ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO IX
(LXVI DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXXI

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1931

Sur les classes de fonctions presque-périodiques généralisées.

M. ALEXANDRE KOVANKO (Baku-Russie).

PRÉFACE

Dans le travail présent nous allons examiner une extension des classes de fonctions presque-périodiques de MM. WEYL-SCHMIDT, BEXICOVITSCH et W. STEPANOFF. Cette extension engendre la classe de fonctions $f(x)$, qui sont mesurables et ensuite la classe de fonctions $f(x)$, pour lesquelles $|f(x)|^k$ (1) est sommable.

CHAPITRE I.

Notes préliminaires.

§ 1.

A) **Significations.** — Soit E un ensemble lineaire à un diamètre infini sur $(-\infty < x < +\infty)$, qui est partout mesurable; désignons par $E(a, b)$ sa partie qui tombe dans l'intervalle (a, b).

Examinons ensuite sa densité moyenne sur l'intervalle $(a - T, a + T)$, c'est-à-dire la quantité:

$$\frac{\text{Mes } E(a - T,\ a + T)}{2T}.$$

Faisons tendre le nombre T vers ∞ et introduisons les significations suivantes:

$$\limsup_{T=\infty} \frac{\text{Mes } E(a - T,\ a + T)}{2T} = \delta_1 E;$$

$$\liminf_{T=\infty} \frac{\text{Mes } E(a - T,\ a + T)}{2T} = \delta_2 E.$$

Il est aisé de voir que $\delta_1 E$ et $\delta_2 E$ ne dépendent pas de a. Si $\delta_1 E = \delta_2 E$, nous écrivons:

$$\lim_{T=\infty} \frac{\text{Mes } E(a - T,\ a + T)}{2T} = \delta E.$$

(1) $k \geq 1$.

Si nous avons deux ensembles E_1 et E_2, alors évidemment:

$$\delta_1(E_1 + E_2) \leq \delta_1 E_1 + \delta_1 E_2 .$$

Soit $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ une fonction complexe mesurable de la variable réelle x sur $(-\infty, +\infty)$, qui soit partout sommable.

Introduisons les significations suivantes:

$$\limsup_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |\varphi(x)|\, dx = M_1\{|\varphi(x)|\};$$

$$\liminf_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |\varphi(x)|\, dx = M_2\{|\varphi(x)|\}.$$

Si $M_1\{|\varphi(x)|\} = M_2\{|\varphi(x)|\}$, alors nous écrivons:

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |\varphi(x)|\, dx = M\{|\varphi(x)|\},$$

et de même

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi(x) dx = M\{\varphi(x)\}.$$

De même, si E est un ensemble mesurable quelconque, nous posons:

$$\limsup_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|\, dx = M_1^E\{|\varphi(x(|\};$$

$$\liminf_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|\, dx = M_2^E\{|\varphi(x)|\}.$$

Et si $M_1^E\{|\varphi(x)|\} = M_2^E\{\varphi(x)\}$, alors nous posons:

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|\, dx = M^E\{|\varphi(x)|\},$$

et de même

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} \varphi(x) dx = M^E\{\varphi(x)\}.$$

Pour deux ensembles E_1 et E_2 nous avons évidemment les inégalités suivantes:

$$M_1^{E_1+E_2}\{|\varphi(x)|\} \leq M_1^{E_1}\{|\varphi(x)|\} + M_1^{E_2}\{|\varphi(x)|\};$$

de même

$$M_1^{E_1}\{|\varphi(x)|\} \leq M_1^{E_2}\{|\varphi(x)|\}, \quad \text{si} \quad E_1 < E_2.$$

Si nous avons deux fonctions sommables $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, alors:

$$M_1^E\{|\varphi(x)| + |\psi(x)|\} \leq M_1^E\{|\varphi(x)|\} + M_1^E\{|\psi(x)|\}.$$

B) **Définitions.** — Examinons une suite infinie de fonctions mesurables:

(1) $$\{\varphi_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, ...)$$

sur l'intervalle $(-\infty < x < +\infty)$.

DÉFINITION I. Nous disons que la suite (1) converge asymptotiquement uniformément « a. u. » vers la fonction $\varphi(x)$ si, quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe un nombre $N > 0$, tel que pour tout $n > N$, l'inégalité:

(2) $$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$$

est remplie pour chaque valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E de valeurs de x, avec $\delta_1 E < \varepsilon$.

Remarque: La suite (1) peut converger « a. u. » vers deux fonctions différentes $\varphi(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$, à condition que $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$ sur un ensemble $\tilde{E}$, avec $\delta\tilde{E} = 1$.

§ 2.

DÉFINITION II. Nous disons que la fonction $f(x) = u(x) + iv(x)$ est asymptotiquement-uniformément sommable « a. u. s. », si quelque soit le nombre positif ε, il est possible de trouver un nombre $\eta > 0$, tel, que pour tout ensemble E, avec $\delta_1 E < \eta$, l'inégalité suivante a lieu:

(3) $$M_1^E\{|\varphi(x)|\} < \varepsilon.$$

DÉFINITION III. Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... une suite de fonctions complexes sommables de la variable réelle x sur $(-\infty < x < +\infty)$. Nous disons que les fonctions de la suite sont également-asymptotiquement-uniformément sommables « é. u. a. s. », si quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un nombre $\eta > 0$, tel que l'inégalité suivante soit remplie:

$$M_1^E\{|f_n(x)|\} < \varepsilon$$

et cela pour tout n et pour tout ensemble E, avec $\delta_1 E < \eta$.

THÉORÈME I. *Soit* $k > l > 1$; *alors, si* $|f(x)|^k$ *est « a. u. s. », la fonction* $|f(x)|^l$ *l'est aussi.*

Démonstration. Choisissons un nombre positif ε quelconque.

Selon la Définition II, il est possible de trouver un nombre positif η moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ et tel, que $M_1^E\{|f(x)|^k\} < \frac{\varepsilon}{2}$ quand $\delta_1 E < \eta$.

Divisons l'ensemble E en deux parties E_1 et E_2 de manière suivante: $|f(x)| < 1$ sur E_1 et $|f(x)| \geq 1$ sur E_2.

Nous avons alors les inégalités évidentes:

$$M_1^E\{|f(x)|^l\} \leq M_1^{E_1}\{|f(x)|^l\} + M_1^{E_2}\{|f(x)|^l\} \leq \delta_1 E_1 + M_1^{E_2}\{|f(x)|^k\} <$$
$$< \eta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi nous avons l'inégalité:

$$M_1^E\{|f(x)|^l\} < \varepsilon, \text{ à condition, que } \delta_1 E < \eta.$$

Mais cela veut dire que $|f(x)|^l$ est « a. u. s. » c. q. f. d.

Remarque: Il est évident que toute fonction bornée est « a. u. s. » et toute suite de fonctions bornées dans leur ensemble représente une suite de fonctions « é. a. u. s. ».

§ 3.

Il nous reste encore à examiner deux inégalités qui nous serons utiles dans la suite.

Soit $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions sur l'intervalle $(-\infty < x < +\infty)$.

Soit k un nombre positif ≥ 1. Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont partout sommables, alors nous pouvons écrire l'inégalité bien connue de M. Minkowsky

$$(4) \qquad \left[\int_{E(-T,+T)} |f(x) + \varphi(x)|^k dx\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left[\int_{E(-T,+T)} |f(x)|^k dx\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|^k\right]^{\frac{1}{k}} \text{ (1)}.$$

En divisant les deux parties de l'inégalité (4) par $(2T)^k$ et en faisant tendre T vers ∞, nous obtenons évidemment l'inégalité suivante:

$$(5) \qquad [M_1^E\{|f(x) + \varphi(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}} \leq [M_1^E\{|f(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}} + [M_1^E\{|\varphi(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}}.$$

Également, si $|f(x)|^2$ et $|\varphi(x)|^2$ sont sommables, nous avons l'inégalité de Schwarz:

$$\left[\frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |f(x)\cdot\varphi(x)|\, dx\right]^2 \leq \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |f(x)|^2 dx \cdot \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|^2 dx;$$

---

(1) Par $|a|^k$ (partout dans la suite) nous désignons la valeur arithmétique de $|a|^k$.

d'où nous déduisons l'inégalité suivante:

$$[M_1^E\{|f(x)\cdot\varphi(x)|\}]^2 \leq M_1^E\{|f(x)|^2\}\cdot M_1^E\{|\varphi(x)|^2\}. \tag{6}$$

CHAPITRE II.

Les fonctions presque-périodiques mesurables.

Dans le chapitre présent nous donnerons une extension toute naturelle de la classe des fonctions presque-périodiques généralisées de M. BESICOVITCH (C. R., t. 181, p. 304) au cas des fonctions mesurables, non sommables.

§ 1.

DÉFINITION (α). Nous disons, que la fonction mesurable: $f(x) = u(x) + iv(x)$, (définie pour toute valeur de x sur $(-\infty < x < +\infty)$) (exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta \overline{E} = 0$) est presque périodique (α), « p. p. α », si quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, on peut trouver un polynome trigonométrique:

$$P_n(x) = \sum_{k\ 1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x} \quad (\lambda_k \text{ étant réel})$$

tel, que l'inégalité $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ est remplie pour chaque valeur de x, exclusion faite peut être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \varepsilon$.

THÉORÈME I. *Si les fonctions* f(x) *et* φ(x) *sont « p. p. α » alors leur somme* [f(x) + φ(x)] *est aussi une fonction « p. p. α ».*

DÉMONSTRATION. Soit ε un nombre positif < 1: alors selon la définition (α) il est possible de trouver deux polynomes trigonométriques

$$P_n(x) = \sum_{k-1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x} \quad \text{et} \quad Q_m(x) = \sum_{k=1}^{k-m} b_k e^{i\mu_k x} \quad (\lambda_k \text{ et } \mu_k \text{ étant réels}),$$

tels que les inégalités suivantes soient remplies:

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_1, avec $\delta_1 E_1 < \frac{\varepsilon}{2}$; et de même,

$$|\varphi(x) - Q_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_2, avec $\delta_1 E_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

En additionnant les inégalités (1) et (2), nous obtenons l'inégalité suivante:

$$|[f(x)+\varphi(x)]-[P_n(x)+Q_m(x)]| \leq |f(x)-P_n(x)|+|\varphi(x)-Q_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

d'où

(3) $$|[f(x)+\varphi(x)]-[P_n(x)+Q_m(x)]| < \varepsilon;$$

qui a lieu pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E=(E_1+E_2)$ avec $\delta_1 E < \varepsilon$.

Mais comme $P_n(x)+Q_m(x)$ est un polynome trigonométrique, alors nous avons à conclure, que $[f(x)+\varphi(x)]$ est une fonction « p. p. α ».

Théorème II. *Toute fonction* f(x) *qui est « p. p. α » est une fonction asymptotiquement bornée, c'est à dire, quelque soit le nombre positif* $\varepsilon < 1$, *il existe un nombre* $G > 0$ *tel que l'inégalité* $|f(x)| < G$ *a lieu pour toute valeur de* x, *exclusion faite peut-être d'un ensemble* E, *avec* $\delta_1 E < \varepsilon$.

Démonstration. Comme $f(x)$ est une fonction « p. p. α », alors, quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe un polynome trigonométrique:

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x};$$

tel que l'inégalité

(4) $$|f(x)-P_n(x)| < \varepsilon$$

est remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \varepsilon$; mais comme $P_n(x)$ est une fonction bornée [1], il est possible de choisir un nombre $G > 0$, tel que $|P_n(x)| < G-\varepsilon$.

Alors, à cause de (4), nous avons:

$$|f(x)| \leq |f(x)-P_n(x)|+|P_n(x)| \leq G-\varepsilon+\varepsilon = G,$$

d'où

$$|f(x)| < G,$$

pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \varepsilon$.

Théorème III. *Si deux fonctions* f(x) *et* φ(x) *sont « p. p. α », alors leur produit* f(x)·φ(x) *est aussi une fonction « p. p. α »*.

---

[1] $|P_n(x)| < \sum_1^n |a_k|$.

DÉMONSTRATION. Choisissons un nombre positif $\varepsilon < 1$ quelconque. A cause du Théorème II, nous pouvons choisir un nombre $G > 1$, tel que

$$|\varphi(x)| < G \tag{5}$$

pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_1, avec $\delta_1 E_1 < \frac{\varepsilon}{4}$.

Après avoir fixé le nombre G, nous pouvons trouver pour $f(x)$ (selon la définition α) un polynome trigonométrique:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x},$$

tel, que l'inégalité

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2G} \tag{6}$$

soit remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_2, avec $\delta_1 E_2 < \frac{\varepsilon}{2G} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $P_n(x)$ est une fonction bornée, nous pouvons choisir un nombre $G_n > 2$ tel que l'inégalité:

$$|P_n(x)| < G_n \tag{7}$$

soit remplie pour toute valeur de x.

Nous pouvons ensuite trouver un polynome trigonométrique

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^{k=m} b_k e^{i\mu_k x}; \quad (\mu_k \text{ étant réel})$$

tel que l'inégalité

$$|\varphi(x) - Q_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2G_n} \tag{8}$$

soit remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_3, avec $\delta_1 E_3 < \frac{\varepsilon}{2G_n} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Des inégalités (5), (6), (7) et (8) nous déduisons évidemment l'inégalité suivante:

$$|f(x) \cdot \varphi(x) - P_n(x) \cdot Q_m(x)| = |[f(x) - P_n(x)]\varphi(x) + [\varphi(x) - Q_m(x)]P_n(x)| \leq$$

$$\leq |f(x) - P_n(x)| \cdot |\varphi(x)| + |\varphi(x) - Q_m(x)| \cdot |P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2G} \cdot G + \frac{\varepsilon}{2G_n} \cdot G_n = \varepsilon;$$

nous avons donc:

$$|f(x) \cdot \varphi(x) - P_n(x) \cdot Q_m(x)| < \varepsilon \tag{9}$$

et cela pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être de l'ensemble $E = E_1 + E_2 + E_3$, avec $\delta_1 E \leq \delta_1 E_1 + \delta_1 E_2 + \delta_1 E_3 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

Mais comme $P_n(x) \cdot Q_m(x)$ est un polynome trigonométrique, donc $[f(x) \cdot \varphi(x)]$ est une fonction « p. p. α ».

§ 2.

Soit:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots \tag{10}$$

une suite de fonctions qui sont « p. p. α ».

THÉORÈME IV. *Si la suite* (10) *converge* « a. u » *vers* f(x), *alors* f(x) *est une fonction « p. p. α ».*

DÉMONSTRATION. Soit ε un nombre positif quelconque < 1: alors, par définition, il est possible de trouver pour chaque fonction $f_m(x)$ un polynome trigonométrique $P_{n,m}(x)$, tel, que l'inégalité:

$$| f_m(x) - P_{n,m}(x) | < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

est remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble $\tilde{E}_m$ tel, que $\delta_1 \tilde{E}_m < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mais comme la suite (10) converge « a. u » vers $f(x)$, alors il existe un nombre N tel, que pour $m > N$ nous aurons l'inégalité:

$$| f(x) - f_m(x) | < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

qui aura lieu pour chaque valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_m, avec $\delta_1 E_m < \frac{\varepsilon}{2}$.

Des inégalités (11) et (12) nous tirons l'inégalité suivante:

$$| f(x) - P_{n,m}(x) | \leq | f(x) - f_m(x) | + | f_m(x) - P_{n,m}(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

d'où

$$| f(x) - P_{n,m}(x) | < \varepsilon, \tag{13}$$

qui a lieu pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble $\bar{E}_m = \tilde{E}_m + E_m$, avec $\delta_1 \bar{E}_m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; donc $f(x)$ est une fonction « p. p. α ».

§ 3.

Soit $f(x)$ une fonction « p. p. α » : alors, quelque soit le nombre entier positif k, il est possible de trouver un polynome trigonométrique $P_{n_k}(x)$, tel que $|f(x) - P_{n_k}(x)| < \frac{1}{k}$ pour chaque valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_k, avec $\delta_1 E_k < \frac{1}{k}$.

Il est aisé de voir que la suite:

(14) $$P_{n_1}(x),\ P_{n_2}(x),\ P_{n_3}, \ldots$$

converge « a. u » vers $f(x)$.

En effet, quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, nous pouvons trouver un nombre entier k_0 tel, que $\varepsilon < \frac{1}{k_0}$; alors nous avons l'inégalité $|f(x) - P_{n_k}(x)| < \varepsilon$ pour tout nombre $k > k_0$ et pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_k, avec $\delta_1 E_k < \frac{1}{k} < \varepsilon$; c'est à dire, que la suite (14) converge « a. u » vers $f(x)$.

Nous pouvons donc donner à la définition (α) la forme suivante:

DÉFINITION (α). « $f(x)$ est « p. p. α », quand il existe une suite de polynomes trigonométriques, qui converge « a. u » vers $f(x)$ ».

§ 4.

THÉORÈME V. *Si la fonction* f(x) *est « p. p. α », alors* | f(x) | *l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Selon la définition (α), quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il est possible de trouver un polynome trigonométrique $P_n(x)$ tel que l'inégalité:

(15) $$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

soit remplie pour toute valeur x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \frac{\varepsilon}{2}$.

Il est évident que l'inégalité suivante a lieu:

(16) $$\big| |f(x)| - |P_n(x)| \big| \leq |f(x) - P_n(x)|.$$

Mais $|P_n(x)|$ est une fonction presque-périodique au sens de H. BOHR, car si nous désignons par $\tau(\varepsilon')$ la presque-periode de la fonction presque périodique $P_n(x)$, qui correspond au nombre ε', nous avons l'inégalité suivante:

$$\big|\,|P_n(x+\tau)| - |P_n(x)|\,\big| \leq |P_n(x+\tau) - P_n(x)| < \varepsilon',$$

qui est valable pour chaque valeur de x.

Par suite à cause de théorème de H. BOHR (« Acta Math. », t. 46, p. 195) il existe un polynome trigonométrique $Q_m(x)$ tel, que l'inégalité suivante a lieu:

$$\big|\,|P_n(x)| - Q_m(x)\,\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{17}$$

et cela pour chaque valeur de x.

Alors à cause des inégalités (15), (16) et (17), nous pouvons conclure que

$$\big|\,|f(x)| - Q_m(x)\,\big| \leq \big|\,|P_n(x)| - Q_m(x)\,\big| + \big|\,|f(x)| - |P_n(x)|\,\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

d'où

$$\big|\,|f(x)| - Q_m(x)\,\big| < \varepsilon \tag{18}$$

et cela pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Donc la fonction $|f(x)|$ est une fonction « p. p. α ».

Bornons la fonction $f(x)$ par un nombre $A > 0$, en posant

$$[f(x)]_A = f(x), \quad \text{où } |f(x)| < A, \quad \text{et } [f(x)]_A = A\frac{f(x)}{|f(x)|}, \quad \text{où } |f(x)| \geq A.$$

THÉORÈME VI. *Si* f(x) *est une fonction « p. p. α » alors* $[f(x)]_A$ *l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Prenons un nombre positif $\varepsilon < 1$. Par définition, il existe un polynome trigonométrique $P_n(x)$ tel, que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{19}$$

et cela pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\quad [P_n(x)]_A = P_n(x), \quad$ là où $|P_n(x)| < A$,

et

$$[P_n(x)]_A = A\frac{P_n(x)}{|P_n(x)|}, \quad \text{là où } |P_n(x)| \geq A.$$

Nous avons évidemment pour chaque valeur de x l'inégalité suivante:

$$|[f(x)]_A - [P_n(x)]_A| \leq |f(x) - P_n(x)|. \tag{20}$$

Mais il est aisé de voir que $[P_n(x)]_A$ est une fonction presque-périodique, car si $\tau(\varepsilon')$ est une presque période quelconque de $P_n(x)$, qui correspond à ε', alors nous avons l'inégalité suivante

$$|[P_n(x+\tau)]_A - [P_n(x)]_A| \leq |P_n(x+\tau) - P_n(x)| < \varepsilon',$$

qni est valable pour chaque valeur de x.

Nous avons donc à cause du théorème de H. BOHR (« Acta Math. », t. 46, p. 195) un tel polynome trigonométrique $P_n(x)$, que pour chaque valeur de x l'inégalité suivante a lieu:

(21) $$|[P_n(x)]_A - Q_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Des inégalités (19), (20) et (21) nous déduisons l'inégalité suivante:

$$|[f(x)]_A - Q_m(x)| \leq |[P_n(x)]_A - Q_m(x)| + |[f(x)]_A - [P_n(x)]_A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d'où

(22) $$|[f(x)]_A - Q_m(x)| < \varepsilon,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Donc $[f(x)_A$ est une fonction « p. p. α ».

Ce théorème nous permet de tirer une propriété très utile des fonctions « p. p. α » qui sont bornées.

Examinons donc la fonction bornée $[f(x)]_A$.

Prenons l'inégalité (21) et l'inégalité évidente: $|[P_n(x)]_A| \leq A$, qui est valable pour toute valeur de x. Nous voyons que

$$|Q_m(x)| \leq |[P_n(x)]_A - Q_m(x)| + |[P_n(x)]_A| \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + 1;$$

pour chaque valeur de x.

Donnons à ε une suite infinie de valeurs:

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \varepsilon_4, \ldots; \ \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Alors pour chaque ε_l nous avons un polynome trigonométrique $Q_{m_l}(x)$, tel que

$$|Q_{m_l}(x)| \leq A + 1; \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots).$$

Leur suite infinie:

$$Q_{m_1}(x), \ Q_{m_2}(x), \ Q_{m_3}(x), \ldots$$

converge « a. u » vers la fonction $[f(x)]_A$.

Nous avons de plus que $|Q_{m_l}(x)| \leq A + 1$, quel que soit l'index « l ».

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME VII. *Pour chaque fonction « p. p. α », dont le module est borné, il existe une suite infinie de polynomes trigonométriques bornés dans leur ensemble, qui converge* « a. u » *vers cette fonction.*

§ 5.

Soit $f(x)$ une fonction, qui est « p. p. α »: alors, quelque soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il est possible de trouver un polynome trigonométrique $P_n(x)$, tel que l'inégalité:

$$(23) \qquad | P_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

a lieu pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_x, avec $\delta_1 E_x < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ une presque période quelconque de la fonction $P_n(x)$: alors nous avons pour toute valeur de x, l'inégalité suivante:

$$(24) \qquad | P_n(x + \tau) - P_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si nous changeons dans l'inégalité (23) x par $(x > \tau)$, alors nous aurons l'inégalité:

$$(25) \qquad | P_n(x + \tau) - f(x + \tau) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

qui est valable pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être de l'ensemble $E_{x+\tau}$, avec $\delta_1 E_{x+\tau} < \frac{\varepsilon}{3}$.

En additionnant les inégalités (23), (24) et (25) nous obtenons l'inégalité suivante:

$$| f(x + \tau) - f(x) | \leq | f(x) - P_n(x) | + | P_n(x + \tau) - P_n(x) | +$$
$$+ | P_n(x + \tau) - f(x + \tau) | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

d'où

$$(26) \qquad | f(x + \tau) - f(x) | < \varepsilon$$

et cela pour chaque valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble $F_\tau = E_x + E_{x+\tau}$, avec $\delta_1 F_\tau < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Nous avons ainsi, en rappelant la définition des fonctions presque-périodiques, le théorème suivant:

THÉORÈME VIII. *Si* f(x) *est une fonction « p. p. α », alors pour tout nombre* $\varepsilon < 1$ *il est possible de trouver un nombre* « l », *tel, que dans chaque intervalle* (α, β) *de longueur* « l », *il existe au moins une presque-période* $\tau (\alpha < \tau \leq \beta)$, *telle que* $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$, *quelque soit* x, *exclusion faite peut-être, d'un ensemble* F_τ, *avec* $\delta_1 F_\tau < \varepsilon$.

CHAPITRE III.

Les fonctions presque-périodiques du type (α_k).

§ 1.

DÉFINITION (α_k). Soit k un nombre positif < 1.

Nous disons que la fonction $f(x) = u(x) + iv(x)$, de la variable réelle x, définie presque partout sur $(-\infty, +\infty)$, est presque-périodique α_k « p. p. α_k », si, quelque soit le nombre positif ε, il est possible de trouver un polynome trigonométrique:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{i\lambda k x}$$

(λ_k étant réel) tel que

$$M_1 \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} < \varepsilon.$$

THÉORÈME I. *Si la fonction* f(x) *est « p. p. α_k », elle est une fonction « p. p. α ».*

DÉMONSTRATION. Soit ε un nombre positif < 1. Selon la définition (α_k) nous pouvons trouver un polynome trigonométrique $P_n(x)$, tel, que

$$(1) \qquad M_1 \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} < \varepsilon^{k+1}.$$

Soit E l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles:

$$|f(x) - P_n(x)| \geq \varepsilon;$$

hors de E nous avons

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Par suite, nous aurons que

$$(2) \qquad M_1 \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} \leq M_1^E \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} \geq M_1^E \{ \varepsilon^k \} = \varepsilon^k \cdot \delta_1 E.$$

Des inégalités (1) et (2) il découle que

$$\varepsilon^k \cdot \delta_1 E < \varepsilon^{k+1}; \quad \text{d'où} \quad \delta_1 E < \varepsilon.$$

Par suite l'inégalité

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

est remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E, avec $\delta_1 E < \varepsilon$; c'est à dire, que $f(x)$ est « p. p. α ».

THÉORÈME II. *Si* f(x) *est une fonction « p. p.* α_k *», alors* $|f(x)|^k$ *est une fonction* « a. u. s ».

DÉMONSTRATION. Soit ε un nombre positif quelconque. Nous pouvons alors construire (selon la définition (α_k)) un polynome trigonométrique

$$P_n(x) = \sum_{l=1}^{l=n} a_l e^{i\lambda_l x}$$

(λ_l étant réel) tel que

$$M_1 \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{3}$$

Soit E un ensemble linéaire quelconque, alors à cause de l'inégalité (3) nous avons forcément:

$$M_1^E \{ |f(x) - P_n(x)|^k \} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{4}$$

Comme $|P_n(x)|^k$ est une fonction bornée, donc « a. u. s » (Chap. I), par suite il est possible de trouver un nombre positif η, tel, que pour $\delta_1 E < \eta$ l'inégalité suivante soit remplie:

$$M_1^E \{ |P_n(x)|^k \} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{5}$$

Donc, en utilisant (4), (5) et l'inégalité (5) du Chapitre I, nous pouvons conclure que

$$M_1^E \{ |f(x)|^k \} = M_1^E \{ |[f(x) - P_n(x)] + P_n(x)|^k \} \leq$$

$$\leq \left\{ [M_1^E \{ |f(x) - P_n(x)|^k \}]^{\frac{1}{k}} + [M_1^E \{ |P_n(x)|^k \}]^{\frac{1}{k}} \right\}^k < \left[\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}} \right]^k = \varepsilon;$$

à fin que $\delta_1 E < \eta$.

Nous avons ainsi pour $\delta_1 E < \eta$ l'inégalité suivante:

$$M_1^E \{ |f(x)|^k \} < \varepsilon;$$

donc $|f(x)|^k$ est une fonction « a. u. s », c. q. f. d.

§ 2.

Nous avons ainsi, par les Théorèmes I ed II, une condition nécessaire pour qu'une fonction $f(x)$ soit « p. p. α_k »; elle doit être « p. p. α » et $|f(x)|^k$ doit être « a. u. s ».

Démontrons que cette condition est aussi suffisante pour que $f(x)$ soit « p. p. α_k ».

Soit donc $f(x)$ une fonction « p. p. α » et soit $|f(x)|^k$ une fonction « a. u. s ».

Bornons la fonction $f(x)$ par le nombre $A > 0$, en posant $[f(x)]_A = f(x)$ là où $|f(x)| < A$ et $[f(x)]_A = A \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, là où $|f(x)| \geq A$.

Comme $|f(x)|^k$ est « a. u. s » et comme $|[f(x)]_A|^k \leq |f(x)|^k$, alors quelque soit le nombre positif ε, il est possible de trouver un nombre $\eta > 0$, tel que pour $\delta_1 E < \eta$ les inégalités suivantes sont remplies:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & M_1^E \{ |f(x)|^k \} < \frac{\varepsilon}{4^k} \\ & M_1^E \{ |[f(x)]_A|^k \} < \frac{\varepsilon}{4^k} \end{aligned} \right.$$

quelque soit A; par suite (par l'inégalité (5) du Chapitre I) nous pouvons conclure que:

$$M_1^E \{ |f(x) - [f(x)]_A|^k \} \leq \left\{ [M_1^E \{ |f(x)|^k \}]^{\frac{1}{k}} + [M_1^E \{ |[f(x)]_A| \}]^{\frac{k}{1}} \right\}^k \leq$$

$$\leq \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{4^k}\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\frac{\varepsilon}{4^k}\right]^{\frac{1}{k}} \right\}^k = \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}{4} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}{4} \right)^k = \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Nous avons donc l'inégalité:

$$M_1^E \{ |f(x) - [f(x)]_A|^k \} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

quelque soit le nombre A et à condition que $\delta_1 E < \eta$.

Choisissons A assez grand, pour que l'ensemble $\tilde{E}$ des valeurs de x pour lesquelles $f(x) - [f(x)]_A \neq 0$ soit tel, que $\delta_1 \tilde{E} < \eta$ (Théor. II, Chap. II).

Alors

$$M_1^E \{ |f - [f]_A|^k \} = M_1 \{ |f - [f]_A|^k \},$$

donc

$$(7) \qquad M_1 \{ |f(x) - [f(x)]_A|^k \} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

A cause du Théorème VII du Chapitre II, il est possible de construire une suite de polynomes trigonométriques $P_{n_l}(x)$ $\{ l = 1, 2, 3, \ldots \}$ qui converge « a. u » vers $[f(x)]_A$ et dont les termes sont des fonctions bornées dans leur ensemble par le nombre $(A+1)$.

Choisissons un nombre $\varepsilon_1 < 1$ qui satisfait à l'inégalité:

(9) $$\varepsilon_1^k + (A+2)^k \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Nous pouvons alors trouver un nombre entier $l_0 > 0$, tel que pour $l > l_0$ l'inégalité $|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)| < \varepsilon_1$ est remplie pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_l avec $\delta_1 E_l < \varepsilon_1$.

Examinons la quantité:

$$M_1\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\}.$$

Nous avons

(9) $$M_1\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\} \leq M_1^{E_l}\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\} + M_1^{CE_l}\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\};$$

Mais

(10) $$M_1^{CE_l}\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\} \leq M_1^{CE_l}\{\varepsilon_1^k\} < \varepsilon_1^k;$$

de même:

(11) $$M_1^{E_l}\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\} \leq \left\{[M_1^{E_l}\{|[f(x)]_A|^k\}]^{\frac{1}{k}} + [M_1^{E_l}\{|P_{n_l}(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}}\right\}^k \leq$$
$$\leq \left\{A[M_1^{E_l}\{1\}]^{\frac{1}{k}} + (A+1)[M_1^{E_l}\{1\}]^{\frac{1}{k}}\right\}^k = \left\{(A+2)(\delta_1 E_l)^{\frac{1}{k}}\right\}^k = (A+2)^k \varepsilon_1.$$

Des inégalités (8), (9), (10) et (11) nous avons à conclure que:

$$M_1\{|[f(x)]_A - P_{n_l}(x)|^k\} < \varepsilon_1^k + (A+2)^k \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Cela veut dire que $[f(x)]_A$ est une fonction « p. p. α_k »; donc nous pouvons trouver (quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$) un polynome trigonométrique $P_n(x)$ tel que:

(12) $$M_1\{|[f(x)]_A - P_n(x)|^k\} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

À cause des inégalités (7) et (12), nous avons l'inégalité suivante:

$$M_1\{|f(x) - P_n(x)|^k\} = M_1\{|(f(x) - [f(x)]_A) + ([f(x)]_A - P_n(x))|^k\} \leq$$
$$\leq \left\{[M_1\{|f(x) - [f(x)]_A|^k\}]^{\frac{1}{k}} + [M_1\{|[f(x)]_A - P_n(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}}\right\} <$$
$$< \left\{\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}^k = \varepsilon.$$

Donc

(13) $$M_1\{|f(x) - P_n(x)|^k\} < \varepsilon.$$

L'inégalité (13) nous démontre que $f(x)$ est une fonction « p. p. α_k » c. q. f. d.

§ 3.

Nous sommes ainsi venus au résultat suivant:

La condition necèssaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable $f(x) = u(x) + iv(x)$, *définie presque partout sur* $(-\infty < x < +\infty)$, *soit une fonction* « *p. p.* α_k » *consiste en ce que* $f(x)$ *est une fonction* « *p. p.* α » *et* $|f(x)|^k$ *est une fonction* « a. u. s ».

§ 4.

THÉORÈME III. *La somme de deux fonctions* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$, *qui sont des fonctions* « *p. p.* α_k » *est aussi une fonction* « *p. p.* α_k ».

DÉMONSTRATION. Selon la définition énoncée (§ 3), nous avons à conclure que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions « p. p. α », donc leur somme, $[f(x) + \varphi(x)]$ est une fonction « p. p. α » (Chap. II, Théor. I); de plus $|f(x)|^k$ et $|\varphi(x)|^k$ sont « a. u. s », donc, quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un nombre $\eta > 0$, tel que

$$M_1^E\{|f(x)|^k\} < \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{14}$$

et

$$M_1^E\{|\varphi(x)|^k\} < \frac{\varepsilon}{2^k}; \tag{15}$$

à condition que $\delta_1 E < \eta$.

Par suite, à cause de l'inégalité (5) du Chap. I, nous avons

$$M_1^E\{|f(x) + \varphi(x)|^k\} \leq \left\{[M_1^E\{|f(x)|^k\}]^{\frac{1}{k}} + [M_1^E\{|\varphi(x)|^k\}]^{\frac{4}{k}}\right\}^k \leq \left\{\left[\frac{\varepsilon}{2^k}\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\frac{\varepsilon}{2^k}\right]^{\frac{1}{k}}\right\}^k = \varepsilon;$$

d'où

$$M_1^E\{|f(x) + \varphi(x)|^k\} < \varepsilon;$$

quelque soit E, avec $\delta_1 E < \eta$, donc $|f(x) + \varphi(x)|^k$ est une fonction « a. u. s »; mais comme $[f(x) + \varphi(x)]$ est « p. p. α » alors (selon la condition (§ 3)) $[f(x) + \varphi(x)]$ est une fonction « p. p. α_k » c. q. f. d.

THÉORÈME IV. *Soit* $k \geq 2$; *si* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *sont des fonctions* « *p. p.* α_k », *alors leur produit* $f(x)$, $\varphi(x)$ *est une fonction* « *p. p.* $\alpha_{\frac{k}{2}}$ ».

DÉMONSTRATION. En premier lieu les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions « p. p. α », donc $f(x)\varphi(x)$ est aussi « p. p. α » (Chad. II, Théor. III); de plus, comme $|f(x)|^k$ et $|\varphi(x)|^k$ sont « a. u. s », alors quel que soit le nombre positif $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les inégalités suivantes sont remplies:

$$M_1^E\{|f(x)|^k\} < \varepsilon \tag{16}$$

et

$$M_1^E\{|\varphi(x)|^k\} < \varepsilon \tag{17}$$

à condition que $\delta_1 E < \eta$.

Par suite de l'inégalité (6) (Chap. I) nous avons

$$\left[M_1^E\left\{|f(x)\cdot\varphi(x)|^{\frac{k}{2}}\right\}\right]^2 < M_1^E\{|f(x)|^k\}\cdot M_1^E\{|\varphi(x)|^k\} < \varepsilon^2;$$

donc:

$$M_1^E\left\{|f(x)\cdot\varphi(x)|^{\frac{k}{2}}\right\} < \varepsilon,$$

à condition que $\delta_1 E < \eta$.

Par suite $f(x)\cdot\varphi(x)$ est une fonction « a. u. s », donc $f(x)\cdot\varphi(x)$ est une fonction « p. p. $\alpha_{\frac{k}{2}}$.

THÉORÈME V. *Si* $k \geq l \geq 1$ *et si* f(x) *est une fonction « p. p.* α_k », *elle est une fonction « p. p.* α_l ».

DÉMONSTRATION. En premier lieu la fonction $f(x)$ est « p. p. α_k », en second lieu $|f(x)|^k$ est « a. u. s », donc (Théor. I, Chap. I) $|f(x)|^l$ est « a. u. s », par suite $f(x)$ est « p. p. α_l ».

THÉORÈME VI. *Si* f(x) *est une fonction « p. p.* α_1 », *alors la valeur moyenne de* f(x) *existe sur* $(-\infty < x < +\infty)$.

DÉMONSTRATION. Nous avons, quelque soit $\varepsilon > 0$, un tel polynome trigonometrique $P_n(x) = \sum_{l=1}^{l=n} a_l e^{i\lambda_l x}$ que:

$$M_1\{|f(x) - P_n(x)|\} < \frac{\varepsilon}{4};$$

donc il existe un nombre T_0 tel, que pour $T > T_0$ l'inégalité suivante est remplie:

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(x)dx - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} P_n(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{18}$$

Mais comme

$$M\{P_n(x)\} = \sum_{l=1}^{l=n} a_l M\{e^{i\lambda_l x}\} \quad \text{et} \quad M\{e^{i\lambda_l x}\} = 0$$

pour $\lambda_l \neq 0$, et $M\{e^{i\lambda_l x}\} = 1$ pour $\lambda_l = 0$, donc $M\{P_n(x)\} = a_m$, si $\lambda_m = 0$; par suite $M\{P_n(x)\}$ existe. Donc il est possible de trouver un nombre $\overline{T}$ tel que pour $T > \overline{T}$ l'inégalité suivante a lieu:

$$(19) \qquad \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} P_n(x) dx - M\{ P_n(x) \} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si nous désignons par $\tilde{T}$ la plus grande des deux quantités T_0 et $\overline{T}$, alors des inégalités (18) et (19) nous pouvons déduire que:

$$(20) \qquad \left| \frac{1}{2K} \int_{-T}^{+T} f(x) dx - M\{ P_n(x) \} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donnons à T deux valeurs quelconques $T_1 > \tilde{T}$ et $T_2 > \tilde{T}$; nous avons alors deux inégalités:

$$\left| \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(x) dx - M\{ P_n(x) \} \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

et

$$\left| \frac{1}{2T_2} \int_{-T_2}^{+T_2} f(x) dx - M\{ P_n(x) \} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\left| \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(x) dx - \frac{1}{2T_2} \int_{-T_2}^{+T_2} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

quels que soient $T_1 > \tilde{T}$ et $T_2 > \tilde{T}$, d'où nous avons à conclure que

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x) dx = M\{ f(x) \};$$

existe.

Corollaire. $M\{ f(x) e^{-i\lambda x} \}$ existe pour chaque valeur réelle de λ, car $f(x) e^{-i\lambda x}$ est une fonction « p. p. α » et la fonction $| f(x) e^{-i\lambda x} | = | f(x) |$ est « a. u. s »; donc $f(x) e^{-i\lambda x}$ est « p. p. α_1 ».

Théorème VII. *Soit* f(x) *une fonction « p. p. α_1 », alors l'ensemble des valeurs de* $a(\lambda) = M\{ f(x) e^{-i\lambda x} \}$, *avec* $| a(\lambda) | > 0$, *est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Nous avons, quelque soit $\varepsilon > 0$, un polynome trigonometrique $P_n(x) = \sum_{l=1}^{n} a_l e^{i\lambda_l x}$ tel, que

$$M\{ | f(x) - P_n(x) | \} < \varepsilon$$

(Théor. VI), d'où:

(21) $$| M \{ f(x)e^{-i\lambda x} \} - M \{ P_n(x)e^{-i\lambda x} \} | = | M \{ [f(x) - P_n(x)]e^{-i\lambda x} \} | \leq$$
$$\leq M \{ | f(x) - P_n(x) | \} < \varepsilon.$$

Mais

$$M \{ f(x)e^{-i\lambda x} \} = a(\lambda);$$

et

$$M \{ e^{-i\lambda x} \cdot P_n(x) \} = \sum_{l=1}^{l=n} a_l M \{ e^{i(\lambda_l - \lambda)x} \}.$$

Si $\lambda = \lambda_l$ ($l = 1, 2, 3, \ldots, n$) alors:

$$M \{ e^{-i\lambda_l x} P_n(x) \} = a_l;$$

par suite nous tirons de l'inégalité (21) les inégalités suivantes:

$$| a(\lambda) - a_l | < \varepsilon \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ainsi nous voyons qu'il n'existe qu'un nombre fini de coefficients $a(\lambda)$ avec $| a(\lambda) | \geq \varepsilon$. Donnons à ε une suite de valeurs:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Alors l'ensemble des valeurs $a(\lambda)$ telles, que

$$\frac{1}{m} \leq | a(\lambda) | \leq \frac{1}{m-1} \qquad (m = \text{entier})$$

est toujours fini.

Par suite nous avons un ensemble dénombrable d'ensembles finis de valeurs de $a(\lambda)$ avec $| a(\lambda) | < 0$. Par suite l'ensemble des valeurs de $a(\lambda) \neq 0$ (Théor. de CANTOR) est dénombrable ou fini.

§ 5.

Soit $f(x)$ une fonction « p. p. α_k »; il est évident que $f(x + a)$ est aussi une fonction « p. p. α_k », quelque soit a; donc (Théor. III) $f(x + a) - f(x)$ est « p. p. α_k », par suite $| f(x + a) - f(x) |^k$ est « a. u. s ». Donc, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de lui adjoindre un nombre positif $\eta < 1$, avec $\eta^k < \frac{\varepsilon}{2}$, et tel que pour $\delta_1 E < \eta$ l'inégalité suivante a lieu:

(22) $$M_1^E \{ | f(x + a) - f(x) |^k \} < \frac{\varepsilon}{1}.$$

Soit $\tau(\eta)$ une presque période de la fonction « p. p. α » — $f(x)$ (Chap. II, § 5), qui correspond au nombre η; alors nous avons l'inégalité:

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\eta,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de x, exclusion faite, peut-être, d'un ensemble E, avec $\delta_1 E<\eta$.

Soit CE le complémentaire de E; nous avons alors, en posant dans (22) $a=\tau$, l'inégalité:

$$M_1\{|f(x+\tau)-f(x)|^k\}\leq M_1^E\{|f(x+\tau)-f(x)|^k\}+M_1^{CE}\{|f(x+\tau)-f(x)|^k\}\leq$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\eta^k\cdot\delta_1 CE<\frac{\varepsilon}{2}+\eta^k<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{1}=\varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

THÉORÈME VIII. *Si* f(x) *est une fonction « p. p. α_k » alors, quelque soit le nombre positif* ε, *il est possible de lui adjoindre un nombre* $l>0$, *tel que dans chaque intervalle de longueur « l » il existe au moins une presque période* τ, *qui possède la propriété suivante:*

$$M_1\{|f(x+\tau)\quad f(x)|^k\}<\varepsilon.$$

CHAPITRE IV.

Les classes diverses de fonctions presque-périodiques géneralisées.

§ 1.

Indiquons d'abord les classes de fonctions mesurables presque-périodiques géneralisées.

($\mathfrak{M}_1$). En premier lieu nous avons les fonctions (I) de W. STEPANOFF (« Math. Annal. », Bd. 95, S. 474).

($\mathfrak{M}_2$). En second lieu nous avons nos fonctions asymptotiquement-presque-périodiques, dont nous indiquons la notion dans la note des « C. R. », t. 188, p. 142.

($\mathfrak{M}_3$). Enfin nous avons les fonctions « p. p. α » du présent travail.

§ 2.

Indiquons à présent les conditions différentes de la sommabilité des fonctions $\varphi(x)$ définies sur $(-\infty<x<+\infty)$.

(S_1). En premier lieu nous avons la sommabilité uniforme de W. Stepanoff (« Math. Annal. », Bd. 95).

(S_2). En second lieu nous avons la sommabilité uniforme au sens généralisé (Schmidt, « Math. Annal. », Bd. 100, S. 334).

Nous disons que $\varphi(x)$ possède cette propriété si, quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver deux nombres $\eta(\varepsilon)$ et $T(\varepsilon)$ tels, que:

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{E(a-T,a+T)} |\varphi(x)|\, dx < \varepsilon;$$

quelque soit l'ensemble E, avec $\dfrac{\operatorname{Mes} E(a-T,\, a+T)}{2T} < \eta$, pour $T > T_0$, et cela uniformement en « a ».

(S_3). Enfin nous avons les fonctions « a. u. s ».

§ 3.

En posant $\varphi(x) = |f(x)|^k$, nous avons douze classes de fonctions presque-périodiques géneralisées, si nous faisons toutes les combinaisons possibles avec une définition quelconque $\mathfrak{M}_i$ et une définition S_j, et que nous désignons par $(\mathfrak{M}_i S_j)$ $\begin{pmatrix} i = 1,\ 2,\ 3 \\ j = 1,\ 2.\ 3 \end{pmatrix}$. Puis nous avons encore les classes $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$.

Les classes les plus remarquables sont les suivantes $\mathfrak{M}_i S_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Nous écrirons ces classes comme il suit:

$$(\mathfrak{M}S)_i^k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Il est aisé de démontrer que ces conditions sont équivalentes aux suivantes:

(I) $(i = 1)$ " $f(x)$ est p. p. $(\mathfrak{M}S)_1^k$, si quelque soit le nombre positif $\varepsilon > 0$ et le nombre positif α, il existe un nombre $l(\varepsilon, d) > 0$ tel que dans chaque intervalle de longueur l, il existe au moins une presque période τ, telle que

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{a+d} |f(x+\tau) - f(x)|^k\, dx < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre « a » ".

(II) $(i = 2)$ " $f(x)$ est p. p. $(\mathfrak{M}S)_2^k$, si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver deux nombres $l(\varepsilon)$ et $T_0(\varepsilon)$, tels que dans chaque intervalle de longueur « l » il existe au moins une presque période τ telle que pour $T > T_0(\varepsilon)$ nous ayons l'inégalité:

$$\frac{1}{2T}\int_{T-a}^{a+T} | f(x+\tau) - f(x) |^k dx < \varepsilon,$$

et cela uniformément en « a » ".

« Pour $k=2$ nous avons les fonctions de WEYL SCHMIDT (« Math. Annal. », Bd. 100, S. 334), (« Math. Annal. », Bd. 97, S. 354) ».

(III) $(i=3)$ " C'est notre définition (α_k). Pour $k=2$ nous avons les fonctions de BEXICOWITSCH (loc. cit.) ".

§ 4.

Indiquons quelques exemples:

Soit $f(x) = a_n$ sur les intervalles: $(2^n \leq x \leq 2^n + n)$; $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Dans tous les cas c'est une fonction (p. p. α); le polynome trigonométrique d'approximation est $\equiv 0$, car $f(x)$ diffère de 0 sur un ensemble d'intervalles $(2^n \leq x < 2^n + n)$, dont l'ensemble E est tel que $\delta_1 E = 0$.

En effet

$$\text{Mes}\, E(0, 2^n) = 1 + 2 + 3 + \ldots (n-1) = \frac{n(n-1)}{2};$$

donc

$$\frac{\text{Mes}\, E(0, 2^n)}{2 \cdot 2^n} = \frac{\text{Mes}\, E(-2^n, +2^n)}{2^{n+1}} = \frac{n(n-1)}{2^{n+2}};$$

par suite

$$\delta E = \lim_{n=\infty} \frac{\text{Mes}\, E(-2^n, 2^n)}{2^{n+1}} = 0.$$

I) Soit $a_n = \dfrac{2^n}{n}$;

$$\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^{-n}}^{2^n} | f(x) | dx = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{2^n} | f(x) | dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2^k}{k} \cdot k = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=n-1} 2^k =$$

$$= \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc

$$M_1^E \{ | f(x) | \} \leq M_1 \{ | f(x) | \} = \frac{1}{2}.$$

Donc $f(x)$ est non « p. p. α_1 ».

II) Soit $a_n = n^2$;

$$\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^n}^{+2^n} f(x)dx = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 = \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} k\right)^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2(n-1)^2}{2^{n+3}}.$$

Soit $\bar{E}$ un ensemble quelconque. Alors

$$M^{\bar{E}}\{|f(x)|\} \leq M^{E}\{|f(x)|\} = M\{|f(x)|\} = \lim_{n=\infty} \frac{n^2\, n-1)^2}{2^{n+3}} = 0.$$

Donc $[f(x)]$ est « p. p. α_1 ».

De plus, quelque soit le nombre $\rho \leq 1$, nous avons toujours $M^{\bar{E}}\{|f|^\rho\} = 0$. Donc $[f(x)]$ est « p. p. α_ρ ».

III) Soit $a_n = \dfrac{2^{\frac{n}{2}} - 2^{\frac{n-1}{2}}}{n}$; alors

$$\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^n}^{+2^n} |f(x)|\, dx = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{k-n-1}\left(2^{\frac{k}{2}} \quad 2^{\frac{k-1}{2}}\right) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} - 1}{2^{n+1}};$$

donc

$$M_1^{\bar{E}}\{|f(x)|\} \leq M_1^{E}\{|f(x)|\} = M_1\{|f(x)|\} \lim_{n=\infty} \frac{2^{\frac{n-1}{2}} - 1}{2^{n+1}};$$

par suite $f(x)$ est « p. p. α_1 ».

Mais $f(x)$ est non « p. p. α_2 » car:

$$\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^n}^{+2^n} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{1}^{a-1}(2^k - 2^{k-1}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Par suite

$$M_1^{E}\{|f(x)|^2\} = \frac{1}{4}.$$

Sull'Algebra delle successioni.

Memoria 2ª (*) di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Complemento all'Introduzione. — In alcune parti di questa 2ª Memoria mi sono ispirato alla nota Opera del prof. S. PINCHERLE (in collaborazione con U. AMALDI): *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi* (Bologna, 1901). Lascio, per ora, stabilire al Lettore quali siano i punti di contatto fra la detta Opera e la presente *Algebra delle successioni.*

CAPITOLO TERZO

Sviluppo dell'Algebra delle successioni.

§ 1. Considerazioni preliminari.

36. Da quanto precede risulta già che per le operazioni isobariche e binomiali valgono molte considerazioni completamente analoghe a quelle che si fanno per le operazioni ordinarie. Tale analogia si può estendere — ed io, qui, mi occuperò di una tale estensione — fino a costruire un'Algebra che includa l'Algebra ordinaria. In questa nuova Algebra gli enti, ai quali le operazioni si applicano, sono quelli della ordinaria Algebra e le successioni; e limitandoci a considerare le successioni

$$(a\varepsilon_n),\ (b\varepsilon_n),\ (c\varepsilon_n), \dots,$$

dove $a, b, c, \dots$ sono delle costanti (indipendenti, cioè, da n) ed (ε_n) è la successione *unitaria* definita al n.° 2, ci si viene, in sostanza, a restringere all'Algebra ordinaria: invero, per l'addizione e la sottrazione (n.° 4) si ha

$$a\varepsilon_n \pm b\varepsilon_n = (a \pm b)\varepsilon_n\,,$$

(*) Continuazione e fine della Memoria 1ª: *Sull'Algebra delle successioni.* « Annali di Matematica », s. IV, t. VIII (1930), pp. 103-139.

per la moltiplicazione e la divisione isobarica (n.i 4 e 22) è

$$a\varepsilon_n \dot{\,_n}\, b\varepsilon_n = ab\varepsilon_n, \quad \frac{a\varepsilon_n}{b\varepsilon_n}\Big|^n = \frac{a}{b}\,\varepsilon_n,$$

e similmente per la moltiplicazione e la divisione binomiale.

37. In precedenza abbiamo considerato la *potenza isobarica* e la *potenza binomiale*, di una successione (a_n), quando l'esponente è un numero *intero*, ed abbiamo visto che

α) se l'esponente è un intero positivo (n.° 6), le potenze, tanto isobarica che binomiale, hanno significato qualunque sia la successione (a_n);

β) se l'esponente è lo zero (n.° 6), resta indeterminato il significato di tali potenze solo quando la successione (a_n) è totalmente nulla;

γ) se l'esponente è un intero negativo (n.° 23, γ)), affinchè le dette potenze abbiano significato è necessario e basta che la successione (a_n) non sia inizialmente nulla.

Stabiliamo, ora, il significato delle potenze isobarica e binomiale di una successione, quando si consideri un *esponente frazionario*. Poniamo, a tale scopo, la seguente definizione:

Data una successione (a_n) e fissato un intero $m > 1$, si dirà che una successione (α_n) è *radice* m^esima^ *isobarica* [*binomiale*] *della* (a_n), se la potenza m^{esima} isobarica [binomiale] di (α_n) è uguale ad (a_n).

Se (a_n) non è inizialmente nulla, vale a dire se è $a_0 \neq 0$, esistono sempre m, ed m sole, radici m^{esime} isobariche [binomiali] di (a_n): esse si ottengono prendendo per loro primo elemento uno degli m valori di $\sqrt[m]{a_0}$ e cambiando in corrispondenza gli altri elementi.

Se (a_n), invece, è inizialmente nulla di un certo ordine $p \geq 1$, vale a dire se è $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ ed $a_p \neq 0$, non è sempre possibile l'estrazione di radice di un dato indice intero $m > 1$: si trova facilmente, in virtù del n.° 10, che condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una radice m^{esima} isobarica [binomiale] — e quindi m radici — è che m sia un divisore di p.

Per indicare, quando esistono, le m radici m^{esime} isobariche di (a_n) si adotterà il simbolo

$$\sqrt[m]{a_n}\Big|^n, \ (n=0, 1, 2, \dots), \quad \text{oppure} \quad a_n^{\frac{1}{m})n}, \ (n=0, 1, 2, \dots),$$

ed analogamente per le radici binomiali si scriverà:

$$\sqrt[m]{a_n}^{\,|n}, \; (n=0, 1, 2, \ldots), \quad \text{oppure} \quad \left.a_n^{\frac{1}{m}}\right)^n, \; (n=0, 1, 2, \ldots) \text{ [1]}.$$

Ad esempio, una delle radici m^{esime} isobariche di $\binom{m}{n}$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$ è data (n.° 15, (31)) da $\binom{1}{n}$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$; una delle radici m^{esime} binomiali di m^n, $(n=0, 1, 2, \ldots)$ è data (n.° 18, (42)) da 1^n, $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Ne consegue, essendo μ un intero, il significato da attribuire ai simboli

$$\sqrt[m]{a_n^{\mu)_n}}^{\,|n} \quad \text{oppure} \quad \left.a_n^{\frac{\mu}{m}}\right)_n, \quad \left[\sqrt[m]{a_n^{\mu)^n}}^{\,|n} \quad \text{oppure} \quad \left.a_n^{\frac{\mu}{m}}\right)^n\right].$$

38. Per ciò che segue, è utile fare una generalizzazione delle operazioni isobariche e binomiali introdotte nei due Capitoli precedenti. Consideriamo, all'uopo, le *successioni doppie*

$$a_{m,n}, \; (m=0, 1, 2, \ldots; \; n=0, 1, 2, \ldots); \quad b_{m,n}, \; (m=0, 1, 2, \ldots; \; n=0, 1, 2, \ldots),$$

che indicheremo brevemente con $(a_{m,n})$, $(b_{m,n})$, e poniamo le seguenti definizioni:

α) Si dirà *prodotto doppio isobarico* di $(a_{m,n})$ e $(b_{m,n})$ la successione doppia

$$\sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} a_{r,s} b_{m-r,n-s} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots; \; n=0, 1, 2, \ldots),$$

il cui elemento generale, che si può anche scrivere nelle due forme

$$\sum_{r=0}^{m} a_{r,n} \overset{\cdot}{n} b_{m-r,n}, \quad \sum_{s=0}^{n} a_{m,s} \overset{\cdot}{m} b_{m,n-s},$$

si indicherà brevemente col simbolo

$$a_{m,n} \overset{\cdot}{m,n} b_{m,n}.$$

β) Si dirà *prodotto doppio binomiale* di $(a_{m,n})$ e $(b_{m,n})$ la successione doppia

$$\sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \binom{m}{r} \binom{n}{s} a_{r,s} b_{m-r,n-s} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots; \; n=0, 1, 2, \ldots),$$

[1] L'indice $m=2$, nei simboli contenenti il segno $\sqrt{\;}$, si potrà anche sottintendere.

il cui elemento generale, che si può anche scrivere nelle due forme

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}a_{r,n}\overset{n}{\cdot}b_{m-r,n}, \quad \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}a_{m,s}\overset{m}{\cdot}b_{m,n-s},$$

si indicherà brevemente col simbolo

$$a_{m,n}\overset{m,n}{\cdot}b_{m,n}.$$

γ) Si diranno *prodotti doppi isobarico-binomiali* di $(a_{m,n})$ e $(b_{m,n})$ le successioni doppie

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}a_{r,s}b_{m-r,n-s} \qquad (m=0,1,2,...;\ n=0,1,2,...),$$

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}a_{r,s}b_{m-r,n-s} \qquad (m=0,1,2,...;\ n=0,1,2,...),$$

i cui elementi generali si indicheranno, rispettivamente, coi simboli

$$a_{m,n}\overset{n}{\underset{m}{\cdot}}b_{m,n}, \quad a_{m,n}\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}b_{m,n}.$$

Il primo prodotto è isobarico rispetto all'indice m e binomiale rispetto ad n, il secondo prodotto è isobarico rispetto ad n e binomiale rispetto ad m.

Le operazioni corrispondenti si diranno, rispettivamente, *moltiplicazione doppia isobarica*, *moltiplicazione doppia binomiale*, *moltiplicazione doppia isobarico-binomiale.*

OSSERVAZIONE. — A queste moltiplicazioni doppie (o d'ordine 2) si possono estendere varie considerazioni fatte nei Capitoli I e II per le moltiplicazioni che diremo *semplici* (o d'ordine 1), ma nel presente lavoro ci limiteremo solamente all'uso dei simboli or ora introdotti. In generale, si potrebbero studiare le *moltiplicazioni multiple* di un ordine finito qualsiasi.

39. Ciò premesso, si diranno *espressioni isobariche*, *espressioni binomiali*, *espressioni isobarico-binomiali* le espressioni nelle quali figurano, oltre ai segni di operazioni ordinarie, rispettivamente i segni di operazioni isobariche, di operazioni binomiali, di operazioni isobariche e binomiali insieme; queste operazioni essendo applicate, ordinatamente, a numeri ed a lettere (cognite ed incognite), ad elementi generali di successioni numeriche [1] o di successioni letterali (cognite ed incognite) o di successioni funzioni.

[1] Con *successione numerica* s'intenderà una successione i cui elementi sono tutti numeri, con *successione letterale* una successione nella quale almeno un elemento è una lettera (gli altri elementi essendo numeri o lettere).

Si capisce, poi, quale sia il significato da attribuire alle frasi *espressione isobarica razionale (intera* o *fratta), espressione isobarica irrazionale;* e, analogamente, per le espressioni binomiali e per le isobarico-binomiali.

§ 2. Moltiplicazione isobarica e moltiplicazione binomiale.

40. Per moltiplicare isobaricamente [binomialmente] due espressioni isobariche [binomiali] razionali intere (n.° 39) si farà (n.° 7, γ)) la somma dei prodotti isobarici [binomiali] di tutti i termini del moltiplicando per tutti i termini del moltiplicatore.

La formazione del prodotto può eseguirsi più facilmente quando i fattori sono ordinati secondo le potenze isobariche [binomiali] — crescenti o decrescenti — di una determinata successione: conviene servirsi, in tale caso, di un prospetto di moltiplicazione analogo a quello della usuale moltiplicazione dei polinomi ordinati. Consideriamo, ad esempio, la seguente semplice moltiplicazione binomiale:

$$\begin{array}{lllllll}
5^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} & - 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} & + 1^n \overset{n}{\cdot} x_n & + \varepsilon_n & & & \\
 & & 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} & - x_n & & & \\
\hline
6^n \overset{n}{\cdot} x_n^{5)^n} & - 3^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} & + 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} & + 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} & & & \\
 & - 5^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} & + 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} & - 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} & - x_n & & \\
\hline
6^n \overset{n}{\cdot} x_n^{5)^n} & - (3^n+5^n) \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} & + 2^{n+1} \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} & - x_n\,. & & &
\end{array}$$

Conformemente a quanto si è osservato al n.° 36, le usuali moltiplicazioni fra polinomi ordinati si possono trasformare in moltiplicazioni isobariche ed in moltiplicazioni binomiali: volendo fare un tale passaggio, basterà, rispettivamente, sostituire ad un polinomio quale, ad esempio, $x^3 + 5x^2 + 3x$, espressioni della forma

$$(x\varepsilon_n)^{3)_n} + 5(x\varepsilon_n)^{2)_n} + 3x\varepsilon_n\,,\quad (x\varepsilon_n)^{3)^n} + 5(x\varepsilon_n)^{2)^n} + 3x\varepsilon_n\,.$$

41. *Potenza di un binomio.* — La formula di NEWTON

$$(a_n + b_n)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_n^{m-r} \overset{r}{b_n} = a_n^m \overset{m}{\cdot} b_n^m,$$

dove (a_n) e (b_n) sono due determinate successioni, si può generalizzare facilmente al caso delle potenze isobariche e binomiali.

α) Nel caso delle potenze isobariche abbiamo:

$$(a_n + b_n)^{2)_n} = a_n^{2)_n} + 2a_n \underset{n}{\cdot} b_n + b_n^{2)_n},$$
$$(a_n + b_n)^{3)_n} = a_n^{3)_n} + 3a_n^{2)_n} \underset{n}{\cdot} b_n + 3a_n \underset{n}{\cdot} b_n^{2)_n} + b_n^{3)_n},$$

ed in generale, col principio di induzione completa, si conclude facilmente, essendo m un intero positivo,

$$(1)\qquad (a_n + b_n)^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_n^{m-r)_n} \underset{n}{\cdot} b_n^{r)_n} = a_n^{m)_n} \underset{n}{\overset{m}{\cdot}} b_n^{m)_n}.$$

In particolare per $a_n \equiv a\varepsilon_n$, $b_n \equiv b\varepsilon_n$, dove a e b sono delle costanti, si ha l'ordinaria formula dello sviluppo del binomio di NEWTON; per $b_n \equiv x\varepsilon_n$, dove x è una costante, si ha

$$(2)\qquad (a_n + x\varepsilon_n)^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_n^{m-r)_n} x^r = a_n^{m)_n} \overset{m}{\cdot} x^m.$$

β) Nel caso delle potenze binomiali si trova analogamente:

$$(3)\qquad (a_n + b_n)^{m)^n} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_n^{m-r)^n} \overset{n}{\cdot} b_n^{r)^n} = a_n^{m)^n} \overset{m,n}{\cdot} b_n^{m)^n}.$$

Anche qui per $a_n \equiv a\varepsilon_n$, $b_n \equiv b\varepsilon_n$ si ha l'ordinaria formula dello sviluppo del binomio di NEWTON; per $b_n \equiv x\varepsilon_n$ si ha:

$$(4)\qquad (a_n + x\varepsilon_n)^{m)^n} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_n^{m-r)^n} x^r = a_n^{m)^n} \overset{m}{\cdot} x^m.$$

Ad esempio è, in virtù della (42) del n.° 18,

$$(1^n - \varepsilon_n)^{m)^n} = m^n \overset{m}{\cdot} (-1)^m = \Delta^m 0^n,$$

le $\Delta^m 0^n$ essendo le così dette *differenze* m^{esime} *di* 0^n.

42. *Potenza di un polinomio.* — Consideriamo ora $p+1$ successioni:

$$(a_{n,0}),\ (a_{n,1}), \dots,\ (a_{n,p}).$$

Si ha, applicando successivamente la (1),

$$(a_{n,0} + a_{n,1} + \dots + a_{n,p})^{m)_n} =$$
$$= a_{n,0}^{m)_n} \underset{n}{\overset{m}{\cdot}} (a_{n,1} + \dots + a_{n,p})^{m)_n} = a_{n,0}^{m)_n} \underset{n}{\overset{m}{\cdot}} a_{n,1}^{m)_n} \underset{n}{\overset{m}{\cdot}} (a_{n,2} + \dots + a_{n,p})^{m)_n} = \dots,$$

ed infine

(5) $$(a_{n,0}+a_{n,1}+\dots+a_{n,p})^{m)_n}=a_{n,0}^{m)_n}\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}a_{n,1}^{m)_n}\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}\dots\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}a_{n,p}^{m)_n},$$

da cui discendono facilmente, in virtù del n.° 38 e delle formule del n.° 7, β), le diverse espressioni del primo membro di (5) a mezzo dei segni sommatori.

Analogamente, applicando (3), si trova per la potenza binomiale:

(6) $$(a_{n,0}+a_{n,1}+\dots+a_{n,p})^{m)^n}=a_{n,0}^{m)^n}\overset{m,n}{\cdot}a_{n,1}^{m)^n}\overset{m,n}{\cdot}\dots\overset{m,n}{\cdot}a_{n,p}^{m)^n}.$$

43. *Potenze isobariche di successioni ultimamente nulle.* — Nel caso delle successioni ultimamente nulle (n.° 1) è opportuno — in vista delle applicazioni che si possono fare dell'Algebra delle successioni — scrivere per esteso le espressioni delle potenze isobariche e binomiali. A tale scopo, consideriamo una successione generica ultimamente nulla (n.° 2):

$$a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\dots+a_p\varepsilon_{n-p}\qquad(n=0,1,2,\dots),$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_p$ sono delle costanti (indipendenti, cioè, da n), e riferiamoci dapprima alle potenze isobariche. Abbiamo, applicando la (5) ed in virtù del n.° 20, β),

(7) $$(a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\dots+a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n}=$$
$$=a_0^m\varepsilon_n\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}a_1^m\varepsilon_{n-m}\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}a_2^m\varepsilon_{n-2m}\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}\dots\overset{m}{\underset{n}{\cdot}}a_p^m\varepsilon_{n-pm}.$$

Da qui discendono, tenendo presente il n.° 38, γ) e le formule (9) e (9′) del n.° 7, le espressioni che cerchiamo.

α) Dalla (7), in virtù del n.° 38, γ) e della (9) del n.° 7, segue:

(8) $$(a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\dots+a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n}=$$
$$=\sum_{r_1=0}^{m}\sum_{r_2=0}^{r_1}\dots\sum_{r_p=0}^{r_{p-1}}\binom{m}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\dots\binom{r_{p-1}}{r_p}a_0^{m-r_1}a_1^{r_1-r_2}\dots a_{p-1}^{r_{p-1}-r_p}a_p^{r_p}\varepsilon_{n-(r_1+r_2+\dots+r_p)},$$

dove si è tenuto conto che è (n.° 20, α))

$$\varepsilon_n\overset{\cdot}{n}\varepsilon_{n-(r_1-r_2)}\overset{\cdot}{n}\varepsilon_{n-2(r_2-r_3)}\overset{\cdot}{n}\dots\overset{\cdot}{n}\varepsilon_{n-(p-1)(r_{p-1}-r_p)}\overset{\cdot}{n}\varepsilon_{n-pr_p}=\varepsilon_{n-(r_1+r_2+\dots+r_p)}.$$

Facendo, in (8), $a_0=0$ — e cambiando poi $r_2, r_3, \dots, r_p$ ordinatamente in $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ — si ha:

(8′) $$(a_1\varepsilon_{n-1}+\dots+a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n}=$$
$$=\sum_{r_1=0}^{m}\sum_{r_2=0}^{r_1}\dots\sum_{r_{p-1}=0}^{r_{p-2}}\binom{m}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\dots\binom{r_{p-2}}{r_{p-1}}a_1^{m-r_1}a_2^{r_1-r_2}\dots a_{p-1}^{r_{p-2}-r_{p-1}}a_p^{r_{p-1}}\varepsilon_{n-(m+r_1+r_2+\dots+r_{p-1})}.$$

Notiamo ora i casi particolari, delle formule (8) ed (8'), ottenuti facendo $p=1, 2, 3$ (indichiamo poi, per semplicità, le costanti a_r con a, b, c, d). Per $p=1$, si ha da (8):

$$(a\varepsilon_n + b\varepsilon_{n-1})^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}a^{m-r}b^r\varepsilon_{n-r},$$

ossia

(9) $$(a\varepsilon_n + b\varepsilon_{n-1})^{m)_n} = \binom{m}{n}a^{m-n}b^n,$$

la quale fornisce, dunque, l'espressione della potenza m^{esima} isobarica di una successione ultimamente nulla d'ordine 2. Per $p=2$, si ha da (8'):

$$(a\varepsilon_{n-1} + b\varepsilon_{n-2})^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}a^{m-r}b^r\varepsilon_{n-(m+r)},$$

ossia

(9') $$(a\varepsilon_{n-1} + b\varepsilon_{n-2})^{m)_n} = \binom{m}{n-m}a^{2m-n}b^{n-m},$$

la quale, del resto, si poteva dedurre immediatamente da (9) moltiplicandone ambo i membri per $\varepsilon_{n-1}^{m)_n} = \varepsilon_{n-m}$. Per $p=2$, si ha da (8):

$$(a\varepsilon_n + b\varepsilon_{n-1} + c\varepsilon_{n-2})^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\binom{m}{r}\binom{r}{s}a^{m-r}b^{r-s}c^s\varepsilon_{n-(r+s)},$$

cioè

(10) $$(a\varepsilon_n + b\varepsilon_{n-1} + c\varepsilon_{n-2})^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{r}{n-r}a^{m-r}b^{2r-n}c^{n-r}.$$

Per $p=3$, si ha similmente da (8'):

(10') $$(a\varepsilon_{n-1} + b\varepsilon_{n-2} + c\varepsilon_{n-3})^{m)_n} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{r}{n-m-r}a^{m-r}b^{m+2r-n}c^{n-m-r}.$$

Analogamente si trova:

(11) $$(a\varepsilon_n + b\varepsilon_{n-1} + c\varepsilon_{n-2} + d\varepsilon_{n-3})^{m)_n} =$$
$$= \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\binom{m}{r}\binom{r}{s}\binom{s}{n-r-s}a^{m-r}b^{r-s}c^{r+2s-n}d^{n-r-s},$$

(11') $$(a\varepsilon_{n-1} + b\varepsilon_{n-2} + c\varepsilon_{n-3} + d\varepsilon_{n-4})^{m)_n} =$$
$$= \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\binom{m}{r}\binom{r}{s}\binom{s}{n-m-r-s}a^{m-r}b^{r-s}c^{m+r+2s-n}d^{n-m-r-s}.$$

β) Possiamo dare, per le potenze precedenti, un altro tipo di espressioni. Dalla (7), applicando la (9') del n.° 7, si ha:

$$(a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n} =$$
$$= \sum \frac{m!}{r_0!\, r_1! \dots r_p!} a_0^{r_0} a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p} \varepsilon_{n-r_1} \dot{n}\, \varepsilon_{n-2r_2} \dot{n} \dots \dot{n}\, \varepsilon_{n-pr_p},$$

ossia, pel n.° 20, α),

(12) $$(a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n} =$$
$$= \sum \frac{m!}{r_0!\, r_1! \dots r_p!} a_0^{r_0} a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p} \varepsilon_{n-(r_1+2r_2+\dots+pr_p)},$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i sistemi di $p+1$ numeri interi, positivi o nulli, r_0, $r_1, \dots, r_p$, tali che sia $r_0 + r_1 + \dots + r_p = m$. La (12) si può anche scrivere:

(12') $$(a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n} = \sum{}' \frac{m!}{r_0!\, r_1! \dots r_p!} a_0^{r_0} a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p},$$

dove la sommatoria accentata va estesa a futti i sistemi di $p+1$ numeri interi, positivi o nulli, r_0, r_1, $r_2, \dots, r_p$, tali che sia

$$\begin{cases} r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_p = m, \\ \quad\; r_1 + 2r_2 + \dots + pr_p = n. \end{cases}$$

Se è $a_0 = 0$, si ha analogamente:

(13) $$(a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n} = \sum{}' \frac{m!}{r_1! \dots r_p!} a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p},$$

dove la sommatoria accentata va estesa a tutti i sistemi di p numeri interi, positivi o nulli, r_1, $r_2, \dots, r_p$, tali che sia

$$\begin{cases} r_1 + \;\; r_2 + \dots + r_p = m, \\ r_1 + 2r_2 + \dots + pr_p = n. \end{cases}$$

44. *Potenze binomiali di successioni ultimamente nulle.* — Le formule (3) e (6) permettono analogamente di determinare le espressioni delle potenze binomiali di successioni ultimamente nulle. Tali espressioni si possono, però, dedurre immediatamente da quelle del numero precedente notando che si ha, in virtù della (11') del n.° 8,

$$(a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{m)^n} = n!\left(\frac{a_0}{0!}\varepsilon_n + \frac{a_1}{1!}\varepsilon_{n-1} + \dots + \frac{a_p}{p!}\varepsilon_{n-p}\right)^{m)_n}.$$

§ 3. Divisione isobarica e divisione binomiale. Divisibilità.

