c'est le prix de l'assurance (1).

(1) Tous ces exemples sont extraits du *Calcul des primes* de M. Morand de la Perelle. Paris, Larose, 1901.

154. Assurance vie entière. — C'est un contrat par lequel une Compagnie s'engage à payer une somme déterminée, lors du décès d'une personne désignée, aux ayants droit de cette personne.

Cette combinaison est une assurance temporaire dont la durée est prolongée jusqu'à la limite de la vie humaine, indiquée par la Table de mortalité.

155. Assurance mixte. — C'est un contrat par lequel une Compagnie s'engage à payer une somme déterminée à une personne désignée, lors de son décès, ou au plus tard à la fin d'un nombre donné d'années, 20 par exemple.

Cette combinaison est à la fois : 1° une assurance temporaire de 20 ans; 2° une assurance de la même somme différée de 20 ans. Nous savons calculer le prix de chacune de ces assurances. En ajoutant ces prix, on aura celui de l'assurance en question.

IV. — QUELQUES DÉVELOPPEMENTS.

156. Le problème fondamental de la science des actuaires consiste à déterminer la valeur d'un paiement de montant S , qui doit avoir lieu après un temps n si un ou plusieurs individus sont vivants à ce moment, ou bien encore si un ou plusieurs individus sont morts à ce moment, ou enfin si, parmi les membres d'un groupe donné, les uns, déterminés ou non, sont morts ou les autres vivants.

Toute opération susceptible d'être soumise au calcul précédent est une assurance. Les assurés ou têtes sont les individus dont la mort ou la vie à un certain moment entraîne le paiement de la somme. L'assureur est l'individu tenu au paiement de la somme S .

Les données se résument à celle-ci : on connaît par une Table de mortalité appropriée le nombre l_x des vivants à un âge x exprimé par un nombre entier d'années, et l'on connaît le nombre l_0 des nouveau-nés correspondant à l_x .

Cette donnée ne suffit pas toujours, comme on va le voir.

Soit en effet un groupe composé de deux individus : a_x d'âge x , a_y d'âge y , x et y entiers. Supposons que le capital S doive être payé à la fin de la première année si, à la fin de cette année, a_x

est vivant et a_y mort, ou encore si, tous les deux étant morts au cours de l'année, le décès de a_y a précédé celui de a_x .

La probabilité pour que a_x soit en vie à l'âge $x + 1$ et la probabilité pour que y meure avant d'avoir atteint l'âge $y + 1$ sont respectivement

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_y = \frac{d_y}{l_y} \quad (\text{on pose } l_y - l_{y+1} = d_y).$$

Les probabilités étant supposées indépendantes, la probabilité correspondant à la première des éventualités de l'énoncé sera

$$p_x q_y = \frac{l_{x+1} \times d_y}{l_x l_y}.$$

157. On l'obtient rigoureusement à l'aide d'une Table de survie.

Il en est autrement pour la probabilité correspondant à la deuxième éventualité de l'énoncé : on peut seulement fixer des limites entre lesquelles cette probabilité est comprise. On supposera d'abord que a_y meure au commencement de l'année; cela revient à supposer que les deux individus meurent tous deux au cours de l'année, leur ordre de décès devenant indifférent; cette probabilité a pour expression

$$\frac{d_x}{l_x} \times \frac{d_y}{l_y} = q_x q_y.$$

On suppose ensuite que a_y meure à la fin de l'année; la possibilité que a_x meure au cours de l'année et après a_y est dès lors exclue et la probabilité de l'ensemble est zéro; zéro et $q_x q_y$ sont deux limites de la probabilité.

On remarquera que, a_x , a_y n'ayant pas même âge, il n'y a pas probabilité $\frac{1}{2}$ que l'un des deux mourra le premier.

158. On obtiendra une solution *exacte*, autant qu'il est possible, du problème en se servant de Tables interpolées, c'est-à-dire d'une fonction *continue* l_x concordant avec la Table de mortalité pour toutes les valeurs entières de x . Il existe une infinité de fonctions remplissant cette condition. On prendra l'une des plus simples. Les probabilités à calculer se ramènent alors à des intégrations.

Notons à ce propos un résultat fondamental de la théorie qui

nous occupe : *il est possible de remplacer un groupe de têtes d'âges différents par une tête unique dont l'âge est fonction, calculable, des âges réels des têtes du groupe.* Nous ne démontrerons pas ce résultat. Mais nous remarquerons qu'il permet de remplacer les Tables fort compliquées qui correspondraient aux diverses combinaisons des âges par les Tables ordinaires dont nous avons déjà parlé.

