

Scientia



E. CARVALLO

L'Electricité

déduite de l'Expérience

et ramenée au principe des travaux virtuels

DEUXIÈME ÉDITION

19

GAUTHIER-VILLARS et C^e, Éditeurs

SCIENTIA

Juin 1907.

PHYS. MATHÉMATIQUE

n° 19.

L'ÉLECTRICITÉ

DÉDUITE DE L'EXPÉRIENCE
ET RAMENÉE AU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

PAR

E. CARVALLO

DOCTEUR ÈS SCIENCES,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ,
EXAMINATEUR DE MÉCANIQUE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR D'ÉLECTRICITÉ À L'ÉCOLE PRATIQUE D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE.

DEUXIÈME ÉDITION.

Scientia, n° 19.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	7

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES COURANTS D'INDUCTION D'APRÈS HELMHOLTZ ET MAXWELL.

1. Introduction.....	11
----------------------	----

CHAPITRE I. — Théorie d'Helmholtz.

§ 1. <i>Fonction des forces électromagnétiques. Induction magnétique.</i>	
2. Introduction.....	14
3. Loi du flux de la force magnétique.....	15
4. Fonction des forces électromagnétiques.....	16
5. Induction magnétique.....	17
6. Conclusions.....	18
§ 2. <i>Équation de l'énergie. Force électromotrice induite. Selfinduction.</i>	
7. Introduction.....	18
8. Équation de l'énergie d'après Helmholtz.....	19
9. Inertie propre d'un courant. Selfinduction.....	20
10. Force électromotrice induite.....	22
11. Force électromotrice de selfinduction.....	22
12. Conclusions.....	23
§ 3. <i>Courants en régime variable. Interprétation mécanique.</i>	
13. Introduction.....	23
14. Équation du courant induit dans un circuit sans pile. Expériences indépendantes de la selfinduction.....	24
15. Courants des piles en régime variable.....	24
16. Interprétation mécanique. Principes de l'énergie et des travaux virtuels.....	26
17. Conclusions.....	28

CHAPITRE II. — Équation générale de la Dynamique.

§ 1. <i>Théorème des travaux virtuels.</i>	Pages.
18. Introduction.....	29
19. Théorème des travaux virtuels. Équation générale de la Dynamique.....	30
20. Extension de l'idée de force, déduite de la notion d'énergie. Force électromotrice.....	31
21. Conclusions.....	32
§ 2. <i>Travail des forces d'inertie. Équations de Lagrange.</i>	
22. Introduction.....	32
23. Expression de Lagrange pour le travail des forces d'inertie.....	33
24. Théorème des forces vives.....	35
25. Modification des équations de Lagrange quand les paramètres de mobilité ne sont pas des coordonnées proprement dites.....	36
26. Conclusions.....	37

CHAPITRE III. — Théorie de Maxwell.

§ 1. <i>Les courants induits d'après Maxwell.</i>	
27. Introduction.....	38
28. Théorie de Maxwell.....	39
29. Équations de Lagrange pour les circuits filiformes, mobiles et de forme invariable.....	39
30. Comparaison des équations de Lagrange avec l'expérience.....	41
31. Équations de Lagrange pour les circuits filiformes et déformables.....	42
32. Conclusions.....	43
§ 2. <i>Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants à conducteurs mobiles.</i>	
33. Introduction.....	44
34. Forces d'inertie calculées par les équations de Lagrange... ..	44
35. Force électromotrice.....	45
36. Force pondéromotrice.....	45
37. Conclusion.....	46
§ 3. — <i>Du rôle des aimants dans la théorie de Maxwell, d'après Sarrau.</i>	
38. Introduction.....	46
39. Hypothèse d'Ampère.....	47
40. Approche d'un circuit vers un aimant permanent.....	47
41. Remarque relative à l'énergie.....	48
42. Force coercitive de l'aimant.....	49
43. Conclusions.....	50

CONCLUSIONS DE LA PREMIÈRE PARTIE.

44. Les forces électromagnétiques et magnétiques sont des forces d'inertie, comme les forces électromotrices d'induction..	51
--	----

DEUXIÈME PARTIE.

L'ÉLECTRICITÉ RAMENÉE AU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS.

	Pages.
45. Introduction.....	55
 CHAPITRE I. — Théorie de l'électricité dans les corps en repos.	
§ 1. <i>Extension des lois de Kirchhoff aux conducteurs à trois dimensions.</i>	
46. Introduction.....	58
47. Expérience de la plaque de Kirchhoff.....	58
48. Le vecteur courant et son flux.....	59
49. Extension de la première loi de Kirchhoff.....	59
50. Force contre-électromotrice de l'effet Joule.....	60
51. Force électromotrice de l'effet Peltier.....	61
52. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff.....	62
53. Conclusions.....	62
§ 2. <i>Extension des lois de Kirchhoff au régime variable et aux diélectriques.</i>	
54. Introduction.....	62
55. Charge d'un condensateur par le courant d'une pile.....	63
56. Extension de la première loi de Kirchhoff.....	64
57. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff.....	65
58. Vérifications expérimentales des lois de Kirchhoff généralisées.....	66
59. Champ électrostatique créé par les courants.....	66
60. Conclusions.....	67
§ 3. <i>Équations générales de l'électricité dans les corps en repos.</i>	
61. Introduction.....	68
62. Interprétation mécanique des deux lois fondamentales.....	68
63. Équations indéfinies dans un milieu continu (I et II).....	69
64. Équations à la surface de séparation de deux milieux (III).....	71
65. Équivalence des deux lois fondamentales avec le système des équations (I), (II) et (III).....	71
66. Comparaison de notre théorie avec celle de Maxwell.....	72
67. Conclusions.....	72
§ 4. <i>Le problème de l'électromagnétisme et l'électro-optique.</i>	
68. Introduction.....	73
69. Loi de Biot et Savart.....	74
70. Équations du courant de conduction et de la force électrique.....	75

	Pages.
71. Détermination du problème de l'électromagnétisme.....	76
72. Rapprochement avec la lumière. Constitution des diélectriques.....	76
73. Conclusions.....	77
 § 5. <i>Énergie électrique.</i>	
74. Introduction.....	77
75. Équation de l'énergie.....	78
76. Diverses espèces d'énergie électrique.....	79
77. Travail des forces appliquées. Puissance des générateurs; énergie potentielle du diélectrique.....	79
78. Travail des forces d'inertie. Énergie électrocinétique.....	80
79. Conclusions.....	81
 CHAPITRE II. — Théorie de l'électricité dans les corps en mouvement.	
§ 1. <i>La théorie de Maxwell et la roue de Barlow.</i>	
80. Introduction.....	82
81. Les équations de Lagrange mises en défaut par la roue de Barlow.....	82
82. Véritables équations de la roue de Barlow.....	84
83. Adaptation de la théorie de Maxwell à la roue de Barlow.....	87
84. Conclusions.....	88
§ 2. <i>Lois de l'inertie électrique.</i>	
85. Introduction.....	89
86. Examen critique des énoncés de Maxwell. Deux forces électromotrices d'induction.....	89
87. Trois lois de l'inertie électrique.....	90
88. Vérifications expérimentales.....	91
89. Conclusions.....	92
§ 3. <i>Électromagnétisme des corps en mouvement.</i>	
90. Introduction.....	92
91. Les deux lois fondamentales étendues aux corps en mouvement.....	93
92. Équations de l'électromagnétisme pour les corps en mouvement.....	93
93. Équation de l'énergie.....	95
94. Conclusions.....	96
 CONCLUSION GÉNÉRALE.	
95. Ma conclusion est l'idée même de ce livre.....	97

L'ÉLECTRICITÉ

DÉDUITE DE L'EXPÉRIENCE
ET RAMENÉE AU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS.

PRÉFACE.

L'idée de ce livre est dans le titre : mon but est l'étude des états électriques fixes ou variables, ma méthode est l'interprétation mécanique des lois expérimentales ; ma principale conclusion, c'est l'énoncé de deux lois fondamentales, généralisations des deux lois de Kirchhoff et qui font d'un champ électrique un système à liaisons obéissant au principe des travaux virtuels.

Sur la nécessité d'améliorer la théorie de l'électricité, tous les physiciens sont d'accord car, si l'œuvre de Maxwell a leur légitime admiration, ils reconnaissent cependant qu'elle est obscure et que ses commentateurs ne l'ont pas suffisamment élucidée.

Or, dans l'œuvre du maître, une théorie se dégage qui a mon admiration sans réserve, c'est celle des courants induits traités par les équations de Lagrange. C'est une des trop rares théories dont on peut dire qu'elle ne contient pas d'autre hypothèse que l'interprétation mécanique des lois expérimentales. Un système de circuits électriques est assimilé à un système à liaisons dont les coordonnées sont de deux sortes : d'une part les coordonnées géométriques qui fixent la forme et la position des circuits et, d'autre part, les quantités d'électricité débitées par chacun d'eux. Les équations de Lagrange appliquées à ce système donnent, dans tous les cas, les équations, en nombre égal à celui des coordonnées, qui déterminent le système en fonction du temps. Voilà la théorie

Elle est satisfaisante, mais limitée au cas particulier des conducteurs filiformes plongés dans un diélectrique homogène. Peut-elle être étendue aux manifestations électriques d'un système quelconque?

Dans la recherche de ce problème, voici les idées qui m'ont conduit :

Les phénomènes électriques satisfont-ils à une loi générale de liaison? C'est la première question qui se pose et Maxwell l'a résolue par l'affirmative, quoique d'une façon indirecte et quelque peu confuse où l'on distingue mal les parts respectives de l'observation, du calcul et de l'hypothèse. La liaison réside dans la loi du flux du courant total, analogue à la liaison d'incompressibilité de l'hydrodynamique. Peut-on l'emprunter simplement à l'expérience? Je montrerai que oui. C'est la première loi de Kirchhoff généralisée.

Et maintenant le principe des travaux virtuels s'applique-t-il au système à liaisons que forme désormais le champ électrique? Deuxième question à laquelle l'expérience répond encore oui. C'est la deuxième loi de Kirchhoff généralisée.

La base de la théorie est posée. Que dis-je? La théorie est faite, car il ne reste plus qu'à en donner les développements mathématiques. On le voit, elle est empruntée exclusivement à l'observation, sans autre hypothèse que l'interprétation mécanique des résultats observés. C'est le maximum de certitude qu'on puisse demander dans les sciences physiques.

Le plan du livre résulte de ce qu'on vient de lire. Il contient deux Parties. Dans la première, j'expose la théorie connue des phénomènes d'induction présentés par les conducteurs filiformes. Dans la deuxième Partie, j'étends mon étude à toutes les manifestations électriques d'un système quelconque. Dans les deux Parties la méthode d'exposition est la même : j'observe, j'énonce les lois expérimentales et j'en donne l'interprétation dans le langage de la Mécanique rationnelle. Si l'observation vient à manquer dans des cas difficiles, l'interprétation mécanique fait connaître la généralisation qui s'impose pour la loi observée dans les cas simples.

Quelques mots encore sur des détails d'exposition, parce qu'ils ont leur importance. Ce qui obscurcit l'œuvre de Maxwell, c'est la multiplicité des théories et des points de vue, l'absence d'unité dans les définitions, enfin le défaut de dis-

inction entre les vérités purement expérimentales et celles qu'on en déduit par la théorie. Ma principale préoccupation a été d'éviter cette obscurité. Dans ce but, j'ai isolé chaque partie du sujet dans un paragraphe spécial; chaque paragraphe a été précédé d'une introduction et suivi de conclusions où l'on enregistre les résultats obtenus. D'un autre côté, chaque notion a été définie avec précision et d'une façon unique. Cela m'a quelquefois entraîné à reproduire des choses que le lecteur connaît bien; il pourra les passer mais il pourra s'y reporter si la suite des idées lui paraît l'exiger. En principe, j'admets que l'on connaît le magnétisme, l'électrostatique et les lois élémentaires des courants (lois d'Ohm). Cependant je n'ai pas hésité à reprendre certains points de ces théories quand la clarté m'a paru l'exiger, notamment en ce qui concerne les flux.

Pour les notations, comme pour les conventions de sens et de signes, j'ai adopté celles de Maxwell. Toutefois, pour simplifier l'écriture et alléger la mémoire, j'emploie pour désigner chaque vecteur la même lettre qui sert à désigner aussi sa première composante. C'est ainsi que α désigne la force magnétique, comme la première de ses composantes α , β , γ . Il n'en résulte aucune confusion possible. J'ai aussi remplacé la notation des quaternions par celle de Grassmann qui est plus avantageuse. Il n'en résultera, je pense, pour le lecteur qu'une facilité plus grande.

Mars 1902.

Depuis 1903 les idées qu'on vient de lire servent de base aux leçons que je professe à l'École pratique d'Électricité industrielle de M. Charliat et que j'ai fixées dans un livre publié en 1904 ⁽¹⁾. Elles sont ainsi passées du domaine de la Science à celui de l'enseignement élémentaire et pratique.

Mars 1907.

(1) E. CARVALLO, *Leçons d'Électricité*. Paris, Béranger, 1904.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie des courants d'induction d'après Helmholtz et Maxwell.

INTRODUCTION.

1. La théorie généralement adoptée pour les courants d'induction est celle d'Helmholtz. Très simple dans le cas du déplacement relatif d'un aimant permanent et d'un circuit sans pile, le développement en devient d'ordinaire obscur, quelquefois erroné, toujours peu satisfaisant, pour les cas plus complexes où les circuits contiennent des piles. Une autre théorie existe qui a mon admiration sans réserve, celle de Maxwell. Pourtant elle est peu connue, encore moins appréciée, accusée même mais à tort d'inexactitude (1). Les deux théories sont si différentes qu'elles paraissent opposées au premier abord, les auteurs qui ont suivi Helmholtz regardant en général l'énergie intrinsèque des courants comme une énergie potentielle tandis que Maxwell la considère comme une énergie cinétique. L'opposition n'est qu'apparente. La preuve est dans le fait que je prends la théorie d'Helmholtz comme introduction à la théorie de Maxwell; c'est qu'en réalité la méthode d'Helmholtz, correctement exposée, ne comporte pas d'hypothèse sur la nature de l'énergie en question. Avantage, dira-t-on? Comme point de départ, oui certes, et telle est la raison qui m'a fait prendre la méthode d'Helmholtz

(1) Vaschy (*Théorie de l'Électricité*, Baudry, 1896, p. XII de l'Introduction) déclare insuffisantes les explications de Maxwell (t. II, § 573). J'ai signalé cette erreur des auteurs qui ont suivi Helmholtz dans ma théorie du monocycle et de la bicyclette (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, VI^e et VII^e Cahiers). Elle résulte clairement de deux Articles de Sarrau (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIII, p. 402 et 421; août-septembre 1901).

comme introduction à celle de Maxwell ; mais comme point d'arrivée, je ne le pense pas. Le but du physicien n'est-il pas de pénétrer la nature des choses par tous les moyens, expérience, raisonnement inductif et déductif ? La méthode d'Helmholtz consiste à écrire seulement l'équation de l'énergie, méthode consacrée, mais insuffisante, parce qu'elle ne donne qu'une équation du problème alors qu'il en faut plusieurs. C'est par une suite d'hypothèses, souvent dissimulées par de mauvais raisonnements, qu'on arrive à développer la théorie. Encore ne donne-t-elle pas une solution générale complète, nettement formulée ; ou plutôt, cette solution est celle de Maxwell. C'est ainsi que j'arrive à présenter la théorie de Maxwell comme le complément, le couronnement de la théorie d'Helmholtz. C'est, je pense, un côté intéressant de notre exposition de montrer comment, étant parti sans hypothèse dans la voie d'Helmholtz, on est conduit par les faits et l'aspect des formules à préciser dans les conclusions que voici la nature des forces et des énergies mises en jeu :

L'énergie intrinsèque des courants est une énergie cinétique. Les forces électromotrices d'induction, les forces électrodynamiques, électromagnétiques et magnétiques sont des forces d'inertie.

Ces faits établis, la théorie de Maxwell se développe sans hypothèse : c'est la simple application des équations de Lagrange. Tout y devient clair, toutes les formules y apparaissent comme nécessaires, tandis que tout est inexplicable dans la théorie d'Helmholtz, quand on regarde l'énergie des courants comme potentielle.

Prenez même le cas le plus simple, l'induction par l'approche d'un aimant permanent et d'un circuit sans pile. L'équation de l'énergie donne bien la quantité totale d'électricité induite, mais pas autre chose. Il faut une hypothèse pour trouver la force électromotrice induite. Question plus grave : Pourquoi le courant naît-il dans le circuit ? C'est un phénomène que, non seulement la théorie n'explique pas, mais qui demeure incompréhensible avec l'idée de l'énergie potentielle. Dans la théorie de Maxwell, il devient aussi naturel que les effets de la force centrifuge dans la Mécanique rationnelle.

Je l'ai dit, les équations de Lagrange sont la base de cette théorie. Pour être clair, il m'a paru nécessaire de les rappeler avant d'aborder la théorie de Maxwell. J'en ai réduit l'exposition à ce qu'il y a de plus essentiel et de mieux approprié à mon but. Il en est résulté une forme assez personnelle et suggestive qui, j'espère, ne manquera pas d'intérêt pour le lecteur.

CHAPITRE I.

THÉORIE D'HELMHOLTZ.

§ 1. — *Fonction des forces électromagnétiques.* *Induction magnétique.*

2. Introduction. — L'expérience montre que l'aiguille aimantée est soumise à un couple directeur; si elle est très petite, le couple dépend seulement de deux vecteurs : le *moment magnétique* attaché à l'aiguille et la *force magnétique* déterminée en chaque point de l'espace par les courants ou aimants environnants.

L'expérience de l'aimant brisé montre que l'aimantation est une propriété des particules comme la gravité, de sorte que le moment magnétique de l'aiguille est la résultante des moments magnétiques de ses éléments. Divisez le moment magnétique d'un élément par son volume, vous aurez le vecteur *aimantation* A au point de la matière où est pris cet élément.

La *force magnétique* α caractérise le champ où se meut l'aiguille.

Le vecteur α suffit à définir l'action du champ, non seulement sur l'aiguille aimantée, mais aussi sur un élément conducteur qui est le siège d'un courant. La loi a été découverte par Laplace pour les champs dus aux aimants, par Ampère pour les champs dus aux courants. Maxwell l'a énoncée dans sa généralité sous la forme suivante :

Un élément dx de circuit où l'intensité du courant est i et la force magnétique α subit une force appelée force électromagnétique. Elle est représentée par le même vecteur que l'aire orientée du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $i dx$ et α ; je la désigne par $[i dx \alpha]$, conformément à la notation de Grassmann.

De cette loi on déduit l'expression du travail élémentaire des forces électromagnétiques pour un déplacement du circuit, avec ou sans déformation. C'est la différentielle exacte d'une fonction dite *fonction des forces* et que nous allons établir. Mais auparavant, il nous faut rappeler quelques notions indispensables.

3. Loi du flux de la force magnétique. — La distribution du vecteur α dépend des aimants et des courants en présence; par le choix de ces éléments on peut faire varier cette distribution, mais pas d'une façon tout à fait arbitraire; elle obéit à la loi fondamentale que voici :

Le flux du vecteur α est nul à travers toute surface fermée ne rencontrant pas d'aimant.

Je vais en préciser la signification : Considérez un élément superficiel dS et le vecteur α au point où se trouve l'élément dS , puis construisez le cylindre qui a pour base dS et pour génératrice α . Ce cylindre est le *flux* de α à travers dS . Il y a intérêt à faire connaître, non seulement la grandeur de ce cylindre, mais le côté de la surface où il se trouve. Pour cela, on donne un sens à la surface et un signe au flux, comme je vais l'expliquer : Le *sens* de l'élément dS est celui dans lequel on convient de parcourir son contour; ce contour avec son sens est ce que j'appellerai le *circuit* de l'élément dS . Avec Maxwell, je conviens de porter la normale ν à cet élément dans un sens tel qu'un observateur placé les pieds sur dS et la tête vers le point ν voie son circuit parcouru de droite à gauche. *Le flux du vecteur α à travers dS sera le volume du cylindre $[dS, \alpha]$ précédé du signe $+$ si le cylindre est du même côté que la normale ν à l'élément dS , précédé du signe $-$ dans le cas contraire.* En d'autres termes, le flux du vecteur α est le produit de dS par la projection de α sur ν . Je le désignerai par $[dS, \alpha]$. Le flux de α à travers une surface finie est l'intégrale du flux élémentaire $\int [dS, \alpha]$.

Quand on considère une surface fermée S (*fig. 1*) la continuité conduit à porter la normale toujours du même côté de la surface. Si la normale est dirigée vers l'intérieur du volume compris dans la surface, l'intégrale représente le *flux*

entrant; c'est au contraire le *flux sortant*, si la normale est dirigée vers l'extérieur.