45. La divisione isobarica [binomiale] di due espressioni isobariche [binomiali] razionali intere (n.° 39), ordinate secondo le potenze isobariche [binomiali], crescenti o decrescenti, di una determinata successione, conviene effettuarla servendosi di un prospetto analogo a quello che si forma nell' ordinaria divisione dei polinomi ordinati. Consideriamo, per esempio, la seguente semplice divisione binomiale:

$$\begin{array}{r|l}
6^n \overset{n}{\cdot} x_n^{5)^n} + (1^n - 5^n) \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} - (3^n + \varepsilon_n) \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} + 2^{n+1} \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - 1^n \overset{n}{\cdot} x^n & 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - x_n \\ \cline{2-2}
- 6^n \overset{n}{\cdot} x_n^{5)^n} + \qquad 5^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 5^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} + x_n^{2)^n} - 2^n \overset{n}{\cdot} x_n + 1^n \\ \cline{1-1}
1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} - (3^n + \varepsilon_n) \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} + 2^{n+1} \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - 1^n \overset{n}{\cdot} x^n & \\
- 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} + \qquad x_n^{3)^n} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
- 3^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} + 2^{n+1} \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - 1^n \overset{n}{\cdot} x^n & \\
3^n \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} - 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - 1^n \overset{n}{\cdot} x^n & \\
- 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + 1^n \overset{n}{\cdot} x^n & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

La prova di questa divisione si farà moltiplicando binomialmente il divisore per il quoziente ottenuto: si dovrà ottenere il dividendo.

Sarà utile, poi, applicare la naturale estensione della *regola di Ruffini* quando si abbia da dividere isobaricamente [binomialmente] una espressione intera, come quelle sopra indicate, per un binomio della forma $x_n - \alpha_n$. Così volendo determinare il quoziente ed il resto della divisione binomiale

$$\left(3^n \overset{n}{\cdot} x_n^{5)^n} + 2^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} - 1^n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + x_n - 2^n\right) \overset{n}{:} (x_n - 1^n),$$

si potrà formare lo schema

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 3^n & 2^n & 0 & -1^n & \varepsilon_n & -2^n \\
1^n & & 4^n & 3^n + 5^n & 4^n + 6^n & -2^n + 5^n + 7^n & 1^n - 3^n + 6^n + 8^n \\ \hline
 & 3^n & 2^n + 4^n & 3^n + 5^n & -1^n + 4^n + 6^n & \varepsilon_n - 2^n + 5^n + 7^n & \multicolumn{1}{|c}{1^n - 2^n - 3^n + 6^n + 8^n}
\end{array};$$

onde si ha, per la frazione binomiale sopra scritta, l' espressione

$$3^n \overset{n}{\cdot} x_n^{4)^n} + (2^n + 4^n) \overset{n}{\cdot} x_n^{3)^n} + (3^n + 5^n) \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} - (1^n - 4^n - 6^n) \overset{n}{\cdot} x_n +$$
$$+ (\varepsilon_n - 2^n + 5^n + 7^n) + \frac{1^n - 2^n - 3^n + 6^n + 8^n}{x_n - 1^n}\Big|_n .$$

Ne discendono i concetti di *divisibilità isobarica* [*binomiale*], di *massimo comun divisore* e *minimo comune multiplo isobarici* [*binomiali*].

46. È facile provare, eseguendo le corrispondenti moltiplicazioni isobariche [binomiali] di verifica, che

α) *La differenza di due potenze isobariche* [*binomiali*] *simili, con esponente intero positivo, è sempre divisibile isobaricamente* [*binomialmente*] *per la differenza delle basi.* Precisamente, essendo m un intero positivo, si ha:

$$(14) \qquad \frac{a_n^{m+1)_n} - b_n^{m+1)_n}}{a_n - b_n}\Big|_n = a_n^{m)_n} + a_n^{m-1)_n} \dot{{}_n}\, b_n + a_n^{m-2)_n} \dot{{}_n}\, b_n^{2)_n} + \ldots + b_n^{m)_n},$$

$$(14') \qquad \frac{a_n^{m+1)^n} - b_n^{m+1)^n}}{a_n - b_n}\Big|^n = a_n^{m)^n} + a_n^{m-1)^n} \overset{n}{\cdot}\, b_n + a_n^{m-2)^n} \overset{n}{\cdot}\, b_n^{2)^n} + \ldots + b_n^{m)^n}.$$

β) *La differenza di due potenze isobariche* [*binomiali*] *simili, con esponente intero positivo e pari, e la somma di due potenze isobariche* [*binomiali*] *simili, con esponente intero positivo e dispari, sono sempre divisibili isobaricamente* [*binomialmente*] *per la somma delle basi.* Si ha precisamente:

$$(15) \qquad \frac{a_n^{m+1)_n} - (-1)^{m+1} b_n^{m+1)_n}}{a_n + b_n}\Big|_n = a_n^{m)_n} - a_n^{m-1)_n} \dot{{}_n}\, b_n + a_n^{m-2)_n} \dot{{}_n}\, b_n^{2)_n} - \ldots + (-1)^m b_n^{m)_n},$$

$$(15') \qquad \frac{a_n^{m+1)^n} - (-1)^{m+1} b_n^{m+1)^n}}{a_n + b_n}\Big|^n = a_n^{m)^n} - a_n^{m-1)^n} \overset{n}{\cdot}\, b_n + a_n^{m-2)^n} \overset{n}{\cdot}\, b_n^{2)^n} - \ldots + (-1)^m b_n^{m)^n}.$$

In particolare, se nelle (14), (15), e così pure nelle (14′), (15′), si fa $a_n \equiv a\varepsilon_n$, $b_n \equiv b\varepsilon_n$, dove a e b sono delle costanti, si ottengono le note formule dell'Algebra ordinaria. Ponendo, invece, soltanto $b_n \equiv x\varepsilon_n$, si ha:

$$(16) \qquad \frac{a_n^{m+1)_n} - x^{m+1}\varepsilon_n}{a_n - x\varepsilon_n}\Big|_n = \sum_{r=0}^{m} a_n^{m-r)_n} x^r = a_n^{m)_n} \dot{{}_m}\, x^m,$$

$$(16') \qquad \frac{a_n^{m+1)^n} - x^{m+1}\varepsilon_n}{a_n - x\varepsilon_n}\Big|^n = \sum_{r=0}^{m} a_n^{m-r)^n} x^r = a_n^{m)^n} \dot{{}_m}\, x^m;$$

$$(17) \qquad \frac{a_n^{m+1)_n} - (-1)^{m+1} x^{m+1}\varepsilon_n}{a_n + x\varepsilon_n}\Big|_n = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r a_n^{m-r)_n} x^r = a_n^{m)_n} \dot{{}_m}\, (-x)^m,$$

$$(17') \qquad \frac{a_n^{m+1)^n} - (-1)^{m+1} x^{m+1}\varepsilon_n}{a_n + x\varepsilon_n}\Big|^n = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r a_n^{m-r)^n} x^r = a_n^{m)^n} \dot{{}_m}\, (-x)^m.$$

Osservazione. — Le formule stabilite nel presente n.° trovano utilissimo impiego nel calcolo di molte somme importanti, come sarà mostrato nelle applicazioni. Diamo qui due esempi semplici:

1.° Applicando la (16), ove si faccia $x = 1$ ed $a_n \equiv \binom{1}{n}$, e tenendo presente la (31) del n.° 15, s'ottiene:

$$\frac{\binom{m+1}{n} - \varepsilon_n}{\binom{1}{n} - \varepsilon_n}\bigg|_n = \binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \dots + \binom{m}{n},$$

da cui, per essere $\binom{1}{n} - \varepsilon_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ e notando che è (n.° 22, (5‴))

$$\frac{\binom{m+1}{n} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\bigg|_n = \binom{m+1}{n+1},$$

segue la nota formula pei coefficienti binomiali:

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m-1}{n} + \binom{m}{n}.$$

2.° Nella (16′) facciamo $x = 1$ e moltiplichiamo binomialmente ambo i membri per una data successione (b_n); abbiamo:

$$\frac{a_n^{m+1)^n} \overset{n}{\cdot} b_n - b_n}{a_n - \varepsilon_n}\bigg|_n = \sum_{r=0}^{m} a_n^{r)^n} \overset{n}{\cdot} b_n .$$

Se qui si prende $a_n \equiv q\rho^n$, $b_n \equiv ab^n$, dove a, b, q, ρ sono date costanti, il primo membro diventa

$$\frac{q^{m+1}(m+1)^n\rho^n \overset{n}{\cdot} ab^n - ab^n}{q\rho^n - \varepsilon_n}\bigg|_n = \frac{aq^{m+1}(b + (m+1)\rho)^n - ab^n}{q\rho^n - \varepsilon_n}\bigg|_n$$

ed il secondo membro diventa

$$\sum_{r=0}^{m} q^r r^n \rho^n \overset{n}{\cdot} ab^n = \sum_{r=0}^{m} aq^r(b + r\rho)^n ;$$

si ha quindi la formula

$$ab^n + aq(b+\rho)^n + aq^2(b+2\rho)^n + \dots + aq^m(b+m\rho)^n = \frac{aq^{m+1}(b+(m+1)\rho)^n - ab^n}{q\rho^n - \varepsilon_n}\bigg|_n, \tag{18}$$

dove nel secondo membro si possono fare intervenire, a seconda dei valori delle costanti a, b, q, ρ che vi compaiono, i numeri di BERNOULLI o i numeri di EULER od altri numeri affini: e ciò molto semplicemente, come sarà mostrato nelle applicazioni.

§ 4. Derivazione isobarica e derivazione binomiale.

47. Poniamo le seguenti definizioni:

α) Data una successione (a_n) qualsiasi, le nuove successioni

$$(n+1)a_{n+1}, \ (n=0, 1, 2, \ldots); \quad a_{n+1}, \ (n=0, 1, 2, \ldots),$$

si diranno, rispettivamente, *derivata isobarica* e *derivata binomiale, rispetto ad* n, *di* (a_n) (¹).

β) Data una successione doppia $(a_{m,n})$ qualsiasi (n.° 38), le nuove successioni doppie

$$(m+1)a_{m+1,n}, \qquad (m=0, 1, 2, \ldots;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$
$$a_{m+1,n}, \qquad (m=0, 1, 2, \ldots;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

si diranno, rispettivamente, *derivata parziale isobarica* e *derivata parziale binomiale, rispetto ad* m, *di* $(a_{m,n})$. Analoga definizione per le derivate parziali rispetto ad n.

Osserviamo subito che la derivata sia isobarica che binomiale di una successione della forma $(c\varepsilon_n)$, dove c è una costante, è la successione totalmente nulla (n.° 1).

La derivata isobarica [binomiale] di una somma di più successioni è uguale alla somma delle derivate isobariche [binomiali] delle singole successioni.

Se due successioni differiscono solo per una successione della forma $(c\varepsilon_n)$, dove c è una costante, le loro derivate isobariche (o binomiali) sono uguali, e viceversa

La derivata isobarica di (ca_n), dove c è una costante, è $(c(n+1)a_{n+1})$, la derivata binomiale è invece (ca_{n+1}).

48. α) *Il prodotto isobarico [binomiale] di due successioni ha per derivata isobarica [binomiale] la somma dei due prodotti isobarici [binomiali] della derivata isobarica [binomiale] di una delle successioni per l'altra succes-*

(¹) Si confronti S. PINCHERLE (in collaborazione con U. AMALDI), *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Bologna, 1901, p. 77, n.° 111.

sione. Si hanno cioè, considerati i prodotti $a_n \underset{n}{\cdot} b_n$, $a_n \overset{n}{\cdot} b_n$, le due formule:

$$(n+1)(a_{n+1} \underset{n+1}{\cdot} b_{n+1}) = (n+1)a_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n + a_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1}, \tag{19}$$

$$a_{n+1} \overset{n+1}{\cdot} b_{n+1} = a_{n+1} \overset{n}{\cdot} b_n + a_n \overset{n}{\cdot} b_{n+1}. \tag{20}$$

Per dimostrare la (19) basta notare che il suo secondo membro si può scrivere:

$$\sum_{r=0}^{n}(r+1)a_{r+1}b_{n-r} + \sum_{r=0}^{n}(n+1-r)a_r b_{n+1-r} = (n+1)a_{n+1}b_0 + \sum_{r=0}^{n-1}(r+1)a_{r+1}b_{n-r} +$$
$$+ (n+1)a_0 b_{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)a_{r+1}b_{n-r},$$

e riunendo le due sommatorie ora ottenute nel secondo membro, viene

$$(n+1)a_{n+1}b_0 + (n+1)a_0 b_{n+1} + (n+1)\sum_{r=0}^{n-1} a_{r+1}b_{n-r} = (n+1)\sum_{r=0}^{n+1} a_r b_{n+1-r},$$

dove il secondo membro è proprio il primo membro di (19).

Per dimostrare la (20) basta procedere analogamente:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a_{r+1}b_{n-r} + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a_r b_{n+1-r} = a_{n+1}b_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}a_{r+1}b_{n-r} +$$
$$+ a_0 b_{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r+1}a_{r+1}b_{n-r},$$

e riunendo le due sommatorie ora ottenute, abbiamo

$$a_{n+1}b_0 + a_0 b_{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n+1}{r+1}a_{r+1}b_{n-r} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a_r b_{n+1-r}.$$

β) Segue, nel caso di tre fattori,

$$(n+1)(a_{n+1} \underset{n+1}{\cdot} b_{n+1} \underset{n+1}{\cdot} c_{n+1}) = (n+1)a_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n \underset{n}{\cdot} c_n + a_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1} \underset{n}{\cdot} c_n +$$
$$+ a_n \underset{n}{\cdot} b_n \underset{n}{\cdot} (n+1)c_{n+1},$$

$$a_{n+1} \overset{n+1}{\cdot} b_{n+1} \overset{n+1}{\cdot} c_{n+1} = a_{n+1} \overset{n}{\cdot} b_n \overset{n}{\cdot} c_n + a_n \overset{n}{\cdot} b_{n+1} \overset{n}{\cdot} c_n + a_n \overset{n}{\cdot} b_n \overset{n}{\cdot} c_{n+1};$$

ed analogamente, in generale, per un numero finito qualsiasi di fattori.

γ) Si può notare che da (19) e (20) segue:

$$\frac{(n+1)(a_{n+1} \underset{n+1}{\cdot} b_{n+1})}{a_n \underset{n}{\cdot} b_n}\bigg|_n = \frac{(n+1)a_{n+1}}{a_n}\bigg|_n + \frac{(n+1)b_{n+1}}{b_n}\bigg|_n, \tag{21}$$

$$\frac{a_{n+1} \overset{n+1}{\cdot} b_{n+1}}{a_n \overset{n}{\cdot} b_n}\bigg|_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}\bigg|_n + \frac{b_{n+1}}{b_n}\bigg|_n, \tag{22}$$

la cui generalizzazione al caso di più di due fattori è manifesta.

49. *Il quoziente isobarico di due successioni ha per derivata isobarica il prodotto isobarico della derivata isobarica del numeratore pel denominatore, diminuito del prodotto isobarico del numeratore per la derivata isobarica del denominatore, il tutto diviso isobaricamente per il quadrato isobarico del denominatore.* Analoga regola per formare *la derivata binomiale di un quoziente binomiale.* Si hanno cioè, considerati i quozienti $\frac{a_n}{b_n}|_n$, $\frac{a_n}{b_n}|^n$, le due formule:

$$(n+1)\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}|_{n+1} = \frac{(n+1)a_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n - a_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1}}{b_n^{2)_n}}|_n, \tag{23}$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}|^{n+1} = \frac{a_{n+1} \overset{n}{\cdot} b_n - a_n \overset{n}{\cdot} b_{n+1}}{b_n^{2)^n}}|^n. \tag{24}$$

Per dimostrare la (23) osserviamo che, posto $\frac{a_n}{b_n}|_n = c_n$ ossia $a_n = c_n \underset{n}{\cdot} b_n$, viene, per la (19),

$$(n+1)a_{n+1} = (n+1)c_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n + c_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1},$$

da cui

$$(n+1)a_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n = (n+1)c_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n^{2)_n} + a_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1}.$$

Di qui si ricava

$$(n+1)c_{n+1} = \frac{(n+1)a_{n+1} \underset{n}{\cdot} b_n - a_n \underset{n}{\cdot} (n+1)b_{n+1}}{b_n^{2)_n}}|_n,$$

cioè la (23). In modo completamente analogo si prova la (24).

In particolare si ha:

$$(n+1)\frac{\varepsilon_{n+1}}{a_{n+1}}|_{n+1} = -\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_n^{2)_n}}|_n, \tag{25}$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{a_{n+1}}|^{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{a_n^{2)^n}}|^n, \tag{26}$$

50. Dalla regola di derivazione di un prodotto isobarico [binomiale] risulta *la regola di derivazione della potenza isobarica* [*binomiale*] *di una data successione,* quando l'esponente è un intero positivo. Si hanno precisamente, per le potenze $a_n^{m)_n}$, $a_n^{m)^n}$, le due formule:

$$(n+1)a_{n+1}^{m)_{n+1}} = m a_n^{m-1)_n} \underset{n}{\cdot} (n+1)a_{n+1}, \tag{27}$$

$$a_{n+1}^{m)^{n+1}} = m a_n^{m-1)^n} \overset{n}{\cdot} a_{n+1}. \tag{28}$$

Questa regola di derivazione della potenza si estende al caso in cui l'esponente è intero negativo o frazionario, purchè, ben inteso, tali potenze abbiano significato (n.° 37). Invero, nel caso in cui l'esponente è intero negativo, ciò discende immediatamente dalla regola di derivazione, isobarica o binomiale, della reciproca di una successione, regola espressa da (25) e (26); nel caso in cui l'esponente sia un'unità frazionaria, si conclude pure facilmente quanto sopra si è asserito: posto $c_n = a_n^{\frac{1}{m})_n}$, dove m è un intero > 1, viene $c_n^{m)_n} = a_n$ da cui, derivando isobaricamente,

$$m c_n^{m-1)_n} \dot{{}_n} (n+1) c_{n+1} = (n+1) a_{n+1},$$

onde

$$(n+1)c_{n+1} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{m c_n^{m-1)_n}}\Big|_n = \frac{(n+1)a_{n+1}}{m a_n^{\frac{m-1}{m})_n}}\Big|_n = \frac{1}{m}\, a_n^{\frac{1}{m}-1)_n} \dot{{}_n} (n+1)a_{n+1};$$

ed analogamente nel caso della potenza binomiale.

OSSERVAZIONE. — Possiamo notare che dalle (27) e (28) segue:

(29) $$(n+1) a_{n+1}^{m)_{n+1}} \dot{{}_n}\, a_n = m a_n^{m)_n} \dot{{}_n} (n+1) a_{n+1},$$

(30) $$a_{n+1}^{m)^{n+1}} \overset{n}{\cdot}\, a_n = m a_n^{m)^n} \overset{n}{\cdot}\, a_{n+1};$$

e queste formule, unitamente ad $a_0^{m)_0} = a_0^m$, $a_0^{m)^0} = a_0^m$, permettono di calcolare molto rapidamente i successivi elementi delle due potenze m^{esime}, $a_n^{m)_n}$, $a_n^{m)^n}$. Così risultano, per i primi (cinque) elementi isobarici, le espressioni:

$$a_0^{m)_0} = a_0^m,$$
$$a_1^{m)_1} = m a_0^{m-1} a_1,$$
$$a_2^{m)_2} = m a_0^{m-1} a_2 + \binom{m}{2} a_0^{m-2} a_1^2,$$
$$a_3^{m)_3} = m a_0^{m-1} a_3 + 2\binom{m}{2} a_0^{m-2} a_1 a_2 + \binom{m}{3} a_0^{m-3} a_1^3,$$
$$a_4^{m)_4} = m a_0^{m-1} a_4 + 3\binom{m}{2} a_0^{m-2} \frac{2a_1a_3 + a_2^2}{3} + 3\binom{m}{3} a_0^{m-3} a_1^2 a_2 + \binom{m}{4} a_0^{m-4} a_1^4,$$

ed analogamente, per i primi (cinque) elementi binomiali:

$$a_0^{m)^0} = a_0^m,$$
$$a_1^{m)^1} = m a_0^{m-1} a_1,$$
$$a_2^{m)^2} = m a_0^{m-1} a_2 + m(m-1) a_0^{m-2} a_1^2,$$
$$a_3^{m)^3} = m a_0^{m-1} a_3 + 3m(m-1) a_0^{m-2} a_1 a_2 + m(m-1)(m-2) a_0^{m-3} a_1^3,$$
$$a_4^{m)^4} = m a_0^{m-1} a_4 + m(m-1) a_0^{m-2}(4a_1a_3 + 3a_2^2) + 6m(m-1)(m-2) a_0^{m-3} a_1^2 a_2 +$$
$$+ m(m-1)(m-2)(m-3) a_0^{m-4} a_1^4.$$

51. *Derivazione isobarica e binomiale, successiva.* — Diremo *derivata seconda* la derivata della derivata, *derivata terza* la derivata della derivata seconda, ecc.. Ne segue che le derivate isobariche seconda, terza, ecc., m^{esima}, di una successione (a_n), hanno, rispettivamente, gli elementi generali

$$(n+1)(n+2)a_{n+2},\ (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}, \ldots,\ m\,!\binom{n+m}{m}a_{n+m},$$

e le derivate binomiali seconda, terza, ecc., m^{esima}, hanno, rispettivamente, gli elementi generali

$$a_{n+2},\ a_{n+3}, \ldots,\ a_{n+m}.$$

α) Dalle definizioni poste risulta che *condizione necessaria e sufficiente affinchè le derivate successive, isobariche o binomiali, di una data successione, coincidano, da un certo indice di derivazione in poi, con la successione totalmente nulla, è che la data successione sia ultimamente nulla.* Precisamente, se (a_n) è ultimamente nulla d'ordine m, le derivate m^{esime} sono successioni totalmente nulle, mentre le derivate $(m-1)^{esime}$ sono della forma $(c\varepsilon_n)$, dove c è una costante.

β) Formando la derivata seconda isobarica del prodotto $a_n \overset{\cdot}{_n} b_n$ e la derivata seconda binomiale del prodotto $a_n \overset{n}{\cdot} b_n$, si ottengono, in virtù delle (19) e (20), le formule

$$(n+1)(n+2)(a_{n+2}\ \overset{\cdot}{_{n+2}}\ b_{n+2}) =$$
$$= (n+1)(n+2)a_{n+2} \overset{\cdot}{_n} b_n + 2(n+1)a_{n+1} \overset{\cdot}{_n} (n+1)b_{n+1} + a_n \overset{\cdot}{_n} (n+1)(n+2)b_{n+2},$$
$$a_{n+2} \overset{n+2}{\cdot} b_{n+2} = a_{n+2} \overset{n}{\cdot} b_n + 2a_{n+1} \overset{n}{\cdot} b_{n+1} + a_n \overset{n}{\cdot} b_{n+2}.$$

Ed in generale, colla derivazione m^{esima} dei detti prodotti si ottengono le formule (che si provano facilmente col metodo di induzione)

$$\binom{n+m}{m}(a_{n+m}\ \overset{\cdot}{_{n+m}}\ b_{n+m}) = \sum_{r=0}^{m}\binom{n+r}{r}a_{n+r} \overset{\cdot}{_n} \binom{n+m-r}{m-r}b_{n+m-r},$$

$$a_{n+m} \overset{n+m}{\cdot} b_{n+m} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}a_{n+r} \overset{n}{\cdot} b_{n+m-r},$$

ossia

$$\binom{m+n}{n}(a_{m+n}\ \overset{\cdot}{_{m+n}}\ b_{m+n}) = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{r+s}{s}\binom{m-r+n-s}{n-s}a_{r+s}b_{m-r+n-s}, \tag{31}$$

$$a_{m+n} \overset{m+n}{\cdot} b_{m+n} = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{s}a_{r+s}b_{m-r+n-s}, \tag{32}$$

e quali formule, adottando le notazioni del n.° 38, si possono scrivere:

(31′) $$\binom{m+n}{n}(a_{m+n} \overset{\cdot}{_{m+n}} b_{m+n}) = \binom{m+n}{n} a_{m+n} \overset{\cdot}{_{m,\,n}} \binom{m+n}{n} b_{m+n},$$

(32′) $$a_{m+n} \overset{m+n}{\cdot} b_{m+n} = a_{m+n} \overset{m;\,n}{\cdot} b_{m+n},$$

e queste formule saranno richiamate col nome di *leggi degli indici delle moltiplicazioni isobarica e binomiale.* In particolare, facendo, in (31), $a_n \equiv \frac{a^n}{n!}$, $b_n \equiv \frac{b^n}{n!}$, oppure facendo, in (32), $a_n \equiv a^n$, $b_n \equiv b^n$, dove a e b sono delle costanti, si ottiene

$$(a+b)^{m+n} = (a+b)^m (a+b)^n.$$

Facendo invece soltanto, in (31), $b_n \equiv \frac{x^n}{n!}$ e, in (32), $b_n \equiv x^n$, si deduce, rispettivamente,

(33) $$\binom{m+n}{n}\left(a_{m+n} \overset{\cdot}{_{m+n}} \frac{x^{m+n}}{(m+n)!}\right) = \binom{m+n}{n} a_{m+n} \overset{\cdot}{_{m}} \frac{x^m}{m!} \overset{\cdot}{_{n}} \frac{x^n}{n!},$$

(34) $$a_{m+n} \overset{m+n}{\cdot} x^{m+n} = a_{m+n} \overset{m}{\cdot} x^m \overset{n}{\cdot} x^n,$$

identità che saranno di utilissimo impiego nelle applicazioni.

52. α) *Esistono successioni che coincidono colla loro derivata isobarica o colla loro derivata binomiale?* Per trovarle basterà risolvere le due equazioni ricorrenti

$$(n+1)x_{n+1} = x_n, \quad x_{n+1} = x_n.$$

Si trova così, facilmente, che le successioni coincidenti con la loro derivata isobarica sono tutte del tipo

$$\frac{c}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

quelle che coincidono con la loro derivata binomiale sono tutte del tipo

$$c \cdot 1^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dove c è una costante arbitraria.

β) Proponiamoci di *determinare le successioni le cui derivate isobariche, o le cui derivate binomiali, sono le successioni stesse moltiplicate per una costante* k. Le equazioni da risolvere sono allora:

$$(n+1)x_{n+1} = kx_n, \quad x_{n+1} = kx_n;$$

e si trova, rispettivamente,

$$x_n = c\,\frac{k^n}{n!}, \quad x_n = ck^n,$$

dove c è una costante arbitraria.

OSSERVAZIONE. — Un' equazione che lega una successione incognita ad una o a più delle derivate, isobariche o binomiali, di tale successione, è un' equazione ricorrente; ed è facile vedere che vale il viceversa. Le equazioni ricorrenti possono dunque anche chiamarsi *equazioni alle derivate, isobariche o binomiali, di successioni.*

53. Notiamo, infine, alcune identità che presentano qualche analogia colle identità ottenute mediante la derivazione isobarica e la derivazione binomiale.

α) Per la moltiplicazione isobarica si ha, come subito si verifica,

(35) $$a_{n+m}\,{}_{n\,\dot{|}\,m}\,b_{n+m} = a_n\,{}_{\dot{n}}\,b_{n+m} + a_{n+m}\,{}_{m\dot{-}1}\,b_{m-1},$$

(36) $$a_{n+m+\mu}\,{}_{n+\dot{m}\,|\,\mu}\,b_{n+m+\mu} = a_{n+m}\,{}_{\dot{n}}\,b_{n+\mu} + a_{m-1}\,{}_{m\dot{-}1}\,b_{n+m+\mu} + a_{n+m+\mu}\,{}_{\mu\dot{-}1}\,b_{\mu-1}.$$

β) Da queste due formule, pel legame che intercede fra prodotti isobarici e prodotti binomiali (n.° 8), segue:

(37) $$\frac{1}{(n+m)!}\left(a_{n+m}\overset{n\,!\,m}{\cdot} b_{n+m}\right) = \frac{1}{n!}\left[a_n \overset{n}{\cdot} \frac{n!\,b_{n+m}}{(n+m)!}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{n!\,a_{n+m}}{(n+m)!}\overset{m-1}{\cdot} b_{m-1}\right],$$

(38) $$\frac{1}{(n+m+\mu)!}\left(a_{n+m+\mu}\overset{n\,!\,m+\mu}{\cdot} b_{n+m+\mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{(n+m)!}a_{n+m}\overset{n}{\cdot}\frac{n!}{(n+\mu)!}b_{n+\mu}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\left[a_{m-1}\overset{m-1}{\cdot}\frac{(m-1)!}{(n+m+\mu)!}b_{n+m+\mu}\right] +$$
$$+ \frac{1}{(\mu-1)!}\left[\frac{(\mu-1)!}{(n+m+\mu)!}a_{n+m+\mu}\overset{\mu-1}{\cdot} b_{\mu-1}\right].$$

In particolare, facendo $m = 1$ nella (37) ed $m = \mu = 1$ nella (38), si ricava:

(39) $$a_{n+1}\overset{n+1}{\cdot} b_{n+1} = (n+1)\left(a_n \overset{n}{\cdot} \frac{b_{n+1}}{n+1}\right) + a_{n+1}b_0,$$

(40) $$a_{n+2}\overset{n+2}{\cdot} b_{n+2} = (n+1)(n+2)\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\overset{n}{\cdot}\frac{b_{n+1}}{n+1}\right) + a_0 b_{n+2} + a_{n+2}b_0,$$

dalle quali si deduce

(39′) $$a_n \overset{n}{\cdot} \frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{a_{n+1}\overset{n+1}{\cdot} b_{n+1} - a_{n+1}b_0}{n+1},$$

(40′) $$\frac{a_{n+1}}{n+1}\overset{n}{\cdot}\frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{a_{n+2}\overset{n+2}{\cdot} b_{n+2} - a_{n+2}b_0 - a_0 b_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Si può notare che, per $a_n \equiv x^n$, $b_n \equiv y^n$, le (39') e (40') si scrivono:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{x^{n-r} y^r}{r+1} = \frac{(x+y)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)y},$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{x^{n-r} y^r}{(n-r+1)(r+1)} = \frac{(x+y)^{n+2} - x^{n+2} - y^{n+2}}{(n+1)(n+2)xy}.$$

§ 5. Cenno sulle equazioni algebriche, isobariche e binomiali.

Ci riferiremo, in questo paragrafo, alle equazioni algebriche di tipo *binomiale*, e si vedrà che considerazioni completamente analoghe valgono per le equazioni di tipo isobarico.

54. *Equazioni di primo grado ad un' incognita.* — Essendo (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) date successioni ed (x_n) una successione incognita, si dirà *equazione binomiale di primo grado ad una incognita* ogni equazione della forma

$$a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n = c_n \overset{n}{\cdot} x_n + d_n, \tag{41}$$

la quale è riconducibile alla forma

$$\alpha_n \overset{n}{\cdot} x_n + \beta_n = 0. \tag{41'}$$

Riferendoci a (41) si ricava

$$x_n = \frac{d_n - b_n}{a_n - c_n}\Big|_n, \tag{42}$$

sotto l'ipotesi che $(a_n - c_n)$ non sia inizialmente nulla o, se lo è, lo sia d'ordine finito non maggiore dell'ordine di iniziale annullamento di $(d_n - b_n)$ (v. n.[i] 22 e 23). Sotto l'ipotesi posta, la (41) ammette dunque la soluzione ben determinata data da (42); se tale ipotesi non è soddisfatta, si ha per l'equazione impossibilità od indeterminazione (cfr. n.° 23).

55. *Sistemi d'equazioni di primo grado a due incognite.* — Essendo (a_n), (b_n), (c_n), (α_n), (β_n), (γ_n) date successioni ed (x_n), (y_n) successioni incognite, si dirà *sistema binomiale di due equazioni di primo grado a due incognite* ogni sistema della forma, o riconducibile alla forma,

$$\begin{cases} a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n \overset{n}{\cdot} y_n = c_n \\ \alpha_n \overset{n}{\cdot} x_n + \beta_n \overset{n}{\cdot} y_n = \gamma_n . \end{cases} \tag{43}$$

Se si moltiplica, binomialmente n, la prima equazione per β_n e la seconda equazione per b_n, e poi si sottraggono membro a membro le due eqnazioni così ottenute, si ha:

$$(a_n \overset{n}{\cdot} \beta_n - \alpha_n \overset{n}{\cdot} b_n) \overset{n}{\cdot} x_n = c_n \overset{n}{\cdot} \beta_n - \gamma_n \overset{n}{\cdot} b_n ,$$

da cui

(44) $$x_n = \frac{c_n \overset{n}{\cdot} \beta_n - \gamma_n \overset{n}{\cdot} b_n}{a_n \overset{n}{\cdot} \beta_n - \alpha_n \overset{n}{\cdot} b_n}{}^{n} .$$

In modo analogo si trova:

(45) $$y_n = \frac{a_n \overset{n}{\cdot} \gamma_n - \alpha_n \overset{n}{\cdot} c_n}{a_n \overset{n}{\cdot} \beta_n - \alpha_n \overset{n}{\cdot} b_n}{}^{|n} .$$

Le (44) e (45) dànno l'unica soluzione del dato sistema, nell'ipotesi che il denominatore comune dei loro secondi membri non sia inizialmente nullo o lo sia d'ordine non maggiore di quello dei numeratori; quando, poi, un tale fatto non è verificato si presenta o l'impossibilità o l'indeterminazione del sistema.

Anche ai sistemi isobarici e binomiali si può trasportare l'uso dei determinanti, ma ciò non sarà fatto nel presente lavoro.

Diamo ora due esempi semplici e notevoli:

1.° Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_n - 1^n \overset{n}{\cdot} y_n = 0 \\ x_n - \qquad y_n = \varepsilon_{n-1} . \end{cases}$$

Applicando le (44) e (45) si ottiene:

$$x_n = \frac{\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} 1^n}{-\varepsilon_n + 1^n}{}^{|n} = \frac{n}{1^n - \varepsilon_n}{}^{|n}, \quad y_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{1^n - \varepsilon_n}{}^{n} \text{ (1)}.$$

2.° Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_n - 1^n \overset{n}{\cdot} y_n = 0 \\ x_n + \qquad y_n = 2\varepsilon_n . \end{cases}$$

Applicando ancora le (44) e (45) viene:

$$x_n = \frac{2\varepsilon_n \overset{n}{\cdot} 1^n}{\varepsilon_n + 1^n}{}^{|n} = \frac{2 \cdot 1^n}{1^n + \varepsilon_n}{}^{n}, \quad y_n = \frac{2\varepsilon_n}{1^n + \varepsilon_n}{}^{|n} \text{ (2)}.$$

---

(1) Vedremo, nelle applicazioni, che (y_n) è la successione dei così detti ***numeri di Bernoulli***, B_n, e che (x_n) è la successione dei numeri $(-1)^n B_n$.

(2) Si vedrà, analogamente a quanto si è detto nella nota (1), che (y_n) è la successione dei numeri $2^{-n} C_n$, dove i C_n sono i così detti *coefficienti della tangente* (introdotti nella Analisi da EULER), e che (x_n) è quella dei numeri $(-1)^n 2^{-n} C_n$.

56. *Equazioni di secondo grado ad un' incognita.* — Essendo (a_n), (b_n), (c_n) date successioni ed (x_n) una successione incognita, si dirà *equazione binomiale di secondo grado ad un' incognita* ogni equazione della forma

$$a_n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + b_n \overset{n}{\cdot} x_n + c_n = 0. \tag{46}$$

Consideriamo dapprima i casi in cui l' equazione è incompleta:

α) Se è $a_n \equiv 0$, l' equazione diventa di primo grado (n.° 54).

β) Se è $b_n \equiv 0$, la (46) diventa

$$a_n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + c_n = 0,$$

da cui

$$x_n^{2)^n} = - \frac{c_n}{a_n}\Big|^n, \quad \text{ed infine} \quad x_n = \pm \sqrt{- \frac{c_n}{a_n}\Big|^n}\,\Big|^n,$$

la quale formula risolutiva ha dunque senso se (a_n) è inizialmente nulla d' ordine non maggiore di quello di (c_n) e se, inoltre (n.° 37), il quoziente binomiale di (c_n) per (a_n) non è inizialmente nullo o lo è di ordine pari.

γ) Se è $c_n \equiv 0$, la (46) diventa

$$a_n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + b_n \overset{n}{\cdot} x_n = 0,$$

$$x_n \overset{n}{\cdot} (a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n) = 0,$$

da cui (n.° 7, δ))

$$x_n = 0; \quad a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n = 0 \quad \text{che dà} \quad x_n = - \frac{b_n}{a_n}\Big|^n$$

(nell' ipotesi che tale frazione abbia significato).

Riferiamoci ora all' equazione (46) completa. Moltiplicando, binomialmente n, l' equazione per $4a_n$ ed aggiungendo ad ambo i membri $b_n^{2)^n}$, si ottiene:

$$(2a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n)^{2)^n} = b_n^{2)^n} - 4a_n \overset{n}{\cdot} c_n,$$

da cui (n.° 37)

$$2a_n \overset{n}{\cdot} x_n + b_n = \pm \sqrt{b_n^{2)^n} - 4a_n \overset{n}{\cdot} c_n}^{\,n},$$

e quindi

$$x_n = \frac{- b_n \pm \sqrt{b_n^{2)^n} - 4a_n \overset{n}{\cdot} c_n}\,\Big|^n}{2a_n}\Big|^n, \tag{47}$$

e questa formula risolutiva ha significato sotto le due condizioni seguenti:

1°) l' espressione $b_n^{2)^n} - 4a_n \overset{n}{\cdot} c_n$ (il *discriminante*) non sia inizialmente nullo o lo sia d' ordine pari, 2°) il denominatore del secondo membro di (47) sia inizialmente nullo d'ordine non maggiore di quello del numeratore.

Si hanno dunque, quando l'equazione (46) è possibile, due soluzioni e due sole: $(x_{n,1})$, $(x_{n,2})$. Si prova facilmente che è

$$x_{n,1} + x_{n,2} = -\frac{b_n}{a_n}\Big|_n, \quad x_{n,1} \overset{n}{\cdot} x_{n,2} = \frac{c_n}{a_n}\Big|_n.$$

Ne segue

$$a_n \overset{n}{\cdot} x_n^{2)^n} + b_n \overset{n}{\cdot} x_n + c_n \equiv a_n \overset{n}{\cdot} (x_n - x_{n,1}) \overset{n}{\cdot} (x_n - x_{n,2}).$$

APPLICAZIONE. — Per determinare due successioni aventi una data somma (s_n) ed un dato prodotto binomiale (p_n), basterà risolvere l'equazione binomiale di secondo grado

$$x_n^{2)^n} - s_n \overset{n}{\cdot} x_n + p_n = 0.$$

Tali successioni sono quindi date da

$$\left.\begin{matrix} x_{n,1} \\ \\ x_{n,2} \end{matrix}\right\} = \frac{s_n}{2} \pm \sqrt{\frac{s_n^{2)^n}}{4} - p_n}\;\Bigg|_n .$$

Ad esempio, se è $s_n \equiv 1^n$, $p_n \equiv \varepsilon_n - (-2)^n$, si ricava facilmente

$$x_{n,1} = (-1)^n, \quad x_{n,2} = 1^n - (-1)^n.$$

§ 6. Notevoli espressioni per le reciproche isobariche e binomiali e per le loro potenze.

57. α) La formula (16), indicato a_n con λ_n e posto $x = 1$, si può scrivere

$$\frac{\varepsilon_n - \lambda_n^{\mu+1)_n}}{\varepsilon_n - \lambda_n}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu} \lambda_n^{m)_n}, \tag{48}$$

dove (λ_n) può essere una successione qualsiasi, purchè non totalmente nulla (n.° 1).

Se (λ_n) è ultimamente nulla del primo ordine, ossia se è $\lambda_n = \lambda\varepsilon_n$ (dove λ è una costante non nulla), la (48) si riduce alla nota formula

$$\frac{1 - \lambda^{\mu+1}}{1 - \lambda} = \sum_{m=0}^{\mu} \lambda^m.$$

Supporremo quindi, inoltre, che in (48) la (λ_n) sia non ultimamente nulla del primo ordine. Derivando, isobaricamente rispetto ad n, la (48) e sopprimendo, poi, in ambo i membri, il fattore isobarico comune $(n+1)\lambda_{n+1}$, si ottiene:

$$\frac{-(\mu+1)\lambda_n^{\mu)_n} \dot{n} (\varepsilon_n - \lambda_n) + (\varepsilon_n - \lambda_n^{\mu+1)_n})}{(\varepsilon_n - \lambda_n)^{2)_n}}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu} m\lambda_n^{m-1)_n}.$$

Riducendo e cambiando μ in $\mu+1$, viene:

$$\frac{\varepsilon_n + 2\binom{\mu+2}{2}\left[\frac{\lambda_n^{\mu+2)_n}}{\mu+2} - \frac{\lambda_n^{\mu+1)_n}}{\mu+1}\right]}{(\varepsilon_n - \lambda_n)^{2)_n}}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu} (m+1)\lambda_n^{m)_n}.$$

Procedendo su questa come si è proceduto su (48), s'ottiene a numeratore della frazione isobarica del primo membro l'espressione

$$2!\,\varepsilon_n - 3!\binom{\mu+3}{3}\left[\frac{\lambda_n^{\mu+3)_n}}{\mu+3} - 2\frac{\lambda_n^{\mu+2)_n}}{\mu+2} + \frac{\lambda_n^{\mu+1)_n}}{\mu+1}\right].$$

Continuando lo stesso procedimento, si trova in generale, a numeratore della frazione isobarica del primo membro, l'espressione

$$\nu!\,\varepsilon_n + (-1)^{\nu+1}(\nu+1)!\binom{\mu+\nu+1}{\nu+1}\left[\frac{\lambda_n^{\mu+\nu+1)_n}}{\mu+\nu+1} \overset{\nu}{\vdots} (-1)^\nu\right],$$

come si prova col metodo di induzione completa. Precisamente si ottiene:

$$(49) \qquad \frac{\varepsilon_n + (-1)^{\nu+1}(\nu+1)\binom{\mu+\nu+1}{\nu+1}\left[\frac{\lambda_n^{\mu+\nu+1)_n}}{\mu+\nu+1} \overset{\nu}{\vdots} (-1)^\nu\right]}{(\varepsilon_n - \lambda_n)^{\nu+1)_n}}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu}\binom{m+\nu}{\nu}\lambda_n^{m)_n},$$

la quale per $\nu = 0$ si riduce alla (48).

β) Similmente, la formula (16'), indicato a_n con λ_n e posto $x = 1$, si può scrivere

$$(48') \qquad \frac{\varepsilon_n - \lambda_n^{\mu+1)^n}}{\varepsilon_n - \lambda_n}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu} \lambda_n^{m)^n};$$

da qui si deduce in generale, analogamente ad α),

$$(49') \qquad \frac{\varepsilon_n + (-1)^{\nu+1}(\nu+1)\binom{\mu+\nu+1}{\nu+1}\left[\frac{\lambda_n^{\mu+\nu+1)^n}}{\mu+\nu+1} \overset{\nu}{\vdots} (-1)^\nu\right]}{(\varepsilon_n - \lambda_n)^{\nu+1)^n}}\Big|_n = \sum_{m=0}^{\mu}\binom{m+\nu}{\nu}\lambda_n^{m)^n},$$

la quale per $\nu = 0$ si riduce alla (48').

58. Possiamo dare subito un'importante applicazione delle formule (49) e (49') or ora stabilite.

Si consideri una successione qualsiasi (a_n), purchè *non inizialmente nulla*, e si faccia, in (49),

$$\lambda_n = \varepsilon_n - \frac{a_n}{a_0}.$$

Poichè tale (λ_n) è inizialmente nulla, sarà (n.° 10)

$$\lambda_n^{m)_n} = 0 \quad \text{per} \quad m > n,$$

e perciò, fatto $\mu = n$, dalla (49) si ottiene:

$$\frac{\varepsilon_n}{\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\nu+1)_n}}\Big|^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+\nu}{\nu} \left(\varepsilon_n - \frac{a_n}{a_0}\right)^{m)_n},$$

ossia, cambiando $\nu + 1$ in ν,

$$a_n^{-\nu)_n} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+\nu-1}{\nu-1} \frac{(a_0 \varepsilon_n - a_n)^{m)_n}}{a_0^{m+\nu}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{50}$$

Analogamente da (49') segue:

$$a_n^{-\nu)^n} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+\nu-1}{\nu-1} \frac{(a_0 \varepsilon_n - a_n)^{m)^n}}{a_0^{m+\nu}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{51}$$

A queste formule notevoli si può dare, in virtù del n.° 41, anche un'altra forma. Abbiamo da (50):

$$a_n^{-\nu)_n} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+\nu-1}{\nu-1} \frac{1}{a_0^{m+\nu}} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} a_0^{m-r} a_n^{r)_n},$$

ossia

$$a_n^{-\nu)_n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{m+\nu-1}{\nu-1} \binom{m}{r} \right] \frac{a_n^{r)_n}}{a_0^{r+\nu}},$$

e per essere la somma in parentesi quadra, del secondo membro, uguale a [1]

$$\binom{n+\nu}{r+\nu} \binom{r+\nu-1}{\nu-1},$$

[1] Invero, chiamata con c_n tale somma, si ha

$$c_n = \binom{n+\nu-1}{\nu-1} \binom{n}{r} \dot{n} 1^n,$$

si ottiene:

$$a_n^{-\nu)_n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+\nu}{r+\nu} \binom{r+\nu-1}{\nu-1} \frac{a_n^{r)_n}}{a_0^{r+\nu}}; \tag{50'}$$

ed in modo analogo da (51) si deduce:

$$a_n^{-\nu)^n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+\nu}{r+\nu} \binom{r+\nu-1}{\nu-1} \frac{a_n^{r)^n}}{a_0^{r+\nu}}. \tag{51'}$$

Come si vede, *la formula* (50′) *ci dà un legame semplice fra le potenze isobariche ad esponente positivo e quelle ad esponente negativo, di una stessa successione* (a_n) *non inizialmente nulla, e la* (51′) *ci dà l'analogo legame fra le potenze binomiali.* Per essere

$$\binom{n+\nu}{r+\nu} \binom{r+\nu-1}{\nu-1} = \nu \binom{n+\nu}{\nu} \binom{n}{r} \frac{1}{r+\nu},$$

le due formule precedenti si possono anche scrivere così:

$$a_n^{-\nu)_n} = \nu \binom{n+\nu}{\nu} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{a_n^{r)_n}}{(r+\nu) a_0^{r+\nu}}, \tag{50''}$$

$$a_n^{-\nu)^n} = \nu \binom{n+\nu}{\nu} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{a_n^{r)^n}}{(r+\nu) a_0^{r+\nu}}. \tag{51''}$$

---

e poichè la successione $\binom{n}{r}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ è inizialmente nulla d'ordine r, viene (n.° 12):

$$c_{n+r} = \binom{n+r+\nu-1}{\nu-1} \binom{n+r}{r} \dot{_n}\, 1^n,$$

ossia

$$c_{n+r} = \frac{(n+r+\nu-1)!}{(\nu-1)!\, n!\, r!} \dot{_n}\, 1^n,$$

da cui

$$\frac{(\nu-1)!\, r!\, c_{n+r}}{(r+\nu-1)!} = \binom{n+r+\nu-1}{r+\nu-1} \dot{_n}\, 1^n.$$

Applicando al secondo membro la (36) del n.° 16, si ha:

$$\frac{c_{n+r}}{\binom{r+\nu-1}{\nu-1}} = \binom{n+r+\nu}{r+\nu},$$

cioè l'espressione sopra asserita per c_n.

59. È utile tenere ben presente le formule del numero precedente nel caso particolare $\nu = 1$:

$$a_n^{-1)_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(a_0 \varepsilon_n - a_n)^{m)_n}}{a_0^{m+1}} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r+1} \frac{a_n^{r)_n}}{a_0^{r+1}}, \tag{52}$$

$$a_n^{-1)^n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(a_0 \varepsilon_n - a_n)^{m)^n}}{a_0^{m+1}} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r+1} \frac{a_n^{r)^n}}{a_0^{r+1}}. \tag{53}$$

60. *Reciproche isobariche di successioni ultimamente nulle.* — Mediante la formula (52) si determina facilmente l'espressione dell'elemento generale della reciproca isobarica di una successione (non inizialmente nulla) che sia ultimamente nulla. Questa determinazione è già stata fatta al n.° 33 (Osservazione), ma là si richiedeva di risolvere un'equazione algebrica determinata, mentre ora possiamo evitare tale difficoltà. Consideriamo una generica successione ultimamente, ma non inizialmente, nulla:

$$a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p \varepsilon_{n-p} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dove $a_0 \neq 0$, a_1, $a_2, \ldots, a_p$ sono date costanti. Abbiamo subito da (52):

$$(a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p \varepsilon_{n-p})^{-1)_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}} (a_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p \varepsilon_{n-p})^{m)_n}, \tag{54}$$

e da qui discendono facilmente, in virtù del n.° 43, le formule che ci interessano.

α) Sostituendo, nel secondo membro di (54), ad $(a_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p \varepsilon_{n-p})^{m)_n}$ la sua espressione data da (8'), si ha:

$$\begin{aligned} &(a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p \varepsilon_{n-p})^{-1)_n} = \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}} \sum_{r_1=0}^{m} \sum_{r_2=0}^{r_1} \cdots \sum_{r_{p-1}=0}^{r_{p-2}} \binom{m}{r_1} \binom{r_1}{r_2} \cdots \binom{r_{p-2}}{r_{p-1}} a_1^{m-r_1} a_2^{r_1-r_2} \cdots a_{p-1}^{r_{p-2}-r_{p-1}} a_p^{r_{p-1}} \varepsilon_{n-(m+r_1+r_2+\ldots+r_{p-1})}. \end{aligned} \tag{54'}$$

Consideriamo ora qualche caso particolare. Per $p = 1$, discende da (54):

$$(a \varepsilon_n + b \varepsilon_{n-1})^{-1)_n} = \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}. \tag{55}$$

Per $p = 2$, segue da (54), applicando la (9'),

$$(a \varepsilon_n + b \varepsilon_{n-1} + c \varepsilon_{n-2})^{-1)_n} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{m}{n-m} \frac{b^{2m-n} c^{n-m}}{a^{m+1}}, \tag{56}$$

ed i primi (cinque) elementi di questa successione sono:

$$a^{-1},\ -a^{-2}b,\ -a^{-2}c+a^{-3}b^2,\ 2a^{-3}bc-a^{-4}b^3,\ a^{-3}c^2-3a^{-4}b^2c+a^{-5}b^4$$

(rispettivamente per $n=0, 1, 2, 3, 4$). Per $p=3$, si ha da (54), applicando (10'),

$$(57)\qquad (a\varepsilon_n+b\varepsilon_{n-1}+c\varepsilon_{n-2}+d\varepsilon_{n-3})^{-1)_n}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{r}\binom{r}{n-m-r}\frac{b^{m-r}c^{m+2r-n}d^{n-m-r}}{a^{m+1}},$$

ed i primi (cinque) elementi di questa successione sono:

$$a^{-1},\ -a^{-2}b,\ -a^{-2}c+a^{-3}b^2,\ -a^{-2}d+2a^{-3}bc-a^{-4}b^3,$$
$$2a^{-3}bd+a^{-3}c^2-3a^{-4}b^2c+a^{-5}b^4$$

(rispettivamente per $n=0, 1, 2, 3, 4$).

β) Sostituendo invece, nel 2.° membro di (54), ad $(a_1\varepsilon_{n-1}+\ldots+a_p\varepsilon_{n-p})^{m)_n}$ la sua espressione data da (13), si ha:

$$(54'')\quad (a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\ldots+a_p\varepsilon_{n-p})^{-1)_n}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}}\sum{}'\frac{m!}{r_1!\ldots r_p!}a_1^{r_1}\ldots a_p^{r_p},$$

dove, nel secondo membro, la sommatoria accentata va estesa a tutti i sistemi di p numeri interi, positivi o nulli, $r_1, r_2, \ldots, r_p$, tali che sia

$$\begin{cases} r_1+r_2+\ldots+r_p=m,\\ r_1+2r_2+\ldots+pr_p=n.\end{cases}$$

OSSERVAZIONE. — Applicando (50'') in luogo di (52), si ottengono analogamente le espressioni di

$$(a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\ldots+a_p\varepsilon_{n-p})^{-\nu)_n},$$

dove ν è un intero positivo arbitrario.

61. *Reciproche binomiali di successioni ultimamente nulle.* — Mediante la formula (53) si determinano, analogamente al n.° precedente, le diverse espressioni dell'elemento generale della reciproca binomiale di una successione ultimamente (e non inizialmente) nulla. Ma possiamo procedere più rapidamente: invero, dalla (53) segue

$$(58)\quad (a_0\varepsilon_n+a_1\varepsilon_{n-1}+\ldots+a_p\varepsilon_{n-p})^{-1)^n}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}}(a_1\varepsilon_{n-1}+\ldots+a_p\varepsilon_{n-p})^{m)^n},$$

ossia, in virtù della (11') del n.° 8,

$$(58') \quad (a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_p\varepsilon_{n-p})^{-1)^n} = n!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}}\left(\frac{a_1}{1!}\varepsilon_{n-1} + \dots + \frac{a_p}{p!}\varepsilon_{n-p}\right)^{m)_n}.$$

Confrontando, ora, (58') con (54), si vedono i semplici cambiamenti che occorre eseguire, nelle formule del n.° precedente, per avere le formule che ora ci interessano.

§ 7. Interpretazioni colle serie infinite.

62. Mostriamo infine, come si è accennato nell'Introduzione — e come il Lettore avrà già notato —, che il metodo fin qui seguito nella deduzione delle formule è *l'immagine nell'elementare* di procedimenti trascendenti applicati *formalmente* alle serie infinite (convergenti o no) corrispondenti alle successioni considerate.

α) Incominciamo ad interpretare, colle serie, i prodotti isobarici e binomiali (n.° 4). Considerate due successioni (a_n) e (b_n) si ha fra serie, come è ben noto,

$$\sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n \doteq \sum_0^\infty (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0) \text{ [1]},$$

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\sum_0^\infty \frac{b_n}{n!} \doteq \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{0}a_0b_n + \binom{n}{1}a_1b_{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a_nb_0\right],$$

cioè

$$(59) \qquad \sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n \doteq \sum_0^\infty (a_n \overset{\cdot}{n} b_n),$$

$$(60) \qquad \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\sum_0^\infty \frac{b_n}{n!} \doteq \sum_0^\infty \frac{a_n \overset{n}{:} b_n}{n!}.$$

Segue anche

$$(59') \qquad \sum_0^\infty a_nx^n \sum_0^\infty b_nx^n \doteq \sum_0^\infty (a_n \overset{\cdot}{n} b_n)x^n,$$

$$(60') \qquad \sum_0^\infty \frac{a_nx^n}{n!}\sum_0^\infty \frac{b_nx^n}{n!} \doteq \sum_0^\infty \frac{(a_n \overset{n}{:} b_n)x^n}{n!}.$$

---

[1] Il segno $\doteq$ sta ad indicare che l'uguaglianza è *formale* (potrà essere anche *effettiva* solo in casi molto particolari).

Si ha poi (n.° 6), per ogni intero m non negativo,

$$\left(\sum_0^\infty a_n x^n\right)^m \doteq \sum_0^\infty a_n^{m)} {}_n x^n, \quad \left(\sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{n!}\right)^m \doteq \sum_0^\infty \frac{a_n^{m)^n} x^n}{n!}.$$

β) Interpretiamo ora, colle serie, i quozienti isobarici e binomiali (n.[i] 21 e 22). Abbiamo:

$$\frac{\sum_0^\infty b_n x^n}{\sum_0^\infty a_n x^n} \doteq \sum_0^\infty \frac{b_n}{a_n}{}_{|n}\, x^n, \tag{61}$$

$$\frac{\sum_0^\infty \frac{b_n}{n!} x^n}{\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} x^n} \doteq \sum_0^\infty \frac{b_n}{a_n}{}_{|n} \frac{x^n}{n!}, \tag{62}$$

nell'ipotesi che (a_n) sia inizialmente nulla d'ordine non maggiore di quello di (b_n).

γ) Interpretiamo ancora la derivazione isobarica e la derivazione binomiale delle successioni (n.° 47). Indicando con D l'ordinario segno operatorio di derivazione del Calcolo, si ha, nel caso della derivazione isobarica,

$$D \sum_0^\infty a_n x^n \doteq \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^n,$$

e, nel caso della derivazione binomiale,

$$D \sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{n!} \doteq \sum_{n=0}^\infty \frac{a_{n+1} x^n}{n!}.$$

63. Diamo infine, per esercizio, l'interpretazione mediante le serie di alcune formule del presente lavoro.

Dalla (31) del n.° 15 s'ottiene

$$\left[\sum_0^\infty \binom{1}{n} x^n\right]^m = \sum_{n=0}^\infty \binom{m}{n} x^n,$$

ossia, per essere m un intero positivo,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n.$$

La (34) del n.° 15 dà

$$\left[\sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^2}\right]^2 = \sum_0^\infty \binom{2n}{n} \frac{x^n}{(n!)^2},$$

e la (35) dà invece

$$e^x \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{x^n}{n!}.$$

Dalla (37) del n.° 16 segue:

$$\left[\sum_0^\infty x^n\right]^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n.$$

Dalla (51') del n.° 19 abbiamo:

$$e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+m)!} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+m)},$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+m)} = \frac{(-1)^m (m-1)!}{x^m} \left[1 - e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)\right].$$

La (18) del n.° 32 dà

$$\sum_0^\infty \alpha_1^n \sum_0^\infty \alpha_2^n \dots \sum_0^\infty \alpha_p^n \doteq \sum_0^\infty c_n,$$

dove si è posto (gli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ essendo tutti diversi)

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{p-2} & \alpha_2^{p-2} & \dots & \alpha_p^{p-2} \\ \alpha_1^{n+p-1} & \alpha_2^{n+p-1} & \dots & \alpha_p^{n+p-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{p-2} & \alpha_2^{p-2} & \dots & \alpha_p^{p-2} \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \dots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

La formula precedente, se gli α_r sono, inoltre, tutti diversi dall' unità, si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_p)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{p-2} & \alpha_2^{p-2} & \dots & \alpha_p^{p-2} \\ \frac{\alpha_1^{p-1}}{1-\alpha_1} & \frac{\alpha_2^{p-1}}{1-\alpha_2} & \dots & \frac{\alpha_p^{p-1}}{1-\alpha_p} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{p-2} & \alpha_2^{p-2} & \dots & \alpha_p^{p-2} \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \dots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix},$$

dove il secondo membro non è altro che la funzione interpolare d'ordine $p-1$, o, come altri dicono, la differenza divisa d'ordine $p-1$, relativa ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, della funzione

$$\frac{x^{p-1}}{1-x}.$$

Queste poche interpretazioni mediante le serie bastano per comprendere che le formule ottenute nella presente Algebra si presentano in forma tale da poter essere subito trasportate nel campo delle funzioni.

Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée.

Memoria di M. Brelot (a Paris).

Sunto. - *Ce mémoire apporte un complément aux travaux de* M. Volterra *sur les fluctuations biologiques et plus précisemént au Chapitre IV de son ouvrage « Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie ». J'étudie le cas héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée, mais en introduisant* des termes d'amortissement $-\lambda N$, *celui relatif à l'espèce dévorée n'étant sûrement pas nul. Alors les fluctuations sont* limitées *supérieurement et l'espèce dévorée a des* variations bornées; *lorsqu'il n'y a pas d'état stationnaire la seconde* s'épuise ; *sinon elle admet aussi des variations bornées, et la loi des moyennes asymptotiques est alors valable au sens le plus général.*

1. Je me propose d'apporter ici quelque contribution à une étude mathématique déja longuement développée par M. Volterra, sur les fluctuations d'espèces animales vivant dans un même milieu. Aprés avoir publié sur ce sujet deux mémoires [1], M. Volterra vient de faire paraître un ouvrage plus complet intitulé « Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie » (Collection des Cahiers scientifiques, fasc. VII, Gauthier-Villars) et auquel je renvoie tout d'abord.

Dans l'étude faite au Chap. IV du probléme biologique héréditaire de deux espèces dont l'une dévore l'autre, et qui est l'extension héréditaire de celle du premier Chapitre, on ne peut affirmer que les fluctuations soient *bornées*; c'est, pour l'interprétation biologique, un inconvénient évident, et d'autre part, à cause de cela [2], il a fallu donner à la loi des moyennes, pour

[1] Memorie della « R. Acc. Nazionale dei Lincei », serie VI, vol. II, fasc. III, 1926 - puis un exposé contenant en outre une étude avec l'hypothèse d'hérédité, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* (« R. Comitato Talassografico italiano », Memoria CXXXI).

[2] On peut facilement reconnaître que, avec l'hypothèse que les fluctuations scient bornées (limites inférieures et supérieures > 0 au delà de t_0), la démonstration de la loi des moyennes permet, sans les inégalités préliminaires, d'établir la loi sans restriction — et on peut même ne pas limiter l'hérédité, d'ailleurs — ; ajoutons que les fluctuations seront bornées si l'on suppose seulement N_1 limitée supérieurement. Tout ceci s'établit par des raisonnements analogues à ceux qui suivent dans ce mémoire.

qu'elle soit générale, une forme un peu spéciale avec une interprétation restrictive de la « moyenne asymptotique ».

Pour rendre les équations valables pour de grandes valeurs des nombres d'individus, on peut songer, de même que dans l'étude sans hérédité du Chapitre III, *à introduire dans les équations héréditaires, des termes* $-\lambda_1 N_1$, $-\lambda_2 N_2$, dans l'espoir aussi qu'ils limiteront supérieurement les fluctuations et même les borneront (limites inférieures et supérieures positives) s'il existe un état d'équilibre, et sans doute alors feront disparaître la restriction sur la loi des moyennes asymptotiques; nous verrons qu'il en est bien ainsi.

D'autre part, s'il a été facile pour les petites fluctuations biologiques d'étendre à l'hérédité illimitée les raisonnements primitivement développés avec une hérédité limitée, il a été nécessaire, presque au début de l'étude du cas général (§ II), de conserver l'hérédité limitée, essentielle pour l'établissement de la loi des moyennes. Si cette hypothèse suffit parfaitement au biologiste, il peut y avoir quelque intérêt mathématique à ne pas borner la durée d'hérédité.

Tout comme après une premiére étude d'un cas remarquable de trois espèces sans hérédité, M. Volterra a repris la question avec un terme d'amortissement dont il a étudié le rôle, *je vais reprendre et développer, dans l'hypothèse héréditaire, le cas fondamental de deux espèces dévorante et dévorée, avec des termes* $-\lambda N$, et sans faire d'hypothèse sur la durée d'hérédité.

Et tout comme au paragraphe II du dernier chapitre, je prendrai, par raison de symétrie, des équations un peu plus générales que celles auxquelles conduit le raisonnement simple de la théorie des rencontres. J'élargirai même encore les hypothèses pour que soit inclus dans l'étude qui suit, le cas de non hérédité qui n'a pas été traité à part avec les termes $-\lambda N$.

2. Partons donc du systéme:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left[\varepsilon_1 - \lambda_1 N_1 - \gamma_1 N_2 - \displaystyle\int_0^{+\infty} F_1(\tau)\, N_2(t\tau) d - \tau\right] & \text{(espèce dévorée)} \\[2ex] \dfrac{dN_2}{dt} = N_2\left[-\varepsilon_2 - \lambda_2 N_2 + \gamma_2 N_1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau) d\tau\right] & \text{(espèce dévorante)} \end{cases}$$

avec:

$$\varepsilon_1 > 0 \qquad \varepsilon_2 > 0 \qquad \lambda_1 > 0$$
$$\gamma_1 \geq 0 \qquad \gamma_2 \geq 0 \qquad \lambda_2 \geq 0$$

F_1, F_2 fonctions continues ≥ 0 dans $(0, +\infty)$ donnant une valeur finie à

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau)d\tau = \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau)d\tau = \Gamma_2$$

enfin :

$$\gamma_1 + \Gamma_1 > 0 \qquad \gamma_2 + \Gamma_2 > 0$$

de façon que les espèces aient des actions réciproques non nulles.

On supposera dans $(-\infty, t_0)$ les fonctions N_1, N_2 connues, continues, positives et bornées — ou bien s'il y a une durée d'hérédité limitée par T_0, seulement dans l'intervalle $(t_0 - T_0, t_0)$.

Tout d'abord on verra qu'il n'y a que des modifications insignifiantes à apporter à la démonstration de M. VOLTERRA relative au problème sans les facteurs λ (Voir n.° 16 de la note mathématique du Chapitre IV) pour qu'elle s'étende immédiatement à notre cas, en établissant *l'existence des solutions* dans $(t_0, +\infty)$ et *l'unicité* dans tout intervalle $(t_0, t_1 > t_0)$.

3. Établissons maintenant ce résultat essentiel *que les fluctuations sont limitées supérieurement.*

D'abord $N_1(t)$ *ne peut dépasser et même atteindre après* t_0 *le plus grand,* soit A, *des deux nombres* $N_1^0 = N_1(t_0)$ *et* $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$. Car aux instants $t_1 \geq t_0$ où l'on aurait $N_1 = A$, on aurait aussi $\frac{dN_1}{dt} < 0$ de sorte que ces instants t_1 seraient isolés; et il y en aurait un $t_1' > t_0$ pour lequel N_1 prendrait la valeur A pour la première fois après t_0.

Comme pour

$$t_0 \leq t \leq t_1' \qquad N_1(t) \leq A,$$

il y a contradiction avec

$$\frac{dN_1}{dt}(t_1') < 0.$$

Montrons même que, *quel que soit* $\eta > 0$, $N_1(t)$ *reste inférieur à* $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta$ *à partir d'un certain moment* (qui peut dépendre de η).

D'abord N_1 ne pourra rester après t_0 toujours au moins égal à $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta$ sinon $\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} < -\eta\lambda_1$ ce qui exigerait que N_1 tende vers 0.

Donc N_1 prendra à un certain moment une valeur inférieure à $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta$;

en prenant cet instant comme nouvel instant initial, on voit que N_1 ne pourra plus jamais ensuite dépasser on même atteindre cette valeur, d'où la proposition.

Plus brièvement:

Plus grande limite de N_1 pour $t \to +\infty = \overline{N_1}^{+\infty} \leqq \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$.

Montrons maintenant que N_2 *est limitée supérieurement*, par un raisonnement qui ne suppose pas $\lambda_2 \neq 0$.

Soit $M_1 > 0$ une limite supérieure de $N_1(t)$ dans $(-\infty, +\infty)$. La seconde équation (1) donne:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < (\gamma_2 + \Gamma_2)M_1 = \alpha > 0.$$

Remarquons que, après t_0, la courbe $y = N_2(t)$ du plan (t, y), est, par rapport à la courbe $y = e^{\alpha t}$, transportée parallèlement à Ot de façon à venir passer au point $(t_1, N_1(t_1))$ où $t_1 \geq t_0$, au dessus avant t_1 et au dessous après. Si alors pour $\theta > t_0$:

$$N_2(\theta) = H > h > N_2^0 = N_2(t_0)$$

on aura nécessairement:

$$T = \frac{1}{\alpha}\log\frac{H}{h} < \theta - t_0$$

et pour $t_0 < \theta - T \leq t \leq \theta$

$$N_2(t) > h.$$

Par suite dans le même intervalle $(\theta - T, \theta)$

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} < \varepsilon_1 - \gamma_1 h - h\int_{\theta-T}^{t} F_1(t-\tau)d\tau$$

$$< \varepsilon_1 - h\left(\gamma_1 + \int_0^{t-(\theta-T)} F_1(u)du\right).$$

Puisque $\gamma_1 + \Gamma_1 > 0$, on pouvra trouver μ et $\beta(> 0)$ tels que $u > \mu$ entraîne

$$\gamma_1 + \int_0^u F_1(u)du > \beta > 0.$$

Supposons que h soit assez grand pour que:

$$\varepsilon_1 - h\beta < -\gamma \quad \text{où} \quad \gamma > 0$$

et $\frac{H}{h}$ assez grand pour que: $T > 3\mu$.

Alors dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{2T}{3}, \theta\right)$ on aura

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} < -\gamma$$

et par suite dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{T}{3}, \theta\right)$, on aura sûrement

$$N_1 < M_1 e^{-\gamma\frac{T}{3}}.$$

Donc, à l'instant θ

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < -\varepsilon_2 + \gamma_2 M_1 e^{-\gamma\frac{T}{3}} + M_1\int_{-\infty}^{\theta-\frac{T}{3}} F_2)\theta - \tau)d\tau + M_1 e^{-\gamma\frac{T}{3}}\int_{\theta-\frac{T}{3}}^{\theta} F_2(\theta - \tau)d\tau$$

$$< -\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma\ )M_1 e^{-\gamma\frac{T}{3}} + M_1\int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_2(u)du.$$

Si T est assez grand pour que, séparément, $(\gamma_2 + \Gamma_2)M_1 e^{-\gamma\frac{T}{3}}$ et $M_1\int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_2(u)\,du$ soient inférieurs à $\frac{\varepsilon_2}{2}$, et c'est ce qui arrivera si $\frac{H}{h}$ est suffisamment grand, alors $\frac{dN_2}{dt}$ sera négatif à l'instant θ.

Finalement, en choisissant d'abord h assez grand, puis $\frac{H}{h}$ assez grand, on peut trouver un nombre $H > N_2^0$ tel que si N_2 atteingnait cette valeur, sa dérivée à ce moment serait négative. On en déduit aussitôt que N_2 ne pourra jamais après t_0 dépasser ou même atteindre cette valeur, ce qui démontre que N_2 est limitée supérieurement.

4. Montrons maintenant que N_1 est limitée inférieurement par un nombre > 0, donc que *la première espèce a des variations bornées* (aprés t_0).

Remarquons essentiellement que M_1, M_2 ètant des limites supérieures de N_1, N_2 dans $(-\infty, +\infty)$

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > -\lambda_1 M_1 - \gamma_1 M_2 - \Gamma_1 M_2 = -\omega \quad \text{où} \quad \omega > 0.$$

La comparaison des courbes $y = N_1(t)$ et $y = e^{-\omega t}$ montre facilement que, si pour $\theta > t_0$

$$N_1(\theta) = l < L < N_1^0,$$

on aura

$$T = \frac{1}{\omega} \log \frac{L}{l} < \theta - t_0;$$

et pour $t_0 < \theta - T \leq t \leq \theta$

$$N_1(t) < L.$$

Donc, dans le même intervalle $(\theta - T, \theta)$

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < -\varepsilon_2 + \gamma_2 L + M_1 \int_{-\infty}^{\theta - T} F_2(t-\tau)d\tau + L\int_{\theta-T}^{t} F_2(t-\tau)d\tau$$

$$< -\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)L + M_1 \int_{t-(\theta-T)}^{+\infty} F_2(u)du.$$

Supposons L assez petit pour que

$$-\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)L < -\frac{\varepsilon_2}{2}$$

et T assez grand pour que

$$M_1 \int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_2(u)du < \frac{\varepsilon_2}{3}$$

ce qui aura lieu si $\frac{L}{l}$ est assez grand.