Donnons maintenant quelques explications sur le fonctionnement des Compagnies d'assurances.

PRIMES ET RÉSERVES.

Une prime pure est la somme que l'assuré serait tenu de verser dans l'hypothèse où l'assureur renoncerait à faire tout bénéfice sur l'opération; ce qui n'est presque jamais le cas.

L'assuré paye en fait une *prime chargée* ou *industrielle* ou une *prime du tarif*; le chargement est la différence entre cette prime et la prime pure. Les *fonds purs* et *industriels* sont les fonds constitués par l'accumulation des primes pures et industrielles.

L'introduction des chargements se justifie par les raisons que voici : l'assureur doit se couvrir de ses frais généraux (location d'immeubles, paiement de ses agents, entretien de ses locaux, correspondance, etc.); il doit prévoir les écarts entre la mortalité théorique et la mortalité vraie de ses clients en constituant un fonds spécial de garantie; enfin son entreprise a un caractère capitaliste qui justifie des bénéfices.

Mais, si l'assureur a tendance à charger le plus possible les primes, la loi de l'offre et de la demande limite ses exigences.

La limite inférieure ne dépend que des frais que subit effectivement l'assureur.

La limite supérieure se calcule en examinant séparément les divers possibles concernant une opération donnée et en calculant la valeur de la prime pure pour ces cas. On ajoute à chaque prime pure la part de frais convenable. Le total le plus fort parmi ceux-ci est la limite supérieure.

Soit A la valeur probable, rapportée au début de l'opération des engagements pris par l'assurance à propos d'un contrat. Soit P la

prime pure que doit payer annuellement l'assuré. Posons

$$P = \frac{A}{a}.$$

Le nombre a , déterminé par cette relation, dépend de P et de A , qui sont connus.

Quand cette équation est vérifiée,

$$A - Pa = 0.$$

Supposons qu'il se soit écoulé m années depuis le début de l'opération, et soient A_m et Pa_m les valeurs probables des engagements de l'assureur et de l'assuré pour la période de vigueur qui reste à s'écouler. L'égalité

$$A_m - Pa_m = V_m$$

définit le montant V_m de la *réserve* au moment considéré. Si $Pa_m = 0$,

$$A_m = V_m.$$

La réserve coïncide donc avec la valeur probable actuelle des engagements de l'assureur quand l'assuré n'a plus aucune prime à verser après la période de vigueur de l'opération. Dans le cas d'une prime unique versée au début, ceci se produit quel que soit m .

Un contrat portant sur un groupe de têtes peut donner lieu à des primes négatives, à des créances morales de l'assureur envers l'assuré. On les compte pour zéro dans les bilans.

La réserve d'une Compagnie est l'ensemble des réserves relatives à chaque contrat, à une époque donnée.

Le calcul des réserves se fait généralement le 31 décembre. Au contraire, les diverses opérations commencent à des moments quelconques de l'année. La durée de l'opération n'est donc pas un nombre entier d'années quand on calcule la réserve.

Pour éviter les longs calculs que nécessiterait l'introduction de fractions d'années on admet que, pour une année donnée, les opérations commencées pendant le premier semestre l'ont été au 1^{er} janvier et que celles commencées pendant le second semestre l'ont été au 31 décembre.

Problème. — *Quand un assuré fait abandon de son assurance,*

sans qu'il y ait préjudice pour l'assureur, la totalité de la réserve le concernant doit-elle lui être attribuée?

On ne peut lui attribuer la totalité de la réserve. En effet, l'affirmation conduirait à considérer l'assurance comme un pari liant l'assureur et non l'assuré, ce qui conduirait l'assuré à demander la résiliation du contrat toutes les fois que, par suite d'une modification dans les risques, le maintien du contrat lui serait désavantageux et serait, au contraire, favorable à l'assureur.

En pratique, les assureurs n'accordent une compensation, un rachat, que s'il s'agit d'une opération en cas de mort et la fixent aux $\frac{3}{4}$ de la réserve. C'est une règle empirique.

Les assureurs accordent aussi, et en cas de mort comme en cas de vie, une réduction de la police; ils libèrent l'assuré du paiement des primes à venir, mais ne l'assurent plus que pour une certaine valeur déterminée d'après la somme que l'assureur doit comme prime unique de la police réduite.

PROFITS ET PERTES.