Quand on considère deux surfaces S et S_1 , limitées à un même circuit C (fig. 2), le sens des surfaces est déterminé par celui du circuit, de sorte que, si la normale v à la première est intérieure au volume enfermé par S et S_1 , la normale v_1 à la deuxième est extérieure au même volume. Le flux Φ qui sort du volume limité par SS_1 est égal à l'excès $\varphi_1 - \varphi$ du flux à travers S_1 sur le flux à travers S . Si le vecteur considéré est la force magnétique α , Φ est nul, c'est la

Fig. 1.

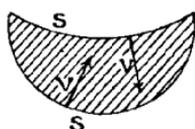
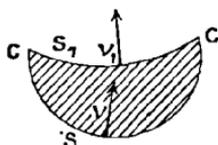


Fig. 2.



loi. Autrement dit, $\varphi_1 = \varphi$: *le flux de la force magnétique est le même à travers toutes les surfaces limitées par le même circuit*. Cet invariant, nous pouvons l'appeler *flux de la force magnétique à travers le circuit*. C'est justement la fonction des forces électromagnétiques comme je vais l'expliquer.

4. **Fonction des forces électromagnétiques.** — Les forces électromagnétiques étant proportionnelles à l'intensité (n° 2), il suffit de traiter le cas d'un circuit parcouru par le courant $i = 1$. C'est ce que j'entends par circuit électrique dans les énoncés suivants, conséquences de la loi élémentaire des actions électromagnétiques ⁽¹⁾ (n° 2).

1° Si l'élément dx d'un circuit électrique subit le déplacement infiniment petit δ , le travail de la force électromagnétique est égal au volume du parallélépipède $(dx \cdot \alpha \delta) = (\delta dx \cdot \alpha)$. C'est, d'après notre définition du n° 3, le flux du vecteur α à travers la surface (δdx) balayée par l'élément dx .

⁽¹⁾ Les démonstrations sont classiques; elles ont un caractère purement géométrique, de sorte que le lecteur peut à son gré les établir ou en admettre les résultats sans nuire pour lui à la clarté du sujet.

2° Pour un déplacement infiniment petit du circuit, avec ou sans déformation, le travail des forces électromagnétiques est égal au flux du vecteur α à travers l'aire balayée par le contour du circuit.

3° C'est, en conséquence des propriétés du flux de la force magnétique étudiées au n° 3, la différentielle du flux de α à travers le circuit.

Ainsi, le flux de la force magnétique à travers le circuit, voilà bien la fonction des forces électromagnétiques que les aimants et courants voisins exercent sur le circuit électrique.

5. Induction magnétique. — Les surfaces envisagées dans l'étude du flux magnétique à travers un circuit ne doivent pas rencontrer d'aimant, car il faut que le vecteur α s'y trouve défini. Il importe de lever cette restriction qui peut être gênante, notamment si l'aimant a la forme d'un anneau et si le circuit et l'aimant sont placés comme deux anneaux consécutifs d'une chaîne. Supposons donc qu'une surface coupe l'aimant. Le long de la section géométrique, imaginez qu'une coupure infiniment mince soit faite matériellement, mais sans changer l'aimantation des deux parties restantes de l'aimant. Les forces électromagnétiques ne sont pas changées par cette suppression infiniment petite de matière aimantée. Désormais, α est défini dans la coupure. L'inconvénient du vecteur α ainsi défini, c'est qu'il est variable avec l'obliquité de la coupure par rapport à l'aimantation; le vecteur a qui correspond à une coupure normale à l'aimantation est au contraire un invariant. Or, il fournit le même résultat pour le flux, on peut le démontrer. Il y a tout avantage à introduire le vecteur a de préférence aux autres.

Imaginez donc un vecteur a égal, en dehors de l'aimant, à la force magnétique existante α ; mais égal, au sein de l'aimant, à la force magnétique qu'on observerait dans une coupure infiniment mince normale à l'aimantation. C'est le vecteur *induction magnétique* de Maxwell. D'après sa définition il satisfait à la même loi que α , savoir : *le flux de l'induction magnétique est nul à travers toute surface fermée*. Mais tandis que, pour α , il faut considérer seulement des surfaces ne coupant pas les aimants, la loi s'applique, pour a , à toutes

les surfaces sans restriction. Le nouveau vecteur permet d'énoncer la loi de Laplace sous cette forme :

La fonction des forces électromagnétiques exercées sur un circuit électrique est égale au flux de l'induction magnétique à travers le circuit.

6. Conclusions. — 1° J'ai rappelé les définitions de moment magnétique, d'aimantation, de force magnétique, la loi élémentaire des actions électromagnétiques sous la forme donnée par Maxwell, les définitions relatives aux flux et la propriété fondamentale des flux magnétiques.

2° De la loi élémentaire j'ai conclu la fonction des forces électromagnétiques qui agissent sur un circuit électrique.

3° La généralisation de l'expression trouvée m'a conduit à la notion de l'induction magnétique de Maxwell. La loi fondamentale de ce vecteur est que son flux à travers toute surface fermée est nul. Elle permet d'énoncer la deuxième de nos conclusions ainsi :

4° La fonction des forces électromagnétiques qui s'exercent sur un circuit parcouru par un courant est égale à l'intensité du courant multipliée par le flux de l'induction magnétique à travers le circuit.

§ 2. — *Équation de l'énergie. Force électromotrice induite. Selfinduction.*

7. Introduction. — Quand un observateur déplace un circuit C , conducteur, filiforme et sans pile dans le champ d'un aimant A , un courant i se manifeste dans le circuit pendant la durée du mouvement. Il est nul avant et après. C'est le *courant d'induction*, objet du présent Chapitre. Il est soumis, comme tout courant, à deux lois d'énergie :

Première loi. — La fonction des forces électromagnétiques qui s'exercent sur le circuit est le produit $i\Phi$ de l'intensité du courant par le flux de l'induction magnétique à travers le circuit. C'est la loi énoncée au précédent paragraphe.

Deuxième loi. — Dans un circuit de résistance r parcouru par un courant i , de la chaleur se dégage appelée *chaleur de*

Joule. Elle est égale à ri^2 par unité de temps. C'est la *loi de Joule*.

De plus, le courant induit satisfait à une loi qualitative qui lui est propre : le sens du courant est toujours tel que les forces électromagnétiques s'opposent au mouvement que l'observateur imprime au circuit. C'est la *loi de Lenz*.

Voilà trois énergies en présence, le travail fourni par l'observateur, celui des forces électromagnétiques qui lui résistent, la chaleur de Joule. En outre, il y a la force vive du conducteur et nous verrons que le courant possède une énergie propre analogue à la force vive; mais ces deux énergies sont nulles quand le circuit est au repos et qu'il n'est plus parcouru par aucun courant.

Telles sont les énergies que l'expérience révèle. Si l'on admet que ce sont les seules, on peut appliquer au système : d'une part le théorème des forces vives de la Mécanique rationnelle et d'autre part le principe plus général de l'énergie. En éliminant, entre les deux équations obtenues, le travail de l'observateur, nous obtiendrons une relation entre la chaleur de Joule et le travail des forces électromagnétiques. C'est l'*équation d'Helmholtz*.

8. Équation de l'énergie, d'après Helmholtz. — Je considère le système formé par l'aimant et le conducteur. Il part du repos et arrive au repos. La force vive n'a pas changé. Donc la somme des travaux des forces appliquées au système est nulle. Ce sont le travail des forces électromagnétiques \mathfrak{E} et celui de l'observateur \mathfrak{E}_1 :

$$(1) \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 = 0.$$

Je laisse dissiper la chaleur de Joule; le système revient à la température initiale; son énergie dès lors n'a pas changé. Donc la somme des énergies fournies au système est nulle. Ce sont le travail de l'observateur \mathfrak{E}_1 et la chaleur de Joule changée de signe — J . Quant au travail des forces électromagnétiques, il ne doit pas entrer en compte, puisque ces forces sont des forces intérieures qui s'exercent entre l'aimant et le circuit :

$$(2) \quad \mathfrak{E}_1 - J = 0.$$

Qu'on retranche membre à membre l'équation (2) de l'équation (1), on obtient :

$$(3) \quad \mathcal{E} + J = 0.$$

Les valeurs de \mathcal{E} et J sont définies par les deux lois énoncées au n° 7; ce sont

$$\mathcal{E} = \int id\Phi, \quad J = \int ri^2 dt.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(4) \quad \int id\Phi + \int ri^2 dt = 0.$$

C'est l'équation d'Helmholtz; elle montre que $\int id\Phi$ est négatif. En d'autres termes, les forces électromagnétiques s'opposent au mouvement; c'est la loi de Lenz.

De ce que les deux intégrales de l'équation (4) sont égales au signe près, rien n'autorise à conclure que les éléments correspondants des intégrales soient égaux. De fait, ils ne le sont pas, parce que le courant i est doué d'une sorte d'inertie; au début le travail de l'opérateur est en partie dépensé à vaincre cette inertie, il est pour cette raison supérieur à la chaleur de Joule; à la fin l'énergie emmagasinée se dépense en chaleur de Joule qui l'emporte à son tour sur le travail fourni par l'opérateur.

9. Inertie propre d'un courant. Selfinduction. — Elle est mise en évidence par l'expérience suivante (1):

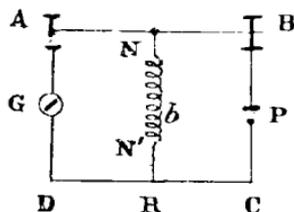
Un double circuit ANBCRDA (*fig. 3*) a sa branche ANB formée d'une clef mobile autour du point N et qui permet d'établir le courant soit en A, soit en B. Les trois branches parallèles contiennent respectivement :

- BC, une pile P,
- NR, une bobine de fil b ,
- AD, un galvanomètre G.

(1) Cette forme de l'expérience de Faraday est due à Cornu. Elle a provoqué les critiques de Potier. Il eût été facile de lui substituer la forme de Faraday que préférerait Potier; c'est ce que j'ai fait dans mes *Leçons d'Électricité*. Mais à cause du caractère schématique de cet opuscule, il m'a paru préférable de conserver ici la forme plus intuitive de Cornu.

On établit le courant dans le circuit de droite, puis on abaisse la clef A, de façon à couper le circuit de droite et à établir celui de gauche. On constate dans le galvanomètre G

Fig. 3.



une impulsion qui est de sens contraire à la déviation que le galvanomètre recevrait de la pile si les contacts étaient établis simultanément en A et en B. Cette impulsion montre que le courant, dans la bobine *b*, a continué quelque temps après que la pile P a cessé d'agir. La grandeur de l'impulsion dépend de la constitution de la bobine *b*; si elle est enroulée à la façon naturelle, de son extrémité N à son extrémité N', la déviation est d'autant plus grande que la bobine présente plus de tours; de plus, l'effet est augmenté si l'on arme la bobine d'un noyau de fer doux; mais qu'on enroule le fil en double à partir de son milieu M (fig. 4) et de façon que les

Fig. 4.



deux extrémités N et N' soient au même bout de la bobine, alors la déviation de G sera nulle. On aperçoit ainsi que l'inertie du courant dépend du flux d'induction qui traverse son circuit en raison du courant lui-même. C'est la *self-induction*.

10. Force électromotrice induite. — L'espèce d'inertie que nous venons de constater s'oppose à l'égalité des éléments correspondants des intégrales de l'équation d'Helmholtz; mais si, à un moment donné, le régime est établi, à ce moment les éléments sont égaux et l'on a

$$(1) \quad -id\Phi = ri^2 dt,$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad -\frac{d\Phi}{dt} = ri.$$

Si l'on se rappelle la formule d'Ohm $e = ri$, on voit que cette quantité (2) est une force électromotrice. C'est la *force électromotrice induite*. Elle a été calculée en supposant le courant i établi; mais elle existe indépendamment de lui. On peut le démontrer au moyen d'une dynamo en circuit ouvert, en réunissant les deux pôles à un électromètre; ou, plus pratiquement, en opposant à la dynamo, en circuit fermé, une batterie d'accumulateurs. La dernière expérience montre de plus que la force électromotrice induite est indépendante des autres forces électromotrices qui peuvent se trouver dans le même circuit; les vérifications expérimentales abondent. La loi exprimée par la formule

$$(3) \quad e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

a donc un degré de généralité supérieur à celui de la démonstration. On peut, dans une autre voie, constater sa généralité ainsi: au lieu d'approcher du circuit induit un aimant permanent depuis une position très éloignée, on crée sur place un électro-aimant équivalent par le passage d'un courant. L'impulsion totale $\int edt = \int ri dt$ est la même. On peut le vérifier à l'aide d'un galvanomètre balistique; il donne la même déviation dans les deux cas. Ainsi, l'impulsion totale d'induction dépend seulement de la variation du flux d'induction Φ , comme le veut la formule (3).

11. Force électromotrice de selfinduction. — Si l'on admet la complète généralité de la formule (3), on en peut déduire

la force électromotrice due à l'induction d'un courant sur lui-même, ainsi : soit L le flux d'induction venant du courant lui-même et qui traverse son circuit quand l'intensité est égale à $+1$; c'est le coefficient de selfinduction; sa valeur ne dépend que de la forme du circuit; de plus il est essentiellement positif, c'est une conséquence de la règle du bonhomme d'Ampère sur le sens du champ magnétique dû à un courant et de nos conventions de sens et de signe sur le flux d'induction magnétique (n° 3). Pour l'intensité i , le flux est $\Phi = Li$. La force électromotrice due à la variation de i est donc, si l'on admet la généralité de la formule (3),

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Cette force électromotrice est de signe contraire à $\frac{di}{dt}$: elle s'oppose à l'établissement du courant et à son arrêt. En résumé, elle se comporte comme une force d'inertie.

Telle est la force électromotrice de selfinduction à laquelle conduit la formule (3) quand on attribue à celle-ci une généralité complète.

12. Conclusions. — 1° J'ai formé l'équation intégrale de l'énergie relative au déplacement d'un circuit parti du repos et ramené au repos en présence d'un aimant.

2° J'ai rendu manifeste une propriété des courants analogue à l'inertie et qu'on appelle *selfinduction*. Elle s'oppose à la différentiation de l'équation intégrale en régime variable.

3° La différentiation est permise quand la dérivée de l'intensité est nulle; elle conduit à la notion et à l'expression de la force électromotrice induite. L'expression, quoique démontrée seulement dans ce cas particulier, est pourtant générale. L'expérience en témoigne.

§ 3. — *Courants en régime variable.* *Interprétation mécanique.*

13. Introduction. — La loi générale de l'induction, rappelée dans le paragraphe précédent, s'énonce ainsi : *La force électromotrice induite dans un circuit filiforme est égale à la*

dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique à travers ce circuit. Comme application, je vais établir les équations des courants en régime variable et en donner l'interprétation dynamique.

14. Équation du courant induit dans un circuit sans pile. Expériences indépendantes de la selfinduction. — Le flux de l'induction magnétique à travers le circuit est la somme de deux termes : Li , venant du courant lui-même, et Φ , venant des autres causes du champ magnétique. La force électromotrice d'induction est la dérivée de cette somme changée de signe $-\mathbf{L} \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}$. D'après la loi d'Ohm, cette force électromotrice est égale à ri . L'équation du courant est donc

$$-\mathbf{L} \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = ri.$$

Je suppose que le circuit est déplacé sans déformation; puis je considère un instant antérieur au déplacement et un instant postérieur d'un temps suffisant pour que le courant ait pris fin; i est nul aux deux limites. Le premier terme disparaît donc dans l'intégration. Il reste

$$-\Delta\Phi = r \int i dt.$$

Or $\int i dt$, c'est la quantité q d'électricité débitée par le circuit; $-\Delta\Phi$, c'est la diminution du flux d'induction. Donc :

La quantité totale d'électricité induite égale le quotient, par la résistance du circuit, de la diminution du flux d'induction à travers ce circuit.

Comme le galvanomètre balistique enregistre justement q , cette formule donne lieu à des vérifications aisées, notamment par des expériences de zéro : par exemple, si l'on crée un flux par l'excitation d'un électro-aimant, puis qu'on l'annule par le déplacement du circuit ou de l'électro-aimant, le galvanomètre ne bouge pas.

15. Courants des piles en régime variable. — Conservant

les notations précédentes, je considère un circuit muni de piles et d'électrolytes dont la force électromotrice résultante est E . Il faut y ajouter la force électromotrice due à l'induction du courant sur lui-même $-L \frac{di}{dt}$ pour avoir la force électromotrice totale $E - L \frac{di}{dt}$. Elle est égale à ri , c'est la loi d'Ohm. L'équation du courant est donc

$$(I) \quad E - L \frac{di}{dt} - ri = 0.$$

J'ai supposé le courant isolé de toute variation magnétique autre que celle qui vient du courant lui-même.

Soient maintenant deux courants en présence. Je distingue les données des deux circuits par les indices 1 et 2. Aux termes qui correspondent à ceux de l'équation (I) il faut ajouter pour chaque courant la force électromotrice induite par les variations de l'autre courant : soit M_{12} le flux d'induction qui traverse le premier circuit quand le second est parcouru par le courant $i = +1$. Ce coefficient dépend uniquement de la forme de la figure offerte par l'ensemble des deux circuits. Il est le même quand on intervertit les rôles des deux circuits ($M_{12} = M_{21}$); c'est une conséquence de la loi de Laplace relative au champ magnétique d'un courant. D'après cela, la force électromotrice induite par le deuxième courant sur le premier est $-M_{12} \frac{di_2}{dt}$, et la force électromotrice induite par le premier courant sur le deuxième est $-M_{12} \frac{di_1}{dt}$. Les équations simultanées des deux courants sont donc

$$(II) \quad \begin{cases} (1) & E_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} - r_1 i_1 = 0, \\ (2) & E_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} - r_2 i_2 = 0. \end{cases}$$

En écrivant de même les équations relatives à un nombre quelconque de courants fixes en présence, on a autant d'équations que d'inconnues. Si les courants sont mobiles et de forme invariable, les coefficients d'induction mutuelle M sont des

fonctions des coordonnées de position. Il faudra ajouter aux équations des courants les termes qui viennent de la variation de M . D'autre part, il faudra écrire les équations du mouvement des circuits mobiles sous l'action des forces d'inertie, des forces électromagnétiques et des forces appliquées d'origine purement mécanique. On aura encore un système d'équations en nombre égal à celui des inconnues.

16. Interprétation mécanique. Principes de l'énergie et des travaux virtuels — Pour interpréter l'équation (I), je dois d'abord choisir la définition la mieux appropriée de l'intensité i . J'adopte $i = \frac{dq}{dt}$, vitesse de dissolution du zinc dans la pile ou de décomposition d'un électrolyte situé dans le circuit. La quantité q sera donc regardée comme la *coordonnée du circuit*; et elle a bien le caractère d'une coordonnée, car l'état du circuit est connu quand on donne q et $\frac{dq}{dt}$. Trouver q en fonction du temps est le problème correspondant à celui de trouver la coordonnée x d'une machine à liaisons complètes. Avec cette introduction de la coordonnée q , l'équation (I) s'écrit

$$E - L \frac{d^2q}{dt^2} - r \frac{dq}{dt} = 0.$$

L'analogie de cette équation avec celle d'une machine simple est manifeste : E correspond aux forces appliquées, puissance et résistance, $-L \frac{d^2q}{dt^2}$ à la force d'inertie, $-r \frac{dq}{dt}$ à la force de frottement. Comme en Mécanique, *la puissance, la résistance, la force d'inertie et les résistances passives se font équilibre*. Comme en Mécanique, on formera l'équation de l'énergie en multipliant les deux membres de l'équation d'équilibre dynamique par la différentielle du *déplacement électrique* $dq = i dt$, J'obtiens ainsi

$$E dq - d \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dt = 0.$$

$E dq$ est l'excès de l'énergie fournie par les générateurs sur

l'énergie absorbée par les récepteurs; $\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$ est l'énergie électrocinétique de Maxwell, analogue à la force vive. Comme la force vive, elle est proportionnelle au carré de la vitesse $\frac{dq}{dt}$; comme la force vive d'un volant, elle s'oppose à la mise en marche et à l'arrêt, s'emmagasinant dans la première période pour se dépenser dans la deuxième. Enfin, $ri^2 dt$ est l'énergie dépensée en chaleur de Joule par la résistance passive ri analogue au frottement :

Le travail de la puissance égale celui de la résistance augmenté de l'accroissement d'énergie cinétique et de l'énergie dépensée en chaleur par l'effet des résistances passives.

Ainsi, un circuit unique, muni d'une seule coordonnée q , est entièrement assimilé à une machine à liaisons complètes.