Alors dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{2T}{3}, \theta\right)$

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < -\frac{\varepsilon_2}{6}$$

et par suite dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{T}{3}, \theta\right)$

$$N_2 < M_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{6}\frac{T}{3}}.$$

Donc à l'instant θ:

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > \varepsilon_1 - \lambda_1 L - \gamma_1 M_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{6}\frac{T}{3}} - M_2 \int_{-\infty}^{\theta - \frac{T}{3}} F_1(\theta-\tau)d\tau - M_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{6}\frac{T}{3}} \int_{\theta-\frac{T}{3}}^{\theta} F_1(\theta-\tau)d\tau$$

$$> \varepsilon_1 - \lambda_1 L - (\gamma_1 + \Gamma_1) M_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{6}\frac{T}{3}} - M_2 \int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_1(u)du.$$

Si L est assez petit pour que:

$$\lambda_1 L < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

si T est assez grand pour que:

$$(\gamma_1 + \Gamma_1)M_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{6}\frac{T}{3}} < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

et que:

$$M_2 \int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_1(u)du < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

ce qui arrivera si $\frac{L}{l}$ est assez grand, alors $\frac{dN_1}{dt}$ sera > 0 à l'instant θ.

Ou en déduit en choisissant successivement L, puis l, qu'il est possible de trouver l assez petit pour que N_1 ne puisse jamais descendre jusqu'à cette valeur. N_1 est donc bien limitée inférieurement par un nombre positif.

5. Cherchons si un *état stationnaire* est possible; les équations des valeurs stationnaires sont:

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_1 k_1 + (\gamma_1 + \Gamma_1)k_2 = \varepsilon_1 \\ (\gamma_2 + \Gamma_2)k_1 - \lambda_2 k_2 = -\varepsilon_2 \end{cases}$$

d'où:

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1\lambda_2 + \varepsilon_2(\gamma_1 + \Gamma_1)}{\lambda_1\lambda_2 + (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)} \qquad k_2 = \frac{\varepsilon_1(\gamma_2 + \Gamma_2) - \lambda_1\varepsilon_2}{\lambda_1\lambda_2 + (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}$$

solution unique finie puisque: $\lambda_1\lambda_2 + (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2) \geq (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2) > 0$. k_1 est avec nos hypothèses, toujours > 0; mais k_2 peut être de signe quelconque.

6. Examinons d'abord *le cas où il n'y a pas d'état stationnaire*, c'est à dire, en laissant de côté le cas d'égalité $k_2 = 0$ l'hypothése: $k_2 < 0$ ou

$$\lambda_1 > \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\gamma_2 + \Gamma_2).$$

Je vais montrer qu'alors N_2 *tend vers* 0 *et* N_1 *vers* $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$, autrement dit, *la seconde espèce s'épuise et la première a la même limite que si elle existait seule.*

On remarquera que cette circonstance, *indépendante de la valeur* ≥ 0 *de* λ_2 se produit quand λ_1 est assez grand, c'est à dire quand la résistance de la première espèce à son propre développement dépasse une certaine valeur.

Montrons d'abord, en ce qui concerne N_2, que si $\eta_0 > 0$ est choisi convenablement petit, on aura, à partir d'un certain moment:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < -\eta_0 .$$

En effet, $\eta > 0$ étant choisi arbitrairement, à partir d'un certain moment t_1 on aura $N_1 < \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta$, d'où:

$$\int_0^{+\infty} F_2(\tau)N_1(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau)N_1(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} F_2(t-\tau)N_1(\tau)d\tau$$

$$< \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta\right)\int_{t_1}^{t} F_2(t-\tau)d\tau + M_1\int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau)d\tau$$

$$< \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta\right)\Gamma_2 + M_1\int_{t-t_1}^{+\infty} F_2(u)du$$

et par suite:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < -\varepsilon_2 + \gamma_2\left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta\right) + \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta\right)\Gamma_2 + M_1\int_{t-t_1}^{+\infty} F_2(u)du$$

$$< -\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta(\gamma_2 + \Gamma_2) + M_1\int_{t-t_1}^{+\infty} F_2(u)du.$$

Soit T tel que: $\int_T^{+\infty} F_2(u)du < \eta$.

Puisque $-\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} < 0$, on voit qu'en choisissant η assez petit $\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt}$ deviendra, après l'instant $t_1 + T$, inférieur à un certain nombre < 0, d'où il suit que $N_2 \to 0$.

Pour voir maintenant que N_1 tend vers $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$, puisqu'on sait que $\overline{N_1}^{+\infty} \leq \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$, il suffira de prouver que, étant donné $\eta > 0$ arbitraire, on aura à partir d'un certain moment $N_1 > \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \eta$.

Remarquons d'abord que $\int_0^{+\infty} F_1(\tau)N_2(t-\tau)d\tau$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Car cela s'écrit, en introduisant un instant $\theta < t$:

$$\int_{-\infty}^{\theta} F_2(t-\tau)N_2(\tau)d\tau + \int_{\theta}^{t} F_2(t-\tau)N_2(\tau)d\tau$$

et si pour $t > \theta$, $N_2 < \eta_0$, on aura:

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau)N_2(t-\tau)d\tau < M_2 \int_{t-\theta}^{+\infty} F_1(u)du + \eta_0\Gamma_1 .$$

Soit T_0 tel que $\int_T^{+\infty} F_2(u)du < \eta_0$; pour $t > \theta + T_0$, il viendra:

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau)N_2(t-\tau)d\tau < (\Gamma_1 + M_2)\eta_0 .$$

Comme on peut choisir η_0 arbitrairement et trouver ensuite θ et T_0, la conclusion est immédiate.

Mais alors $\varphi(t) = \gamma_1 N_2 + \int_0^{+\infty} F_1(\tau)N_2(t-\tau)d\tau$ tendra vers 0 quand $t \to +\infty$.

Considérons $\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 - \lambda_1 N_1 - \varphi(t)$ et supposons, si $\eta > 0$, qu'à partir de t_1,

$$\varphi(t) < \lambda_1 \frac{\eta}{2}.$$

N_1 ne pourra rester aprés t_1, inférieur à $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \eta$, sinon $\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt}$ resterait supérieur à $\frac{\lambda_1\eta}{2}$, ce qui est incompatible avec le fait que N_1 est borné.

Donc N_1 finira par prendre une valeur au moins égale à $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \eta$; à ce moment $\frac{dN_1}{dt} > 0$ et dans la suite N_1 ne pourra jamais redescendre à la valeur considérée, car la première fois qu'elle la reprendrait en particulier, on devrait avoir aussi $\frac{dN_1}{dt} > 0$, ce qui est incompatible avec le fait qu'au voisinage antérieur de cet instant N_1 est au moins égale à la valeur considérée.

D'où la propriété annoncée puisque η est arbitraire > 0.

7. *Cas d'un état stationnaire possible*: $k_2 > 0$ ou

$$0 < \lambda_1 < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\gamma_2 + \Gamma_2).$$

Montrons d'abord que *la seconde espèce comme la première a ses fluctuations bornées*; il suffira de voir que N_2 est limitée inférieurement par un nombre > 0.

On raisonnera comme au n.° 4 en partant de:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} > -\varepsilon_2 .$$

Si pour $\theta > t_0$,

$$N_2(\theta) = l < L < N_2^0$$

on aura

$$T = \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{L}{l} < \theta - t_0$$

et pour:

$$t_0 < \theta - T \leq t \leq \theta, \quad N_2(t) < L,$$

puis:

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > \varepsilon_1 - \lambda_1 N_1 - (\gamma_1 + \Gamma_1)L - M_2\int_{t-(\theta-T)}^{+\infty} F_1(u)du.$$

Etant donné $\eta > 0$ et moindre que ε_1, supposons L assez petit et T assez grand pour que:

$$(\gamma_1 + \Gamma_1)L < \frac{\eta}{2} \qquad M_2\int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_1(u)du < \frac{\eta}{2}$$

alors dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{2T}{3}, \theta\right)$, on aura:

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > \varepsilon_1 - \eta - \lambda_1 N_1 .$$

Soit ν_1 une limite inférieure > 0 de N_1, qu'on prendra inférieure à $\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$; si η est assez petit, $\nu_1 < \frac{\varepsilon_1 - \eta}{\lambda_1}$ et la courbe $y = y(t)$ intégrale de $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 - \eta - \lambda_1 y$ et qui part du point $(t = \theta,\ y = \nu_1)$ ira en croissant pour tendre asymptotiquement vers $\frac{\varepsilon_1 - \eta}{\lambda_1}$ suivant la loi:

$$t - \theta = \int_{\nu_1}^{y} \frac{dy}{y(\varepsilon_1 - \eta - \lambda_1 y)} .$$

Elle atteindra la valeur $\frac{\varepsilon_1 - 2\eta}{\lambda_1}$ au bout du temps

$$\sigma = \int_{\nu_1}^{\frac{\varepsilon_1 - 2\eta}{\lambda_1}} \frac{dy}{y(\varepsilon_1 - \eta - \lambda_1 y)}.$$

Il est facile de voir, en raisonnant par l'absurde, que dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{2T}{3}, \theta\right)$ la courbe N_1 sera au dessus de cette courbe y. Si donc nous supposons $\sigma < \frac{T}{3}$, on aura dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{T}{3}, \theta\right)$

$$N_1 > \frac{\varepsilon_1 - 2\eta}{\lambda_1}.$$

On en déduit qu'à l'instant θ:

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} > -\varepsilon_2 - \lambda_2 L + \gamma_2 \cdot \frac{\varepsilon_1 - 2\eta}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_1 - 2\eta}{\lambda_1}\int_{\theta - \frac{T}{3}}^{\theta} F_2(\theta - \tau)d\tau$$

$$> -\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \left[\lambda_2 L + \frac{2\eta}{\lambda_1}(\gamma_2 + \Gamma_2) + \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\int_{\frac{T}{3}}^{+\infty} F_2(u)du\right].$$

Si L, η sont assez petits et T assez grand, la quantité entre crochets, > 0, sera inférieure à la quantité par hypothèse positive $-\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}$ et par suite $\frac{dN_2}{dt}$ sera positive à l'instant θ.

Si on choisit successivement η assez petit, L assez petit, puis T assez grand, c'est à dire $l > 0$ assez petit, on conclut que si N_2 prenait cette valeur l, $\frac{dN_2}{dt}$ serait à ce moment nécessairement > 0. Il s'ensuit encore que cette valeur l est une limite inférieure de N_2. c. q. f. d.

8. Il est commode, pour poursuivre cette étude, d'écrire les équations en mettant en évidence les valeurs stationnaires positives k_1, k_2. Il vient:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -N_1\left[\lambda_1(N_1 - k_1) + \gamma_1(N_2 - k_2) + \int_0^{+\infty} F_1(\tau)(N_2(t-\tau) - k_2)d\tau\right] \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2\left[-\lambda_2(N_2 - k_2) + \gamma_2(N_1 - k_1) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau)(N_1(t-\tau) - k_1)d\tau\right]. \end{aligned} \right.$$

Comme dans le problème traité sans les facteurs λ, on peut encore établir que pour chacune des fonctions N_1, N_2, *il est impossible qu'à partir d'un certain moment, elle diffère de la valeur stationnaire correspondante d'une quantité de module supérieur à un nombre positif.* Autrement dit en désignant par $\overline{N_1}^{+\infty}$, $\underline{N_1}_{+\infty}$, $\overline{N_2}^{+\infty}$, $\underline{N_2}_{+\infty}$ les plus grandes et plus petites limites quand $t \to +\infty$, *et qui sont* > 0 *et finies*:

$$\underline{N_1}_{+\infty} \leq k_1 \leq \overline{N_1}^{+\infty}, \quad \underline{N_2}_{+\infty} \leq k_2 \leq \overline{N_2}^{+\infty}.$$

De sorte que, pour chaque espéce, *s'il y a une limite, ce ne peut être que la valeur stationnaire correspondante.*

Par exemple, supposons que pour $t \geq t_1$ on ait toujours $N_2 > k_2 + \alpha$ où $\alpha > 0$. On verra qu'an bout d'un certain temps, c. à. d. pour $t \geq t_2 > t_1$

$$\gamma_1(N_2 - k_2) + \int_0^{+\infty} F_1(\tau)(N_2(t-\tau) - k_2)d\tau$$

sera supérieure à un certain nombre $\beta > 0$, d'où

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} + \lambda_1(N_1 - k_1) < -\beta.$$

À partir d'un certain moment t_3, N_1 devra d'après cela rester inférieure à un nombre quelconque pris entre $k_1 - \frac{\beta}{\lambda_1}$ et k_1. Car on verra d'abord que N_1 ne peut rester supérieure à un tel nombre, puis que si elle prend une fois cette valeur elle restera nécessairement dans la suite toujours plns petite.

Mais alors, après un nouvel instant assez éloigné $t_4 > t_3$

$$\gamma_2(N_1 - k_1) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau)(N_1(t-\tau) - k_1)d\tau$$

restera inférieure à un certain nombre négatif $-\delta$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} &< -\lambda_2(N_2 - k_2) - \delta \\ &< -\alpha\lambda_2 - \delta,\end{aligned}$$

ce qui exigerait que N_2 tendît vers 0 et fait donc apparaître la contradiction.

On traiterait de manière analogue les autres cas.

J'ajoute même le résultat suivant qui s'établirait par des raisonnements analogues à ceux des n.° 4 et 7, et basés sur la propriété des deux limitations positives pour N_1, N_2.

C'est que, *étant donné* $\eta > 0$ *quelconque, on peut trouver* T *fini tel que chacune des inégalités*:

$$|N_1 - k_1| > \eta, \quad |N_2 - k_2| > \eta$$

soit impossible pendant une période de durée T *arbitrairement postérieure à* t_0.

9. On établira maintenant, en raisonnant à peu près comme dans le cas de M. VOLTERRA, *la loi des moyennes asymptotiques*, mais avec le sens général de la moyenne asymptotique, c'est à dire que les moyennes

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} N_1(t)dt, \quad \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} N_2(t)dt$$

tendent vers les valeurs de l'état stationnaire k_1 et k_2, lorsque $t \to +\infty$ par valeurs *quelconques*.

Des équations (3) on tire:

$$\log\frac{N_1(t_1)}{N_1(t_0)} = -\lambda_1\int_{t_0}^{t_1}(N_1 - k_1)dt + \gamma_1\int_{t_0}^{t_1}(N_2 - k_2)dt + \int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^{+\infty}F_1(\tau)(N_2(t-\tau) - k_2)dt.$$

Transformons l'intégrale double:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^{+\infty}F_1(\tau)(N_2(t-\tau) - k_2)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1}dt\int_{-\infty}^{t}F_1(t-\tau)[N_2(\tau) - k_2]d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1}dt\int_{-\infty}^{t_0}F_1(t-\tau)[N_2(\tau) - k_2]d\tau + \int_{t_0}^{t_1}dt\int_{t_0}^{t}F_1(t-\tau)[N_2(\tau) - k_2]d\tau.\end{aligned}$$

La première partie est de module inférieur à

$$(M_2 + k_2)\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{-\infty}^{t_0}F_1(t-\tau)d\tau = (M_2 + k_2)\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{t-t_0}^{+\infty}F_1(u)du.$$

Or $\int_{t-t_0}^{+\infty}F_1(u)du \to 0$ quand $t \to +\infty$; il s'ensuit aisément que la valeur moyenne de cette fonction de t entre t_0 et t_1 tend vers 0 quand $t_1 \to +\infty$.

Ainsi $\dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{t_0} F_1(t-\tau)[N_2(\tau) - k_2]d\tau \to 0$ quand $t_1 \to +\infty$. D'autre part, d'après la formule de DIRICHLET :

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t} F_1(t-\tau)[N_2(\tau) - k_2]d\tau = \int_{t_0}^{t_1}[N_2(\tau) - k_2]d\tau \int_{\tau}^{t_1} F_1(t-\tau)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}[N_2(\tau) - k_2]d\tau \int_{0}^{t_1-\tau} F_1(u)du$$

$$= \Gamma_1 \int_{t_0}^{t_1}[N_2(\tau) - k_2]d\tau - \int_{t_0}^{t_1}(N_2(\tau) - k_2)d\tau \int_{t_1-\tau}^{+\infty} F_1(u)du.$$

La seconde partie est de module inférieur à

$$(M_2 + k_2)\int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{t_1-\tau}^{+\infty} F_1(u)du = (M_2 + k_2)\int_{0}^{t_1-t_0} dv \int_{v}^{+\infty} F_1(u)du$$

et comme $\displaystyle\int_{v}^{+\infty} F_1(u)du \to 0$ quand $v \to +\infty$, sa valeur moyenne entre 0 et $t_1 - t_0$ tendra vers 0 quand $t_1 \to +\infty$.

Ainsi $\dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}[N_2(\tau) - k_2]d\tau \int_{t_1-\tau}^{+\infty} F_1(u)du \to 0$ quand $t_1 \to +\infty$. Finalement, on déduit de l'équation initiale, puisque, N_1 restant comprise entre deux nombres positifs, $\left|\log \dfrac{N_1}{N_1^0}\right|$ demeure borné, que

$$-\lambda_1 \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(N_1 - k_1)dt + (\gamma_1 + \Gamma_1)\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(N_2 - k_2)dt = \varphi_1(t_1) \to 0$$

quand $t_1 \to +\infty$

et de même, on obtiendrait pareillement:

$$(\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(N_1 - k_1)dt - \lambda_2 \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(N_2 - k_2)dt = \varphi_2(t_1) \to 0$$

quand $t_1 \to +\infty$.

Résolvant ce système par rapport aux valeurs moyennes de $N_1 - k_1$, $N_2 - k_2$ et passant à la limite, on trouve que ces valeurs moyennes tendent vers 0, ce qui établit la propriété annoncée.

10. Etudions la *perturbation des moyennes* asymptotiques par destruction uniforme et proportionnelle dans chaque espèce au nombre des individus présents. On regardera, quand on fait varier ε_1 et ε_2, comment varient:

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1\lambda_2 + \varepsilon_2(\gamma_1 + \Gamma_1)}{\lambda_1\lambda_2 + (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)} \qquad k_2 = \frac{\varepsilon_1(\gamma_2 + \Gamma_2) - \lambda_1\varepsilon_2}{\lambda_1\lambda_2 + (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}.$$

Quand on ne détruit que l'espèce dévorée, la moyenne asymptotique de l'espèce dévorante diminue, et celle de l'espèce dévorée diminue ou reste invariable suivant que $\lambda_2 > 0$ on $\lambda_2 = 0$.

Quand on ne détruit que l'espèce dévorante, la moyenne asymptotique de l'espèce dévorante diminue, celle de l'espèce dévorée croît.

Quand on détruit simultanément les deux espèces, la moyenne asymptotique de l'espèce dévorante diminue mais celle de l'autre peut augmenter on diminuer suivant le procédé de destruction, à moins que $\lambda_2 = 0$ dans quel cas elle augmente toujours.

En posant:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 - \alpha_1 x & \alpha_1 \geq 0 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \alpha_2 x & \alpha_2 \geq 0 \end{array} \qquad x > 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 > 0$$

x mesurera l'intensité de la destruction, α_1, α_2 caractériseront le mode de destruction.

On voit que k_2 est toujours fonction décroissante de x, tandis que k_1 est croissante, décroissante on constante suivant que $-\lambda_2\alpha_1 + (\gamma_1 + \Gamma_1)\alpha_2$ est > 0, < 0 ou nul.

Ajoutons que pour qu'on reste dans le cas d'existence d'un état stationnaire et dans les conditions du problème, il faut et suffit que l'intensité x reste inférieure à

$$\frac{\varepsilon_1^0(\gamma_2 + \Gamma_2) - \lambda_1\varepsilon_2^0}{\alpha_1(\gamma_2 + \Gamma_2) + \lambda_1\alpha_2} < \frac{\varepsilon_1^0}{\alpha_1}.$$

11. Pour terminer, j'indiquerai *un cas simple, où, lorsqu'un état stationnaire est possible, on peut affirmer que le système admet un état limite qui est donc l'état stationnaire.*

C' est celui où:

$$\lambda_1\lambda_2 > (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2).$$

Nous utiliserons les équations (3).

On sait que, quel que soit $\eta > 0$, à partir d'un certain moment t_1

$$N_1 < \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} + \eta = k_1 + \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2 + \eta$$

d'où

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2(N_2 - k_2) < \gamma_2\left(\frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2 + \eta_1\right) + (M_1 + k_1)\int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau)d\tau$$
$$+ \left(\frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2 + \eta_1\right)\int_{t_1}^{t} F_2(t-\tau)d\tau$$

et par suite après un certain instant $t_2 > t_1$,

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2(N_2 - k_2) < \frac{k_2}{\lambda_1}(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2) + \sigma_1\eta,$$

où $\sigma_1 > 0$ peut être choisi *indépendamment* de η, et fonction seulement des données (coefficients et conditions initiales).

Par un raisonnement déjà utilisé, on déduit de là, qu'après un nouvel instant convenablement éloigné $t_3 > t_2$

$$N_2 < k_2 + \frac{(\lambda_2 + \Gamma_2)}{\lambda_2} \cdot \frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)}{\lambda_1} k_2 + \sigma_2\eta$$

où σ_2 a eté choisi convenablement, comme σ_1, indépendamment de η.

Mais alors, d'après la première équation, après $t_4 > t_3$ convenablement pris, on aura:

$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} + \lambda_1(N_1 - k_1) > -(\gamma_1 + \Gamma_1)\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} k_2 - \sigma_3\eta$$

où $\sigma_3 > 0$ a été choisi convenablement indépendamment de η.

De sorte qu'après t_5 convenable et $> t_4$, on aura:

$$N_1 > k_1 - \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} \cdot \frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} k_2 - \sigma_4\eta$$

où cette quantité est effectivement positive si η est assez petit puisque, sous l'hypothése $\lambda_1\lambda_2 > (\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)$, il vient:

$$k_1 > \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2 .$$

En conséquence, après t_6 convenable et $> t_5$, il viendra, d'après la seconde équation (3):

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2(N_2 - k_2) > (\gamma_2 + \Gamma_2)\frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1}\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} k_2 \qquad \sigma_5\eta$$

de sorte qu'après un certain instant $t_7 > t_6$

$$N_2 > k_2 - \left[\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2}\right]^2 k_2 - \sigma_6\eta$$

les σ étant toujours choisis convenablement indépendamment de η.

Ainsi, à partir d'un moment assez éloigné

$$-\eta_1 - \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1}\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} k_2 < N_1 - k_1 < \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2 + \eta_1$$

$$-\eta_1 - \left[\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2}\right]^2 k_2 < N_2 - k_2 < \frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} k_2 + \eta_1$$

où le nombre positif η_1 peut être choisi d'avance arbitrairement petit.

Reprenons la première équation et utilisons comme limite inférieure de $N_2 - k_2$, au lieu de $-k_2$ (ce à quoi revenait le raisonnement fournissant la limite supérieure $k_1 + \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} k_2$ pour N_1), l'expression qu'on vient de trouver. On verra alors qu'à partir d'un certain moment:

$$N - k_1 < \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1}\left[\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2}\right]^2 k_2 + \eta_2$$

où η_2 est choisi arbitraire > 0.

On pourra reprendre le raisonnement à partir de cette limitation meilleure, puis refaire autant de fois qu'on voudra le cycle du raisonnement. On obtient ainsi le résultat suivant: n étant un entier fixé ≥ 1, quel que soit $\eta > 0$, on aura à partir d'un moment assez éloigné, en posant

$$\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1\lambda_2} = q$$

$$-\eta - \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} q^{n+1} k_2 < N_1 - k_1 < \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} q^n k_2 + \eta$$

$$-\eta - q^{n+2} k_2 < N_2 - k_2 < q^{n+1} k_2 + \eta .$$

Puisque $q < 1$, on en déduira bien facilement que N_1 et N_2 doivent tendre vers k_1 et k_2. Il n'y aura, étant donné η_0, qu'à prendre d'abord n assez grand pour que $\frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} q^{n+1}k_2$, $\frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\lambda_1} q^n k_2$, $q^{n+2}k_2$, $q^{n+1}k_2$ soient moindres que $\frac{\eta_0}{2}$, puis choisir $\eta < \frac{\eta_0}{2}$; on saura alors qu'à partir d'un moment assez éloigné

$$-\eta_0 < N_1 - k_1 < \eta_0$$
$$-\eta_0 < N_2 - k_2 < \eta_0$$

ce qui établit la proposition.

Ainsi λ_1 *étant fixé assez petit pour qu'il existe un état stationnaire, dès que* λ_2 *dépassera une certaine valeur* $\frac{(\gamma_1 + \Gamma_1)(\gamma_2 + \Gamma_2)}{\lambda_1}$, *on est sûr que le système aura un état limite, l'état stationnaire.*

Alcuni elementi di meccanica negli spazi curvi.

Memoria di GIUSEPPE VITALI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. espone detti elementi col metodo della rappresentazione funzionale, metodo che, come egli dice, nella sostanza equivale al metodo vettoriale, ma nella forma lo supera per la scorrevolezza e per la naturalezza. L'A. approfitta della pubblicazione per sottolineare alcune osservazioni, delle quali pensa di dover trar partito in altra occasione.*

Non mi provo ad indicare l'ultimo fine scientifico a cui tendo con questa succinta pubblicazione. Penso che ora non avrei tutti gli elementi per esprimermi in modo chiaro. Posso soltanto dire che la definizione che figura nel § 3 ed il contenuto del § 5 costituiscono del materiale che richiamerò in altra occasione.

Per ora basta che l'attenzione del lettore si soffermi sul fine immediato e modesto di questa pubblicazione, che è l'esposizione semplice, malgrado il punto di vista tanto generale, di alcuni elementi della meccanica.

Come in altre questioni, anche qui la semplicità è ottenuta col metodo della rappresentazione funzionale di cui ho dato parecchi saggi nello studio della geometria (1).

Questo metodo è equivalente nella sostanza al metodo vettoriale, ma lo supera nella forma per la scorrevolezza e per la naturalezza.

La nota si compone di 5 paragrafi. Nel § 1 si parla di vettori e di campo di vettori in una varietà ad n dimensioni, e si esaminano gli elementi analitici che servono ad individuarli.

Nel § 2 si esamina il moto di un punto in una varietà ad n dimensioni e se ne trae la nozione di accelerazione.

Nel § 3 si considerano i campi di forze e le loro azioni sui punti materiali. Qui si vuol seguire la concezione classica. Però si è indotti ad attribuire ad ogni punto materiale ed in relazione a ciascun campo di forze nel quale sia immerso, due masse, che io chiamo *massa inerte* e *massa attiva*.

---

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano*, (Zanichelli, Bologna 1929). Citerò nel seguito questo libro colla sigla « G. H. ».

Nel § 4 si dimostra un teorema che in circostanze particolari può agevolare la risoluzione del problema del moto di un punto materiale in presenza di un campo di forze. Se ne fa l'applicazione allo studio del moto nello spazio euclideo a tre dimensioni, quando le forze del campo siano tutte dirette verso un medesimo punto 0 ed infine siano proporzionali inversamente al quadrato della distanza del punto di applicazione da 0.

Nel § 5 si immagina che lo spazio ambiente sia una ipersfera di uno spazio lineari a 4 dimensioni, si affronta in questo spazio sferico il problema analogo a quello particolare trattato nel paragrafo precedente. Ne viene che, postulando l'azione reciproca di due corpi materiali in modo analogo al consueto (legge di Newton), le leggi del moto sono come le consuete, non si verificherebbero spostamenti dei perieli dei pianeti. Una postulazione più fantasiosa di detta azione reciproca, potrebbe però portare a leggi che implicherebbero tali spostamenti, e con particolare determinazione di costanti si potrebbe ottenere quello che si ritiene essere lo spostamento del perielio di Mercurio.

§ 1. Vettori.

1. Def. Se V_n è una varietà ad n dimensioni, se P è un punto di V_n, se F è un parametro [1] di una direzione tangente a V_n in P, si dirà che F è un *vettore* di V_n uscente da P.

2. Sia

$$f(t; u) \quad \text{od} \quad f(u) \tag{1}$$

una determinante di V_n [2].

Evidentemente se P è un punto di V_n, e se F è un vettore di V_n uscente da P, si avrà

$$F = \Sigma_i f_i F^i,$$

dove le F^i sono delle convenienti costanti rispetto a t, e che per le sostituzioni invertibili sulle variabili u si comportano come gli elementi di un controvariante ad un apice di classe 1 [3].

Si ponga

$$F_j = \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_i}} a_{i,j} F^i \quad (^4).$$

(1) « G. H. », p. 87.
(2) « G. H. », p. 85.
(3) « G. H. », p. 155.
(4) « G. H. », p. 181.

Si ha subito

$$F_j = \int_g (\Sigma_i f_i F^i) f_j dt = \int_g F f_j dt$$

ed anche

$$F^i = \Sigma_j \underset{1}{a^{i,j}} F_j \text{ (1)}.$$

Infine si può aggiungere che le F_j si comportano, per le sostituzioni invertibili sulle variabili u, come un covariante ad un indice di classe 1.

DEF. Le F^i si dicono le *componenti controvarianti* del vettore F, e le F_j si dicono le *componenti covarianti* del vettore F.

Le formule precedenti provano che gli elementi:

1.° Vettore

2.° Componenti controvarianti del vettore

3.° Componenti covarianti del vettore

sono tutti noti quando se ne conosca uno.

3. DEF. Quando per ogni punto della varietà V_n è dato un vettore si dice che si ha un *campo di vettori*.

Le componenti dei vettori di un campo risultano allora funzioni delle n variabili u.

Talvolta ci capiterà di considerare un campo di vettori variabile col tempo. Se τ indica la misura del tempo, allora le componenti dei vettori risulteranno oltre che funzioni delle u anche funzioni di τ.

4. DEF. Un campo di vettori indipendente dal tempo si dice *conservativo*. se, essendo F_j le sue componenti covarianti, la

$$\Sigma_j F_j du_j$$

è un differenziale esatto; e la funzione U di cui le F_j sono le derivate parziali si dice il *potenziale* del campo di forze.

§ 2. **Accelerazione**.

1. Il moto di un punto in V_n si ha dando le u_i in funzione di τ.

Supponiamo che sia

(1) $$u_i = u_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

---

(1) « G. H. », p. 181.

Allora la $f(u)$ diventa una funzioue di τ che indicheremo con $\varphi(\tau)$, la quale descriverà una curva C.

Indicando con accenti le derivate prime e seconde rispetto a τ nel punto P, si ha

(2) $$\varphi' = \Sigma_i f_i u_i'$$

(3) $$\varphi'' = \Sigma_{rs} f_{r,s} u_1' u_s' + \Sigma_i f_i (u_i'' + \Sigma_{rs} C^i_{rs} u_r' u_s')$$ [1],

dove il simbolo di CHRISTOFFEL è di classe 1.

2. Consideriamo un valore di τ ed indichiamo con P il punto di C in cui si trova il mobile nell'istante τ e con γ la geodetica [2] di V_n tangente a C in P.

Supponiamo che a partire da P il mobile prosegua il suo movimento su γ con moto uniforme e di velocità uguale a quella che il mobile ha raggiunto in P. Per questo moto le u_i risulteranno certe funzioni di τ, che saranno in generale diverse dalle (1), e che noi indicheremo con

(1') $$u_i = w_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Corrispondentemente la $f(u)$ diventerà una punto-funzione di τ che indicheremo con $\psi(\tau)$.

Indicando sempre con accenti le derivate prime e seconde rispetto a τ, nel punto P, si avrà

(4) $$w_i' = u_i',$$

ma in generale non saranno uguali le w_i'' ed u_i''.

Se σ indica la lunghezza di arco della γ, essendo γ una geodetica di V_n, si avrà lungo γ

(5) $$\frac{d^2 w_i}{d\sigma^2} + \Sigma_{rs} C^i_{rs} \frac{dw_r}{d\sigma} \cdot \frac{dw_s}{d\sigma} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$ [3].

In particolare la (5) varrà nel punto P.

Se inoltre v è la grandezza della velocità lungo γ, ossia se

(6) $$v^2 = \Sigma_{rs} a_{r,s} u_r' u_s',$$

si avrà lungo γ,

(7) $$d\sigma = v \cdot d\tau,$$

e quindi, per la (5), si avrà

(8) $$w_i'' + \Sigma_{rs} C^i_{rs} w_r' w_s' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

(1) « G. H. », pp. 201, 202.
(2) « G. H. », p. 226.
(3) « G. H. », p. 228.

poichè per la (7) il primo membro della (8) vale il primo membro della (5) moltiplicato per v^2.

Tenendo conto delle (4) e delle (8), si ha nel punto P

(2') $$\psi' = \varphi',$$ [v. (2)]

(3') $$\psi'' = \Sigma_{rs} f_{r,s} u_r' u_s',$$ [v. (3)]

e dalle (3) e (3') si ha

(3'') $$\varphi'' = \psi'' + \Sigma_i f_i (u_i'' + \Sigma_{rs} C_{rs}^i u_r' u_s').$$

Osserviamo inoltre che nel punto P è

(9) $$\varphi = \psi.$$

3. Si ha allora, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo,

$$\varphi(\tau + d\tau) = \varphi(\tau) + \varphi'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \varphi''(\tau) d\tau^2$$

$$\psi(\tau + d\tau) = \psi(\tau) + \psi'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \psi''(\tau) d\tau^2,$$

e, tenendo conto delle (2'), (3'') e (9), si ha

(10) $$\varphi(\tau + d\tau) - \psi(\tau + d\tau) = \frac{1}{2} \Sigma_i f_i (u_i'' + \Sigma_{rs} C_{rs}^i u_r' u_s') d\tau^2.$$

4. Il parametro che figura nel secondo membro di (10) individua una direzione orientata dello spazio tangente in P a V_n, la quale direzione è indipendente dal valore di $d\tau$.

Uno dei parametri di tale direzione orientata è

(11) $$\Sigma_i f_i (u_i'' + \Sigma_{rs} C_{rs}^i u_r' u_s').$$

DEF. Il parametro (11) è un vettore della V_n che diremo *l'accelerazione* del punto mobile nell'istante τ (relativa all'unità di tempo scelta).

Se con A^j si indicano le componenti controvarianti di questa accelerazione e con A_r le sue componenti covarianti, si ha subito

$$A^j = u_j'' + \Sigma_{rs} C_{rs}^j u_r' u_s'$$

e

$$A_r = \Sigma_j a_{r,j} A^j.$$

§ 3. Campo di forze.

1. DEF. Un campo di vettori F, di componenti controvarianti F^j, si dice un *campo di forze*, quando rappresenta uno stato fisico della varietà V_n, corrispondentemente al quale ad'ogni punto materiale vengono associati due numeri m_i ed m_a (1) che chiamerò *massa inerte* e *massa attiva,* tali che per effetto del campo di forze il punto materiale debba muoversi in modo che siano soddisfatte le relazioni

(1) $$m_i A^j = m_a F^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ (2)},$$

dove le A^j sono le componenti controvarianti dell'accelerazione. Le (1) si possono anche scrivere

(1') $$m_i A_j = m_a F_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Le (1) sono n equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine sopra n funzioni incognite u_j della variabile τ, quindi esse individuano una soluzione quando di questa soluzione sono dati i valori iniziali delle u_j e delle loro derivate.

In altri termini *un campo di forza determina in modo unico il moto di un punto materiale quando di questo punto si conosca la posizione e la velocità iniziale.*

3. Derivando i due membri della

$$v^2 = \Sigma_{rs} a_{r,s} u_r' u_s',$$

applicando la regola di derivazione assoluta lungo una curva dei sistemi composti (3), e dividendo per 2, si ottiene

$$v \cdot v' = \Sigma_{j,r} a_{j,r} u_r' (u_j'' + \Sigma_{hk} C_{hk}^j u_h' u_k') = \Sigma_{jr} a_{j,r} u_r' A^j = \Sigma_r u_r' A_r,$$

e moltiplicando per m_i, e tenendo conto delle (1') si ha

$$m_i \cdot v \cdot v' = m_a \cdot \Sigma_r F_r u_r'$$

ed infine

(2) $$d\, \frac{m_i \cdot v^2}{2} = m_a \cdot \Sigma_r F_r du_r .$$

4. DEF. L'espressione

$$\frac{m_i \cdot v^2}{2}$$

(1) Determinati all'infuori di un medesimo fattore.

(2) Se, per esempio, il campo di forze è quello generato dalla presenza di una massa materiale, per il nostro punto materiale si ha: $m_i = m_a =$ massa materiale del punto. Se il campo è generato da una massa elettrica, per il punto materiale m_i è la massa materiale ed m_a è la sua massa elettrica.

(3) « G. H. », p. 225.

si dice *forza viva,* e l'espressione

$$m_a \cdot \Sigma_r F_r du_r$$

si chiama *lavoro elementare.*

Per la (2) si ha allora il

TEOR. Il differenziale della forza viva è uguale al lavoro elementare.

5. Se il campo di forze è conservativo, e se U è il suo potenziale, le equazioni (1') diventano

$$m_i A_j = m_a \cdot \frac{\partial U}{\partial u_j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

e, più per disteso,

(3) $$m_i[\Sigma_r a_{r,j} u_r'' + \Sigma_{rk} a_{rk,j} u_r' u_k'] = m_a \frac{\partial U}{\partial u_j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

La (2) diventa

(2') $$d\frac{m_i \cdot v^2}{2} = m_a dU,$$

che, integrando, dà

(4) $$\frac{m_i \cdot v^2}{2} = m_a U + \text{costante}.$$

6. Poniamo

(5) $$L = \frac{m_i \cdot v^2}{2} + m_a \cdot U.$$

Le (3) si possono compendiare nella formula variazionale

(6) $$\delta \int L d\tau = 0$$

per tutte le variazioni delle u nulle agli estremi di integrazione.

Infatti le equazioni di EULERO sono

(7) $$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u_j'} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0,$$

e, poichè

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u_j'} = m_i \cdot \frac{d}{d\tau} \Sigma_r a_{r,j} u_r' = m_i[\Sigma_r a_{r,j} u_r'' + \Sigma_{rk}(a_{rk,j} + a_{r,jk}) u_r' u_k']$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = m_i \Sigma_{rk} a_{r,ik} u_r' u_k' + m_a \frac{\partial U}{\partial u_j},$$

si vede che le (7) diventano appunto le (3).

La formula variazionale (6) costituisce il *principio* di HAMILTON nella V_n.

§ 4. Sul moto per particolari campi di forze.

1. DEF. Se V è una varietà ad n dimensioni, un' altra varietà V' ad m dimensioni $(m < n)$ contenuta in V si dice una *vera varietà geodetica* di V se tutte le geodetiche di V' sono anche geodetiche di V.

2. TEOR. Se V è una varietà ad n dimensioni che contiene una vera varietà geodetica V' ad m dimensioni $(m < n)$, se C è un campo di forze in V tale che le sue forze applicate ai punti di V' siano tangenti a V', il moto di un punto sotto l'azione di C si svolge tutto sopra V', se inizialmente il punto giace su V' e la sua velocità iniziale è tangente a V'.

DIM. Supponiamo che la V' sia la

$$u_{m+1} = u_{m+2} = \dots = u_n = 0.$$

Se $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{rs} a_{r,s} du_r du_s$ è il quadrato dell' elemento lineare, e se si indica con $\overset{0}{a}_{r,s}$ ciò che diventa $a_{r,s}$ quando vi si faccia $u_{m+1} = 0$, $u_{m+2} = 0, \dots,$ $u_n = 0$, il quadrato dell' elemento lineare di V' è dato da

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{rs} \overset{0}{a}_{r,s} du_r du_s \,,$$

ed i relativi simboli di CHRISTOFFEL, che indicherò con K^j_{rs} si ottengono dai corrispondenti di V facendo in essi $u_{m+1} = 0$, $u_{m+2} = 0, \dots,$ $u_n = 0$.

Poichè tutte le geodetiche di V' sono geodetiche in V, e per queste geodetiche deve essere $u_{m+1} = 0$, $u_{m+2} = 0, \dots,$ $u_n = 0$, e quindi $u_p' = u_p'' = 0$ $(p = m + 1,\ m + 2, \dots,\ n)$ le

$$u_p'' + \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{rs} C^p_{r,s} u_r' u_s' = 0 \qquad (p = m + 1,\ m + 2, \dots,\ n),$$

diventano per esse

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{rs} K^p_{r,s} u_r' u_s' = 0 \qquad (p = m + 1,\ m + 2, \dots,\ n),$$

e, poichè in un punto qualunque di V' una geodetica di V' può avere qualunque direzione, sarà

$$K^p_{r,s} = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \dots,\ m)(p = m + 1,\ m + 2, \dots,\ n). \tag{1}$$

Le equazioni del moto in V sono

$$m_i\left(u_j'' + \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{rs} C^j_{rs}\, u_r' u_s'\right) = m_a F^j. \tag{2}$$

Evidentemente indicando con G^j ciò che diventa F^j quando vi si ponga $u_{m+1} = u_{m+2} = ... = u_n = 0$, si ha

(3) $$G^p = 0 \qquad (p = m+1,\ m+2, ..., n).$$

Sostituiamo nelle (2) lo *zero* al posto delle

$$u_p,\ u_p',\ u_p'' \qquad (p = m+1,\ m+2, ..., n),$$

esse diventano

(4) $$m_i\left(u_j'' + \sum_1^m {}_{rs} K^j_{rs} u_r' u_s'\right) = m_a G^j \qquad (j = 1,\ 2, ..., m),$$

le ultime $n - m$ equazioni (2) risultando soddisfatte in virtù delle (1) e (3).

Ora le (4) hanno una soluzione determinata quando sono fissati i valori iniziali delle

$$u_j \cdot u_j' \qquad (j = 1,\ 2, ..., m).$$

Questa soluzione insieme con

$$u_p = 0 \qquad (p = m+1,\ m+2, ..., n)$$

dà una soluzione di (2) che inizialmente passa per un punto di V' ed ha velocità iniziale tangente a V'. E siccome questi elementi iniziali individuano la soluzione di (2) coi dati iniziali appartenenti a V', possiamo dire che una soluzione di (2) coi dati iniziali appartenenti a V' fornisce una linea giacente in V'.

Oss. Consegue che tutte le volte che si ha un campo di forze in una varietà V, e i dati iniziali del moto sono contenuti in una vera varietà geodetica V' di V, la quale contenga inoltre tutte le forze del campo uscenti dai suoi punti, il problema del moto in V si riduce ad un problema analogo in V'.

3. Supponiamo che $n = 3$, e che V sia lo spazio euclideo a 3 dimensioni. Supponiamo poi che le forze di un campo C (in V) siano dirette tutte verso un punto O (di V).

Sia nota la posizione e la velocità iniziale di un punto materiale. Questi elementi iniziali ed il punto O individuano un piano Π, che, essendo una vera varietà geodetica della V, e contenendo tutte le forze di C applicate ai suoi punti, deve contenere, pel teor. prec., la curva descritta dal mobile.

E la legge del movimento si può studiare su Π.

Per questo assumiamo su Π un sistema di coordinate polari con polo in O.

In tal caso il quadrato dell'elemento lineare di Π è dato da

$$d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Identificando ρ con u_1 e θ con u_2, si trova

$$a_{11,1} = a_{12,1} = a_{11,2} = a_{22,2} = 0, \quad a_{12,2} = -a_{22,1} = \rho,$$

e conseguentemente

$$C^1_{11} = C^1_{12} = C^2_{11} = C^2_{22} = 0, \quad C^2_{12} = \frac{1}{\rho}, \quad C^2_{22} = -\rho.$$

Inoltre, per l'ipotesi fatta sul campo di forza, è $F_2 = 0$.

Se poi noi supponiamo che la forza sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto di applicazione da O, avremo

$$F^1 = \frac{-k^2}{\rho^2} \qquad (k = \text{costante reale}),$$

e poichè risulta inoltre

$$F_1 = \frac{-k^2}{\rho^2}, \quad F_2 = 0,$$

esiste un potenziale

$$U = k^2 \cdot \frac{1}{\rho},$$

e si ha la relazione

(5) $$m_i \frac{v^2}{2} - m_a k^2 \frac{1}{\rho} = K \qquad (K = \text{costante reale}) \text{ (}^1\text{)}.$$

Inoltre una delle equazioni del moto è

$$\theta'' + 2\frac{\rho'\theta'}{\rho} = 0 \text{ (}^2\text{)},$$

da cui si ricava

$$\log\theta' + \log\rho^2 = \text{costante},$$

o, se si vuole,

(6) $$\theta'\rho^2 = H \qquad (H = \text{costante}).$$

Ora, posto

(7) $$\zeta = \frac{1}{\rho},$$

e quindi

$$\rho' = -\rho^2\zeta',$$

si ha

$$v^2 = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2 = \rho^4\zeta'^2 + \rho^2\theta'^2,$$

---

(1) Vedi la (4) del § 3.
(2) Vedi la (1) del § 3 con $j = 2$.

e, per le (6) e (7), osservando che $\zeta' = \frac{d\zeta}{d\theta}\cdot\theta'$,

$$v^2 = \left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 \cdot H^2 + H^2\cdot\zeta^2,$$

e quindi la (5) diventa

$$\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 = -\zeta^2 + 2b\zeta + a, \tag{8}$$

dove b ed a sono convenienti costanti.

La (8) si può scrivere

$$\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 = -(\zeta - b)^2 + c, \quad \text{dove} \quad c = a + b^2.$$

Da questa si ha, p. es.

$$d\theta = \frac{-d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

dove

$$\xi = (\zeta - b) : \sqrt{c}.$$

Limitiamoci al caso in cui $c > 0$ e quindi in cui $\sqrt{c}$ è reale, ed integriamo. Abbiamo

$$\theta - \theta_0 = \operatorname{arc}\cos\xi,$$

con θ_0 costante, e quindi

$$\xi = \cos(\theta - \theta_0),$$

$$\zeta = b + \sqrt{c}\cdot\cos(\theta - \theta_0),$$

$$\rho = \frac{1}{[1 + e\cos(\theta - \theta_0)]b}, \quad e = \frac{\sqrt{c}}{b}.$$

Questa è l'equazione di una conica della quale un fuoco è il polo del sistema di coordinate.

§ 5. Un problema di moto in uno spazio sferico a 3 dimensioni.

1. Consideriamo uno spazio euclideo a 4 dimensioni S_4 contenente l'origine O dello spazio hilbertiano, ed indichiamo con

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

4 parametri normali e a 2 a 2 ortogonali appartenenti ad S_4.

Consideriamo inoltre la varietà V a 3 dimensioni che ha per determinante la punto-funzione

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_4\varphi_4,$$

dove

$$x_1 = R\cdot(1 - \cos u)$$
$$x_2 = R\cdot \operatorname{sen} u\cdot \cos v$$
$$x_3 = R\cdot \operatorname{sen} u\cdot \operatorname{sen} v\cdot \cos w$$
$$x_4 = R\cdot \operatorname{sen} u\cdot \operatorname{sen} v\cdot \operatorname{sen} w$$

R, essendo una costante, ed u, v, w essendo 3 coordinate curvilinee.

La V è uno spazio sferico (a 3 dimensioni) contenuto in S_4, di raggio R e di centro $R\varphi_1$.

2. Lo spazio lineare

$$x_1 = R\cdot h, \quad \text{con} \quad |h| < 1, \qquad (h \text{ costante})$$

taglia V in una sfera, il cui raggio, è $R\cdot\operatorname{sen}\omega$, dove ω soddisfa alla relazione $1 - \cos\omega = h$.

Questa sfera è il luogo dei punti di V che hanno da O una distanza geodetica $= R\omega$.

3. Imaginiamo che da O si propaghi lungo alle geodetiche di V un flusso che crei un campo C di forze inversamente proporzionale alla superficie su cui si distribuisce e quindi proporzionale all'inverso del quadrato di $R\cdot\operatorname{sen} u$, e che le forze risultino tangenti a dette geodetiche e rivolte verso O.

Poichè la posizione iniziale e la direzione della velocità iniziale del punto mobile individuano una sfera di V per O, la quale è una vera varietà geodetica di V, ed è tale che tutte le forze del campo C applicate ai suoi punti giacciono in essa, si vede che il problema del moto può essere studiato su questa sfera, che possiamo imaginare coincidere colla $w = 0$.

4. Abbiamo dunque una sfera V' di cui

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3$$

è una determinante, dove

$$x_1 = R\cdot(1 - \cos u)$$
$$x_2 = R\cdot\operatorname{sen} u\cdot\cos v$$
$$x_3 = R\cdot\operatorname{sen} u\cdot\operatorname{sen} v,$$

ed in essa un campo di forze di componenti

$$F^1 = \frac{-k^2}{R^2\operatorname{sen}^2 u}, \quad F^2 = 0.$$

Le forze del campo ammettono il potenziale

$$U = \frac{k^2 \cot u}{R^2}.$$

Il quadrato dell'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = R^2(du^2 + \operatorname{sen}^2 u dv^2),$$

e, nell'ipotesi $m_i = m_a$, l'equazione delle forze vive diventa:

$$u'^2 + \operatorname{sen}^2 u \cdot v'^2 = 2\lambda^2 \cot u + K, \tag{1}$$

dove $\lambda = k : R^2$ e K è una conveniente costante.

La

$$A^2 = F^2$$

diventa

$$v'' + 2 \cot u \cdot u' \cdot v' = 0 \tag{2}$$

da cui

$$\log v' + 2 \log \operatorname{sen} u = \log H,$$

dove H è una costante, ed infine

$$v' \operatorname{sen}^2 u = H. \tag{3}$$

Sostituendo in (1) la v' che si ricava da (3), si ha

$$u'^2 = K + 2\lambda^2 \cot u - \frac{H^2}{\operatorname{sen}^2 u}, \tag{4}$$

ed infine osservando che

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{H} u',$$

si vede che, moltiplicando la (4) per $\frac{\operatorname{sen}^4 u}{H^2}$, essa diventa

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{\left(K + 2\lambda^2 \cot u - \frac{H^2}{\operatorname{sen}^2 u}\right) \operatorname{sen}^4 u}{H^2},$$

e, posto

$$\zeta = \cot u, \quad \text{da cui} \quad d\zeta = \frac{-du}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2 = M + 2N^2\zeta - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}, \tag{5}$$

dove $M = K : H^2$, $N = \lambda : H$.

Ma

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} = 1 + \cot^2 u,$$

e la (5) diventa

$$\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2 = M_1 + 2N^2\zeta - \zeta^2,$$

con $M_1 = M - 1$.

Separando le variabili, si ha p. es.

$$dv = \frac{-d\zeta}{\sqrt{-(\zeta - N)^2 + (M_1 + N^2)}},$$

da cui

$$v = \operatorname{arc\,cos} \frac{\zeta - N}{\sqrt{M_1 + N^2}} + v_0$$

$$\zeta = N + \cos(v - v_0) \cdot \sqrt{M_1 + N^2}$$

ossia

$$\operatorname{tg} u = \frac{a}{1 + e \cos(v - v_0)}$$

dove a ed e sono delle costanti.

Si vede allora che la traiettoria è una linea chiusa.

5. Il risultato ottenuto ci induce a fare alcune considerazioni:

a) Se si imagina che lo spazio ordinario sia uno spazio sferico contenuto in un S_4 e che sopra di esso i corpi materiali si attraggano secondo la legge di NEWTON, o in altri termini se si imagina che l'azione di un punto materiale A sopra un'altro punto materiale B si traduca in una forza attrattiva diretta tangenzialmente in B alla geodetica che congiunge A con B, (circolo massimo) ed inversamente proporzionale all'area della superficie (sfera) dei punti che hanno da A uguale distanza geodetica [1], sullo spazio sferico il moto di un pianeta si comporterà come nelle ipotesi classiche e non si presenterà spostamento di perielio.

b) L'ipotesi fatta alla lettera *a*) significa che la forza attraente di cui vi si parla è inversamente proporzionale al quadrato della distanza rettilinea (cioè distanza nell' S_4) di B da A.

c) Si sa che EINSTEIN ha dato una formula che spiega lo spostamento del perielio di Mercurio [2]. In questa formula la forza attrattiva dei corpi è

---

[1] Forza calcolata al primo passaggio dell'azione pel punto B.

[2] T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di Meccanica Relativistica* (ed. Zanichelli, 1928, p. 123).

la somma di due, rispettivamente inversamente proporzionali al quadrato e al cubo della distanza del corpo attraente al corpo attratto. Le cose andrebbero in modo analogo se si pensasse esistere uno spazio fisico F lineare e a 4 dimensioni e che lo spazio materiale M (quello in cui la materia si deve muovere) sia uno spazio sferico a 3 dimensioni immerso in F, se inoltre si pensasse che da un corpo materiale escano due forze, la prima che si propaga soltanto in M e che si diffonda su sfere concentriche, e che sarà naturale pensare inversamente proporzionale al quadrato della distanza, la seconda che si propaga in F e che si diffonda su spazi sferici a 3 dimensioni concentrici, e che sarà naturale pensare inversamente proporzionale al cubo della distanza. Probabilmente le cose non saranno così, e nemmanco sarà possibile su questo indirizzo imbastire una teoria che soddisfi il nostro spirito. Tuttavia può valer la pena che io abbia esposta questa considerazione.

Sopra alcune limitazioni per la sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del De Saint Venant.

Memoria di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *L'A, studia in questa Memoria la distribuzione delle tensioni interne in un solido elastico convesso quando gli spostamenti, dati in superficie, sono diversi da zero solo in una piccola zona. Nei campi a due dimensioni il risultato è esteso al caso in cui sul contorno siano date le forze; si giunge così ad una dimostrazione del principio del De Saint Venant.*

INTRODUZIONE

1. Si consideri un solido elastico convesso, deformato sotto l'azione di sole forze superficiali. Allora:

« Se le componenti di spostamento, che si suppongono assegnate sulla superficie del solido, sono diverse da zero soltanto in una piccola zona superficiale σ_1, la sollecitazione elastica diminuisce quando ci si allontani da quella zona, e, in un punto fissato (che non si trovi su σ_1), tende a zero quando la zona deformata tende a zero insieme con la massima lunghezza in essa contenuta; tende invece ad un limite determinato e finito (generalmente diverso da zero) quando l'area σ_1 tende a zero ma la massima lunghezza in essa contenuta resta diversa da zero. In ogni caso se il punto considerato si trova in σ_1 la sollecitazione tende all'infinito quando σ_1 tende a zero ».

In un sistema elastico piano, anch'esso non soggetto a forze di massa e convesso, vale una analoga proposizione concernente gli sforzi (principio del DE SAINT-VENANT), cioè:

« Se in un campo elastico in due dimensioni le forze sono applicate soltanto nella zona σ_1 del suo contorno, allora le caratteristiche della sollecitazione diminuiscono di intensità all'allontanarsi da σ_1 e in un punto fissato (esterno a σ_1) tendono a zero insieme con σ_1 stessa ».

La dimostrazione di questi teoremi forma l'oggetto del presente lavoro. Per ottenerla mi servo di limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate, che ho dedotto in alcuni recenti lavori (1) e di una dimostrazione dovuta al LICHTENSTEIN, sulla esistenza della soluzione elastica per dati spostamenti in superficie. Il procedimento di LICHTENSTEIN (che sarà brevemente esposto al § 1) viene qui esteso, nei campi piani, anche nel caso in cui sul contorno siano date le forze (§ 4); in questo modo si ottiene contemporaneamente un metodo generale per la soluzione della equazione biarmonica. Nel problema che ci occupa il vantaggio di questi procedimenti sta nel fatto che, applicando ad essi le limitazioni ottenute per le funzioni armoniche e le loro derivate, si giunge ad una equazione integrale del tipo di FREDHOLM col termine noto già effettivamente calcolato in modo maggiorante; l'unica difficoltà che ancora rimane consiste allora nella ricerca di una soluzione maggiorante per questa equazione. Ora tale ricerca può essere compiuta in molti casi con un procedimento assai simile a quello di NEUMANN per la risoluzione del problema di DIRICHLET; con questo il problema è dunque risolto. Un esempio semplice, relativo al caso del cerchio, mostra l'efficacia delle limitazioni ottenute.

§ 1. Una dimostrazione d'esistenza per la soluzione elastica relativa a spostamenti dati in superficie (Lichtenstein) (2).

2. Consideriamo le equazioni indefinite dell'equilibrio di un solido elastico isotropo. In assenza di forze di massa potremo scrivere (seguendo un'idea di TEDONE):

$$\Delta_2\left(u+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta\right)=0 \quad \Delta_2\left(w+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta\right)=0$$

$$\Delta_2\left(v+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta\right)=0 \quad \Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Qui u, v, w indicano le componenti di spostamento secondo gli assi x, y, z; ed è $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Se $P(\xi, \eta, \zeta)$ è un punto generico della superficie limite S e $Q(x, y, z)$ un punto generico interno ad S si deduce

(1) Cfr. « Atti della R. Accademia Naz. dei Lincei ». Due note nel 2° sem. 1928. « Bollettino della Unione Mat. Italiana », Dic. 1929. « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », 1931.

(2) LICHTENSTEIN, *Ueber die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.* « Math. Zeitschrift », 1924.

dalle equazioni precedenti

$$u(Q) + \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\Theta(Q) = \frac{1}{4\mu}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} u(P)dS + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} \xi\Theta(P)dS$$

dove G_P^Q indica la funzione di Green relativa al contorno dato e all'operazione Δ_2.

Poichè $\Delta_2\Theta = 0$ si può scrivere

$$\frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\Theta(Q) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} x\Theta(P)dS$$

onde segue l'equazione

(1) $$u(Q) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} u(P)dS + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} (\xi - x)\Theta(P)dS$$

mentre analoghe espressioni si ricavano per $v(Q)$, $w(Q)$.

Ma si osserva subito che

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} u(P)dS$$

è nota in tutto il solido quando siano assegnati gli spostamenti in superficie. In questa ipotesi si conoscono anche le funzioni:

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} v(P)dS, \quad F_3(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} w(P)dS;$$

ricordando la espressione di Θ, si ricava allora dalla (1) e dalle formule analoghe per $v(Q)$, $w(Q)$ la equazione:

(2) $$\Theta(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\xi - x)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\eta - y)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(\zeta - z)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}\right] \Theta(P)dS.$$

Poniamo ora

(3) $$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \Lambda(Q)$$

ed osserviamo che se r indica il vettore $\overline{QP}$ (diretto da Q verso P), è

$$(\xi - x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial}{\partial z} = r\frac{\partial}{\partial r};$$

la (2) si trasforma così nell'equazione

$$\Theta(Q) = \frac{2\mu}{3\lambda + 5\mu}\Lambda(Q) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi(3\lambda + 5\mu)}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS. \tag{4}$$

Ma, come si deduce da un lavoro di P. LÉVY [1], è

$$r\,\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P} = 4\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + h(P,\ Q)$$

dove h è limitata $\left(\text{od infinita come } \frac{1}{r}\right)$; e se ricordiamo che quando in un punto interno ad S è

$$f(x,\ y,\ z) = \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Theta(P)dS$$

su S stesso si ha

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta) = 2\pi\Theta(\xi,\ \eta,\ \zeta) + \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Theta(P)dS$$

possiamo scrivere la (4) facendo tendere Q ad un punto P' del contorno; si ha allora

$$\Theta(P') = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu}\Lambda(P') + \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 3\mu)}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS \tag{5}$$

essendo $r = \overline{P'P}$.

3. Le formule (1) e (5) servono a determinare le componenti di spostamento in tutto il solido quando siano noti i loro valori in superficie. Si osserva facilmente che alla (5) si può applicare la teoria di FREDHOLM e che il numero $-\dfrac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 3\mu)}$ non é certo un autovalore di essa perchè se l'equazione

$$\Theta(P') - \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 3\mu)}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS = 0$$

(cioè l'equazione che si deduce dalla (5) per $\Lambda(P') = 0$) ammettesse una soluzione $\Theta(P')$ (certamente armonica) diversa da zero, questa sostituita nella (1) darebbe luogo a componenti di spostamento nulle in superficie, diverse da zero nell'interno del solido; ciò che non è possibile per la unicità della so-

[1] Cfr. « Acta Mathematica », Vol. 42.

luzione elastica. Per fissare l'andamento delle funzioni u, v, w, in tutto il solido basta dunque studiare il comportamento di F_1, F_2, F_3, e delle loro derivate e risolvere in modo approssimato la (5).

Questo argomento sarà studiato nel paragrafo che segue.

§ 2. **Una limitazione per le soluzioni della equazione integrale (5).**

4. Ci proponiamo di indicare in questo paragrafo una soluzione maggiorante per la funzione $\Theta(P)$, determinata dalla (5), quando si supponga nota $\Lambda(P)$. È necessario perciò conoscere alcune proprietà del nucleo: $r\,\dfrac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}$.

Osserveremo duuque:

a) che

$$\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\,dS_P = 4\pi \tag{6}$$

quando P, P' sono punti del contorno.

Infatti si assumano come componenti di spostamento le funzioni

$$u = \frac{a}{3}\,x, \qquad v = \frac{a}{3}\,y, \qquad w = \frac{a}{3}\,z;$$

queste componenti soddisfano alle equazioni dell'equilibrio elastico e danno luogo ad una dilatazione cubica eguale ad a. Dalla (3) si ricava che anche $\Lambda(P) = \text{cost.} = a$.

Introdotti questi valori nella (5) si ha

$$a - \frac{(\lambda + \mu)a}{4\pi(\lambda + 3\mu)} \int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\,dS_P = \frac{2\mu a}{\lambda + 3\mu} = a - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}\,a.$$

Di qui segue subito la (6) qualunque sia la forma del solido.

b) che $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}$ *è sempre positiva sul contorno di un corpo convesso.*

Indichiamo infatti con U la funzione armonica che assume il valore M in un intorno δ di P e il valore zero sulla rimanente parte del contorno; la derivata di U secondo la normale interna in un punto P' esterno a δ soddisfa alla relazione

$$0 < \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{P'} = \frac{M}{4\pi}\int_{\delta} \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P} dS.$$

Ma

$$\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \frac{\partial^3 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P} \frac{\partial n_{P'}}{\partial r}$$

perchè $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial S_{P'} \partial n_P} = 0$; d'altra parte è $\frac{\partial n_{P'}}{\partial r} = \cos(n_{P'}, r)$ e questo è certamente positivo (o nullo) se il campo é convesso perchè r è diretto da P' verso P (cioè verso l'interno del campo come $n_{P'}$). Ne segue che $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}$ è positiva (o nulla). c. d. d.

c) poichè $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial x_{P'} \partial n_P}$ è massima quando la direzione x coincide con la direzione $n_{P'}$ e d'altra parte ho dimostrato in un altro lavoro (¹) che

$$\left|\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P}\right| \leq \frac{\pi^2}{r^3}$$

così si deduce la limitazione

$$0 \leq r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \leq \frac{\pi^2 \cos(n_{P'}, r)}{r^2} \qquad r = \overline{P'P}. \tag{7}$$

5. Premesse queste osservazioni, riprendiamo in esame la (5) sostituendo ai coefficienti λ e μ i coefficienti E (modulo di elasticità) ed m (inverso del coefficiente di contrazione). Si ha

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} = \frac{m}{3m - 4} \qquad \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} = \frac{2(m-2)}{3m-2}$$

sicchè la (5) assume la forma

$$\Theta(P') - \frac{m}{4\pi(3m-4)}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \Theta(P) dS_P = \frac{2(m-2)}{3m-4} \Lambda(P'). \tag{5'}$$

(¹) Si veda: *Sopra alcune limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate.* « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 1931.

Poniamo ora

(8)
$$\begin{cases} \Theta_0(P') = \dfrac{2(m-2)}{3m-4}\Lambda(P') \\ \Theta_1(P') = \dfrac{m}{4\pi(3m-4)}\displaystyle\int_S r\cdot\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\Theta_0(P)dS_P \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_n(P') = \dfrac{m}{4\pi(3m-4)}\displaystyle\int_S r\cdot\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\Theta_{n-1}(P)dS_P \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

la serie

(9)
$$\Theta_0 + \Theta_1 + \ldots . \Theta_n + \ldots .$$

converge sicuramente, perchè indicando con $\overline{\Theta}_0$, $\overline{\Theta}_1 \ldots .$ i massimi di Θ_0, $\Theta_1 \ldots$, si ha (v. n.° 4, *b*)

$$|\overline{\Theta}_1| \leq \frac{m}{3m-4}|\overline{\Theta}_0|, \quad |\overline{\Theta}_2| \leq \frac{m}{3m-4}|\overline{\Theta}_1| \leq \left(\frac{m}{3m-4}\right)^2 |\overline{\Theta}_0|,$$
$$|\overline{\Theta}_n| \leq \left(\frac{m}{3m-4}\right)^n |\overline{\Theta}_0|$$

ed è $\dfrac{m}{3m-4} < 1$ (perchè quando valgono le condizioni di unicità è $m > 2$). La somma della (9) dà la funzione $\Theta(P')$ cercata. Se $\Lambda(P')$ è sempre uguale o minore (in valore assoluto) a una costante positiva K, allora dalle limitazioni precedenti segue:

(10)
$$|\Theta| \leq \frac{|\overline{\Theta}_0|}{1-\dfrac{m}{3m-4}} = \frac{2(m-2)}{3m-4-m}K = K.$$

6. Quando la funzione $\Lambda(P')$ assuma valori assai grandi soltanto in una piccola zona del contorno, si può ottenere una limitazione più favorevole procedendo nel modo che segue. Supponiamo per fissare le idee che $\Lambda(P')$ sia uguale a K in una piccola zona σ_1 nulla nella rimanente zona di contorno (che indicheremo con σ_2: $\sigma_1 + \sigma_2 = S$). Si ha allora dalla prima delle (8):

$$\Theta_0 = \begin{cases} \dfrac{2(m-2)}{3m-4}K & \text{in } \sigma_1 \\ 0 & \text{in } \sigma_2 \end{cases}$$

e dalla seconda delle (8) tenendo presente la (7)

$$\Theta_1(P') = \frac{m(m-2)}{3m-4}\frac{\pi K}{2}\int_{\sigma_1}\frac{\cos(n_{P'}, r)}{r^2}\,d\sigma_P; \quad r = \overline{P'P}.$$

Poniamo ora

$$H(P') = K\int_{\sigma_1}\frac{\cos(n_{P'}, r)}{r^2}\,d\sigma_P$$

e consideriamo il massimo di $H(P')$ quando P' si muove sul contorno; indicando questo con $\overline{H}$ si può seguire il procedimento di approssimazioni successive iniziato con i valori trovati di Θ_0 e Θ_1; segue così

$$(11) \qquad \begin{cases} |\Theta|_{\sigma_1} \leq \dfrac{2(m-2)}{3m-4}K + \dfrac{m}{3m-4}\cdot\dfrac{\pi}{4}\overline{H} \\ |\Theta|_{\sigma_2} \leq \dfrac{m}{3m-4}\cdot\dfrac{\pi}{4}\overline{H}. \end{cases}$$

Questa limitazione è più favorevole perchè quando la zona σ_1 sia piccola in confronto ad S allora H risulta assai più piccolo di K; per esempio sulla sfera, se σ_1 vale $1/20$ di S allora

$$\overline{H} = \frac{\pi}{10}K$$

e quindi se si suppone (come valore più frequente) $m = 4$ segue

$$|\Theta|_{\sigma_1} \leq \frac{K}{2} + \frac{\pi^2}{80}K < \frac{5K}{8}$$

$$|\Theta|_{\sigma_2} < \frac{K}{8}.$$

§ 3. **Alcune espressioni maggioranti per la sollecitazione elastica corrispondente a dati spostamenti in superficie.**

7. Siamo ora in grado di ottenere alcune limitazioni per la sollecitazione elastica corrispondente a dati spostamenti in superficie. Supponiamo perciò che la superficie limite del solido (convesso) sia divisa in due zone complementari σ_1 e σ_2 e che lo spostamento S assegnato per ogni punto della superficie stessa sia eguale a zero in σ_2 minore od eguale (in modulo) ad un numero fisso M in σ_1. In questa ipotesi cerchiamo una limitazione per $\Lambda(P')$. Tenendo presenti le diseguaglianze per le derivate di una funzione armonica che ho stabilito in precedenti lavori [1] si ricava dalla (3) che in ogni punto di σ_2 é

(12) $$\Lambda(P') \leq \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1}{r_1^3} \quad [2]$$

ove si indichi con r_1 la minima distanza di P' da σ_1.

D'altra parte è noto che se u, v, w sono continue e derivabili in $\sigma_1 + \sigma_2$ allora $\Lambda(P')$ esiste limitata in ogni punto del contorno [3]. Poichè la diseguaglianza (12) può servire soltanto nei punti di σ_2 non vicinissimi a σ_1 includiamo in σ_1 anche i punti di σ_2 la cui distanza r_1 da σ_1 soddisfi alla diseguaglianza

$$r_1 \leq \sqrt[3]{\sigma_1}$$

ed indichiamo con σ_1' la zona σ_1 così ampliata, con N un valore maggiorante a $\Lambda(P')$ in σ_1'. Tenendo conto della (12) si viene così ad assegnare in ogni punto di $S = \sigma_1 + \sigma_2$ un valore maggiorante (limitato) per $\Lambda(P')$; questo valore è uguale ad N in σ_1', minore di M in $\sigma - \sigma_1'$; si può dunque maggiorare $\Lambda(P')$ sommando due funzioni; l'una eguale ad M in tutto S, l'altra eguale ad $N - M$ in σ_1, nulla sulla rimanente parte di S. Si trova allora in base ai risultati dei n.i 5 e 6 che

$$\Theta_{\sigma_1'} \leq \frac{2(m-2)}{3m-4}(N-M) + \frac{m}{3m-4}\overline{H}_1 + M$$

$$\Theta_{\sigma-\sigma_1'} \leq \frac{m}{3m-4}\frac{\pi}{4}\overline{H}_1 + M$$

---

(1) Si veda: SUPINO, *Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica*, « Rendiconti della R. Accad dei Lincei », 2° sem. 1928, pag. 658; e *Sopra alcune limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate*, « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 1931. La diseguaglianza ottenuta nello spazio è data dalla formula

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_A \leq \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r_1{}^3}$$

dove F è una funzione armonica minore od eguale ad M in σ_1 nulla in σ_2; A è un punto interno al campo o su σ_2, r_1 è la distanza (minima) di A da σ_1.