Le compte de *profits et pertes généraux* de la Compagnie pour une période donnée est la différence pour cette période :

1° Entre la somme des réserves existant au début de l'exercice, les primes encaissées pendant l'exercice, les intérêts produits par l'accumulation des capitaux ;

2° Et la somme des capitaux payés aux assurés en exécution des contrats, les frais généraux, les commissions payées aux agents et les réserves existant à la fin de l'exercice.

Le compte des *profits et pertes des fonds nets* est la différence :

1° Entre la somme des réserves existant au début de l'exercice, les primes pures encaissées pendant l'exercice, les intérêts produits par les capitaux assurés ;

2° Et la somme des capitaux payés aux assurés au cours de l'exercice et de la réserve existant à la fin de cet exercice.

Le solde du premier compte représente le bénéfice, ou la perte, provenant pour la Compagnie de la gestion industrielle prise dans son ensemble; le solde du second compte représente le bénéfice, ou la perte, provenant seulement des écarts entre les prévisions

adoptées pour le calcul (taux de l'intérêt et Tables de survie) et la réalité.

Ce qui nous intéresse à ce sujet c'est cette remarque : que, d'ordinaire, les Compagnies d'assurances bien gérées font d'excellentes affaires, sans cependant exiger des chargements de primes exagérées. C'est donc que la loi de Bernoulli, qui sert de base à leurs calculs, se vérifie. Là est peut-être la meilleure vérification pratique de ce principe. Nous allons y revenir à propos du risque et de la stabilité.

RISQUE.

Soient p_1, p_2, \dots, p_n les probabilités d'apparition de certains événements l_1, l_2, \dots, l_n ; supposons que l'apparition de l'événement e_i entraîne l'obligation pour un joueur J_1 de payer la somme A_i à un autre joueur J_2 et l'obligation pour J_2 de payer la somme E_i à A_i .

Si les événements considérés s'excluent mutuellement, si de plus ils sont tels qu'un et un seul d'entre eux doivent se produire,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

On définit les quantités A, E ,

$$\begin{aligned} A &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots + p_n A_n, \\ E &= p_1 E_1 + p_2 E_2 + \dots + p_n E_n, \end{aligned}$$

comme étant les *valeurs probables* des espérances (les espérances mathématiques) des joueurs J_1, J_2 .

Le jeu est dit *équitable* si

$$A = E,$$

ce qui suppose

$$0 = A - E = (A_1 - E_1) p_1 + (A_2 - E_2) p_2 + \dots + (A_n - E_n) p_n.$$

Considérons les différences $A_i - E_i$ qui sont positives et soit D_1 défini par la relation

$$D_1 = \sum_{A_i > E_i} p_i (A_i - E_i) :$$

cette quantité D_1 s'appelle *risque mathématique de J_1 par rapport à J_2* .

Considérons maintenant les différences $E_h - A_h$ qui sont positives; la quantité D_2 définie par la relation

$$D_2 = \sum_{E_h > A_h} p_h (E_h - A_h)$$

s'appelle *risque mathématique de J_2 par rapport à J_1* .

On conçoit que ces définitions des risques puissent correspondre à la notion ordinaire du risque. On conçoit aussi qu'on puisse les appliquer à un contrat d'assurance, l'assuré et la Compagnie étant regardés comme deux joueurs, qui fondent leurs espérances sur la réalisation d'une loi de survie déterminée.

Les actuaires ont déduit des considérations qui se rapportent à ces notions du risque d'importants résultats que nous allons faire pressentir.

L'assureur qui n'encaisserait comme primes que les primes pures correspondant à une évaluation exacte de la mortalité et du taux de capitalisation, et qui n'ajouterait à ces primes que les chargements strictement suffisants pour couvrir les dépenses de l'exploitation, encourrait des risques exagérés : il ne serait pas garanti contre les conséquences financières de l'apparition d'événements défavorables. Il jouerait, au sens strict du mot, et sa ruine, comme celle du joueur, serait certaine.

Il ne peut d'autre part charger ses primes de telle sorte qu'il soit complètement à couvert des événements les plus défavorables qui puissent arriver, cela est évident. Il lui faudra donc, soit à l'aide de la théorie du risque, soit en suivant les enseignements de la pratique, parer aux seules éventualités qu'il juge possibles et qui dépendront pour une grande part du nombre de têtes qu'il assure; c'est là que se trouve intervenir à nouveau le théorème de Bernoulli.