De même, un système de deux ou plusieurs circuits fixes ou mobiles, de forme variable ou invariable, présentant ainsi un nombre de coordonnées supérieur à 1 est assimilable à un système à liaisons incomplètes. Pour ne pas compliquer les explications, je me borne à examiner le cas, développé au n° 15, d'un système de deux circuits fixes. Les équations (II) du système doivent être assimilées aux deux équations de Lagrange qui correspondent aux coordonnées q_1 et q_2 . Et, en effet, elles expriment que le travail total des forces électromotrices est nul pour les deux déplacements virtuels δq_1 et δq_2 . Comme en Mécanique, l'équation de l'énergie s'obtient en multipliant la première équation par dq_1 , la deuxième par dq_2 et ajoutant, ce qui donne

$$(3) \quad (E_1 - r_1 i_1) dq_1 + (E_2 - r_2 i_2) dq_2 = dT,$$

avec

$$(4) \quad \begin{cases} dT = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) dq_1 + \left(M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) dq_2, \\ T = \frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + 2 M_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2]. \end{cases}$$

Le premier membre de l'équation (3) représente le travail

des forces appliquées : puissances, résistances, résistances passives; donc l'expression T doit être assimilée à l'énergie cinétique, c'est l'*énergie électrocinétique* de Maxwell; l'expression de cette énergie se trouve être justement égale à la fonction des forces électromagnétiques qui s'exercent sur les particules des deux circuits. Il en résulte que les forces électromagnétiques doivent être assimilées à des forces d'inertie, aussi bien que les forces électromotrices d'induction elles-mêmes.

17. Conclusions. — 1° J'ai montré comment la loi générale de la force électromotrice induite permet de former les équations d'un système de courants fixes. J'ai indiqué qu'elle permettrait de résoudre aussi le problème des courants mobiles.

2° J'ai donné l'interprétation dynamique d'un tel système : il est assimilable à un système à liaisons de la Mécanique rationnelle, obéissant au principe des travaux virtuels. On peut lui appliquer les équations de Lagrange moyennant les interprétations suivantes :

a. Les coordonnées q de Lagrange sont les quantités d'électricité débitées par les circuits.

b. L'énergie électrocinétique est la fonction des forces électromagnétiques qui s'exercent sur les particules des circuits.

c. Les forces résultantes appliquées Q de Lagrange sont les forces électromotrices $E - ri$ résultant des générateurs, des récepteurs et de la résistance de Joule. Les forces électromotrices d'induction et les forces électromagnétiques sont des forces d'inertie.

Ces principes admis comme point de départ constituent la théorie de Maxwell. C'est cette théorie que nous devons maintenant exposer dans sa généralité; mais il nous faut auparavant rappeler le principe des travaux virtuels et les équations de Lagrange.

CHAPITRE II.

ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE.

§ 1. — *Théorème des travaux virtuels.*

18. Introduction (1). — Les organes d'une machine réagissent les uns sur les autres; ainsi, un solide poussé par un autre est déformé par la pression jusqu'à ce que la force élastique due à la déformation équilibre la pression agissante. Quand la déformation est insensible, le travail de la réaction élastique est aussi insensible. J'appelle :

Forces de liaison les forces élastiques qui limitent les déformations à des valeurs assez faibles pour que leurs travaux soient négligeables;

Système à liaisons un système dont les forces élastiques sont des forces de liaison;

Déplacements compatibles avec les liaisons ceux pour lesquels les déformations qui produisent les forces de liaison sont nulles.

Par suite de ces définitions, les travaux des forces de liaison sont nuls pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons (1).

Dans un système naturel, les points matériels sont innombrables; il faut donc renoncer à écrire toutes leurs équations d'équilibre sous l'action des forces appliquées, des forces d'inertie et des forces élastiques. Le problème se simplifie si l'on néglige les déformations des pièces. La position du système dépend alors d'un petit nombre de paramètres. Par exemple, la position d'un solide qui peut glisser le long d'un axe et tourner autour de cet axe dépend de deux paramètres

(1) A dessein, j'exclus de mon étude les cas où les liaisons sont unilatérales ou dépendent du temps.

q et q_1 , glissement et rotation; 2 est le *degré de liberté* du système. Deux équations suffisent pour faire connaître les deux paramètres en fonction du temps, pourvu qu'elles ne contiennent pas les forces inconnues de liaison, mais seulement les forces appliquées au système et supposées données. Ces équations sont fournies par la méthode suivante.

19. Théorème des travaux virtuels. Équation générale de la Dynamique. — D'après le principe de d'Alembert, chaque particule du système est en équilibre sous l'action de sa force d'inertie, des forces données qui lui sont appliquées et des forces élastiques inconnues. Le travail total de ces forces est donc nul pour tout déplacement arbitraire des particules du système. Un tel déplacement est dit *virtuel*. Le travail des forces de liaison n'est pas nul pour tous ces déplacements, notamment pour ceux qui déformeraient les pièces solides; mais il est nul pour les déplacements compatibles avec les liaisons. Donnons donc au système le déplacement virtuel correspondant à l'ensemble de valeurs δq et δq_1 des deux paramètres choisis pour définir sa position. Le travail total des forces est de la forme $P \delta q + P_1 \delta q_1$. J'écris qu'il est nul :

$$(1) \quad P \delta q + P_1 \delta q_1 = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit le déplacement arbitraire ($\delta q, \delta q_1$); elle entraîne donc les deux équations nécessaires

$$(2) \quad P = 0, \quad P_1 = 0.$$

Celles-ci ne renferment pas les forces de liaison, puisque le travail des liaisons est nul, le déplacement ($\delta q, \delta q_1$) étant compatible avec les liaisons. Dès lors, les équations (2) déterminent les coordonnées variables q et q_1 en fonction du temps. Ce sont donc les équations du mouvement. Ainsi :

Les équations du mouvement s'obtiennent en écrivant que le travail total des forces appliquées et d'inertie est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

C'est le *théorème des travaux virtuels*. L'équation (1)

qu'il fournit est *l'équation générale de la Dynamique*. Les équations (2), écrites sous une forme un peu spéciale, portent le nom de Lagrange.

Les équations d'équilibre s'en déduisent en faisant

$$q' = q'' = q'_1 = q''_1 = 0.$$

Dans ce cas particulier de l'équilibre, P et P₁ ne dépendent plus que des forces appliquées.

Nous avons admis que α était le degré de liberté du système. S'il est n , la méthode donne aussi bien les n équations qui déterminent les n paramètres q dont dépend la position du système. Pour simplifier les écritures et le langage, nous continuerons à supposer que α est le degré de liberté. Cela ne nuira pas à la généralité des raisonnements et des formules.

20. Extension de l'idée de force déduite de la notion d'énergie. Force électromotrice. — Le travail des forces pour le déplacement δq est proportionnel à δq , savoir $P \delta q$. Les dimensions du coefficient P par rapport aux grandeurs fondamentales (longueur, temps et masse) dépendent des dimensions de la coordonnée q de façon que $P \delta q$ ait les dimensions d'une énergie. Que q soit une longueur, P sera une force proprement dite, égale au produit d'une masse par une accélération. Que q soit un angle, P est un moment, il a les dimensions d'une énergie. Quoique ces deux quantités, force et moment, n'aient pas les mêmes dimensions par rapport aux grandeurs fondamentales, on ne peut leur refuser une communauté d'origine et de nature : que P soit une force ou un moment, c'est le coefficient du déplacement δq dans l'expression de l'énergie; c'est le quotient de l'énergie par la variation δq de la coordonnée. Dans les deux cas, P mesure le poids des forces du système (momentum), leur tendance au déplacement δq . C'est pourquoi les moments jouent le même rôle dans l'étude des rotations que les forces dans l'étude des translations.

Que maintenant q soit la quantité d'électricité débitée par un circuit, c'est le *déplacement électrochimique* de Faraday-Maxwell, comme on le verra plus loin. Le facteur P mesure la tendance au déplacement δq de cette coordonnée; il mérite

donc le nom de *force électromotrice*. D'après cela, la force électromotrice d'un générateur ou d'un récepteur d'énergie électrique est bien définie par le coefficient de δq dans l'expression de l'énergie qu'il fournit ou qu'il absorbe : c'est le quotient par δq de l'énergie mise en jeu. Cette définition de la force électromotrice nous semble la seule qui ne donne pas lieu à des contradictions et à des difficultés inextricables, notamment en ce qui concerne les forces électromotrices de contact et l'effet Peltier (1).

21. Conclusions. — 1° J'ai considéré un système à liaisons comme le cas limite d'un système naturel où les déformations élastiques donnent lieu à des travaux insensibles.

2° J'en ai déduit le théorème des travaux virtuels et l'équation générale de la Dynamique.

3° J'ai montré comment la notion d'énergie conduit à une extension de l'idée de force qui comprend la force électromotrice.

§ 2. — Travail des forces d'inertie. Équations de Lagrange.

22. Introduction. — Dans le § 1, nous avons vu que l'équation générale de la Dynamique a pour premier membre le travail des forces pour le déplacement ($\delta q, \delta q_1$), savoir $P \delta q + P_1 \delta q_1$. Dans ce travail figure celui de l'inertie qui mérite une étude spéciale parce qu'il présente souvent de grandes difficultés. Qu'il s'agisse seulement d'une machine formée de pièces solides, dont on connaît bien la constitution particulière, le calcul direct des forces d'inertie par l'intégrale de ses éléments est déjà très difficile et peut devenir inextricable. Mais qu'il s'agisse de systèmes où l'électricité entre en jeu, le calcul direct du travail des forces d'inertie devient impossible à cause de notre ignorance sur la nature de l'électricité. Lagrange a fait sur cet objet une importante découverte en donnant des formules qui permettent de calculer commodément le travail des forces

(1) *Congrès de Physique* de 1900. Rapports de MM. Arrhénius, Christiansen et L. Poincaré.

d'inertie dès qu'on connaît l'expression de la force vive en fonction des coordonnées du système et de leurs vitesses, sans qu'il soit nécessaire de connaître autre chose du mécanisme étudié. Or c'est justement le cas des courants électriques dans les circuits filiformes. On comprend dès lors le grand intérêt que présentent les équations de Lagrange dans l'étude de l'électricité. Malheureusement leur application comporte une restriction tout à fait importante (n° 25) : il faut que les paramètres de mobilité soient de véritables coordonnées permettant de fixer l'état du système dès qu'on connaît ces paramètres à l'époque t . Ce n'est pas le cas des paramètres naturels pour l'étude des roulements en général et notamment du cerceau. Ça ne paraît pas être non plus le cas de l'expérience de la roue de Barlow (n° 83). Cette remarque est essentielle dans ce Livre. Elle explique pourquoi les équations de Lagrange appliquées à la roue de Barlow conduisent à deux résultats contraires aux faits, et elle rétablit l'accord de la théorie avec l'expérience.

23. Expression de Lagrange pour le travail des forces d'inertie.

— Soient M une particule du système, m sa masse. Je suppose que ses coordonnées x , y , z dépendent seulement de deux paramètres q et q_1 ; en d'autres termes je suppose que la donnée de q et q_1 fait connaître les positions de tous les points du système.

La variation δq du paramètre q entraîne pour le point M un déplacement dont les composantes sont $\frac{dx}{dq} \delta q$, $\frac{dy}{dq} \delta q$, $\frac{dz}{dq} \delta q$. Comme les composantes de la force d'inertie sont $-m x''$, $-m y''$, $-m z''$, le travail dû à l'inertie de la particule M pour le déplacement δq est

$$-m \left(x'' \frac{dx}{dq} + y'' \frac{dy}{dq} + z'' \frac{dz}{dq} \right) \delta q.$$

Le travail total des forces d'inertie est la somme des travaux étendue à toutes les particules du système, savoir

$$(1) \quad I \delta q = - \Sigma m \left(x'' \frac{dx}{dq} + y'' \frac{dy}{dq} + z'' \frac{dz}{dq} \right) \delta q.$$

C'est la présence des accélérations x'' , y'' , z'' qui rend le calcul difficile et que Lagrange évite par la transformation suivante; elle consiste dans l'intégration par parties

$$(2) \quad x'' \frac{dx}{dq} = \left(x' \frac{dx}{dq} \right)' - x' \left(\frac{dx}{dq} \right)'.$$

L'hypothèse est que x est fonction seulement des paramètres q et q_1 , lesquels sont fonctions du temps t . Dès lors, dans le second membre de la formule (2), on peut intervertir l'ordre des dérivations par rapport à q et par rapport à t ; le second terme peut donc être transformé ainsi :

$$(3) \quad x' \left(\frac{dx}{dq} \right)' = x' \frac{dx'}{dq} = \frac{d \frac{1}{2} x'^2}{dq}.$$

Je vais maintenant montrer que, dans le premier terme, on peut remplacer $\frac{dx}{dq}$ par $\frac{dx'}{dq'}$. Pour cela, je remarque que x ne dépend de t que par l'intermédiaire de q et q_1 ; on a donc

$$(4) \quad x' = \frac{dx}{dq} q' + \frac{dx}{dq_1} q'_1.$$

Cette formule montre que x' est fonction linéaire de q' et q'_1 , et que, au point de vue purement formel, la dérivée de x' par rapport à q' est $\frac{dx}{dq}$. On a donc bien

$$\frac{dx}{dq} = \frac{dx'}{dq'}.$$

Dès lors, dans le second membre de la formule (2), le premier terme est la dérivée de

$$x' \frac{dx'}{dq'} = \frac{d \frac{1}{2} x'^2}{dq'},$$

et la formule (2) s'écrit

$$(5) \quad x'' \frac{dx}{dq} = \left(\frac{d \frac{1}{2} x'^2}{dq'} \right)' - \frac{d \frac{1}{2} x'^2}{dq}.$$

Si l'on fait la même transformation sur les deux autres termes de l'expression (1), on obtient

$$\begin{aligned} x'' \frac{dx}{dq} + y'' \frac{dy}{dq} + z'' \frac{dz}{dq} \\ = \left[\frac{d \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dq'} \right]' - \frac{d \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dq}. \end{aligned}$$

Il suffit de multiplier par m pour mettre en évidence, dans le second membre, la force vive de la particule M . La somme relative à toutes les particules met donc en évidence l'énergie cinétique T du système; ainsi

$$(6) \quad \Sigma m \left(x'' \frac{dx}{dq} + y'' \frac{dy}{dq} + z'' \frac{dz}{dq} \right) = \left(\frac{dT}{dq'} \right)' - \frac{dT}{dq}.$$

C'est (au signe près) la forme particulièrement avantageuse que Lagrange a donnée à cette partie de P qui vient de l'inertie et que j'ai désignée par I [éq. (1)]. Si, avec Lagrange, j'appelle Q la partie de P qui vient des forces appliquées, j'obtiens pour les équations du mouvement [éq. (2), n° 19]

$$(7) \quad \begin{cases} Q = \left(\frac{dT}{dq'} \right)' - \frac{dT}{dq}, \\ Q_1 = \left(\frac{dT}{dq'_1} \right)' - \frac{dT}{dq_1}. \end{cases}$$

Ce sont les *équations de Lagrange*.

24. Théorème des forces vives. - Si, dans l'équation des travaux virtuels,

$$(1) \quad P \delta q + P_1 \delta q_1 = 0,$$

on remplace le déplacement virtuel arbitraire ($\delta q, \delta q_1$) par le déplacement réellement pris $dq = q' dt, dq_1 = q'_1 dt$, le premier membre représente le travail total des forces appliquées et d'inertie. Or, on le sait, le travail des forces d'inertie est égal à la diminution de la force vive. L'équation

$$(2) \quad P dq + P_1 dq_1 = 0$$

signifie donc que le travail des forces appliquées égale l'accroissement de la force vive.

25. **Modification des équations de Lagrange quand les paramètres de mobilité ne sont pas des coordonnées proprement dites** (1). — Je prends pour exemple le mouvement du cerceau.

Les paramètres de mobilité naturels sont l'angle de chute θ , l'angle de conversion γ et l'angle du roulement σ (2). Leurs vitesses θ' , γ' , σ' suffisent à déterminer la vitesse x' d'une coordonnée cartésienne d'une particule quelconque du système. Pourtant, x ne peut pas être calculé en fonction de θ , γ , σ ; qu'on vous dise en effet que le cerceau est parti de Paris avec les angles θ_0 , γ_0 , qu'il a roulé de σ et que les premiers angles sont devenus θ et γ , vous ne saurez dire si le cerceau est arrivé à Bordeaux, Lyon ou tout autre lieu. Il faudra qu'on vous fasse savoir en outre quelle a été la suite des valeurs corrélatives de γ et σ pour que vous puissiez marquer la trajectoire du point de contact avec le sol et déterminer la position actuelle du cerceau. Pour conclure, les paramètres γ et σ ne sont pas des coordonnées proprement dites; x n'est pas fonction seulement de θ , γ , σ ; il est fonction de θ et de la suite des valeurs corrélatives de γ et σ . En d'autres termes, l'expression de dx en fonction de $d\theta$, $d\gamma$ et $d\sigma$ n'est pas intégrable. Reportez-vous au n° 23 et à l'hypothèse qu'on y a soulignée. La transformation du dernier terme de la formule (2) de $x' \left(\frac{dx}{dq} \right)'$ en $x' \frac{dx'}{dq}$ est encore permise pour la variable θ , mais non pour les variables γ et σ ; pour θ , l'équation correspondante de Lagrange est encore valable; pour γ et σ , l'équation type de Lagrange doit être remplacée par celle-ci :

$$Q = \left(\frac{dT}{dq} \right)' - \Sigma m \left[x' \left(\frac{dx}{dq} \right)' + y' \left(\frac{dy}{dq} \right)' + z' \left(\frac{dz}{dq} \right)' \right].$$

(1) E. CARVALLO, *Théorie du monocycle et de la bicyclette*, n° 71 et 72 (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, VI^e et VII^e Cahiers).

(2) θ , angle du plan du cerceau avec le sol;

γ , angle de la tangente au point le plus bas avec la position initiale de cette droite;

σ , angle dont a roulé le cerceau depuis l'origine.

Telles sont les modifications qu'il faut apporter aux équations de Lagrange quand les paramètres de mobilité ne sont pas des coordonnées proprement dites.

26. Conclusions. — 1° J'ai donné l'expression découverte par Lagrange pour le travail des forces d'inertie.

2° J'ai montré comment les équations de Lagrange doivent être corrigées quand les paramètres q ne sont pas des coordonnées proprement dites.

Nous sommes en mesure maintenant d'aborder l'étude des courants induits d'après Maxwell.

CHAPITRE III.

THÉORIE DE MAXWELL.

§ 1. — *Les courants induits d'après Maxwell.*

27. **Introduction.** — Au Chapitre II j'ai établi les équations de Lagrange. Elles sont en nombre égal à celui des paramètres q qui définissent le système et ont pour type

$$Q = \left(\frac{dT}{dq'} \right)' - \frac{dT}{dq}.$$

Pour pouvoir les écrire, il faut :

1° Définir les coordonnées q qui fixent la situation du système;

2° Connaître l'expression de l'énergie cinétique T en fonction des q et des q' ;

3° Connaître les coefficients Q .

Avec ces données, on peut former les équations de Lagrange. Elles déterminent les q en fonction du temps.

Q , je le rappelle, c'est le coefficient de δq dans l'expression du travail fourni au système dans le déplacement δq ; avec l'extension que j'ai donnée à l'idée de force, c'est la force résultante appliquée et tendant au déplacement δq (n° 20).

Quant à T , c'est l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \Sigma m v^2$; c'est une fonction homogène et du second degré, *forme quadratique*, des vitesses q' ; pour deux variables, c'est une expression de la forme $\frac{1}{2} (A q'^2 + 2B q' q'_1 + A_1 q_1'^2)$.

Les coefficients A et B sont des fonctions des q , déterminées pour chaque système et qui peuvent d'ailleurs se réduire à des constantes.

Tels sont les résultats relatifs aux équations de Lagrange. D'autre part, au Chapitre I, j'ai déduit des lois expérimentales des courants induits les équations simultanées des courants dans deux circuits fixes en présence, et j'ai reconnu que ce sont précisément les deux équations de Lagrange relatives au système, moyennant les assimilations que je rappelle (n° 17).

a. Les coordonnées q sont les deux quantités d'électricité débitées par les circuits.

b. L'énergie cinétique est la fonction des forces électromagnétiques $T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$.

c. Les forces appliquées Q sont les forces électromotrices $E - ri$ résultant des générateurs, des récepteurs et de la résistance due à l'effet Joule.

Voilà pour les circuits fixes. Abordons maintenant les circuits mobiles.

28. Théorie de Maxwell. — Pour étudier les courants dans les circuits mobiles, déformables ou non, on pourrait suivre la même marche analytique qu'au Chapitre I : écrire l'expression des lois expérimentales et constater que les équations obtenues sont les équations de Lagrange relatives au système. Avec Maxwell, je vais suivre la marche inverse : j'admets *a priori* que les équations de Lagrange sont applicables; je les applique, puis je compare les formules aux faits. S'il y a discordance, la théorie doit être rejetée; s'il y a concordance, elle doit être acceptée.

Comme au Chapitre I, je ne traiterai que les cas les plus simples. Le raisonnement n'en sera pas moins général; le langage et l'écriture en seront allégés et l'esprit reposé par un exemple concret facile à concevoir.