(2) Si osservi che $\Lambda(P')$ ha il significato di una dilatazione cubica e quindi è indipendente dalla scelta degli assi. Se in un punto P' del contorno ci si riferisce a due direzioni ortogonali (x, y) giacenti nel piano tangente e alla normale (z) a σ_2 in P', si osserva subito che

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \Lambda(P') = \frac{\partial F_3}{\partial z} < \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r_1{}^3} \qquad \text{c. d. d.}$$

(3) Cfr. nella « Encyclopädie der Math. Wissenschaften », l'articolo di L. LICHTENSTEIN, *Neuere Entwicklungen der Potentialtheorie-Konforme Abbildung.*

essendo

$$\overline{H}_1 = | H_1(P') |_{\max}, \quad H_1(P') = \int_{\sigma_1'} \frac{(N-M)\cos(n_{P'}, r)}{r^2} d\sigma_P, \quad r = \overline{P'P}.$$

Ne segue

$$\Theta(Q) < \frac{(m-2)(N-M)}{(3m-4)2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} d\sigma_1 + N_1$$

dove si é posto per brevità

$$N_1 = \frac{m}{3m-4} \frac{\pi}{4} \overline{H}_1 + M.$$

La espressione di Θ può essere ulteriormente esplicitata ricordando un'altra diseguaglianza che ho stabilito in un campo convesso:

$$\left| \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} \right| \leq - \frac{2\cos(r, n_P)}{r^2} \text{ (1)};$$

segue allora

$$\Theta(Q) < - \frac{m-2}{3m-4} \frac{N-M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\cos(r, n_P)}{r^2} d\sigma_1 + N_1. \tag{13}$$

La (13) mostra che Θ è formata di due parti; una che qui compare come costante (rappresentata da N_1) e che rappresenta la sollecitazione diffusa in tutto il campo per effetto dello spostamento locale; si tratta di una parte non grande quando σ_1 sia sufficientemente piccola, come si può vedere da un breve computo in casi particolari [2] e come risulterà dalle considerazioni del numero che segue che confrontano N_1 col primo termine del secondo membro. L'altra parte, formata da questo primo termine diminuisce sensibilmente allontanandosi da σ_1'.

Servendosi della (1) si può determinare $u(Q)$. Tenendo conto ehe

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{m}{m-2}, \quad (\xi - x) = r\cos(x, r)$$

segue

$$u(Q) < \frac{M}{2\pi} \left| \int_{\sigma_1} \frac{\cos(r, n_P)}{r^2} d\sigma_1 \right| + \frac{m(N-M)}{(3m-4)2\pi} \int_{\sigma_1} \left| \frac{\cos(r, n_P)\cos(x, r)}{r} \right| d\sigma_1 + \tag{14}$$

$$+ \frac{mN_1}{(m-2)4\pi} \int_S \left| \frac{\cos(r, n_P)\cos(x, r)}{r} \right| dS.$$

---

(1) Cfr. il lavoro già citato del Circolo Mat. di Palermo; od anche « Bollettino della Un. Mat. Ital. », Dicembre 1929; si è posto qui il segno — perchè r è diretto da Q a P.

(2) Considerando il caso della sfera e ponendo $m = 4$ si ha $N_1 = \frac{N\pi}{8}\omega + M\left(1 - \frac{\pi\omega}{8}\right)$ essendo ω l'angolo visuale secondo cui da un punto qualunque di σ_1 si vede σ_1'.

Derivando poi la (1) stessa e tenendo conto delle solite limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica si trovano facilmente le limitazioni per le componenti di deformazione.

8. Le limitazioni date devono essere brevemente discusse perchè occorre conoscere in modo meno indeterminato il valore N se si vuole stabilire il comportamento della dilatazione cubica e delle componenti di deformazione quando ci si allontana da σ_1 e quando σ_1 tende a zero. Ora secondo la convenzione del numero precedente N rappresenta il massimo (assoluto) di $\Lambda(P')$ in σ_1'; ricordando che è

$$\Lambda(P') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ci proponiamo di mostrare che *se* σ_1 *tende a zero ma* u, v, w (*e quindi* F_1, F_2, F_3) *conservano su* S *sempre lo stesso massimo* M, *allora* N *tende all' infinito ma il prodotto* $N\sigma_1$ *tende ad un limite finito (che può essere anche lo zero).*

Consideriamo dapprima il caso dello spazio limitato soltanto da un piano. Allora una riduzione dell' ampiezza di σ_1 che lasci l' area della stessa forma si può interpretare come un aumento dell' unità di misura dello spazio; se supponiamo che l' area sia ridotta nella proporzione da 1 a λ l' unità di misura aumenta nella proporzione di 1 a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ e quindi $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}$, $\frac{\partial F_3}{\partial z}$ crescono anche esse nella stessa proporzione. Ne segue che la limitazione per N deve essere aumentata nel rapporto 1 a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; mentre $N\sigma_1$ *diminuisce* nel rapporto da 1 a $\sqrt{\lambda}$. Questa deduzione implica, come si è già osservato, che σ_1 conservi la stessa forma; se σ_1 tende a zero ma una delle dimensioni resta *finita* allora N tende all' infinito ed $N\sigma_1$ tende ad un limite determinato e finito diverso da zero (1).

Passiamo ora ad un caso più generale e supponiamo che la superficie S limite del campo contenga una zona piana S_1 ma del resto abbia forma qualunque. Se σ_1 si trova su S_1 allora la funzione armonica F_1 nulla in $S - \sigma_1$ si può pensare come somma di due; una F_1' data nel semispazio limitato

(1) Se si considera il problema elastico in due dimensioni, quest' ultimo caso è quello che sempre si verifica; cioè $N\sigma_1$ tende ad un limite finito diverso da zero. Il ragionamento è uguale a quello svolto più sopra per il primo caso; basta osservare che allora σ_1 ha una sola dimensione.

dal piano α che contiene S_1 ed eguale ad F_1 su S_1 nulla nella rimanente parte di α l'altra F_1'' uguale a $-F_1'$ in $S - S_1$ nulla in S_1.

Ne segue

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1'}{\partial x} + \frac{\partial F_1''}{\partial x}$$

e mentre, per quanto riguarda $\frac{\partial F_1'}{\partial x}$ si può ripetere il ragionamento svolto più sopra, invece $\frac{\partial F_1''}{\partial x}$ si conserva limitata [1]; il valore di essa non ha dunque influenza sul limite di N quando σ_1 tende a zero.

Resta da considerare soltanto il caso generale in cui σ_1 non è piana. Facciamo tendere a zero σ_1 considerando successivamente tante zone decrescenti σ_1', σ_1'' .... $\sigma_1^{(n)}$ .... (l'una interna alla precedente); associamo quindi ad ogni zona $\sigma_1^{(n)}$ un solido $\overline{S}_n$ ottenuto per similitudine dal corpo dato in modo che l'area $\sigma_1^{(n)}$ su $\overline{S}_n$ sia equivalente a σ_1; la successione $\overline{S}_1$ .... $\overline{S}_n$ .... é una successione di solidi convessi, regolari; su ciascuno di questi la F_1, nulla fuori di $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ e regolare in $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ ammette derivata $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *limitata*, e questa al limite (per $n \rightarrow \infty$) tende a quella che si ha, per la stessa F_1, nel semispazio: infatti la curvatura in ogni punto della superficie limite di S_n tende a zero quando n tende all' ∞. Ma ora si può tornare da $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ a $\sigma_1^{(n)}$ data su S riducendo $\overline{S}_n$ nel rapporto $\sigma_1^{(n)} : \overline{\sigma}_1^{(n)} = \lambda$; e su questa riduzione si può svolgere lo stesso ragionamento precedentemente fatto per il semispazio; se dunque $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ tende ad una linea $N\sigma_1$ tende ad un limite diverso da zero; se $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ tende ad un area con due dimensioni limitate allora $N\sigma_1$ tende a zero.

Riprendiamo ora in esame la (13): da essa si rileva che quando σ_1 tende a zero, tutti i termini del secondo membro tendono a zero se la lunghezza massima contenuta in σ_1 tende anch'essa a zero; in caso contrario essi restano limitati ma diversi da zero. In σ_2 il primo e il secondo termine del secondo membro della (13) sono dello stesso ordine di grandezza ma N_1 è costante mentre il primo termine diviene più grande nell'interno del campo e tende all'infinito quando Q tende ad un punto di σ_1 e σ_1 tende a zero. Resta così dimostrato il primo teorema, enunciato al n.° 1, almeno per quanto riguarda

---

[1] Infatti, quando σ_1 tende a zero, F_1'' diminuisce in valore assoluto (o almeno non aumenta) in $S - S_1$ e resta sempre nulla in S_1; quindi $\frac{\partial F_1''}{\partial x}$ resta limitata in S_1.

la dilatazione cubica: ma allo stesso risultato si giunge facilmente quando si consideri una delle componenti di deformazione.

§ 4. **Estensione della soluzione di Lichtenstein al caso delle forze esterne date (problema piano).**

9. Cerchiamo ora di estendere il procedimento del n.° 2 al caso in cui, in un campo piano, siano date le forze sul contorno. Ricordiamo perciò che la sollecitazione elastica in un campo a due dimensioni si può esprimere, servendosi di una funzione biarmonica F; le componenti di tensione sono legate ad essa dalle relazioni

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{15}$$

valide in coordinate cartesiane; le condizioni ai limiti sono allora:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_S = -P_x \qquad \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_S = P_y$$

essendo P_x, P_y le componenti secondo gli assi delle forze esterne date.

Le relazioni precedenti possono essere scritte nella forma

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_S = -\int P_x dS \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S = \int P_y dS \tag{16}$$

dove le funzioni $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_S$, $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S$ sono determinate in modo unico perché per l'equilibrio deve essere

$$\int_S P_x dS = 0, \quad \int_S P_y dS = 0.$$

Seguendo il LAURICELLA [1] poniamo ora

$$U = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad V = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$
$$\Delta_2 \Theta = \Delta_2 \Delta_2 F = 0;$$

il problema dato si riconduce così alla ricerca delle funzioni U e V assegnate

[1] Cfr. G. LAURICELLA, *Sulla integrazione della equazione* $\Delta^4 V = 0$. « Atti della R. Accademia Naz. dei Lincei », 2° sem. 1907, fasc. 6°, pp. 373-383.

sul contorno e legate nel campo delle equazioni

$$(17) \qquad \Delta_2 U - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta_2 V - \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta_2 \Theta = 0$$

le quali coincidono con le equazioni dell'equilibrio elastico per componenti di spostamento U e V, essendo cambiato solo il parametro dell'elasticità che in luogo di $\frac{\lambda + \mu}{\mu}$ è eguale a -1. La condizione $\Delta_2 \Theta = 0$ non è più conseguenza delle prime due equazioni e deve essere posta esplicitamente.

L'integrazione delle (17) può essere eseguita col procedimento indicato dal LICHTENSTEIN e riportato al n.° 2.

Dalla prima e dalla terza delle (17) si deduce infatti

$$\Delta_2 \left(U - \frac{x\Theta}{2} \right) = 0$$

e quindi, indicando con $P(\xi, \eta)$ un punto di S con $Q(x, y)$ un punto interno, si ha

$$U(Q) - \frac{x}{2}\, \Theta(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P) dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, \xi \Theta(P) dS.$$

Poichè $\Delta_2 \Theta = 0$ si può scrivere

$$\frac{x}{2}\, \Theta(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, x \Theta(P) dS.$$

Sommando queste due equazioni si trova

$$(18) \qquad U(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P) dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, (\xi - x) \Theta(P) dS.$$

Ma

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P) dS$$

è nota in tutto il campo perchè U è dato sul contorno; indicando con $F_2(x, y)$ l'espressione che si ottiene considerando la funzione V:

$$F_2(x, y) = \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, V(P) dS$$

e ricordando che $\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$, si ricava dalla (18) e dalla analoga espressione in V:

(19)
$$\Theta(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\xi - x)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\eta - y)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}\right]\Theta(P)dS.$$

Poniamo

(20)
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \Lambda(Q)$$

ed osserviamo che se r indica il vettore $\overline{QP}$ (diretto da Q verso P) è

$$(\xi - x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial r}$$

la (19) si trasforma così nell'equazione

(19′)
$$\Lambda(Q) - \frac{1}{4\pi}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS = 0.$$

Ma in un campo a due dimensioni è

$$r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P} = -2\frac{\partial}{\partial n}\log r + h_P^Q$$

dove h è limitata ed infinita come $\log r$; d'altra parte se nel campo stesso è

$$f(x, y) = -\int_S \frac{\partial}{\partial n}\log r\varphi(P)dS$$

sul contorno si ha

$$f(P') = \pi\varphi(P') - \int_S \frac{\partial}{\partial n}\log r\varphi(P)dS$$

segue così che se Q tende ad un punto P' del contorno la (19′) assume la forma

(21)
$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS = 2\Lambda(P').$$

10. Le formule (18) e (21) risolvono il problema posto. Si osserva facilmente che alla (21) si può applicare la teoria di FREDHOLM e che il numero $\frac{1}{2\pi}$ non è certo un autovalore per essa perchè se la equazione

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \Theta(P) dS = 0$$

(cioè l'equazione *omogenea* che si deduce dalla (21)) ammettesse una soluzione $\Theta(P')$ diversa da zero, questa darebbe luogo ad una funzione *armonica*; ponendo i valori $\Theta(P')$ nel secondo termine del secondo membro della (18) avremmo una funzione U (e quindi una funzione V) diversa da zero nell'interno del campo; e ciò non è possibile perchè come ha mostrato LAURICELLA la soluzione delle (17) è certamente unica (quando U e V sono assegnati su S). Il procedimento ora indicato consente di ottenere nel campo la funzione biarmouica F determinata sul contorno per mezzo delle sue derivate prime (o ciò che è lo stesso per mezzo della F stessa e della sua derivata normale). Esso si estende senza alcuna difficoltà al caso delle tre dimensioni (al quale già si riferisce la nota citata del LAURICELLA).

§ 5. Un primo apprezzamento qualitativo della distribuzione delle tensioni elastiche.

11. Dovremmo ora studiare come si distribuisce la sollecitazione elastica in un campo piano quando le forze esterne agiscono soltanto su una piccola zona σ_1 del suo contorno. Questo studio implica la ricerca di un valore maggiorante per la soluzione $\Theta(P')$ della equazione (21) (analogamente a quello che si è fatto al § 3 per la equazione (5)); poichè questa ricerca è ora meno semplice così è bene premettere una determinazione qualitativa.

Osserviamo dunque che se le componenti P_x, P_y sono minori di M in σ_1, nulle in $S - \sigma_1$ si ha in base alle (16):

$$U = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S \begin{cases} \leq \dfrac{M\sigma_1}{2} & \text{in } \sigma_1 \\ = 0 & \text{in } S - \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

$$V = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S \begin{cases} \leq \dfrac{M\sigma_1}{2} & \text{in } \sigma_1 \\ = 0 & \text{in } \sigma_2 . \end{cases}$$

Segue così che in σ_2 vale la diseguaglianza

$$\Lambda(P') \leq \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1^2}{r_1^2} \tag{22}$$

dove si indichi con r_1 la distanza di P' da σ_1 (1).

D'altra parte è noto che se U e V sono continue e derivabili in S (e nel caso presente ciò è certo perchè U e V sono ottenute per integrazione da P_x e P_y) allora $\Lambda(P')$ esiste limitata in ogni punto del contorno. Poichè la diseguaglianza (23) può servire soltanto nei punti di σ_1 non vicinissimi a σ_1 includiamo in questa zona anche i punti di σ_2 la cui distanza r_1 da σ_1 soddisfi alla diseguaglianza

$$r_1 \leq \sqrt[2]{\sigma_1}$$

indichiamo quindi con σ_1' la zona così ampliata e con N un valore maggiorante a $\Lambda(P')$ in σ_1'. In ogni punto di S si conosce allora un valore maggiorante (limitato) per $\Lambda(P')$; questo valore è uguale ad N in σ_1' e minore di $\frac{\pi}{4} M\sigma_1$ in $S - \sigma_1'$.

Riprendiamo ora la equazione integrale

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial z_P} \Theta(P) dS = 2\Lambda(P') \tag{21}$$

$$\Lambda(P') \leq \begin{cases} N & \text{in } \sigma_1' \\ \frac{\pi}{4} M\sigma_1 & \text{in } S - \sigma_1' \end{cases}$$

ed osserviamo che la funzione $\Theta(P')$, soluzione di essa, si può scrivere certamente nella forma

$$\Theta(P') \leq 2N(P') + K(P')$$

dove

$N(P')$ è uguale ad N in σ_1' nullo in $S - \sigma_1'$

$K(P')$ è la soluzione che corrisponde a

$$\Lambda_1(P') \leq \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n} d\sigma_1' + \frac{\pi M\sigma_1}{4}.$$

(1) La (22) si ricava dalla (20) tenendo conto delle diseguaglianze che ho dimostrato nei miei lavori precedentemente citati (v. § 3) per le derivate di una funzione armonica in un campo convesso in due dimensioni. Infatti se F_1 è armonica, uguale a u in σ_1 nulla in σ_2 si ha $\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big|_{\sigma_2} \leq \frac{\pi}{4}\frac{u}{r_1^2}$. Poichè la stessa diseguaglianza vale per $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ così è immediata la (22).

Poichè

$$\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} \leq \frac{2 \cos \varphi}{r}; \quad r = \overline{QP}, \quad \varphi = (\overline{PQ}, n_P),$$

segue

(23) $$\Theta(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n_P} \Theta(P) dS \leq \frac{2N}{\pi} \int_{\sigma_1'} \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma_1' + \overline{K}$$

dove $\overline{K}$ è un numero maggiorante a $K(P')$ in tutto S.

12. Per valutare il significato di questa diseguaglianza cerchiamo di stabilire l'ordine di grandezza di N e di $\overline{K}$.

In σ_1 è

$$N = |\Lambda(P')|_{\max}; \quad \Lambda(P') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial F_2}{\partial n} \cos(n, y) + \frac{\partial F_1}{\partial S} \cos(S, x) + \frac{\partial F_2}{\partial S} \cos(S, y).$$

Ma è

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = P_y \quad \frac{\partial F_2}{\partial S} = - P_x$$

$$|P_x| \leq M \quad |P_y| \leq M \quad \cos(S, x) + \cos(S, y) < \sqrt{2}$$

sicchè segue

(24) $$N < \left|\frac{\partial F_1}{\partial n}\right|_{\max} + \left|\frac{\partial F_2}{\partial n}\right|_{\max} + M\sqrt{2}.$$

I valori di $\frac{\partial F_1}{\partial n}, \frac{\partial F_2}{\partial n}$ dovranno essere valutati volta per volta; ciò che però si può fare facilmente.

13. Prima di passare alla ricerca di una limitazione per $\overline{K}$ vogliamo indicare un'altra valutazione approssimata del primo termine di Θ. Si osservi infatti che al posto di N, *valore massimo* di $\Lambda(P')$ in σ_1', si può porre addirittura la funzione $\Lambda(P')$ stessa, allora si ha

(23') $$\Theta(Q) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} \Lambda(P) \frac{\partial G}{\partial n_P} d\sigma_1' + \overline{K}.$$

Ora se Q è assai distante da P e se σ_1' è sufficientemente piccola, si può ritenere che $\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}$ sia costante in σ_1'; allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} \Lambda(P) \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} d\sigma_1' < \frac{2 \cos \varphi}{\pi r} \int_{\sigma_1'} \Lambda(P) d\sigma_1'.$$

Ma è

$$\Lambda(P') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial F_1}{\partial n} \cos(n, y) +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial S} \cos(S, x) + \frac{\partial F_2}{\partial S} \cos(S, y)$$

e d' altra parte è

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial S} d\sigma_1' = \int P_y d\sigma_1' = 0$$

$$\int \frac{\partial F_2}{\partial S} d\sigma_1' = -\int P_x d\sigma_1' = 0$$

sicchè se

$$\cos(s, x) = \text{cost.}, \quad \cos(s, y) = \text{cost.}$$

resta

$$\int \Lambda(P) d\sigma_1' = \int_{\sigma_1'} \left(\frac{\partial F_1}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial F_2}{\partial n} \cos(n, y) \right) dS.$$

Ma si osserva subito che

$$\left| \int \frac{\partial F_1}{\partial n} d\sigma_1' \right| = \left| \int_{S-\sigma_1'} \frac{\partial F_1}{\partial n} dS \right| \leq \int_{S-\sigma_1'} \left| \frac{\partial F_1}{\partial n} \right| dS < \int_{S-\sigma_1'} |\Lambda(P)| \, dS < \frac{\pi M \sigma_1 l}{4}$$

dove l indica la lunghezza del contorno.

Essendo $\cos(n, x) + \cos(n, y) < \sqrt{2}$ segue *in un punto* Q *distante da* σ_1 e tale che si possa ritenere $\dfrac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}$ costante per tutti i P di σ_1:

$$\Theta(Q) < \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}r} M \sigma_1 l + \overline{K} \tag{25}$$

dove, come si è già detto, $\overline{K}$ è la costante che corrisponde al massimo valore assunto dalla soluzione della equazione integrale corrispondente a

$$\overline{\Lambda(P')} \leq \frac{\pi M \sigma_1}{4} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} d\sigma_1'.$$

Per approssimazione si può porre (in condizioni uguali a quelle più sopra specificate: cioè σ_1 molto piccola: $r_{PP'} \dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \text{cost}$ quando P' sia fisso e P varii solo in σ_1'):

$$\overline{\Lambda(P')} \leq \frac{\pi M \sigma_1}{4} + \frac{\pi \cos(n_{P'}, r)}{2r} \int_{\sigma_1'} N(P) d\sigma_1' =$$

$$= \frac{\pi M \sigma_1}{4} + \frac{\pi M \sigma_1 l}{2\sqrt{2}r} \cos(n_{P'}, r).$$

La limitazione che ne risulta per $\Theta(Q)$ è assai più favorevole di quella precedentemente indicata. In essa l'unica costante da determinare è rappresentata dal valore di K comprendente $\Lambda(P')$ dato.

14. Vogliamo ora indicare, come nelle stesse condizioni ora specificate, si trovi facilmente anche una limitazione per le componenti di tensione. Consideriamo per esempio σ_y.

Si ha

$$\sigma_y\Big|_Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_Q = \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_Q = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial x_Q \partial n_P} U(P)dS -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P}(\xi - x)\Theta(P)dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\Theta(P)dS.$$

Ora in base alle limitazioni ottenute per le derivate di una funzione armonica è

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P} U(P)dS < \frac{\pi M \sigma_1^2}{8 r^2}$$

perchè è $U(P) < \frac{M\sigma_1}{2}$ in σ_1, $U(P) = 0$ in σ_2.

Inoltre si ha

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial n}\Theta(P)dS = \frac{\Theta(Q)}{2}$$

sicchè resta da valutare il termine

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P}(\xi - x)\Theta(P)dS.$$

A questo si possono sostituire i due termini

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n} N(P)(\xi - x)dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)\bar{K}dS;$$

ed è

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)KdS < \frac{K\pi}{8}\int_S \left|\frac{\cos(x, r)}{r}\right| dS$$

perchè

$$(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n} < \frac{\pi^2}{2}\frac{\cos(x, r)}{r}.$$

Valutiamo ora

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_1} N(P)(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}\, d\sigma_1 .$$

Si ha, supponendo al solito che $(\xi - x)\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial n_P}$ sia costante quando P varia in σ_1' e ricordando che

$$(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n_P} < \frac{\pi^2 \cos(x,\, r)}{2r}$$

$$\int_{\sigma_1'} N d\sigma_1' < \frac{\pi M \sigma_1 l}{2\sqrt{2}}:$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x) N(P) dS < \frac{\pi^2 M \sigma_1 l \cos(x,\, r)}{16\sqrt{2}r};$$

segue dunque in definitiva

$$\sigma_y\,|_Q < \frac{\pi M \sigma_1^2}{8r^2} + \frac{\Theta(Q)}{2} + \frac{K\pi}{8}\int_S \left|\frac{\cos(x,\, r)}{r}\right| dS + \frac{\pi^2 M \sigma_1 l}{16\sqrt{2}r}\cos(x,\, r) \tag{26}$$

formula valida quando Q sia distante da σ_1 e σ_1 sia molto piccola. Anche qui l'unica costante che deve essere determinata è $\overline{K}$: una limitazione per essa sarà indicata nel paragrafo che segue.

§ 6. Un metodo per la soluzione approssimata della (21).

15. Si è accennato al numero precedente alla possibilità di assegnare un metodo abbastanza generale per la soluzione approssimata della (21). Il procedimento relativo sarà indicato in questo paragrafo.

Cominciamo col rilevare alcune proprietà di $r_{QP}\dfrac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}$. Ragionando in modo completamente eguale a quello del n.° 4 si ha:

a) che in un campo a due dimensioni

$$\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} dS = 2\pi$$

se S rappresenta una linea chiusa e P, P' sono due punti di essa.

b) che $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}$ è sempre positiva (o nulla) sul contorno di un campo convesso.

c) che è

(27) $$0 \leq r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{\cos(n_{P'}, r)}{r}$$

perchè $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P}$ è massima quando la direzione x coincide con la direzione $n_{P'}$ e d'altra parte come ho dimostrato in altri lavori (v. n.° 4) è

$$0 < \frac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} \leq \frac{\pi^2}{2r^2} \ (^1)$$

nei campi convessi a due dimensioni.

16. Riprendiamo ora la equazione integrale

(21) $$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} dS_P = 2\Lambda(P')$$

e vediamo di risolverla applicando ad essa il procedimento di NEUMANN per il problema di DIRICHLET.

Essendo identicamente

$$\Theta(P') = \frac{1}{2\pi} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{T'}}{\partial r \partial n_P} \Theta(P') dS$$

---

(1) Interessa rilevare che è sempre $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$. Infatti, dato il contorno S si considerino in esso due punti P e P' e sia U una funzione armonica uguale ad M in un intorno δ di P nulla nella rimanente parte di S; si ha allora

$$\frac{\partial U}{\partial n_{P'}} = \frac{M}{2\pi} \int_P \frac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} dS_{P'}$$

ed essendo δ piccolo a piacere $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P}$ continua regolare (P è distinto da P') se è $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}} > 0$ si deduce che anche $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$. Ora U è positiva in tutto il campo; nulla in $s - \delta$; $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}}$ è dunque positiva o nulla perchè P' è in $s - \delta$. Descriviamo un cerchio C interno al campo e tangente ad S in P; si può anche scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial n_{P'}} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial^2 G}{\partial n_P \partial n_Q} U(Q) ds$$

essendo Q i punti di C. Ma $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_Q}$ è nota nel cerchio e vale $\dfrac{2}{r^2}$; $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}}$ non può dunque essere nulla se $U(Q)$ (certo non negativa), non è nulla; e se $U(Q)$ fosse nulla su C (e quindi anche nell'interno) sarebbe nulla in tutto il campo. Dunque $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}} > 0$ e quindi $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$.

c. d. d.

si può scrivere la (21) nella forma

$$\Theta(P') + \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta(P) - \Theta(P') \} dS_P = \Lambda(P'). \tag{28}$$

Poniamo

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_0 &= \Lambda(P) \\ \Theta_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta_0(P') - \Theta_0(P) \} dS_P \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Theta_n &= \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta_{n-1}(P') - \Theta_{n-1}(P) \} dS_P. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

La serie

$$\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n + \dots \tag{30}$$

risolve formalmente) il problema posto. Vediamo ora se il procedimento è convergente.

Osserviamo intanto che posto

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(r \frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} - r \frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} \right) dS$$

dove C rappresenta una porzione qualunque del contorno risulta $|I| < 1$ qualunque siano i punti Q_1 e Q_2. Ed infatti i due termini sotto il segno sono ambedue *non* negativi in un campo convesso; e se C comprende tutto il contorno sono ambedue uguali a 2π e quindi $I = 0$. Se C comprende *soltanto* un tratto del contorno allora

$$\int_C r \frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} dS_P$$

sarà *minore* di 2π a meno che la parte esclusa sia un segmento di retta essendo Q_1 su di essa. Ma in questo caso $\int_C r \frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} dS$ sarebbe diverso da zero, qualunque sia la posizione di Q_2 su C. Resta così dimostrato l'asserto.

Consideriamo ora un campo tale che sia $|I| \leq h$ per ogni C' essendo h un numero inferiore all'unità. Questa ipotesi è necessaria perchè $I < 1$ potrebbe ammettere l'unità come limite superiore; nei campi ordinarii ciò non si verifica. Sia data dunque in un campo siffatto sul contorno S una funzione $f(S)$

positiva o nulla e si consideri l'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_S f(S)\left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P}\right] dS.$$

Dividiamo S in due zone S_1 e S_2 tali che fissati i punti Q_1 e Q_2 sia in S_1

$$r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} \geq r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P}$$

e in S_2

$$r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} < r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P};$$

siano poi I_1 e I_2 gli integrali del tipo I estesi però ad S_1 o ad S_2.

È $I = I_1 + I_2$; ma I_1 e I_2 sono di segno opposto quindi $|I|$ è minore del più grande dei due numeri $|I_1|$ e $|I_2|$. Se L è il limite superiore di $f(S)$ in S risulta dunque

$$|I| < hL$$

qualunque siano i punti Q_1 e Q_2.

17. Ciò posto siano M ed m il massimo ed il minimo di $\Lambda(P')$ in S; se Q_1 e Q_2 sono due punti del contorno si può scrivere identicamente

$$\Theta_1(Q_1) - \Theta_1(Q_2) = \frac{1}{4\pi}\left[\Theta_0(Q_1)\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} dS - \Theta_0(Q_2)\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} dS\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_S \{\Theta_0(P) - m\}\left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P}\right] dS +$$

$$+ \frac{m}{2\pi}\int_S \left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P}\right] dS.$$

In questa espressione l'ultimo termine del secondo membro è nullo e il primo termine vale

$$\frac{\Theta_0(Q_1) - \Theta_0(Q_2)}{2}$$

ed è quindi un valore assoluto minore di $\frac{M-m}{2}$. D'altra parte $\Theta_0(P) - m$ è compreso tra zero ed $M - m$ e quindi il secondo integrale del secondo membro vale al più $\frac{M-m}{2}h$.

Ne segue

$$|\Theta_0(Q_1) - \Theta_1(Q_2)| < (M - m)\left(\frac{1+h}{2}\right).$$

Posto $\rho = \frac{1+h}{2}$ segue $|\Theta_0(Q_1) - \Theta_0(Q_2)| < (M - m)\rho$.

Questa diseguaglianza vale qualunque siano i punti Q_1 e Q_2; perciò indicando con M_1 e m_1 il massimo e il minimo di Θ_1 si ha

$$M_1 - m_1 < (M - m)\rho.$$

Questa limitazione può essere proseguita per $\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_n, \ldots$; si deduce

$$M_n - m_m < (M - m)\rho^n$$

e quindi per la (29)

$$\Theta_n(P') < \frac{M-m}{2}\rho^{n-1}$$

la serie (30) è dunque convergente; e la serie

$$\Lambda(P') + \frac{M-m}{2} + \ldots + \frac{M-m}{2}\rho^n + \ldots \tag{31}$$

è ad essa maggiorante; cioè la somma della serie (30) è minore od eguale (in valore assoluto) ad

$$M + \frac{M-m}{2}\frac{1}{1-\rho} \qquad \text{(se } M \geq |m|\text{)}.$$

Una limitazione per $\Theta(P')$ si può dunque conoscere facilmente appena si conosca ρ (cioè h).

§ 7. **Un esempio semplice: il cerchio.**

18. Si è visto nei paragrafi precedenti in che modo si possa valutare la distribuzione delle tensioni elastiche; questo apprezzamento sarà ora svolto con un esempio completo nel caso semplice del contorno circolare.

In questo caso è

$$\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \frac{2}{r_{P'P}}$$

(P, P' sono punti del contorno); quindi

$$r_{P'P}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} = \frac{2\cos\varphi}{r} \qquad \varphi = (\widehat{PP',n});$$

tenendo presente, che fissato l'arco S_1 è $\int_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r} dS_1 = \text{cost}$ qualunque sia la posizione del punto P' si deduce subito (v. § 6) che è $h=0$, quindi $\rho = \frac{1}{2}$.

Dalle relazioni del paragrafo precedente segue allora

$$\Theta(P') < 3 \,|\, \Lambda(P') \,|_{\max}$$

è quindi se poniamo

$$\Lambda_1 = \frac{\pi M \sigma_1}{4} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P') r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS$$

si trova

$$K < \frac{3\pi M \sigma_1}{4} + \frac{3}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS.$$

In questa espressione si calcola facilmente anche il secondo termine del secondo membro.

Osserviamo infatti che

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS = \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) \frac{\cos\varphi}{r} dS$$

e questa espressione è *costante* in tutti i punti della circonferenza S ed uguale alla metà del valore assunto dalla stessa espressione nel centro del cerchio. Ponendoci in questo punto si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} \frac{\cos\varphi}{r} N(P) dS = \frac{1}{\pi R} \int_{\sigma_1'} N(P') dS_1'$$

e quindi in definitiva si trova [v. formula (23)]:

$$\Theta(Q) < \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1'} N \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma_1' + \frac{3}{\pi R} \int_{\sigma_1'} N(P') d\sigma_1' + \frac{3\pi M \sigma_1}{4}$$

dove

$N(P')$ è uguale a $\Lambda(P')$ in σ_1'; uguale a zero in $S - \sigma_1'$.

Questa limitazione vale qualunque sia la posizione di Q e l'ampiezza di σ_1; in questo caso occorre ancora determinare $N(P)$ ciò che si può fare senza difficoltà, quando si conoscano P_x e P_y sul contorno, ricordando che

$$N(P')\,|_{\sigma_1} < \left| \frac{\partial F_1}{\partial n} \right| \cos(n, x) + \left| \frac{\partial F_2}{\partial n} \right| \cos(n, y) + \sqrt{2} M$$

essendo

$$F_1 \,|_S = \int P_y dS, \quad F_2 \,|_S = \int P_x dS.$$

19. Giustifichiamo questa asserzione partendo dall'ipotesi che P_x, P_y siano continue e derivabili con derivata a variazione limitata. Calcoliamo allora, per esempio, $\frac{\partial F_1}{\partial n}$ essendo F_1 la funzione armonica che assume sul contorno i valori $U=\int P_y dS$; cioè calcoliamo la derivata normale della funzione armonica la cui derivata tangenziale assume i valori P_y. Se invece della F_1 si considera la funzione armonica ad essa coniugata (che indichiamo con $\overline{F}_1$) il problema viene invertito; noi conosceremo cioè la derivata normale P_y della $\overline{F}_1$ e dovremo invece calcolare la sua derivata tangenziale $\left(\text{uguale a } \frac{\partial F_1}{\partial n}\right)$. Sul cerchio avremo quindi

$$\overline{F}_1 = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \log r \cdot dS$$

perchè derivando in un punto del contorno si trova

$$\left.\frac{\partial \overline{F}_1}{\partial n}\right|_P = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\cos\psi}{r}\, dS + P_y \qquad \psi = (\widehat{r, n_P}) \quad r = \overline{PP'}$$

e per l'equilibrio è

$$\int_S P_y \frac{\cos\psi}{r}\, dS = 0.$$

Osserviamo ora che si può togliere a $\overline{F}_1$ una costante qualunque e questa si può porre nella forma $\frac{1}{\pi}\int_S \overline{P}_y \log r \cdot dS$ essendo $\overline{P}_y$ costante; ne segue che se consideriamo la derivata $\frac{\partial F_1}{\partial S}$ nel punto P di S si può sempre supporre che P_y sia nulla in P. Si ha allora

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial S}\right|_P = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\partial \log r}{\partial S}\, dS$$

cioè integrando per parti

$$\frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\partial \log r}{\partial S}\, dS = \frac{1}{\pi}[P_y \log r]_{S=0}^{2\pi R} - \frac{1}{\pi}\int_S P_y' \log r \cdot dS$$

e poichè al secondo membro la parte integrata è nulla segue

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = -\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} P_y' \log r \cdot d\sigma_1$$

poichè P_y' è nulla fuori di σ_1. L'integrale precedente si calcola senza difficoltà quando sia nota P_y'.

20. Risolto così nel cerchio il caso generale (corrispondente a Q in posizione arbitraria, σ_1 di ampiezza qualunque) consideriamo il caso di σ_1 molto piccola, Q sufficientemente distante da σ_1, in modo che fissato Q, si possa ritenere per P variabile in σ_1'

$$\frac{\cos\varphi}{r_{QP}} = \text{cost}, \quad r\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} = \text{cost}.$$

Si possono allora riprendere le limitazioni dei numeri 13 e 14; essendo

$$\overline{K} \leq \frac{3}{\pi R}\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1' + \frac{3\pi\lambda.\sigma_1}{4}$$

$\left(\text{con } \frac{3}{\pi R}\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1' = K_1 = \text{cost}\right)$ segue dalla (25) e dalla limitazione ottenuta per $\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1'$ allo stesso n.° 13:

$$\Theta(Q) < \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}r} M\sigma_1 l + \frac{3\pi M\sigma_1}{4} + \frac{3M\sigma_1 l}{\sqrt{2}R}$$

ed essendo

$$l = 2\pi R$$

resta

$$\Theta(Q) < M\sigma_1 \left\{ \frac{\sqrt{2}\pi R\cos\varphi}{r} + 3\sqrt{2}\pi + \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Si può ora valutare σ_y procedendo come al n.° 14. Perchè K_1 è costante così segue che

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)K_1 dS = \frac{K_1}{2};$$

infatti il primo membro esprime la derivata rispetto ad x della funzione armonica che assume su S (e quindi in tutto il campo) il valore $(\xi - x)\frac{K_1}{2}$. Ne segue

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial x \partial n}(\xi - x)\overline{K} dS = \frac{K_1}{2} + \frac{3\pi^2 M\sigma_1}{32}\int_S \left|\frac{\cos(x, r)}{r}\right| dS$$

$$< \frac{3\pi M\sigma_1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi^2 M\sigma_1}{32}\int_S \left|\frac{\cos x,\ r}{r}\right| dS$$

e quindi

$$\sigma_y\,|_Q < \frac{\pi M\sigma_1^2}{8r^2} + \frac{\Theta(Q)}{2} + 3\pi M\sigma_1 \left\{ \frac{\pi}{32} \int_S \left| \frac{\cos(x, r)}{r} \right| dS + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{\pi^3 M\sigma_1 R \cos(x, r)}{8\sqrt{2}\, r}.$$

Analoghe limitazioni si hanno per le altre componenti di tensione.

CONCLUSIONI

21. In conclusione i ragionamenti e le formule esposte nei numeri precedenti dimostrano completamente i teoremi enunciati al n.° 1. A proposito dei quali è opportuno porre in rilievo che le limitazioni date (pur essendo ottenute senza eccessive difficoltà analitiche) hanno carattere *quantitativo* (specialmente semplice se σ_1 è piccola e se il punto considerato dista da σ_1.

A me sembra però che l'interesse del risultato non stia solo nei teoremi dimostrati (che del resto, possono essere estesi anche ad altri campi della meccanica e specialmente della idrodinamica) ma sopra a tutto nel fatto che essi mostrano la possibilità di stabilire alcune proprietà generali in varii campi della fisica matematica, basandosi in diseguaglianze semplici relative alle funzioni armoniche e alle loro derivate. Questa idea (che mi ha spinto alla ricerca di quelle diseguaglianze) può essere applicata (in parte) anche in casi nei quali le equazioni che reggono il fenomeno *non* sono del tipo ellittico.

Studio sulle varietà a due dimensioni appartenenti a un S_4 euclideo.

Memoria di PIETRO BURGATTI (a Bologna).

Sunto. - *Si studiano le varietà a due dimensioni immerse in un* S_4 *euclideo. Definite certe due normali principali, si esaminano le proprietà delle superficie nell' intorno di un punto, le curvature, e le sue linee più caratteristiche. Infine si dà sotto forma esplicita ed espressiva un gruppo di formule fondamentali relative all' impiego delle tre forme differenziali quadratiche atte a definire la varietà considerata.*

Lo studio delle varietà a due dimensioni immerse in un S_4 euclideo, che potremo senz' altro chiamare superficie, non è nuovo; n' è comparso uno di recente del prof. TONOLO nei « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo » (1).

Poichè l' argomento non è privo d' interesse, ed io mi trovavo quest' anno in quest' ordine di idee per lavori in campi affini, ho voluto proseguirne l' indagine in una direzione diversa da quella tenuta finora, per cercare non solo le analogie con le proprietà delle ordinarie superficie di un S_3, ma piuttosto le differenze sostanziali, che sono veramente le cose di maggior interesse.

E non principalmente delle questioni di carattere analitico mi sono occupato, si bene di quelle che rivestono una forma geometrica più prossima alla nostra intuizione nello spazio ordinario; in particolare del comportamento della superficie nell' intorno d' un suo punto, delle curvature e delle linee più caratteristiche che possono esistere su quelle. Son riuscito così a mettere in chiaro i caratteri essenziali di coteste superficie e quasi a vederli, benchè ci manchi l' intuizione dello spazio a quattro dimensioni.

Per non dilungarmi troppo non riassumerò qui i risultati contenuti in questo lavoro; il lettore potrà vederli sfogliando queste pagine.

Solo mi piace dichiarare che l' analisi vettoriale è strumento eccellente in queste ricerche, giacchè permette d' andar diritti allo scopo senza perdersi in questioni analitiche superflue o complesse e in formule poco o nulla espressive.

---

(1) T. LIII, 1929.

Se di questo resterà persuaso il lettore, riterrò per ciò solo non del tutto inutile questo lavoro.

Avverto infine che ho voluto premettere alla ricerca in discorso alcune considerazioni sulle curve in un S_4, non già per dir cose nuove, chè poco di nuovo c'è da dire in questo campo, ma per dirle in modo nuovo, quale preparazione allo studio delle superficie nell'indirizzo che qui mi son proposto.

§ 1. **Curve.**

1. Una curva (c) in un piano ha una sola curvatura comunque la si deformi nel piano stesso. Per farla uscire dal piano e farla diventare una curva dello spazio euclideo S_3, occorre darle una seconda curvatura, o come suol dirsi, una torsione.

Allora un arco finito non è più piano; ma resta piano, a meno d'infinitesimi del terzo ordine, ogni elemento ds dell'arco. Il piano che contiene ds in P è il *piano osculatore* in P. La sua normale $\boldsymbol{b}$ (versore) è la *binormale*, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t}$ versore della tangente) è il versore della *normale principale*.

Comunque si deformi la (c) nel S_3 restano sempre due e due sole curvature. Per farla uscire da S_3 ed entrare, per così dire, in S_4, occorre darle una terza curvatura, ossia una seconda torsione. Allora un arco finito non è più contenuto in un S_3, ma rimane in un S_3 ogni elemento ds, a meno d'infinitesimi del quart'ordine.

Sia $S_4(P)$ uno spazio euclideo a quattro dimensioni e $S_3(Q)$ uno spazio euclideo a tre dimensioni appartenente a S_4.

Per un punto Q_0 di S_3 passa una sola normale $\boldsymbol{b}$ ad S_3 (vettore in S_4) che definisce l'orientazione di S_3 in S_4. L'equazione di S_3 (in S_4) è manifestamente

$$(Q - Q_0) \times \boldsymbol{b} = 0. \tag{1}$$

Se $Q_1 Q_2 Q_3$ sono tre punti di questo S_3, si ha

$$(Q_1 - Q_0) \times \boldsymbol{b} = 0, \quad (Q_2 - Q_0) \times \boldsymbol{b} = 0, \quad (Q_3 - Q_0) \times \boldsymbol{b} = 0;$$

dalle quali (supposte indipendenti) si trae

$$\boldsymbol{b} = m\mathrm{E}(Q_1 - Q_0,\ Q_2 - Q_0,\ Q_3 - Q_0),$$

essendo m un fattore di proporzionalità [1].

---

[1] Dati tre vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, in S_4, il vettore $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3)$ è quella ***funzione lineare e alternata*** di $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3$ tale che soddisfa alla proprietà

$$\boldsymbol{u} \times \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3) = \mathrm{A}m(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3)$$

Ora sia P un punto del S_4 esterno al S_3 considerato. La proiezione di $P - Q$ sulla normale a S_3 è

$$d = (P - Q) \times b = (P - Q_0) \times b - (Q - Q_0) \times b,$$

ossia per la (1)

$$d = (P - Q) \times b = (P - Q_0) \times b. \tag{2}$$

Questa grandezza è dunque la stessa qualunque sia il punto Q di S_3; si chiamerà perciò *la distanza di* P *dallo spazio* S_3.

Consideriamo adesso la curva (c) luogo dei $P(s)$ del S_4. Indicheremo con t il versore della tangente, e posto

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = \frac{n_1}{\rho}, \qquad (s \text{ è l'arco}) \tag{3}$$

n_1, che è perpendicolare a t, sarà detto il versore della *prima normale principale* (o senz'altro la prima normale principale).

Sia ora P_1 un punto della tangente (Pt), P_2 un punto della normale (Pn_1) e P_3 un altro punto di (c), tutti molto vicini a P. Lo spazio S_3 definito da questi quattro punti è rappresentato da

$$(Q - P) \times \mathrm{E}(P_1 - P,\ P_2 - P,\ P_3 - P) = 0.$$

Ma $P_1 - P = \varepsilon_1 t$, $P_2 - P = \varepsilon_2 n_1$, e quindi per la linearità di E viene

$$(Q - P) \times \mathrm{E}(t,\ n_1,\ P_3 - P) = 0.$$

D'altra parte

$$P_3 = P(s + h) = P(s) + hP'(s) + \frac{h^2}{2} P''(s) + \frac{h^3}{3!} P'''(s) + \dots$$

ossia

$$P_3 - P = ht + \frac{h^2}{2\rho} n_1 + \frac{h^3}{3!} P'''(s) + \dots;$$

perciò a meno d'infinitesimi del quart'ordine risulta

$$(Q - P) \times \mathrm{E}(t,\ n,\ P''') = 0. \tag{4}$$

---

qualunque sia il vettore u, ove il secondo membro indica il volume del parallelepipedo tetradimensionale i cui spigoli sono definiti in grandezza e direzione da u, $u_1 u_2 u_3$ (a meno del segno che cambia secondo l'ordine dei vettori). Si ha

$$u_1 \times \mathrm{E}(u_1 u_2 u_3) = 0, \quad u_2 \times \mathrm{E}(u_1 u_2 u_3) = 0, \quad u_3 \times \mathrm{E}(u_1 u_2 u_3) = 0$$

epperò $\mathrm{E}(u_1 u_2 u_3)$ è perpendicolare ai tre vettori da cui dipende. Risulta inoltre che è zero quando due dei vettori sono uguali o proporzionali. Nel S_3, $\mathrm{E}(u_1 u_2)$ coincide con u_1, u_2.

È l'equazione del S_3 che diremo *osculatore alla curva in* P. Se $\boldsymbol{b}$ e il versore di E, $\boldsymbol{b}$ sarà detta la *binormale.*

Sia poi $\boldsymbol{n}_2$ (in S_4) perpendicolare a $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{b}$, in guisa che si abbia

$$\mathrm{A}m(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2 .\ \boldsymbol{b}) = +1\,;$$

sarà detta *la seconda normale principale.* Ne segue

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{b}. \tag{4'}$$

Dalla (3) si deduce

$$P''' = \left(\frac{1}{\rho}\right)' \boldsymbol{n}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds}\,;$$

perciò segue

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ P''') = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{E}\left(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds}\right);$$

e siccome questo E deve avere per versore $\boldsymbol{b}$ (4'), dovrà essere necessariamente

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} = -\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau_1}\,\boldsymbol{n}_2 . \tag{3'}$$

Il primo coefficiente risulta dal fatto che è

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} \times \boldsymbol{t} = -\,\boldsymbol{n}_1 \times \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = -\frac{1}{\rho}.$$

Il vettore $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ è perpendicolare a $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{n}_1$, perchè

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{b} = 0,\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{t} = -\,\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{b} = 0,\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{n}_1 = -\,\boldsymbol{b} \times \frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} = 0 .$$

per conseguenza sarà

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{\tau_2}\,\boldsymbol{n}_2 . \tag{3''}$$

Infine dalle (4'), per la linearità di E, si deduce

$$\mathrm{E}\left(\frac{d\boldsymbol{t}}{ds},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\right) + \mathrm{E}\left(\boldsymbol{t},\ \frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds},\ \boldsymbol{n}_2\right) + \mathrm{E}\left(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}\right) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\,;$$

ossia per le formule precedenti

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}\right) = \frac{1}{\tau_2}\,\boldsymbol{n}_2 .$$

Ma essendo

$$\frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}\times\boldsymbol{n}_3=0,\quad \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}\times\boldsymbol{t}=0,\quad \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}\times\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}_2\times\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds}=-\frac{1}{\tau_1},$$

ne risulta necessariamente

$$(3''')\qquad \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds}=-\frac{1}{\tau_1}\boldsymbol{n}_1-\frac{1}{\tau_2}\boldsymbol{b};$$

giacchè deve essere $E(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{b})=\boldsymbol{n}_2$.

Le (3), (3′), (3″), (3‴) sono le note *formule di Frenet*, dedotte qui con considerazioni di carattere geometrico.

L'interpretazione dei coefficienti $1/\rho$, $1/\tau_1$, $1/\tau_2$ quali curvature si fa al modo solito. Indicando con θ, γ, α, β rispettivamente gli angoli che fanno le due tangenti infinitamente vicine in P e $P+dP$, le due binormali, le due prime normali principali e le seconde normali, si trova

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{1}{\tau_2},\quad \frac{d\alpha}{ds}=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau_1^2}},\quad \frac{d\beta}{ds}=\sqrt{\frac{1}{\tau_1^2}+\frac{1}{\tau_2^2}}.$$

Infine con l'uso delle formule precedenti si trova facilmente

$$P'''=-\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{t}+\left(\frac{1}{\rho}\right)'\boldsymbol{n}_1+\frac{1}{\rho\tau_1}\boldsymbol{n}_2;$$

epperò, se P_1 è un punto di (c) vicinissimo a P, si deduce

$$(P_1-P)\times\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{h^3}{3!}+\dots$$

$$(P_1-P)\times\boldsymbol{n}_2=\frac{1}{\rho\tau_1}\frac{h^3}{3!}+\dots$$

le quali mostrano che le distanze di P_1 dagli spazi S_3' e S_3'' normali a $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_2$ sono infinitesimi del terzo ordine (mentre, come abbiamo visto, la distanza dello spazio osculatore S_3 è del quarto ordine).

I ragionamenti si potrebbero seguitare passando da S_4 a un S_5; ma qui non ci occorrono.

Ciò che risulta dall'esame fatto si è che una curva piana (c) in uno spazio S_n si può far passare con successive deformazioni, come se fosse un filo *sui generis* flessibile e inestendibile, nello spazio S_3, poi nel S_4 e così via, aggiungendo ogni volta una nuova curvatura. Questo non è più vero per le superficie, come si vedrà nel paragrafo seguente.

§ 2. Superficie.

2. Passiamo ora alle superficie. E dapprima sia (Σ) una superficie luogo dei punti P immersa in un S_3 euclideo. Su di essa sia tracciata una doppia famiglia di linee ortogonali.

In una certa regione di (Σ), alla quale si riferiscono i nostri ragionamenti, riterremo che s_1 e s_2 siano gli archi di coteste curve, epperò s_1 e s_2 saranno le coordinate curvilinee di P (ossia $P(s_1, s_2)$). Porremo per comodo

$$\frac{\partial P}{\partial s_1} = P_1' = a_1, \quad \frac{\partial P}{\partial s_2} = P_2' = a_2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s_1^2} = P_{11}'', \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_1 \partial s_2} = P_{12}'', \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_2^2} = P_{22}''.$$

I vettori a_1 e a_2 sono unitari. Lo spostamento dP sulla superficie, che fa passare dal punto P al punto $P + dP$, è dato da

$$dP = \frac{\partial P}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial P}{\partial s_2} ds_2 = a_1 ds_1 + a_2 ds_2 .$$

Ammettiamo che in ogni punto della regione considerata ci sia una normale unica e determinata $n = a_1 \wedge a_2$. La curvatura della (Σ) in P è definita dai due raggi di curvatura r_1 e r_2, coi quali si esprimono la curvatura media e la curvatura gaussiana.

Sia Q un punto di (Σ) vicino a P; la grandezza $(Q - P) \times n$ misura la distanza di Q dal piano tangente in P. Posto $Q = P(s_1 + h_1, s_2 + h_2)$, si ha

$$Q = P(s_1, s_2) + P_1' h_1 + P_2' h_2 + \frac{1}{2}(h_1^2 P_{11}'' + 2h_1 h_2 P_{12}'' + h_2^2 P_{22}'') + \ldots, \tag{5}$$

da cui risulta che la distanza sudetta è infinitesima del second'ordine rispetto a h_1 e h_2.

Se il sistema ortogonale sopra considerato è quello delle linee di curvatura, sussistono le seguenti formule che fanno riscontro a quelle di Frenet per le curve:

$$\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dP} a_1 = \frac{\partial a_1}{\partial s_1} = \frac{1}{g_1} a_2 - \frac{1}{r_1} n, \qquad &&\frac{da_1}{dP} a_2 = \frac{\partial a_1}{\partial s_2} = \frac{1}{g_2} a_2 \\
&\frac{da_2}{dP} a_1 = \frac{\partial a_2}{\partial s_1} = -\frac{1}{g_1} a_1, &&\frac{da_2}{dP} a_2 = \frac{\partial a_2}{\partial s_2} = -\frac{1}{g_2} a_1 - \frac{1}{r_2} n \\
&\frac{dn}{dP} a_1 = \frac{\partial n}{\partial s_1} = \frac{a_1}{r_1}, &&\frac{dn}{dP} a_2 = \frac{\partial n}{\partial s_2} = \frac{a_2}{r_2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Le quantità r_1, r_2, g_1, g_2 (raggi di curvatura tangenziale) soddisfano ad equazioni che, sotto altra forma dell'ordinaria, sono quelle di CODAZZI e di GAUSS ([1]).

Ora pensiamo che l'S_3 appartenga a un S_4. Si può deformare la (Σ) dandole nuove curvature, in guisa da farla passare in S_4, come s'è già fatto per le curve?

Due elementi contigui $d\Sigma$ e $d_1\Sigma$ della superficie, i quali appartengono allo stesso S_3, dovrebbero dopo cotesta deformazione appartenere a due S_3 diversamente orientati, ma di pochissimo, a meno d'infinitesimi del terzo ordine almeno. Orbene, supponiamo che la (Σ) appartenga effettivamente al S_4, e il dP abbia ancora l'espressione sopra scritta. Siano poi, in S_4, $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_2$ due versori normali fra di loro e ad $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$; cioè normali al piano tangente. I vettori P_{11}'', P_{12}'', P_{22}'' si esprimono linearmente mediante la quaterna $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$; ed essendo

$$P_{ij}'' \times \boldsymbol{a}_1 = 0, \quad P_{ij}'' \times \boldsymbol{a}_2 = 0 \qquad (i, j = 1, 2)$$

come risulta derivando le relazioni $\boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_2^2 = 1$, $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = 0$, si ha precisamente

$$P_{11}'' = l\boldsymbol{n}_1 + m\boldsymbol{n}_2, \quad P_{12}'' = p\boldsymbol{n}_1 + q\boldsymbol{n}_2, \quad P_{22}'' = f\boldsymbol{n}_1 + g\boldsymbol{n}_2.$$

Ora consideriamo lo spazio S_3 definito dal piano tangente in P e da un punto Q di (Σ) vicinissimo a P. Sia $\boldsymbol{n}$ il vettore normale a S_3, che definisce perciò l'orientazione di S_3 in S_4. La distanza di Q da S_3 è $(Q - P) \times \boldsymbol{n}$, ossia, per i precedenti sviluppi,

$$\frac{1}{2}(h_1^2 P_{11}'' + 2h_1h_2P_{12}'' + h_2^2 P_{22}'') \times \boldsymbol{n} + \ldots$$

che è della forma

$$h(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}) + k(\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}) + \ldots$$

ove h e k sono del secondo ordine rispetto a h_1 e k_2. Affinchè questa distanza fosse del terzo ordine per ogni Q vicinissimo a P, occorrerebbe che risultasse

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n} = 0$$

insieme a $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{n} = 0$; cosa assurda. *Non esiste dunque un* S_3 *osculatore in* P *a* (Σ). La distanza dei punti Q da P non può essere del secondo ordine; e questo compete a tutti gli S_3 che contengono il piano

---

([1]) P. BURGATTI, *Analisi vettoriale generale*, Vol. II; *Geometria differenziale*, Parte I, pag. 51.

tangente. Esisterebbe nel caso che i vettori P_{11}'', P_{12}'', P_{22}'' fossero paralleli. Noi tralasciamo questo caso.

Queste conclusioni rispondono negativamente alla domanda posta in principio, quando si rimanga nel caso generale.

3. Ora considerando una superficie generica nel S_4, che indicheremo con $(\Sigma_{2,4})$, passiamo ad esaminare le sue curvature. Sia $n_1(P)$ un versore normale al piano tangente in P e variabile con continuità da punto a punto della superficie. Il vettore dn_1, che definisce a meno d'infinitesimi del secondo ordine l'incremento di n_1 nel passaggio da P a $P+dP$, non sarà in massima diretto parallelamente al piano tangente. Invece il vettore

$$(dn_1 \times a_1)a_1 + (dn_1 \times a_2)a_2$$

è *tangenziale*. Si chiama il *differenziale superficiale di* n_1, giacchè gode di proprietà analoghe a quelle dell'ordinario differenziale [1]. Lo indicheremo con $d_s n_1$. Essendo $n_1^2 = 1$, viene appunto $n_1 \times d_s n_1 = 0$. L'omografia

$$\sigma_1 = \frac{d_s n_1}{dP}$$

tale che sia

$$\sigma_1(dP) = \frac{d_s n_1}{dP}\, dP = d_s n_1$$

si chiama la *derivata superficiale di* n_1. Si ha manifestamente $\sigma_1 n_1 = 0$. Dippiù, da $n_1^2 = 1$ si trae anche

$$\operatorname{grad}_s (n_1 \times n_1) = 0,$$

ossia sviluppando [2]

$$\mathrm{K}\frac{d_s n_1}{dP}\, n_1 = \mathrm{K}\sigma_1 n_1 = 0.$$

Si noti inoltre che $\sigma_1 a_1$ e $\sigma_1 a_2$ sono vettori tangenziali; perchè posto

$$a_1 = h dP, \quad a_2 = k\delta P,$$

si ha

$$\sigma_1 a_1 = h\sigma_1 dP = h d_s n, \quad \sigma_1 a_2 = k\delta_s n.$$

Considerando poi un *secondo versore normale* n_2 e perpendicolare a n_1,

---

(1) Boggio, *Geometria differenziale*, Parte II.

(2) Per il *gradiente superficiale* vale la formula analoga a quella del gradiente ordinario:

$$\operatorname{grad}_s (u \times u) = \mathrm{K}\frac{d_s u}{dP}\, u + \mathrm{K}\frac{d_s u}{dP}\, u.$$

introdurremo anche l'omografia

$$\sigma_2 = \frac{d_s \boldsymbol{n}_2}{dP}.$$

Avremo come sopra

$$\sigma_2 \boldsymbol{n}_2 = 0, \quad K\sigma_2 \boldsymbol{n}_2 = 0,$$

e $\sigma_2 \boldsymbol{a}_1$, $\sigma_2 \boldsymbol{a}_2$ son vettori tangenziali.

Dalla relazione $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = 0$ si deduce

$$\operatorname{grad}_\sigma (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) = K\sigma_1 \boldsymbol{n}_2 + K\sigma_2 \boldsymbol{n}_1 = 0;$$

e da questa, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_2$, si ottiene

$$\boldsymbol{n}_1 \times \sigma_2 \boldsymbol{n}_1 = 0, \quad \boldsymbol{n}_2 \times \sigma_1 \boldsymbol{n}_2 = 0.$$

Ne consegue che tanto $\sigma_1 \boldsymbol{n}_2$ e $\sigma_2 \boldsymbol{n}_1$, quanto $K\sigma_1 \boldsymbol{n}_2$ e $K\sigma_2 \boldsymbol{n}_1$, se non sono nulli, sono *vettori tangenziali.* Ma vedremo presto che son nulli.

Siano ora dP e δP due spostamenti. Da

$$\boldsymbol{n}_1 \times dP = 0, \quad \boldsymbol{n}_1 \times \delta P = 0$$

si deduce con manifesto significato dei simboli

$$\delta_s \boldsymbol{n}_1 \times dP + \boldsymbol{n}_1 \times \delta_s dP = 0, \quad d_s \boldsymbol{n}_1 \times \delta P + \boldsymbol{n}_1 \times d_s \delta P = 0,$$

e quindi per sottrazione

$$\delta_s \boldsymbol{n}_1 \times dP = 0, \quad d_s \boldsymbol{n}_1 \times \delta P = 0, \qquad (d_s \delta P = \delta_s dP)$$

ossia

$$\sigma_1(\delta P) \times dP - \sigma_1(dP) \times \delta P = 0,$$

od anche

$$(K\sigma_1 - \sigma_1) dP \times \delta P = 0$$

per qualunque coppia dP, δP. Ma per le cose dette essendo $(K\sigma_1 - \sigma_1)dP$ tangenziale, ne viene di necessità $K\sigma_1 = \sigma_1$. Con ragionamento analogo si deduce $K\sigma_2 = \sigma_2$. In conclusione: *le omografie σ_1 e σ_2 sono dilatazioni.*

Ne segue dalle cose dette che *ogni vettore si trasforma per mezzo delle σ_1 e σ_2 in vettore tangenziale.* Infatti posto

$$\boldsymbol{n} = l\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_2 + p\boldsymbol{n}_1 + q\boldsymbol{n}_2$$

viene

$$\sigma_1 \boldsymbol{n} = l\sigma_1 \boldsymbol{a}_1 + m\sigma_1 \boldsymbol{a}_2 + q\sigma_1 \boldsymbol{n}_2$$
$$\sigma_2 \boldsymbol{n} = l\sigma_2 \boldsymbol{a}_1 + m\sigma_2 \boldsymbol{a}_2 + p\sigma_2 \boldsymbol{n}_1,$$

che sono somme di vettori tangenziali. Si deduce ancora

$$\sigma_1 \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{a}_1 = \sigma_1 \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = 0$$
$$\sigma_1 \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{a}_2 = \sigma_1 \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{n}_2 = 0,$$

perciò $\sigma_1 \boldsymbol{n}_2 = 0$. Analogamente $\sigma_2 \boldsymbol{n}_1 = 0$.

Possiamo dunque considerare σ_1 e σ_2 come omografie piane operanti sui vettori nel piano tangente in P.

4. Siano $\boldsymbol{c}_{11}$, $\boldsymbol{c}_{12}$ le direzioni unite di σ_1, e $\boldsymbol{c}_{21}$, $\boldsymbol{c}_{22}$ quelle di σ_2. Si avrà per definizione

$$\sigma_1\boldsymbol{c}_{11}=\frac{\boldsymbol{c}_{11}}{r_{11}},\quad \sigma_2\boldsymbol{c}_{21}=\frac{\boldsymbol{c}_{21}}{r_{12}}$$
(7)
$$\sigma_1\boldsymbol{c}_{12}=\frac{\boldsymbol{c}_{12}}{r_{12}},\quad \sigma_2\boldsymbol{c}_{22}=\frac{\boldsymbol{c}_{22}}{r_{22}}.$$

Consideriamo le due normali $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_1+d\boldsymbol{n}_1$ in P e $P+dP$. Se s'incontrano in un punto Q dev'essere

$$Q=P-r\boldsymbol{n}_1=(P+dP)-r(\boldsymbol{n}_1+d\boldsymbol{n}_1),$$

ossia

$$dP=rd\boldsymbol{n}_1.$$

Ma $d\boldsymbol{n}_1$ non è tangenziale come dP. Affinchè questa uguaglianza potesse stare, bisognerebbe sostituire $d_s\boldsymbol{n}_1$ a $d\boldsymbol{n}_1$, ossia $\boldsymbol{n}_1+d_s\boldsymbol{n}_1$ alla normale $\boldsymbol{n}_1+d\boldsymbol{n}_1$. Ciò facendo si verrebbe a commettere un errore d'infinitesimi del secondo ordine. Infatti si ha

$$(\boldsymbol{n}_1+d_s\boldsymbol{n}_1)\times(\boldsymbol{n}_1+d\boldsymbol{n}_1)=1+d_s\boldsymbol{n}_1\times d\boldsymbol{n}_1,$$

essendo $\boldsymbol{n}_1\times d_s\boldsymbol{n}_1=0$, $\boldsymbol{n}_1\times d\boldsymbol{n}_1=0$. Si può dunque concludere che a meno d'infinitesimi del secondo ordine si ha la relazione

$$dP=rd_\sigma\boldsymbol{n}_1$$

e quindi

$$\sigma_1(dP)=\frac{1}{r}\,dP;$$

la quale dà il significato di r_{11} e r_{12}, che si possono chiamare i *raggi di curvatura di* (Σ) *relativi alla normale* $\boldsymbol{n}_1$. Così dicasi relativamente alla $\boldsymbol{n}_2$.

Riguardo agli invarianti di σ_1 e σ_2 si ha per cose note

(8) $$\mathrm{I}_1\sigma_1=\frac{1}{r_{11}}+\frac{1}{r_{12}}=M_1,\quad \mathrm{I}_1\sigma_2=\frac{1}{r_{21}}+\frac{1}{r_{22}}=M_2$$

che si possono chiamare rispettivamente le *curvature medie relative alle direzioni normali* $\boldsymbol{n}_1$ *e* $\boldsymbol{n}_2$; e inoltre

(8') $$\mathrm{I}_2\sigma_1=\frac{1}{r_{11}r_{12}}=K_1,\quad \mathrm{I}_2\sigma_2=\frac{1}{r_{21}r_{22}}=K_2$$

che si possono chiamare le *curvature totali relative alle normali* $\boldsymbol{n}_1$ *e* $\boldsymbol{n}_2$.

5. Consideriamo adesso altre due direzioni normali e perpendicolari fra loro:

$$\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{n}_1 \cos\theta + \boldsymbol{n}_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\boldsymbol{n}_i' = -\boldsymbol{n}_1 \operatorname{sen}\theta + \boldsymbol{n}_2 \cos\theta.$$

Posto $\dfrac{d_s\boldsymbol{n}_i}{dP} = \sigma_i$, $\dfrac{d_s\boldsymbol{n}_i'}{dP} = \sigma_i'$, risulta manifestamente [1]

$$\sigma_i = \cos\theta \cdot \sigma_1 + \operatorname{sen}\theta \cdot \sigma_2, \quad \sigma_i' = -\operatorname{sen}\theta \cdot \sigma_1 + \cos\theta \cdot \sigma_2,$$

e quindi, per quanto riguarda le curvature medie,

$$M_i = \cos\theta \cdot M_1 + \operatorname{sen}\theta \cdot M_2, \quad M_i' = -\operatorname{sen}\theta \cdot M_1 + \cos\theta \cdot M_2.$$

Si deduce subito

(9) $$M_i^2 + M_i'^2 = M_1^2 + M_2^2;$$

il che vuol dire che $M_1^2 + M_2^2$ *è indipendente dalla coppia ortogonale* $\boldsymbol{n}_1$ *e* $\boldsymbol{n}_2$ *di normali che si scelgono.*

Dalle stesse relazioni si deduce

$$\sigma_i^2 = \sigma_i'^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2;$$

e per conseguenza anche

$$\mathrm{I}_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \quad \text{ossia} \quad \mathrm{I}_1\sigma_1^2 + I_1\sigma_2^2,$$

è indipendente dalla coppia di normali. Ora σ_1^2 e σ_2^2 hanno le stesse direzioni unite di σ_1 e σ_2, e risulta precisamente

$$\sigma_1^2 c_{11} = \frac{1}{r_{11}^2} c_{11}, \quad \sigma_1^2 c_{12} = \frac{1}{r_{12}^2} c_{12} \ldots \text{ecc.} \ldots;$$

per conseguenza si ha

$$\mathrm{I}_1\sigma_1^2 = \frac{1}{r_{11}^2} + \frac{1}{r_{12}^2} = M_1^2 + 2K_1$$

$$\mathrm{I}_1\sigma_2^2 = \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{22}^2} = M_2^2 + 2K_2.$$

Dunque la quantità

(10) $$M_1^2 + M_2^2 + 2(K_1 + K_2)$$

---

[1] Qui si deriva come se θ fosse costante, il che si può fare. Invero sussiste la formula generale

$$\frac{d_s(m\boldsymbol{v})}{dP} = m\frac{d_s\boldsymbol{v}}{dP} + \mathrm{H}(\operatorname{grad}_s m, \boldsymbol{v}_s),$$

ove $\boldsymbol{v}_s$ indica la componente tangenziale di $\boldsymbol{v}$. Nel caso presente $\boldsymbol{v}$ andrebbe sostituito con $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{n}_2$ le cui componenti tangenziali son nulle.

è indipendente dalla coppia di normali. Perciò valendo tale indipendenza per $M_1^2 + M_2^2$, vale anche per $K_1 + K_2$. Si conclude pertanto: *le grandezze* $\mathrm{M}_1^2 + \mathrm{M}_2^2$ *e* $K_1 + K_2$ *non dipendono dalla coppia (ortogonale) di normali alla superficie.* Perciò a queste grandezze daremo il nome di *curvature proprie,* la prima (oppure $\pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$) può dirsi *media,* la seconda *gaussiana.*

6. Cerchiamo la direzione normale n_i per la quale

$$M_i = \cos\theta \cdot M_1 + \operatorname{sen}\theta \cdot M_2$$

è massima o minima. Dovrà soddisfare alla condizione

$$-\operatorname{sen}\theta \cdot M_1 + \cos\theta \cdot M_2 = 0;$$

perciò è definita da

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}, \quad \cos\theta = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}.$$

Ad essa corrisponde la curvatnra media

$$M_i = \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Alla direzione ortogonale n_i' corrisponde la curvatura media nulla. Si conclude pertanto:

Esiste una normale $\boldsymbol{n}$ *a cui corrisponde la curvatura media propria; alla normale* $\boldsymbol{n}'$ *ortogonale ad* $\boldsymbol{n}$ *corrisponde la curvatura media nulla.*

Queste due normali $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n}'$ sono perciò privilegiate, e converrà in massima nello studio della superficie riferirsi a queste. Sarà detta *la coppia delle normali principali.*

Indicheremo con σ e σ' le omografie corrispondenti; con $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_1'$ e $\boldsymbol{c}_2'$ rispettivamente le loro direzioni unite; R_1 e R_2, R_1' e R_2' i raggi di curvatura. Si avrà

$$(11) \qquad \begin{aligned} \sigma \boldsymbol{c}_1 &= \frac{\boldsymbol{c}_1}{R_1}, \quad \sigma' \boldsymbol{c}_1' = \frac{\boldsymbol{c}_1'}{R_1'} \\ \sigma \boldsymbol{c}_2 &= \frac{\boldsymbol{c}_2}{R_2}, \quad \sigma' \boldsymbol{c}_3' = \frac{\boldsymbol{c}_2'}{R_2'}. \end{aligned}$$

Allora

$$(12) \qquad M = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

è *la curvatura media propria,* e dovrà risultare

$$\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = 0.$$

Se fosse $\frac{1}{R_1'} = 0$, $\frac{1}{R_2'} = 0$, la σ' sarebbe nulla, perchè applicata a qualunque vettore tangenziale o non tangenziale darebbe zero. Dobbiamo dunque ammettere che sia

$$\frac{1}{R_1'} = -\frac{1}{R_2'} \neq 0.$$

Posto $R_1' = -R_2' = R'$, *la curvatura propria gaussiana acquista la forma*

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R'}\right)^2. \tag{13}$$

In base a ciò dobbiamo scrivere

$$\sigma' \boldsymbol{c}_1' = \frac{\boldsymbol{c}_1'}{R'}, \quad \sigma' \boldsymbol{c}_2' = \frac{\boldsymbol{c}_2'}{R'}. \tag{14}$$

Poniamo

$$\boldsymbol{c}_1' = \cos\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen}\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2, \quad \boldsymbol{c}_2' = -\operatorname{sen}\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 + \cos\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2;$$

risulta sostituendo

$$\cos\gamma \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen}\gamma \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_2 = \frac{\cos\gamma}{R'} \boldsymbol{c}_1 + \frac{\operatorname{sen}\gamma}{R'} \boldsymbol{c}_2$$

$$-\operatorname{sen}\gamma \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_1 + \cos\gamma \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_2 = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{R'} \boldsymbol{c}_1 - \frac{\cos\gamma}{R'} \boldsymbol{c}_2,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \sigma' \boldsymbol{c}_1 &= \frac{1}{R'} (\cos 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen} 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2) \\ \sigma' \boldsymbol{c}_2 &= \frac{1}{R'} (\operatorname{sen} 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 - \cos 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Ne segue

$$\sigma' \boldsymbol{c}_1 \times \sigma' \boldsymbol{c}_2 = 0, \quad (\sigma' \boldsymbol{c}_1)^2 = (\sigma' \boldsymbol{c}_2)^2 = \frac{1}{R'^2}.$$

Si vede allora che *la* σ' *trasforma ogni coppia di vettori tangenziali ortogonali in un'altra coppia di vettori tangenziali ortogonali.* Infatti, presi i due vettori

$$\boldsymbol{a} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{c}_2, \quad \boldsymbol{b} = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{c}_1 + \cos\alpha \cdot \boldsymbol{c}_2,$$

e fatta la moltiplicazione scalare dei due vettori

$$\sigma' \boldsymbol{a} = \cos\alpha \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_2, \quad \sigma' \boldsymbol{b} = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_1 + \cos\alpha \cdot \sigma' \boldsymbol{c}_2,$$

si trova in virtù delle precedenti

$$\sigma' \boldsymbol{a} \times \sigma' \boldsymbol{b} = 0.$$

Si deduce inoltre

$$(\sigma' \boldsymbol{a})^2 = \frac{1}{R'^2}, \quad (\sigma' \boldsymbol{b})^2 = \frac{1}{R'^2};$$

perciò la σ' trasforma tutti i versori in vettori di modulo uguale al valore assoluto di $1/R'$.