Concevons en effet une Compagnie ayant pour clients 50 individus âgés chacun de 30 ans, et pas d'autres. A 30 ans, la probabilité de décès dans le délai de 1 an est de 2 pour 100. Un seul assuré doit donc mourir dans l'année. S'il en meurt *deux*, la mortalité réelle devient double de la mortalité théorique. Au contraire, si la Compagnie a assuré 500 têtes de 30 ans, un décès supplémentaire dans l'année augmente seulement de $\frac{1}{10}$ la mortalité théorique.

C'est précisément ce chiffre de 500 que l'on considère dans la pratique comme le minimum de têtes qu'une Compagnie puisse assurer.

NOTIONS PRATIQUES.

Ajoutons, pour sortir du domaine de la théorie pure :

- 1° Que le chargement des primes est en moyenne de 9 pour 100 ;
- 2° Que les Compagnies choisissent entre les différentes Tables de mortalité celles qui leur assurent, dans chaque cas, le maximum d'avantages ;
- 3° Que les Compagnies s'inquiètent beaucoup, sous le nom de *plein*, de la somme maxima qu'elles peuvent accepter sur des risques donnés.

A consulter : BROGGI, *Traité des assurances sur la vie*. Hermann, 1907.
— H. LAURENT, *Théorie et pratique des assurances sur la vie*. Gauthier-Villars.



CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX SCIENCES MORALES ET ÉCONOMIQUES.

159. Le Calcul des probabilités confine en beaucoup de points à la Philosophie. Nous l'avons montré à propos de la définition du hasard, de la définition de la probabilité, de l'usage des statistiques.

Nous allons encore le montrer à propos de son application aux sciences morales.

Posons-nous cette simple question :

De même qu'il existe des Compagnies d'assurances sur la vie, contre l'incendie, contre le vol, pourrait-il exister des Compagnies d'assurances contre le divorce, contre les condamnations judiciaires?

160. *Pierre n'a pas de fortune. Il épouse Jeanne qui a une fortune A. Une Compagnie d'assurances pourrait-elle lui garantir, et sous certaines réserves, qu'elle lui payera la somme B en cas de divorce ?*

Admettons que les réserves soient telles que la *moralité* du contrat soit garantie, que nulle intention de divorce n'ait lieu lors du mariage.

La Compagnie sait que, sur a mariages, il y a a_1 divorces au bout de 1 an, a_2 au bout de 2 ans, a_3 au bout de 3 ans, Remplaçons les mots *mariage* et *divorce* par *naissance* et *décès* : il est clair qu'on obtient une sorte de Table de mortalité et qu'on peut avec son aide constituer des contrats analogues à ceux qui concernent la vie et la mort.

La solution pratique du problème dépend de la construction de Tables appropriées. Il semble que cette construction n'ait d'autre

difficulté que le petit nombre d'éléments actuellement connus, la loi instituant le divorce étant récente. Il serait, par contre, actuellement possible de construire des Tables concernant l'éventualité d'une séparation de biens et d'assurer contre cet événement.

Pierre engage un procès commercial. Une Compagnie d'assurances pourrait-elle lui garantir qu'au cas où il le perdrait, elle lui payera la somme A ?

La Compagnie a fait, nous le supposons, la statistique de tous les procès commerciaux engagés et perdus depuis de longues années. Elle connaît le rapport de ces deux nombres. Elle a une base d'appréciation. Pierre a tant pour 100 de chances de perte. Elle peut calculer le prix de son contrat, *si elle parvient à en garantir la moralité*, si le contrat est tel que Pierre ne désire pas perdre son procès. S'il est stipulé dans le contrat que la Compagnie payera à Pierre les $\frac{3}{4}$ des frais totaux qu'entraîne le procès, le contrat sera moral. J'ajoute que, pratiquement, il serait faisable.

Pierre est accusé d'un délit ou d'un crime. Il peut être acquitté ou condamné à diverses peines. Une Compagnie peut-elle lui garantir qu'en cas de condamnation elle lui payera une somme A ?

Le contrat, hors des cas exceptionnels, ne peut être moral. La Compagnie ignore en effet si, en échange d'une somme déterminée, l'accusé ne chercherait pas à être condamné.

Supposons que la Compagnie ait l'assurance que le contrat sera moral, que quelle que soit l'indemnité versée en cas de condamnation l'accusé préférera l'acquiescement.

Peut-elle construire une Table ? Oui. Tant d'accusés, tant de condamnés : les statistiques existent.

On peut disserter longuement sur ce sujet. Nous le donnons comme introduction à cette question plus délicate :

161. Quelles chances a un innocent d'être condamné ?

Laplace, Condorcet, Poisson, Bertrand ont examiné la question et ont écrit de longs Mémoires à ce sujet.