29. Équations de Lagrange pour les circuits filiformes mobiles de forme invariable. — Comme au n° 15, je considère deux circuits C_1 et C_2 et je conserve les mêmes notations; de plus, je suppose que C_1 soit mobile d'un mouvement de translation rectiligne. Quelles sont les grandeurs à considérer dans les équations de Lagrange?

a. Coordonnées q . — Ce sont d'abord les coordonnées de

courant q_1 et q_2 (n° 27), puis la coordonnée de mobilité x du circuit C_1 .

b. Énergie cinétique T. — Quand le circuit C_1 est immobile, nous avons vu (n° 16) que l'on doit prendre pour énergie cinétique $T_c = \frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + 2M_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2]$. C'est la fonction des forces électromagnétiques; comme cette énergie est due exclusivement aux mouvements électriques, Maxwell l'appelle *électrocinétique*. Dans l'expression T_c , les intensités i_1 et i_2 sont égales respectivement aux vitesses q'_1 et q'_2 des déplacements électriques q_1 et q_2 ; L_1 et L_2 dépendent seulement de la forme des circuits, ce sont des constantes. Le coefficient M_{12} dépend en outre de la position relative des circuits, il est fonction de x .

Au terme T_c , nous devons ajouter la force vive T_m de la matière du circuit C_1 ; si m est sa masse, c'est $\frac{1}{2} m x'^2$; soit au total

$$T = T_m + T_c = \frac{1}{2} [m x'^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M_{12} i_1 i_2].$$

Une particularité a frappé Maxwell. L'expression de T contient bien des termes aux carrés des vitesses x'^2 , i_1^2 , i_2^2 , puis le produit $i_1 i_2$ des vitesses électriques.

Pourquoi ne contiendrait-elle pas des termes en $x' i_1$ et $x' i_2$? Nous reviendrons sur ce point (§ 2).

c. Forces appliquées Q. — Pour les déplacements électriques δq_1 et δq_2 , ces forces sont $Q_1 = E_1 - r_1 i_1$, $Q_2 = E_2 - r_2 i_2$ (n° 17); pour le déplacement matériel δx , c'est la force F que la main de l'observateur, par exemple, applique au circuit C_1 pour le déplacer. Quant aux forces électromotrices d'induction d'une part et aux forces électromagnétiques d'autre part, il n'y a pas lieu de les introduire dans les expressions des Q , car elles sont regardées comme des forces d'inertie (n° 17).

D'après ces données, on a pour les premiers membres des équations de Lagrange

$$Q = F, \quad Q_1 = E_1 - r_1 i_1, \quad Q_2 = E_2 - r_2 i_2;$$

pour les seconds membres,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dx}\right)' &= mx'' & \frac{dT}{dx} &= \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2, \\ \left(\frac{dT}{dq_1}\right)' &= \frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M_{12} i_2], & \frac{dT}{dq_1} &= 0, \\ \left(\frac{dT}{dq_2}\right)' &= \frac{d}{dt} [M_{12} i_1 + L_2 i_2], & \frac{dT}{dq_2} &= 0. \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange sont, en résumé,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad F = mx'' - \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2, \\ (2) \quad E_1 - r_1 i_1 = \frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M_{12} i_2], \\ (3) \quad E_2 - r_2 i_2 = \frac{d}{dt} [M_{12} i_1 + L_2 i_2]. \end{array} \right.$$

Veut-on en déduire celle de l'énergie? Il suffira de les ajouter après les avoir multipliées respectivement par dx , dq_1 , dq_2 . On obtient, après simplifications,

$$(II) \quad F dx + (E_1 - r_1 i_1) dq_1 + (E_2 - r_2 i_2) dq_2 = dT.$$

30. Comparaison des équations de Lagrange avec l'expérience. — Ainsi les équations (1) satisfont bien au principe de la conservation de l'énergie; elles déterminent le mouvement du système, tant au point de vue purement mécanique qu'au point de vue de l'électricité, en faisant connaître les coordonnées x , q_1 , q_2 en fonction du temps. Sont-elles d'accord avec l'expérience? Oui, car elles donnent la force électromagnétique et la force électromotrice induite, révélées par l'expérience, comme je vais l'expliquer.

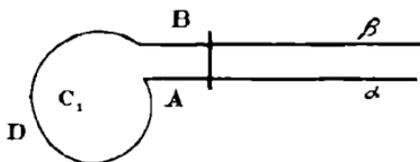
1° Force électromagnétique. — L'équation (1) signifie qu'à la force appliquée F s'ajoutent deux forces qui lui font équilibre, la force d'inertie $-mx''$ et la force $\frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2$, c'est la dérivée par rapport à x de $T_e = \frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M_{12} i_1 i_2]$. Or T_e est la fonction des forces électromagnétiques, donc

$\frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2$ est bien la force électromagnétique donnée par l'expérience et étudiée par Ampère.

2° *Force électromotrice induite.* — L'équation (2), par exemple, signifie qu'à la force électromotrice appliquée $E_1 - r_1 i_1$ s'ajoute une force électromotrice qui lui fait équilibre $-\frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M_{12} i_2]$. Or $L_1 i_1 + M_{12} i_2$ c'est (nos 14 et 15) le flux de l'induction magnétique à travers le circuit C_1 ; $-\frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M_{12} i_2]$ est la dérivée changée de signe de ce flux. C'est bien la force électromotrice induite vérifiée par l'expérience (nos 9 et 10).

31. **Équations de Lagrange pour les circuits filiformes et déformables.** — Considérons encore deux circuits C_1 et C_2 ; mais, au lieu de supposer le circuit C_1 mobile et de forme invariable, supposons qu'il soit constitué ainsi : une partie D est fixe, ouverte et prolongée par deux rails α et β ; un élément AB fait le pont entre ces deux rails et peut être déplacé par une translation parallèle aux rails (*fig. 5*). Les notations

Fig. 5.



seront les mêmes qu'au n° 29, sauf que m et x représenteront la masse et la coordonnée de l'élément mobile AB; F sera la force que l'observateur, par exemple, applique à l'élément AB. L'énergie cinétique du système est encore

$$T = T_m + T_e = \frac{1}{2} [m x'^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M_{12} i_1 i_2].$$

La seule différence est que, maintenant, L_1 est fonction

de x , comme M_{12} . Les trois équations de Lagrange sont

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad F = mx'' - \frac{1}{2} \left[\frac{dL_1}{dx} i_1^2 + 2 \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2 \right], \\ (2) \quad E_1 - r_1 i_1 = \frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M_{12} i_2], \\ (3) \quad E_2 - r_2 i_2 = \frac{d}{dt} [M_{12} i_1 + L_2 i_2]. \end{array} \right.$$

Comme aux n^{os} 29 et 30, ces équations déterminent les inconnues x , q_1 , q_2 . Elles conduisent à l'équation de l'énergie et aux lois expérimentales des forces électromagnétiques et des forces électromotrices induites.

32. Conclusions. — J'ai précisé les assimilations qui permettent de regarder un système de conducteurs filiformes parcouru par des courants comme un système à liaisons de la Mécanique rationnelle, savoir :

1^o Les *coordonnées* q sont de deux sortes, les coordonnées géométriques qui fixent la forme et la position des circuits, puis les quantités d'électricité débitées par chacun d'eux.

2^o L'*énergie cinétique* T contient deux parties, la force vive des parties mobiles du circuit, et la fonction des forces électromagnétiques.

3^o Les *forces appliquées* Q sont de deux sortes, les forces purement mécaniques, comme l'effort de la main de l'observateur, puis la force électromotrice $E - ri$ qui vient des générateurs, des récepteurs et de la résistance de Joule.

4^o Avec ces assimilations, j'ai appliqué les équations de Lagrange aux circuits filiformes mobiles, déformables ou non.

Elles déterminent le système en fonction du temps, satisfont au principe de l'énergie et sont d'accord avec l'expérience pour donner deux espèces de forces, les forces électromagnétiques et les forces électromotrices induites.

Ces forces doivent être regardées comme des forces d'inertie.

§ 2. — *Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants à conducteurs mobiles.*

33. **Introduction.** — Au n° 29 j'ai traité le cas de deux circuits C_1 et C_2 parcourus par des courants $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$, $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$; l'un est fixe, l'autre présente une mobilité dont la coordonnée est x . J'ai admis que l'énergie cinétique T est la somme de deux termes, la force vive T_m de la matière du circuit mobile et la fonction des forces électromagnétiques T_e , soit au total

$$T = T_m + T_e = \frac{1}{2} [m x'^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M_{12} i_1 i_2].$$

Cette forme quadratique de x' , i_1 , i_2 contient bien les carrés des trois variables et le produit $i_1 i_2$ des intensités. Pourquoi ne contiendrait-elle pas aussi les termes

$$A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2 = T_{me}$$

aux produits d'une vitesse par une intensité? Telle est la question que nous avons posée au n° 29 et que nous allons maintenant examiner. Bien entendu, j'admettrai que les coefficients A_1 et A_2 peuvent dépendre de x , mais non pas de q_1 et q_2 , comme j'ai été conduit à l'admettre pour M_{12} (n° 15). Suivant la méthode de Maxwell, je suppose que les termes $A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2$ existent; des forces d'inertie en résultent qu'on calcule par les formules de Lagrange. Sont-elles vérifiées par expérience? l'existence de T_{me} sera établie. Si au contraire les forces d'inertie calculées n'existent pas, c'est que les coefficients A_1 et A_2 de T_{me} sont nuls, comme nous l'avons admis au § 1.

34. **Forces d'inertie calculées par les équations de Lagrange** — Les forces d'inertie qui viennent de la partie de l'énergie cinétique

$$T_{me} = A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2$$

sont au nombre de trois, correspondantes aux trois déplace-

ments δx , δq_1 , δq_2 ; ce sont, au signe près,

$$(\delta x) \left(\frac{dT_{me}}{dx'} \right)' - \frac{dT_{me}}{dx} = (A_1 i_1 + A_2 i_2)' - \frac{d}{dx} (A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2),$$

$$(\delta q_1) \left(\frac{dT_{me}}{dq'_1} \right)' = (A_1 x')',$$

$$(\delta q_2) \left(\frac{dT_{me}}{dq'_2} \right)' = (A_2 x')'.$$

La première est une force, au sens ordinaire du mot, *force pondéromotrice*; les deux autres sont des *forces électromotrices*; nous allons examiner ces deux espèces de forces.

35. **Force électromotrice.** — D'après son expression

$$(\delta q_1) \left(\frac{dT_{me}}{dq'_1} \right)' = (A_1 x')',$$

la force électromotrice est indépendante des intensités et, par suite, du champ magnétique; elle ne dépend que du mouvement du conducteur. Or, aucun phénomène d'induction n'a jamais été observé dans les conducteurs en mouvement en dehors de tout champ magnétique. Il faut donc conclure à la non-existence des termes T_{me} dans l'expression de l'énergie.

Cette preuve expérimentale a une très grande valeur à cause de l'extrême sensibilité des galvanomètres qui permettent de constater des forces électromotrices extraordinairement petites.

Quoiqu'elle suffise et soit bien supérieure à celle qui résulte de la considération de la force pondéromotrice, examinons cependant cette force.

36. **Force pondéromotrice.** — D'après son expression

$$(\delta x) \left(\frac{dT_{me}}{dx'} \right)' - \frac{dT_{me}}{dx} = (A_1 i_1 + A_2 i_2)' - \frac{d}{dx} (A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2),$$

la force pondéromotrice contient deux parties :

$$F_1 = A_1 i_1 + A_2 i_2,$$

$$F_2 = \left(\frac{dA_1}{dx} x' i_1 + \frac{dA_2}{dx} x' i_2 \right) - \left(\frac{dA_1}{dx} x' i_1 + \frac{dA_2}{dx} x' i_2 \right).$$

La deuxième partie F_2 se trouve nulle ici, par la réduction des deux parenthèses, mais cette circonstance particulière est due au fait qu'on a pris un système doué d'une seule coordonnée de mobilité x . S'il y en a plus d'une, la même réduction n'a pas lieu; des termes restent qui sont proportionnels à la fois aux vitesses x' et aux intensités i . Pour les rendre sensibles, il faut employer à la fois de grandes vitesses et de grandes intensités. Leur caractère est qu'elles doivent changer de sens quand on change celui des vitesses ou des intensités.

La première partie F_1 donne des forces proportionnelles aux vitesses de variation des intensités; il faut les chercher à la fermeture et à l'ouverture des circuits. Elles doivent changer de signe quand on passe de l'une à l'autre de ces deux opérations. Maxwell a tenté deux expériences destinées à mettre en évidence respectivement F_1 et F_2 ; elles ont donné un résultat négatif. Comme elles ont un caractère moins probant que celles des forces électromotrices (n° 35), à cause de leur difficulté, je me dispenserai de les exposer ici.

37. Conclusion. — L'énergie cinétique d'un système de circuits mobiles, déformables ou non, se compose de la force vive de la matière des circuits et de l'énergie électrocinétique qui est la fonction des forces électromagnétiques appliquées aux circuits; elle ne contient pas de termes aux produits des vitesses des circuits par les intensités des courants qui les parcourent.

§ 3. — *Du rôle des aimants dans la théorie de Maxwell, d'après Sarrau.*

38. Introduction. — De sa théorie des courants induits, d'après les équations de Lagrange, Maxwell a exclu les aimants, circonstance curieuse, presque paradoxale; car l'expérience où l'on approche un aimant d'un courant a servi de base à la théorie d'Helmholtz, laquelle a conduit à la théorie de Maxwell. Comment celle-ci ne comprendrait-elle pas l'expérience fondamentale?

Malgré l'apparence, cela n'a rien d'anormal; en effet,

l'équation de l'énergie appliquée à l'expérience en question n'a pas établi la loi générale de l'induction; elle a seulement permis de deviner la loi par un raisonnement inductif hardi. La loi est vérifiée par l'expérience et pour cette raison nous l'avons admise. C'est fort bien, mais alors elle est empruntée à des expériences directes, non pas aux conséquences théoriques de l'expérience fondamentale. Celle-ci n'a pas à être comprise dans la théorie et il serait injuste de reprocher une telle lacune à Maxwell.

Pourtant, la question est des plus importantes et mérite d'être abordée, sinon résolue; j'examinerai le cas des aimants permanents et celui des aimants temporaires.

39. Hypothèse d'Ampère. — Les champs produits par les aimants ne se distinguent en rien des champs produits par les courants (n° 2); d'autre part, l'aimantation est une propriété particulière (n° 2). Ces deux lois conduisent à l'*hypothèse d'Ampère*: chaque particule aimantée est assimilable à un petit courant fermé dont le plan est normal au vecteur aimantation. Dès lors l'énergie électrocinétique d'un système de courants et d'aimants se compose de trois parties: la première vient des courants seuls, on en connaît l'expression; la deuxième vient de la combinaison des courants avec les aimants; on doit admettre que c'est la somme des produits des intensités par les flux d'induction d'origine magnétique qui les traversent; la troisième partie vient des aimants seuls. Dire qu'un aimant est permanent, c'est dire que les courants particuliers sont d'intensité constante.

40. Approche d'un circuit vers un aimant permanent. — Je conserve les notations antérieures (n° 29). En outre, je désigne par Φ le flux d'induction dû à l'aimant à travers le circuit et par $\frac{1}{2}A$ l'énergie électrocinétique de l'aimant; d'après l'hypothèse d'Ampère, A est une constante et Φ dépend seulement de la position du système est

$$T = \frac{1}{2} [m x'^2 + L i^2 + 2 i \Phi + A].$$

Si E est la force électromotrice de la pile du circuit et F la force appliquée par la main de l'observateur, par exemple, les équations de Lagrange correspondantes à δx et δq sont

$$(\delta x) \quad F = mx'' - i \frac{d\Phi}{dx},$$

$$(\delta q) \quad E - ri = L i' + \Phi'.$$

Elles déterminent les deux inconnues x et i en fonction du temps. Telle est la théorie donnée par Sarrau (1).

Les équations (δx) et (δq) sont bien vérifiées par l'expérience : la première donne la force électromagnétique, la deuxième donne la force électromotrice d'induction. A cet égard, la théorie est satisfaisante ; mais une difficulté se présente, relative à l'énergie et qu'il convient d'étudier.

41. Remarque relative à l'énergie. — Voici un raisonnement erroné que je crois utile de signaler parce qu'il servira d'introduction au raisonnement exact du numéro suivant qui met en évidence certains caractères des aimants permanents, notamment la force coercitive :

Les équations (δx) et (δq) du n° 40 forment le système des deux équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les deux inconnues x et q du problème. N'en peut-on pas conclure, d'après le n° 24, qu'il satisfait au principe de l'énergie ?

Non. Reprenons, en effet, le calcul qui sert à passer des équations de Lagrange à celle de l'énergie : il faut multiplier la première par $dx = x'dt$, la deuxième par $dq = idt$. J'obtiens de cette façon

$$F dx + (E - ri) dq = d \left[\frac{1}{2} mx'^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right].$$

Le travail des forces appliquées n'est pas égal à l'accroissement de l'énergie cinétique.

L'erreur ? La voici : les équations (δx) et (δq) forment bien le système des deux équations de Lagrange qui déterminent les deux inconnues du problème physique, savoir x et q ; mais, si telles sont les équations et les inconnues du problème

(1) SARRAU, *Comptes rendus*, t. CXXXIII, 2 septembre 1901, p. 421.

physique, ce ne sont pas là *toutes les variables et les équations du système mécanique* : celles-ci sont innombrables, chaque particule ayant au moins une *coordonnée électrique* correspondante au courant qui la parcourt, d'après Ampère. Ainsi, le système $[(\delta x), (\delta q)]$ est incomplet au point de vue mécanique; il n'a donc pas à satisfaire au principe de l'énergie. Pour retrouver l'équation de l'énergie, il est nécessaire de faire entrer en ligne de compte les équations de l'aimantation. C'est ce que nous allons faire.

42. Force coercitive de l'aimant. — Pour éviter la complication des courants particuliers, j'assimile l'aimant à un courant unique $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$. Quelles doivent être les particularités de notre courant fictif ?

1° L'intensité i_1 est constante, puisque l'aimant est supposé permanent.

2° La force électromotrice appliquée E_1 varie de façon à maintenir l'intensité i_1 sensiblement constante.

3° La résistance r_1 est nulle, car les aimants ne donnent lieu à rien qui ressemble à la chaleur de Joule.

4° L'énergie de selfinduction $\frac{1}{2} L_1 i_1^2$ est constante; l'énergie d'induction mutuelle est $i\Phi = Mii_1$; M est fonction de x seulement.

En résumé, le courant fictif offre les caractères d'une machine parfaite, sans frottements et munie d'un régulateur idéal.

Dans ces conditions, le système étudié de l'aimant et du courant a pour équations, au nombre de trois,

$$(\delta x) \quad F = mx'' - ii_1 \frac{dM}{dx},$$

$$(\delta q) \quad E - ri = Li' + (Mi_1)',$$

$$(\delta q_1) \quad E_1 = (Mi)'. \quad .$$

Si je multiplie les trois équations respectivement par $dx = x'dt$, $dq = i dt$, $dq_1 = i_1 dt$, j'obtiens l'équation

$$F dx + (E - ri) dq + E_1 dq_1 = d \left[\frac{1}{2} mx'^2 + \frac{1}{2} Li^2 + M ii_1 \right].$$

Elle signifie que le travail des forces est bien égal à l'accroissement de l'énergie cinétique. Le principe de l'énergie est maintenant vérifié. Mais il ne l'est que grâce à la force électromotrice E_1 ; c'est la *force coercitive* imaginée par les physiciens. Sa valeur est fournie par la formule (δq_1) , dès qu'on connaît la valeur $M \equiv \frac{\Phi}{i_1}$, donnée qui caractérise l'aimant.

Si l'aimant, au lieu d'être permanent, varie avec les courants en présence, le courant fictif i_1 ne peut plus être regardé comme constant; il y a plus, l'aimantation de chaque particule varie à sa façon et il est impossible de remplacer les courants particuliers, même fictivement, par un courant unique. Le sujet offre dès lors une grande complexité; il n'a pas été abordé jusqu'ici. Quoi qu'il en soit, les deux équations (δx) et (δq) demeurent vraies; mais elles ne suffisent plus à déterminer le système qui dépend d'inconnues innombrables: il reste à établir les équations relatives aux coordonnées électriques correspondantes à l'aimantation des particules. Cette remarque a une très grande importance, elle domine toute la deuxième Partie de ce Livre.

43. Conclusions. — 1° Maxwell a exclu les aimants de sa théorie des courants induits, et on ne peut logiquement lui en faire un grief.

2° Sarrau admet que les aimants sont formés de courants particuliers; c'est l'hypothèse d'Ampère. Avec cette hypothèse, les équations de Lagrange, appliquées à un système d'aimants permanents et de courants, donnent des résultats conformes à l'expérience; elles déterminent toutes les inconnues, coordonnées de position et coordonnées électriques.

3° Ces équations ne conduisent à celle de l'énergie que si l'on y ajoute les équations des aimants. Celles-ci déterminent la force coercitive des aimants permanents.