7. Posto $dP = Q \quad P$, consideriamo nel piano tangente le coniche

$$\sigma(Q - P) \times (Q - P) = 1$$
$$\sigma'(Q' - P) \times (Q' - P) = 1,$$

che sono le *coniche indicatrici di* σ *e* σ'. I loro assi sono rispettivamente lungo le direzioni unite di σ e σ'. Riferendosi a questi poniamo

$$Q \quad P = x\boldsymbol{c}_1 + y\boldsymbol{c}_2, \quad Q' - P = x'\boldsymbol{c}_1' + y'\boldsymbol{c}_2'.$$

Coteste equazioni diventano

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 1, \quad x'^2 - y'^2 = R'. \tag{16}$$

La *prima indicatrice* può essere una ellisse o una iperbole: la *seconda indicatrice* è una iperbole equilatera. Per esprimere questo fatto diremo che *i punti di una generica superficie in* S_4 *sono equiperbolici*. Ma si distinguono in due categorie: superficie, o regioni di superficie, a *punti equiperbolici-iperbolici*, e superficie a *punti equiperbolici-ellittici*.

Se due direzioni tangenziali dP e δP soddisfano in P alla condizione

$$\sigma(dP) \times \delta P = 0 \tag{17}$$

si diranno *coniugate relativamente ad* $\boldsymbol{n}$; se soddisfano all'altra condizione

$$\sigma'(dP) \times \delta P = 0 \tag{17'}$$

si diranno *coniugate relativamente ad* $\boldsymbol{n}'$. Considerate come equazioni differenziali, definiscono su (Σ) la doppia famiglia di curve coniugate relativamente ad $\boldsymbol{n}$ o ad $\boldsymbol{n}'$ (1).

Una direzione dP sarà *autoconiugata relativamente ad* $\boldsymbol{n}$ *o ad* $\boldsymbol{n}'$ se soddisfa a una delle condizioni

$$\sigma(dP) \times dP = 0, \quad \sigma'(dP) \times dP = 0. \tag{18}$$

(1) Il sistema di curve le cui tangenti in ogni punto sono $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$, oppure $\boldsymbol{c}_1'$ e $\boldsymbol{c}_2'$, sono ad un tempo ortogonali e coniugate relativamente ad $\boldsymbol{n}$, o ad $\boldsymbol{n}$.

Considerate come equazioni differenziali definiscono *le curve autoconiugate relativamente a* n *o a* n'.

Per le cose dette di sopra si vede che le prime esistono per le sole superficie a punti equiperbolici-iperbolici, le *seconde esistono sempre*, e formano una doppia famiglia che in ogni punto sono tangenti agli asintoti della iperbole equilatera indicatrice.

8. Quest' ultime curve godono di una proprietà importante e caratteristica. Osserviamo che $(Q-P)\times n'$ rappresenta la distanza del punto Q di $(\Sigma_{2,4})$ vicinissimo a P dallo spazio $S_3(c_1, c_2, n)$, la cui orientazione è definita precisamente dalla normale n'. Si ha per gli sviluppi fatti in principio (n.° 2)

$$(Q-P)\times n' = \frac{1}{2}(h_1^2 P_{11}'' + 2h_1h_2P_{12}'' + h_2^2P_{22}'')\times n' + \ldots .$$

Vediamo se questo trinomio può essere nullo per qualche direzione $\frac{h_2}{h_1} = \operatorname{tang}\alpha$. Porremo dunque

$$(P_{11}'' + 2P_{12}''\operatorname{tang}\alpha + P_{22}''\operatorname{tang}^2\alpha)\times n' = 0.$$

Supporremo la $(\Sigma_{2,4})$ riferita alle linee che in ogni punto sono tangenti a c_1 e c_2. Abbiamo

$$P_{11}''\times n' = \frac{\partial c_1}{\partial s_1}\times n' = \frac{dc_1}{dP}c_1\times n' = -\mathrm{K}\frac{dc_1}{dF}n'\times c';$$

ma essendo

$$\operatorname{grad}_s(n'\times c_1) = \mathrm{K}\frac{dn'}{dP}c_1 + \mathrm{K}\frac{dc_1}{dP}n' = 0,$$

risulta

$$\mathrm{K}\frac{dc_1}{dP}n'\times c' = -\sigma' c_1\times c_1.$$

Così dicasi per gli altri prodotti scalari; cosicchè tenendo conto delle (15) si deduce

$$P_{11}''\times n' = -\frac{\cos 2\gamma}{R'},\quad P_{12}''\times n' = -\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'},\quad P_{22}''\times n' = \frac{\cos 2\gamma}{R'}.$$

Sostituendo nella precedente equazione, si trova

$$\cos 2\gamma + 2\operatorname{sen} 2\gamma\cdot\operatorname{tang}\alpha + \cos 2\gamma\cdot\operatorname{tang}^2\alpha = 0,$$

ossia

$$\cos^2\alpha\cos 2\gamma + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha\cos 2\gamma = 0,$$

equivalente a

$$\cos(2\alpha - 2\gamma) = 0.$$

Deduciamo dunqne

$$\alpha = \gamma + \frac{\pi}{4}.$$

Queste direzioni sono quelle appunto degli asintoti della iperbole equilatera indicatrice. Si conclude pertanto: *lungo le curve autoconiugate relativamente a* $\boldsymbol{n}'$ *lo spazio* $S_3(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{n})$ *è osculatore a meno d'infinitesimi del terzo ordine*. Per questa ragione coteste curve si potranno chiamare le *asintotiche di* $(\Sigma_{2,4})$. Esistono sempre e formano un sistema ortogonale.

Un calcolo identico si può ripetere per determinare quelle direzioni $\operatorname{tang}\alpha$ rispetto alle quali è osculatore lo spazio $S_3(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{n})$. Si trova subito

$$P_{11}'' \times \boldsymbol{n} = -\sigma \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_1 = -\frac{1}{R_1}$$

$$P_{22}'' \times \boldsymbol{n} = -\sigma \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{c}_2 = -\frac{1}{R_2}$$

$$P_{12}'' \times \boldsymbol{n} = 0,$$

e perciò l'equazione del secondo grado in $\operatorname{tang}\alpha$ scritta di sopra (cambiato $\boldsymbol{n}'$ in $\boldsymbol{n}$), diventa

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\operatorname{tang}^2\alpha = 0.$$

Queste direzioni, quando sono reali, sono quelle degli asintoti della iperbole indicatrice, ossia le direzioni autoconiugate relativamente ad $\boldsymbol{n}$. Pertanto si conclude: *nelle regioni a punti equiperbolici-iperbolici, lungo le curve autoconiugate relativamente a* $\boldsymbol{n}$ *lo spazio* $S_3(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{n}')$ *è osculatore.*

Anche a queste curve compete perciò il nome di *asintotiche.* Ma occorre distinguerle dalle precedenti; epperò le prime si potranno chiamare *asintotiche proprie,* le seconde *asintotiche improprie,* volendo intendere con l'aggettivo *improprie* che possono essere reali o immaginarie.

9. Consideriamo le asintotiche proprie. Dal primo teorema del numero precedente segne che $\boldsymbol{n}'$ in P è la binormale a coteste asintotiche uscenti da P. perciò in virtù della (3'') si ha

$$\frac{d\boldsymbol{n}'}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}_2}{\tau_2},$$

essendo τ_2 la seconda torsione e s l'arco. Ponendo $\frac{dP}{ds} = \boldsymbol{t}$, viene

$$\frac{d_s\boldsymbol{n}'}{dP}\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{n}_2}{\tau_2}, \quad \text{ossia} \quad \sigma'\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{n}_2}{\tau_2}.$$

Poichè l'angolo che t fa con la direzione c_1 è stato trovato al n.° 7 essere $\gamma + \frac{\pi}{4}$, possiamo scrivere

$$t = \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)c_1 + \operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)c_2;$$

da cui ricaviamo, in virtù delle (15),

$$\begin{aligned}\sigma' t = & \frac{\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)}{R'}(\cos 2\gamma \cdot c_1 + \operatorname{sen} 2\gamma \cdot c_2) \\ & + \frac{\operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)}{R'}(\operatorname{sen} 2\gamma \cdot c_1 - \cos 2\gamma \cdot c_2) \\ & = \frac{1}{R'}\left[\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)c_1 + \operatorname{sen}\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)c_2\right].\end{aligned}$$

Dopo ciò si ottiene

$$\left(\frac{1}{\tau_2}\right)^2 = \sigma' t \times \sigma' t = \left(\frac{1}{R'}\right)^2.$$

Dunque *il quadrato della seconda torsione delle asintotiche proprie uguaglia la curvatura totale relativa ad* n'. È un teorema simile a quello di ENNEPER per le superficie ordinarie di un S_3.

Parecchi altri teoremi si possono dedurre con facilità dalle formule e considerazioni stabiliti nei numeri precedenti; ma qui non ne diremo altro.

10. Resta a vedere se esistono direzioni coniugate tanto relativamente ad n quanto ad n'. Bisognerà che dP e δP soddisfino alle due condizioni

$$\sigma(dP) \times \delta P = 0, \quad \sigma'(dP) \times \delta P = 0;$$

il che richiede che sia

$$\sigma(dP) = h \cdot \sigma'(dP).$$

Poniamo

$$dP \equiv \cos\varphi \cdot c_1 + \operatorname{sen}\varphi \cdot c_2,$$

ed usiamo le (11) e le (15); otteniamo

$$\frac{\cos\varphi}{R_1}c_1 + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R_2}c_2 =$$

$$= h\left[\cos\varphi\left(\frac{\cos 2\gamma}{R'}c_1 + \frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}c_2\right) + \operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}c_1 - \frac{\cos 2\gamma}{R'}c_2\right)\right]:$$

perciò la precedente condizione si scinde nelle seguenti:

$$\frac{\cos\varphi}{R_1} = h\,\frac{\cos(2\gamma-\varphi)}{R'}, \quad \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R_2} = h\,\frac{\operatorname{sen}(2\gamma-\varphi)}{R'}.$$

Eliminando h, risulta

$$\frac{R_1}{R_2}\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}(2\gamma-\varphi),$$

che determina φ; dopo di che si può calcolare h.

Quest'equazione è del secondo grado in $\operatorname{tang}\varphi$. Se R_1 e R_2 sono d'ugual segno, il discriminante è positivo; se sono di segno opposto, per la realità delle radici si richiede che sia

$$(1-\rho)^2 \geq 4\rho\operatorname{tang}^2 2\gamma \qquad \left(\rho = -\frac{R_1}{R_2}\right).$$

Si conclude pertanto: *nelle regioni a punti equiperbolici-ellittici esiste una doppia famiglia di curve coniugate tanto rispetto a* $\boldsymbol{n}$ *quanto a* $\boldsymbol{n}'$; *può non esistere nei punti equiperbolici-iperbolici.* Si diranno *le curve biconiugate.*

Per le ordinarie superficie di un S_3 accade che i piani tangenti in P e $P+dP$ s'intersecano lungo una retta, che è la direzione coniugata alla direzione di dP. Questo non accade per le superficie $(\Sigma_{2,4})$ in S_4, perchè in un S_4 due piani non s'intersecano necessariamente lungo tutta una retta.

Consideriamo il piano tangente in P alla $(\Sigma_{2,4})$, Essa è rappresentato dalle due equazioni

$$(Q-P)\times\boldsymbol{n} = 0, \quad (Q-P)\times\boldsymbol{n}' = 0,$$

essendo Q i punti del piano; giacchè esse rappresentano rispettivamente gli spazi S_3 definiti dalle terne $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{n}')$ e $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{n})$. Analogamente le due equazioni

$$(Q-P+dP)\times(\boldsymbol{n}+\sigma(dP)) = 0$$
$$(Q-P-dP)\times(\boldsymbol{n}'+\sigma'(dP)) = 0$$

rappresentano il piano tangente in $P+dP$. Combinando queste con le precedenti risulta, a meno d'infinitesimi del secondo ordine,

$$(Q-P)\times\sigma(dP) = 0, \quad (Q-P)\times\sigma'(dP) = 0.$$

Di qui, e dalle considerazioni precedenti, si deduce che *solo nel caso in cui* dP *sia una delle direzioni biconiugate i due piani s'intersecano lungo una retta, che è l'altra direzione biconiugata a quella.*

Questa è una proprietà caratteristica delle curve biconiugate.

11. Per il lettore che voglia far raffronti con altri lavori, nei quali è usato il metodo classico (dico classico in contrapposto al metodo dell'analisi vettoriale) aggiungeremo che lo sviluppo in coordinate generali di tutta la teoria porta manifestamente a formule contenenti i coefficienti e le loro derivate delle tre espressioni quadratiche differenziali

$$\begin{aligned} ds^2 = dP \times dP &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ \sigma_1(dP) \times dP &= D_1 du^2 + 2D du dv + D_2 dv^2 \\ \sigma_2(dP) \times dP &= D_1' du^2 + 2D' du dv + D_2' dv^2, \end{aligned}$$

in accordo con quanto ha esposto il prof. TONOLO. Ma il lettore stesso avrà notato dalle cose esposte che l'uso sistematico di quelle non è opportuno.

Se s'immagina la superficie riferita alle linee principali le cui tangenti in ogni punto sono $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$; posto

$$dP = \sqrt{E}\boldsymbol{c}_2 du + \sqrt{G}\boldsymbol{c}_2 dv,$$

viene

(20)
$$\sigma(dP) = \frac{\sqrt{E}}{R_1} \boldsymbol{c}_2 du + \frac{\sqrt{G}}{R_2} \boldsymbol{c}_2 dv$$

$$\sigma'(dP) = \frac{\sqrt{E}}{R'} (\cos 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen} 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2) du + \frac{\sqrt{G}}{R'} (\operatorname{sen} 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_1 - \cos 2\gamma \cdot \boldsymbol{c}_2) dv,$$

e quindi

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

(20')
$$\sigma(dP) \times dP = \frac{E}{R_1} du^2 + \frac{G}{R_2} dv^2$$

$$\sigma'(dP) \times dP = \frac{1}{R'} (E \cos 2\gamma \cdot du^2 + 2\sqrt{EG} \operatorname{sen} 2\gamma \cdot du dv - G \cos 2\gamma \cdot dv^2) \ (^1).$$

Vogliamo ora determinare le derivate di $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ e $\boldsymbol{n}$ seconde le direzioni $\boldsymbol{c}_1$ o $\boldsymbol{c}_2$ (ossia rispetto ad u e v) in forma esplicita ed espressiva. Si ha intanto

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{c}_1 &= d_s\boldsymbol{c}_1 + (d\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (d\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{n}')\boldsymbol{n}' \\ &= d_s\boldsymbol{c}_1 - (\boldsymbol{c}_1 \times d\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{c}_1 \times d\boldsymbol{n}')\boldsymbol{n}', \end{aligned}$$

dalla quale si deduce (²)

(21)
$$\frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP} = \frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP} - \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{n}\right) - \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}'}{dP}\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{n}'\right).$$

(¹) Questa ha il discriminante negativo.

(²) Si noti che è

$$\left(\boldsymbol{c}_1 \times \frac{d\boldsymbol{n}}{dP} dP\right)\boldsymbol{n} = \left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_1 \times dP\right)\boldsymbol{n} = \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{n}\right)dP, \text{ ecc.}$$

Similmente risulta

$$
(21')\qquad \begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}=\frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}-\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_2,\,\boldsymbol{n}\right)-\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}'}{dP}\boldsymbol{c}_2,\,\boldsymbol{n}'\right),\\
&\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}=\sigma+\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{n}',\,\boldsymbol{n}'\right).
\end{aligned}
$$

Applicando quest' ultima ai vettori $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$ si ottiene per le (11)

$$
(\mathrm{I})\qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{\boldsymbol{c}_1}{R_1}+p\boldsymbol{n}',\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{c}_2=\frac{\boldsymbol{c}_2}{R_2}+q\boldsymbol{n}'.
$$

Osserviamo ora che $\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1$, $\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_2=-\frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_1$, $\frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2$ sono vettori tangenziali, e che a causa delle relazioni $\boldsymbol{c}_1^2=\boldsymbol{c}_2^2=1$, $\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2=0$ si ha

$$
\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_1=0,\quad \frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2\times\boldsymbol{c}_2=0,\quad \frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2=-\frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_1
$$

$$
\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_2\times\boldsymbol{c}_2=-\frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2\times\boldsymbol{c}_1;
$$

ne consegue

$$
\begin{aligned}
&\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{g_1}\boldsymbol{c}_2 \qquad \frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_1=-\frac{1}{g_1}\boldsymbol{c}_1\\
&\frac{d_s\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{g_2}\boldsymbol{c}_2 \qquad \frac{d_s\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2=-\frac{1}{g_2}\boldsymbol{c}_1,
\end{aligned}
$$

i cui coefficienti g_1 e g_2 hanno le espressioni che vedremo poi.

Dopo ciò dalla prima delle (21) si deduce

$$
\frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{g_1}\boldsymbol{c}_2-(\sigma\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{n}-(\sigma'\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{n}'
$$

ossia per le (11) e (13)

$$
\frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{g_2}\boldsymbol{c}_2-\frac{1}{R_1}\boldsymbol{n}-\frac{\cos 2\gamma}{R'}\boldsymbol{n}'.
$$

Così proseguendo si ottiene subito il seguente *gruppo di formule*:

$$
(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{g_1}\boldsymbol{c}_2-\frac{1}{R_1}\boldsymbol{n}-\frac{\cos 2\gamma}{R'}\boldsymbol{n}'\\
&\frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_2=\frac{1}{g_2}\boldsymbol{c}_2-\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\boldsymbol{n}'
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{III})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_1=-\frac{1}{g_1}\boldsymbol{c}_1-\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\boldsymbol{n}'\\
&\frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2=-\frac{1}{g_2}\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{R_2}\boldsymbol{n}+\frac{\cos 2\gamma}{R'}\boldsymbol{n}'.
\end{aligned}\right.
$$

Le quantità

$$\frac{1}{g_1}=\frac{d_s c_1}{dP}c_1\times c_2=\frac{dc_1}{dP}c_1\times c_2$$
$$\frac{1}{g_2}=\frac{d_s c_1}{dP}c_2\times c_2=\frac{dc_1}{dP}c_2\times c_2,$$

si possono chiamare, per analogia con la teoria delle ordinarie superficie, le *curvature tangenziali* delle linee principali prese qui come linee coordinate. La loro esplicita espressione mediante E e G si calcola subito dalla condizione

$$\frac{\partial P_1'}{\partial v}=\frac{\partial P_2'}{\partial u},\quad \text{essendo}\quad P_1'=\sqrt{E}c_1,\quad P_2'=\sqrt{G}c_2.$$

Viene

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}c_1+\sqrt{E}\frac{\partial c_1}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}c_2+\sqrt{G}\frac{\partial c_2}{\partial u};$$

da cui

$$\sqrt{E}\frac{\partial c_1}{\partial v}\times c_2=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad \sqrt{G}\frac{\partial c_2}{\partial u}\times c_1=\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

ossia (1)

$$\frac{1}{g_2}=\frac{dc_1}{dP}c_2\times c_2=\frac{1}{\sqrt{GE}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad -\frac{1}{g_1}=\frac{dc_2}{dP}c_1\times c_1=\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Infine alle (I) aggiungiamo le seguenti che si ottengono come quelle:

$$\text{(I')}\qquad \frac{dn'}{dP}c_1=\sigma'c_1-pn,\quad \frac{dn'}{dP}c_2=\sigma'c_2-qn,$$

ove $\sigma' c_1$ e $\sigma' c_2$ son date dalle (15). Se poi si volessero le derivate delle c_1' e c_2', non c'è che da derivare le relazioni $c_1'=\cos\gamma\cdot c_1+\operatorname{sen}\gamma\cdot c_2$, ecc. e valersi delle (II) e (III).

12. Naturalmente le (I), (I'), (II) e (II') devono soddisfare alle condizioni d'integrabilità. La condizione

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 n'}{\partial v\partial u},$$

---

(1) Si noti che per un vettore w qualunque si ha

$$\frac{dw}{dP}c_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{dw}{dP}c_2=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

dà le seguenti equazioni:

$$\frac{p}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos 2\gamma}{R'}\right)+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\right)+\frac{2}{R'}\left(\frac{\cos 2\gamma}{g_2}-\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{g_1}\right)$$

$$\frac{q}{R_1}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\right)-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\right)+\frac{2}{R'}\left(\frac{\cos 2\gamma}{g_1}+\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{g_2}\right)$$

$$\frac{\partial(\sqrt{E}p)}{\partial v}-\frac{\partial(\sqrt{G}q)}{\partial u}=\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'}\sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Le due prime forniscono le funzioni p e q finora incognite; la terza è una equazione del tipo dell'equazioni di CODAZZI.

L'altra condizione d'integrabilità relativa ad n dà le due equazioni

$$-p\operatorname{sen} 2\gamma+q\cos 2\gamma=\frac{R'}{g_1}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{R'}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

$$p\cos 2\gamma+q\operatorname{sen} 2\gamma=-\frac{R'}{g_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)-\frac{R'}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_2}\right).$$

che sono pure del tipo CODAZZI. Le rimanenti due condizioni danno in più la sola equazione

$$\frac{1}{R_1R_2}-\left(\frac{1}{R'}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{g_1}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{g_2}\right)\right],$$

che è l'*equazione di Gauss*. Tutte queste sono, in forma più esplicita ed espressiva, le stesse equazioni indicate dal prof. TONOLO nella Memoria citata.

Sopra una equazione funzionale e la sua applicazione a un problema di fisica ereditaria.

Memoria di D. GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Viene dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione di una equazione funzionale del tipo di* VOLTERRA. *Di tale risultato si fa poi una applicazione a una questione d'induzione magnetica o dielettrica in cui si tiene conto dell'ereditarietà.*

A questo proposito si pongono alcune considerazioni sui fenomeni ereditari e si dimostra in modo completo un teorema di unicità sulle equazioni dell'induzione magnetica o dielettrica in presenza di ereditarietà.

In alcuni studi sui fenomeni ereditari, o meglio sui fenomeni d'induzione magnetica o dielettrica ho incontrato l'equazione funzionale:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t)) + F(t, \ \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha \boldsymbol{I}(\tau)). \tag{1}$$

In questa equazione $\boldsymbol{I}(t)$ è un vettore incognito e $\boldsymbol{H}(t)$ un vettore noto funzione continua della variabile (scalare) t, α una omografia vettoriale costante, $f(\boldsymbol{H} + \alpha \boldsymbol{I})$ un vettore funzione continua del vettore $\boldsymbol{H} + \alpha \boldsymbol{I}$, $F(t, \ \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha \boldsymbol{I}(\tau))$ un vettore dipendente da t e dalla funzione continua di τ, $\boldsymbol{H}(\tau) + \alpha \boldsymbol{I}(\tau)$ data nell'intervallo $(0, t)$ cioè un funzionale (o una funzione di varietà vettoriale secondo la denominazione di una mia nota) (¹) del vettore $\boldsymbol{H}(\tau) + \alpha \boldsymbol{I}(\tau)$.

Per il mio studio era necessario dimostrare almeno l'esistenza di una soluzione nell'equazione ora scritta, e questo l'ho potuto fare in base a un recente lavoro del prof. TONELLI (²), il quale ha dimostrato l'esistenza e varie proprietà delle soluzioni dell'equazione funzionale:

$$\Phi(x) = f(x) + A(x, \ \Phi_0^x(y)). \tag{2}$$

(¹) « Rendiconti Accademia dei Lincei », II sem., 1927, pag. 383.

(²) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, « Bulletin of the Calcutta Mathematical Society », vol. XX, 1928.

(In questa equazione $\Phi(y)$ era una funzione ordinaria incognita, $f(x)$ la funzione nota, A un simbolo di funzionale).

Per maggiore generalità ho considerato l'equazione funzionale:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t)) + F(t, \ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}(\tau)) \tag{3}$$

in cui α, β, α', β' sono omografie vettoriali costanti e limitate (con α' mai nulla) e gli altri simboli hanno lo stesso significato che per la (1). Estendendo a questa equazione i metodi del TONELLI sono riuscito a dimostrare l'esistenza della soluzione e a studiarne le proprietà. Ciò sarà l'argomento della prima parte di questa nota, mentre nella seconda parte farò le applicazioni dei risultati ottenuti all'accennato problema di fisica ereditaria. Anzi a questo proposito esporrò qualche considerazione generale sull'applicazione dei metodi ereditari e dimostrerò liberandolo da alcune restrizioni d'indole matematica un teorema di unicità che già avevo ottenuto in una nota precedente [1].

Tornando all'equazione (3) vorrei fare alcune osservazioni. Anzitutto noterò che la (3) generalizza la (2) per doppia ragione. In primo luogo perchè per la presenza della funzione $f(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t))$ il legame funzioni incognite e funzioni note è più complesso, in secondo luogo perchè essendo equazione vettoriale equivale a un sistema di tre equazioni scalari con tre incognite (le componenti di $\boldsymbol{I}(t)$).

Anzi poichè si può supporre senza difficoltà che le $\boldsymbol{I}(t)$ e $\boldsymbol{H}(t)$ siano vettori in uno spazio a n dimensioni la (3) equivale a un sistema di n equazioni scalari con n incognite, e in particolare l'equazione:

$$\boldsymbol{I}(t) = \beta \boldsymbol{H}(t) + F(t, \ \boldsymbol{I}_0^t(\tau))$$

equivale a un sistema di equazioni del tipo (2). Noterò poi che senza togliere la generalità alla questione supporremo t variabile nell'intervallo (0, 1) e che supporremo (fino ad avvertenza in contrario) il funzionale definito per ogni t sopra tutti i vettori funzioni continue di τ nell'intervallo $(0, t)$ e in modulo minori di un numero positivo a.

Nella nota citata del TONELLI si suppone definito il funzionale per ogni t anche sui vettori funzioni continue di τ in qualunque intervallo (τ_1, τ_2) di (0, 1). Siccome nelle applicazioni che farò questi funzionali non risultano, almeno in modo facile, definibili, ho modificato lievemente il procedimento del TONELLI, per risolvere l'equazione (2) in modo da evitare questa difficoltà.

---

[1] « Rendiconti Accademia dei Lincei », II sem., 1927, pag. 595.

Ho poi anche modificato più che altro per rapidità di dimostrazione e per le applicazioni che avevo in vista le ipotesi del TONELLI sul funzionale, sostituendole però con altre in esse contenute.

***

1. Prima di risolvere la (3) esponiamo le ipotesi fondamentali.

Ammettiamo anzitutto che l'equazione:

$$\boldsymbol{I} = f(\beta \boldsymbol{H} + \alpha \boldsymbol{I}) \tag{4}$$

abbia una soluzione per ogni vettore $\beta\boldsymbol{H}$ e questa soluzione che indicheremo con $\varphi(\beta\boldsymbol{H})$ sia unica e continua rispetto a qualsiasi vettore $\beta\boldsymbol{H}$ [1] e perciò se $\boldsymbol{H}$ dipende in modo continuo da t, sia continua anche rispetto a t [2].

Riguardo al funzionale supporremo che soddisfi alle seguenti condizioni che verranno indicate con (C_1), (C_2), (C_3) [3].

1°) Esiste un numero M tale che per ogni t di $(0, 1)$ e per ogni vettore $\boldsymbol{y}(\tau)$ continuo in $(0, t)$ e in modulo minore di a sia:

$$(C_1) \qquad | F(t, \boldsymbol{y}_0^t(\tau)) | \leq Mt.$$

2°) Ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponda nn $\rho > 0$ tale che per ogni vettore continuo in $(0, t_2)$, in modulo minore di a e per ogni $(t_2 - t_1) < \rho$ con $(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1)$ sia:

$$(C_2) \qquad | F(t_2, \boldsymbol{y}_0^{t_2}(\tau)) - F(t_1, \boldsymbol{y}_0^{t_1}(\tau)) | \leq \varepsilon.$$

3°) Preso un qualunque $\varepsilon > 0$ è possibile trovare in corrispondenza di ε un numero σ tale che per ogni t di $(0, 1)$ e per ogni $|\boldsymbol{y}_1(\tau)| < a$,

---

[1] Con ciò s'intende che esista per ogni $\boldsymbol{u}$ la soluzione dell'equazione $\boldsymbol{I} = f(\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{I})$ e che tale soluzione sia continua rispetto a $\boldsymbol{u}$.

[2] Nel caso particolare $f(\beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}(t)) = \beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}(t)$ si ha per la (4)

$$\boldsymbol{I}(t) = \beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}(t).$$

Ossia:

$$(1 - \alpha)\boldsymbol{I}(t) = \beta\boldsymbol{H}(t)$$

allora se $(1 - \alpha)$ non è degenere si può scrivere:

$$\boldsymbol{I}(t) = (1 - \alpha)^{-1}\beta\boldsymbol{H}(t)$$

cioè esiste la soluzione della (4) ed è continua rispetto a $\beta\boldsymbol{H}$.

[3] Notiamo che le lettere in grassetto significano come è d'uso vettore e che un vettore posto fra due linee verticali significherà sempre il modulo del vettore stesso.

$y_2(\tau) \,| < a$ continui in $(0,\, t)$ con $|\, y_1(\tau) - y_2(\tau)\,| < \sigma$ sempre in $0,\, t$ sia:

$$(C_3) \qquad |\, F(t,\, y_{1}{}_0^t(\tau)) - F(t,\, y_{2}{}_0^t(\tau))\,| \leq \varepsilon \ (^1).$$

In seguito avremo da considerare spesso il funzionale $F(t-h,\, y_0^{t-h}(\tau))$ essendo h una quantità positiva indipendente da t e da $y(\tau)$. Il funzionale risulta definito per $t > h$. Supporremo che per $t \leq h$ sia questo funzionale nullo. Comunque per esso vale sempre la (C_2) qualunque sia h. Essa vale

(1) Il TONELLI nella sua nota fa tre ipotesi equivalenti alle seguenti e che contengono quelle già fatte.

1°) Esiste un numero M_1 tale che per ogni t di $(0,\, 1)$ e per ogni intervallo $(\tau_1,\, \tau_2)$ di $(0,\, 1)$ e per ogni $y(\tau)$ continua in $(\tau_1,\, \tau_2)$ e in modulo minore di a sia:

$$(C_1') \qquad |\, F(t,\, y_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau))\,| \leq M_1(\tau_2 - \tau_1).$$

(Ricordiamo che nella nota del TONELLI è definito il funzionale esteso all'intervallo $\tau_1,\, \tau_2$).

2°) Esiste un numero M_2 tale che per ogni t di $(0,\, 1)$ per ogni terna $(\tau_1,\, \tau_2,\, \tau_3)$ $(0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3)$ e per ogni $y(\tau)$ continua in $(\tau_1,\, \tau_3)$ sia

$$(C_2') \qquad |\, F(t,\, y_{\tau_1}^{\tau_3}(\tau)) - F(t,\, y_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau))\,| \leq M_2(\tau_3 - \tau_2).$$

3°) Ad ogni $\varepsilon > 0$ si può fare corrispondere un $\rho > 0$ in modo che se è $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ e $t_2 - t_1 < \rho$ e se $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$ sono due vettori continui inferiori in modulo ad a in $\tau_1 .\ \tau_2$ e tali che sempre in $(\tau_1,\, \tau_2)$ sia $|\, y_1(\tau) - y_2(\tau)\,| < \rho$ essendo $(\tau_1,\, \tau_2)$ un qualunque intervallo di $(0,\, 1)$ risulti:

$$(C_3') \qquad |\, F(t_1,\, y_{1}{}_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau)) - F(t_2,\, y_{2}{}_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau))\,| \leq \varepsilon(\tau_2 - \tau_1).$$

Le condizioni (C_1) e (C_3) da me poste sono un ovvia conseguenza delle (C_1') e (C_3') qui scritte. Basta infatti per avere la mia (C_1) pone in questa (C_1') $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t$ e la (C_3) ponendo in (C_3'), $t_1 = t_2 = t$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t$ e ricordare che t è sempre minore di 1.

Quanto alla mia (C_2) si deve notare che preso un numero $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ad arbitrio è possibile trovare un δ' tale che per ogni $t_2 - t_1 < \delta'$ e per ogni $y(\tau)$ continua e minore di a in modulo per $(0 \leq \tau \leq t_2)$ sia:

$$|\, F(t_2,\, y_0^{t_2}(\tau)) - F(t_2,\, y_0^{t_1}(\tau))\,| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciò è una conseguenza della (C_2') prendendo $\delta' = \frac{\varepsilon}{2M_2}$. Si ha poi dalla (C_3') per ogni $t_2 - t_1 < \delta''$ convenientemente scelto e per ogni $y(\tau)$ continua in $(0,\, t_2)$

$$|\, F(t_2,\, y_0^{t_1}(\tau)) - F(t_1,\, y_0^{t_1}(\tau))\,| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, t_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora detto ρ il numero inferiore fra δ', δ' si ha per ogni $(t_1,\, t_2)$ di $(0,\, 1)$ tali che $t_2 - t_1 < \rho$ e per ogni $|\, y(\tau)\,|$ in modulo minore di a

$$|\, F(t_2,\, y_0^{t_2}(\tau)) - F(t_1,\, y_0^{t_1}(\tau))\,| \leq |\, F(t_2,\, y_0^{t_2}(\tau)) - F(t_2,\, y_0^{t_1}(\tau))\,| +$$
$$+\, |\, F(t_2,\, y_0^{t_1}(\tau)) - F(t_1,\, y_0^{t_1}(\tau))\,| \leq \varepsilon \qquad \text{c. d. d.}$$

ovviamente per $t_1 > h$ e per $t_2 < h$ nel primo caso perchè il funzionale coincide con quello già considerato, nel secondo caso poichè il valore di tale funzionale si deve considerare nullo sia per t_1 che per t_2. Invece per $t_1 \leq h \leq t_2$ si ha che (ricordando la (C_1):

$$(5) \qquad \begin{aligned} &| F(t_2 - h,\ y_0^{t_2-h}(\tau)) - F(t_1 - h,\ y_0^{t_1-h}(\tau)) | = \\ &= | F(t_2 - h,\ y_0^{t_2-h}(\tau)) | \leq M(t_2 - h) \leq M(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

perciò la (C_2) è soddisfatta per il funzionale $F(t-h,\ y_0^{t-h}(\tau))$, purchè preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio si abbia cura di prendere il corrispondente ρ minore anche di $\frac{\varepsilon}{M}$, perchè in questo modo, come mostra la (5), si soddisfa alla (C_2) anche per $F(t-h,\ y_0^{t-h}(\tau))$.

Passiamo ora ad enunciare una proprietà delle omografie vettoriali di cui dovremo far uso. Questa proprietà consiste nell'esistenza di due numeri K, K' positivi o al più nulli tali che essendo u un vettore qualsiasi (1):

$$| \alpha u | \leq K | u | \qquad | \alpha' u | \leq K' | u | .$$

Il numero K' deve però essere diverso da zero per l'ipotesi fatta su α'.

Supponiamo infine che sia:

$$(5 \text{ bis}) \qquad K' | \varphi(\beta \boldsymbol{H}(0)) | + | \beta \boldsymbol{H}(0) | < a.$$

Allora ci sarà possibile dimostrare che esiste un intervallo $(0,\ l)$ in cui l'equazione (3) ammette soluzione.

2. A questo scopo si costruiscano le funzioni $\boldsymbol{I}_n(t)$ (n intero e positivo, tali che siano soluzioni dell'equazione):

$$(6) \qquad \boldsymbol{I}_n(t) = f(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}_n(t)) + F\left(t - \frac{1}{n},\ \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)}}\right)$$

---

(1) Proviamo ciò per αu. Si ha infatti con le solite notazioni vettoriali:

$$\alpha u^2 = \alpha u \times \alpha u = K\alpha\alpha u \times u.$$

Ricordando che la $K\alpha\alpha$ è dilatazione, indicando con A, B. C le sue componenti principali, e con u_1, u_2, u_3 le componenti di u sugli assi di $K\alpha\alpha$ e si ha

$$(\alpha u)^2 = Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 \leq A | u_1^2 + | B\ u_2^2 + | C\ u_3^2 .$$

Ponendo K^2 uguale al maggiore fra gli $|A|$, $|B|$, $C|$, si ha

$$(\alpha u)^2 \leq K^2 u^2$$

da cui:

$$| \alpha u | \leq K | u | \qquad \text{c. d. d.}$$

intendendo, come si è detto, nullo il funzionale in cui l'estremo superiore $t - \frac{1}{n}$ risulta negativo $\left(\text{cioè per } t < \frac{1}{n}\right)$. É facile trovare una soluzione della (6) nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{n}\right)$. In questo caso il funzionale è nullo e si ha:

$$I_n(t) = \varphi(\beta \boldsymbol{H}(t)). \tag{7}$$

Per trovare la soluzione per $t > \frac{1}{n}$ occorre anzitutto dimostrare che le $\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)$ per tutto l'intervallo $0, t - \frac{1}{n}$ si mantengono in modulo minori di a, altrimenti i funzionali che compaiono nelle nostre equazioni non sarebbero definiti. Proveremo ora che sarà possibile trovare un intervallo $(0, l)$ tale che per ogni t di $(0, l)$ siano le $|\beta' \boldsymbol{H}(\tau)| + |\alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)| < a$ [1] e quindi a maggior ragione sia $|\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)| < a$, il che assicura la possibilità di risolvere la (6) almeno per t in $(0, l)$.

Per fare questa scelta di l osserviamo che essendo per ipotesi:

$$K' |\varphi(\beta \boldsymbol{H}(0))| + |\beta' \boldsymbol{H}(0)| < a$$

la differenza fra a e $K' |\varphi(\beta \boldsymbol{H}(0))| + |\beta' \boldsymbol{H}(0)|$ sarà positiva e verrà indicata con 2δ. Allora poichè $\varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + \boldsymbol{u})$ e $\beta' \boldsymbol{H}(t)$ sono per ipotesi funzioni continue di $\boldsymbol{u}$ e t (essendo $\boldsymbol{u}$ un vettore generico) sarà possibile trovare un l tale che esso sia minore di $\frac{\delta}{K'M}$ che per ogni $t \leq l$ e per ogni $|\boldsymbol{u}| \leq KMl$ sia:

$$|K' \varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + \boldsymbol{u})| + |\beta' \boldsymbol{H}(t)| < a - \delta.$$

Sarà perciò anche, sempre per t in $(0, l)$ e $|\boldsymbol{u}| \leq KMl$,

$$|K' \varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + \boldsymbol{u})| + |\beta' \boldsymbol{H}(t)| + K'Ml < a. \tag{8}$$

Ciò posto dimostriamo che se è $t \leq l$ e nell'intervallo $0, t - \frac{1}{n}$ la $|\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)|$ è minore di a quella proprietà è vera anche per ogni t in $0, t$.

In questo caso i funzionali che appaiono nella (6) sono definiti, perchè stabiliti su funzioni in modulo minori di a. Si può risolvere facilmente la (6)

---

[1] O più precisamente $|\beta \boldsymbol{H}(\tau) + K' | \boldsymbol{I}_n(\tau)| < a$.

scrivendola nel seguente modo:

$$\boldsymbol{I}_n(t) - F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right) =$$

$$= f\left[\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right) - \right.$$

$$\left. - \alpha F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right) + \alpha \boldsymbol{I}_n(t)\right]$$

e prendendo come incognita la $\boldsymbol{I}_n(t) - F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right)$.

Si trova così:

$$\boldsymbol{I}_n(t) = \varphi\left(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right)\right) + \tag{9}$$

$$+ F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right).$$

Ora poichè in $0,\ t - \frac{1}{n}$, $|\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)|$ è per ipotesi minore di a, risulta per la (C_1)

$$\left| F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right)\right| \leq M\left(t - \frac{1}{n}\right) < Mt \leq Ml.$$

Posto perciò:

$$u = \alpha F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right)$$

si ha:

$$|u| \leq KMl.$$

Si ha così, ricordando la (8) e facendo ovvi passaggi:

$$|\beta' \boldsymbol{H}(t)| + |\alpha' \boldsymbol{I}_n(t)| \leq K' |\varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + u)| + |\beta' \boldsymbol{H}(t)| +$$

$$+ K' \left| F\left(t - \frac{1}{n},\ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right)\right| < a$$

il che dimostra quanto si è asserito.

Ora in $0, \frac{1}{n}$ la (6) è risolubile e di più si trova [1]:

$$|\beta' \boldsymbol{H}(t)| + |\alpha' \boldsymbol{I}_n(t)| \leq K' |\varphi(\beta \boldsymbol{H}(t))| + |\beta' \boldsymbol{H}(t)| < a$$

perciò per quanto si è dimostrato la $|\beta' \boldsymbol{H}(t)| + |\alpha' \boldsymbol{I}_n(t)|$ è minore di a anche per t compreso fra $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}$ purchè sia $\frac{2}{n} < l$. Così proseguendo, cioè applicando il metodo d'induzione completa, si trova che la $|\beta' \boldsymbol{H}(\tau)| + |\alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)|$ è minore di a in tutto $(0, l)$ e quindi che la (6) è risolubile in tutto $(0, l)$.

Dl più per la (9) risulta

$$|\boldsymbol{I}_n(t)| \leq |\varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + \boldsymbol{u})| + Ml < \frac{a - |\beta' \boldsymbol{H}(t)| - K'Ml}{K'} + Ml.$$

Da ciò si deduce (essendo $\boldsymbol{H}(t)$ limitata in tutto $(0, 1)$) che le $\boldsymbol{I}_n(t)$ sono ugualmente limitate in $(0, l)$.

Dimostriamo ora che le $\boldsymbol{I}_n(t)$ risultano in $(0, l)$ ugualmente continue.

Perciò consideriamo le funzioni:

$$\boldsymbol{X}_n(t) = F\left(t - \frac{1}{n}, \ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n}}{\underset{\theta}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)\right).$$

Poichè il funzionale è definito su un vettore inferiore ad a si può applicare la (C_2) generalizzata alla $F(t-h, y_0^{t-h}(\tau))$. Si ottiene così per ogni t_2, t_1 di $(0, l)$ tali che $t_2 - t_1 < \rho$ e per ogni n

$$|\boldsymbol{X}_n(t_2) - \boldsymbol{X}_n(t_1)| < \varepsilon$$

il che dimostra l'uguale continuità della $\boldsymbol{X}_n(t)$. Anche:

$$\boldsymbol{Z}_n(t) = \varphi(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{X}_n(t))$$

risultano funzioni ugualmente continue. Infatti per la continuità di $\varphi(\boldsymbol{u})$ è possibile trovare un η tale che per ogni $|\boldsymbol{v}| < \eta$ sia

$$|\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{u})| < \varepsilon.$$

E per l'uguale continuità delle $\boldsymbol{X}_n(t)$ è possibile trovare un ρ' tale che per ogni $|t_2 - t_1| < \rho'$, (t_2, t_1) in $0, l)$ e per ogni n sia:

$$|\beta \boldsymbol{H}(t_2) - \beta' \boldsymbol{H}(t_1) + \alpha \boldsymbol{X}_n(t_2) - \alpha \boldsymbol{X}_n(t_1)| < \eta.$$

---

[1] S'intende se $\frac{1}{n} \leq l$, oppure per l'intervallo $(0, l)$ se $l < \frac{1}{n}$.

Da ciò segue l'uguale continuità delle $\boldsymbol{Z}_n(t)$ in $(0, l)$. Perciò le $\boldsymbol{I}_n(t) = \boldsymbol{X}_n(t) + \boldsymbol{Z}_n(t)$ risultano ugualmente continue in tutto $(0, l)$. Ora essendo i vettori $\boldsymbol{I}_n(t)$ in $(0, l)$ ugualmente limitati e ugualmente continui, si può estrarre [1] da essi almeno una successione $\boldsymbol{I}_{n_1}(t), \boldsymbol{I}_{n_2}(t), \dots \boldsymbol{I}_{n_m}(t), \dots$ che converga uniformemente verso un vettore $\boldsymbol{I}_\infty(t)$ continuo e ugualmente limitato come le $\boldsymbol{I}_n(t)$ [2]. Questa $\boldsymbol{I}_\infty(t)$ è almeno in $(0, l)$ soluzione della (3). Si ha che:

$$\begin{aligned}(10)\qquad & |\boldsymbol{I}_\infty(t) - f(\beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}_\infty(t)) - F(t, \beta\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha\boldsymbol{I}_\infty(\tau))| \leq \\ & \leq |\boldsymbol{I}_\infty(t) - \boldsymbol{I}_{n_m}(t)| + |f(\beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}_\infty(t)| - f(\beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}_{m_n}(t)) + \\ & + \left|F(t, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_\infty(\tau)) - F\left(t - \frac{1}{n_m}, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_{n_m}(\tau)\right)\right|.\end{aligned}$$

Ora preso un numero $\varepsilon > 0$ è possibile scegliere un m' tale che per ogni $m > m'$ e per ogni t in $(0, l)$ siano i due primi termini del secondo membro della (10) minori rispettivamente di $\frac{\varepsilon}{3}$. Ciò è possibile in base all'uniforme convergenza delle $\boldsymbol{I}_{n_m}(t)$ verso $\boldsymbol{I}_\infty(t)$ e per la continuità della $f(u)$.

Quanto all'ultimo termine del secondo membro di (10) esso risulta minore di:

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \left|F(t, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_\infty(\tau)) - F\left(t - \frac{1}{n_m}, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_\infty(\tau)\right)\right| + \\ & + \left|F\left(t - \frac{1}{n_m}, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_\infty(\tau)\right) - F\left(t - \frac{1}{n_m}, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \overset{t-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}_{n_m}(\tau)\right)\right|.\end{aligned}$$

Ora il primo termine di questa espressione può essere reso minore di $\frac{\varepsilon}{6}$ prendendo m maggiore di un conveniente m'' e ciò per la (C_2) [3]. Quanto

---

[1] Ciò sarà mostrato in appendice I.

[2] E quindi sarà anche $|\beta'H(t)| + |\alpha'\boldsymbol{I}_\infty(t)| \leq a$, perciò sono definiti i funzionali contenenti $\boldsymbol{I}_\infty(t)$.

[3] Cioè si suppone di aver scelto un m'' così grande che sia per ogni $m > m''$, $\frac{1}{n_m}$ minore del ρ nella (C_2) corrispondente a $\frac{\varepsilon}{6}$ e minore anche di $\frac{\varepsilon}{6M}$ per poter comprendere l'intervallo $\left(0, \frac{1}{n_m}\right)$ in cui $F\left(t - \frac{1}{n_m}, \beta'H(\tau) \overset{t-\frac{1}{n_m}}{\underset{0}{+}} \alpha' I_{m_n}(\tau)\right)$ risulta nullo.

all'altro termine si osservi anzitutto che preso un ρ ad arbitrio per l'uniforme convergenza delle $I_{m_n}(t)$ verso $I_\infty(t)$ si può trovare un m''' tale che in tutto $(0,\, l)$ sia per ogni $m > m'''$

$$| \alpha' I_\infty(t) - \alpha' I_{n_m}(t) | \leq K' \, | I_\infty(t) - I_{n_m}(t) | \leq \sigma .$$

Ora per la (C_3) si può scegliere σ in modo tale che il secondo termine della espressione (11) risulti minore di $\frac{\varepsilon}{6}$. Ne consegue allora che preso un m maggiore del più grande fra m', m'', m''', il primo membro della (10) diventa inferiore ad un numero ε. Per l'arbitrarietà di ε il termine al primo membro di (10) risulta nullo e ciò dimostra che la $I_\infty(t)$ è soluzione della (3).

3. Passiamo ora a dare qualche criterio per l'unicità.

Ammettiamo queste due nuove condizioni (C_4), (C_5).

Esiste un numero M' tale che per ogni t di $(0,\, 1)$ per ogni t_1 di $(0,\, t)$ e per ogni coppia di vettori $| y_1(\tau) | < a$, $| y_2(\tau) | < a$ continui in $(0,\, t)$ sia:

$$(C_4) \qquad | F(t,\, y_{1}{}^{t}_{0}(\tau)) - F(t,\, y_{2}{}^{t}_{0}(\tau)) | \leq M' \left\{ (t - t_1) \max | y_1(\tau) \overset{t}{\underset{t_1}{-}} y_2(\tau) | + \right.$$

$$\left. + \, t_1 \max | y_1(\tau) \overset{t_1}{\underset{t}{-}} y_2(\tau) | \right\}$$

dove $\max | y_1(\tau) \overset{\tau_2}{\underset{\tau_1}{-}} y_2(\tau) |$ è il massimo di $| y_1(\tau) - y_2(\tau) |$ in $(\tau_1,\, \tau_2)$.

Ammettiamo poi la seguente condizione. La $f(u)$ per ogni u sia tale che:

$$(C_5) \qquad (f(u) - f(u + \alpha v) + v) \times \alpha v \geq m v^2$$

essendo v un vettore qualunque e m un numero positivo (¹).

Con questa ipotesi la soluzione della (3), se esiste continua in un intervallo $(0,\, \lambda)$, è unica.

Supponiamo difatti che esistano due soluzioni della (3) $I_\infty(t)$ e $I_\infty'(t)$ continue. Vedremo che queste due soluzioni devono coincidere.

Difatti se le $I_\infty(t)$ e $I_\infty'(t)$ soddisfano la (3) deve essere:

$$I_\infty(t) - I_\infty'(t) - f(\beta H(t) + \alpha I_\infty(t)) + f(\beta H(t) + \alpha I_\infty'(t)) =$$

$$= F(t,\, \beta' H(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha' I_\infty(\tau)) - F(t,\, \beta' H(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha' I_\infty'(\tau)).$$

(¹) Con questa ipotesi si viene anche ad ammettere che l'omografia α non sia degenere e cioè $K \neq 0$. Il caso in cui $\alpha = 0$ si può trattare senza le (C_5) con i metodi che vengono ora esposti.

Moltiplicando scalarmente questa equazione per $\alpha(\boldsymbol{I}_\infty(t) - \boldsymbol{I}_\infty'(t))$ e ricordando la condizione (C_5) si ha:

$$(12) \qquad m \mid \boldsymbol{I}_\infty(t) - \boldsymbol{I}_\infty'(t) \mid^2 \leq$$

$$\leq \mid (F(t, \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_\infty(\tau)) - F(t, \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_\infty'(\tau)) \times \alpha \boldsymbol{I}_\infty(t) - \alpha \boldsymbol{I}_\infty(t)) \mid \leq$$

$$\leq K \mid F(t, \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_\infty(\tau)) - F(t, \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}_\infty(\tau)) \mid \mid \boldsymbol{I}_\infty(t) - \boldsymbol{I}_\infty'(t) \mid .$$

Ora per $t = 0$ la equazione (3) si riduce alla (4) in base alla (C_1) che, come abbiamo ammesso, ha una soluzione unica. Perciò $\boldsymbol{I}_\infty(0) = \boldsymbol{I}_\infty'(0)$.

Dopo ciò indichiamo con t' la massima ascissa contenuta in $(0, \lambda)$ tale che per ogni t di $(0, t')$ sia:

$$\mid \boldsymbol{I}_\infty(t) - \boldsymbol{I}_\infty'(t) \mid < \varepsilon$$

dove ε è un numero positivo arbitrario. Sarà $t' = \lambda$ o $\mid \boldsymbol{I}_\infty(t') - \boldsymbol{I}_\infty'(t') \mid = \varepsilon$.

Nel primo caso si ha in tutto $(0, \lambda)$, $\boldsymbol{I}_\infty(t) = \boldsymbol{I}_\infty'(t)$ per l'arbitrarietà di ε. Nel secondo caso applicando la (C_4) alla (12) si ha:

$$m \mid \boldsymbol{I}_\infty(t') - \boldsymbol{I}_\infty'(t') \mid^2 \leq KM't' \max \mid \alpha' \boldsymbol{I}_\infty(t) \underset{0}{\overset{t'}{-}} \alpha' \boldsymbol{I}_\infty'(t) \mid \mid \boldsymbol{I}_\infty(t') - \boldsymbol{I}_\infty(t') \mid \leq$$

$$\leq KK'M't' \max \mid \boldsymbol{I}_\infty(t) \underset{0}{\overset{t'}{-}} \boldsymbol{I}_\infty'(t) \mid \mid \boldsymbol{I}_\infty(t') - \boldsymbol{I}_\infty'(t') \mid .$$

Ma $\mid \boldsymbol{I}_\infty(t') - \boldsymbol{I}_\infty'(t') \mid = \varepsilon$ e $\max \mid \boldsymbol{I}_\infty(t) \underset{0}{\overset{t'}{-}} \boldsymbol{I}_\infty'(t') \mid$ vale pure ε, perciò:

$$m\varepsilon^2 \leq M't'KK'\varepsilon^2.$$

Ossia

$$t' > \frac{m}{M'KK'}.$$

Allora nell'intervallo $\left(0, \dfrac{m}{M'KK'}\right)$ si ha $\boldsymbol{I}_\infty(t) = \boldsymbol{I}_\infty'(t)$ per l'arbitrarietà di ε. Se perciò t' non è uguale a λ si avrà in forza della (C_4) e (C_5):

$$m\varepsilon^2 \leq M' \left(t' - \frac{m}{M'KK'}\right) KK'\varepsilon^2$$

ossia:

$$t' > \frac{2m}{M'KK'}$$

e in ogni caso per l'arbitrarietà di ε dovrà essere $\boldsymbol{I}_\infty(t) = \boldsymbol{I}_\infty'(t)$ in $\left(0, \dfrac{2m}{M'KK'}\right)$. Così proseguendo si vede che l'indentità $\boldsymbol{I}_\infty(t) = \boldsymbol{I}_\infty'(t)$ vale in tutto $(0, \lambda)$.

Si può notare che la condizione (C_5) si può ottenere in altra forma nel caso che la $f(u)$ sia una funzione ordinaria del numero u, condizione più facile a vedere se è verificata o no.

Infatti poichè:

$$|cv||f(u) - f(u+cv) + v| = |cf'(u+\theta cv) + 1||v||cv|,$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. (Naturalmente si è supposta la derivabilità di $f(u)$). Affinchè la (C_5) sia soddisfatta basta perciò che si abbia per ogni u e v

$$f'(u+\theta cv) \neq \frac{-1}{c}.$$

Qualche volta l'unicità si ottiene con altre considerazioni e noi in seguito la supporemo sempre soddisfatta.

Si noti che quando $f(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t)) = \beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t)$ e $1 - \alpha$ non è degenere allora:

$$\boldsymbol{I}(t) = (1-\alpha)^{-1}\beta \boldsymbol{H}(t) + (1-\alpha)^{-1} F(t, \ \beta' \boldsymbol{H}(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \alpha' \boldsymbol{I}(\tau))$$

e applicando il ragionamento ora fatto [1] si può dedurre l'unicità della soluzione senza ammettere esplicitamente la (C_5).

4. Ammessa l'unicità della soluzione si può ripetendo un ragionamento del TONELLI (nota citata n.° 5) dimostrare che le $\boldsymbol{I}_n(t)$ convergono uniformemente in tutto $(0, l)$ verso $\boldsymbol{I}_\infty(t)$. Si può ora dimostrare il seguente teorema. Se esiste una soluzione $\boldsymbol{I}'(t)$ della (3) in $(0, \lambda)$ [2] tale che sia in tutto $(0, \lambda)$, $|\boldsymbol{I}'(t)| < a'$ e

$$|\beta' \boldsymbol{H}(t)| + |\alpha' \boldsymbol{I}'(t)| \leq |\beta' \boldsymbol{H}(t)| + K'a' < a$$

allora le $\boldsymbol{I}_n(t)$ convergono uniformemente verso $\boldsymbol{I}'(t)$ in tutto $(0, \lambda)$.

Si noti intanto che per quello che precede $\boldsymbol{I}_\infty(t)$ coincide con $\boldsymbol{I}'(t)$ in tutto $(0, l)$. Indichiamo poi con 3Δ il minimo di $a' - |\boldsymbol{I}'(t)|$ in $(0, \lambda)$. Ora si può trovare in base alla uniforme convergenza delle $\boldsymbol{I}_n(t)$ verso $\boldsymbol{I}'(t)$ in $(0, l)$ un numero n_1 tale che per ogni $n > n_1$ sia:

$$|\boldsymbol{I}_n(l)| \leq |\boldsymbol{I}'(l)| + \Delta < a' - \Delta.$$

Quando si è dimostrata l'uniforme continuità delle $\boldsymbol{I}_n(t)$ si è provato che per ogni funzionale di $\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)$ che entra nella espressione di $\boldsymbol{I}_n(t)$ e tale che:

$$|\beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau)| < a$$

---

(1) Moltiplicando però scalarmente per $\boldsymbol{I}(t)$.

(2) S'intende $\lambda \leq 1$.

esiste un numero l_1 che gode della seguente proprietà. Per ogni $t_2 - t_1 < l_1$ e per ogni n si può avere:

$$| \boldsymbol{I}_n(t_2) - \boldsymbol{I}_n(t_1) | < \Delta$$

e ciò ripetiamolo per ogni funzionale di $| \beta' \boldsymbol{H}(\tau) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(\tau) | < a$.

Ora nell'intervallo $l, \frac{r+1}{n}$ $\left(\text{supposto } n > n_1, \frac{r}{n} \leq l \leq \frac{r+1}{n} \text{ e } l_1 \geq \frac{r+1}{n} - l\right)$ i funzionali delle $\boldsymbol{I}_n(t)$ soddisfano alla condizione su esposta perchè sono estesi all'intervallo $\left(0,\ t - \frac{1}{n}\right)$ e $t - \frac{1}{n} \leq l$ perciò per $l \leq t \leq \frac{r+1}{n}$ si ha:

$$| \boldsymbol{I}_n(t) | \leq | \boldsymbol{I}_n(l) | + \Delta$$

ossia per ogni $n > n_1$:

$$| \boldsymbol{I}_n(t) | < a'.$$

Perciò in questo intervallo risulta anche:

$$| \beta' \boldsymbol{H}(t) + \alpha' \boldsymbol{I}_n(t) | < a.$$

Allora si può ripetere il nostro ragionamento anche per l'intervallo $\frac{r+1}{n}, \frac{r+2}{n}$ fino ad esaurire l'intervallo $0,\ l + l_1$.

Si trova così che nell'intervallo $0,\ l + l_1$ le $\boldsymbol{I}_n(t)$ per $n > n_1$ sono egualmente limitate e ugualmente continue e convergono così per $n \to \infty$ verso l'unica soluzione $\boldsymbol{I}'(t)$.

È possibile poi trovare un n_2 tale che per ogni $n > n_2$ sia:

$$\boldsymbol{I}_n(l + l_1) \leq | \boldsymbol{I}'(l + l_1) | + \Delta$$

e così ripetendo ancora il nostro ragionamento si trova che le $\boldsymbol{I}_n(t)$ convergono per $n \to \infty$ verso $\boldsymbol{I}'(t)$ in tutto $(0,\ l + 2l_1)$.

Proseguendo si prova così che le $\boldsymbol{I}_n(t)$ convergono in $(0, \lambda)$ verso $\boldsymbol{I}'_\infty(t)$.

Con un ragionamento di questo tipo si può provare anche che se solo nell'intervallo $(0, \lambda)$ esiste una soluzione della (3) tale che in esso sia $| \beta \boldsymbol{H}(t) | + K' | \boldsymbol{I}(\lambda) |$ minore o uguale a un certo numero positivo $b < a$, deve essere $| \beta \boldsymbol{H}(\lambda) | + K' | \boldsymbol{I}(\lambda) | = b$ (1). Infatti, se ciò non fosse, ragionando appunto come precede e ricordando che $| \beta \boldsymbol{H}(t) |$ è continua, si proverebbe che $| \beta \boldsymbol{H}(t) | + K' | \boldsymbol{I}(t) |$ sarebbe minore di b anche dopo λ contro l'ipotesi.

5. Passiamo ora al caso più importante per le applicazioni, cioè al caso in cui sia $a = \infty$.

---

(1) La $\boldsymbol{I}(\lambda)$ può essere definita per continuità con la (9) facendo $n \to \infty$ e ricordando la (C_2).

Supponiamo che valgano la (C_4) e la (C_5) (1) e che invece della condizioni (C_1), (C_2), (C_3) valgano le seguenti tre condizioni (C_1'), (C_2'), (C_3').

1°) Ad ogni numero intero positivo m si possa far corrispondere un numero M_m tale che per ogni t di $(0, 1)$ e per ogni vettore $y(\tau)$ continuo in $(0, t)$ e tale che $|y(\tau)| \leq m$ sia:

$$(C_1') \qquad F(t, y_0^t(\tau)) \leq M_m t.$$

2°) Ad ogni numero intero positivo m ed a ogni $\varepsilon > 0$ corrisponda un numero ρ_m tale che per ogni $t_2 - t_1 \leq \rho_m$ (con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$) e per ogni $y(\tau)$ continuo e in modulo inferiore ad a sia:

$$(C_2') \qquad |F(t_2, y_0^{t_2}(\tau)) - F(t_1, y_0^{t_1}(\tau))| \leq \varepsilon.$$

3°) Per ogni t di $(0, 1)$ ad ogni $\varepsilon > 0$ e ad ogni numero positivo m è possibile far corrispondere un numero σ_m tale che per ogni $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$ funzioni continue di τ e in modulo minori di m e tali che in tutto $(0, t)$ valga la diseguaglianza $|y_1(\tau) - y_2(\tau)| < \sigma_m$ risulti:

$$(C_3') \qquad |F(t, y_{10}^{\,t}(\tau)) - F(t, y_{20}^{\,t}(\tau))| \leq \varepsilon.$$

Con queste ipotesi, la (C_4) e la (C_5) si può dimostrare che la nostra equazione ammette soluzione finita in tutto $(0, 1)$. Osserviamo anzitutto che ad ogni m soddisfacente la (5 bis) dovrà corrispondere un λ_m tale che in esso esista una soluzione $\boldsymbol{I}(t)$ della (3) per cui $|\beta \boldsymbol{H}(t)| + K' |\boldsymbol{I}(t)| \leq m$.

Sarà evidentemente (2):

$$\lambda_m > \lambda_{m-1}.$$

Ora o esiste un $\lambda_{\overline{m}} \geq 1$ e allora la nostra asserzione è dimostrata, oppure questo $\lambda_{\overline{m}}$ non esiste, e allora le λ_m ammettono un limite superiore λ minore o uguale a 1. Ora se ciò fosse $\boldsymbol{I}(t)$ per $t \to \lambda$ dovrebbe assumere in modulo valori grandi quanto si vuole perchè dovrebbero essere maggiori di un qualunque numero m, il che, come ora si vedrà, non può essere.

Difatti in un intervallo $(0, t)$, $(t < \lambda)$ si ha:

$$\boldsymbol{I}(t) - f(\beta \boldsymbol{H}(t) + \alpha \boldsymbol{I}(t)) + f(\beta \boldsymbol{H}(t)) = f(\beta \boldsymbol{H}(t)) + F(t, \alpha' \boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \beta' \boldsymbol{H}(\tau)).$$

Moltiplicando questa equazione scalarmente per $\alpha \boldsymbol{I}(t)$ e prendendone i

(1) Per la condizione (C_5) si noti che per non generare confusione al posto di m porremo in questa condizione m'.

(2) Per provare che λ_m è solo maggiore di λ_{m-1} si ricordi l'osservazione alla fine del precedente paragrafo.

valori assoluti si ha:

$$|\boldsymbol{I}(t) - f(\beta\boldsymbol{H}(t) + \alpha\boldsymbol{I}(t)) + f(\beta\boldsymbol{H}(t)) \times \alpha\boldsymbol{I}(t)| \leq$$
$$\leq |f(\beta\boldsymbol{H}(t) \times \alpha\boldsymbol{I}(t))| + |F(t, \alpha'\boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \beta'\boldsymbol{I}(\tau)) \times \alpha\boldsymbol{I}(t)|.$$

Da cui per la (C_5) segue:

$$m_1\boldsymbol{I}^2(t) \leq K|f(\beta\boldsymbol{H}(t))||\boldsymbol{I}(t)| +$$
$$+|F(t, \beta'\boldsymbol{H}(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \alpha'\boldsymbol{I}(\tau)) - F(t, \beta'\boldsymbol{H}_0^t(\tau))|K|\boldsymbol{I}(t)| + F(t, \beta'\boldsymbol{H}_0^t(\tau))K|\boldsymbol{I}(t)|.$$

Indichiamo poi con N il massimo di $\boldsymbol{H}(t)$ in $(0, 1)$ sarà (1):

$$|\beta\boldsymbol{H}(t)| < K_1N \quad \text{e} \quad |\beta'\boldsymbol{H}(t)| < K_1'N.$$

Se poi m_N è il minimo intero maggiore di K_1N per la (C_1') si ha:

$$|F(t, \beta\overset{t}{\underset{0}{\boldsymbol{H}}}(t))| \leq M_{m_N}t \leq M_{m_N}.$$

Sia poi $|f(\beta\boldsymbol{H}(t))| < P$ per ogni t di $(0, 1)$.

Indichiamo in fine con Φ il massimo di $|\boldsymbol{I}(t)|$ in $\left(0, \lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}\right)$ e con $\psi(t)$ il massimo di $|\boldsymbol{I}(t)|$ in $\left(\lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}, t\right)$, supposto di sostituire a $\lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}$ lo zero qnalora $\lambda - \frac{m_1}{2MKK'}$ fosse negativo. Per la (C_4) e per quello che si è posto ora si ha:

$$m_1\boldsymbol{I}^2(t) < KP|\boldsymbol{I}(t)| + K|\boldsymbol{I}(t)|M_{m_N} +$$
$$+ M'\left\{\left(\lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}\right)K'\Phi + \frac{m_1K'}{2M'KK'}\psi(t)\right\}|K|\boldsymbol{I}(t).$$

Ora nell'intervallo $\left(\lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}, t\right)$ esisteranno dei punti t' in cui la $|\boldsymbol{I}(t)|$ coincide con la $\psi(t)$. Allora la $\psi(t')$ è nulla oppure è minore di:

$$\psi(t') < \frac{2}{m_1}\left(KP + KM_{m_N} + M'KK'\left(\lambda - \frac{m_1}{2M'KK'}\right)\Phi\right)$$

quindi la $\psi(t)$ è limitata per ogni t in $(0, \lambda)$ perciò per quanto si è detto deve esistere $\lambda_m \geq 1$. Si è così dimostrato che la nostra equazione ammette soluzione finita in tutto $(0, 1)$.

(1) I numeri K_1 e K_1' sono determinati in corrispondenza di β e β' come K e K' in corrispondenza di α e α'.

Nel caso $f(\beta\boldsymbol{H}(t)+\alpha\boldsymbol{I}(t))=\beta\boldsymbol{H}(t)+\alpha\boldsymbol{I}(t)$ si arriva allo stesso risultato senza supporre esplicitamente la (C_5) purchè non sia degenere la $(1-\alpha)$. Ciò si ottiene ponendo:

$$\boldsymbol{I}(t)=(1-\alpha)^{-1}\beta\boldsymbol{H}(t)+(1-\alpha)^{-1}F(t,\ \beta'\boldsymbol{H}(\tau)\overset{t}{\underset{0}{+}}\alpha'\boldsymbol{I}(\tau)).$$

Applicando i ragionamenti ora fatti, moltiplicando però scalarmente per $\boldsymbol{I}(t)$. Allo stesso modo si può procedere se $\alpha=0$.

Si può ottenere la dimostrazione dell'esistenza della soluzione in tutto (0, 1) anche con altra ipotesi, ma su ciò non insisteremo.

***

6. Passiamo ora alle applicazioni del teorema sopra ottenuto ad una questione di fisica ereditaria o meglio a un problema d'induzione magnetica o dielettrica.

È noto come il POISSON abbia dimostrato come un corpo omogeneo a forma di un ellissoide (e in particolare di forma sferica) posto in un campo magnetico uniforme si magnetizza uniformemente.

La teoria di POISSON è basata sull'ipotesi che fra il vettore di magnetizzazione $\boldsymbol{I}$ in un elemento di un corpo considerato, e il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ nello stesso elemento interceda la relazione:

$$\boldsymbol{I}=\chi\boldsymbol{H} \tag{13}$$

dove χ è la costante di suscettività magnetica.

Questa ipotesi è però valida solo per corpi debolmente magnetici. Si può cercare di correggerla ponendo:

$$\boldsymbol{I}=f(\boldsymbol{H}) \tag{14}$$

dove $f(\boldsymbol{H})$ è simbolo di un vettore funzione continua del vettore $\boldsymbol{H}$.

Poichè l'esperienza dimostra che al crescere indefinito di $\boldsymbol{H}$ la $\boldsymbol{I}$ rimane in modulo limitata (saturazione magnetica) bisogna supporre la $f(\boldsymbol{H})$ limitata per mod $\boldsymbol{H}\to\infty$.

In questa ipotesi, seguendo un metodo del DUHEM [1], si può dimostrare che il teorema di POISSON sopra enunciato è ancora valido.

[1] *Leçons d'Électricité et Magnétisme,* vol. II, pag. 198 e segg. È da notare che il DUHEM si è limitato al caso dei corpi isotropi.

Ma l'ipotesi (14), per quanto sembri molto generale, non rappresenta ancora completamente la relazione fra magnetizzazione e campo magnetico nei corpi ferro magnetici. Ciò avviene poichè la magnetizzazione di un corpo ferro magnetico dipende non solo dal campo magnetico attuale ma anche da campi magnetici che hanno agito in precedenza sul corpo stesso.

Nella seconda delle mie note citate ho cercato di tenere conto di ciò e seguendo il VOLTERRA ho aggiunto al secondo membro della (14) un vettore funzione della varietà vettoriale (o un funzionale) dei campi magnetici che hanno agito in precedenza sull'elemento del corpo considerato. Perciò la (14) andrebbe scritta:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}(t)) + F(t, \ \boldsymbol{H}^{t}_{-\infty}(\tau)). \tag{15}$$

Però siccome nel seguito supporrò che i campi magnetici che hanno agito sul corpo precedentemente all'origine dei tempi abbiano effetto nullo sulla magnetizzazione al tempo t, $(t > 0)$ ossia che si possano supporre nulli per $t \leq 0$ (il che è facile a realizzarsi) la (15) va scritta:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}(t)) + F(t, \ \boldsymbol{H}^{t}_{0}(\tau)). \tag{16}$$

Con questa ipotesi si può enunciare il seguente teorema: Se un corpo di forma ellissoidica viene posto nell'intervallo $(0, t)$ in un campo magnetico uniforme, esso si magnetizza uniformemente.