Tout d'abord, en quoi peut-on reconnaître qu'un innocent a été

condamné? Comment peut-on dresser une statistique des jugements erronés? Le seul procédé est de compter le nombre des jugements des tribunaux ordinaires que les Cours d'appel et de cassation ont réformés. Sera réputé mauvais tout jugement ainsi réformé. Admettons que la statistique soit construite d'après ces données, que le rapport du nombre des jugements réformés au nombre total des jugements soit $\frac{a}{b}$: pourra-t-on en conclure qu'un innocent a $\frac{a}{b}$ chances d'être condamné en première instance et, étendant le résultat à tous les tribunaux, qu'un innocent a $\frac{a}{b}$ chances d'être condamné?

Pour conclure ainsi, il faudrait être assuré que les Cours d'appel et de cassation sont infaillibles, qu'elles n'ont innocenté que des innocents et condamné que des coupables : or, on ne le peut.

Telles sont en quelques mots, et sans raisonnements sybillins, tels ceux de certains auteurs, et non des moins connus, les réflexions que peut inspirer le sujet.

En résumé, le Calcul des probabilités peut être appliqué aux sciences morales et politiques, en tant que celles-ci sont basées sur des statistiques convenablement faites, et nous renvoyons le lecteur à ce que nous avons dit à ce propos.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS	v
--------------------	---

INTRODUCTION.

1-6. Définition logique du hasard.....	
7. Ce qu'est le Calcul des probabilités.....	7

RAPPEL DE NOTIONS GÉNÉRALES.

NOTIONS SOMMAIRES D'ANALYSE COMBINATOIRE ET DE CALCUL INFINITÉSIMAL.

I. *Analyse combinatoire :*

8. Arrangements, permutations, combinaisons simples.....	9
9. Arrangements, permutations, combinaisons avec répétition.....	10
10. II. <i>Évaluation approchée de $m!$</i>	10
11. III. <i>Intégrales définies simples</i>	11
12. IV. <i>Intégrales indéfinies</i>	12
13. V. <i>Dérivées</i>	13
14. Principales propriétés des dérivées.....	13

CHAPITRE I.

PRINCIPES ET DÉFINITIONS.

15. Le Calcul des probabilités est moderne.....	15
I. — <i>Définition de la probabilité mathématique. Problèmes simples.</i>	
16-17. Loi de Bernoulli.....	15
18. Définition de la probabilité mathématique.....	18
19-20. Problèmes sur le jeu de dés.....	19
21. Problème concernant le tirage de boules d'une urne.....	22
22. Problème des trois coffrets.....	23
23. Problème sur le jeu de boules.....	23
24. Événements également probables.....	24
25. Valeur objective du Calcul des probabilités.....	25
26. Probabilité nulle. Certitude. Exemples.....	25
27. Problème de la loterie.....	26
28. Problème du jeu de rencontre.....	27
29. Problème des partis.....	28

II. — *Probabilité totale. Probabilité composée.*

	Pages.
30. Probabilité totale	30
31. Problème	30
32. Probabilité composée	31
33. <i>Applications</i> : sur le jeu de dés.....	31
34. Problème de la poule.....	32

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA RÉPÉTITION
DES MÊMES ÉPREUVES.

35. Deux principes.....	34
-------------------------	----

I. — *Probabilité des événements composés des mêmes événements simples.*

36. Notation.....	34
37. Questions de probabilités.....	34
38-41. Probabilité T_α qu'un événement E se produira α fois dans m épreuves. Application. Généralisation.....	34
42-43. Nombre le plus probable d'arrivées d'un événement dans une série de m épreuves. Application.....	36
. Valeurs approchées de T_α	37
45. Probabilité de la combinaison la plus probable.....	38

II. — *Théorie des écarts.*

46. Notations.....	39
47. Écart $\mathfrak{C}_{m,p,\lambda}$	39
48. Expression approchée de $\mathfrak{C}_{m,p,\lambda}$	40
49. Remarque.....	44
50. Tableau des valeurs numériques de $\Theta(u)$	44
51. Application.....	48
52. Écart probable.....	48
53. Écart moyen.....	49
54. Rapport de l'écart moyen à l'écart probable.....	49
55. Nombre probable d'arrivées de l'événement de probabilité p	49
56. Écart absolu, écart relatif.....	50

III. — *Théorèmes de Bernoulli et de Poisson.*

57. Premier théorème de Bernoulli.....	50
58. Deuxième théorème de Bernoulli.....	52
. Troisième théorème de Bernoulli.....	54
60. Travaux de MM. Mansion et de la Vallée-Poussin.....	57
61. Remarques.....	57
62. Théorème de Poisson.....	59

CHAPITRE III.