4° Les équations du fer doux n'ont pas été abordées jusqu'ici, mais les équations de Lagrange relatives aux coordonnées de position et aux coordonnées électriques peuvent toujours être écrites: ce sont des équations nécessaires, mais non suffisantes du problème.

CONCLUSIONS DE LA PREMIÈRE PARTIE.

44. Les forces électromagnétiques et magnétiques sont des forces d'inertie, comme les forces électromotrices d'induction. — Nous avons vu comment la théorie d'Helmholtz, aidée de l'expérience, nous a conduits à ces deux vérités que les forces électromotrices d'induction sont des forces d'inertie et que l'énergie propre d'un système de courants

$$\frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + 2 M_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2]$$

est une énergie cinétique. Ces résultats nous ont conduits à la théorie de Maxwell dans laquelle les forces électromagnétiques apparaissent, elles aussi, comme des forces d'inertie. Voilà une importante découverte de Maxwell. Elle est malheureusement encore méconnue, et, pour cette raison, je veux m'y arrêter dans mes conclusions. Pourquoi est-elle méconnue? Peut-être à cause du nom de *potentiel électrodynamique* donné à cette énergie changée de signe, nom qui fait penser à une énergie potentielle. Pourtant, qu'on admette ou non la théorie si remarquable de Maxwell, il est difficile de refuser à l'énergie propre des courants le caractère cinétique : comme celle des volants, elle s'emmagasine pendant la mise en marche pour se dépenser en travail dans la période d'arrêt. Or, cette énergie c'est précisément la fonction des forces électromagnétiques. La conséquence nécessaire, c'est que les forces électromagnétiques sont des forces d'inertie. Pour l'avoir méconnu, les physiciens ont souvent fait des fautes de signe sur les forces électromotrices induites, dans le développement de la théorie d'Helmholtz. D'après les idées d'Ampère adoptées par Sarrau, on doit aussi regarder les forces magnétiques comme forces d'inertie.

Chose remarquable, il suffit d'examiner les forces électromagnétiques et magnétiques pour leur reconnaître les caractères

tères des forces d'inertie. Quelle est en effet la loi de Laplace qui, nous l'avons vu, est la clef de toute la théorie ?

Un pôle magnétique austral exerce sur un élément de courant une force perpendiculaire au plan de l'élément et du pôle, proportionnelle à la masse du pôle, à la longueur et à l'intensité de l'élément du courant, au sinus de l'angle de l'élément avec la droite qui le joint au pôle, inversement proportionnelle au carré de la distance. Le sens de la force est tel qu'il porte l'élément sur la gauche d'un observateur tournant le dos au pôle et traversé par le courant des pieds à la tête.

Loi fictive, étrange, à peu près inacceptable comme loi élémentaire : fictive, puisqu'elle introduit la notion de pôle magnétique isolé, objet irréalisable; étrange, puisqu'elle donne une force qui n'est pas dirigée suivant la droite qui joint les éléments. Il faudrait, en vertu du principe de l'égalité de l'action à la réaction, supposer l'action de l'élément de courant sur le pôle appliquée, non pas à l'endroit lui-même où est le pôle, mais à l'endroit où est l'élément de courant. De pareilles forces sont inacceptables en tant que forces appliquées agissant d'élément à élément.

Reprenons au contraire l'expression que nous avons donnée de la loi de Laplace transformée.

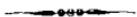
La force qui s'exerce sur un élément de circuit ds traversé par un courant i , en un point, où le champ magnétique est α , est représentée par le même vecteur qui représente l'aire orientée du parallélogramme $[ids, \alpha] = -[\alpha, ids]$, c'est, si l'on veut, la vitesse changée de signe de l'extrémité du vecteur ids dans une rotation représentée par le vecteur α . Dans cette expression, on reconnaît, à un facteur près 2, celle de la force centrifuge composée $-2[\Omega V_r]$ où le vecteur Ω représente la rotation d'entraînement, V_r la vitesse relative. Y a-t-il harmonie des signes dans cette double assimilation? Certes, et voici comment : ids étant assimilé à une vitesse, il nous faut choisir un sens pour cette vitesse. Choisissons le sens même du courant. Quel est alors le sens de la rotation Ω qu'on doit assimiler au vecteur α ? Pour le voir, examinons quelle est, au centre d'un petit courant circulaire C , la force magnétique due à ce courant. Elle est perpendiculaire au plan de C et dans un sens tel qu'elle voit le courant C tourner en sens

inverse des aiguilles d'une montre; c'est l'axe de la rotation C comptée comme en astronomie, et aussi d'après les conventions de Maxwell. Le sens de Ω est donc le sens même de α . Ainsi, un élément de courant ids , placé dans un champ magnétique α , est assimilé à un point matériel, animé de la vitesse relative $V_r = ids$, dans un milieu dont la rotation d'entraînement est $\Omega = \alpha$. La force centrifuge composée est de sens contraire à l'accélération centrifuge composée, c'est-à-dire à la vitesse de l'extrémité du vecteur $V_r = ids$ due à la rotation $\Omega = \alpha$. C'est justement le sens de la force électromagnétique qui agit sur l'élément ids . En résumé, la force électromagnétique présente bien tous les caractères, grandeur, direction et sens d'une force centrifuge composée, c'est-à-dire d'une force d'inertie. Il en est de même de la force électrodynamique qui ne se distingue pas de la force électromagnétique.

Nous avons choisi pour V_r le sens du courant i ; si l'on avait choisi le sens contraire, cela aurait entraîné un changement dans le sens de Ω et le résultat eût été le même.

Les assimilations dont nous venons de vérifier la cohérence se poursuivent jusque dans les forces magnétiques. Le gyroscope tend toujours à placer son axe parallèlement à celui de la terre; de même l'aimant tend à placer son axe d'aimantation parallèlement au champ magnétique. Il y a plus, le couple directeur a la même expression dans les deux cas: il est représenté par le parallélogramme orienté construit sur les deux vecteurs correspondants, rotation de la terre et rotation du gyroscope d'une part, champ magnétique et vecteur d'aimantation d'autre part.

Ainsi, les forces magnétiques, comme les forces électromagnétiques et les forces électrodynamiques, comme aussi les forces électromotrices d'induction, présentent bien tous les caractères de forces d'inertie.



DEUXIÈME PARTIE.

L'électricité ramenée au principe des travaux virtuels.

INTRODUCTION.

45. Dans la première Partie de ce travail, nous avons vu comment l'interprétation des lois expérimentales conduit à regarder un système de courants qui circulent dans des conducteurs filiformes comme un système à liaisons satisfaisant au principe des travaux virtuels de la mécanique rationnelle.

1° Les coordonnées q de Lagrange sont de deux sortes, les coordonnées géométriques qui fixent la forme et la position des circuits, puis les quantités d'électricité débitées par chacun d'eux.

2° L'énergie cinétique T contient deux parties, la demi-force vive des parties mobiles des circuits, puis la fonction des forces électromagnétiques.

3° Les forces appliquées Q sont de deux sortes, les forces purement mécaniques comme l'effort de la main de l'observateur, puis les forces électromotrices $E - ri$ qui viennent des générateurs, des récepteurs et de l'effet Joule.

4° Quant aux forces électromagnétiques et aux forces électromotrices d'induction, elles doivent être regardées comme des forces d'inertie et se calculent au moyen de T par les formules de Lagrange, comme les forces d'inertie de la mécanique rationnelle.

Tels sont les principes de la théorie de Maxwell. Il importe de le bien remarquer, ils ont à la base la loi de Faraday : *Dans un circuit unifilaire, la quantité d'électricité débitée q (quantité d'électrolyte décomposée) est la même dans toutes les parties du circuit.* Là est la loi fondamentale de liaison qui caractérise les phénomènes électriques, liaison

analogue à celle des fluides incompressibles et que, pour cette raison, on peut appeler *liaison d'incompressibilité*.

La loi des courants dérivés de Faraday est une première extension de cette loi; loi généralisée encore par Kirchhoff dans cet énoncé :

Dans un réseau de conducteurs filiformes parcourus par des courants, la somme algébrique des intensités des courants qui aboutissent à un point quelconque du réseau est nulle.

Maxwell a compris que cette loi est plus générale encore et peut être étendue aux conducteurs à trois dimensions d'abord, puis aux diélectriques grâce à la conception géniale du *courant de déplacement*. Je montrerai comment les lois expérimentales qu'on observe dans la charge d'un condensateur par le courant d'une pile conduisent de la façon la plus naturelle et la plus simple aux résultats de Maxwell.

La loi d'incompressibilité ayant dès lors une généralité complète, le principe des travaux virtuels doit être applicable à tous les déplacements électriques imaginables, non seulement à travers les conducteurs, mais aussi à travers les diélectriques, pourvu qu'ils soient compatibles avec la liaison d'incompressibilité. Or, des déplacements compatibles avec l'incompressibilité ne peuvent avoir lieu que suivant des contours fermés. La loi suivante s'impose donc :

Le travail total des forces électriques (appliquées et d'inertie) pour un déplacement électrique δq suivant un contour fermé quelconque est nul.

En particulier, effectuez le déplacement δq suivant un des circuits fermés qu'on peut emprunter à un réseau filiforme, vous aurez la deuxième loi de Kirchhoff :

La somme des forces électromotrices (dus aux générateurs, aux récepteurs et à l'effet Joule) qu'on rencontre sur le contour est nulle.

Ainsi, c'est l'extension des deux lois de Kirchhoff que nous poursuivons et qui doit ramener l'électricité au principe des travaux virtuels. Je puiserai cette généralisation dans la seule expérience. Les deux lois générales établies, celle de l'incompressibilité, et celle des travaux virtuels, j'indiquerai les dé-

veloppements analytiques qui en résultent pour les corps en repos et pour les corps en mouvement.

Pour les corps en mouvement, une difficulté inattendue surgit :

L'expérience de la roue de Barlow prouve que les équations de Lagrange ne sont pas applicables aux conducteurs à trois dimensions. Pourtant, l'idée fondamentale de ce livre demeure : je montre que la roue de Barlow offre une remarquable analogie avec le roulement du cerceau ; les formules de Lagrange cessent d'être applicables, mais le principe des travaux virtuels reste vrai. Nouvelle difficulté : tandis que la mécanique rationnelle permet encore de calculer les forces d'inertie du cerceau, par les formules que j'ai données par exemple, ce calcul est empêché, pour la roue de Barlow, par notre ignorance sur la constitution élémentaire des courants électriques. Il faut emprunter les forces d'inertie électrique à l'expérience. L'étude des lois expérimentales de l'inertie électrique doit précéder les équations de l'électrodynamique comme l'étude des moments d'inertie précède la dynamique des corps solides.

CHAPITRE I.

THÉORIE DE L'ÉLECTRICITÉ DANS LES CORPS EN REPOS.

§ 1. — *Extension des lois de Kirchhoff aux conducteurs à trois dimensions.*

46. Introduction. — Le problème de la distribution des courants en régime permanent dans un réseau de conducteurs filiformes muni de générateurs et de récepteurs donnés est entièrement résolu par les deux lois de Kirchhoff :

Première loi. — La somme algébrique des intensités des courants qui aboutissent à un point du réseau est nulle.

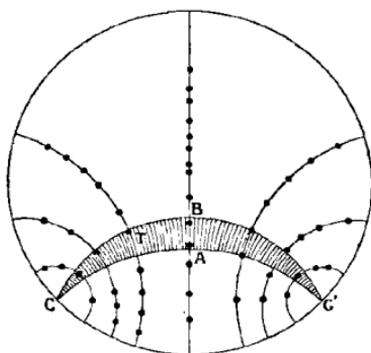
Deuxième loi. — La somme algébrique des forces électromotrices des générateurs, des récepteurs et de Joule qu'on rencontre sur un contour fermé faisant partie du réseau est nulle.

47. Expérience de la plaque de Kirchhoff. — Avec Kirchhoff, considérons (*fig. 6*) une plaque métallique mince CC' de forme circulaire; puis joignons les deux pôles de la pile à deux points C et C' de la circonférence. Le courant se répand dans toute la plaque. On peut le constater au moyen de l'électromètre ou du galvanomètre. Dans cette expérience, les points qui donnent le même voltage dessinent sur la plaque des *lignes équipotentielles* ou *lignes de niveau*.

Traçons une trajectoire orthogonale CAC' des lignes de niveau et coupons la plaque par un trait de canif suivant cette ligne; cette opération ne change rien au débit de la pile ni à la distribution des potentiels. Le contraire aurait lieu pour une section oblique aux lignes de niveau. Pour cette raison, la ligne CAC' est dite *ligne de courant*. Par des lignes de courant, débitons la plaque en conducteurs filiformes; on les

appelle *tubes de courant*, parce que, dans la plaque non coupée, les courants se distribuent comme dans le réseau filiforme obtenu par la coupure de la plaque. On comprend dès lors que les lois de Kirchhoff s'appliquent à la plaque. Elles s'étendent ensuite aux conducteurs à trois dimensions, car si, au lieu d'une plaque, on considère une masse fluide, l'exploration des points de même voltage fournit des surfaces équipotentielles dont les trajectoires orthogonales découpent encore le milieu en tubes de courant.

Fig. 6.



Développons donc les conséquences de l'expérience de la plaque de Kirchhoff.

48. **Le vecteur courant et son flux.** — En chaque point de la plaque, le courant offre deux qualités : sa *direction* qui est celle de la ligne de courant et sa *densité* qui est l'intensité du courant par unité de section droite du tube de courant en ce point.

Maxwell est ainsi conduit à représenter le courant par un vecteur p , appelé *vecteur courant*. Il a pour direction celle du courant et pour longueur sa densité. Qu'on vous donne le vecteur p en un point, vous connaîtrez l'intensité dans un tube de courant ayant pour section un élément de surface quelconque $d\sigma$ passant par ce point : ce sera le flux $[p d\sigma]$ du vecteur p à travers l'élément $d\sigma$.

49. **Extension de la première loi de Kirchhoff.** — Je consi-

dère un point O d'un réseau; je l'enveloppe dans une surface S . Dire que la somme algébrique des intensités i des courants qui aboutissent au point O est nulle, c'est dire que le flux total des courants p à travers la surface S est nul.

Sous cette forme, il est visible que la loi est générale, car, si l'on trace une surface sur la plaque de Kirchhoff, les tubes de courant qui y entrent en sortent avec le même débit, de façon que le flux entrant total est nul. Ainsi :

Le flux total de courant à travers une surface fermée quelconque tracée dans le système est nul.

50. Force contre-électromotrice de l'effet Joule. — Elle est toujours résistante, c'est-à-dire contraire au courant comme les forces de frottement. Quant à sa grandeur, nous allons la calculer par la loi d'Ohm. Considérons un élément cylindrique MN ainsi défini : ses génératrices parallèles au courant p ont pour longueur ds ; sa section droite est $d\sigma$. Par définition du vecteur p , l'élément $d\sigma ds$ est parcouru dans le sens des génératrices par un courant d'intensité

$$i = p d\sigma.$$

D'après les lois d'Ohm, il offre une résistance r proportionnelle à sa longueur ds , inversement proportionnelle à sa section $d\sigma$ et à sa conductibilité C

$$r = \frac{ds}{C d\sigma}.$$

La force contre-électromotrice de l'effet Joule a pour valeur absolue

$$ri = \frac{ds}{C d\sigma} \times p d\sigma = \frac{p}{C} ds.$$

Cette expression nous apparaît comme le produit du vecteur $\frac{p}{C}$ par la longueur ds . Mais l'élément ds a été pris dans la direction même du vecteur p . Quelle expression doit-on prendre si l'élément $ds = MP$ est oblique à p ? La réponse est dans l'exploration de la plaque de Kirchhoff par l'électromètre (n° 47) : déplacez en effet le contact avec l'électromètre le long de la ligne équipotentielle depuis le point P

jusqu'au point N où la ligne de courant p issue de M rencontre la ligne équipotentielle; l'électromètre ne sera pas influencé par ce déplacement de P en N. Donc la force contre-électromotrice de Joule est $\frac{P}{C} \times MN$. C'est le produit du vecteur $\frac{P}{C}$ par la projection de ds sur lui, produit que nous désignons avec Grassmann, par $\frac{P}{C} | ds$. La force contre-électromotrice de Joule d'un point A à un point B d'un conducteur est donc représentée en grandeur et en signe par l'intégrale $-\int_A^B \frac{P}{C} | ds$.

51. Force électromotrice de l'effet Peltier. — Elle a un sens invariable, contrairement à celle de l'effet Joule; d'autre part, il suffit que le courant traverse la surface de séparation de deux métaux pour que la force électromotrice se manifeste avec une grandeur constante, que le courant soit normal ou oblique à la surface de séparation. La mesure de cette constante suffit à nos formules, mais il convient d'expliquer l'apparence paradoxale de cette force et de la rendre comparable à celle de Joule qui est répandue dans le volume : Imaginez un vecteur e de mêmes dimensions physiques que $\frac{P}{C}$, normal à la surface de soudure AB, de grandeur déterminée, à chaque distance de AB, mais n'ayant de valeur sensible que dans une couche de passage de très petite épaisseur ϵ . L'intégrale du vecteur e suivant une ligne CD quelconque, oblique à AB est

$$E = \int_C^D e | ds.$$

Elle sera la même quel que soit le chemin suivi à travers la couche de passage, pourvu qu'on la traverse tout entière. Cette intégrale est une force électromotrice, Elle jouit de toutes les propriétés de la force électromotrice correspondante à l'effet Peltier.

Ce qu'on vient de dire pour les effets Joule et Peltier peut être répété pour l'effet Thomson et pour les forces électromotrices d'origine chimique.

52. **Extension de la deuxième loi de Kirchhoff.** — Des nos 50 et 51, il résulte qu'on peut définir en chaque point deux vecteurs représentant les forces électromotrices : le vecteur e pour les générateurs et les récepteurs ; le vecteur $-\frac{P}{C}$ pour l'effet Joule. Avec ces notions, la force électromotrice entre deux points est l'intégrale de la somme $e - \frac{P}{C}$ et la deuxième loi de Kirchhoff s'énonce ainsi :

Suivant tout contour fermé tracé dans les conducteurs, l'intégrale de la force électromotrice est nulle.

Il est aisé de constater que la loi s'applique à la plaque de Kirchhoff et aux conducteurs à trois dimensions, comme aux réseaux de conducteurs filiformes.

53. **Conclusions.** — 1° J'ai défini en chaque point du conducteur un vecteur *courant* et un vecteur *force électromotrice*.

2° *Le flux du courant à travers une surface quelconque est nul.* C'est la première loi de Kirchhoff.

3° *L'intégrale de la force électromotrice le long d'un contour quelconque tracé dans le conducteur est nulle.* C'est la deuxième loi de Kirchhoff.

§ 2. — *Extension des lois de Kirchhoff au régime variable et aux diélectriques.*

54. **Introduction.** — Les deux lois de Kirchhoff généralisées sont :

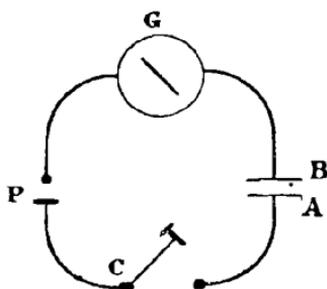
1° Le flux du courant à travers une surface fermée quelconque est nul ;

2° L'intégrale de la force électromotrice le long d'un contour quelconque tracé dans le conducteur est nulle.

Je vais les étendre aux courants en régime variable et aux diélectriques au moyen de deux notions nouvelles relatives aux diélectriques : le courant de déplacement pour la première loi et la force électromotrice électrostatique due à la différence de potentiel pour la deuxième loi. Il me suffira d'analyser une expérience bien connue.

55. Charge d'un condensateur par le courant d'une pile. — Sur le circuit PCABGP d'une pile P plaçons une clef C, un condensateur AB et un galvanomètre balistique G (fig. 7).

Fig. 7.



L'expérience montre que l'ordre dans lequel se succèdent ces objets est indifférent. Au moment où l'on ferme la clef C, un courant de courte durée parcourt le circuit.

Soit i son intensité comptée positivement dans le sens PAB.

Pendant sa durée totale, le courant débite une quantité d'électricité

$$q = \int i dt$$

mesurée par le galvanomètre.

Une première loi expérimentale est celle-ci :

Les faces A et B du condensateur prennent des charges respectivement positives et négatives qui, mesurées par des procédés électrostatiques (par exemple l'attraction des deux armatures), se montrent proportionnelles au débit q enregistré par le galvanomètre.

Ces charges sont exactement $+q$ et $-q$, si l'on adopte l'unité électromagnétique de quantité d'électricité.