Tale teorema intuitivo dal punto di vista fisico e già implicitamente applicato dagli sperimentatori mancava per quanto mi consta di una rigorosa dimostrazione analitica che si può dare in base ai teoremi sopra dimostrati [1].

Dobbiamo osservare a questo proposito che il nostro teorema vale anche nel caso dei fenomeni d'induzione dielettrica tenendo conto dell'isteresi, sostituendo al campo magnetico il campo elettrico e al vettore intensità di magnetizzazione il vettore intensità di polarizzazione.

Ma prima di procedere sarà opportuno vedere come una relazione del tipo (16) può rappresentare l'andamento dei fenomeni nei corpi ferromagnetici o nei corpi dotati di isteresi dielettrica, cioè se si possono considerare questi fenomeni come fenomeni ereditari.

Discuteremo la cosa più che altro per i fenomeni della magnetizzazione

---

[1] La difficoltà (più che altro d'indole matematica) che occorre superare per dimostrare rigorosamente il nostro teorema consiste nel provare l'esistenza di una soluzione dell'equazione (27), il che del resto non era stato fatto dal DUHEM nel caso non ereditario e in questo senso la nostra discussione completa anche il resultato del DUHEM.

perchè pei fenomeni dell' isteresi dielettrica l' applicabilità del metodo ereditario sembra più evidente, anzi pare valida in tale caso l' ereditarietà lineare.

Prima di tutto occorrerà stabilire in modo preciso ciò che s' intende per fenomeno ereditario. Si dirà cioè che un fenomeno è ereditario quando l' effetto (nel nostro caso l' intensità di magnetizzazione $\boldsymbol{I}(t)$) dipende non solo dal valore attuale della causa (nel nostro caso l' intensità del campo magnetico $\boldsymbol{H}(t)$) ma anche da valori assunti in passato dalla causa stessa.

Con questa definizione il fenomeno della magnetizzazione come quello dell' isteresi dielettrica è ovviamente un fenomeno ereditario, ed è rappresentabile mediante la relazione (16) lasciando al funzionale il senso molto largo attribuitogli dal VOLTERRA.

Ma per trattare qualche problema d' induzione magnetica o dielettrica occorre fare qualche ipotesi d' indole matematica sul nostro funzionale e si tratta di vedere se queste ipotesi si potranno giustificare in base ad altre che si fanno di solito nelle questioni della fisica matematica.

Le ipotesi che dovremo fare si ridurranno alle seguenti:

I. Per ogni t di $(0, 1)$ e per tutte le $|\boldsymbol{H}(\tau)|$ continue e inferiori a certo numero positivo $\boldsymbol{H}_s$ valga la formula ricavata nella mia nota sulle funzioni di varietà vettoriale:

$$F(t, \boldsymbol{H}_{10}^{t}(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_{20}^{t}(\tau)) \times \boldsymbol{i} = \tag{17}$$

$$= \int_0^t \frac{dF(t, \boldsymbol{H}_1(\tau)) + \lambda_0^t(\boldsymbol{H}_2(\tau) - \boldsymbol{H}_1(\tau))}{d\boldsymbol{H}_1(\xi) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi))} (\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi)) \times \boldsymbol{i} d\xi$$

in cui $\boldsymbol{H}_1(\tau)$, $\boldsymbol{H}_2(\tau)$ sono due $\boldsymbol{H}(\tau)$, $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario, λ un numero compreso fra 0 e 1, $\dfrac{dF(t, \boldsymbol{H}_1(\tau)) + \lambda_0^t(\boldsymbol{H}_2(\tau) - \boldsymbol{H}_1(\tau))}{d\boldsymbol{H}_1(\xi) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi))}$ una omografia vettoriale dipendente da t, ξ e dalla funzione $\boldsymbol{H}_1(\tau) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\tau) - \boldsymbol{H}_1(\tau))$.

II. Sia per ogni t, $F(t, \overset{t}{\underset{0}{0}}) = 0$.

III. Per ogni numero positivo m minore di $\boldsymbol{H}_s$ esista un uumero N_m tale che per tutti λ e t compresi fra 0, t, per tutte le $|\boldsymbol{H}_1(\tau)| < m$, $|\boldsymbol{H}_2(\tau)| < m$ e per ogni ξ di $(0, t)$ sia:

$$\left| \frac{dF(t, \boldsymbol{H}_1(\tau)) + \lambda_0^t(\boldsymbol{H}_2(\tau) - \boldsymbol{H}_1(\tau))}{d\boldsymbol{H}_1(\xi) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi))} \boldsymbol{a} \right| < N_m \, |\boldsymbol{a}|$$

essendo $\boldsymbol{a}$ un vettore arbitrario. *(continua)*

IV. Per ogni numero intero e positivo m e per ogni quantità arbitraria positiva ε esista un ρ_m tale che per ogni $(t_2 - t_1) \leq \rho_m$ $(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1)$, $|\boldsymbol{H}_1(\tau) - \boldsymbol{H}_2(\tau)| \leq \rho_m$ con $|\boldsymbol{H}_1(\tau)| \leq m$, $|\boldsymbol{H}_2(\tau)| \leq m$ sia:

$$|F(t_2, \boldsymbol{H}_{2\,0}^{t_2}(\tau)) - F(t_1, \boldsymbol{H}_{1\,0}^{t_1}(\tau))| < \varepsilon,$$

cioè il funzionale è uniformemente continuo rispetto alle t e $\boldsymbol{H}(\tau)$.

V. Se $\boldsymbol{H}(\tau)$ è in certi tratti di $(0, t)$ maggiore di H_s si abbia:

$$F(t, \boldsymbol{H}(\tau)) = F(t, \boldsymbol{H}'(\tau)),$$

essendo $\boldsymbol{H}'(\tau)$ un vettore uguale a $\boldsymbol{H}(\tau)$ dove $|\boldsymbol{H}(\tau)| < H_s$ uguale a $H_s \dfrac{\boldsymbol{H}(\tau)}{|\boldsymbol{H}(\tau)|}$ dove $\boldsymbol{H}(\tau)$ è maggiore o uguale a H_s.

VI. Infine si supporrà possibile anche il caso in cui sia $H_s = \infty$ (e in questo caso la V. ipotesi viene a mancare) ma allora si devono supporre le N_m limitate per ogni m. Con queste ipotesi potremo risolvere tutti i problemi che ci proporremo. Ora però bisogna vedere se queste ipotesi si possano dedurre da altre che sembrano scendere direttamente dall'esperienza. Più precisamente noi vedremo che in base a qualche ipotesi di origine sperimentale è possibile dare della $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ una rappresentazione analitica vicina ai dati sperimentali con quanta approssimaziono si vuole e che soddisfa alle ipotesi I, II, III. IV.

Vediamo intanto come si potrebbe almeno teoricamente definire la $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$. Noi abbiamo per la (16),

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}(t)) + F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$$

e le grandezze misurabili sono $\boldsymbol{I}(t)$ e $\boldsymbol{H}(t)$. Rimane però incerta qual'è la parte di $\boldsymbol{I}(t)$ costituita da $f(\boldsymbol{H})$ e quella costituita da $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$. A tutto rigore si potrebbe compendiare anche $f(\boldsymbol{H})$ nel funzionale, ma ciò non sarebbe affatto comodo specialmente se si volesse passare dal caso ereditario a quello non ereditario. Conviene perciò prendere per $f(\boldsymbol{H})$ una funzione che renda minimo possibile il valore del funzionale, cioè quella funzione che si prenderebbe se si volesse trascurare l'isteresi.

Non si può dare per tale scelta un criterio generale, si dovrà vedere caso per caso qual'è il criterio più conveniente. Comunque stabilita la $f(\boldsymbol{H})$ più comoda si può definire $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ come differenza fra $\boldsymbol{I}(t)$ e la $f(\boldsymbol{H}(t))$ (1).

(1) La $f(\boldsymbol{H})$ deve rappresentare la $\boldsymbol{I}(t)$ nei tratti in cui si ha saturazione magnetica, dove l'effetto ereditario sembra trascurabile.

Considerando per più generalità il funzionale definito sopra tutte le funzioni continue date nell'intervallo (b, t) [1] con b negativo e grande come si vuole sembra provato dall'esperienza che esso è uniformemente continuo almeno rispetto alle $\boldsymbol{H}(\tau)$ in modulo minori di H_s cioè è vera la IV rispetto a $\boldsymbol{H}(\tau)$ [2].

Allora, prendendo un insieme di funzioni ugualmente continue e in modulo minori di H_s e in particolare l'insieme delle funzioni con derivata generalmente continua (cioè con un numero finito di punti di discontinuità) e minore in modulo di un certo numero P, è noto [3] che per ogni $\boldsymbol{H}(\tau)$ di questo insieme è possibile rappresentare le componenti di $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ con un errore piccolo quanto si vuole mediante polinomi (nel senso delle funzioni di linea) nelle componenti di $\boldsymbol{H}(\tau)$. Ciò non è in contraddizione con un risultato ottenuto nella mia nota citata nella quale ho dimostrato in base al fenomeno della saturazione magnetica che le componenti delle $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ non possono essere polinomi nelle componenti di $\boldsymbol{H}(\tau)$, perchè qui si ammette che le $\boldsymbol{H}(\tau)$ siano tutte inferiori in modulo a H_s. Si può allora prendere per la rappresentazione analitica delle componenti di $F(t, \boldsymbol{H}(\tau))$ con le $\boldsymbol{H}(\tau)$ costituenti un insieme di funzioni ugualmente continue e in modulo minore di H_s, un polinomio nelle componenti di $\boldsymbol{H}(\tau)$ commettendo per quello che si è detto un errore inferiore all'errore sperimentale. In questo modo si soddisfa come è facile vedere alle ipotesi I, III. L'ipotesi II cioè $F(t, \overset{t}{\underset{0}{0}})$ si può dire che venga direttamente dall'esperienza. L'ipotesi IV rispetto a t sembra essa pure dimostrata dall'esperienza almeno per l'insieme considerato delle $\boldsymbol{H}(\tau)$ [4].

Infine l'ipotesi V cioè che quando $|\boldsymbol{H}(\tau)| > H_s$ in qualche tratto di $(0, t)$ è sensibilmente uguale a $\boldsymbol{H}'(\tau)$ con $\boldsymbol{H}'(\tau)$ definito come a proposito della V si può dire confermato dall'esperienza sebbene non vi siano ricerche dirette in proposito, e del resto, come poi si dirà, questa ipotesi non è essenziale.

---

(1) Ammettiamo cioè che i valori di $H(t)$ per $t < b$ siano stati nulli o che il loro effetto per $t > b$ si possono supporre nullo.

(2) Si fa però in questo studio astrazione da fenomeni di magnetizzazione discontinua scoperti dal BARKHAUSEN. Queste esclusioni sono del resto comuni in tutta la fisica-matematica in cui non si tiene conto dei fenomeni molecolari o quasi molecolari.

(3) Questo teorema è dovuto a FRÉCHET e a GATEAUX e l'applicabilità al nostro caso sarà vista in Appendice II.

(4) Veramente per soddisfare la III e più ancora la IV occorre ammettere che i coefficienti dei polinomi siano continui per ogni t, il che si può provare rigorosamente solo nel caso del ciclo chiuso. Tale questione sarà ripresa alla fine dell'Appendice II.

Abbiamo così costruito una possibile rappresentazione analitica per la $F(t, \boldsymbol{H}(\tau))$ che ci servirà in tutti i problemi che studieremo. Non è però escluso che in altre questioni possa essere più utile usare altri tipi di rappresentazioni analitiche [1].

Occorre però osservare che questa rappresentazione analitica conduce certamente ad errori piccoli solo se le $\boldsymbol{H}(\tau)$ sono prese su un insieme di funzioni ugualmente contiuue, e come si è detto in particolare su funzioni la cui derivata è generalmente continua e in modulo minore di un certo numero P [2]. Ora che le funzioni $\boldsymbol{H}(\tau)$ che intervengono in questi studi abbiano derivata limitata è imposto altre ragioni. Anzitutto poichè noi studiamo il fenomeno dell'induzione magnetica, escludendo lo correnti indotte il che è possibile solo se il campo magnetico varia molto lentamente. Ma del resto anche volendo tener conto delle correnti indotte bisogna sempre stabilire un limite per le derivate, perchè altrimenti si verebbero a includere alte frequenze (per es. le luminose) in cui le equazioni stesse del campo elettromagnetico diventano dubbie [3].

Perciò dovendo limitare lo studio a funzioni derivabili la cui derivata deve essere limitata, ci restringiamo un insieme di funzioni ugualmente continue per cui vale la nostra rappresentazione analitica. Quindi se risolvendo un problema si trovasse una $\boldsymbol{H}(t)$ con derivata in modulo maggiore di P tale soluzione sarà dubbia per doppia ragione.

È da notare che noi supponiamo le $\boldsymbol{H}(t)$ derivabili. Ora solo una parte di esse è in nostro arbitrio (il campo inducente) che si può supporre derivabile: non così il campo dovuto al magnetismo indotto che dovremo calcolare. È difficile mostrare che in generale tale campo è derivabile e del resto non ne vale la pena. Lo verificheremo solo nel caso particolare dell'elissoide.

Vogliamo fare ancora qualche osservazione.

Anzitutto quanto all'ipotesi relativa all'esistenza di H_s noteremo non è essenziale che essa sia confermata dall'esperienza, perché si può fissare

---

(1) Un'altra interessante rappresentazione analitica almeno per il caso $\boldsymbol{H}(\tau)$ unidirezionale, è quella proposta di G. Giorgi, *Lezioni di fisica matematica*, tenute nell'anno 1927-28. (In litografia Sampaolesi, Roma, pag. 150-152).

(2) Per più generalità sarebbe meglio prendere quelle funzioni il cui rapporto incrementale sia in modulo minore di P. Il teorema di Fréchet e Gateaux vale anche per queste funzioni senza nessuna modificazione.

(3) Si noti che se le $\boldsymbol{H}(\tau)$ hanno rapporto incrementale in modulo minore di P, lo stesso avviene per le $\boldsymbol{H}'(\tau)$. Infatti poichè come si proverà è $|\boldsymbol{H}'(\tau_1) - \boldsymbol{H}'(\tau_2)| \leq |\boldsymbol{H}(\tau_1) - \boldsymbol{H}(\tau_2)|$ ne risulta subito quanto si è asserito.

sempre in base all'esperienza in valore di H_s che non possa essere raggiunto da nessuna $\boldsymbol{H}(\tau)$ e quindi per $|\boldsymbol{H}(\tau)| > H_s$ si può fare l'ipotesi che si vuole.

In secondo luogo osserveremo che tutti questi risultati valgono per t variabile fra (0, 1), il che non è affatto restrittivo perchè si può prendere una unità di misura per il tempo così grande (per es. il secolo) da essere sufficiente per i bisogni della pratica. Così anche il magnetismo permanente per il tratto (0, 1) resta ben rappresentato dalle nostre formule, naturalmente avendo supposto che tutto sia stato smagnetizzato al tempo zero e che i campi per $t < 0$ abbiano effetto nullo su ciò che avviene per $t > 0$, il che come si è detto si può ottenere con facilità.

Quanto ai dielettrici, le ipotesi fatte sono verificate con più certezza tanto più che in questo caso come si è detto l'ereditarietà sembra lineare.

Dobbiamo però da ultimo osservare che le nostre ipotesi sono immensamente più larghe di quella lineare, e che se si fa l'ipotesi della saturazione magnetica si è in contraddizione con l'ereditarietà lineare.

D'ora innanzi cui occuperemo solo dell'induzione magnetica ma i nostri risultati valgono anche per l'induzione dielettrica.

7. Ricordiamo l'impostazione del problema dell'induzione magnetica già fatto nelle mie note citate.

Supponiamo per semplicità di avere un sol corpo magnetico di volume S e la cui superficie sia σ, immerso in un mezzo non magnetico. Siano poi $\boldsymbol{H}_0(t)$ il campo magnetico inducente, $\boldsymbol{H}_1(t) = -\operatorname{grad}\psi(t)$ il campo magnetico indotto, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(t) + \boldsymbol{H}_1(t)$ il campo magnetico totale, $\boldsymbol{I}(t)$ l'intensità di magnetizzazione. Si ha allora per un ben noto teorema di magnetismo,

$$\psi(t) = -\int_S \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{I}(t)}{r}\,dS - \int_\sigma \frac{\boldsymbol{I}(t)\times \boldsymbol{n}}{r}\,d\sigma \tag{18}$$

dove r è la distanza di un punto qualunque di S o σ al punto in cui si calcola $\psi(t)$ e $\boldsymbol{n}$ è il vettore unitario normale a σ e diretto verso l'interno di σ. Al posto di $\boldsymbol{I}$ si pone $f(\boldsymbol{H}_0 - \operatorname{grad}\psi) + F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau))$. Si ha così una equazione funzionale mediante la quale si può determinare $\psi(t)$ e quindi $\boldsymbol{I}(t)$ e $\boldsymbol{H}(t)$ [1].

[1] È ovvio che questa equazione funzionale è equivalente a un sistema nelle $\boldsymbol{I}(t)$ e ψ_1 formato dalla (18) e dalla espressione di $\boldsymbol{I}$ mediante $\boldsymbol{H}$.

Ma bisogna dimostrare che questa equazione funzionale ammette una sola soluzione finita e continua in ogni punto dello spazio e per ogni t di (0, 1). A questo scopo basterà fare sul funzionale le ipotesi I, III e sulla $f(\boldsymbol{H})$ l'ipotesi seguente che si può giustificare con considerazioni d'indole fisica esposte nella mia nota citata.

Esiste un numero positivo n non nullo tale che per ogni $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ e per ogni $f(\boldsymbol{H})$ sia:

$$\boldsymbol{H}_1^2 + 4\pi(f(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2) - f(\boldsymbol{H}_2)) \times \boldsymbol{H}_1 \geq n\, \boldsymbol{H}_1^2 .$$

Questa condizione è valida anche per un mezzo non magnetico come è evidente, e nel qual caso sarebbe $n = 1$. Noi prendiamo per n il minimo per ogni $f(\boldsymbol{H})$ comprendendo il caso delle $f(\boldsymbol{H})$ lineari o nulle cioè comprendendo tutto i mezzi magnetici o diamagnetici ora conosciuti.

Ciò posto, iniziamo la nostra dimostrazione del teorema di unicità.

Supponiamo che la (18) abbia due soluzioni finite, continue e derivabili ψ, $\psi + \theta$. Si avrà perciò:

$$\theta(t) = -\int_S \frac{\operatorname{div}(\boldsymbol{I}'(t) - \boldsymbol{I}(t))}{r} dS - \int_\sigma \frac{(\boldsymbol{I}'(t) - \boldsymbol{I}(t)) \times \boldsymbol{n}}{v} d\sigma \tag{19}$$

essendo:

$$\boldsymbol{I}'(t) = f(\boldsymbol{H}_0(t)) - \operatorname{grad}(\psi(t) + \theta(t)) + F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \overset{t}{\underset{0}{\operatorname{grad}}}(\psi(\tau) + \theta(\tau)).$$

Allora è facile provare che il vettore:

$$\boldsymbol{B}(t) = -\operatorname{grad}\theta(t) + 4\pi(\boldsymbol{I}'(t) - \boldsymbol{I}(t))$$

è tale che:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(t) = 0$$

in tutto lo spazio; $\boldsymbol{B}(t) \times \boldsymbol{n}$ continuo su σ e $\theta(t)\boldsymbol{B}(t)$ nullo all'infinito almeno del terzo ordine e ciò per ogni t di (0, 1).

Poichè:

$$\operatorname{div}(\theta(t)\boldsymbol{B}(t)) = \theta(t) \operatorname{div} \boldsymbol{B}(t) + \operatorname{grad}\theta(t) \times \boldsymbol{B}(t),$$

integrando questa equazione su tutto lo spazio infinito S_∞ applicando il teorema della divergenza, e ricordando il comportamento di $\theta\boldsymbol{B}$ all'infinito si ha:

$$\int_{S_\infty} \operatorname{grad}\theta(t) \times \boldsymbol{B}(t) dS_\infty = 0.$$

Ossia con una sostituzione e una ovvia trasformazione [1]:

$$(19') \qquad \int_{S_\infty} - \operatorname{grad} \theta(t) \times [- \operatorname{grad} \theta(t) + 4\pi f(\boldsymbol{H}_0(t)) - \operatorname{grad} (\psi(t) + \theta(t)) -$$

$$- f(\boldsymbol{H}_0(t) - \operatorname{grad} \psi(t))] dS_\infty = 4\pi \int_{S_\infty} \operatorname{grad} \theta(t) \times$$

$$\times [F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \operatorname*{grad}_0^t (\psi(\tau) + \theta(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau))] \, dS_\infty .$$

Prendiamo ora il valore assoluto del secondo membro di questa uguaglianza, il quale sarà maggiore o uguale del primo membro. Ora questo valore assoluto è minore o al più uguale dell'integrale dei valori assoluti delle funzioni che sono sotto il segno d'integrazione nel secondo membro di (19'). D'altra parte per le ipotesi già fatte il primo membro sarà maggiore di $n \int_{S_\infty} \operatorname{grad}^2 \theta(t) dS_\infty$ e si avrà perciò:

$$(20) \qquad n \int_{S_\infty} \operatorname{grad}^2 \theta(t) dS_\infty \leq$$

$$\leq 4\pi \int_S | \operatorname{grad} \theta(t) \times (F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \operatorname*{grad}_0^t (\psi(\tau) + \theta(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau)) | \, dS.$$

Cerchiamo ora una limitazione per:

$$| \operatorname{grad} \theta(t) \times (F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \operatorname*{grad}_0^t (\psi(\tau) + \theta(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau)) |$$

Si ha intanto per $| \boldsymbol{H}_0 - \operatorname{grad} (\psi(\tau) + \theta(\tau)) | < H_s$, $| \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname{grad} \psi(\tau) | < H_s$

$$(21) \quad | \operatorname{grad} \theta(t) \times (F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \operatorname*{grad}_0^t (\psi(\tau) + \theta(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau)) | \leq$$

$$\leq \left| \operatorname{grad} \theta(t) \times \int_0^t \frac{dF(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname*{grad}_0^t \psi(\tau) - \lambda \operatorname{grad} \theta(\tau))}{d\boldsymbol{H}_0(\xi) - \operatorname{grad} \psi(\xi) - \lambda \operatorname{grad} \theta(\xi)} \operatorname{grad} \theta(\xi) d\xi \right| \leq$$

$$\leq | \operatorname{grad} \theta(t) | \int_0^t N | \operatorname{grad} \theta(\xi) | \, d\xi \leq \frac{N}{2} \int_0^t | \operatorname{grad}^2 \theta(t) + \operatorname{grad}^2 \theta(\xi) | \, d\xi.$$

In questa equazione N è il valore di $N_{\overline{m}}$ essendo $\overline{m}$ il primo intero

[1] Fuori di S la f e la F si devono supporre nulle.

positivo maggiore di H_s (¹). Questa diseguaglianza vale per ora solo per $|\boldsymbol{H}_0 - \operatorname{grad}\psi(\tau) - \operatorname{grad}\theta(\tau)| < H_s$, $|\boldsymbol{H}_0 - \operatorname{grad}\psi(\tau)| < H_s$ ma essa è valida in generale. Si indichi per semplicità $\boldsymbol{H}_0(\tau) - \operatorname{grad}\psi(\tau)$ con $\boldsymbol{H}_1$ e $\operatorname{grad}\theta(\tau)$ con $\boldsymbol{H}_2$. Si avrà:

$$|F(t, \boldsymbol{H}_1(\tau) \underset{\theta}{\overset{t}{+}} \boldsymbol{H}_2(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_{1}{}^{t}_{0}(\tau))| \times \boldsymbol{H}_2(\tau) = (F(t, [\boldsymbol{H}_1(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \boldsymbol{H}_2(\tau))]') -$$
$$- F(t, \boldsymbol{H}_1'(\tau)) \times \boldsymbol{H}_2'(t)$$

in cui $[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]'$ e $\boldsymbol{H}_1(\tau)$ valgono al solito $\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)$ o $\boldsymbol{H}_1(\tau)$ dove rispettivamente $|\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)| < H_s$, $|\boldsymbol{H}_1(\tau)| < H_s$ e dove ciò non si verifica valgono:

$$H_s \frac{\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)}{|\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)|}, \quad H_s \frac{\boldsymbol{H}_1(\tau)}{|\boldsymbol{H}_1(\tau)|}.$$

Ma si ha che:

(22) $$|[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]' - \boldsymbol{H}_1'(\tau)| \leq |\boldsymbol{H}_2(\tau)|.$$

Per dimostrare ciò procediamo per via geometrica. Indichiamo con $A' - O$, $B' - O$ i vettori $[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]'$, $\boldsymbol{H}_1'(\tau)$ e con $A - O$, $B - O$ i vettori $\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)$ e $\boldsymbol{H}_1(\tau)$. I punti A' e B' saranno rispettivamente su OA e OB. Potranno darsi due casi, cioè tanto OA e OB siano maggiori di H_s oppure uno solo di essi è maggiore di H_s. (Il caso OA e OB minori o uguali di H_s è ovviamente escluso).

Nel primo caso deve essere $OA' = OB' = H_s$ e $OA > OA'$, $OB > OB'$. Se poi per fissare le idee $OA \geq OB$, mandata per B una parallela BC a $B'A'$ si ha $OC = OB < OA$ e $BC > B'A'$ per la similitudine dei triangoli OCB e $OA'B'$. D'altra parte essendo isoscele il triangolo $OA'B'$ l'angolo $\widehat{B'A'O}$ sarà acuto e tale lo sarà $\widehat{OCB}$ che è uguale a $\widehat{B'A'O}$. Perciò l'angolo $\widehat{BCA}$ sarà ottuso e quindi $AB \geq CB > A'B'$ ossia

$$|\boldsymbol{H}_2(\tau)| > |[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]' \quad \boldsymbol{H}_1'(\tau)|$$

perchè AB e $A'B'$ sono i moduli di $\boldsymbol{H}_2(\tau)$ e di $[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]' - \boldsymbol{H}_2(\tau)'$. Allo stesso risultato si arriva per $OB > OA$ invertendo A con B. Nel caso in cui sia per es. $OA \geq H_s$, $OB \leq H_s$ si ha $OA' = H_s$, $OB' = OB$ con $OB' \leq H_s = OA'$. Allora nel triangolo $OA'B'$ si ha: $\widehat{OB'A'} \geq \widehat{OA'B'}$ perciò $\widehat{AA'B}$ è maggiore o al più uguale del supplemento di $\widehat{OB'A'}$ e quindi di $\widehat{A'BA}$.

(¹) Se H_s fosse uguale a ∞ si dovrebbe prendere per m il minimo numero intero maggiore per ogni t di $(0, 1)$ e per ogni punto di S_∞ di $|\boldsymbol{H}_0(\tau)| + |\operatorname{grad}\psi| + |\operatorname{grad}\theta|$.

Così dal triangolo $AA'B$ segue $AB \geq A'B'$, che è in fondo quello che si voleva dimostrare, perchè ora AB' vale $|[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]' - \boldsymbol{H}_1'(\tau)|$. Naturalmente allo stesso resultato si arriva se invece $OA \leq H_s$, $OB \geq H_s$ cioè possiamo concludere che la (22) è sempre vera (¹). Allora poichè la (20) vale per le $[\boldsymbol{H}_1(\tau) + \boldsymbol{H}_2(\tau)]' - \boldsymbol{H}_1'(\tau)$ e ricordando la (21) e la (22) si può scrivere

$$|F(t, \boldsymbol{H}_1(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \boldsymbol{H}_2(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_1{}_0^t(\tau)) \times \boldsymbol{H}_2(t)| = F[t, \boldsymbol{H}_1(\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} \boldsymbol{H}_2(\tau)]' - $$
$$- F(t, \boldsymbol{H}_1{}_0^t(\tau)) \times \boldsymbol{H}_2(t) \leq$$
$$\leq |\boldsymbol{H}_2(t)| \int_0^t N |[\boldsymbol{H}_1(\xi) + \boldsymbol{H}_2(\xi)]' - \boldsymbol{H}_1'(\xi) d\xi| \leq N \int_0^t |\boldsymbol{H}_2(t)| \, |\boldsymbol{H}_2(\xi)| \, d\xi.$$

Ossia possiamo concludere in generale, ricordando le espressioni di $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{H}_2$

$$(24) \quad |F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau)) - \overset{t}{\underset{\theta}{\mathrm{grad}}} (\psi(\tau) + \theta(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) - \overset{t}{\underset{0}{\mathrm{grad}}} \psi(\tau)) \times \mathrm{grad}\, \theta(t)| \leq$$
$$\leq \frac{N}{2} \int_0^t (\mathrm{grad}^2 \theta(t) + \mathrm{grad}^2 \theta(\xi)) d\xi.$$

Allora sostituendo quest'ultima disuguaglianza nella (20) e ponendo $R = \dfrac{2\pi N}{n}$ si ha (²):

$$(25) \qquad \int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(t) dS_\infty \leq R \int_0^t d\xi \left(\int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(t) dS_\infty + \int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(\xi) \right) dS_\infty$$

relazione valida in tutto (0, 1). Vogliamo provare che da questa equazione scende $\int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(t) dS_\infty = 0$ se si vuole che $\mathrm{grad}\, \theta(t)$ sia finito per ogni t di (0, 1).

Dividiamo perciò l'intervallo (0, 1) in q parti in modo che sia $\dfrac{1}{2R} > \dfrac{1}{q}$ e siano $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{q-1}$ i punti di divisione di questo intervallo. Ora in 0, τ_1 è $Rt < \dfrac{1}{2}$ perciò si ha sempro per t in questo intervallo:

$$(26) \qquad \frac{1}{2} \int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(t) dS_\infty \leq R \int_0^t d\xi \int_{S_\infty} \mathrm{grad}^2 \theta(\xi) dS_\infty$$

(¹) In questa dimostrazione si è supposto non nullo l'angolo fra i vettori $A - 0$ e $B - 0$. È facile provare che la (22) è vera anche nel caso che sia nullo l'angolo fra $A - 0$ e $B - 0$.

(²) L'integrale del secondo membro dovrebbe essere esteso solo a S ma la (25) è ovviamente valida anche se questo integrale è esteso a S_∞.

da cui segue ([1]) $\int\limits_{S_\infty} \text{grad}^2\, \theta(t) dS_\infty = 0$ e di conseguenza $\text{grad}\, \theta(t) = 0$ in S_∞ e in $(0, \tau_1)$. Allora si può porre in (21) e quindi in (25) come limite inferiore τ_1 invece dello zero. Si ha allora in (τ_1, τ_2) valida una diseguaglianza del tipo (26) da cui segue $\int\limits_{S_\infty} \text{grad}^2\, \theta(t) dS_\infty = 0$ e $\text{grad}\, \theta(t) = 0$ in tutto τ_1, τ_2. Cosi proseguendo si trova $\text{grad}\, \theta(\tau) = 0$ in tutto $(0, t)$ da cui segue con i soliti ragionamenti $\theta(\tau) = 0$ in tutto $(0, 1)$ e in tutto S_∞.

8. Passiamo ora a risolvere il problema dell'induzione magnetica in un elissoide che è stato immerso nell'intervallo $(0, t)$ in un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0(\tau)$ ([2]).

Vediamo se è possibile soddisfare alla (18) o nel sistema corrispondente ponendo per $\boldsymbol{H}_1(\tau)$ nell'interno dell'elissoide un valore costante rispetto alle coordinate. In questo caso sarebbe costante anche $\boldsymbol{I}$ e si avrebbe allora per un noto teorema, nell'interno dell'elissoide,

$$\psi = \boldsymbol{I} \times \int\limits_S \frac{n}{r}\, dS = -\boldsymbol{I} \times \text{grad}\, \varphi,$$

essendo φ il potenziale Newtoniano interno di un elissoide di costante d'at-

---

([1]) Infatti posto $\int\limits_{S_\infty} \text{grad}^2\, \theta(t) dS = a \geq 0$ si ha

$$a \leq 2R \int_0^t a\, d\xi \tag{α}$$

e indicato con m il massimo di a in $(0, \tau_1)$ ne segue:

$$a \leq 2Rmt$$

e sostituendo in α ricordando che R e m sono positive si ha:

$$a \leq \frac{(2R)^2 m}{2!} t^2$$

e così proseguendo

$$a \leq \frac{(2R)^n}{n!} m t^n$$

da cui segue:

$$a = 0.$$

([2]) Si noti che la direzione di $\boldsymbol{H}_0(\tau)$ può cambiare da istante a istante purchè in un dato tempo sia uniforme cioè uguale in tutto lo spazio.

trazione e densità unitarie. Questo φ vale $C-\gamma\dfrac{(P-O)\times(P-O)}{2}$ in cui C è una costante e γ una dilatazione con gli assi coincidenti con quelli dell'elissoide e con i coefficienti positivi.

Si ha così:

$$\operatorname{grad}\varphi = -\gamma(P-O).$$

Perciò:

$$\psi = \gamma \boldsymbol{I}\times(P-O), \quad \boldsymbol{H}_1 = -\operatorname{grad}\psi = -\gamma\boldsymbol{I}.$$

Ora deve essere nell'interno dell'elissoide:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}_0(t) + \boldsymbol{H}_1(t)) + F(t, \ \boldsymbol{H}_0(\tau) \underset{0}{\overset{t}{+}} \boldsymbol{H}_1(\tau)).$$

Perciò la $\boldsymbol{I}(t)$ deve soddisfare all'equazione:

$$\boldsymbol{I}(t) = f(\boldsymbol{H}_0(t) - \gamma\boldsymbol{I}(t)) + F(t, \ \boldsymbol{H}_0(\tau) \underset{0}{\overset{t}{-}} \gamma\boldsymbol{I}(\tau)). \tag{27}$$

Questa è una equazione funzionale che per l'uniformità di $\boldsymbol{H}_0(t)$ e la costanza di γ non dipende dalle coordinate. Essa come si vede è del tipo (3). Supposta risolta questa equazione si calcola la ψ all'esterno dell'elissoide con la (18) e in questo modo si soddisfa eompletamente all'equazione funzionale (18) o meglio al sistema equivalente.

Bisogna ora dimostrare che l'equazione funzionale (27) ehe è del tipo della (3) ammette soluzione in tutto (0. 1). Occorre anzitutto che sia risolubile con soluzione continua rispetto a $\boldsymbol{H}_0$

$$\boldsymbol{I} = f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma\boldsymbol{I}) \tag{28}$$

il che corrisponde al problema nel caso non ereditario e siano soddisfatte le (C_1'), (C_2') (C_3'), (C_4), (C_5).

Noi dimostreremo anzitutto che la (28) ammette una soluzione continua rispetto a $\boldsymbol{H}_0$ nei due casi interessanti la pratica e verificheremo che la (C_5) è conseguenza dell'ipotesi fatta a proposito del teorema di unicità [1]. Nel prossimo paragrafo verificheremo per il funzionale le (C_1'), (C_2'), (C_3'), (C_4).

Verifichiamo anzitutto la (C_5) e cioè che per ogni $\boldsymbol{u}$ e per ogni $\boldsymbol{v}$ deve aversi

$$|\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{u}-\gamma\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u})\times(-\gamma\boldsymbol{v})| \geq n v^2. \tag{29}$$

Ricaviamo intanto una proprietà dell'omografia γ. Indicando con A, B, C le

(1) A questo proposito si noti che nella (C_5) di pag. 152 il primo membro va preso in valore assoluto.

sue componenti principali che sono, come si è detto, positive dimostriamo che esse sono minori di 4π. Infatti poichè è:

$$\text{grad}\,\varphi = -\gamma(P - O).$$

Si ha subito applicando la equazione di Poisson e ricordando che la densità e la costante di attrazione sono supposte unitarie:

$$\Delta\varphi = - I_1(\gamma) = -(A + B + C) = -4\pi$$

da cui segue per la positività di A, B, C il nostro asserto. Allora per l'ipotesi posta per teorema di unicità si ha:

$$\frac{1}{4\pi}(\gamma \boldsymbol{v})^2 + (f(\boldsymbol{u} - \gamma \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u})) \times (-\gamma \boldsymbol{v}) \geq n v^2. \tag{29'}$$

Ma siccome si ha chiamando con v_x, v_y, v_z le componenti di $\boldsymbol{v}$ sugli assi di γ e ricordando che le A, B, C sono minori di 4π

$$\gamma \boldsymbol{v} \times \gamma \boldsymbol{v} = A^2 v_x^2 + B^2 v_y^2 + C^2 v_z^2 < 4\pi(A v_x^2 + B v_y^2 + C v_z^2) < 4\pi \boldsymbol{v} \times \gamma \boldsymbol{v}$$

ne risulta:

$$\boldsymbol{v} \times \gamma \boldsymbol{v} > \frac{1}{4\pi}(\gamma \boldsymbol{v})^2$$

e perciò sostituendo in (29') si ha:

$$-\boldsymbol{v} \times (-\gamma \boldsymbol{v}) + (f(\boldsymbol{u} - \gamma \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u})) \times (-\gamma \boldsymbol{v}) \geq n v^2.$$

Ossia anche poichè questa quantità essendo positiva coincide col suo valore assoluto:

$$|(-\boldsymbol{v} + f(\boldsymbol{u} - \gamma \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u})) \times (-\gamma \boldsymbol{v})| \geq n v^2$$

che è la (C_5).

Da questa equazione segue subito che la (28) se ammette soluzione ne ammette una sola. Infatti se ne ammettesse due $\boldsymbol{I}'$ e $\boldsymbol{I}' + \boldsymbol{I}''$ sarebbe:

$$\boldsymbol{I}' = f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}')$$
$$\boldsymbol{I}' + \boldsymbol{I}'' = f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}' + \gamma \boldsymbol{I}'')$$

e perciò sottraendo membro a membro:

$$\boldsymbol{I}'' - f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}' - \gamma \boldsymbol{I}'') + f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}') = 0$$

da cui seguirebbe:

$$|\boldsymbol{I}'' - f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}' - \gamma \boldsymbol{I}'') - f(\boldsymbol{H}_0 \quad \gamma \boldsymbol{I}') \times (-\gamma \boldsymbol{I}'')| = 0$$

il che è contro l'ipotesi (C_5) se $\boldsymbol{I}'' \neq 0$ (1). Perciò deve essere $\boldsymbol{I}'' = 0$ e la soluzione di (28) unica.

È difficile dimostrare che in generale la (28) ha soluzioni continue. Noi ci limiteremo a dimostrarlo in due casi particolarmente importanti.

Sia:

$$f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}) = \alpha(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I})$$

dove α è una omografia. In questo caso la (28) diviene:

$$\boldsymbol{I} = \alpha(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}) \tag{30}$$

ossia:

$$(1 + \alpha\gamma)\boldsymbol{I} = \alpha \boldsymbol{H}_0 . \tag{31}$$

Ora l'omografia $(1 + \alpha\gamma)$ non può essere degenere, altrimenti l'equazione (31) con $\boldsymbol{H}_0 = 0$ che si riduce alla $(1 + \alpha\gamma)\boldsymbol{I} = 0$ avrebbe soluzioni diverse da zero. Allora la (28) nel caso di $\boldsymbol{H}_0 = 0$ avrebbe almeno due soluzioni, una nulla e l'altra finita, il che è in opposizione al teorema di unicità. Quindi $(1 + \alpha\gamma)$ non è degenere e perciò si può scrivere:

$$\boldsymbol{I} = (1 + \alpha\gamma)^{-1} \alpha \boldsymbol{H}_0$$

il che dimostra che la (30) è risolubile con soluzione continua rispetto a $\boldsymbol{H}_0$.

Ma il caso che in pratica ha maggiore interesse è quello in cui $f(\boldsymbol{u})$ è una funzione continua di $\boldsymbol{u}$ e si mantiene limitata anche quando mod $\boldsymbol{u} \to \infty$. Ciò si verifica in pratica per il fenomeno della saturazione magnetica.

Allora per dimostrare che in questo caso la (28) ammette soluzione ci sarà opportuno indicare con I_x, I_y, I_z le componenti di $\boldsymbol{I}$, lungo le direzioni principali di γ che verranno individuate con i vettori unitari $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ e moltiplicare scalarmente la (28) per $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Otteremo così il sistema:

$$I_x - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} = 0 \tag{32}$$

$$I_y - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{j} = 0 \tag{33}$$

$$I_z - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{k} = 0. \tag{34}$$

Si consideri ora l'espressione:

$$I_x - f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}) \times \boldsymbol{i} = I_x - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i}.$$

Questa espressione fissato I_y, I_z, $\boldsymbol{H}_0$ è una funzione continua di I_x. Al variare di I_x da $-\infty$ a $+\infty$ essa varia con continuità pure da $-\infty$

(1) Ricordiamo che γ non è degenere.

e $+\infty$ perchè la $f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I})$ si mantiene limitata. Perciò ad ogni valore di I_y, I_z, $\boldsymbol{H}_0$ esisterà almeno un I_x^0 tale che la (32) sia nulla. Fissata I_y, I_z, $\boldsymbol{H}_0$ questo I_x^0 è unico. Infatti se ne esistessero due I_x^0 e $I_x^0 + I_x'^0$ si avrebbe dalla (32)

$$I_x'^0 - f(\boldsymbol{H}_0 - A(I_x^0 + I_x'^0)\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) + \\ + f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} = 0$$

da cui moltiplicando per $-AI_x'^0$ si otterebbe con facili passaggi:

$$| - \gamma I_x'^0 \boldsymbol{i} \times I_x'^0 \boldsymbol{i} + [f(\boldsymbol{H}_0 \quad AI_x^0\boldsymbol{i} - BI_y^0\boldsymbol{j} - CI_z^0\boldsymbol{k} \quad AI_x'^0\boldsymbol{i}) - \\ - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x^0\boldsymbol{i} - BI_y^0\boldsymbol{j} - CI_z^0\boldsymbol{k})] \times \gamma I_x \boldsymbol{i} \,| = 0$$

il che è contro la (C_5) se $I_x'^0$ non è nulla. Ne segue allora che I_x^0 è una funzione univoca di I_y, I_z, $\boldsymbol{H}$, che indicheremo con $I_x^0\ (I_y,\ I_z,\ \boldsymbol{H}_0)$.

Essa è anche una funzione continua di tali variabili. Perchè sia ciò occorre provare che preso un ε ad arbitrio esiste un Δ tale che per ogni $|\delta_1| < \Delta$, $|\delta_2| < \Delta$, $|\boldsymbol{\alpha}| < \Delta$ sia:

$$| I_x^0(I_y + \delta_1,\ I_z + \delta_2,\ \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{\alpha}) - I_x^0(I_y,\ I_z,\ \boldsymbol{H}_0) | < \varepsilon.$$

Infatti poichè la $I_x - f(\boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{I}) \times \boldsymbol{i}$ si annulla solo per $I_x^0\ (I_y,\ I_z,\ \boldsymbol{H}_0)$ e varia con I_x da $-\infty$ a $+\infty$ si avrà:

$$I_x^0 - \varepsilon - f(\boldsymbol{H}_0 - A(I_x^0 - \varepsilon)\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} < 0 \\ I_x^0 + \varepsilon - f(\boldsymbol{H}_0 - A(I_x^0 + \varepsilon)\boldsymbol{i} - BI_y\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} > 0.$$

Ora per le supposte continuità, sarà possibile trovare un Δ tale che per ogni $|\delta_1| < \Delta$, $|\delta_2| < \Delta$, $|\boldsymbol{\alpha}| < \Delta$ sia:

$$I_x^0 - \varepsilon - f(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{\alpha} - A(I_x^0 - \varepsilon)\boldsymbol{i} - B(I_y + \delta_1)\boldsymbol{j} - C(I_z + \delta_2)\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} < 0 \\ I_x^0 + \varepsilon - f(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{\alpha} - A(I_x^0 + \varepsilon)\boldsymbol{i} + B(I_y + \delta_1)\boldsymbol{j} - C(I_z + \delta_2)\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} > 0.$$

Perciò i valori di I_x che annullano la (32) in corrispondenza di $\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{\alpha}$, $I_y + \delta_1$, $I_y + \delta_2$ sono compresi fra $I_x^0 - \varepsilon$, $I_x^0 + \varepsilon$. Quindi è per ogni $|\delta_1| < \Delta$, $|\delta_2| < \Delta$, $|\boldsymbol{\alpha}| < \Delta$

$$| I_x^0(I_y + \delta_1,\ I_z^0 + \delta_2,\ \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{\alpha}) - I_x^0(I_y,\ I_z,\ \boldsymbol{H}_0) | < \varepsilon$$

che è quello che si voleva dimostrare.

Sostituiamo ora I_x^0 nella (33). Fissato un $\boldsymbol{H}_0$ e I_z avremo una funzione di I_y per la quale col ragionamento già fatto al proposito di I_x si prova l'esistenza di almeno una I_y^0 che la annulla.

Questa I_y^0 per ogni I_z e $\boldsymbol{H}_0$ è unica. Infatti se ve ne fossero I_y^0 e $I_y^0 + I_y'^0$ vi sarebbero in corrispondenza anche due I_x^0 e $I_x'^0$ e tutte due soddisferebbero la (32) e (33) cioè si avrebbe:

$$
\begin{gathered}
I_y^0 - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x^0\boldsymbol{i} - B_y^0\boldsymbol{j} - CI_z^0\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{j} = 0 \\
I_y^0 + I_y'^0 - f(\boldsymbol{H}_0 - A(I_x^0 + I_x'^0)\boldsymbol{i} - B(I_y^0 + I_x'^0)\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{j} = 0 \\
I_x^0 + I_x'^0 - f(\boldsymbol{H}_0 - A(I_x^0 + I_x'^0)\boldsymbol{i} - B(I_y^0 + I_y'^0)\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} = 0 \\
I_x^0 - f(\boldsymbol{H}_0 - AI_x^0\boldsymbol{i} - BI_y^0\boldsymbol{j} - CI_z\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} = 0.
\end{gathered}
$$

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, la quarta dalla terza, moltiplicando la prima delle relazioni così ottenute per $-BI_y'^0$ la seconda per $-AI_x'^0$ e sommando il tutto si ottiene:

$$
\begin{gathered}
| - \gamma(I_x'^0\boldsymbol{i} + I_y'^0\boldsymbol{j}) \times (I_x'^0\boldsymbol{i} + I_y'^0\boldsymbol{j}) + \\
+ [f(\boldsymbol{H}_0 - CI_z\boldsymbol{k} - B(I_y^0 + I_y'^0)\boldsymbol{j} - A(I_x^0 + I_x'^0)\boldsymbol{i}) - \\
- f(\boldsymbol{H}_0 - CI_z\boldsymbol{k} - BI_y^0\boldsymbol{j} - AI_x^0\boldsymbol{i})] \times \gamma(I_x'^0\boldsymbol{i} + I_y'^0\boldsymbol{j}) \,| = 0
\end{gathered}
$$

che per la (C_5) non può sussistere se non è $I_y'^0 = 0$, $I_x'^0 = 0$.

Con lo stesso ragionamento del caso di I_x^0 si prova che la I_y^0 è una funzione continua di I_z, $\boldsymbol{H}_0$. Allora sostituendo nella (34) alla $I_y = I_y^0(\boldsymbol{H}_0, I_z)$ e alla I_x la $I_x^0(I_y^0, I_z, \boldsymbol{H}_0) = I_x^0(I_y^0, I_z, \boldsymbol{H}_0)$, I_z, $\boldsymbol{H}_0$ si ha una equazione solo in I_z che con i ragionamenti fatti precedentemente si può provare che ammette una soluzione I_z^0 funzione continua di $\boldsymbol{H}_0$. Allora il vettore $\boldsymbol{I}_0$ di componenti:

$$
I_z^0, \; I_y^0(I_z^0), \; I_x^0(I_y^0, I_z^0)
$$

soddisfa la (28), perchè è soddisfatto da queste il sistema delle (31), (32) e (33) ed è una funzione continua di $\boldsymbol{H}_0$ perchè così lo sono le sue componenti. Perciò si può dire la $\boldsymbol{I} = \varphi(\boldsymbol{H}_0)$ esiste continua, il che è quanto si voleva provare.

9. Verifichiamo ora la validità delle (C_1'), (C_2'), (C_3'), (C_4) in base alle I, II, III, V. Cominciamo dalla (C_1'). Supponiamo intanto $(\boldsymbol{H}(\tau)) < H_s$. Poniamo nella (17), $\boldsymbol{H}_2(\tau) = 0$ e $\boldsymbol{H}_1(\tau) = \boldsymbol{H}(\tau)$: avremo, ricordando che $F(t, \overset{t}{\underset{0}{0}}) = 0$ (¹),

$$
F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau)) \times \boldsymbol{i} = \int_0^t \frac{dF(t, \theta\boldsymbol{H}_0^t(\tau))}{d\theta\boldsymbol{H}(\xi)} \boldsymbol{H}(\xi) \times \boldsymbol{i}.
$$

(¹) θ vale $1 - \lambda$.

Cioè, ricordando la III, si ha per ogni $|\boldsymbol{H}(\tau)|$ in modulo minore di m

$$|F(t, \boldsymbol{H}(\tau))\times \boldsymbol{i}| \leq \int_0^t \left| \frac{dF(t, \theta \boldsymbol{H}_0^t(\tau))}{d\theta \boldsymbol{H}(\xi)} \boldsymbol{H}(\xi)\times \boldsymbol{i} \right| d\xi \leq N_m \int_0^t |\boldsymbol{H}(\xi)|\, d\xi < N_m m t.$$

Ciò vale per ogni componente di $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$. Essendo il modulo di un vettore sempre minore della somma dei moduli delle componenti, si ha:

$$|F(t, \boldsymbol{H}(\tau))| \leq 3N_m m t$$

e posto $3N_m m = M_m$ si prova la (C_1') per ogni $|\boldsymbol{H}(\tau)| < H_s$ in $(0, t)$.

Se $|\boldsymbol{H}(\tau)|$ in qualche tratto di $0, t$ è maggiore di H_s si ha:

$$|F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))| \leq |F(t, \boldsymbol{H}'^t_0(\tau))| \leq 3N_{\overline{m}} \overline{m} t$$

essendo $\overline{m}$ il minimo intero positivo maggiore di H_s e $N_{\overline{m}}$ il suo N corrispondente. Perciò per ogni $m > H_s$

$$|F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))| < Mt$$

essendo $M = 3N_{\overline{m}}\overline{m}$ così si prova che la (C_1') vale in generale.

La (C_2') e (C_3') sono una conseguenza della ipotesi III.

Per la (C_4') si ha per $|\boldsymbol{H}(\tau)| < H_s$ applicando la (17) e ricordando la III

$$|F(t, \boldsymbol{H}_1(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_2(\tau))\times \boldsymbol{i}| =$$

$$= \int_0^t \left| \boldsymbol{i}\times \frac{dF(t, \boldsymbol{H}_1(\tau)) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\tau) - \boldsymbol{H}_1(\tau))}{d\boldsymbol{H}(\xi) + \lambda(\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi)} (\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi)) \right| d\xi \leq$$

$$\leq \int_0^t N_{\overline{m}} |\boldsymbol{H}_2(\xi) - \boldsymbol{H}_1(\xi)| \leq$$

$$\leq N_{\overline{m}} \{ \max |\boldsymbol{H}_2(\xi) \overset{t_1}{\underset{0}{-}} \boldsymbol{H}_1(\xi)| + \max |\boldsymbol{H}_2(\xi) \overset{t}{\underset{t_1}{-}} \boldsymbol{H}_1(\xi)| \}$$

essendo $\max |\boldsymbol{H}_1(\xi) \overset{\tau_2}{\underset{\tau_1}{-}} \boldsymbol{H}_2(\xi)|$ il massimo in (τ_1, τ_2) di $|\boldsymbol{H}_1(\xi) - \boldsymbol{H}_2(\xi)|$.

Da ciò passando dalle componenti al vettore e ponendo $M' = 3N_m$ si verifica la (C_4) per ogni $|\boldsymbol{H}(\tau)| < H_s$.

Se $\boldsymbol{H}(\tau) \geq H_s$ si ha:

$$|F(t, \boldsymbol{H}_{10}^t(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_{20}^t(\tau))| = |F(t, \boldsymbol{H}_1{}'^t_0(\tau)) - F(t, \boldsymbol{H}_2{}'^t_0(\tau))| \leq$$

$$\leq M' \{ \max |\boldsymbol{H}_1'(\tau) \overset{t}{\underset{0}{-}} \boldsymbol{H}_2'(\tau)| + \max |\boldsymbol{H}_1'(\tau) \overset{t}{\underset{t_1}{-}} \boldsymbol{H}_2'(\tau)| \}$$

e poichè si ha sempre $|\boldsymbol{H}_1'(\tau) - \boldsymbol{H}_2'(\tau)| \leq |\boldsymbol{H}_1(\tau) - \boldsymbol{H}_2(\tau)|$ ne risulta anche:

$$\max|\boldsymbol{H}_1'(\tau) - \boldsymbol{H}_2'(\tau)| \leq \max|\boldsymbol{H}_1(\tau) - \boldsymbol{H}_2(\tau)|$$

da cui segue che la (C_4) è soddisfatta in generale.

Se poi $H_s = \infty$ si procede come precedentemente prendendo per M' il triplo del limite superiore di N_m che per ipotesi esiste finito.

Dunque tutte le condizioni affinchè la (27) sia risolubile in (0, 1) sono soddisfatte, perciò si può dire che si è trovata una soluzione della (18), soluzione che è unica per quanto si è dimostrato. Allora la $\boldsymbol{I}(t)$ è uniforme cioè il corpo si magnetizza uniformemente per tutto l'intervallo (0, t) il che è quanto si voleva provare.

Da ultimo dimostreremo che se la $f(\boldsymbol{H})$ è derivabile rispetto a $\boldsymbol{H}$ e $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ è derivabile rispetto a t risulta anche la $\boldsymbol{I}(t)$ e quindi la $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 - \gamma\boldsymbol{I}$ derivabile rispetto a t.

Anzitutto se la $f(\boldsymbol{H})$ è derivabile rispetto a $\boldsymbol{H}$ lo è anche la $\varphi(\overline{\boldsymbol{H}}_0)$. Infatti giacchè la $\varphi(\overline{\boldsymbol{H}}_0)$ si ottiene risolvendo la (28) che equivale a tre equazioni scalari nelle componenti di $\boldsymbol{I}$ affinchè essa sia derivabile occorre che il Jacobiano rispetto a queste componenti non sia nullo, cioè che non sia degenere la omografia $1 - \dfrac{df(\boldsymbol{H})\gamma}{d\boldsymbol{H}}$.

Ora per la (C_5) preso $\boldsymbol{v}$ infinitesimo si ha:

$$\left|\varepsilon + \left(1 - \frac{df(\boldsymbol{H})\gamma}{d\boldsymbol{H}}\right)\boldsymbol{v} \times \gamma\boldsymbol{v}\right| \geq nv^2 \tag{35}$$

essendo ε un infinitesimo d'ordine superiore v^2. Ora se la $1 - \dfrac{df(\boldsymbol{H})\gamma}{d\boldsymbol{H}}$ fosse degenere per un certo $\boldsymbol{v}$ la (35) avrebbe il primo membro infinitesimo di ordine maggiore a v^2 il che come mostra tale equazione non può essere. L'omografia $1 - \dfrac{df(\boldsymbol{H})\gamma}{d\boldsymbol{H}}$ non è dunque mai degenere, quindi la $\varphi(\overline{\boldsymbol{H}}_0)$ è derivabile rispetto a $\overline{\boldsymbol{H}}_0$.

Dopo ciò poiche dalla (3) si ha:

$$\boldsymbol{I}(t) = \varphi(\boldsymbol{H}_0(t)) - \gamma F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) \overset{t}{\underset{0}{-}} \gamma\boldsymbol{I}(\tau)) + F(t, \boldsymbol{H}_0(\tau) \overset{t}{\underset{0}{-}} \gamma\boldsymbol{I}(\tau))$$

resulta anche la derivabilità di $\boldsymbol{I}(t)$ rispetto a t.

Si potrebbe anche in modo analogo provare che tale derivata è continua rispetto a t.

Possiamo dunque concludere che se $\boldsymbol{H}(t)$ è in modulo minore di H_s, la derivata di $\boldsymbol{I}(t)$ e quindi di $\boldsymbol{H}_0(t) - \gamma \boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{H}(t)$ esiste, il che è dimostrato da quanto si è asserito durante la discussione sulla rappresentalità analitica della $F(t, \boldsymbol{H}(\tau)$.

APPENDICE I.

Dobbiamo dimostrare che da una successione di vettori $\boldsymbol{I}_1(t)$, $\boldsymbol{I}_2(t) \ldots \boldsymbol{I}_n(t), \ldots$ ugualmente continui e ugualmente limitati in un certo intervallo (a, b) si può estrarre almeno una successione $\boldsymbol{I}_{m_1}(t)$, $\boldsymbol{I}_{m_2}(t) \ldots \boldsymbol{I}_{m_n}(t)$ che converga uniformemente in tutto (a, b) verso un vettore continuo $\boldsymbol{I}_\infty(t)$.

Nel seguito della dimostrazione indicheremo con $X_n(t)$, $Y_n(t)$, $Z_n(t)$ le componenti sugli assi di $\boldsymbol{I}_n(t)$.

Le $X_n(t)$ essendo proiezioni di vettori ugualmente continui e ugualmente limitati in (a, b) sono esse pure in (a, b) ugualmente continue e ugualmente limitate, perciò si può da esse estrarre una successione $X_{r_1}(t)$, $X_{r_2}(t) \ldots X_{r_n}(t)$ che converge uniformemente verso una funzione continua $X_\infty(t)$ in tutto (a, b). Siano ora $Y_{r_1}(t)$, $Y_{r_2}(t) \ldots Y_{r_n}(t)$ le componenti su Y di $\boldsymbol{I}_{r_1}(t)$, $\boldsymbol{I}_{r_2}(t) \ldots \boldsymbol{I}_{r_n}(t)$. Poiche esse sono pure ugualmente continue su tutto (a, b), si può estrarre una successione $Y_{s_1}(t)$, $Y_{s_2}(t) \ldots Y_{s_n}(t)$ che converge uniformemente in tutto (a, b) verso una funzione continua $Y_\infty(t)$. Evidentemente le $X_{s_1}(t)$, $X_{s_2}(t) \ldots X_{s_n}(t)$ convergono uniformemente in tutto (a, b) verso $X_\infty(t)$.

Prese ora le componenti su Z delle $\boldsymbol{I}_{s_1}(t)$, $\boldsymbol{I}_{s_2}(t) \ldots \boldsymbol{I}_{s_n}(t)$ si può da esse estrarre una successione $Z_{m_1}(t)$, $Z_{m_2}(t) \ldots Z_{m_n}(t)$ che converga uniformemente verso una funzione continua $Z_\infty(t)$. Con un ragionamènto analogo a quello che precede si prova che $X_{m_1}(t)$, $X_{m_2}(t) \ldots X_{m_n}(t)$ convergono verso la $X_\infty(t)$ e le $Y_{m_1}(t)$, $Y_{m_2}(t) \ldots Y_{m_n}(t)$ convergono verso la $Y_\infty(t)$. Perciò le $\boldsymbol{I}_{m_n}(t)$ convergono uniformemente verso il vettore continuo $\boldsymbol{I}_\infty(t)$ che ha per componenti $X_\infty(t)$, $Y_\infty(t)$, $Z_\infty(t)$ perchè così avviene per le loro componenti. Questo è quanto si voleva provare.

APPENDICE II

Si è visto che l'intensità di magnetizzazione di un corpo ferromagnetico al tempo t dipende non solo dai valori attuali del campo magnetico ma anche da valori assunti in passato dal campo magnetico stesso cioè che nella sua espressione appare un funzionale $F(t, \boldsymbol{H}^t_{-\infty}(\tau))$. Noi però studiamo il caso che più interessa in pratica, nel quale $\boldsymbol{H}(\tau)$ sono nulle in tutto $(-\infty, 0)$. Vogliamo provare che per tutte le $\boldsymbol{H}(\tau)$ che si mantengono limitate in modulo ([1]), e che costituiscono un insieme di funzioni ugualmente continue, anzi in particolare per quell'insieme di $\boldsymbol{H}(\tau)$, di cui le derivate delle componenti sono generalmente continue e in modulo minori di un certo numero P, esiste per ogni componente della $F(t, \boldsymbol{H}(\tau))$ un polinomio (nel senso delle funzioni di linea) delle componenti di $\boldsymbol{H}(\tau)$ che la rappresenta con quanta approssimazione si vuole.

Questo polinomio P_n sarà del tipo

$$(1) \quad P_n = K_0(t) + \sum_{1}^{3}{}_{s_1}\int_0^t K_{s_1}(t, \tau_1)H_s(\tau)d\tau_1 + \sum_{1}^{3}{}_{s_1,s_2}\int_0^t\int_0^t K_{s_1,s_2}(t, \tau_1, \tau_2)H_{s_1}(\tau_1)H_{s_2}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$\dots + \sum_{1}^{3}{}_{s_1,s_2\dots s_n}\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_{s_1,s_2\dots s_n}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_n)H_{s_1}(\tau), \ H_{s_2}(\tau)\dots H_{s_n}(\tau)$$

i cui coefficienti $K_{s_1,s_2\dots s_n}(t, \tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$ sono funzioni continue rispetto alle τ. Per dimostrare ciò prendiamo l'insieme delle funzioni $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$, $Y_3(\tau)$ così formato. Le $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$, $Y_3(\tau)$ sono nulle per $\tau < -b$, nel tratto $-b, -\frac{b}{2}$ sono lineari, e nel tratto $-\frac{b}{2}, t$ sono uguali a una qualunque funzione continua minore in modulo di H_s. Evidentemente ad ogni t e ad ogni terna di $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$, $Y_3(\tau)$ corrisponderà un valore della componente di $F(t, \overset{t}{\underset{-b}{\boldsymbol{H}}}(\tau))$. Ma tale componente dipenderà solo dal pezzo delle $Y(\tau)$ che giace in $-\frac{b}{2}, t$ perchè definito questo pezzo resta definita tutta la $Y(\tau)$. Perciò potremo dire che la componente considerata di $F(t, \overset{t}{\underset{-b}{\boldsymbol{H}}}(\tau))$ dipende da t e da tutte le funzioni $Z_1(\tau)$, $Z_2(\tau)$, $Z_3(\tau)$ continue in $-\frac{b}{2}, t$ e minori in modulo di H_s.

Questo funzionale per il teorema di Fréchet e Gateaux si può rappresentare, almeno per le funzioni con derivata generalmente continua e in modulo minore di P, da un polinomio con gli integrali estesi da $-\frac{b}{2}$ a t. Però siccome consideriamo solo quelle funzioni nulle per $\tau < 0$, per queste funzioni il nostro polinomio rappresentativo si riduce al tipo (1) come si voleva provare.

[1] Cioè minori o al più uguali di H_s.

Poichè questa rappresentazione analitica della $F(t, \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ soddisfi (come deve essere) le condizioni III e IV, occorre che i coefficienti di P_n siano continui anche rispetto a t. Ciò resulta facilmente nel caso del ciclo chiuso perchè tali coefficienti sono funzioni di $(t - \tau)$. Ma non mi è riuscito di provare rigorosamente questo teorema nel caso generale, anche ammessa vera la IV sul funzionale. Ritornerò forse su ciò in altra occasione.

ERRATA-CORRIGE

Pag. 144 e segg. Il funzionale deve supporsi definito su tutte le $\boldsymbol{y}(\tau)$ minori o *uguali* in modulo ad a, e per queste $\boldsymbol{y}(\tau)$ devono valere le (C_1), (C_2), (C_3), (C_4).

Pag. 151, formula 10, seconda riga. Il segno di valore assoluto va in fine della riga.

Pag. 152, vedi nota di pag. 170.

Pag. 156. Le (C_2') e (C_3') si devono supporre valide anche per $y(\tau)$ in modulo minori o *uguali* a m.

Pag. 157, riga sesta. Il termine $F(t, \beta' \boldsymbol{H}_0^t(\tau))$ va preso in modulo.

Pag. 160. La III va enunciata nel seguente modo:

Per ogni numero intero e positivo m esista un numero N_m tale che per ogni $\boldsymbol{H}_1(\tau)$, $\boldsymbol{H}_2(\tau)$ continue e minori o uguali in modulo di m e H_s e per tutti i λ e t compresi fra $(0, 1)$ e per ogni ξ di $(0, t)$ sia ecc.

Pure a pag. 160 si noti che H_s essendo un numero non va in grassetto.

Pag. 162. Intendere sempre funzioni in modulo minori o uguali a H_s.

Sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità secondo un modulo composto.

Memoria di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostrano (art. 3) come necessarie, e in qualche caso anche sufficienti, le congruenze* (A), *(le congruenze* (B), *l'identità* (C)) *affinchè un sistema di interi sia un sistema completo di radici dell'unità* (mod. p^α), (p *primo dispari*)*; si dimostrano (art. 4) proposizioni analoghe riguardo a* (mod. 2^α)*; si dimostrano (art. 6) delle congruenze per le somme delle potenze simili e le funzioni simmetriche elementari di certe combinazioni di interi, valide in particolare quando tali combinazioni sono sistemi completi di radici* r-*esime dell'unità* (mod. m), *con* m *composto comunque. All'art. 7, applicando due idendità relative alle somme delle potenze simili delle radici dei polinomî simmetrici e ai coefficienti di tali polinomî, si stabiliscono per le funzioni simmetriche elementari e somme di potenze simili di* grado dispari qualunque *delle congruenze che perfezionano quelle dell'art. 6.*

1. Siano

$$t_0,\ t_1, \dots,\ t_{\tau-1} \tag{1}$$

τ interi a due a due incongrui (mod. m); poniamo

$$\left\{\begin{aligned} &Q_k(m) = \sum_{i=0}^{\tau-1} t_i^k \\ &\prod_{i=0}^{\tau-1}(t+t_i) = \sum_{k=0}^{\tau} R_k(m) t^{\tau-k}; \quad R_k(m) = 0 \quad \text{per} \quad k > \tau \end{aligned}\right. \tag{2}$$

cioè con $Q_k(m)$ e $R_k(m)$ denotiamo rispettivamente *la somma delle potenze simili* k-esime *degl'interi* (1), *e la somma dei prodotti a* k *a* k *degli stessi interi.*

È noto che se (1) è un sistema completo di radici τ-*esime* dell'unità (mod. p), (p primo dispari, τ divisore di $p-1$), valgono le congruenze seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &Q_k(p) \equiv 0, \ (\text{mod. } p); \quad R_k(p) \equiv 0, \ (\text{mod. } p); \quad \text{per } k \not\equiv 0, \ (\text{mod. } \tau) \\ &Q_{s\tau}(p) \equiv \tau, \ (\text{mod. } p); \quad R_\tau(p) \equiv (-1)^{\tau-1}, \ (\text{mod. } p) \ (^1). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(1) Ved. M. CIPOLLA, *Teoria dei numeri. Analisi indeterminata,* « Enciclop. Mat. elem. », Milano, 1930, p. 310; A. PIERCE, *Symmetric functions of* n — *ic residues* (mod. *p*), « Bulletin American Math. Soc. », Vol. 35, 1929, p. 708.

Sia p primo della forma $p = 4k + 1$, $\tau = (p-1)/2$, e (1) il sistema completo di radici τ-*esime* dell' unità *(residui quadratici)*, (mod. p) costituito d' interi naturali minori di p; valgono le congruenze [2]

(4) $$Q_{2h+1}(p) \equiv R_{2h+1}(p) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^2); \quad 1 \leq h \leq (p-5)/4$$

(5) $$2R_{2h+1}(p) \equiv -p\left(\frac{p-1}{2} - 2h\right)R_{2h}(p), \quad (\text{mod. } p^3); \quad \text{id.}$$

(6) $$2Q_{2h+1}(p) \equiv p(2h+1)Q_{2h}(p), \quad (\text{mod. } p^3); \quad \text{id.}$$

Sia p primo dispari qualunque, $\tau = p - 1$; il sistema (1) sia quello delle radici τ-*esime* dell' unità (mod. p) positive non superiori a p, cioè l' insieme $1, 2, \ldots, p-1$; per esso valgono congruenze analoghe alle (4), (5), (6) che non stiamo a scrivere [3].

Nel caso $\tau = \varphi(m)$, con m qualunque, il sistema (1) delle radici τ-*esime* dell' unità (mod. m) positive non superiori a m è l' insieme degl' interi naturali minori di m e primi con m. Per tale insieme valgono le congruenze (N. Nielsen) [4]:

(7) $$2Q_{2h+1}(m) \equiv m(2h+1)Q_{2h}(m), \quad (\text{mod. } m^3)$$

(8) $$Q_{2h}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } m); \quad Q_{2h+1}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } m^2)$$

(9) $$2R_{2h+1}(m) \equiv [\varphi(m) - 2h]mR_{2h}(m), \ (\text{mod. } m^3), \quad \text{per} \quad 1 \leq h \leq \frac{p-3}{2}$$

(10) $$R_{2h}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } m); \quad R_{2h+1}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } m^2), \quad \text{per} \quad 1 \leq h \leq \frac{p-3}{2}$$

delle quali, in loc. cit., le (7) e (8) risultano dimostrate per tutti quei valori di h tali che $2h$ non sia multiplo nè di $p-1$, nè di $q-1, \ldots$ essendo $p, q, \ldots$ i fattori primi distinti di m (in particolare se $p = 2$ oppure $p = 3$ per alcun valore di h, se $p = 5$ e $q > p, \ldots$ pei valori dispari di h ecc.); e le (9) e (10) risultano dimostrate per $1 \leq h \leq (p-3)/2$ essendo p il minimo fattore primo di m (in particolare, se m è divisibile per 2 oppure per 3, per alcun valore di h, se m è divisibile per 5 soltanto per $h = 1$ al massimo, ecc.).

In questa *Nota*, all' art. 3 si stabiliscono per il sistema completo delle radici ρ-*esime* dell' unità (mod. p^α), p primo dispari, le relazioni (A), (B), (C)

---

[2] Cfr. N. Nielsen, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Paris, 1923, p. 390, formule (15), (16), (17).

[3] Cfr. N. Nielsen, l. c. in [2], p. 311, formule (5); p. 326, formule (13), (14), ecc.

[4] Cfr. N. Nielsen, l. c. in [2], p. 286, form. (24); p. 322, form. (17); p. 286, form. (23); p. 333, form. (8). Ved. osservazione dopo queste ultime formule.

e si dimostra che ciascuno dei tre gruppi di relazioni è caratteristico pel sistema delle radici ρ-*esime* dell'unità (mod. p^α), (ρ divisore di $\varphi(p^\alpha)$) nei due casi estremi $\rho < p$ e $\rho \geq p^{\alpha-1}$.

All'art. 4 si dimostrano le proposizioni analoghe riguardanti il (mod. 2^α).

All'art. 6 si dimostrano per le somme delle potenze simili e le funzioni simmetriche elementari di certi sistemi di interi le congruenze (A_4), (B_4), (A_5), (B_5) che generalizzano le (3) sovrascritte; in particolare esse sono valide pei sistemi completi di radici r-*esime* (mod. m), m comunque composto.