LES JEUX DE HASARD ET L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.

63. Espérance mathématique.....	61
---------------------------------	----

I. — *Jeux de pur hasard.*

	Pages.
64. Jeux de des.....	61
65. Jeu de la roulette.....	61
66. Problème.....	63
67. Avantage du banquier à la roulette.....	64
68. Petits chevaux.....	64
69. Trente et quarante.....	64
70. Baccara.....	67

II. — *Paradoxe de Saint-Petersbourg. Ruine des joueurs.*

71. Problème.....	72
72. Paradoxe de Saint-Petersbourg.....	73
73. Problème.....	73
74. Ruine des joueurs.....	74
75. III. — <i>Espérance mathématique</i>	75

IV. — *Jeux savants.*

76. Whist.....	75
77. Piquet.....	85
78. Écarté.....	90
79. La spéculation.....	94
80-81. La loi de probabilité.....	97
82-83. Espérance mathématique du spéculateur.....	100
84. Loi des écarts de primes.....	102
85-89. Opérations fermes.....	103
90-92. Opérations à primes.....	105

CHAPITRE IV.

PROBABILITÉ GÉOMÉTRIQUE.

93. Définition de la probabilité géométrique.....	108
94. Problème de l'aiguille.....	108
95. Paradoxe de Bertrand.....	109

CHAPITRE V.

PROBABILITÉ DES CAUSES.

I. — *Propositions fondamentales.*

96. Remarque préliminaire.....	118
97. Théorème de Bayes.....	118
98. Forme objective de ce théorème.....	119
99. Application.....	121

II. — *Théorie des erreurs.*

100. Erreurs systématiques et accidentelles.....	121
101-104. Loi des erreurs accidentelles d'observation.....	122
105-107. Probabilité d'une erreur donnée.....	128

	Pages.
108. Moyenne des erreurs.....	129
109. Moyenne de leurs carrés, cubes, etc.....	130
110. Formules singulières.....	131
111. Erreur moyenne.....	131
112-113. Précision d'une série d'observations.....	132
114. Erreur moyenne et probable d'une fonction.....	134
115. Erreur moyenne déduite des observations.....	136
116. Poids des observations.....	136
117. Application.....	139
<i>III. — Combinaison des observations.</i>	
118-119. Valeur la plus probable d'une grandeur mesurée plusieurs fois....	140
120-124. Valeurs les plus probables d'un ensemble de n grandeurs, liées par des équations, $n + p$ mesures ayant été faites. Méthode des moindres carrés.....	140
<i>IV. — Recherches des lois des phénomènes. Utilisation des statistiques.</i>	
125. Représentation graphique des lois physiques.....	144
126-129. Statistiques.....	145

CHAPITRE VI.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AU TIR DES ARMES A FEU.

I. — *Tir au canon.*

130. Données initiales.....	151
131. Écart probable.....	151
132. Probabilité d'écart déterminés.....	153
133. Densité moyenne des points de chute.....	154
134. Réglage du tir en portée.....	155
135. Réglage du tir en direction.....	157
136. Répartition des points de chute autour du point moyen.....	157

II. — *Tir des fusils de chasse.*

137. Problème de la dispersion.....	159
138. Écart probable.....	160
139-142. Conséquences.....	162

CHAPITRE VII.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA THÉORIE DES ASSURANCES.

I. — *Tables de mortalité.*

143. Différentes Tables de mortalité.....	165
144-146. Problèmes.....	168
147. Relation entre l'âge et le nombre des vivants.....	170
148. Formules.....	170

II. — *Assurances en cas de vie.*

149-152. Problèmes.....	171
-------------------------	-----

TABLE DES MATIÈRES.

191

III. — *Assurances en cas de décès.*

	Pages.
153-155. Problèmes.....	174

IV. — *Quelques développements.*

156-158. Indications sur le fonctionnement des Compagnies d'assurances...	175
---	-----

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX SCIENCES MORALES
ET ÉCONOMIQUES.

159. Le Calcul des probabilités confine à la Philosophie.....	183
160. Différentes sortes d'assurances qu'on ne fait pas et qu'on pourrait faire.....	183
161. Quelles chances a un innocent d'être condamné?.....	184
TABLE DES MATIÈRES	186

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
40408 Quai des Grands-Augustins, 55.