Elles sont réparties sur la surface S du condensateur, de sorte que la densité superficielle est $\frac{q}{S}$. Dans ce système d'unités, système électromagnétique, le coefficient k de la loi de Coulomb ($F = k \frac{qq'}{r^2}$) a les dimensions du carré d'une vitesse et l'expérience montre que cette vitesse est celle de la

lumière. Je remplacerai la constante k par $\frac{1}{K}$ pour me conformer à la notation de Maxwell. Dès lors, la force électrique X du champ entre les deux faces du condensateur est liée à sa charge q mesurée au galvanomètre par la formule de l'électrostatique

$$(1) \quad X = \frac{4\pi}{K} \frac{q}{S}.$$

Une deuxième loi expérimentale est que le courant s'arrête quand la différence des valeurs du potentiel φ entre les armatures A et B est égale à la force électromotrice E de la pile de charge mesurée par les procédés dynamiques :

$$(2) \quad E = \varphi_A - \varphi_B.$$

Ces deux lois contiennent la généralisation de celles de Kirchhoff, comme je vais l'expliquer.

56. Extension de la première loi de Kirchhoff. — Je considère une surface fermée Σ qui enveloppe l'armature positive A du condensateur, mais qui laisse l'armature B à l'extérieur. A travers cette surface et à l'époque t de la période de charge je considère deux flux : celui du courant p qui pénètre par le conducteur de charge, savoir :

$$(1) \quad \text{flux } p = i = \frac{dq}{dt};$$

puis le flux de la force électrique X qui sort par la partie de la surface située entre les deux armatures du condensateur ; c'est, d'après la formule (1) du n° 55,

$$X.S = \frac{4\pi}{K} q.$$

Le flux entrant de ce chef dans Σ est

$$(2) \quad \text{flux } X = - \frac{4\pi}{K} q,$$

d'où l'on tire en dérivant par rapport à t

$$(2)' \quad \text{flux} \frac{dX}{dt} = - \frac{4\pi}{K} \frac{dq}{dt}.$$

Des relations (1) et (2)' on déduit celle-ci

$$(3) \quad \text{flux} \left(p + \frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt} \right) = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt} = p_1$ complète le vecteur p de façon que le flux total de ces deux vecteurs est nul ; p_1 est le *courant de déplacement* de Maxwell ; $p + p_1$ est le *courant total*, il se réduit à p dans un conducteur parfait, à p_1 dans un diélectrique parfait. La première loi de Kirchhoff se généralise donc ainsi :

Le flux du courant total à travers une surface fermée quelconque est nul.

57. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff. — La formule (2) qui représente la deuxième loi du n° 55 s'écrit

$$0 = E + \varphi_B - \varphi_A.$$

Donc $\varphi_B - \varphi_A$ est une force électromotrice qui équilibre E ; par définition du potentiel, c'est l'intégrale changée de signe de la force électrique X suivant le chemin AB . D'après cela, *si un contour fermé contient une partie AB dans un diélectrique où règne la force électrique X , il en résulte sur ce contour une force électromotrice égale à l'intégrale de $-X = P_1$ le long de AB* . Elle équilibre les autres forces électromotrices E du contour mesurées par des procédés dynamiques.

Ainsi, on trouve en chaque point une force électromotrice : P dans le conducteur, P_1 dans le diélectrique. Si le champ magnétique est variable, l'étude des courants d'induction nous enseigne qu'il faut ajouter à l'intégrale des forces électromotrices le long du contour la dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique a à travers ce contour. Telles sont les forces électromotrices que l'expérience révèle. Pourvu qu'on en tienne compte, l'énoncé de la deuxième loi demeure inchangé :

La force électromotrice totale qui règne dans tout contour fermé est nulle.

58. Vérifications expérimentales des lois de Kirchhoff généralisées. — Elles résultent de l'exploration bien connue du circuit par l'électromètre. Aux deux points D, E du circuit PDEP de la pile P, on établit une dérivation DABE contenant un électromètre AB (*fig. 8*). Au moment où l'on établit ce circuit dérivé, un courant instantané le parcourt ; bientôt l'équilibre s'établit. A ce moment les lois du n° 54 donnent les résultats suivants :

Première loi. — 1° Dans les conducteurs DA et BE le courant est nul ;

2° L'intensité est la même dans les branches PD, DE, EP.

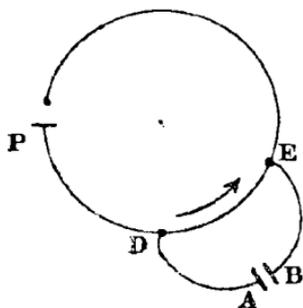
Deuxième loi. — Les équations d'équilibre des circuits PDEP et DEBAD sont respectivement :

$$(1) \quad E - R i = 0,$$

$$(2) \quad \varphi_A - \varphi_B - r i = 0.$$

Dans ces formules, les notations sont les mêmes que précédemment, avec cette seule modification que R est la résistance du circuit PDEP, et r celle de la portion DE.

Fig. 8.



Ces résultats, est-il besoin de le dire, sont vérifiés par l'expérience.

59. Champ électrostatique créé par les courants. — Dans l'expérience du n° 58, rien n'empêche d'éloigner progressi-

vement les deux armatures du condensateur AB qui forme l'électromètre et de diminuer leurs surfaces autant qu'on veut, jusqu'à faire disparaître les parties métalliques DA et BE. Tout le chemin DABE sera alors tracé dans le diélectrique et l'équation (2) n° 58 deviendra

$$\varphi_D - \varphi_E - r i = 0.$$

Donc $\varphi_D - \varphi_E$ n'est pas nul. Ceci nous montre que, même en l'absence de tout condensateur, de tout circuit dérivé ouvert, l'existence d'un courant entraîne un champ électrique dans le milieu environnant. Ce fait est bien manifesté par l'expérience, car, dans les courants de forte tension, il n'est pas rare de voir éclater des étincelles d'une partie à une autre du fil conducteur.

60. Conclusions. — 1° Dans la charge d'un condensateur par le courant d'une pile, j'ai puisé deux notions relatives aux diélectriques : le courant de déplacement et la force électromotrice due à la différence de potentiel.

J'y ai trouvé aussi ces deux lois :

2° Le flux du courant total à travers toute surface fermée est nul ;

3° La force électromotrice totale qui règne dans tout contour fermé est nulle.

La notion de déplacement électrique est due à Maxwell (*Traité d'Électricité*, nos 60 et 61) ; mais, étant introduite dès les débuts de l'électrostatique, elle n'offre pas la même clarté qu'ici et paraît assez arbitraire dans l'Ouvrage du grand physicien. La loi du flux du courant total s'y trouve également. Au n° 61 elle apparaît dans sa vraie signification ; dans l'équation (E) du n° 607, elle apparaît comme une conséquence mathématique d'une hypothèse sur le champ magnétique dû à un courant ouvert ; nulle part elle n'apparaît comme un fait expérimental directement observable. Quant à la loi sur les forces électromotrices, les formules de Maxwell ne sauraient y conduire. Je la crois nouvelle. Il est intéressant de constater que les deux lois ne sont que des extensions de celles de Kirchhoff.

§ 3. — *Équations générales de l'électricité dans les corps en repos.*

61. Introduction. — Je suis arrivé aux deux lois fondamentales de l'électrodynamique :

1^{re} loi. *Le flux du courant total à travers toute surface fermée est nul.*

2^e loi. *La force électromotrice totale dans tout circuit fermé est nulle.*

Je vais en expliquer l'interprétation mécanique et en formuler l'expression analytique. J'aurai ainsi les deux équations fondamentales de l'électromagnétisme. Je les appliquerai au cas particulier des conducteurs parfaits et des diélectriques parfaits. Enfin je comparerai mes résultats à ceux de Maxwell.

62. Interprétation mécanique des deux lois fondamentales. — Les éléments qui entrent dans les deux lois s'interprètent ainsi :

Le courant total u de la première loi est la vitesse de la coordonnée électrique q ; il est égal au courant de conduction p dans les conducteurs parfaits, au courant de déplacement p_1 dans les diélectriques parfaits, dans tous les cas, à $p + p_1 = u$.

Passons à la deuxième loi.

Le vecteur force électromotrice appliquée U comprend plusieurs parties : celle de Joule, égale au quotient du courant par la conductibilité $P = \frac{p}{G}$, elle se trouve dans les conducteurs et correspond au frottement ; la force électrique changée de signe $P_1 = -X = -\frac{4\pi}{K} \int p_1 dt$ se trouve dans les diélectriques et correspond à la réaction d'un ressort. La force électromotrice des générateurs et des récepteurs P_2 correspond à la force appliquée venant des générateurs et récepteurs dynamiques tels que chutes d'eau et machines-outils. L'intégrale de ces forces le long d'un circuit fermé

représente le travail total des forces appliquées pour le déplacement électrique virtuel $\delta q = 1$ le long du circuit.

Il faut y ajouter le travail des forces d'inertie. Ces forces d'inertie électrique, ce sont les forces électromotrices d'induction (n° 45, 4°); leur travail virtuel, c'est $-\frac{d\Phi}{dt}$ (n° 10); c'est la dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique a (n° 5) à travers le circuit. C'est, en d'autres termes, le flux du vecteur $-\frac{da}{dt}$ ou $-a'$, dérivée changée de signe du vecteur induction magnétique a .

Le travail virtuel total ainsi calculé pour le déplacement $\delta q = 1$ le long d'un contour fermé doit être égalé à zéro, et cette égalité doit être satisfaite pour tous les contours fermés imaginables. C'est la deuxième loi de Kirchhoff généralisée.

L'interprétation des deux lois est évidente : la première loi correspond à la liaison d'incompressibilité de l'hydrodynamique; la deuxième loi exprime que le travail total des forces est nul pour tout déplacement δq compatible avec la liaison d'incompressibilité.

Elles doivent donc contenir les équations générales de l'électricité pour les corps en repos. Les équations sont de deux sortes suivant que l'on considère, soit la masse d'un milieu continu, soit la surface de séparation de deux milieux différents. Je vais établir ces équations.

63. **Équations indéfinies dans un milieu continu.** — Appliquez la première loi à la surface du parallélépipède $dx dy dz$, dont le premier sommet O a pour coordonnées x, y, z (fig. 9), et calculez pour le vecteur (u, v, w) le flux *sortant* de cette surface : à travers la surface $OBC = dy dz$, le flux est $-u dy dz$; à travers la face parallèle menée par A, le flux est $+(u + \frac{du}{dx} dx) dy dz$; soit au total $\frac{du}{dx} dx dy dz$. On trouve de même les flux à travers les couples de faces $dz dx$ et $dx dy$. Égalez la somme à zéro et supprimez le facteur commun $dx dy dz$, vous trouverez

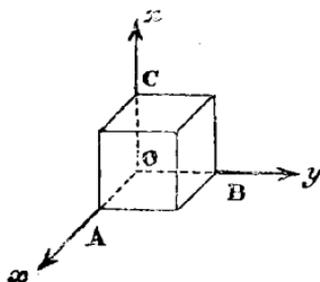
$$(1) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

C'est l'expression de la loi d'incompressibilité. En appli-

quant la deuxième loi aux contours qui limitent chacune des trois faces OAB, OBC, OCA du même parallélépipède, on trouve par un raisonnement semblable

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} - a' = 0, \\ \frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} - b' = 0, \\ \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} - c' = 0. \end{cases}$$

Fig. 9.



Dans la notation de Grassmann, les équations (1) et (2) s'écrivent

$$(I) \quad \frac{d}{dx} \Big| u = 0$$

(cf. MAXWELL, n° 607),

$$(II) \quad \left[\left[\frac{d}{dx} U \right] - a' = 0 \right.$$

(cf. MAXWELL, éq. (A), (B), (I); nos 591, 598, 611).

Suivant que le corps où est pris le point O est conducteur ou diélectrique, ces équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Big| p = 0, & \quad \left| \frac{d}{dx} \left(-\frac{p}{G} + P_2 \right) = a' \quad (\text{conducteur}), \\ \frac{d}{dx} \Big| \frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt} = 0, & \quad \left| \frac{d}{dx} (-X + P_2) = a' \quad (\text{diélectrique}). \end{aligned}$$

Si la masse est homogène, il faut supposer en outre P_2 nul, C (ou K) constant

64. Équations à la surface de séparation de deux milieux. Prenez les axes Ox , Oy parallèles à la surface et l'axe Oz perpendiculaire, puis appliquez comme au numéro précédent les deux lois à l'élément $dx dy dz$, vous obtiendrez, en affectant d'un accent les lettres relatives au second milieu, les équations

$$(III) \quad U = U', \quad V = V', \quad w = w'.$$

Elles s'énoncent ainsi : *Les composantes tangentielles de la force électromotrice sont continues ; les composantes normales du courant total sont continues.* Trois cas se présentent suivant que les milieux sont tous deux conducteurs, tous deux diélectriques ou l'un conducteur et l'autre diélectrique. Les équations s'écrivent dans les trois cas respectivement

$$(1) \quad \frac{P}{C} - P_2 = \frac{P'}{C'} - P'_2, \quad \frac{q}{C} - Q_2 = \frac{q'}{C'} - Q'_2, \quad r = r';$$

$$(2) \quad X - P_2 = X' - P'_2, \quad Y - Q_2 = Y' - Q'_2, \quad K \frac{dZ}{dt} = K' \frac{dZ'}{dt};$$

$$(3) \quad \frac{P}{C} - P_2 = X' - P'_2, \quad \frac{q}{C} - Q_2 = Y' - Q'_2, \quad r = \frac{K'}{4\pi} \frac{dZ'}{dt}.$$

En particulier, si chacun des milieux est homogène, P_1 , P'_1 , Q_2 , Q'_2 sont nuls.

Si de plus le champ initial (X, Y, Z) est nul, l'intégration des deux dernières équations de la dernière colonne donne respectivement

$$KZ = K'Z', \quad \int r dt = \frac{K'}{4\pi} Z'.$$

65. Équivalence des deux lois fondamentales avec le système des équations (I), (II), (III). — Les deux lois, nous l'avons vu, entraînent les équations (I), (II) et (III). Réciproquement, ces équations étendues à tout l'espace suffisent pour assurer la vérification des lois. On le voit par un raisonnement classique que je ne reproduirai pas ici. Si elles sont étendues seulement à un volume tel que l'ellipsoïde, elles assurent

encore la vérification des deux lois dans tout l'intérieur de l'ellipsoïde; mais, si le volume a la forme d'un tore, par exemple, il faut encore exprimer que la deuxième loi est vérifiée pour un contour pris dans le volume et faisant tout le tour du tore; on pourra choisir, par exemple, la circonférence décrite par le centre du cercle méridien du tore. La nécessité de vérifier la deuxième équation de Kirchhoff sur ce contour tient à ce qu'un pareil contour ne peut pas être remplacé par un ensemble de contours infiniment petits pris dans le tore (*cf.* MAXWELL, t. I, n^{os} 18 et suivants).

66. Comparaison de notre théorie avec celle de Maxwell. — L'équation (I) est dans Maxwell; la formule (II), quoiqu'en divergence avec Maxwell, conduit, pour les conducteurs d'une part et pour les diélectriques d'autre part, aux mêmes équations que celles qu'on peut déduire des formules (A), (B), (I) de Maxwell (n^{os} 591, 598, 611). Une différence fondamentale est toutefois dans l'interprétation des diverses forces électromotrices que Maxwell semble confondre entre elles.

Les différences s'accroissent dans les formules du n^o 64 : les équations (1) concordent avec celles qu'on trouve dans Maxwell au n^o 310, mais je n'y trouve pas les formules (2) et (3), que je crois nouvelles.

Deux caractères différencient notre théorie de celle de Maxwell. C'est, d'une part, la considération exclusive des contours fermés pour écrire les équations de l'équilibre dynamique de l'électricité et, d'autre part, la distinction et la localisation des diverses forces électromotrices. Je place exclusivement celle de Joule dans les conducteurs et celle qui vient des différences de potentiel dans les diélectriques. Les deux espèces de force se trouveraient dans les diélectriques imparfaits.

Notre méthode semble s'imposer par sa simplicité, par l'absence d'hypothèse, enfin par l'interprétation mécanique que j'ai exposée au n^o 62 et qui fait rentrer les lois de l'électromagnétisme dans le principe général des travaux virtuels.

67. Conclusions. — 1^o J'ai donné l'interprétation mécanique des deux lois fondamentales de l'électricité :

La première est la condition d'incompressibilité relative aux déplacements électriques.

La deuxième est l'expression du principe des travaux virtuels pour les déplacements électriques compatibles avec la condition d'incompressibilité.

Il ne s'agit plus ici, comme dans la première partie, d'un système à liaisons dont le degré de liberté est un nombre fini; c'est un milieu indéfini analogue à un fluide incompressible, avec les assimilations suivantes :

a. Les inconnues, en nombre infini, sont les valeurs du déplacement électrique $q = \int u dt$ en chaque point du milieu, ces déplacements devant satisfaire à la loi d'incompressibilité.

b. L'énergie cinétique T est une intégrale de volume que nous déterminerons plus loin (§ 5). Il suffit ici de connaître le travail des forces d'inertie pour le déplacement $\delta q = 1$ le long d'un contour fermé. L'expérience enseigne que c'est le flux du vecteur $-a'$ à travers le contour.

c. Les forces appliquées Q sont les forces électromotrices des générateurs, des récepteurs, de l'effet Joule et du diélectrique.

2° J'ai donné l'expression analytique des deux lois dans les milieux continus. Ce sont deux équations aux dérivées partielles :

L'équation numérique (I) pour la loi d'incompressibilité;

L'équation vectorielle (II) pour la loi des travaux virtuels.

3° Aux surfaces de discontinuité, ce sont les équations (III), savoir :

La continuité de la composante normale du courant total, pour l'incompressibilité;

La continuité de la composante tangentielle de la force électromotrice appliquée, pour les travaux virtuels.

4° J'ai comparé la présente théorie à celle de Maxwell, tant pour les résultats que pour la méthode suivie.

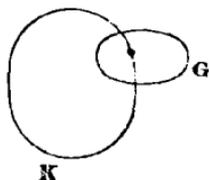
§ 4. — *Le problème de l'électromagnétisme et l'électrooptique.*

68. Introduction. — J'ai été conduit à deux lois fondamentales donnant les équations générales de l'électricité, tant indéfinies qu'à la surface de séparation de deux milieux.

Elles contiennent le courant p , la force électrique X et l'induction magnétique α . Dans les corps parfaitement conducteurs ou isolants, un des deux premiers vecteurs est nul et il reste en chaque point deux vecteurs inconnus. Un autre groupe de relations est nécessaire pour déterminer les phénomènes. On peut l'obtenir dans le cas où les corps ne sont pas magnétiques : l'induction α se confond alors avec le champ magnétique α , et celui-ci est donné par la loi de Biot et Savart généralisée. Je vais exposer ce sujet, montrer ses liens avec l'optique et en tirer une conséquence sur la nature des diélectriques.

69. Loi de Biot et Savart. — Une manière de la formuler est celle-ci : *Si l'on suit une ligne K qui embrasse un circuit conducteur G où circule un courant fermé d'intensité i (fig. 10), l'intégrale de la force magnétique due au*

Fig. 10.



courant est $4\pi i$. Or i est le flux du courant p à travers une surface arbitraire limitée par le contour K . Admettons que cette loi soit vraie encore pour les courants de conduction ouverts; je peux déformer la surface arbitraire jusqu'à l'amener entièrement dans le diélectrique. Pour que l'expression conserve la même valeur, il faut alors remplacer le courant de conduction p par le courant de déplacement p_1 . En un mot :

L'intégrale de la force magnétique suivant tout contour fermé égale le flux du courant total multiplié par 4π .

L'expression analytique de cette loi s'obtient comme au paragraphe 3; c'est, pour les milieux continus,

$$\left| \frac{d}{dx} \alpha = 4\pi u \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u = p \text{ dans les conducteurs,} \\ u = p_1 = \frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt} \text{ dans les diélectriques,} \end{array} \right.$$

et aux surfaces de discontinuité

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

A ces équations, il convient d'ajouter celles de l'incompressibilité du vecteur induction magnétique, incompressibilité qui a été rappelée au n° 5; ces équations sont, comme aux nos 63 et 64,

$$\left. \frac{d}{dx} \right| a = 0 \text{ pour les milieux continus,}$$

$$c = c' \text{ pour les surfaces de discontinuité.}$$

Dans notre hypothèse des milieux non magnétiques, a , b , c sont égaux respectivement à α , β , γ .

70. Équations du courant de conduction et de la force électrique. — Nous avons obtenu les deux équations vectorielles

$$\left| \frac{d}{dx} \right| U = \alpha', \quad \left| \frac{d}{dx} \right| \alpha = 4\pi u.$$

Pour éliminer α , je fais sur la première l'opération représentée par le symbole $\left| \frac{d}{dx} \right|$. Puis je remplace $\left| \frac{d}{dx} \right| \alpha$, dans le second membre, par sa valeur $4\pi u$, tirée de la deuxième équation. J'obtiens

$$\left| \frac{d}{dx} \right| \left| \frac{d}{dx} \right| U = 4\pi u'.$$

Suivant que le milieu est conducteur ou diélectrique, cette équation s'écrit

$$(1) \quad \left| \frac{d}{dx} \right| \left| \frac{d}{dx} \right| \left(-\frac{p}{C} + P_2 \right) = 4\pi \frac{dp}{dt},$$

$$(2) \quad \left| \frac{d}{dx} \right| \left| \frac{d}{dx} \right| (-X + P_2) = K \frac{d^2 X}{dt^2}.$$

Si le milieu est homogène, P_2 est nul; C (ou K) est constant. Si le milieu est cristallin, cette constante doit être remplacée par un système de constantes, un système linéaire définissant une fonction vectorielle linéaire.