Infine all'art. 7, applicando due identità stabilite da N. NIELSEN relative alle somme delle potenze simili delle radici dei polinomî simmetrici e ai coefficienti di tali polinomî, si stabiliscono per sistemi di interi analoghi a quelli considerati all'art. 6 alcune congruenze che generalizzano le (4), (5),..., (10) sovrascritte; le congruenze che generalizzano le (7), (8), (9), (10) risultano stabilite per *qualunque* valore di h, senza le limitazioni di cui è cenno sopra.

2. Alcune osservazioni. — Premettiamo le seguenti semplici osservazioni.

a) Per le posizioni (2) (art. 1) vale la formula di GIRARD-NEWTON:

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i R_i(m) Q_{k-i}(m) + (-1)^k k R_k(m) = 0, \quad (k \geq 1). \tag{I}$$

b) Denotando con $D(n, m)$ il massimo comun divisore degl'interi n e m si ha

$$\binom{n}{m} \equiv 0, \quad \left(\text{mod. } \frac{n}{D(n, m)}\right). \tag{1}$$

Infatti, nell'uguaglianza

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

il primo membro e il secondo fattore del secondo membro sono interi, quindi se p^α e p^β sono le massime potenze di p primo che dividono rispettivamente n e m ed è $\alpha > \beta$, il primo membro risulta divisibile per $p^{\alpha-\beta}$.

c) Denotiamo, secondo PEANO, con mp(a, b) l'esponente della massima potenza di a che divide b. Vale la nota proposizione seguente [5].

Essendo p *un intero primo dispari, se* mp(p, a − 1) ≥ 1 *è*:

$$\text{mp}(p, a^n - 1) = \text{mp}(p, a-1) + \text{mp}(p, n). \tag{2}$$

[5] Cfr. M. CIPOLLA, *Sui numeri composti* P, *che verificano la congruenza di Fermat*, $a^{P-1} \equiv 1$ (mod. P), « Annali di Mat. », serie 3ª, t. 9°, 1903-04, p. 133; l. c. in [1], p. 281.

Se $\mathrm{mp}(2,\ a-1) \geq 1$ *è*:

(3) $$\mathrm{mp}(2,\ a^n-1) \geq \mathrm{mp}(2,\ a-1) + \mathrm{mp}(2,\ n),$$

e nella (3) *vale il segno* $>$ *allora ed allora soltanto che* n *è pari e* $\mathrm{mp}(2,\ a-1) = 1$.

A tale asserto si perviene subito elevando a potenza n-*esima* le due eguaglianze

$$a = 1 + lp^h,\ (l \text{ primo con } p);\quad a = 1 + l2^h,\ (l \text{ dispari})$$

ed esaminando i varî termini dei relativi sviluppi binomiali quando si ricordi la (1).

d) Per induzione si stabilisce subito l'identità

$$(-1)^{s+1}\binom{a}{s} = \frac{a}{s}\sum_{i\ 0}^{s-1}(-1)^i\binom{a}{i}.$$

3. Sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità (mod. p^α), con p primo dispari. — Sia $\rho = p^\pi\lambda$, $(0 \leq \pi \leq \alpha-1,\ \lambda$ divisore di $p-1)$ un divisore di $\varphi(p^\alpha)$, ($\varphi(n)$ indicatore di EULER); la congruenza

(1) $$t^\rho \equiv 1,\quad (\text{mod. } p^\alpha)$$

ammette ρ radici che costituiscono un sistema completo di radici ρ-*esime* dell'unità (mod. p^α).

TEOREMA. *Condizione necessaria, e quando sia verificata una almeno delle due uguaglianze* $\pi = 0$, $\pi = \alpha - 1$ *anche sufficiente, perchè* ρ *interi a due a due incongrui* (mod. p^α)

(2) $$t_0,\ t_1, \ldots,\ t_{\rho-1}$$

costituiscano un sistema completo di radici ρ-*esime dell'unità* (mod. p^α) *è che valgono le congruenze seguenti, nelle quali* $\nu = \mathrm{mp}(p,\ k)$:

(A) $$\begin{cases} Q_k(p^\alpha) \equiv 0,\ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), & \text{per } k \not\equiv 0,\ (\text{mod. } \lambda) \text{ e } 0 < k < \rho \\ Q_{s\lambda}(p^\alpha) \equiv \rho,\ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), & \text{per } k = s\lambda, \text{ e } 0 \leq s \leq p^\pi. \end{cases}$$

La stessa proposizione vale per le congruenze seguenti:

(B) $$\begin{cases} R_k(p^\alpha) \equiv 0, & (\text{mod. } p^\alpha), \text{ per } k \not\equiv 0,\ (\text{mod. } \lambda) \\ R_{s\lambda}(p^\alpha) \equiv (-1)^{s(\lambda-1)}\binom{p^\pi}{s}, & (\text{mod. } p^\alpha). \end{cases}$$

La stessa proposizione vale per la seguente identità nel campo d'integrità *definito da* (mod. p^α)

$$\text{(C)} \qquad F(t) = \prod_{i=0}^{\rho-1}(t - t_i) \equiv (t^\lambda - 1)^{p^\pi}, \quad (\text{mod. } p^\alpha).$$

Le (A) *sono necessarie.* Cominciamo coll'osservare che, essendo per le nostre posizioni

$$(a + p^\alpha)^k \equiv a^k, \quad (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}),$$

la somma $Q_k(p^\alpha)$ varia per multipli di $p^{\alpha+\nu}$ quando si variano gl'interi t_i per multipli di p^α. Detta t una radice primitiva della (1), un sistema completo di radici della (1) stessa è $t^0 = 1,\ t,\ t^2, \dots,\ t^{\rho-1}$, quindi

$$\text{(3)} \qquad Q_k(p^\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{\rho-1} t_i^{ki} = \frac{t^{\rho k} - 1}{t^k - 1}, \quad (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}).$$

Quando $k \not\equiv 0$, (mod. λ), $t^k - 1$ è primo con p e dalla (1) soddisfatta da t, tenendo conto dell'osserv. art. 2. *c*), segue la prima delle (A).

Quando $k = s\lambda$, essendo $1 \leq \alpha - \pi \leq \text{mp}\,(p, t^\lambda - 1)$, posto $\nu = \text{mp}\,(p, s)$, $(\nu \geq 0)$, per l'osserv. art. 2. *c*), è $h = \text{mp}\,(p, t^{s\lambda} - 1) \geq \alpha - \pi + \nu$, cioè

$$t^{s\lambda} = 1 + lp^h, \quad (l \text{ primo con } p);$$

ne segue

$$t^{\rho s\lambda} = 1 + \binom{\rho}{1} lp^h + \binom{\rho}{2} l^2 p^{2h} + \dots$$

e per la (3)

$$Q_{s\lambda}(p^\alpha) \equiv \rho + \binom{\rho}{2} lp^h + \dots, \quad (\text{mod. } p^{\alpha+\nu});$$

tutti i termini al secondo membro di questa congruenza a partire dal secondo, quando esistano, sono divisibili per $p^{\alpha+\nu}$ e ne segue la seconda delle (A).

OSSERVAZIONE. Le (A) sono necessarie per qualunque valore non negativo di k (anche per $k > \rho$).

Le (B) *sono necessarie.* Esse si verificano per $k = 0$, $k = 1$; si dimostrano per induzione ammettendole pei valori minori di k. Trascurando al primo membro di (I) (art. 2), in cui si faccia $m = p^\alpha$, termini multipli di $p^{2\alpha}$ otteniamo (per brevità si pone $R_k = R_k(p^\alpha)$, $Q_k = Q_k(p^\alpha)$) per $k = s\lambda$

$$\text{(4)} \qquad \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{i\lambda} R_{i\lambda} Q_{(s-i)\lambda} + (-1)^{s\lambda} s\lambda R_{s\lambda} \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^{2\alpha}),$$

e per $k = s\lambda + h$, $(0 < h < \lambda)$

$$\text{(5)} \quad \sum_{i=0}^{s} (-1)^{i\lambda} R_{i\lambda} Q_{k-i\lambda} + \sum_{i=1}^{s} (-1)^{k-i\lambda} R_{k-i\lambda} Q_{i\lambda} + (-1)^k k R_k \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^{2\alpha}).$$

Supponiamo in primo luogo $k = s\lambda$; risulta $\nu = \text{mp}(p, s)$ e poniamo $\gamma = \text{mp}(p, i)$, $\delta = \text{mp}(p, s - i)$. È evidente che in qualunque caso è $\pi - \gamma + \delta \geq \nu$, poichè $s \leq p^\pi$ e per $\gamma > \delta$ è necessariamente $\delta = \nu$; quindi dalla (4), tenendo conto delle (B) valevoli per indici minori di k e delle (A), otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i \rho \binom{p^\pi}{i} + (-1)^{s\lambda} s\lambda R_{s\lambda} \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}).$$

Da questa congruenza per l'osserv. art. 2. *d*), segue la seconda delle (B).

Sia in secondo luogo $k \not\equiv 0$, (mod. λ), cioè valga la (5). Abbiamo posto $\nu = \text{mp}(p, k)$ e poniamo inoltre $\gamma = \text{mp}(p, i)$, $\delta = \text{mp}(p, k - i\lambda)$. L' i-*esimo* termine della prima sommatoria in (5) è divisibile per $p^{\alpha+\pi-\gamma+\delta}$, mentre ogni termine della seconda sommatoria è divisibile per $p^{\alpha+\pi}$. Essendo in ogni caso $\alpha + \pi \geq \alpha + \nu$, $\alpha + \pi - \gamma + \delta \geq \alpha + \nu$ concludiamo

$$(-1)^k k R_k \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^{\alpha+\nu})$$

da cui, dividendo per k, segue la prima delle (B).

La (C) *è necessaria.* Infatti se gl'interi (2) costituiscono un sistema completo di radici ρ-*esime* dell'unità (mod. p^α), soddisfano alle (B) per cui

$$(6) \qquad F(t) = \prod_{i=0}^{\rho-1}(t - t_i) \equiv \sum_{s=0}^{p^\pi}(-1)^s \binom{p^\pi}{s} t^{\rho - s\lambda} = (t^\lambda - 1)^{p^\pi}, \quad (\text{mod. } p^\alpha).$$

Per $\pi = 0$ *oppure* $\pi = \alpha - 1$ *la* (C) *è sufficiente, le* (B) *sono sufficienti, le* (A) *sono sufficienti.* Infatti, essendo $F(t_i) = 0$, per la (6) risulta

$$(7) \qquad (t_i^\lambda - 1)^{p^\pi} \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$

e la sufficienza della (C) è dimostrata per $\pi = 0$ (cioè $\rho = \lambda$). Sia $\alpha = \pi + 1$; la (7) ci dice che la differenza $t_i^\lambda - 1$ è divisibile per p, cioè

$$t_i^\lambda = 1 + l_i p^\omega, \quad (l_i \text{ primo con } p, \ \omega \geq 1).$$

Risulta (art. 2. *c*))

$$t_i^\rho = t_i^{p^\pi \lambda} \equiv 1, \quad (\text{mod. } p^{\pi+\omega})$$

con $\pi + \omega \geq \alpha$; la sufficienza di (C) è dimostrata anche per $\pi = \alpha - 1$.

Poichè dalle (A) seguono le (B) e dalle (B) segue la (C), anche le (A) sono sufficienti e le (B) sono sufficienti.

OSSERVAZIONI. Come corollarî del teorema precedente abbiamo:

a) Se $\Psi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{\rho-1})$ è un polinomio omogeneo di grado assoluto k non multiplo di λ, a coefficienti interi, simmetrico nelle ρ indeterminate

$x_0, x_1, \dots, x_{\rho-1}$, detto $(t_0, t_1, \dots, t_{\rho-1})$ un sistema completo di radici ρ-*esime* dell'unità (mod. p^α) risulta ([6])

$$\Psi_k(t_0, t_1, \dots, t_{\rho-1}) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^\alpha).$$

b) Sia $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinomio a coefficienti interi, simmetrico, in n indeterminate $x_1, x_2, \dots, x_n$, di cui nessun termine abbia grado multiplo dell'intero $\lambda = D(n, p-1)$; poniamo $\rho = D(n, \varphi(p^\alpha))$ e diciamo $a_0, a_1, \dots, a_{\sigma-1}$ i $\sigma = \varphi(p^\alpha)/\rho$ residui ρ-*ici* (mod. p^α).

Ogni congruenza

$$z^\rho \equiv a_i, \quad (\text{mod. } p^\alpha), \qquad (i = 0, 1, \dots, \sigma - 1)$$

col sistema delle sue radici $z_{i,0}, z_{i,1}, \dots, z_{i,\rho-1}$, fornisce una soluzione $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ della congruenza

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$

quando si prendano i numeri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a n/ρ a n/ρ eguali a ciascuno dei numeri $z_{i,0}, z_{i,1}, \dots, z_{i,\rho-1}$ ([7]).

4. Sulle funzioni simmetriche delle radici 2^ω-esime dell'unità (mod. 2^α). — Tralasciamo il caso banale $\omega = 0$ pel quale si ha l'unica radice 1 (mod. 2^α).

Sia $\alpha \geq 3$. Per $1 \leq \omega \leq \alpha - 2$ le radici della congruenza

$$t^{2^\omega} \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2^\alpha) \tag{1}$$

sono a due a due opposte in numero di $2^{\omega+1}$, date dalla formola ([8])

$$\pm a^k, \; (a = 5^{2^{\alpha-\omega}}; \; k = 0, 1, \dots, 2^\omega - 1). \tag{2}$$

Teorema. *Condizione necessaria, e quando sia $\omega = \alpha - 2$ anche sufficiente, perchè $2^{\omega+1}$ interi*

$$t_0, t_1, \dots, t_{2^{\omega+1}-1}, \qquad (1 \leq \omega \leq \alpha - 2) \tag{3}$$

a due a due incongrui (mod. 2^α) *costituiscano un sistema completo di radici 2^ω-esime dell'unità* (mod. 2^α) *è che valgano le congruenze seguenti, nelle quali* $\nu = \text{mp}(2, 2s)$:

$$(\text{A}') \quad \begin{cases} Q_{2s+1}(2^\alpha) \equiv 0, & (\text{mod. } 2^\alpha); \quad (0 \leq s \leq 2^\omega - 1) \\ Q_{2s}(2^\alpha) \equiv 2^{\omega+1}, & (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu}); \quad (0 \leq s \leq 2^\omega). \end{cases}$$

([6]) La prop. *a)* limitatamente al caso $\alpha = 1$ (cioè modulo primo), si trova in A. Pierce, l. c. in ([1]).

([7]) La prop. *b)* per $\alpha = 1$ e n divisore primo di $p - 1$ si trova dimostrata in G. Frattini, *Sulle congruenze omogenee...*, « Periodico di Mat. », serie 3, vol. 11, 1914, p. 49.

([8]) Cfr. P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie, Erster Teil*, Leipzig, 1902, p. 332.

La stessa proposizione vale per le congruenze seguenti:

$$(\mathrm{B}')\quad \begin{cases} R_{2s+1}(2^\alpha) \equiv 0, & (\mathrm{mod.}\ 2^\alpha) \\ R_{2s}(2^\alpha) \equiv (-1)^s \binom{2^\omega}{s}, & (\mathrm{mod.}\ 2^\alpha). \end{cases}$$

La stessa proposizione vale per la seguente identità, nel campo d'integrità definito da (mod. 2^α)

$$(\mathrm{C}')\qquad F(t) = \prod_{i\ 0}^{2^{\omega+1}-1} (t - t_i) \equiv (t^2 - 1)^{2^\omega}, \quad (\mathrm{mod.}\ 2^\alpha).$$

Le (A′) *sono necessarie.* Osserviamo che essendo

$$(a + 2^\alpha)^k \equiv a^k, \quad (\mathrm{mod.}\ 2^{\alpha+\nu}), \quad \nu = \mathrm{mp}\,(2,\ k)$$

le somme $Q_k(2^\alpha)$ variano per multipli di $2^{\alpha+\nu}$ allorchè i numeri (3) si variano per multipli di 2^α.

La prima delle (A′) è evidente perchè gl'interi (3), per la (2), sono a due a due opposti (mod. 2^α). Quanto alla seconda delle (A′), per la (2) risulta

$$(4)\qquad Q_{2s}(2^\alpha) \equiv 2\sum_{r\ 0}^{2^\omega-1} a^{2rs} = 2\,\frac{a^{s2^{\omega+1}} - 1}{a^{2s} - 1}, \quad (\mathrm{mod.}\ 2^{\alpha+\nu}).$$

D'altronde è

$$5^{c2^\beta} = (1 + 2^2)^{c2^\beta} = 1 + l2^{\beta+2}$$

con l dispari, se c è dispari; per questo dalla (4) si ricava la seconda delle (A′).

Osservazione. Le (A′) sono necessarie per qualunque valore non negativo di s (anche per $s \geq 2^\omega$).

Le (B′) *sono necessarie.* Esse si verificano per $s = 0$; si dimostrano per induzione ammettendole pei valori minori di s. Trascurando al primo membro di (I) (art. 2) in cui si faccia $m = 2^\alpha$, termini multipli di $2^{2\alpha}$ otteniamo (per brevità si pone $R_k = R_k(2^\alpha)$ e $Q_k = Q_k(2^\alpha)$):

$$\sum_{i=0}^{s-1} R_{2i} Q_{2(s-i)} + 2sR_{2s} \equiv 0, \quad (\mathrm{mod.}\ 2^{2\alpha})$$

$$\sum_{i=0}^{s} R_{2i} Q_{2(s-i)+1} - \sum_{i=1}^{s} R_{2(s-i)+1} Q_{2i} - (2s+1)R_{2s+1} \equiv 0, \quad (\mathrm{mod.}\ 2^{2\alpha}).$$

Procedendo in modo del tutto analogo a quello seguito per dimostrare la necessità delle (B) (art. 3) si perviene a dimostrare la necessità delle (B′).

La necessità della (C′), la sufficienza per $\omega = 2^{\alpha-2}$ della (C′), delle (B′) e delle (A′) si dimostrano in modo analogo a quello seguito all'art. precedente per la (C), le (B) e le (A).

Sia $\alpha = 2$; cioè consideriamo il (mod. 4). Le radici, quando siano in numero maggiore di uno, sono gl'interi 1 e 3 e si verifica subito che valgono le (A'), (B') e (C') anche in questo caso purchè in esse si faccia $\omega = 0$.

Per $\alpha = 1$, cioè per il (mod. 2), si ha l'unica radice 1.

Osservazione. Quando, per α qualunque, si ha l'unica radice 1 si verifica

$$Q_k(2^\alpha) \equiv 1, \ (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu}) \quad \text{con} \quad \nu = \text{mp}\,(2,\ k); \quad R_0(2^\alpha) \equiv R_1(2^\alpha) \equiv 1, \ (\text{mod. } 2^\alpha).$$

5. Sui sistemi di interi ottenuti colla riunione di più sistemi completi di radici dell'unità (mod. p^α), p primo pari o dispari. — Procedendo per induzione da $a-1$ ad a, e verificando per $a = 1$ si dimostra subito ciò che segue.

Siano

$$(1) \qquad t_0,\ t_1, \ldots,\ t_{a\rho-1}$$

$a\rho$ interi ottenuti colla riunione di a sistemi completi di radici dell'unità (mod. p^α), ciascun sistema essendo costituito da ρ interi. Poniamo

$$(2) \qquad \begin{cases} Q_k(p^\alpha,\ a) = \sum\limits_{i=0}^{a\rho-1} t_i^k \\ \prod\limits_{i=0}^{a\rho-1} (t + t_i) = \sum\limits_{k=0}^{a\rho} R_k(p^\alpha,\ a) t^{a\rho-k}; \quad R_k(p^\alpha,\ a) = 0 \quad \text{per} \quad k > a\rho. \end{cases}$$

Osserviamo che per le posizioni (2) dell'art. 1 è

$$Q_k(p^\alpha) = Q_k(p^\alpha,\ 1); \quad R_k(p^\alpha) = R_k(p^\alpha,\ 1).$$

Sia in primo luogo p primo dispari, $\rho = p^\pi \lambda$, $0 \leq \pi \leq \alpha - 1$, λ divisore di $p-1$; abbiamo

$$(\text{A}_1) \quad \begin{cases} Q_k(p^\alpha,\ a) \equiv 0, \ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), \quad \text{per} \quad k \not\equiv 0, \ (\text{mod. } \lambda); \quad \nu = \text{mp}\,(p,\ k) \\ Q_{s\lambda}(p^\alpha,\ a) \equiv a\rho, \ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), \quad \text{per} \quad k = s\lambda; \qquad \text{id.} \end{cases}$$

$$(\text{B}_1) \quad \begin{cases} R_k(p^\alpha,\ a) \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p^\alpha), \quad \text{per} \quad k \not\equiv 0, \ (\text{mod. } \lambda) \\ R_{s\lambda}(p^\alpha,\ a) \equiv (-1)^s \dbinom{ap^\pi}{s}, \quad (\text{mod. } p^\alpha). \end{cases}$$

Sia in secondo luogo $p = 2$, $\rho = 2^{\omega+1}$ (quindi necessariamente $\alpha \geq 2$); abbiamo:

$$(\text{A}_2) \quad \begin{cases} Q_{2s+1}(2^\alpha,\ a) \equiv 0, \ (\text{mod. } 2^\alpha) \\ Q_{2s}(2^\alpha,\ a) \equiv a2^{\omega+1}, \ (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu}); \quad \nu = \text{mp}\,(2,\ 2s) \end{cases}$$

$$(\text{B}_2) \quad \begin{cases} R_{2s+1}(2^\alpha,\ a) \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 2^\alpha) \\ R_{2s}(2^\alpha,\ a) \equiv (-1)^s \dbinom{a2^\omega}{s}, \ (\text{mod. } 2^\alpha). \end{cases}$$

Nel caso singolare $p=2$, $\rho=1$ ogni t_i è congruo a 1 (mod. 2^α); abbiamo:

$$(A_3) \qquad Q_k(2^\alpha, a) \equiv a, \quad (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu}), \quad \text{ove} \quad \nu = \text{mp}(2, k),$$

$$(B_3) \qquad R_k(2^\alpha, a) \equiv \binom{a}{k}, \ (\text{mod. } 2^\alpha).$$

6. Sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità secondo un modulo composto qualunque. — Sia $m = p^\alpha q^\beta ...$, con $p, q, ...$ numeri primi distinti; denotiamo con $(u_0, u_1, ..., u_{\rho-1})$ un sistema completo di radici dell'unità (mod. p^α) ($\rho = p^\pi \lambda$, λ divisore di $p-1$, $0 \leq \pi \leq \alpha - 1$) e analogamente con $(v_0, v_1, ..., v_{\sigma-1})$ un sistema completo di radici dell'unità (mod. q^β),... Determinati gl'interi ausiliarî $A, B, ...$ soddisfacenti alle congruenze

$$(1) \quad A \equiv 1, \ (\text{mod. } p^\alpha); \ \equiv 0, \left(\text{mod. } \frac{m}{p^\alpha}\right); \quad B \equiv 1, \ (\text{mod. } q^\beta); \ \equiv 0, \left(\text{mod. } \frac{m}{q^\beta}\right); ...$$

pel sistema dei $\tau = \rho\sigma ...$ interi a due a due incongrui (mod. m)

$$(2) \qquad Au_i + Bv_j + ... \quad (0 \leq i \leq \rho - 1, \ 0 \leq j \leq \sigma - 1, ...)$$

si introducano le notazioni $Q_k(m)$ e $R_k(m)$ date dalle (2) art. 1.

Evidentemente gl'interi (2) sono a τ/ρ a τ/ρ congrui (mod. p^α) e si possono considerare ottenuti riunendo τ/ρ sistemi completi di radici dell'unità (mod. p^α); cioè l'insieme degl'interi (2) si trova nelle stesse condizioni del sistema (1) dell'art. precedente ove si ponga $a = \tau/\rho$. Dai resultati dell'art. precedente deduciamo:

Teorema. *Se* p *è primo dispari e* $\nu = \text{mp}(p, k)$ *si ha*:

$$(A_4) \qquad \begin{cases} Q_k(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), & \text{per} \quad k \not\equiv 0, \ (\text{mod. } \lambda) \\ Q_{s\lambda}(m) \equiv \tau, \ (\text{mod. } p^{\alpha+\nu}), & \text{per} \quad k = s\lambda. \end{cases}$$

$$(B_4) \qquad \begin{cases} R_k(m) \equiv 0, & (\text{mod. } p^\alpha) \\ R_{s\lambda}(m) \equiv (-1)^{s(\lambda-1)} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\lambda} \\ s \end{pmatrix}, & (\text{mod. } p^\alpha). \end{cases}$$

Se $p=2$ *e* $\rho \geq 2$ (*il che porta necessariamente* $\alpha \geq 2$) *e* $\nu = \text{mp}(2, 2s)$, *si ha*:

$$(A_5) \qquad Q_{2s+1}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } 2^\alpha); \quad Q_{2s}(m) \equiv \tau, \ (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu})$$

$$(B_5) \qquad R_{2s+1}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } 2^\alpha); \quad R_{2s}(m) \equiv (-1)^s \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2} \\ s \end{pmatrix}, \ (\text{mod. } 2^\alpha).$$

Se $p=2$ *e* $\rho=1$ *e* $\nu = \text{mp}(2, k)$

$$Q_k(m) \equiv \tau, \ (\text{mod. } 2^{\alpha+\nu}); \quad R_k(m) \equiv \binom{\tau}{k}, \ (\text{mod. } 2^\alpha).$$

Osservazione. Le radici r-*esime* dell'unità (mod. m) cioè le radici della congruenza

$$t^r \equiv 1, \text{ (mod. } m)$$

sono in numero di $\tau = \rho\sigma ...$, ove

$$\rho = \frac{\varphi(p^\alpha)}{D(r, \varphi(p^\alpha))} = p^\pi \lambda, \quad \sigma = \frac{\varphi(q^\beta)}{D(r, \varphi(q^\beta))} = q^\varkappa \mu, ...$$

e sono precisamente gl'interi (2) per questi valori di ρ, σ, ... Per l'insieme di tali radici vale dunque la proposizione precedente.

Inoltre, detto $(t_0, t_1, ..., t_{\tau-1})$ un sistema di radici r-*esime* dell'unità (mod. m) e posto

$$F(t) = \prod_{i=0}^{\tau-1} (t - t_i),$$

valgono le identità, ((C), art. 3):

$$F(t) \equiv (t^\lambda - 1)^{\frac{\tau}{\lambda}}, \text{ (mod. } p^\alpha); \quad F(t) \equiv (t^\mu - 1)^{\frac{\tau}{\mu}}, \text{ (mod. } q^\beta), ...$$

7. Sul caso in cui gl'interi ρ, σ, ... dell'art. precedente sono tutti pari. — É noto ([9]) che se $t_0, t_1, ..., t_{\tau-1}$ sono τ numeri tali che

(1) $$t_i + t_{\tau-1+i} = m, \qquad (i = 0, 1, ..., \tau - 1)$$

e poniamo per $k \geq 0$

$$A_k = \sum_{i=0}^{\tau-1} t_i^k; \quad \prod_{i=0}^{\tau-1} (t + t_i) = \sum_{k=0}^{\tau} C_k t^{\tau-k},$$

valgono le due uguaglianze seguenti:

$$2A_{2h+1} = \sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{2h+1}{i} m^{2h+1-i} A_i;$$

$$2C_{2h+1} = \sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{\tau - i}{2h - i + 1} m^{2h+1-i} C_i.$$

Quando m sia intero, e le somme C_i siano razionali, ciascuna con denominatore primo con m, le due uguaglianze precedenti dànno luogo alle congruenze che seguono

(I) $$2A_{2h+1} \equiv \binom{2h+1}{3} m^3 A_{2h-2} - \binom{2h+1}{2} m^2 A_{2h-1} + (2h+1) m A_{2h}, \text{ (mod. } m^4)$$

(II) $$2C_{2h+1} \equiv -\binom{\tau - 2h - 1}{2} m^2 C_{2h-1} + (\tau - 2h) m C_{2h}, \text{ (mod. } m^3).$$

([9]) Cfr. N. Nielsen, l. c. in ([2]), p. 283, formula (4), p. 284, formula (9).

Quando $\rho = p^\pi \lambda$, $\sigma = q^\varkappa \mu, \ldots$ siano interi pari, fra le radici dell'unità (mod. p^α), (mod. q^β),... figura -1; perciò se $t_0, t_1, \ldots, t_{\tau-1}$ denotano *i minimi resti positivi* (mod. m) *scritti in ordine crescente* dei numeri (2) dell'art. precedente, si verifica la (1) e quindi sono applicabili le congruenze (I) e (II) sopra scritte. Veniamo a dimostrare le proposizioni seguenti:

Teorema I. *Posto* $m' = D\left(m, \frac{\tau}{2}\right)$ *valgono le congruenze seguenti*:

$$2Q_{2h+1}(m) \equiv (2h+1)mQ_{2h}(m), \quad (\text{mod. } m'm^3), \tag{2}$$

$$2R_{2h+1}(m) \equiv (\tau - 2h)mR_{2h}(m), \quad (\text{mod. } m^3). \tag{3}$$

Queste due congruenze, ambedue scritte secondo (mod. m^3), quando si ammettano i resultati dell'art. 6, sono dimostrate da un teorema di N. Nielsen ([10]) limitatamente ai valori positivi di h che non superano alcuno degl'interi $\lambda/2 - 1$, $\mu/2 - 1, \ldots$; noi veniamo a dimostrarle valide (la prima secondo (mod. $m'm^3$)) per qualunque valore di h.

Le (2) e (3) si verificano per $h = 0$. Si procede per induzione da $h-1$ a h. Dimostriamo la (2); se la ammettiamo per l'indice $h-1$ e denotiamo con L un intero opportuno abbiamo:

$$2Q_{2h-1}(m) = (2h-1)mQ_{2h-2}(m) + Lm'm^3.$$

Raddoppiamo la (I) e sostituiamo in essa $Q_k(m)$ in luogo di A_k; trascurando termini multipli di m^4 nel caso di m dispari e di $2m^4$ nel caso di m pari otteniamo

$$4Q_{2h+1}(m) \equiv \left[2\binom{2h+1}{3} - (2h-1)\binom{2h+1}{2}\right]m^3 Q_{2h-2}(m) +$$
$$+ 2(2h+1)mQ_{2h}(m), \quad (\text{mod. } m^4) \quad \text{oppure} \quad (\text{mod. } 2m^4)$$

secondochè m è dispari o pari. La somma $Q_{2h-2}(m)$ risulta in ogni caso pari; questo fatto e le congruenze (A_4) e (A_5) dell'art. 6 ci assicurano che è

$$Q_{2h-2}(m) \equiv 0, \ (\text{mod. } 2m'); \quad m' = D\left(m, \frac{\tau}{2}\right),$$

tenendo conto di questa congruenza nella precedente e dividendo per 2 otteniamo la (2).

Analogamente si procede per dimostrare la (3), basandoci sulla (II).

Da questa proposizione e dalle congruenze dimostrate all'art. precedente segue:

([10]) Cfr. N. Nielsen, l. c. in ([2]), p. 286, formule (23), (24).

TEOREMA II. *Posto per* p *primo (pari o dispari)*:

$$(4)\quad \nu = \mathrm{mp}(p,\ 2h);\quad p^{\delta} = D\left(p^{2\alpha},\ p^{\alpha}\frac{\tau}{2},\ 2h(2h+1)\right);\quad p^{\varepsilon} = D(p^{\alpha},\ \tau - 2h)$$

valgono le congruenze seguenti, nelle quali per p = 2 *è da fare* $\lambda = 2$.

Per 2h $\equiv\mid\equiv$ 0, (mod. λ) (*quindi necessariamente* p ≥ 5)

$$(5)\quad Q_{2h}(m) \equiv 0,\ (\mathrm{mod.}\ p^{\alpha+\nu});\quad Q_{2h+1}(m) \equiv 0,\ (\mathrm{mod.}\ p^{2\alpha+\delta})$$

$$(6)\quad R_{2h}(m) \equiv 0,\ (\mathrm{mod.}\ p^{\alpha});\quad R_{2h+1}(m) \equiv 0,\ (\mathrm{mod.}\ p^{2\alpha+\varepsilon}).$$

Per 2h = sλ

$$7)\quad Q_{s\lambda}(m) \equiv \tau,\ (\mathrm{mod.}\ p^{\alpha+\nu});\quad 2Q_{s\lambda+1}(m) \equiv (s\lambda+1)m\tau,\ (\mathrm{mod.}\ p^{2\alpha+\delta})$$

$$(8)\quad \begin{cases} R_{s\lambda}(m) \equiv (-1)^{s}\begin{pmatrix}\frac{\tau}{\lambda}\\ s\end{pmatrix},\ (\mathrm{mod.}\ p^{\alpha}) \\ 2R_{s\lambda+1}(m) \equiv (-1)^{s}(\tau - s\lambda)m\begin{pmatrix}\frac{\tau}{\lambda}\\ s\end{pmatrix},\ (\mathrm{mod.}\ p^{2\alpha+\varepsilon}). \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Nel caso particolare notevole $\rho = \varphi(p^{\alpha})$, $\sigma = \varphi(q^{\beta}), \ldots$ risulta $\tau = \rho\sigma \ldots = \varphi(m)$, e i τ interi t_i sono gl'interi positivi minori di m e primi con m. Le formule (2), (3), (5), (6), (7), (8) dànno in questo caso, ed in ispecial modo per m primo, proposizioni classiche della teoria dei numeri (ved. art. 1) ([11]).

([11]) Per ciò che riguarda la forma che assumono nel caso particolare $\tau = \varphi(m)$ le proposizioni stabilite, e le loro applicazioni allo studio delle somme delle potenze simili degl'interi naturali e dei coefficienti del fattoriale ved. le due note: G. RICCI, *Sulle funzioni simmetriche di interi costituenti uno o più sistemi ridotti di resti secondo un modulo composto*, « Annali delle Università Toscane », Nuova serie, Vol. XIII, 1930, pp. 177-198; e *Sulle somme delle potenze simili degl'interi naturali e sui coefficienti del fattoriale*, Ibid., pp. 199-216.

Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations.

N. Bogoliouboff (à Kieff (Ucraine)).

L'objet du présent travail, inspiré par les profondes recherches de M. L. Tonelli, consiste dans l'étude des problèmes de minima relatifs à des intégrales curvilignes dépendant des coordonnées du point courant de la courbe ainsi que de leurs dérivées jusqu'au 2me ordre inclusivement.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants:

I. (§ 2) — *Le problème de minimum absolu de l'intégrale curviligne*

$$I(C) = \int_0^{L_C} f\left(x,\ y,\ \theta,\ \frac{d\theta}{ds}\right) ds$$

(où x, y, θ, s sont respectivement les coordonnées, l'angle de direction et l'arc du point courant de la courbe C, L_C la longueur de C et où $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction continue, périodique avec la période 2π par rapport à θ);

dans le camp $\mathfrak{M}$ *des courbes* C (vérifiant certaines conditions frontières) telles que leurs angles de direction $\theta(s)$ sont à variation bornée;

n'admet en général aucune solution.

II. (§ 3) — *Si* $f(x, y, \theta, z)$ *vérifie l'inégalité*

$$|f(x,\ y,\ \theta,\ z)| \leqq A\,|z|^{\delta} + B$$

(où A, B sont bornés pour x, y bornés, δ un nombre positif fixe, inférieur à l'unité);

alors le problème de minimum absolu de l'intégrale curviligne I(C) *dans le champ* D des courbes (vérifiant les mêmes conditions frontières que les courbes du champ $\mathfrak{M}$) telles que leurs angles de direction $\theta(s)$ sont absolument continus;

n'admet en général aucune solution.

III. (§ 8) — *Si* $f(x, y, \theta, z)$ *est une fonction deux fois dérivable, vérifiant l'inégalité*

$$A(x,\ y)\,|z|^{1+\delta} + B\,x,\ y) \geqq f(x,\ y,\ \theta,\ z) \geqq k\,|z|^{1+\delta}$$

(où k, δ sont des nombres positifs fixes, $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornés pour les valeurs bornées des arguments);

alors la limite (pour $\varepsilon \to 0$) de la borne inférieure de l'intégrale curviligne

$$I(C) = \int_0^{Lc} f(x, y, \theta, \theta')ds$$

dans le champ $D_\varepsilon(C)$ des courbes L de la classe $\mathfrak{K}$ admettant avec C le voisinage (ε) d'ordre (1);

est égale à l'intégrale curviligne

$$J(C) = \int_\theta^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta')ds.$$

IV. (§ 9) — *Si* f(x, y, θ, z) *vérifie certaines conditions explicitées au début de* § 9, *alors afin qu'il existe la courbe réalisant le minimum absolu de* I(C) *dans* D, *il faut et il suffit que parmi les courbes* (toujours existant) *qui réalisent le minimum absolu de* J(C) *dans* D, *il existe la courbe n'ayant aucun arc commun avec des « courbes singulières » relatives au problème de minimum posé.*

V. (§ 10) — *Si* f(x, y, θ, z) *vérifie les conditions du* § 9, *alors dans le champ* D *il existe toujours au moins une solution de l'équation d'Euler* (relative à $I(C)$) composée d'un nombre fini des extremales.

De plus, *quel que soit le nombre positif* ε, *on peut toujours lui faire correspondre dans le champ* D *au moins une solution de l'équation d'Euler* (relative à $I(C)$) *qui donne à* I(C) *la valeur différant au plus par* ε *de la borne inférieure* i_D.

§ **1.** Dans ce travail nous allons étudier les problèmes de minima de l'intégrale curviligne

$$I(C) = \int_{(C)} F(x, y, x', y', x'', y'')dt \tag{1}$$

où $F(x, y, x', y', x'', y'')$ est une fonction continue pour $x'^2 + y'^2 \neq 0$, à l'aide d'une méthode directe qui présente au fond le developpement approprié de la méthode avec laquelle M. L. Tonelli a traité (au point de vue de l'existence de minimum) le cas incomplètement régulier de l'intégrale curviligne

$$\int F(x, y, x', y')dt.$$

Remarquons tout d'abord que $I(C)$ peut toujours se mettre sous la forme

(2) $$\int_0^{L_C} f(x,\ y,\ \theta,\ \theta')ds$$

où $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction continue admettant la période 2π par rapport à θ; x, y, θ sont respectivement les coordonnées et l'angle de direction du point courant de la courbe C exprimés en fonctions de l'arc s et où L_C est la longueur de C.

D'autre part, chaque intégrale du type (2) peut être présentée sous la forme (1) de sorte que les expressions (1), (2) sont absolument équivalentes et il existe la correspondance biunivoque suivante

$$f(x,\ y,\ \theta,\ z) = F(x,\ y,\ \cos\theta,\ \sin\theta,\ -z\sin\theta,\ z\cos\theta)$$

$$F(x,\ y,\ x',\ y',\ x'',\ y'') = f\left(x, y,\ \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'},\ \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est à l'aide de la forme (2) que nous étudierons les propriétés minimales de $I(C)$.

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques définitions fondamentales qui interviennent à chaque instant dans le cours de cet exposé. Soient C, C_0 les deux courbes. On dit qu'elles ont entre elles le voisinage (ε) d'ordre (p) si l'on peut trouver une correspondance biunivoque entre les points de C et de C_0 telle que

$$D_{M_{C_0}M_C} \leqq \varepsilon, \quad |\theta_{M_{C_0}} - \theta_{M_C}| \leqq \varepsilon \ldots |\theta^{(p-1)}_{M_{C_0}} - \theta^{(p-1)}_{M_C}| \leqq \varepsilon$$

où M_{C_0}, M_C — deux points correspondants de C_0, C : $D_{M_{C_0}}$ — la distance entre eux; $\theta_{M_{C_0}}$, θ_{M_C} sont respectivement les angles de direction de C_0 en M_{C_0} et de C en M_C.

Si, quel que soit le nombre positif ε, la courbe C_∞ a le voisinage (ε) d'ordre (p) avec une infinité de courbes appartenant à une suite $C_n(n \to \infty)$ alors C_∞ est dite la courbe d'accumulation d'ordre (p) de la suite C_n. Si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un tel nombre n_ε que toutes les courbes C_n pour $n \geqq n_\varepsilon$ aient avec C_∞ le voisinage (ε) d'ordre (p), alors C_∞ est la courbe limite d'ordre (p) de la suite C_n.

Envisageons à présent une fonction de ligne $I(C)$ définie dans une certaine classe $\mathcal{K}$ de courbes C.

On dit que $I(C)$ est semi-continue inférieurement d'ordre (p) au voisinage d'une courbe C_0 de la classe $\mathcal{K}$ si pour toute une suite C_n de courbes de la classe $\mathcal{K}$, admettant C_0 comme la courbe limite d'ordre (p), on a

$$I(C_n) \geqq I(C_0) - \varepsilon_n, \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Quand il s'agit de voisinage (ε) d'ordre (1)...., semi-continuité inférieure d'ordre (1), on dit tout simplement voisinage (ε)...., semi-continuité inférieure.

§ 2. Considérons à présent un champ D de courbes C possédant les propriétés suivantes:

1°) Les coordonnées x, y des courbes C admettent la répresentation analytique en fonction de l'arc

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

2°) Sur chacune des courbes C existe partout l'angle de direction $\theta(s)$

$$x'(s) = \cos\theta(s), \quad y'(s) = \sin\theta(s).$$

3°) $\theta(s)$ est fonction absolument continue.

Supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ ne soit pas négative pour toutes les valeurs des arguments, de sorte que $I(C)$ a une valeur bien determinée (finie ou infinie) pour toute courbe C du champ consideré: la borne inférieure i_D étant finie ($i_D \geqq 0$), posons le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans le champ D.

Dans tout ce qui sera écrit ci-dessous, nous considérons seulement le cas où le champ D est le champ de toutes les courbes passant par les points donnés A, B avec les angles de direction donnés θ_A, θ_B et possédant les propriétés (1), (2), (3).

Avant d'aborder ce problème, on peut demander si l'on ne peut pas poser le probléme de minimum absolu dans le champ $\mathfrak{M}$ des courbes C vérifiant les mêmes conditions frontiéres que les courbes du champ D et possédant les propriétes (1) et (2).

Sur chacune des courbes C existe l'angle de direction $\theta(s)$ à variation bornée pouvant présenter des discontinuités.

En effet pour toute courbe du champ $\mathfrak{M}$, $\theta(s)$ admet presque partout la dérivée intégrable de sorte que $I(C)$ a une valeur bien déterminée (finie ou infinie) pour toute courbe de ce champ.

Démontrons que la réponse sur cette question est en génerale négative.

Considérons en effet le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$I(C, u) = \int_0^{L_C} f(x, y, \theta, u)\, ds \tag{4}$$

pris suivant la longueur de la courbe C, où $u(s)$ est une fonction arbitraire, dans le champ $\mathfrak{N}$ des courbes C du champ $\mathfrak{M}$ et des fonction arbitraires $u(s)$.

Soit $C_n(x = x_n(s),\ y = y_n(s)),\ u_n(s)$ la suite minimisante de $I(C, u)$ dans $\mathfrak{N}$.

Fixant arbitrairement le nombre positif ε, prenons le nombre n de façon que

$$|\,I(C_n,\ u_n) - j\,| \leqq \varepsilon \tag{5}$$

où j est la borne inférieure de $I(C, u)$ dans $\mathfrak{N}$. Envisageons la fonction

$$\rho_n(s) = \theta_n(s) - \int_0^s u_n(s)ds, \quad 0 \leqq s \leqq L_{C_n}$$

et approximons-la par ia série des fonctions $[\rho_n(s)]_m$ composées, « des droites paralléles à l'axe de s ». Posons

$$\psi_{n,m}(s) = [\rho_n(s)]_m + \int_0^s u_n(s)ds$$

$$\theta_{n,m}(s) = \psi_{n,m}(s) - [\psi_{n,m}(0) - \theta_A] - \left[\frac{\psi_{n,m}(L_{C_n}) - \psi_{n,m}(0) + \theta_A - \theta_B}{L_{C_n}}\right] s$$

on voit aisément que

$$\begin{aligned} &\theta_{n,m}(s) \to \theta_n(s); \quad \theta_{n,m}(0) = \theta_A \\ &\theta'_{n,m}(s) \to u_n(s); \quad \theta_{n,m}(L_{C_n}) = \theta_B . \end{aligned} \tag{6}$$

Remarquons qu'on peut supposer toujours sans restreindre la géneralité que $\theta_n(s)$ n'est pas constante. Considerons alors les fonctions

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \cos(\theta_n + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2)ds, \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \sin(\theta_n + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2)ds$$

où l'on a posé

$$\varphi_1 = s(L_{C_n} - s)\cos\theta_n, \quad \varphi_2 = s(L_{C_n} - s)\sin\theta_n .$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} &F(0,\ 0) = x_B - x_A; \\ &\Phi(0,\ 0) = y_B - y_A; \end{aligned} \quad \left|\frac{\partial(F,\ \Phi)}{\partial(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)}\right|_{\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0} = \tag{7}$$

$$= \left| \int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s)\cos^2\theta_n ds \int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s)\sin^2\theta_n ds - \left(\int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s)\cos\theta_n \sin\theta_n ds\right)^2 \right| = \alpha_n > 0.$$

Envisageons les fonctions

$$F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \cos(\theta_{n,m} + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2)ds, \quad \Phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \sin(\theta_{n,m} + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2)ds.$$

On a d'après (6), (7)

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
&| F_m(0,\ 0) - (x_B - x_A) | \leqq \eta_m, \quad \left| \left| \frac{\partial(F_m,\ \Phi_m)}{\partial(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)} \right|_{\varepsilon_1 \ 0,\, \varepsilon_2 \ 0} \alpha_n \right| \leqq \eta_m \\
&| \Phi_m(0,\ 0) - (y_B - y_A) | \leqq \eta_m, \quad \text{où} \quad \eta_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Remarquons d'autre part que $F_m(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$, $\Phi_m(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ ainsi que leurs dérivées partielles sont uniformément continues par rapport a m.

Il existe donc un nombre δ indépendant de m tel que si

$$| \varepsilon_1 | \leqq \delta, \quad | \varepsilon_2 | \leqq \delta$$

alors au moins pour $m \geqq m_\delta$, où m_δ est un nombre positif suffisemment grand, on a

$$\left| \frac{\partial(F_m,\ \Phi_m)}{\partial(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)} \right| \geqq \frac{\alpha_n}{2}.$$

Prenons un nombre M indépendant de m de façon qu'on ait

$$\left| \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_1} \right| \leqq M, \quad \left| \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_2} \right| \leqq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varepsilon_1} \right| \leqq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varepsilon_2} \right| \leqq M, \qquad (| \varepsilon_1 | \leqq \delta, \quad \varepsilon_2 | \leqq \delta).$$

Alors le théoréme bien connu sur les fonctions implicites montre que si

$$\frac{4 M \eta_m}{\alpha_n} \leqq \delta$$

alors les équations

$$F_m(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = x_B - x_A, \quad \Phi_m(\sigma_1,\ \varepsilon_2) = y_B - y_A$$

ont toujours une et une seule solution $\varepsilon_1^{(m)}$, $\varepsilon_2^{(m)}$ dans le domaine

$$-\delta \leqq \varepsilon_1 \leqq +\delta, \quad -\delta \leqq \varepsilon_2 \leqq +\delta$$

telle que

$$(9) \qquad | \varepsilon_1^{(m)} | \leqq \frac{4 M \eta_m}{\alpha_n}, \quad | \varepsilon_2^{(m)} | \leqq \frac{4 M \eta_m}{\alpha_n}.$$

Construisons à présent la courbe C_m de longueur $L c_n$

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
x &= \overline{x_m(s)} = x_A + \int_0^s \cos(\theta_{n,m} + \varepsilon_1^{(m)} \varphi_1 + \varepsilon_2^{(m)} \varphi_2) ds; \\
y &= \overline{y_m(s)} = y_A + \int_0^s \sin(\theta_{n,m} + \varepsilon_1^{(m)} \varphi_1 + \varepsilon_2^{(m)} \varphi_2) ds;
\end{aligned}
\qquad 0 \leqq s \leqq L c_n
$$

appartenant évidemment au champ $\mathfrak{M}$. On a en effet

$$\overline{x_m(0)} = x_A, \ \overline{x_m(L_{C_n})} = x_B; \quad \overline{\theta_m(0)} = \theta_A$$
$$\overline{y_m(0)} = y_A, \ \overline{y_m(L_{C_n})} = y_B; \quad \overline{\theta_m(L_{C_n})} = \theta_B.$$

Il est aisé de voir que

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} &\overline{x_m(s)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_n(s), \quad \overline{y_m(s)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_n(s), \\ &\overline{\theta_m(s)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta_n(s), \quad \overline{\theta_m(s)'} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_n(s) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$I(\overline{C}_m) = \int_0^{L_{C_n}} f(\overline{x}_m, \overline{y}_m, \overline{\theta}_m, \overline{\theta}'_m) ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{L_{C_n}} f(x_n, y_n, \theta_n, u_n) ds = I(C_n, u_n).$$

Cela étant, prenons un nombre m tel que

$$| I(\overline{C}_m) - I(C_n, u_n) | \leqq \varepsilon$$

d'où l'on déduit, en vertu de (5)

$$| I(\overline{C}_m) - j | \leqq 2\varepsilon, \quad \text{c.-à.-d.} \quad I(\overline{C}_m) \leqq j + 2\varepsilon.$$

Or $\overline{C}_m$ appartenant au champ $\mathfrak{M}$, on a

$$I(\overline{C}_m) \geqq i_{\mathfrak{M}}$$

où $i_{\mathfrak{M}}$ est la borne inférieure de $I(C)$ dans $\mathfrak{M}$. Par conséquent on obtient (ε étant arbitraire positif)

$$i_{\mathfrak{M}} \leqq j.$$

D'autre part, chaque valeur de $I(C)$, où C est une courbe quelconque de $\mathfrak{M}$ est atteinte dans $\mathfrak{N}$ par C, $\theta'(s)$ c.-à.-d.:

$$I(C) = I(C, \theta'(s))$$

de sorte que

$$j \leqq i_{\mathfrak{M}}.$$

Ainsi on s'assure que

$$j = i_{\mathfrak{M}}.$$

On voit donc que si une courbe $C_0(x = x_0(s), \ y = y_0(s), \ \theta = \theta_0(s))$ donne le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ $\mathfrak{M}$, alors C_0, $\theta_0'(s)$ donnent le minimum absolu à $I(C, u)$ dans le champ $\mathfrak{N}$.

Par conséquent, afin qu'il existe la courbe C_0 minimante pour $I(C)$ dans $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit qu'il existe telles $C(x = x(s),\ y = y(s),\ \theta = \theta(s))$, $u(s)$ minimantes $I(C,\ u)$ dans D qu'on ait $u(s) = \theta'(s)$.

Or l'inspection même des conditions de minimum montre que cela est en général impossible.

§ **3.** Démontrons enfin le théoréme si

$$|f(x,\ y,\ \theta,\ z)| \leqq A\,|z|^{\delta} + B$$

où A, B sont bornées pour x, y bornées, δ un nombre positif fixe inférieur à l'unité. Alors le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans la champ D n'admet en generale aucune solution.

Considérons en effet de nouveau le champ $\mathfrak{M}$ et soit $C_n(x = x_n\ s),\ y = y_n(s))$ la suite minimisante pour $I(C)$ dans ce champ. Fixant à l'arbitraire le nombre positif ε prenons n de façon que

$$|I(C_n) - i_{\mathfrak{M}}| \leqq \varepsilon. \tag{12}$$

Or, $\theta_n(s)$ étant une fonction à variation bornée, à chaque nombre positif η on peut faire correspondre un nombre positif H_η et un ensemble E_η de mesure $\leqq \eta$, formé d'une suite énumérable d'intervalles $(a_i,\ b_i)$ ne s'empiétant pas l'un sur l'autre, telles que dans CE_η le complémentaire de E_η jusqu'à $(0,\ L_{C_n})$, existe finie et continue la dérivée $\theta'_n(s)$, inférieure en valeur absolue à H_η.

Considérons à présent la fonction $\theta_\eta(s)$ définie à l'aide des conditions suivantes:

a) Dans CE_η on a $\theta_\eta(s) = \theta_n(s)$;

b) Dans $(a_i,\ b_i)$ on a $\theta_\eta(s) = \theta_n(a_i) + \dfrac{\theta_n(b_i) - \theta_n(a_i)}{b_i - a_i}(s - a_i)$.

Il est aisé de voir que les fonctions, $\underset{\eta \to 0}{\theta_\eta(s)}$ sont absolument continues et que

$$\int_0^{L_{C_n}} |\theta'_\eta(s)|\, ds = \int_{CE_\eta} |\theta'_n(s)\ \ ds + \sum_i |\theta_n(b_i) - \theta_n(a_i)| \leqq \int_0^{L_{C_n}} |d\theta_n(s)|. \tag{13}$$

En remarquant qu'on a

$$\theta_\eta(0) = \theta_n(0) = \theta_A, \quad \theta_\eta(L_{C_n}) = \theta_n(L_{C_n}) = \theta_B \tag{14}$$

et que presque partout dans l'intervalle $(0,\ L_{C_n})$:

$$\theta_\eta(s) \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} \theta_n(s), \quad \theta'_\eta(s) \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} \theta'_n(s) \tag{15}$$

on construit à l'aide du raisonnement des pages (196, 197) les fonction, $\rho_\eta(s)$ telles que

$$|\rho_\eta(s)| \leqq \zeta_\eta, \quad |\rho'_\eta(s)| \leqq \zeta_\eta, \quad \rho_\eta(0) = \rho_\eta(L_{C_n}) = 0;$$

$$(16) \quad \int_0^{L_{C_n}} \cos(\theta_\eta + \rho_\eta)ds = x_B - x_A, \quad \int_0^{L_{C_n}} \sin(\theta_\eta + \rho_\eta)ds = y_B - y_A, \quad \zeta_\eta \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Envisageons les courbes $\overline{C}_\eta$ données par les équations:

$$(17) \quad x = \overline{x_\eta(s)} = x_A + \int_0^s \cos(\theta_\eta + \rho_\eta)ds, \quad y = \overline{y_\eta(s)} = y_A + \int_0^s \sin(\theta_\eta + \rho_\eta)ds$$
$$0 \leqq s \leqq L_{C_n}.$$

On vérifie aisement à l'aide des (14), (16) que les courbes appartiennent au champ.

Remarquons d'autre part que d'après (*a*), (*b*), (16), (17), on voit qu'à chaque nombre η_0 on peut faire correspondre un tel nombre η_ε que dans CE_{η_0} on ait

$$|f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) - f(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{L_{C_n}}.$$

On tire d'ici

$$(18) \quad I(C_{\eta_\varepsilon}) = \int_{CE_{\eta_0}} f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon})ds +$$
$$+ \int_{E_{\eta_0}} f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon})ds \leqq \int_{CE_{\eta_0}} f(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n)ds + \varepsilon +$$
$$+ \int_{E_{\eta_0}} f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon})ds \leqq I(C_n) + \varepsilon + \int_{E_{\eta_0}} f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon})ds.$$

Or $\overline{x}_\eta, \underset{\eta \to 0}{\overline{y}_\eta}, \overline{\theta}_\eta$ étant bornées uniformément de η, on a

$$\int_{E_{\eta_0}} f(\overline{x}_{\eta_\varepsilon}, \overline{y}_{\eta_\varepsilon}, \theta_{\eta_\varepsilon}, \overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon})ds \leqq A\int_{E_{\eta_0}} |\overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon}|^\delta ds + B\eta_0 \leqq A\left(\int_{E_{\eta_0}} |\overline{\theta}'_{\eta_\varepsilon}|\, ds\right)^\delta \eta_0^{1-\delta} + B\eta_0 <$$
$$\leqq A\left(\zeta_{\eta_\varepsilon} L_{C_n} + \int_0^{L_{C_n}} |\theta'_{\eta_\varepsilon}(s)|\, ds\right)\eta_0^{1-\delta} + B\eta_0 \leqq K\eta_0^{1-\delta}$$

où $K =$ const. (ne dépendant pas de η_0, ε).

Prenons $\eta_0 \leqq \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}$, alors de (18) on déduit

$$I(\overline{C}_{\eta_\varepsilon}) \leqq I(C_n) + 2\varepsilon$$

d'où l'on obtient, en tenant compte de (12),

$$I(\overline{C}_\eta) \leqq i_{\mathfrak{M}} + 3\varepsilon.$$

Or $\overline{C}_\eta$ étant une courbe du champ D, on a

$$I(\overline{C}_{\eta_\varepsilon}) \geqq i_D$$

de sorte que

$$i_D \leqq i_{\mathfrak{M}} + 3\varepsilon.$$

D'ici on tire, vu que ε était fixé arbitrairement (> 0):

$$i_D \leqq i_{\mathfrak{M}}.$$

D'autre part le champ $\mathfrak{M}$ comprend le champ D à son intérieur; donc on doit avoir

$$i_D \geqq i_{\mathfrak{M}}.$$

On a par conséquent

$$i_D = i_{\mathfrak{M}}.$$

Cette égalité nous montre que toute une courbe C_0 donnant le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ D donne aussi le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ $\mathfrak{M}$.

Or, nous avons déjà démontré qu'en général dans le champ $\mathfrak{M}$ il n'existe pas pour $I(C)$ aucune courbe réalisant le minimum absolu.

Par conséquent le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans D aussi n'a pas en géneral de solution.

§ **4.** Reprenons à présent le problème de minimum absolu posé dans le § 2.

Nous supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ admet toutes les dérivées partielles jusque' au 2-de ordre insclusivement et vérifie la relation

$$f(x, y, \theta, z) \geqq K\,|\,z\,|^{1+\delta} \tag{19}$$

où K, δ sont deux nombres positifs fixes.

Soit $C_1, C_2 \ldots C_n \ldots$ une suite minimisante de $I(C)$ dans le champ D.

En vertu de l'inégalité (19) on s'assure aisément que la suite considérée admet au mois une courbe d'accumulation C_∞ appartenant au champ D.

Si la fonction de ligne $I(C)$ est semi-continue pour toutes les courbes du champ D, alors on montre aisément que C_∞ réalise le minimum.

Or la question se complique si $I(C)$ n'est pas semi-continue pour toutes les courbes du champ D.

Dans ce travail nous définirons pour toute une courbe C_0 la fonction de ligne $H(C_0)$ de façon que

$$H(C_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{borne inférieure de } I(C) \text{ dans le champ } D_\varepsilon(C_0) \\ \text{des courbes, possèdant les propriété (1°), (2°), (3°)} \\ \text{de § 2 admettant avec } C_0 \text{ le voisinage } (\varepsilon) \end{array} \right\}$$

et nous montrons que

$$H(C) = J(C)$$

où $J(C)$ est une intégrale curviligne convenablement formée de la forme (1).

Il est aisé de voir que si C_0 réalise le minimum absolu de $I(C)$, alors $I(C_0) = H(C_0) = J(C_0)$, or $H(C)$ (et par conséquent $J(C)$) a dans le champ D la même borne inférieure i_D que $I(C)$; par suite toute courbe minimante pour $I(C)$ est aussi minimante pour $J(C)$. Inversement, si C_0 est une courbe minimante pour $J(C)$ telle que

$$J(C_0) = H(C_0) = I(C_0)$$

alors C_0 est aussi minimante pour $I(C)$.

Ainsi afin que le problème de minimum de l'intègrale $I(C)$ dans le champ D admette au moins une solution, il faut et il suffit qu'il existe parmi les solutions du problème de minimum posé pour $J(C)$ dans D, ($J(C)$ étant une fonction de ligne semi-continue partout, verifiant la condition

$$J(C) \geqq K \int_0^{L_C} |\theta'|^{1+\delta} ds$$

il existe toujours au moins une solution du probléme de minimum posé pour $J(C)$ dans D), une telle solution C_0 que

$$J(C_0) = I(C_0). \tag{20}$$

Or $J(C)$ étant une intégrale curviligne de la forme (1), nous pouvons écrire les équations d'EULER pour les courbes minimant cette intégrale et par conséquent nous pouvons dans une certaine mesure expliciter la condition (20).

Il est à remarquer que les intégrales analogues à $J(C)$ dans le cas du problème de minimun des intégrales curvilignes de la forme

$$\int_{(C)} F(x,\ y,\ x',\ y')dt$$

furent considérées par M. TONELLI, qui a montré leur rôle important dans l'étude des problémes de minimum des fonctions de lignes non semi-continues partout.

§ **5.** Lemmes préliminaires. Soit donnée une fonction positive $f(x,\ \alpha)$ continue et dérivable pour $A \leqq x \leqq B,\ a \leqq \alpha \leqq b$; où $A,\ B,\ a,\ b$ ont des valeurs finies.

Soit E un ensemble fermé de x appartenant à l'intervalle $(A,\ B)$ et soit $\Phi(\alpha)$ la borne inférieure de $f(x,\ \alpha)$ pour x dans E (α est considérée comme un paramétre).

Remarquons d'abord que d'après un théoréme bien connu de WEIERSTRASS le problème de minimum absolu de la fonction $f(x,\ \alpha)$ dans E admet toujours au moins une solution, de sorte qu'à tout α dans $(a,\ b)$ on peut faire correspondre un ensemble $\chi(\alpha)$ appartenant à E des valeurs de x telles que

$$f(x,\ \alpha) = \Phi(\alpha).$$

On a évidemment

$$f(x_{\alpha_2},\ \alpha_1) \geqq f(x_{\alpha_1},\ \alpha_1) \qquad (21)$$
$$f(x_{\alpha_2},\ \alpha_2) \leqq f(x_{\alpha_1},\ \alpha_2)$$

où $\alpha_1,\ \alpha_2$ sont deux point quelconques de l'intervalle $(a,\ b)$; $x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2}$ sont les nombres quelconques appartenant respectivement aux $\chi(\alpha_1)$, $\chi(\alpha_2)$, d'ici on tire

$$f(x_{\alpha_1},\ \alpha_1) - f(x_{\alpha_1},\ \alpha_2) \leqq \Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) \leqq f(x_{\alpha_2},\ \alpha_1) - f(x_{\alpha_2},\ \alpha_2). \qquad (22)$$

Envisageons le nombre λ tel que

$$|f'_\alpha(x,\ \alpha)| \leqq \lambda;\quad A \leqq x \leqq B,\ a \leqq \alpha \leqq b; \qquad (22_1)$$

on voit d'après (22) que

$$|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leqq \lambda\,|\alpha_1 - \alpha_2|. \qquad (23)$$

Ainsi la fonction $\Phi(\alpha)$ est une fonction continue et vérifiant la condition de LIPSCHITZ-CAUCHY; par conséquent presque partout dans l'intervalle $(a,\ b)$ il existe la dérivée $\Phi'(\alpha)$.

Démontrons à présent l'existence de la dérivée droite $\overset{+}{\Phi}'(\alpha)$ en chaque point α intérieur à $(a,\ b)$.

À cet effet, remarquons que toute valeur d'accumulation de la suite $\underset{\alpha_n \to \alpha}{x_{\alpha_n}}$ (où x_{α_n} sont des nombres appartenant respectivement aux $\chi(\alpha_n)$, α_n et par suite α sont des points de (a, b)) appartenant à $\chi(\alpha)$.

En effet, on a évidemment en vertu de (22_1) et de (23)

$$|f(x_{\alpha_n}, \alpha) - f(x_\alpha, \alpha)| \leqq |f(x_{\alpha_n}, \alpha_n) - f(x_\alpha, \alpha)| + |f(x_{\alpha_n}, \alpha_n) - f(x_{\alpha_n}, \alpha)| \leqq$$
$$\leqq |\Phi(\alpha_n) - \Phi(\alpha)| + \lambda|\alpha_n - \alpha| \leqq 2\lambda|\alpha_n - \alpha|.$$

Cela étant, observons qu'on a

$$\frac{f(x_\alpha, \alpha + \Delta) - f(x_\alpha, \alpha)}{\Delta} \geqq \frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geqq \frac{f(x_{\alpha+\Delta}, \alpha + \Delta) - f(x_{\alpha+\Delta}, a)}{\Delta} \tag{24}$$

où Δ est un nombre positif suffisemment petit, α — un point intérieur à (a, b); $x_{\alpha+\Delta}$, x_α — les nombres quelconques appartenant respectivement aux $\chi(\alpha + \Delta)$, $\chi(\alpha)$. De (24) on obtient

$$f'_\alpha(x_\alpha, \alpha) + \varepsilon_\Delta \geqq \frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geqq f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta}, \alpha) - \varepsilon_\Delta \tag{24_1}$$

où

$$\varepsilon_\Delta \underset{\Delta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Considérons à présent une suite quelconque de nombres positifs Δ_n tels que

$$\Delta_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\overset{+}{x}_\alpha$ une valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta_n}$ où $x_{\alpha+\Delta_n}$ sont des nombres appartenant respectivement aux $\chi(\alpha + \Delta_n)$.

Montrons que

$$f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta_n}, \alpha) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f'_\alpha(\overset{+}{x}_\alpha, \alpha).$$

En effet, supposons le contraire: alors il existe une autre valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta_n}$ — $x_\alpha^{(1)}$ telle que

$$f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha) \neq f'_\alpha(\overset{+}{x}_\alpha, \alpha).$$

Supposons pour fixer les idées que

$$f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha) > f'_\alpha(\overset{+}{x}_\alpha, \alpha). \tag{25}$$

Soit $x_{\alpha+\Delta_\nu}$ la suite, convenablement extraite de la suite $x_{\alpha+\Delta_n}$ telle que

$$x_{\alpha+\Delta_\nu} \longrightarrow x_\alpha^{(1)}.$$

Or $\overset{+}{x}_\alpha$ appartenant évidemment à $\chi(\alpha)$, on a

$$f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha) + \varepsilon_{\Delta\nu} > f_\alpha'(x_\alpha^{(1)},\ \alpha) - \varepsilon_{\Delta\nu},$$

d'où, en passant à la limite,

$$f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha) \geqq f_\alpha'(x_\alpha^{(1)},\ \alpha)$$

ce qui contrarie (25).

Le même raisonnement (il suffit d'échanger le rôle de $\overset{+}{x}_\alpha$, $x_\alpha^{(1)}$) si

$$f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha) > f(x_\alpha^{(1)},\ \alpha).$$

Ainsi on a

$$f_\alpha'(x_{\alpha+\Delta},\ \alpha) \underset{\Delta>0,\ \Delta\to 0}{\longrightarrow} f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha)$$

où $x_{\alpha+\Delta}$ sont les nombres quelconques de $\chi(\alpha+\Delta)$, $\overset{+}{x}_\alpha$ une des valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta}$.

En remarquant que $\overset{+}{x}_\alpha$ appartient à l'ensemble $\chi(\alpha)$, on tire de (24_1)

$$f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha) + \varepsilon_\Delta \geqq \frac{\Phi\ \alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geqq f_\alpha'(x_{\alpha+\Delta},\ \alpha) + \varepsilon_\Delta .$$

Donc, d'aprés ce qui précède:

$$\frac{\Phi(\alpha+\Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \to \overset{+}{\Phi}_\alpha'(\alpha) = f_\alpha'(\overset{+}{x}_\alpha,\ \alpha)$$

où $\Delta > 0$, $\Delta \to 0$.

A l'aide du même raisonnement, on s'assure qu'en chaque point de $(a,\ b)$ il existe la dérivée $\Phi'(\alpha)$ égale à $f_\alpha'(\bar{x}_\alpha,\ \alpha)$, où $\bar{x}_\alpha$ est une valeur d'accumulation de la suite $\underset{\Delta\to 0,\ \Delta>0}{x_{\alpha-\Delta}}$ (où $x_{\alpha-\Delta}$ sont des nombres quelconque appartenant respectivement aux $\chi(\alpha-\Delta)$).

Il est aisé de voir que

$$\overset{+}{\Phi}'(\alpha) \leqq \bar{\Phi}'(\alpha).$$

Les propositions que nous venons de démontrer se géneralisent aisément au cas de plusieurs variables. Ainsi:

Si $f(x_1,\ x_2 \dots x_r,\ \alpha_1 \dots \alpha_e)$ est une fonction continue et avec les dérivées partielles continues pour le point $\chi(x_1 \dots x_r)$ situé à l'intérieur d'une hypersphère P de rayon fini R_P et pour le point $A(\alpha_1 \dots \alpha_e)$ situé à l'intérieur d'une hypersphère de rayon fini.

Si Δ est un domaine fermé de points χ appartenant à l'hypersphère P.

Si enfin $\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_e)$ est la borne inférieure de $f(x_1, x_2 \dots x_r, \alpha_1 \dots \alpha_e)$ pour le point χ compris dans le domaine Δ (le point A est consideré comme un paramètre ne variant pas pendant la minimisation).

Alors $\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_e)$ est une fonction continue vérifiant la condition de LIPSCHITZ; de plus en chaque point A a l'intérieur de l'hypersphère il existe les dérivées $\overset{+}{\Phi}{}'_{\alpha_i}, \underset{(i=1,2\dots e)}{\overset{-}{\Phi}{}'_{\alpha_i}}$ égales respectivement aux

$$f_\alpha'(\overset{+}{x}_{1\alpha_i} \dots \overset{+}{x}_{r\alpha_i},\ \alpha_1 \dots \alpha_e),\quad f_\alpha'(\overset{-}{x}_{1\alpha_i} \dots \overset{-}{x}_{r\alpha_i},\ \alpha_1 \dots \alpha_e)$$

où les points

$$\overset{+}{\chi}_{\alpha_i}(\overset{+}{x}_{1\alpha_i} \dots \underset{i=1,2\dots e}{\overset{+}{x}_{r\alpha_i}}),\quad \overset{-}{\chi}_{\alpha_i}(\overset{-}{x}_{1\alpha_i} \dots \overset{-}{x}_{r\alpha_i})$$

sont respectivement les points quelconques d'accumulations des suites

$$x_{\alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha e},\ \underset{\Delta > 0,\ \Delta \to 0}{\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha e}},\quad \text{où}\quad \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha e},\ \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha e}$$

sont respectivement les solutions des problémes de minimum de

$$f(x_1 \dots x_r,\ \alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha_e) \quad \text{dans} \quad \Delta$$
$$f(x_1 \dots x_r,\ \alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha_e) \quad \text{dans} \quad \Delta.$$

Remarquons enfin que toutes les propositions ci dessus démontrées restent vraies si le domaine Δ étant infini, il existe un tel nombre H que pour tout point A dans Q il existe au moins une solution χ du problème de minimum absolu de f dans Δ qui est compris à l'intérieur de l'hypersphère P de rayon égal à H.

§ **6.** Considérons à présent le problème de minimum absolu relatif à l'intégrale

$$(26) \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} f(a,\ b,\ c,\ \theta'(s))ds$$

dans le champ $D^{\beta,\beta+\lambda\varepsilon}_{\alpha,\alpha+\varepsilon}$ des fonctions absolument continues $\theta(s)$ vérifiant les conditions frontières

$$(27) \qquad \theta(\alpha) = \beta, \quad \theta(\alpha + \varepsilon) = \beta + \lambda\varepsilon$$

où a, b, c, α, β, γ sont les nombres arbitraires, ε un nombre positif quelconque. Avant d'aller plus loin, rappelons quelques définitions préliminaires, fondamentales pour la suite.

On dit qu'un nombre z est fort relativement à (a, b, c) si pour tout n different de z on a

$$f(a, b, c, n) - f(a, b, c, z) - (n - z) f_z'(a, b, c, z) > 0.$$

Si pour chaque valeur de n on a

$$f(a, b, c, n) - f(a, b, c, z) - (n - z) f_z'(a, b, c, z) \geqq 0$$

alors on dit que z est semi-fort relativement à (a, b, c).

Dans la suite, quand il n'y aura aucune ambiguité à craindre, nous dirons simplement: z est fort, z est semi-fort, et nous écrirons $f(z)$ au lieu de $f(a, b, c, z)$.