71. Détermination du problème de l'électromagnétisme. — Par une surface, j'isole dans un champ un système de conducteurs et de diélectriques parfaits et non magnétiques. Dans chaque milieu, on connaît l'équation vectorielle indéfinie du courant de conduction p ou de la force électrique X (ég. 1 ou 2 du n° 70). Elle est du second ordre par rapport aux coordonnées. On connaît en outre l'équation vectorielle à chaque surface de discontinuité (n° 64). Qu'on fournisse les données suivantes : 1° p ou X en chaque point à l'origine du temps, 2° ces vecteurs et leurs dérivées suivant la normale à la surface limite, à toute époque, le problème du calcul de p et X dans tout l'espace et à toute époque sera déterminé.

72. Rapprochement avec la lumière; constitution des diélectriques. — Le problème se pose de la même façon en optique; or mes recherches sur la surface de l'onde et la dispersion des couleurs dans les cristaux m'ont conduit précisément à l'équation obtenue pour les diélectriques, qu'ils soient isotropes ou cristallisés. L'identification des deux théories est donc faite. L'équation des diélectriques donne la théorie de la propagation de la lumière et la diffraction; les équations de deux diélectriques, jointes à l'équation à la surface de séparation, donnent la réflexion et la réfraction; les équations d'un diélectrique et d'un conducteur, jointes à l'équation à la surface, donnent la réflexion métallique.

Une anomalie pourtant est remarquable : tandis qu'en électricité K est une constante caractéristique du milieu seul, c'est en optique une fonction de la longueur d'onde sauf dans l'éther du vide. De plus, certaines radiations sont absorbées, le corps s'échauffe. Ce phénomène correspond à un dégagement de chaleur de Joule. Pourtant le diélectrique ne donne passage à aucun courant permanent sensible. Il faut donc admettre que le diélectrique est formé de corpuscules conducteurs séparés par un isolant. Ce système agit comme un condensateur complexe. Cette constitution explique en électricité la capacité plus grande d'un condensateur avec un diélectrique quelconque qu'avec le vide; en optique, elle explique : 1° l'échauffement du corps par les courants alternatifs dans les particules conductrices; 2° la nécessité de considérer, en chaque point, deux vecteurs, la valeur moyenne

du courant de conduction p et la valeur moyenne de la force électrostatique X , nécessité à laquelle m'a conduit l'étude directe de la dispersion des couleurs (¹).

73. Conclusions. — 1° J'ai donné les équations aux dérivées partielles du courant de conduction dans les conducteurs et de la force électrique dans les diélectriques parfaits;

2° J'ai expliqué que ces équations, jointes aux équations à chaque surface de discontinuité, permettent de calculer ces vecteurs quand on connaît les conditions initiales et les conditions aux limites du champ;

3° J'ai montré le lien de ces équations avec celles de l'optique;

4° De la comparaison des résultats des deux théories, j'ai déduit une conséquence sur la constitution des diélectriques.

Cette dernière remarque est, je crois, nouvelle; les autres notions étaient connues, il était bon de les réunir ici en les précisant avec nos formules.

3. — *Énergie électrique.*

74. Introduction. — Les équations du mouvement d'un système à liaisons s'expriment en écrivant que le travail total des forces appliquées et d'inertie est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Pour avoir l'équation différentielle de l'énergie, on écrit la même condition, non plus pour un déplacement virtuel quelconque, mais pour celui qui se produit effectivement dans le temps dt . Au paragraphe 2, nous avons appliqué la première de ces deux règles; nous allons appliquer la seconde.

Le déplacement qui se produit peut être décomposé en une infinité d'autres : ils correspondent à tous les déplacements effectifs dq qui se produisent dans le temps dt suivant les divers tubes de courant que l'on trouve à l'époque t . Il me suffira de considérer un de ces tubes et d'ajouter au résultat ceux qu'on trouverait en considérant les autres tubes.

(¹) Dans la plupart des diélectriques imparfaits, cette conduction, limitée aux particules et qui forme la polarisation du diélectrique, est accompagnée d'une conduction proprement dite très faible.

75. Équation de l'énergie. — Considérons une ligne de courant C dont l'élément est dx , et une surface S limitée par C . Soit ν la normale à l'élément dS . L'équation d'équilibre des forces sur le contour C est, d'après le paragraphe 1,

$$(1) \quad \int_C U | dx - \int_S \nu | a' dS = 0.$$

Je considère un tube de courant infiniment mince ayant pour axe cette ligne; soit i son intensité. En multipliant par $i dt$ les deux membres de l'équation (1), j'aurai la partie de l'équation de l'énergie qui correspond à ce tube, savoir

$$(2) \quad dt \left(\int_C U | i dx - i \int_S \nu | a' dS \right) = 0.$$

La deuxième intégrale est prise sur une surface arbitraire. Il faudrait une étude préalable pour arriver à choisir les surfaces correspondant aux divers tubes de courant de façon à éviter qu'elles s'entre-croisent, ce qui serait nécessaire pour faire la sommation relativement à ces tubes. On tourne la difficulté en transformant l'intégrale de surface en une intégrale de ligne. Pour cela, j'observe que l'induction magnétique a satisfait, par définition, à la condition d'incompressibilité $\left. \frac{d}{dx} \right| a = 0$. On sait que, dans ce cas, on peut trouver une distribution (et même une infinité de distributions) d'un vecteur F satisfaisant à la relation

$$a = \left| \frac{d}{dx} \right| F,$$

d'où l'on déduit, en dérivant par rapport au temps,

$$(3) \quad a' = \left| \frac{d}{dx} \right| F'.$$

Je porte cette valeur de a' dans l'intégrale de surface et j'obtiens

$$i \int_S \nu | a' dS = i \int_S \left(\nu \left| \frac{d}{dx} \right| F' \right) dS = i \int_C F' | dx.$$

L'équation (2) s'écrit donc

$$dt \int_{\mathcal{C}} (U - F') | i dx = 0.$$

Or $i dx$ est le produit du vecteur courant u par l'élément de volume $d\tau$ de la partie du tube de courant qui a pour longueur dx . Ainsi, la partie de l'équation de l'énergie qui correspond à un tube de courant est exprimée par une intégrale étendue aux seuls éléments $d\tau$ de ce tube. On aura l'équation complète en étendant les intégrales à tout l'espace. L'équation différentielle de l'énergie est en résumé

$$(4) \quad 0 = dt \int (U - F') | u d\tau = dt \left(\int U | u d\tau - \int F' | u d\tau \right).$$

76. Diverses espèces d'énergie électrique. — D'après les idées exposées au paragraphe 3, le premier terme de l'équation (4) représente le travail des forces appliquées; le deuxième terme représente le travail des forces d'inertie. Le produit de la deuxième intégrale par dt représente donc la variation dT de l'énergie cinétique; la première intégrale est la puissance résultant des diverses forces appliquées. Cette puissance contient elle-même deux parties : la première \mathcal{Q} vient de l'échange d'énergie du système avec l'extérieur; elle contient l'énergie des piles, des effets Peltier, Thomson et Joule; elle est analogue à la puissance résultant des générateurs, des récepteurs et des résistances passives de la mécanique ordinaire. La seconde partie de la puissance vient de l'énergie potentielle (W) due à la force électrique et que nous avons comparée à celle d'un ressort bandé n° 62. Nous allons calculer ces trois parties de l'énergie

$$(4)' \quad \mathcal{Q} dt - dW - dT.$$

77. Travail des forces appliquées. Puissance des générateurs. Énergie potentielle du diélectrique. — La puissance des forces appliquées est

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int U | u d\tau.$$

Si les corps en présence sont des conducteurs et des di-

électriques parfaits, l'intégrale se partage en deux autres, savoir :

$$(5) \quad \mathcal{Q} = \int \left(-\frac{p}{C} + P_2 \right) \rho \cdot d\tau \text{ étendue aux conducteurs,}$$

$$- \frac{dW}{dt} = \int [-X + P_2] \left| \frac{K}{4\pi} \frac{dX}{dt} \right. \cdot d\tau \text{ étendue aux diélectriques.}$$

La première intégrale représente la puissance totale \mathcal{Q} fournie au système par les générateurs, les récepteurs et l'effet Joule. La seconde est la dérivée du travail produit par les réactions du diélectrique. Elle dérive du potentiel

$$(6) \quad W = \frac{K}{8\pi} \int X | X \, d\tau - \frac{K}{4\pi} \int P_2 | X \, d\tau.$$

En général les forces électromotrices P_2 qui résident dans les diélectriques sont négligeables et l'énergie potentielle se réduit au premier terme :

$$(6)' \quad W = \frac{K}{8\pi} \int X | X \, d\tau = \frac{K}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) \, d\tau.$$

78. Travail des forces d'inertie; énergie électrocinétique. — Nous avons trouvé pour la différentielle de l'énergie cinétique (n° 75)

$$dT = dt \int F' | u \, d\tau.$$

Il faut éliminer le vecteur auxiliaire F et revenir aux vecteurs α et α qui sont ceux que décèle l'expérience. Pour atteindre ce but, je remplace d'abord u par sa valeur

$$u = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d}{dx} \alpha \right. \quad (\text{n° 69}).$$

J'obtiens

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int F' \frac{d}{dx} \alpha \, d\tau.$$

Dans cette formule, les dérivations du symbole $\frac{d}{dx}$ portent sur α ; en intégrant par parties, on les fait porter sur F' et l'on obtient

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \alpha \frac{d}{dx} F' \, d\tau$$

ou, en remplaçant $\left| \frac{d}{dx} F' \right.$ par α' (équation (3) du n° 75),

$$(7) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \alpha | \alpha' d\tau.$$

S'il n'y a pas d'aimants dans le champ, α' est égal à α et cette formule (7) donne pour l'énergie cinétique

$$(7)' \quad T = \frac{1}{8\pi} \int \alpha^2 d\tau.$$

79. Conclusions. — 1° Des équations de l'électromagnétisme, j'ai déduit celle de l'énergie électrique, comme des équations de la dynamique on déduit l'équation de l'énergie en mécanique rationnelle.

2° J'ai donné l'expression de chacune des énergies électriques; c'est d'abord la puissance fournie au système par l'extérieur ou inversement, puis l'énergie potentielle dite électrostatique, enfin l'énergie électrocinétique. Ces expressions sont représentées par les formules (5), (6) ou (6)', (7) ou (7)'.

CHAPITRE II.

THÉORIE DE L'ÉLECTRICITÉ DANS LES CORPS EN MOUVEMENT.

§ 1. — *La théorie de Maxwell et la roue de Barlow.*

80. Introduction. — Dans la première Partie de ce travail (Chap. III, § 1), j'ai précisé les assimilations qui permettent de regarder un système de conducteurs filiformes parcourus par des courants comme un système à liaisons de la mécanique rationnelle, savoir :

1° Les *coordonnées* sont de deux sortes, celles qui fixent les déplacements des parties mobiles des circuits, et celles qui fixent les déplacements électriques;

2° L'*énergie cinétique* T contient deux parties, la demi-force vive des parties mobiles des circuits et la fonction des forces électromagnétiques ou énergie électrocinétique;

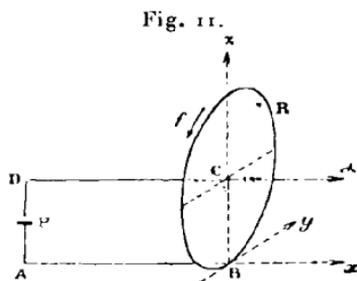
3° Les *forces appliquées* sont de deux sortes, les forces purement mécaniques, comme l'effort de la main de l'observateur, puis la force électromotrice $E - ri$ qui vient des générateurs, des récepteurs électriques et de la résistance de Joule.

Avec ces assimilations, j'ai appliqué les équations de Lagrange aux circuits filiformes mobiles, déformables ou non. Elles déterminent le système en fonction du temps et sont d'accord avec l'expérience.

Les équations de Lagrange donnent donc, pour les circuits filiformes, des résultats tout à fait satisfaisants. Cela n'est plus vrai si les conducteurs ne sont pas filiformes. Je vais le montrer.

81. Les équations de Lagrange mises en défaut par l'expérience de la roue de Barlow. — Considérons deux circuits électriques constitués de la façon suivante (*fig. 11*) : Le pre-

mier ABCD est dans le plan du tableau; AB et CD sont deux fils horizontaux; DA est un fil vertical sur lequel est une pile P. Enfin, le second côté vertical BC est constitué par le rayon vertical d'une roue R perpendiculaire à CD, pleine,



métallique, et mobile autour de son axe DC. Le deuxième circuit, formé par un solénoïde, crée un champ magnétique α de direction DC. Le flux magnétique qui, de ce fait, traverse le circuit ABCD est nul; par suite l'induction mutuelle des deux circuits est nulle et l'énergie électrocinétique du système se réduit à la somme de leurs énergies de self-induction, soit, en conservant les notations antérieures,

$$\frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2).$$

Je suppose de plus que la roue R tourne. Soit θ son angle de rotation compté positivement dans le sens trigonométrique pour un observateur placé suivant Cx , prolongement de DC. C'est le sens de la flèche f . Soit I le moment d'inertie de la roue; sa $\frac{1}{2}$ force vive est $\frac{1}{2} I \theta'^2$. L'énergie cinétique totale du système est donc

$$T = \frac{1}{2} [I \theta'^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2].$$

Les paramètres de mobilité du système, au nombre de trois, sont θ, q_1, q_2 , dont les vitesses sont $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$, $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$. Les forces correspondantes à q_1 et q_2 sont respectivement $E_1 - r_1 i_1$ et $E_2 - r_2 i_2$. Je désigne par Q le moment des forces extérieures (main de l'observateur, par exemple) par rapport

à la roue. Les trois équations de Lagrange sont :

$$(I) \quad \begin{cases} (1) & Q = I\theta'', \\ (2) & E_1 - r_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ (3) & E_2 - r_2 i_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

Elles renferment deux résultats contraires à l'expérience :

1° Aucune force électromagnétique ne tend à faire tourner la roue [ég. (1)];

2° Le mouvement de la roue ne provoque aucune force électromotrice induite [ég. (2)].

Les faits sont ceux-ci :

1° La roue tourne spontanément sous l'action des forces électromagnétiques;

2° La rotation de la roue provoque dans son propre circuit une force électromotrice induite.

Quant à la grandeur de chacune de ces forces, elle est facile à deviner par la fiction suivante :

L'élément de circuit BC est emprunté à la roue pleine, de sorte que le trajet du courant est *fixe dans l'espace* et mobile par rapport à la roue ⁽¹⁾. Au lieu de cela, supposez que l'élément BC soit emprunté à un fil qui, au même instant, ait même position et *même vitesse* que le rayon BC : alors le fil BC est le siège d'une force électromagnétique et d'une force électromotrice induite que les lois des conducteurs filiformes nous permettent de calculer.

Ces forces sont justement celles qui affectent le rayon BC de la roue. Tel est le fait expérimental qu'il faut exprimer pour avoir les équations exactes de la roue de Barlow.

82. Véritables équations de la roue de Barlow. — Nous devons d'abord examiner les forces électromagnétiques qui s'exercent sur la roue et leurs moments par rapport à l'axe de rotation. Ces forces sont données par la loi de Laplace. Soient r la distance CM d'un point M du rayon CB au centre, dr la longueur d'un élément situé en ce point. La force qui

(1) Voir ma réponse à M. Liénard sur ce sujet au n° 84, en note.

s'exerce sur l'élément dr a pour grandeur $\alpha i_1 dr$; sa direction est celle de l'axe Oy normal au plan du tableau ABCD, vers la gauche d'un observateur debout suivant BC et regardant α . C'est la direction même du déplacement du point M dans la rotation $\delta\theta$. Ce déplacement a pour valeur $r \delta\theta$; le travail de la force électromagnétique est donc $\alpha i_1 r dr \delta\theta$. La somme des travaux des forces appliquées aux divers points de la roue est ainsi

$$\alpha i_1 \delta\theta \int_0^R r dr = \alpha i_1 \frac{R^2}{2} \delta\theta.$$

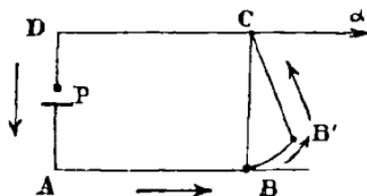
Le coefficient de $\delta\theta$ est le moment des forces électromagnétiques par rapport à l'axe $C\alpha$, et ce moment doit être ajouté à celui des forces appliquées (main de l'observateur, par exemple).

La première équation des travaux virtuels, celle qui est relative au paramètre θ , est donc

$$(1) \quad Q + \alpha i_1 \frac{R^2}{2} = I\theta''.$$

Examinons maintenant la force électromotrice induite dans la partie fictive BC du circuit, partie filiforme et mobile avec la roue (*fig.* 12). Par le déplacement réel $d\theta$, le

Fig. 12.



rayon BC vient en $B'C$, de sorte que le circuit ABCDA est remplacé par $ABB'CD$. Le flux magnétique du vecteur α à travers le circuit est nul dans la position initiale; dans la position finale, il a pour valeur

$$\alpha \times CBB'C = + \alpha \frac{R^2}{2} d\theta.$$

Tel est l'accroissement $d\Phi$ du flux; il en résulte une force

électromotrice induite

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\alpha R^2}{2} \theta'.$$

Elle doit être ajoutée à la force électromotrice appliquée $E_1 - r_1 i_1$, de sorte que la deuxième équation des travaux virtuels, celle qui est relative à la coordonnée électrique q_1 du premier circuit, est

$$(2) \quad E_1 - r_1 i_1 - \frac{\alpha R^2}{2} \theta' = L_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Quant à la troisième équation, il n'y a pas lieu de la modifier, c'est

$$(3) \quad E_2 - r_2 i_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Il ne reste qu'à remplacer le champ magnétique α par sa valeur dans les équations (1) et (2). Or, le champ magnétique α est proportionnel au courant i_2 et à un coefficient qui ne dépend que des dimensions géométriques de l'appareil. Je peux donc désigner le champ α par $\frac{2K}{R^2} i_2$; de cette façon on a

$$\frac{\alpha R^2}{2} = K i_2.$$

On observera sans doute que, dans le calcul des deux forces agissant sur BC, j'ai négligé le champ dû au courant i_1 lui-même, mais cette partie du champ est normale au plan ABCD et donne des résultats nuls dans les deux forces ici évaluées.

Pour conclure, les trois équations dynamiques du système sont, en vertu de l'expérience :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad Q = -K i_1 i_2 + I \theta', \\ (2) \quad E_1 - r_1 i_1 = +K i_2 \theta' + L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ (3) \quad E_2 - r_2 i_2 = \quad \quad \quad + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{array} \right.$$

L'équation de l'énergie se déduit de ces équations en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par

$d\theta = \theta' dt$, $dq_1 = i_1 dt$ et $dq_2 = i_2 dt$. Cette addition fait disparaître les deux termes en K que nous avons dû ajouter aux équations (1) et (2), de sorte qu'on retrouve bien l'expression de l'énergie cinétique du n° 81, comme si ces termes ajoutés n'existaient pas, savoir

$$T = \frac{1}{2} [10'^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2].$$

Les équations (II) sont incompatibles avec le système (I) (n° 81) des équations de Lagrange.

La théorie de Maxwell doit-elle donc être abandonnée? Dans sa forme, qui consiste à appliquer les équations de Lagrange, nécessairement oui; mais, dans le fond, je ne le pense pas, parce que les équations de Lagrange ne sont pas toujours applicables aux systèmes à liaisons. J'ai montré, au sujet du cerceau, qu'elles sont en défaut quand les paramètres de mobilité ne sont pas de véritables coordonnées (1). Examinons les choses à ce point de vue.

83. Adaptation de la théorie de Maxwell à la roue de Barlow. — L'état du système est-il bien connu quand on donne les trois paramètres θ , q_1 , q_2 ? Oui, s'il s'agit des conducteurs filiformes où le courant traverse toujours les mêmes particules matérielles, mais non dans le cas de la roue de Barlow, où le courant se déplace dans la roue.

Faites passer la quantité d'électricité q_1 , puis tournez la roue de θ , la chaleur de Joule s'est dégagée sur le premier rayon vertical; au contraire, tournez la roue de θ avant de faire passer le courant : la chaleur se dégage sur un autre rayon qui fait avec le premier l'angle θ . Pour faire connaître l'état du système à l'époque t , il ne suffit pas de donner θ , q_1 , q_2 , il faut encore donner la loi des valeurs simultanées des deux paramètres θ et q_1 .

De même, pour faire connaître la position absolue du cerceau, pour faire savoir si, parti de Paris, il est arrivé à Bordeaux, Lyon, ou tout autre lieu, il faut donner, non seulement les valeurs actuelles des angles de marche, de conversion

(1) E. CARVALLO, *Théorie du monocycle et de la bicyclette* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, VI^e et VII^e cahiers).

et de chute, mais aussi la loi des valeurs simultanées des deux premiers paramètres à partir de l'origine.

L'analogie est manifeste et il y a lieu d'appliquer à la roue de Barlow mes remarques sur le cerceau : *La troisième équation de Lagrange subsiste, mais il faut compléter les deux premières par certains termes aux produits des vitesses.*

Ce sont précisément les particularités qu'offre le système (II) déduit de l'expérience. Malheureusement, tandis que, dans le cerceau, la théorie permet de calculer les termes complémentaires qui modifient les équations de Lagrange, il faut ici les emprunter aux lois expérimentales de l'électromagnétisme, à cause de notre ignorance sur la constitution élémentaire du système mécanique qui nous occupe : nous connaissons seulement ses paramètres de mobilité q , son énergie cinétique T , et les forces appliquées Q . Cela suffit quand les équations de Lagrange sont applicables, mais non dans le cas contraire.

84. Conclusions (1). — 1° L'expérience de la roue de Barlow montre que les équations de Lagrange ne sont pas toujours applicables aux phénomènes électromagnétiques, notamment dans le cas des conducteurs à deux ou trois dimensions.

2° Elle offre une grande analogie avec le roulement du cerceau, qui met en défaut les équations de Lagrange.

(1) M. LIÉNARD (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, 20 janvier 1902, p. 163) déclare que je commets une erreur en appliquant le déplacement électrique virtuel à un tube de courant fixe dans l'espace. Il veut que le tube de courant soit entraîné dans le mouvement de la roue. Je ne l'accuserai pas à mon tour d'erreur, parce que je ne prétends pas que la nature ait dévoilé ses secrets à moi seul et sa manière de voir pourrait bien être justifiable, mais je prétends appliquer correctement le théorème des travaux virtuels en imaginant tout au repos, sauf le déplacement virtuel envisagé (*voir* n° 91).

M. LUIGI TRAFELLI (*L'Elettricista*, t. VI, n° 1; 1907) prétend aussi que je me trompe. Contrairement à M. Liénard, il adopte l'analyse de mon n° 82. Contrairement à moi, il conclut de cette analyse que les équations de Lagrange sont applicables, mais il ne les applique pas. Je me serais trompé en adoptant au n° 81 l'expression $\frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2)$ pour l'énergie électrocinétique; mais il ne dit pas pourquoi et il ne dit pas quelle est la bonne expression de cette énergie.

3° En conséquence, le fait que les équations de Lagrange ne sont pas applicables à la roue de Barlow, loin de mettre en défaut le principe des travaux virtuels, est plutôt une confirmation de ce principe.

4° L'expérience de Barlow semble ainsi confirmer les deux principes fondamentaux et d'ailleurs corrélatifs de Maxwell : l'énergie d'un système de courants est une énergie cinétique; les forces électromagnétiques et les forces électromotrices d'induction sont des forces d'inertie.

§ 2. — *Lois de l'inertie électrique.*

85. **Introduction.** — Au paragraphe précédent, j'ai montré qu'on obtient un résultat faux si l'on calcule les phénomènes électromagnétiques offerts par la roue de Barlow au moyen des équations de Lagrange, d'après les idées de Maxwell. J'ai donné les termes correctifs qu'il faut ajouter aux équations pour les mettre d'accord avec l'expérience. Enfin, j'ai montré l'analogie dynamique du cas de la roue de Barlow avec celui du roulement du cerceau et la modification qu'il faut en conséquence apporter à l'idée de Maxwell sur l'application de l'équation générale de la dynamique aux courants électriques.

Or, les forces électromagnétiques et les forces électromotrices d'induction, considérées comme *forces d'inertie*, sont déduites par Maxwell des équations de Lagrange; de plus l'auteur n'en donne nulle part un énoncé suffisamment correct et général. Il est donc nécessaire de revenir sur ce sujet pour préciser les lois expérimentales de l'inertie électrique.

86. **Examen critique des énoncés de Maxwell. Deux forces électromotrices d'induction.** — Voici les énoncés de Maxwell, condensés et modifiés dans la forme, mais respectés dans le fond :

PREMIÈRE LOI. — *Un élément de conducteur à trois dimensions, où le courant est p et l'induction magnétique, a subit une force pondéromotrice qui, rapportée à l'unité*

de volume, est représentée par le même vecteur $[[pa]$ ⁽¹⁾ que le parallélogramme construit sur les deux vecteurs p et a .

DEUXIÈME LOI. — *La force électromotrice induite dans un circuit conducteur, filiforme et mobile est la dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique a qui traverse le circuit mobile* ⁽²⁾.

Dans le premier énoncé, Maxwell comprend bien la roue de Barlow : la force électromagnétique est attachée, non pas au courant, mais au conducteur, de façon qu'elle déplace la roue, non le courant. Quant au deuxième énoncé, il est exact pour les conducteurs filiformes, mais défectueux, parce qu'il confond deux parties essentiellement distinctes de la force électromotrice, de sorte qu'il devient faux si l'on veut l'appliquer à la roue de Barlow. La première partie de la force électromotrice induite est due au mouvement du conducteur : *c'est l'intégrale, le long du circuit du vecteur $[[x'a]$* , qui représente l'aire du parallélogramme construit sur la vitesse x' du conducteur et l'induction magnétique a . La deuxième partie de la force électromotrice est due aux variations magnétiques du champ : *c'est la vitesse de variation changée de signe du flux de l'induction magnétique a embrassé par le circuit considéré comme fixe*. La somme de ces deux parties représente, dans tous les cas, la force électromotrice induite dans le circuit. Elle n'est pas toujours égale à la dérivée qui figure dans le deuxième énoncé ci-dessus, quand les conducteurs ne sont pas filiformes. L'étude de la roue de Barlow nous conduit donc aux trois énoncés suivants, où il convient de nous borner d'abord au cas des corps non magnétiques. Pour cette raison, au lieu du vecteur induction magnétique a , nous écrirons la force magnétique α .

87. **Trois lois de l'inertie électrique.** — PREMIÈRE LOI. — *Un élément conducteur, non magnétique, où le courant*

(1) MAXWELL, *Traité d'Électricité*, nos 490 et 501 (édition française). Notation de GRASSMANN.

(2) MAXWELL, *ibid.*, n° 531.

est p et la force magnétique α , subit une force électromagnétique représentée par le vecteur $[\rho\alpha]$.

DEUXIÈME LOI. — Un élément conducteur, non magnétique et en mouvement, où la vitesse est x' et le champ magnétique α , est le siège d'une force électromotrice d'induction représentée par le vecteur $[x'\alpha]$.

TROISIÈME LOI. — La force électromotrice d'induction dans un contour fermé est la somme de deux termes, d'une part l'intégrale du vecteur $[x'\alpha]$ le long du contour, d'autre part la dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique α qui traverse le contour supposé fixe.

Ces lois, l'expérience de la roue de Barlow ne nous autorise à les énoncer que pour les conducteurs non magnétiques. Que deviennent-elles quand on considère des corps jouissant à la fois ou séparément des propriétés conductrices, magnétiques, diélectriques, électrolytiques? On doit à la divination de Maxwell de savoir que, dans ces corps, c'est le vecteur induction magnétique a qui remplace le champ magnétique α , le courant total u qui remplace le courant de conduction p . Tel est donc le changement qu'il faut porter, d'après Maxwell, aux énoncés pour les généraliser. Il importe que l'expérience vienne contrôler la légitimité de cette extension des lois établies par la roue de Barlow.

88. **Vérifications expérimentales.** — 1° Remplacez la roue de Barlow par une roue de fer doux, la force électromagnétique appliquée à la roue sera augmentée en raison de l'induction magnétique augmentée par la présence du fer. La force électromotrice d'induction dont la roue est le siège sera augmentée aussi; cette augmentation est corrélative de la première en vertu du principe de l'énergie et conformément au calcul d'Helmholtz.

2° Que la roue soit d'acier, aimantée suivant son axe, vous pourrez supprimer le courant ou aimant inducteur : la roue tournera encore et sa rotation provoquera encore des forces électromotrices d'induction suivant les rayons de la roue.

3° Sur un jet vertical de liquide électrolytique établissez un champ magnétique dans la direction N.-S. et une prise

de circuit dans la direction E.-O. Un courant électrique traversera le circuit.

4° Que le jet fluide soit d'air, des charges se déposeront sur les deux électrodes supposées isolées.

La deuxième expérience est classique, c'est celle d'Ampère où un aimant vertical plonge dans une éprouvette de mercure et tourne autour de son axe quand on fait arriver un courant par l'extrémité supérieure de l'axe. Elle dispense à la rigueur de la première expérience sur laquelle le doute n'est guère possible. La troisième a été réalisée avec succès par M. Bouty. La quatrième a été réalisée sur l'air par M. Blondlot; elle a donné un résultat négatif. Ce que j'ai dit sur la constitution des diélectriques laisse à penser que les forces $[[ua]$ et $[[x'a]$ n'existent, pour ces corps, que dans les parties conductrices qui s'y trouvent vraisemblablement disséminées; quoi qu'il en soit, nous pouvons admettre les expressions $f. [[ua]$ et $f. [[x'a]$, le coefficient f étant égal à 1 pour les conducteurs et les électrolytes, sensiblement nul pour l'air et ayant la valeur que l'expérience doit déterminer pour les autres diélectriques.

89. **Conclusions.** — Le coefficient f ayant la valeur que je viens de dire, les lois de l'inertie électrique sont celles-ci :

1° Un élément où le courant total est u et l'induction magnétique a subit par unité de volume une force électromagnétique représentée par le vecteur $f. [[ua]$.

2° Un élément dont la vitesse est x' et où l'induction est a est le siège d'une force électromotrice d'induction représentée par le vecteur $f. [[x'a]$.

3° La force électromotrice d'induction dans un contour fermé est la somme de deux termes, d'une part l'intégrale du précédent vecteur le long du contour, d'autre part la dérivée changée de signe du flux de l'induction magnétique qui traverse le contour supposé fixe.

§ 3. — *Électromagnétisme des corps en mouvement.*

90. **Introduction.** — L'analyse de la charge d'un condensateur par un courant voltaïque (n° 53) m'a conduit, pour les corps en repos, à ces deux lois :

PREMIÈRE LOI. — *Le flux du courant total à travers toute surface fermée est nul.*

DEUXIÈME LOI. — *La force électromotrice totale dans tout contour fermé est nulle.*

J'en ai déduit les équations de l'électromagnétisme dans les corps au repos. Je vais étendre ces résultats aux corps en mouvement.

91. Les deux lois fondamentales étendues aux corps en mouvement. — La première loi est une loi de liaison, analogue à celle de l'incompressibilité des liquides. Elle s'étend, comme celle des liquides, aux surfaces mobiles; la surface à travers laquelle on compte le flux peut être, soit fixe, soit mobile avec l'un des corps.

Quant à la deuxième loi, c'est celle des travaux virtuels pour les déplacements compatibles avec la liaison d'incompressibilité. Comment doit-on l'appliquer aux corps en mouvement? Il faut prendre, on le sait, les déplacements compatibles avec les liaisons du système *considéré fictivement comme au repos* dans sa situation à l'époque t ⁽¹⁾. Ce sont les déplacements électriques qu'on peut imaginer suivant tous les contours fermés. Ainsi, la deuxième loi s'applique encore à tous les *contours fermés fixes*. L'expression du travail des forces d'inertie sera seule changée : c'était, pour les corps au repos, le flux (à travers le contour fixe) du vecteur $-a'$, vitesse de variation de l'induction magnétique changée de signe; pour les corps en mouvement, il résulte du paragraphe 2 que ce sera le même flux augmenté de l'intégrale du vecteur f . $|\int x' a$ le long du contour.

92. Équations de l'électromagnétisme pour les corps en mouvement. — On les obtient comme pour les corps au repos (n° 63). Ce sont d'abord, pour les milieux continus,

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left\{ u = 0, \right.$$

$$(2) \quad \left| \frac{d}{dx} U = a' - \left| \frac{d}{dx} f. \right| x' a. \right.$$

(1) Cf. Note du n° 84, en réponse à M. Liénard.

Pour les surfaces de discontinuité, la composante normale du courant u est continue; la composante tangentielle de la force électromotrice $U + f. | x' a$ est continue.

L'équation (1) est celle de l'incompressibilité; l'équation (2) exprime le principe des travaux virtuels pour les déplacements électriques compatibles avec la liaison d'incompressibilité. Je dois écrire en outre l'équation des travaux virtuels pour les déplacements compatibles avec la mobilité mécanique des corps qui forment le système. Pour cela, j'appelle T_1 la force vive proprement dite et q_1 l'un des paramètres de mobilité purement mécanique. Le travail virtuel pour δq_1 comprend plusieurs termes : le travail des forces électriques de potentiel W , c'est $-\frac{dW}{dq_1}$; le travail des autres forces appliquées (main de l'observateur, par exemple), je le désigne par Q_1 ; le travail des forces d'inertie, d'origine purement mécanique, c'est $-\left(\frac{dT_1}{dq_1'}\right)' + \frac{dT_1}{dq_1}$ quand la formule de Lagrange est applicable; enfin les forces électromagnétiques dues à l'inertie électrique, savoir $f. | ua$ par unité de volume, ont pour travail virtuel total l'intégrale

$$\int f. \left[\frac{dx}{dq_1} ua \right] d\tau$$

étendue à tout le champ électromagnétique. La fonction sous le signe \int est le produit obtenu en multipliant la constante f du n° 88 par le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\frac{dx}{dq_1}$, u , a . L'équation des travaux virtuels correspondant à la coordonnée q_1 est donc

$$(3) \quad Q_1 - \frac{dW}{dq_1} = \left(\frac{dT_1}{dq_1'}\right)' - \frac{dT_1}{dq_1} - \int f. \left[\frac{dx}{dq_1} ua \right] d\tau.$$

Aux équations (1), (2), (3) on peut ajouter celles qui concernent le champ magnétique (n° 69); ce sont, pour les milieux continus,

$$(4) \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \alpha = 4\pi u,$$

$$(5) \quad \left. \frac{d}{dx} \right| \alpha = 0.$$

Aux surfaces de discontinuité, les composantes tangentielles de α sont continues, les composantes normales de α sont continues.

Si les corps ne sont pas magnétiques, α est égal à α ; dès lors les équations (1), (2), (3), (4) et les conditions aux surfaces de discontinuité déterminent le mouvement électrique et le mouvement mécanique du système, puisqu'elles forment l'expression complète du principe général des travaux virtuels.

93. Équation de l'énergie. — C'est l'équation des travaux virtuels où l'on remplace le déplacement virtuel par le déplacement réellement pris. Or le déplacement élémentaire se compose des déplacements électriques dq qui se produisent dans les tubes de courant et des déplacements dq_1 des corps. Les premiers produisent un travail que j'ai évalué au n° 76. C'est

$$\mathcal{Q} dt - \delta W - dT \quad (\text{formule 4'})$$

en désignant désormais par δ la différentielle partielle due aux dq seuls et par ∂_1 la différentielle partielle due aux dq_1 avec $d = \delta + \partial_1$.

Il faut ajouter à ce travail celui de la force d'inertie nouvelle $|f[x'a]$; on trouve, comme au n° 75,

$$\Sigma i dt \int f[x'a dx] d\tau = dt \int f[x'au] d\tau.$$

En ajoutant ce résultat au précédent, j'obtiens pour le travail des forces tant appliquées que d'inertie

$$(1) \quad \mathcal{Q} dt - \delta W - dT + dt \int f[x'au] d\tau.$$

C'est le travail pour les déplacements électriques réels dq . Il faut y ajouter le travail pour les déplacements dq_1 de la matière. Les forces appliquées d'origine mécanique donnent un travail $d\mathcal{E}_1$ que l'on saura calculer dans chaque cas par les principes de la Mécanique rationnelle; dans $d\mathcal{E}_1$, il y a lieu de distinguer le travail des forces dérivant d'un potentiel $-dW_1$ et le travail des autres forces $\mathcal{P}_1 dt$. Les forces électrostatiques donnent le travail $-\Sigma \frac{dW}{dq_1} dq_1$ que je désigne par $-\partial_1 W$.

Je passe aux forces d'inertie : celles qui sont d'origine purement mécanique donnent, comme on sait, $-dT_1$; enfin les forces électromagnétiques donnent pour travail

$$+\sum_{q_1} dt \int f. \left[\frac{dx}{dq_1} ua \right] q_1' d\tau = dt \int f. [x'ua] d\tau.$$

Le travail total résultant des déplacements dq_1 de la matière est en résumé

$$(2) \quad \mathcal{Q}_1 dt - dW_1 - \partial_1 W - dT_1 + dt \int f[x'ua] d\tau.$$

L'équation de l'énergie s'obtient en égalant à zéro la somme des travaux (1) et (2). Dans l'addition, le dernier terme de l'expression (1) détruit le dernier terme de l'expression (2), car les volumes $[x'au]$ et $[x'ua]$ sont égaux et de signes contraires. C'est la même réduction que nous avons observée dans le cas de la roue de Barlow au moyen des équations (II) du n° 82. L'équation de l'énergie est ainsi :

$$\mathcal{Q} dt + \mathcal{Q}_1 dt = dW + dW_1 + dT + dT_1.$$

Elle signifie que l'énergie fournie au système égale l'accroissement de son énergie totale, composée de deux énergies potentielles et de deux énergies cinétiques, l'énergie électrique et l'énergie d'origine purement mécanique.

94. Conclusions. — 1° J'ai étendu aux corps en mouvement les deux lois fondamentales de l'Électromagnétisme établies au Chapitre I pour les corps en repos. La première est la liaison d'incompressibilité, la deuxième est la manifestation du principe des travaux virtuels sous la forme particulière qui convient à l'électricité.

2° J'ai donné les équations générales de l'Électromagnétisme pour les corps en mouvement. Ce sont les équations des travaux virtuels.

3° L'équation de l'énergie en est déduite comme en Mécanique rationnelle.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

95. **Ma conclusion est l'idée même de ce livre.** — Un système présentant des manifestations électriques est assimilable à un système à liaisons de la Mécanique rationnelle. C'est, non pas un système dont le degré de liberté est un nombre fini; c'est un milieu indéfini, analogue à un fluide incompressible, dans lequel plongeraient les corps pondérables avec leurs liaisons ordinaires de la Mécanique rationnelle.

Les équations de liaisons et les équations des travaux virtuels sont donc de deux sortes, relatives aux mouvements de la matière d'une part, et à l'électricité d'autre part. Les équations relatives à l'électricité résultent des deux lois fondamentales dont Kirchhoff a énoncé un cas particulier, la loi d'incompressibilité et l'équilibre des forces électromotrices dans tout contour fermé. Les autres équations sont les équations ordinaires de la Mécanique rationnelle.

On sait que le théorème des travaux virtuels fournit juste les équations nécessaires et suffisantes pour déterminer un système quelconque en fonction du temps. On peut être tenté d'en conclure que le problème de l'électricité est entièrement résolu par les deux lois de Kirchhoff généralisées. Il n'en est rien cependant, pour deux raisons que j'ai signalées et qui résultent de notre ignorance sur la constitution des aimants, d'une part (n° 42), et des diélectriques, d'autre part (n° 72). Notre ignorance sur les aimants nous empêche d'écrire les équations des travaux virtuels relatives aux courants particuliers qui constituent l'aimantation, d'après les idées d'Ampère, adoptées par Sarrau (n° 39). Nous n'avons à leur substituer que les équations bien défectueuses de l'aimantation (1).

Quant aux diélectriques autres que le vide, le phénomène de la dispersion des couleurs nous révèle qu'ils ont une con-

(1) MAXWELL, *Traité d'Électricité*, 3^e Partie, Chap. IV.

stitution complexe (n° 72), comportant, en chaque point, pour le déplacement électrique, non pas une seule inconnue vectorielle, *le courant de déplacement* p_1 , mais une deuxième inconnue, *le courant de conduction* p . La loi nécessaire pour déterminer la deuxième inconnue? Elle nous manque. Nous n'avons à lui substituer que les théories assez insuffisantes et les résultats assez complexes de la dispersion des couleurs (1).

Un vaste champ reste ouvert aux recherches expérimentales et théoriques dans les deux voies que je viens d'indiquer. Dans ces recherches, il semble qu'il doive être avantageux de prendre pour guide les idées mécaniques exposées dans ce Mémoire. Elles aideront peut-être à trouver une vérité plus complète, comme elles ont conduit Maxwell à la vérité partielle des circuits filiformes, comme elles m'ont conduit, je pense, à plus de vérité pour l'ensemble des phénomènes électriques.

(1) E. CARVALLO, *Rapport sur les théories et formules de dispersion*, présenté au Congrès de Physique en 1900, t. II, p. 175.

FIN.