Cela étant, considerons une z_0 non forte mais semi-forte et soient P, Q les racines — respectivement le plus petit et le plus grand — de l'équation

$$f(n) - f(z_0) - (n - z_0) f'(z_0) = 0. \tag{28}$$

Envisageons la fonction

$$F(t) = f(P + t) - f(z_0) - (P + t - z_0) f'(z_0)$$

et remarquons qu'on a pour toute une valeur de t

$$F(t) \geqq 0.$$

Or on a $F(0) = 0$: par suite $F'(0) = 0$, c.-a.-d. $f'(P) = f'(z_0)$: à l'aide du même raisonnement on prouve que $f'(Q) = f'(z_0)$.

Par conséquent on obtient

$$\begin{gathered} f(P) - f(Q) - (P - Q) f'(Q) = 0 \\ f(Q) - f(P) - (Q - P) f'(P) = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

et pour chaque valeur de n

$$\begin{aligned} f(n) - f(P) - (n - P) f'(P) &= f(n) - f(Q) - (n - Q) f'(Q) = \\ &= f(n) - f(z_0) - (n - z_0) f'(z_0) \geqq 0 \end{aligned}$$

de sorte qu'on voit que P, Q sont semi-fortes (mais non fortes).

Soit à présent z un nombre semi-fort appartenant à l'intervalle fermé (P, Q). On aura alors

$$\begin{gathered} f(z) - f(P) - (z - P) f'(P) \geqq 0; \quad f(z) - f(Q) - (z - Q) f'(Q) > 0 \\ f(P) - f(z) - (P - z) f'(z) \geqq 0; \quad f(Q) - f(z) - (Q - z) f'(z) \geqq 0 \end{gathered} \tag{29$_1$}$$

d'où l'on conclut que

$$(P - z)[f'(P) - f'(z)] \geqq 0, \quad (Q - z)[f'(P) - f'(z)] = (Q - z)[f'(Q) - f'(z)] \geqq 0.$$

Par conséquent, vu que $P \leqq z \leqq Q$, on reçoit

$$f'(P) = f'(Q) = f'(z).$$

Donc en tenant compte des inégalités (29_1) on obtient

$$f(z) - f(P) - (z - P)f'(P) = 0; \quad f(z) - f(Q) - (z - Q)f'(Q) = 0$$
$$f(P) - f(z) - (P - z)f'(z) = 0; \quad f(Q) - f(z) - (Q - z)f'(z) = 0$$

et d'ici on voit que (P, z), (z, Q) vérifient le système

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) - (p - q)f'(q) &= 0 \\ f(q) - f(p) - (q - p)f'(p) &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Cela démontre que tout nombre z appartenant à l'intervalle fermé (P, Q) n'est pas fort.

Construisons toutes les (P, Q) possibles; on obtient ainsi une suite énumérable d'intervalles (P_i, Q_i) n'empiétant l'un sur l'autre.

Envisageons à présent un z à l'exterieur de toute (P_i, Q_i). Il est évident d'abord que telle z ne peut pas être à la fois semi-forte et non forte car tout z semi-forte, non forte appartient nécessairement à un quelconque des intervalles (P_i, Q_i).

D'autre part la z considérée ne peut pas être non semi-forte, car dans le cas contraire il existe de telles solutions semi-fortes p, q du systéme (30) que

$$p < z < q$$

de sorte qu'il existe un tel indice i que

$$P_i \leqq p < z < q \leqq Q_i.$$

Par conséquent, chaque z à l'extérieur de toutes (P_i, Q_i) est forte.

Ainsi l'ensemble $T(a, b, c)$ des tous les nombres non forts relativement à (a, b, c) est composé pour chaque (a, b, c) d'une suite énumérable d'intervalles fermés (P_i, Q_i) n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Cela étant, construisons les fonctions $p(a, b, c, z)$, $q(a, b, c, z)$ de façon que

$$\begin{aligned} &p(a, b, c, z) = q(a, b, c, z) = z, \quad \text{si } z \text{ n'appartienne pas à } T(a, b, c) \\ &p(a, b, c, z) = P_i, \ q(a, b, c, z) = Q_i, \quad \text{si } z \text{ appartienne à } (P_i, Q_i). \end{aligned} \tag{31}$$

Envisageons d'autre part la fonction $\psi(a, b, c, z, p, q)$ continue et dérivable, définie au moyen des relations

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(p) = f(q);$$

si $p = q$

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(a, b, c, p)\frac{q-z}{q-p} + f(a, b, c, q)\frac{z-p}{q-p}$$

si $p \neq q$.

On a évidemment, si $p < z < q$,

$$\psi(a, b, c, z, p, q) \geqq [f(P_i) + (p - P_i)f_z'(P_i)]\frac{q-z}{q-p} +$$

$$+ [f(P_i) + (q - P_i)f'(P_i)]\frac{z-p}{q-p} = f(P_i) + (z - P_i)f'(P_i) = \psi(a, b, c, z, P_i, Q_i).$$

D'autre part, si $p = z$ ou $q = z$,

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(z) \geqq f(P_i) + (z - P_i)f'(P_i) = \psi(a, b, c, z, P_i, Q_i).$$

Ainsi on a pour $p \leqq z \leqq q$

(32) $$\psi(a, b, c, z, p, q) \geqq \psi(a, b, c, P_i, Q_i).$$

De même façon on peut démontrer que si z est forte, alors si $p \leqq z \leqq q$ on doit avoir

(33) $$\psi(a, b, c, z, p, q) \geqq \psi(a, b, c, z, z).$$

En observant à présent que $p(a, b, c, z) \leqq z \leqq q(a, b, c, z)$, on voit en vertu de (31), (32), (33) que $p = p(a, b, c, z)$, $q = q(a, b, c, z)$ réalisent le minimum absolu de la fonction $\psi(a, b, c, z, p, q)$ dans le domaine Δ_z des p, q telles que $p \leqq z \leqq q$.

Par conséquent $\left(\text{vu qu'en vertu de la condition (19) on a } \psi > k \left\{ |p|^{1+\delta}\frac{q-z}{q-p} + |q|^{1+\delta}\frac{z-p}{q-p} \right\} \text{ pour } p < z < q\right)$ on s'assure qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un tel nombre H_M que si

(34) $$|a| \leqq M, \ |b| \leqq M, \ |c| \leqq M, \ |z| \leqq M$$

alors

(35) $$|p(a, b, c, z)| \leqq H_M, \quad |q(a, b, c, z)| \leqq H_M.$$

Cela étant, posons

$$p_1 = p_1(a, b, c, z) = p(a, b, c, z) - z; \quad q_1 = q_1(a, b, c, z) = q(a, b, c, z) - z.$$

On voit aisément qne

$$p = p_1, \quad q = q_1$$

donnent le minimum absolu à la fonction

$$\psi(a, b, c, z, p + z, q + z)$$

dans le domaine Δ des p, q telles que

$$p > 0, \quad q > 0.$$

Or les inégalités (35) nous montrent qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre $H_M^{(1)} (= H_M + M)$ tel que si

$$|a| \leqq M, \ |b| \leqq M, \ |c| \leqq M, \ |z| \leqq M$$

alors

$$|p_1(a, b, c, z)| \leqq H_M^{(1)}, \quad |q_1(a, b, c, z)| \leqq H_M^{(1)}.$$

Nous sommes donc justement dans le cas de la remarque faite à la fin du § 5.

Par conséquent, la fonction $\Phi(a, b, c, z)$ définie à l'aide des relations

$$\Phi(a, b, c, z) = f(a, b, c, z) \text{ pour chaque } z \text{ n'appartenant pas à } T(a, b, c)$$

(36) $$\Phi(a, b, c, z) = f(P_i)\frac{Q_i - z}{Q_i - P_i} + f(Q_i)\frac{z - P_i}{Q_i - P_i} \text{ pour } P_i \leqq z \leqq Q_i$$

égale à

$$\psi(a, b, c, z), \quad p(a, b, c, z), \quad q(a, b, c, z),$$

ou ce qui est la même chose, à

$$\psi(a, b, c, z, p_1 + z, q_1 + z),$$

est une fonction continue vérifiant la condition de CAUCHY-LIPSCHITZ, admettant partout par rapport à chaque argument les dérivées à droite et à gauche.

On voit de plus que

$$\overset{+}{\Phi}{}'_a(a, b, c, z) = \psi'_a(a, b, c, z, p_{a+0}, q_{a+0}) \ldots \overset{-}{\Phi}{}'_z(a, b, c, z) = \psi'_z(a, b, c, z, p_{z-0}, q_{z-0})$$

où $(p_{a+0}, q_{a+0}) \ldots (p_{z-0}, q_{z-0})$ sont respectivement les points d'accumulation des suites

$$\{p(a + \Delta \ldots z), \ q(a + \Delta \ldots z)\} \ldots \{p(a \ldots z - \Delta), \ q(a \ldots z - \Delta)\}$$
$$\Delta > 0, \quad \Delta \to 0.$$

Il est aisé de voir donc que

$$(p_{a+0}, q_{a+0}) \ldots (p_{z-0}, q_{z-0})$$

sont respectivement les solutions semi-fortes du systéme (30) telles que

$$p_{a+0} \leqq z \leqq q_{a+0} \ldots p_{z-0} \leqq z \leqq q_{z-0}.$$

Par conséquent

$$f'_z(a, b, c, p_{z+0}) = f'_z(a, b, c, p_{z-0}) = f'_z(a, b, c, p(a, b, c, z))$$

d'ici on s'assure que $\Phi(a, b, c, z)$ admet partout la dérivée continue $\Phi'_z(a, b, c, z)$ égale à

$$f'_z(a, b, c, z, p(a, b, c, z))$$

Il est évident à présent aussi que si z est à l'extérieur de $T(a, b, c)$, alors $p_{a+0} = \dots = q_{z-0}$, de sorte que $\Phi(a, b, c, z)$ admet les dérivées Φ'_a, Φ'_b, Φ'_c égales à

$$f'_a(a, b, c, z),\ f'_b(a, b, c, z),\ f'_c(a, b, c, z). \tag{37}$$

Considérons maintenant le cas simple où l'ensemble T se réduit à un seul intervalle fini $P(a, b, c)$, $Q(a, b, c)$ et où pour tout nombre Z semi-fort relativement à (a, b, c) on a

$$f''_{z^2}(a, b, c, z) > 0. \tag{38}$$

On s'assure aisément que dans ce cas $P(a, b, c)$, $Q(a, b, c)$ sont des fonctions continues et dérivables de a, b, c.

En calculant immédiatement les dérivées partielles de P et Q à l'aide du systéme (29) et en remarquant que

$$\begin{aligned} &\Phi(a, b, c, z) = f(a, b, c, z) \text{ si } z \geqq Q(a, b, c) \text{ ou si } z \leqq P(a, b, c) \\ &\Phi(a, b, c, z) = f(a, b, c, P(a, b, c)) + (z - P(a, b, c))f'_z(a, b, c, P(a, b, c)) \\ &\qquad\qquad \text{si } P(a, b, c) \leqq z \leqq Q(a, b, c) \end{aligned} \tag{39}$$

on démontre que $\Phi(a, b, c, z)$ admet les dérivées partielles continues égales respectivement aux

$$\left.\begin{array}{lll} f'_a(a,b,c,z) & \text{si } z \geqq Q(a,b,c) \\ \vdots & \text{ou} \\ & \text{si} \\ f'_z(a,b,c,z) & z \leqq P(a,b,c) \end{array}\right| \begin{array}{l} f'_a(a,b,c,P(a,b,c)) \dfrac{Q(a,b,c) - z}{Q(a,b,c) - P(a,b,c)} + \\ \vdots \qquad + f'_a(a,b,c,Q(a,b,c)) \dfrac{z - P(a,b,c)}{Q(a,b,c) - P(a,b,c)} \\ f'_z(a,b,c,P(a,b,c)) \text{ si } P(a,b,c) \leqq z \leqq Q(a,b,c). \end{array} \tag{40}$$

Revenons à présent au problème de minimum absolu posé au début de ce §.

Construisons la ligne polygonale

$$y = \theta_0(s)$$

appartenant à $D^{\beta,\, \beta+\lambda\varepsilon}_{\alpha,\, \alpha+\varepsilon}$ formée des deux segments rectilignes avec les coefficients angulaires égaux respectivement à

$$p(a, b, c, \lambda), \quad q(a, b, c, \lambda).$$

On a évidemment

$$f'_{\theta'}(a, b, c, \theta'_0(s)) = \text{Const. } \alpha \leqq s \leqq \alpha + \varepsilon$$

et pour tout n

$$f(n) - f(\theta'_0(s)) - (n - \theta'_0(s))f'_{\theta'}(\theta'_0(s)) \geqq 0, \quad \alpha \leqq s \leqq \alpha + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\theta')ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\theta'_0)ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} [f(\theta') - f(\theta'_0) - (\theta' - \theta'_0)f'(\theta'_0)]ds > 0$$

où $\theta(s)$ est une fonction arbitraire du champ $D^{\beta,\, \beta+\lambda\varepsilon}_{\alpha,\, \alpha+\varepsilon}$.

Ainsi on voit que la fonction $\theta(s)$ donne le minimum absolu à l'intégrale (26) dans le champ $D^{\beta,\, \beta+\lambda\varepsilon}_{\alpha,\, \alpha+\varepsilon}$.

De plus la valeur minimum de cette intégrale (la borne inférieure) est égale à

$$\Phi(a, b, c, \lambda).$$

§ **7.** Considérons à présent la classe K des courbes possédant les propriétés (1°), (2°), (3°) du § 2 et soit C_0 une courbe de cette classe. Fixant à l'arbitraire le nombre positif ε, envisageons le champ $D_\varepsilon(C_0)$ des courbes C de la classe K admettant avec C_0 le voisinage (ε).

Soit i_ε la borne inférieure de $I(C)$ dans le champ $D_\varepsilon(C_0)$; quand ε décroit jusqu'à zéro, i_ε augmente et tend par suite vers une certaine limite (finie ou infinie) que nous désignons par $H(C_0)$.

Il est évident que

(41) $$H(C_0) \leqq I(C_0).$$

Soit à présent R la classe des courbes de K pour lesquelles $H(C)$ a une valeur finie et soit C_0 une courbe de la classe R. Montrons qu'il existe toujours une suite C_n de courbes appartenant respectivement aux champs $D_n(C_0)$ (ou $\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$) telles que

(42) $$I(C_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} H(C_0).$$

A cet effet prenons arbitrairement un nombre positif n et faisons-lui correspondre un tel nombre positif ε_n que

(43) $$|i_{\varepsilon_n} - H(C_0)| \leqq \frac{1}{2n}.$$

Or il est évident que dans le champ $D_{\varepsilon_n}(C_0)$ il existe une telle courbe C_n que

(44) $$|I(C_n) - i_{\varepsilon_n} \leqq \frac{1}{2n};$$

d'ici on tire en vertu de (43)

$$|I(C_n) - H(C_0)| \leqq \frac{1}{2n}.$$

La suite C_n est donc la suite cherchée.

Démontrons enfin que $H(C)$ est une fonction semi-continue inférieurement de ligne C dans la classe R.

Fixons, en effet, à l'arbitraire le nombre positif ε et soit L une courbe de la classe R admettant avec C le voisinage (ε) (et appartenant par suite au champ $D_\varepsilon(C)$).

On a évidemment

$$i_\varepsilon \leqq H(L), \quad i_\varepsilon \leqq H(C), \quad |i_\varepsilon - H(C)| \leqq \eta_\varepsilon, \quad \text{où} \quad \eta_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

d'où l'on tire

$$H(L) \geqq H(C) - \eta_\varepsilon \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ **8.** Dans ce § nous allons expliciter l'expression de la $H(C)$. À cet effet envisageons l'intégrale curviligne

$$(45) \qquad J(C) = \int_0^{lc} \Phi(x, y, \theta, \theta')ds$$

et remarquons que d'aprés (19) et de (36), on a

$$(46) \qquad \Phi(x, y, \theta, z) \geq K|z|^{1+\delta}.$$

Soit S la classe de courbes appartenant à $\mathfrak{K}$ pour lesquelles la fonction de ligne $J(C)$ a une valeur finie.

Montrons d'abord que $J(C)$ est semi-continue inférieurement pour toutes les courbes C de la classe S.

Envisageons en effet la suite $\underset{n \to \infty}{C_n}(x = x_n(s),\ y = y_n(s))$ des courbes de S convergeant vers une courbe $C_0(x = x_0(s),\ y = y_0(s))$ appartenant aussi à S. Soit (O, L_n) le plus grand intervalle commun à des intervalles (O, L_{c_0}), (O, L_{c_n}). En fixant à l'arbitraire le nombre positif M, considérons un ensemble $E_{n,M}$ des valeurs de s appartenant à (O, L_n) telles que

$$|\Theta'_0(s)| \leqq M.$$

On a évidemment

$$(47) \quad I(C_n) \geqq \int_{E_{n,M}} \Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n)ds \geqq \int_{E_{n,M}} \{\Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) + (\theta'_n - \theta'_0)\Phi'_{\theta'}(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0)\}\, ds$$

car on a toujours

(48) $$\Phi(a, b, c, p) - \Phi(a, b, c, z) - (p - z)\Phi'_z(a, b, c, z) \geqq 0.$$

Remarquons d'autre part que

(49) $$|x_n(s) - x_0(s)| \leqq \varepsilon_n, \ |y_n(s) - y_0(s)| \leqq \varepsilon_n, \ |\theta_n(s) - \theta_0(s)| \leqq \varepsilon_n; \ 0 \leqq s \leqq L_n, \ \varepsilon_n \to 0.$$

Par conséquent

(50) $$\begin{array}{l} |\Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) - \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)| \leqq \varepsilon_n^{(M)} \\ |\Phi'_{\theta'}(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) - \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)| \leqq \varepsilon_n^{(M)} \end{array} \quad \text{où } s \text{ appartienne à } E_{n, M}$$

où $\varepsilon_n^{(M)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pour toute valeur fixée de M.

On a donc

(51) $$I(C_n) \geqq \int\limits_{E_{n, M}} \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0) ds + \int\limits_{E_{n, M}} \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)(\theta'_n - \theta'_0) ds - \varepsilon_n^{(M)} L_{C_0} - \varepsilon_n^{(M)} \int\limits_0^{L_n} |\theta'_n - \theta'_0| ds.$$

Or il est aisé de voir d'aprés (49) que

$$\left| \int\limits_{E_{n, M}} \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)(\theta'_n - \theta'_0) ds \right| \leqq \varepsilon^{(1)}_{n, M} \int\limits_0^{L_n} |\theta'_n| \, ds + \varepsilon^{(2)}_{n, M}$$

où

$$\varepsilon^{(1)}_{n, M} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \varepsilon^{(2)}_{n, M} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent en vertu de (51) et de (46) on a

(52) $$I(C_n) \geqq \int\limits_{E_{n, M}} \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0) ds - \eta_{n, M} - \zeta_{n, M} |J(C_n)|^{\frac{1}{1+\delta}}$$

où

$$\eta_{n, M} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \zeta_{n, M} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela étant, prenons $M = M_n$ de façon que $M_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, $\eta_{n, M_n} \to 0$, $\zeta_{n, M_n} \to 0$ alors on a

$$m(E_{n, M_n}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L_{C_0}.$$

Par conséquent, de (52) on tire finalement

$$I(C_n) \geqq I(C_n) - \varepsilon_n, \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Envisageons à présent une courbe C_0 appartenant à la fois à la classe R et à la classe S.

Soit $\underset{n\to\infty}{C_n}$ une suite des courbes (appartenant respectivement aux champs $D_{\frac{1}{n}}(C_0)$) telle que

$$I(C_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(C_0).$$

On a évidemment

$$I(C_n) \geqq J(C_n)$$

d'où l'on tire

$$H(C_0)+\varepsilon_n \geqq J(C_n) \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On $J(C)$ étant semi-continue dans la classe S on a

$$H(C_0) \geqq J(C_0). \tag{53}$$

Démontrons maintenant qu' on a aussi

$$J(C_0) \geqq H(C_0).$$

Considérons en effet une courbe C (de la classe $\mathfrak{K}$) dont l'angle de direction $\theta_c(s)$ est une fonction continue avec sa dérivée premiére par rapport a s.

Posons pour abréger

$$s_i = \frac{iL_c}{n}, \quad i=0,\ 1 \dots n$$

et considérons les triplets

$$x_c(s_i), \quad y_c(s_i), \quad \theta_c(s_i).$$

Envisageons le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_1} f(x_c(s_i),\ y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \theta'(s))ds$$

dans le champ $\mathfrak{D}\left\{\begin{matrix}\theta_c(s_0), & \theta_c(s_1)\\ s_0, & s_1\end{matrix}\right\}$ et soit $\underset{s_0\leqq s\leqq s_1}{\theta_n^{(0)}(s)}$ la fonction minimante.

Construisons la courbe $C_n^{(0)}$ avec la longueur $\frac{L_c}{n}$ issue du point $[x_c(s_0),\ y_c(s_0)]$ de façon que $\theta_n^{(0)}(s)$ soit son angle de direction.

Soit $x=x_n^{(0)}(s)$, $y=y_n^{(0)}(s)$ les équations définissant $C_n^{(0)}$.

On a évidemment

$$x_n^{(0)}(s)=x_c(s_0)+\int_{s_0}^{s}\operatorname{Cos}\theta_n^{(0)}(s)ds,\ \ y_n^{(0)}(s)=y_c(s_0)+\int_{s_0}^{s}\operatorname{Sin}\theta_n^{(0)}(s)ds.$$

Envisageons aussi le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} f(x_c(s_1),\ y_c(s_1),\ \theta_c(s_1),\ \theta'(s)ds$$

dans le champ $\mathfrak{D}\left\{\begin{matrix}\theta_c(s_1), & \theta_c(s_2)\\ s_1, & s_2\end{matrix}\right\}$ et soit $\theta_n^{(1)}(s)$, $(s_1 \leqq s \leqq s_2)$ la fonction minimante. Soit $C_n^{(1)}$ la courbe $\left(\text{avec la longueur } \frac{L_c}{n}\right)$ issue du point $(x_n^{(0)}(s_1),\ y_n^{(0)}(s_1))$ telle que $\theta_n^{(1)}(s)$ et son angle de direction, et ainsi de suite.

Construisons à présent la courbe $C_n(x = x_n(s),\ y = y_n(s))$ appartenant à la classe $\mathfrak{K}$ | de longueur L_c | de façon à confondre pour $s_i \leqq s \leqq s_{i+1}$ avec $C_n^{(1)}$.

En observant que $x_c(s_i)$, $y_c(s_i)$, $\theta_c(s_i)$, $\frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s}$ sont bornés indépendamment de n, on voit d'après (35) qu' il existe ua nombre M indépendant de n tel que

$$|\theta'_n(s)| \underset{n\to\infty}{\leqq} M, \quad 0 \leqq s \leqq L_c. \tag{54}$$

Or on a, d'aprés la loi même de la construction de la courbe C_n, $\theta_n(s_i) = \theta_c(s_i)$. Par conséquent

$$|\theta_n(s) - \theta_c(s)| \leqq 2M\frac{L_c}{n} \tag{55}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} |x_n(s) - x_c(s)| &= \left|\int_0^s [\operatorname{Cos}\theta_n - \operatorname{Cos}\theta_c]ds\right| \leqq \frac{N}{n}, \\ |y_n(s) - y_c(s)| &= \left|\int_0^s [\operatorname{Sin}\theta_n - \operatorname{Sin}\theta_c]ds\right| \leqq \frac{N}{n} \end{aligned} \tag{56}$$

où N est une constante indépendante de n.

On a par suite

$$I(C_n) = \sum_{1=0}^{n-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_n^{(i)},\ y_n^{(i)},\ \theta_n^{(i)},\ \theta_n^{(i)\prime})ds = \sum_{1=0}^{n-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_c(s_i),\ y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \theta_n^{\prime(i)}(s))ds + \varepsilon_n \tag{57}$$

où

$$\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or on a d'après ce qui précède

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_c(s_i),\ y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \theta_n^{\prime(i)}(s))ds = \Phi\left(x_c(s_i), y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s}\right)\Delta s, \tag{58}$$

Donc de (57) on obtient

$$I(C_n) = \sum_{1=0}^{n-1}\Phi\left(x_c(s_i),\ y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s}\right)\Delta s + \varepsilon_n.$$

Remarquons d'autre part qu'en vertu de la continuité de $\theta'_c(s)$, on a

$$J(C) = \sum_{1\ 0}^{n-1} \Phi\left(x_c(s_i),\ y_c(s_i),\ \theta_c(s_i),\ \frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s}\right)\Delta s + \eta_n$$

où

$$\eta_n \to 0,\ {}_{n \to \infty}.$$

Par conséquent

$$I(C_n) = J(C) + \varepsilon_n - \eta_n$$

d'où l'on tire

$$H(C_n) \leqq J(C) + \varepsilon_n - \eta_n .$$

En passant ici à la limite, on obtient, vu la semi-continuité inférieure de $H(C)$ dans la classe $\mathfrak{K}$

$$H(C) \leqq J(C).$$

Nous avons donc démontré cette inégalité pour toutes les courbes C de la classe $\mathfrak{K}$ pour lesquelles l'angle de direction $\theta(s)$ admet la dérivée continue et bornée.

En tenant compte à présent de l'inégalité (53), on s'assure que pour toutes les courbes C de la classe $\mathfrak{K}$, pour lesquelles l'angle de direction $\theta(s)$ admet la dérivée continue et bornée, on a

$$H(C) = J(C).$$

Pour démontrer cette égalité dans le cas général, introduisons la condition supplémentaire

$$f(x,\ y,\ \theta,\ z) \leqq A(x,\ y)\,|z|^{1+\delta} + B(x,\ y)$$

où $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornés pour les valeurs bornées des arguments.

Alors il serait aisé de voir que toute une courbe arbitraire C_0 de la classe S peut être approximée par la suite C_0 des courbes (de la classe $\mathfrak{K}$), dont les angles de direction $\theta_n(s)$ admettent les dérivées continues et bornées pour chaque valeur fixée de n, de façon que

$$|J(C_n) - J(C_0)| \leqq \eta_n, \quad |x_n - x_0| \leqq \varepsilon_n, \quad |y_n - y_0| \leqq \varepsilon_n, \quad |\theta_n - \theta_0| \leqq \varepsilon_n,$$

$$0 \leqq s \leqq L_{C_0}$$

où

$$\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \eta_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, on voit d'abord que l'intégrale

$$\int_0^{L_{C_0}} \left|\frac{d\theta_0}{ds}\right|^{1+\delta} ds \leqq \frac{J(C_0)}{K}$$

admet une valeur finie.

Par conséquent, on peut toujours choisir la suite C_n des courbes (de la classe K) dont les angles de direction $\theta_n(s)$ admettent les dérivées continues et bornées de façon que

$$\int_0^{L_{C_0}} \left|\frac{d(\theta_n - \theta_0)}{ds}\right|^{1+\delta} ds \leqq \frac{1}{n}, \quad |x_n - x_0| \leqq \varepsilon_n, \quad |y_n - y_0| \leqq \varepsilon_n, \quad |\theta_n - \theta_0| \leqq \varepsilon_n,$$

$$0 \leqq s \leqq L_{C_0}, \quad \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On voit d'ici que la mesure de l'ensemble $E_{M,n}$ dans lequel on a

$$\left|\frac{d\theta_0}{ds}\right| \leqq M, \left|\frac{d\theta_n}{ds}\right| \leqq M$$

est au moins égale à

$$L_{C_0} - \left[\frac{J(C_0)}{K} + \frac{1}{n}\right] \frac{1}{M^{1+\delta}}.$$

Cela étant, remarquons que

$$|J(C_n) - J(C_0)| \leqq \left|\int_{E_{M,n}} \left\{ \Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) - \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right)\right\} ds\right| +$$

$$+ \left|\int_{CE_{M,n}} \Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) ds\right| + \left|\int_{CE_{M,n}} \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right) ds\right|$$

où $CE_{M,n}$ est le complémentaire de $E_{M,n}$ jusqu'à $(0, L_{C_0})$.

Soit à présent $\Psi(M)$ la fonction croissante de M telle que

$$\left.\begin{array}{l} |\Phi'_x(x, y, \theta, z)| \leqq \Psi(M) \\ |\Phi'_y(x, y, \theta, z)| \leqq \Psi(M) \\ |\Phi'_\theta(x, y, \theta, z)| \leqq \Psi(M) \\ |\Phi'_z(x, y, \theta, z)| \leqq \Psi(M) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si} \\ |x| \leqq Max\,|x_0(s)| + \varepsilon_n, \quad |y| \leqq Max\,|y_0(s)| + \varepsilon_n, \\ \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \quad |z| \leqq 2M, \quad n = 1, 2, \ldots \end{array}$$

On a donc

$$\int_{E_{M,n}} \left|\Phi\left((x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) - \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right)\right| ds < 3\Psi(M) L_{C_0}\varepsilon_n +$$

$$+ \Psi(M) \int_0^{L_{C_0}} \left|\frac{d\theta_n}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds}\right| ds \leqq 3\Psi(M) L_{C_0}\varepsilon_n + \Psi(M) L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

D'autre part on a aussi

$$\left|\int\limits_{CE_{M,n}}\Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right)ds\right| \leqq A\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_n}{ds}\right|^{1+\delta}ds + \bar{B}mCE_{M,n}$$

$$\left|\int\limits_{CE_{M,n}}\Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right)ds\right| \leqq \bar{A}\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_0}{ds}\right|^{1+\delta}ds + \bar{B}mCE_{M,n}$$

où $\bar{A}$, $\bar{B}$ sont les bornes supérieures de $A(x, y)$, $B(x, y)$ dans le domaine

$$|x| \leqq \max|x_0(s)| + \varepsilon_n, \quad |y| \leqq \max|y_0(s)| + \varepsilon_n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Or

$$\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_n}{ds}\right|^{1+\delta}ds \leqq 2^{\frac{1+\delta}{2}}\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_0}{ds}\right|^{1+\delta}ds + 2^{\frac{1+\delta}{2}}\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d(\theta_n-\theta_0)}{ds}\right|^{1+\delta}ds \leqq$$

$$\leqq 2^{1+\delta}\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_0}{ds}\right|^{1+\delta}ds + 2^{\frac{1+\delta}{2}}\frac{1}{n}.$$

En remarquant que

$$mCE_{M,n} \leqq \left[\frac{J(C_0)}{K} + \frac{1}{n}\right]\frac{1}{M^{1+\delta}} < \left(\frac{J(C_0)}{K} + 1\right)\frac{1}{M^{1+\delta}}$$

on déduit que

$$\int\limits_{CE_{M,n}}\left|\frac{d\theta_0}{ds}\right|^{1+\delta}ds \leqq \zeta_n, \quad \text{où} \quad \zeta_n \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent

$$|J(C_n) - J(C_0)| < 3\Psi(M)L_{C_0}\varepsilon_n + \Psi(M)L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} +$$

$$+ 2\bar{B}\left(1 + \frac{J(C_0)}{K}\right)\frac{1}{M^{1+\delta}} + 2^{\frac{1+\delta}{2}}\bar{A}\frac{1}{n} + (1 + 2^{\frac{1+\delta}{2}})\bar{A}\zeta_M.$$

Dans cette inégalité le nombre M est arbitraire. Posons

$$M = M_n$$

où

$$\Psi(M_n)\sqrt{3L_{C_0}\varepsilon_n + L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\delta}{1+\delta}}} = 1$$

de sorte que

$$M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ainsi on obtient

$$J(C_n) - J(C_0)| \leqq \eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$H(C_n) \leqq J(C_n) \leqq J(C_0) + \varepsilon_n .$$

Soit i_{ε_n} comme toujours la borne inférieure de $I(C)$ dans le champ $D_{\varepsilon_n}(C_0)$. On a évidemment

$$i_{\varepsilon_n} \leqq H(C_n) \leqq J(C_0) + \varepsilon_n .$$

D'ici on tire que pour C_0 il existe la valeur finie $H(C_0)$ vérifiant l'inégalité

$$H(C_0) \leqq J(C_0).$$

Cela nous montre, en particulier, que toute une courbe de la classe S appartient aussi à la classe R. Par conséquent, en vertu de (53), on voit que pour toute une courbe C_0 de la classe S on a

$$H(C_0) = J(C_0). \tag{59}$$

Ainsi nous avons démontré le théorème fondamental pour la suite:

Si $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction continue, admettant toutes les dérivées partielles jusqu'au 2ème ordre inclusivement, périodique avec la période 2π per rapport a θ et vérifiant l'inégalité

$$f(x, y, \theta, z) \geqq K \mid z \mid^{1+\delta}$$

où K, δ sont les nombres positifs fixes, alors l'intégrale curviligne

$$J(C) = \int_0^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds$$

(où $\Phi(x, y, \theta, z)$ — définie par les égalités (36) est une fonction continue, admettant pour toutes les valeurs des arguments les dérivées

$$\overset{+}{\Phi}_x{}', \ \overset{-}{\Phi}_x{}', \ \overset{+}{\Phi}_y{}', \ \overset{-}{\Phi}_y{}', \ \overset{+}{\Phi}_\theta{}' \ \overset{-}{\Phi}_\theta{}', \ \Phi_z{}'$$

dont $\Phi_z{}'$ est continue, périodique avec la période 2π par rapport à θ, vérifiant les conditions

$$\Phi(x, y, \theta, z) \geqq K \mid z \mid^{1+\delta};$$

$$\Phi(x, y, \theta, p) - \Phi(x, y, \theta, z) - (p - z)\Phi_z{}'(x, y, \theta, z) > 0$$

quelque soient (x, y, θ, z, p), prise suivant la courbe C de la classe K dont l'angle de direction, admet la dérivée continue, est égale à $H(C)$ limite (pour $\varepsilon \to 0$) de la borne inférieure de l'intégrale curviligne

$$I(C) = \int_0^{Lc} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

dans le champ $D_\varepsilon(C)$ des courbes de la classe K admettant avec C le voisinage (ε).

Si de plus
$$f(x, y, \theta, z) \leqq A(x, y) |z|^{1+\delta} + B(x, y),$$
où $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornês pour les valeurs bornées des arguments, alors l'égalité
$$H(C) = J(C)$$
a lieu pour toutes les courbes de la classe S.

§ 9. Plaçons-nous à présent dans le cas considéré à la page 204 et supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ vérifie aussi les conditions suivantes:
$$f(x, y, \theta, z) \leqq A(x, y, \theta) |z|^{1+\delta} + B(x, y, \theta)$$
$$|f_x'| \leqq A |z|^{1+\delta} + B, \quad |f_y'| \leqq A |z|^{1+\delta} + B; \quad |f_\theta'| \leqq A |z|^{1+\delta} + B$$
où $A(x, y, \theta)$, $B(x, y, \theta)$ sont des fonctions bornées pour x, y bornés.

Alors il est aisé de voir que $\Phi(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions
$$\Phi(x, y, \theta, z) \leqq A |z|^{1+\delta} + B, \tag{60}$$
$$|\Phi_x'| \leqq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1, \quad |\Phi_y'| \leqq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1, \quad |\Phi_\theta'| \leqq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1$$
où $A_1(x, y, \theta)$, $B_1(x, y, \theta)$ sont bornées pour x, y bornés.

En remarquant que $\Phi_z'(x, y, \theta, z)$ ne peut pas décroitre quand z croit de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on a
$$\frac{\Phi(z + |z| + 1) - \Phi(z)}{|z| + 1} \geqq \Phi'(z) \geqq \frac{\Phi(z) - \Phi(z - |z| - 1)}{|z| + 1}.$$

Or, on a d'aprés (46)
$$\Phi(z + |z| + 1) - \Phi(z) \leqq A(2|z| + 1)^{1+\delta} + B$$
$$\Phi(z) - \Phi(z - |z| - 1) \geqq -[A(2|z| + 1)^{1+\delta} + B$$
de sorte que
$$\Phi_z'(z) \leqq A_2 |z|^{1+\delta} + B_2$$
où $A_2(x, y, \theta)$, $B_2(x, y, \theta)$ sont bornées pour x, y bornées.

Cela étant, remplaçons la variable d'intégration dans l'intégrale
$$\int_0^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta')ds$$
(l'arc s) par un paramétre quelconque s; on reçoit alors
$$J(C) = \int_{s_0}^{s_1} \Phi\left(x, y, \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{s_0}^{s_1} \varphi(x, y, x', y', x'', y'')ds.$$

Il est évident que pour $x'^2 + y'^2 \neq 0$, la fonction φ admet les dérivées partielles continues égales respectivement à

$$(61)\quad \begin{cases} \Phi_x'(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \Phi \dfrac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi'_\theta \dfrac{y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\Phi'_{\theta'}x' \cdot \dfrac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \Phi'_{\theta'}y' \dfrac{x'x''+y'y''}{(x'^2+y'^2)^2} - \Phi'_{\theta'} \dfrac{y'}{(x'^2+y'^2)}, \\ \Phi_y'(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \Phi \dfrac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \Phi'_\theta \dfrac{y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\Phi'_{\theta'}y' \cdot \dfrac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi'_{\theta'}x' \dfrac{x'x''+y'y''}{(x'^2+y'^2)^2} + \Phi'_{\theta'} \dfrac{x'}{(x'^2+y'^2)}. \end{cases}$$

On voit d'aprés (60) qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre deux nombres A_M, B_M tels que si

$$|x| \leqq M, \quad |y| \leqq M,$$

alors

$$\Phi(x, y, \theta, z) \leqq A_M |z|^{1+\delta} + B_M,$$

$$(62)\qquad |\Phi_x'| \leqq A_M |z|^{1+\delta} + B_M, \quad |\Phi_y'| \leqq A_M |z|^{1+\delta} + B_M$$

$$(1 + |z|)\,|\Phi_z'(x, y, \theta, z)| \leqq A_M |z|^{1+\delta} + B_M, \quad |\Phi_\theta'| \leqq A_M |z|^{1+\delta} + B_M$$

d'où l'on tire en vertu de (61)

$$(63)\quad \begin{cases} |\varphi'_x| \leqq \left\{ A_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\} \sqrt{x'^2+y'^2}, \\ |\varphi'_y| \leqq \left\{ A_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\} \sqrt{x'^2+y'^2}, \\ |\varphi'_{x'}| \leqq \left\{ \tilde{A}_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + \tilde{B}_M \right\} \text{ où } \tilde{A}_M, \tilde{B}_M = \text{Const.}, \\ |\varphi'_{y'}| \leqq \left\{ \tilde{A}_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + \tilde{B}_M \right\}, \\ |\varphi'_{x''}| \leqq \dfrac{\left\{ A_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ |\varphi'_{y''}| \leqq \dfrac{\left\{ A_M \left| \dfrac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Soit à présent C une courbe réalisant le minimum absolu de

$$J(C)=\int_0^{L_C}\Phi(x,\ y,\ \theta,\ \theta')ds$$

dans le champ $\mathfrak{D}$.

Soient

$$x=x(s),\quad y=y(s)$$

les équations exprimant les coordonnées de la courbe C en fonction de l'arc. Soient enfin $\delta x(s)$, $\delta y(s)$ deux fonction arbitraires continues, deux fois dérivables dans $(0,\ L_C)$, telles que

$$(64)\qquad \begin{gathered}|\delta x|\leqq 1,\ |\delta x'|\leqq 1,\ |\delta y|\leqq 1,\ |\delta y'|\leqq 1,\ |\delta x''|\leqq 1,\ |\delta y''|\leqq 1,\\ \delta x(0)=\delta x(L_C)=\delta y(0)=\delta y(L_C)=\ldots=\delta y''(0)=\delta y''(L_C)=0.\end{gathered}$$

Envisageons la famille $C(\varepsilon)$ des courbes définies à l'aide des équations

$$x=x(s)+\varepsilon\delta x(s),\quad y=y(s)+\varepsilon\delta y(s),\quad 0\leqq s\leqq L_C,\quad -\frac{1}{4}\leqq\varepsilon\leqq+\frac{1}{4}$$

(si $\varepsilon\neq 0$, alors le paramétre s dans ces équations ne coincide pas en general avec l'arc).

On a évidemment

$$(65)\qquad \frac{1}{4}\leqq\sqrt{x'^2+y'^2}\leqq\frac{3}{2}.$$

Il est aisé de voir qu'il existe un nombre positif M tel que dans tout intervalle $(0,\ L_C)$ on a

$$|x(s)+\varepsilon\delta x(s)|\leqq M,\quad |y(s)+\varepsilon\delta y(s)|\leqq M;\quad -\frac{1}{4}\leqq\varepsilon\leqq+\frac{1}{4};$$

d'ici on tire, en vertu de (63) et de (65),

$$(66)\qquad \begin{gathered}|\varphi(x+\varepsilon\delta x,\ldots\ y''+\varepsilon\delta y'')|\leqq\bar{A}_M\Phi(x,\ y,\ \theta,\ \theta')+\bar{B}_M\\ \left|\frac{\partial\varphi(x+\varepsilon\delta x,\ldots\ y''+\varepsilon\delta y'')}{\partial\varepsilon}\right|\leqq\bar{A}_M\Phi(x,\ y,\ \theta,\ \theta')+\bar{B}_M\end{gathered}$$

où $\bar{A}_M$, $\bar{B}_M$ sont les constantes ne dépendant que de M.

Considérons la fonction $f(\varepsilon)$ égale à

$$\int_0^{L_C}\varphi(x+\varepsilon\delta x,\ldots\ y''+\varepsilon\delta y'')ds.$$

On voit, d'après (66), que cette fonction admet partout dans la dérivée continue par rapport a ε, égale à

$$\int_0^{L_C} \frac{\partial\varphi(x+\varepsilon\delta x, \dots y''+\varepsilon\delta y'')}{\partial\varepsilon}\, ds.$$

Or, $f(\varepsilon)$ admettant pour $\varepsilon=0$ le minimum absolu, on doit avoir $f'(0)$ c. à. d.:

$$\int_0^{L_C} \{ \Phi'_x\delta x(s) + \Phi'_y\delta y(s) + [\Phi\cos\theta - \Phi'_\theta\sin\theta - 2\Phi'_{\theta'}\theta'\cos\theta]\delta x'(s) +$$

$$+ [\Phi\sin\theta + \Phi'_\theta\cos\theta - 2\Phi'_{\theta'}\theta'\sin\theta]\delta y'(s) - \Phi'_{\theta'}\sin\theta\delta x''(s) + \Phi'_{\theta'}\cos\theta\delta y''(s) \}\, ds = 0.$$

D'ici on conclut que presque partout dans l'intervalle $(0, L_C)$ on a

(67)
$$-\Phi'_{\theta'}\sin\theta - \int_0^s [\Phi\cos\theta - \Phi'_\theta\sin\theta - 2\Phi'_{\theta'}\theta'\cos\theta]ds + \int_0^s\int_0^s \Phi'_x ds^2 = A + Bs,$$

$$A = \text{const.},\ B = \text{const.}$$

$$\Phi'_{\theta'}\cos\theta - \int_0^s [\Phi\sin\theta + \Phi'_\theta\cos\theta - 2\Phi'_{\theta'}\theta'\sin\theta]ds + \int_0^s\int_0^s \Phi'_y ds^2 = A_1 + B_1 s,$$

$$A_1 = \text{const.},\ B_1 = \text{const.},\ (s \text{ — l'arc}).$$

Soit à présent E l'ensemble des valeurs de s de l'intervalle $(0, L_C)$ pour lesquelles:

1°) il existe la dérivée $\theta'(s)$;

2°) ont lieu les équations (67).

Soit $\bar{s}$ un point de l'intervalle $(0, L_C)$ n'appartenant pas à E. Or E étant un pseudointervalle de mesure égale à L_C, $\bar{s}$ est necessairement le point d'accumulation des points s_n de E.

Soit $\bar{\alpha}$ une valeur d'accumulation de la suite $\theta'(s_n)$; posons $\theta'(\bar{s}) = \bar{\alpha}$.

Faisons la même opération avec tous les points s de $(0, L_C)$ n'appartenant pas à E.

Ayant ainsi défini $\theta'(s)$ dans tout intervalle $(0, L_C)$, on voit que les équations (67) ont lieu partout dans $(0, L_C)$.

Par conséquent la fonction $\Phi'_{\theta'}(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s))$ est continue et bornée, admettant presque partout la dérivée intégrable.

On a donc

$$(68)\qquad -\frac{d\Phi'_{\theta'}}{ds}\sin\theta+\Phi'_{\theta'}\theta'\cos\theta-\Phi\cos\theta+\Phi'_{\theta}\sin\theta+\int_0^s\Phi'_x ds=B$$

$$(69)\qquad -\frac{d\Phi'_{\theta'}}{ds}\cos\theta+\Phi'_{\theta'}\theta'\sin\theta-\Phi\sin\theta-\Phi'_{\theta}\cos\theta+\int_0^s\Phi'_y ds=B_1$$

d'où en multipliant (68) par $\cos\theta$ et (69) par $\sin\theta$ et en faisant la somme on obtient

$$(\Phi'_{\theta'}\theta'-\Phi)+\cos\theta\int_0^s\Phi'_x ds+\sin\theta\int_0^s\Phi'_y ds=(B\cos\theta+B_1\sin\theta);$$

d'ici on conclut que la fonction $\Phi'_{\theta'}\theta'-\Phi$ est aussi une fonction continue et bornée, admettant presque partout dans $(0, L_C)$ la dérivée intégrable.

Remarquons à présent que

$$\Phi(z)-\Phi(0)\leqq z\Phi'(z),$$

de sorte que

$$\Phi'(z)z\geqq K\,|\,z\,|^{1+\delta}-\Phi(0);$$

d'où l'on obtient

$$(70)\qquad |\,\Phi'_{\theta'}(x,\ y,\ \theta,\ \theta')\,|\leqq K\,|\,\theta'\,|^{\delta}-\frac{\Phi(x,\ y,\ \theta,\ 0)}{|\,\theta'\,|}$$

on voit donc que $\theta'(s)$ est bornée dans $(0, L_C)$.

Envisageons maintenant l'ensemble E_1 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\theta'(s)\geqq Q(x(s),\ y(s),\ \theta(s))$$

et l'ensemble E_2 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\theta'(s)\leqq P(x(s),\ y(s),\ \theta(s))$$

La continuité de $\Phi'_{\theta'}$, $\Phi-\theta'\Phi'_{\theta'}$ dans $(0, L_C)$ c. à. d. la continuité de $f'_{\theta'}$, $f\quad\theta' f'_{\theta'}$ dans l'ensemble E_1+E_2 montre que $\theta'(s)$ est continue dans E_1 ainsi que dans E_2.

Par conséquent l'ensemble E_1+E_2 est fermé, de sorte que l'ensemble H, le complementaire de l'ensemble E_1+E_2 jusqu'à l'intervalle $(0, L_C)$ est composé d'une suite énumérable d'intervalles ouverts $(\alpha_i,\ \beta_i)$.

Dans chaque $(\alpha_i,\ \beta_i)$ on a évidemment

$$P(x(s),\ y(s),\ \theta(s))\leqq\theta'(s)\leqq Q(x(s),\ y(s),\ \theta(s))$$

Par conséquent en vertu de (40) on reçoit

$$(71)\qquad \begin{aligned} &\Phi(x, y, \theta, \theta') = f(P) + (\theta' - P)f'(P), \quad \Phi'_{\theta'}(x, y, \theta, \theta') = f'(P) \\ &\Phi'_x(x, y, \theta, \theta') = f'_x(P)\frac{Q-\theta'}{Q-P} + f'_x(Q)\frac{\theta'-P}{Q-P}, \quad (\alpha_i \leqq s \leqq \beta_i). \end{aligned}$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans les équations (67) et en faisant les calculs, on s'assure que dans l'intervalle (α_i, β_i), C doit verifier l'équation differentielle du 2ème ordre de la forme

$$(72)\qquad \frac{d\theta}{ds} = \rho(x, y, \theta)$$

où $\rho(x, y, \theta)$ est une fonction continne périodique avec la période 2π par rapport à θ.

Cela étant, envisageons l'ensemble H_1 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\Phi(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)) \neq f(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)).$$

Il est évident d'abord que l'ensemble H_1 appartient a H.

Or (72) nous montre qne $\theta'(s)$ et par suite

$$(73)\qquad \Phi(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)), \quad f(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s))$$

sont des fonction continues de s dans H.

Par consequent H_1 est formé d'une suite énumérable d'intervalles $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Il est aisé de voir que dans chaque intervalle $(\bar{\alpha}_i, \beta_i)$, C vérifie l'équation (72).

D'autre part on peut démontrer que l'arc de C dans $(\alpha_i, \bar{\beta}_i)$ donne le minimum faible à l'intégrale

$$(74)\qquad \int_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{\beta}_1} \pi(x, y, \theta)ds$$

où l'on a posé

$$\pi(x, y, \theta) = f(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) - P(x, y, \theta)f'_{\theta'}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) -$$
$$- \cos\theta \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\theta f'_{\theta'}(x, y, \theta, P(x, y, \theta))\partial\theta - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\theta f'_{\theta'}(x, y, \theta, P(x, y, \theta))\partial\theta.$$

Nous dirons qu'une courbe C est singulière relativement au problème de minimum posé si elle possède les propriétés suivantes :

1°) vérifie l'équation (72);

2°) vérifie l'inégalité $\Phi(x, y, \theta, \theta') < f(x, y, \theta, \theta')$;

3°) réalise le minimum faible de l'intégrale (74).

Alors, d'après ce qui précède, on s'assure à présent que l'égalité

$$I(C) = J(C)$$

a lieu dans le cas où aucun arc de C ne se confond avec l'arc d'une courbe singulière, et dans ce cas seulement.

Ainsi nous avons démontré le théorème.

Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions explicitées au debut de ce §, alors, afin qu'il existe la courbe réalisant le minimum absolu de l'intégrale $I(C)$ dans le champ $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que parmi les courbes réalisant le minimum absolu de $J(C)$ dans $\mathfrak{D}$ il existe la courbe n'ayant aucun arc commun avec des courbes singulières relatives au problème de minimum posé.

Remarque. — Si la fonction $\rho(x, y, \theta)$ vérifie pour toutes les valeurs de ses argument une des inégalités

$$\rho(x, y, \theta) \geqq Q(x, y, \theta), \quad \rho(x, y, \theta) \leqq P(x, y, \theta)$$

alors il n'existe aucune courbe singulière, de sorte que dans ce cas il existe toujours le minimum absolu de l'intégrale $I(C)$ dans le champ $\mathfrak{D}$.

§ **10.** Dans ce § nous allons démontrer l'existence des solutions des équations d'Euler relatives à $I(C)$ dans le champ $\mathfrak{D}$, en supposant verifiées les conditions du § 9.

Avant d'aller plus loin, observons qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre α_M tel que si

$$|x| \leqq M, \quad |y| \leqq M \tag{75}$$

alors

$$f''_{\theta'^2}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) \geqq \alpha_M, \quad f''_{\theta'^2}(x, y, \theta, Q(x, y, \theta)) \geqq \alpha_M. \tag{76}$$

D'ici on voit, en vertu du théorème classique sur les fonctions implicites, qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre H_M tel que si les (75) ont lieu, alors

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| \leqq H_M, \quad \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| \leqq H_M, \quad \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right| \leqq H_M, \\ &\left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right| \leqq H_M, \quad \left|\frac{\partial Q}{\partial y}\right| \leqq H_M, \quad \left|\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right| \leqq H_M. \end{aligned} \tag{77}$$

Il est évident d'autre part qu'à chaque M on peut faire correspondre un nombre ε_M tel que si (75) ont lieu et si

$$|z - P(x, y, \theta)| \leqq \varepsilon_M$$

ou si

$$|z - Q(x, y, \theta)| \leqq \varepsilon_M$$

alors

$$f''_{\theta'^2}(x, y, \theta, z) \geqq \frac{\alpha_M}{2}.$$

Cela étant, considérons l'intervalle $(P(x, y, \theta) + \varepsilon_M,\ Q(x, y, \theta) - \varepsilon_M)$ que nous désignons par $(P_{\varepsilon_M}(x, y, \theta),\ Q_{\varepsilon_M}(x, y, \theta))$.

Envisageons le champ $D_{n,M}$ des courbes C appartenant au champ $\mathfrak{D}$, formées au plus de n arcs le long de chacune desquelles on a presque partout

$$\theta'(s) \geqq Q_{\varepsilon_M}(x, y, \theta)$$

ou presque partout $|x| \leqq M$, $|y| \leqq M$

$$\theta'(s) \leqq P_{\varepsilon_M}(x, y, \theta).$$

Montrons qu'il existe deux nombres n_1 et M_1 tels que pour tout $n \geqq n_1$ le champ D_{n,M_1} existe, c. à. d. il existe des courbes appartenant à ce champ.

Soit en effet C

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqq s \leqq L_C$$

la courbe minimante de $J(C)$ dans le champ $\mathfrak{D}$.

Faisons avec C avec la même construction qu'avec C dans les page 197, 205 et avec la courbe ainsi obtenue la même construction qu'avec C_0 dans la page 205.

On obtient alors une suite des courbes C_n appartenant au champ $\mathfrak{D}$

$$x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad 0 \leqq s \leqq L_C$$

telles que:

1°) $x_n(s) \to x(s)$, $y_n(s) \to y(s)$, $\theta_n(s) \to \theta(s)$; $n \to \infty$

2°) $I(C_n) \to J(C_n)$, $n \to \infty$

3°) l'intervalle $(0, L_C)$ peut être divisé au plus en $2n$ parlies dans chacune desquelles on a partout

$$\theta'_n(s) - P(x_n(s), y_n(s), \theta_n(s)) \leqq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ou partout

$$\theta'_n(s) - Q(x_n(s), y_n(s), \theta_n(s)) \geqq -\varepsilon_n.$$

Or, il existe un nombre M tel que

$$|x(s)| \leqq M, \quad y(s)| \leqq M.$$

Par conséquent on s'assure d'après (1) qu'il existe un nombre M_1 indépendant de n, tel que

$$(78) \qquad |x_n(s)| \leqq M_1, \quad |y_n(s)| \leqq M_1.$$

Fixons à présent un nombre n_1 tel que pour tout $n \leqq \frac{n_1}{2}$ on ait $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{M_1}$.

On voit donc que le champ D_{n,M_1} existe pour tout $n \leqq n_1$. On voit de plus qu'à chaque nombre $M \geqq M_1$ on peut faire correspondre un nombre n_M tel que le champ $D_{n,M}$ existe pour tout $n \geqq n_M$.

La relation (21) nous montre que la borne inférieure de $I(C)$ dans $D_{n,M}$ tend vers i_D quand $n \to \infty$.

En vertu de l'inégalité

$$(79) \qquad I(C) = \int_0^{L_C} f(x, y, \theta, \theta')ds \geqq K\int_0^{L_C} |\theta'|^{1+\delta}ds$$

on voit qu'il existe un nombre positif $\overline{M}$ tel que pour toute courbe pour laquelle

$$I(C) \leqq i_D + 1,$$

on doit avoir

$$|x(s)| < M, \quad y(s)| < \overline{M}.$$

Par consequent, d'après (78), on voit que si M_2 est le plus grand des nombres M_1, $\overline{M}$ alors il existe un nombre n_2 tel que si pour une courbe C on a

$$(80) \qquad I(C) \leqq i_{D_{n,M_2}} + \frac{1}{2}$$

alors on doit avoir

$$(81) \qquad |x(s)| < M_2, \quad |y(s)| < M_2$$

et cela quelque soit le nombre $n \geqq n_2$, où n_2 est un nombre suffisamment grand ($\geqq n_{M_2}$).

Cela étant, envisageons le champ $D_{n,M_2}(n \geq n_2)$ et posons le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans ce champ.

Soit $\underset{m \to \infty}{C_m}$ la suite minimisante. Il est évident en vertu de l'inégalité (79) que la suite $\underset{m \to \infty}{C_m}$ a une courbe d'accumulation C appartenant au champ D de sorte que de la suite C_m on peut toujours extraire une suite C_μ telle que la suite C_μ admet C comme courbe limite.

Cela étant, soient $l_i^{(m)}(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{i+1}^{(m)})$ les intervalles composants de $(0, L_{C_m})$ tels que dans chacune d'eux on ait presque partout

$$P_{\varepsilon M_2}(x_m, y_m, \theta_m) \geqq \theta'_m$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon M_2}(x_m, y_m, \theta_m) \leqq \theta'_m.$$

Or le nombre des intervalle $l_i^{(m)}$ étant au plus égal à n, on peut toujours extraire de la suite μ une telle suite ν que

$$\alpha_i^{(\nu)} \to \alpha_i.$$

Montrons qu'à l'intérieur de $l_i(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ (si bien entendu $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$), on a presque partout

$$P_{\varepsilon M_2}(x, y, \theta) \geqq \theta'$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon M_2}(x, y, \theta) \leqq \theta'.$$

À cet effet, il suffit de remarquer qu'il existe une suite ε_ν convergente vers zéro, telle que presque partout dans $(0, L_C)$

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\int_s^{s+\varepsilon_\nu} \theta'_\nu(s)ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta'(s).$$

On voit donc que l'intervalle $(0, L_C)$ peut être divisé au plus en n intervalles l_i qu'à l'interieur de l_i on a presque partout

$$P_{\varepsilon M_2}(x, y, \theta) \geqq \theta'$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon M_2}(x, y, \theta) \leqq \theta';$$

on a d'autre part

$$|x| \leqq M_2, \quad |y| \leqq M_2.$$

Par conséquent la courbe C appartienne au champ D_{n, M_2}.

Montrons qu'on a

$$I(C) = i_{D_{n, M_2}}.$$

Cela étant, désignons par $\bar{l}_i^{(\nu)}$ l'intervalle commun à l_i, $l_i^{(\nu)}$ s'il ne se réduit pas à un point.

Soit CE_ν l'ensemble complémentaire à l'ensemble E_ν formé des intervalles $\bar{l}_i^{(\nu)}$, on a évidemment

$$m(E_\nu) = \sum_i m(\bar{l}_i^{(\nu)}) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} L_C, \quad m(CE_\nu) = L_C - m(E_\nu) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{82}$$

on a d'autre part

$$\int_0^{L_{C_\nu}} f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta'_\nu)ds \geqq \int_{E_\nu} f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta'_\nu)ds =$$

$$= \int_{E_\nu} [f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta') + (\theta'_\nu - \theta')f'_{\theta'}(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta')]ds +$$

$$+ \int_{E_\nu} [f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta'_\nu) - f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta') - (\theta'_\nu - \theta')f'_{\theta'}(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta')]ds.$$

Or dans chaque $\bar{l}_i^{(\nu)}$ on a presque partout

$$f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta'_\nu) - f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta') - (\theta'_\nu - \theta')f'_{\theta'}(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta') =$$

$$= \frac{1}{2}(\theta'_\nu - \theta')^2 f''_{\theta'^2}\left(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \frac{\theta'_\nu + \alpha\theta'}{1+\alpha}\right) \geqq 0.$$
$$(0 \leqq \alpha \leqq +\infty)$$

D'autre part, de (82) on tire que

$$\int_{E_\nu} f(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta')ds \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{L_C} f(x, y, \theta, \theta')ds = I(C), \quad \int_{E_\nu} (\theta'_\nu - \theta')f'_{\theta'}(x_\nu, y_\nu, \theta_\nu, \theta')ds \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi finalement

$$I(C_\nu) \geqq I(C) - \varepsilon_\nu, \quad \text{où} \quad \varepsilon_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, à l'aide de raisonnement habituel, on tire

$$I(C) = i_{D_{n,M_2}} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Montrons que $\theta'(s)$ est une fonction continue dans (α_i, α_{i+1}); à cet effet, supposons le contraire et remarquons que la courbe

$$x = x(s), \quad y = y(s); \quad \alpha_i \leqq s \leqq \alpha_{i+1}$$

donne à l'intégrale

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y, \theta, \theta')ds$$

le minimum absolu dans le champ $\bar{D}$ des courbes $\bar{C}$

$$x = \overline{x(s)}, \quad y = \overline{y(s)}$$

de longeur $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ telles que

$$\overline{x(\alpha_i)} - x(\alpha_i) = \overline{y(\alpha_i)} - y(\alpha_i) = \ldots = \overline{\theta(\alpha_{i+1})} - \theta(\alpha_{i+1}) = 0 \tag{83}$$
$$|\overline{x(s)}| \leqq M_2, \quad |\overline{y(s)}| \leqq M_2$$

et telles que presque partout en (α_i, α_{i+1})

$$\overline{\theta(s)}' \geqq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}), \quad \text{ou presque partout} \quad \overline{\theta(s)}' \leqq P_{\varepsilon M_2}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}).$$

Il est aisé donc de s'assurer que

$$\delta I = \int_0^{Lc} [f'_{\theta'}\delta\theta' + f'_\theta \delta\theta + f'_x \delta x + f'_y \delta y] ds \geqq 0$$

pour toutes δx, δy compatibles avec les liaisons (83) imposées aux courbes du champ $\bar{D}$.

On voit donc qu'on peut prendre

$$\delta x = -\int_0^s \sin\theta \cdot \delta\theta \cdot ds, \quad \delta y = \int_0^s \cos\theta \cdot \delta\theta \cdot ds$$

où $\delta\theta$ est une telle variation que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sin\theta\delta\theta ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos\theta\delta\theta ds = 0, \quad \delta\theta_{\alpha_i} = \delta\theta_{\alpha_{i+1}} = 0,$$

et que

$$\delta\theta' \geqq Q'_{\varepsilon M_2 x}\delta x + Q'_{\varepsilon M_2 y}\delta y + Q'_{\varepsilon M_2 \theta}\delta\theta$$

pour presque toutes les s telles que

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(x(s), y(s), \theta(s)) = Q_{\varepsilon M_2}(s)$$

et

$$\delta\theta' \leqq P'_{\varepsilon M_3 x}\delta x + P'_{\varepsilon M_2 y}\delta y + P'_{\varepsilon M_2 \theta}\delta\theta$$

pour presque toutes les s vérifiant la relation

$$\theta'(s) = P'_{\varepsilon M_2}(x(s), y(s), \theta(s)) = P_{\varepsilon M_2}(s).$$

Les liaisons $|\overline{x(s)}| \leqq M_2$, $|\overline{y(s)}| \leqq M_2$ ne sont pas imposées à l'attention car d'après (80)-(81), $|x(s)| < M_2$, $|y(s)| < M_2$.

Construisons à présent les variations $\delta\theta$ verifiant les conditions imposées.

Soient E_1, E_2, E_3 trois ensembles tels que

$$l_i = E_1 + E_2 + E_3$$

et tels que presque partout dans E_1 (s'il existe)

$$\theta'(s) > Q_{\varepsilon M_2}(s) \quad \text{ou} \quad \theta'(s) < P_{\varepsilon M_2}(s)$$

presque partout dans E_2 (s'il existe)

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(s)$$

presque partout dans E_3 (s'il existe)

$$\theta'(s) = P_{\varepsilon M_2}(s),$$

tous les E_1, E_2, E_3 étant donc déterminés à une ensemble de mesure nulle près.

Introduisons les fonctions quasi continues et bornées

$$f_1(s),\ f_2(s),\ f_3(s)$$

de façon que dans E_1 ces fonction sont nulles; dans E_2 égales réspectivement à $Q'_{\varepsilon M_2 x}$, $Q'_{\varepsilon M_2 y}$, $Q'_{\varepsilon M_2 \theta}$, dans E_3 à $P'_{\varepsilon M_2 x}$, $P'_{\varepsilon M_2 y}$, $P'_{\varepsilon M_2 \theta}$.

Soit $F(s)$ une fonction quasi-continue et bornèe dans (α_i, α_{i+1}).

Désignons

$$-\sin\theta(s) \text{ par } \lambda(s), \quad \cos\theta(s) \text{ par } \mu(s).$$

Considerons le système intégro-differentiel suivant:

$$\frac{d\psi}{ds} = f_1(s)\psi + f_2(s)\int_0^s \lambda(s)\psi(s)ds + f_3(s)\int_0^s \mu(s)\psi(s)ds + F(s), \quad \psi(\alpha_i) = 0.$$

Il est évident que

$$\psi(s) = \int_0^s \omega(s, \xi)F(\xi\ d\xi$$

où

$$\frac{d\omega(s, z)}{ds} = f_1(s)\omega(s, z) + \int_0^s [f_2(s)\lambda(\xi) + f_3(s)\mu(\xi)]\omega(\xi, z)d\xi, \quad \omega(s, s) = 1.$$

Ce système nous montre que $\omega'_s(s, z)$ est continue et dérivable par rapport à z pour presque toutes les s.

On a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \lambda(s)\psi(s)ds = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\lambda(s)}F(s)ds, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \mu(s)\psi(s)ds = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\mu(s)}F(s)ds.$$

où

$$\overline{\lambda(s)} = \int_s^{\alpha_{i+1}} \omega(\xi, s)\lambda(\xi) d\xi, \quad \overline{\mu(s)} = \int_s^{\alpha_{i+1}} \omega(\xi, s)\mu(\xi) d\xi.$$

Soit à présent $\delta\varphi(s)$ une variation arbitraire dans E_1, positive dans E_2 et négative dans E_3, qui vérifie les relations

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\lambda(s)}\delta\varphi(s)ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\mu(s)}\delta\varphi(s)ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \omega(\alpha_{i+1}, s)\delta\varphi(s)ds = 0.$$

Posons

$$\delta\theta = \int_{\alpha_i}^{s} \omega(s, \xi)\delta\varphi(\xi)d\xi.$$

On s'assure aisément que $\delta\theta$ vérifie toutes les conditions imposées par les liaisons (83).

Or on a

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \Omega\delta\theta' ds$$

où l'on a posé

$$\Omega = f'_{\theta'} - \int_{\alpha_i}^{s} f'_\theta ds + \int_{\alpha_i}^{s} \left[\sin\theta \int_{\alpha_i}^{s} f'_x ds - \cos\theta \int_{\alpha_i}^{s} f'_y ds\right] ds.$$

Or, on a presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$\delta\theta' = \delta\varphi + \int_{\alpha_i}^{s} \omega'_s(s, \xi)\delta\varphi(\xi)ds,$$

de sorte que

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left[\Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, s)d\xi\right]\delta\varphi(s)ds,$$

d'où l'on tire: presque partout dans E_1

$$(84) \qquad \Omega\ s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, s)d\xi = C_1\overline{\lambda(s)} + C_2\overline{\mu(s)} + C_3\omega(\alpha_{i+1}, s),$$

presque partout dans E_2

$$\Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, s)d\xi \geqq C_1\overline{\lambda(s)} + C_2\overline{\mu(s)} + C_3\omega(\alpha_{i+1}, s), \tag{85}$$

presque partout dans E_3

$$\Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, s)d\xi \leqq C_1\overline{\lambda(s)} + C_2\overline{\mu(s)} + C_3\omega(\alpha_{i+1}, s), \tag{86}$$

$$\text{où } C_1,\ C_2,\ C_3 = \text{const.}$$

Soit $\overline{E}_1$ l'ensemble des valeurs de s appartenant à E telles que partout dans $\overline{E}_1$ existe la dérivée $\theta'(s)$ et a lieu (84).

Soit $\bar{s}$ un point d'accumulation des points de E_1.

Montrons que quand le point s de $\overline{E}_1$ tend vers $\bar{s}$, $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

En effet, supposons que quand s tend vers $\bar{s}$, il existe au moins deux valeurs d'accumulation de $\theta'(s)$, θ_1', θ_2'.

En vertu de la continuité des intégrales

$$\int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, s)d\xi, \quad -\int_{\alpha_i}^{s} f'_\theta ds + \int_{\alpha_i}^{s}\left[\sin\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_x ds - \cos\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_y ds\right]ds$$

on voit que

$$f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_1) - \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} f'_\theta ds + \int_{\alpha_i}^{\bar{s}}\left[\sin\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_x ds - \cos\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_y ds\right]ds +$$
$$+ \int_{\bar{s}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\xi(\xi, \bar{s})d\xi = C_1\overline{\lambda(s)} + C_2\overline{\mu(s)} + C_3\omega(\alpha_{i+1}, s),$$

$$f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_2) - \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} f'_\theta ds + \int_{\alpha_i}^{\bar{s}}\left[\sin\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_x ds - \cos\theta\int_{\alpha_i}^{s} f'_y ds\right]ds +$$
$$+ \int_{\bar{s}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega'_\theta(\xi, \bar{s})d\xi = C_1\overline{\lambda(s)} + C_2\overline{\mu(s)} + C_3\omega(\alpha_{i+1}, \bar{s}),$$

d'où l'on tire

$$f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_s, \theta_{\bar{s}}, \theta'_1) = f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_2).$$

Or θ'_1, θ'_2 étant les valeurs d'accumulation de $\theta'(s)$, on doit avoir

$$\theta'_1 \geqq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}),\ \theta'_2 \geqq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \quad \text{ou} \quad \theta'_1 \leqq P_{\varepsilon M_2}(s),\ \theta'_2 \leqq P_{\varepsilon M_2}(s).$$

Donc entre θ'_1 et θ'_2

$$f''_{\theta'^2}(x_{\bar{s}},\ y_{\bar{s}},\ \theta_{\bar{s}},\ z) = 0$$

ce qui est impossible en vertu des suppositions faites.

Ainsi quand le point s de $\bar{E}_1$ tend d'une façon quelconque vers le point s de E_1 non appartenant à $\bar{E}_1$, $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

Considérons à présent E_2. On voit que presque partout dans cet ensemble (pseudo-intervalle)

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(s).$$

Soit $\bar{E}_2$ l'ensemble des valeurs de s appartenant à E_2 dans le quel il existe la dérivée $\theta'(s)$ et se trouve vérifiée la relation (85). Soit s un point d'accumulation des points de $\bar{E}_2$.

On s'assure aisément que quand le point s de E_2 tend vers s, alors $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

Repétons enfin le même raisonnement avec E_3.

Pour démontrer à présent la continuité de $\theta'(s)$ dans tout intervalle $(\alpha_i,\ \alpha_{i+1})$ il suffit de montrer que si $\bar{s}$ est un point d'accumulation à la fois des points de $\bar{E}_1$ et de $\bar{E}_r$, $(r = 2, 3)$ $(E_2,\ \bar{E}_3$ ne peuvent pas coexister) alors

$$\alpha_1 = \lim_{s(E_1) \to \bar{s}} \theta'(s) = \alpha_r = \lim_{s(Er) \to \bar{s}} \theta'(s)$$

(les deux limites étant bien déterminées en vertu des raisonnements precedents).

Supposons pour fixer les idées que $r = 2$.

Alors, en vertu de (84) et de (85),

$$f'_{\theta'}(x_{\bar{s}},\ y_{\bar{s}},\ \theta_{\bar{s}},\ \alpha_1) \leqq f'_{\theta'}(x_{\bar{s}},\ y_s,\ \theta_{\bar{s}},\ \alpha_2),$$

de sorte que

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2.$$

Or

$$\alpha_2 = Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \quad \alpha_1 \geqq Q_{\varepsilon M_2}(s).$$

On a donc

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Le même raisonnement dans l'autre cas $r = 3$. c. q. f. d.

Ainsi nous avons démontré que $\theta'(s)$ dans $(\alpha_i,\ \alpha_{i+1})$ est une fonction continue.

D'une façon analogue on peut montrer que si

$$\theta'(\alpha_i + 0) \neq (\alpha_i - 0)$$

alors

$$\theta'(\alpha_i + 0) = P_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)(\text{ou} = Q_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)), \quad \theta'(\alpha_i - 0) = Q_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)(\text{ou} = P_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)).$$

On voit ainsi que $\theta'(s)$ est une fonction continue sauf peut-être au voisinage d'un nombre de points isolés où elle admet des discontinuités de la première espèce.

D'après ce qui précède, on s'assure qu'en ces points de discontinuité — α_i — on a

$$\Delta_n(\alpha_i + 0) = \Delta_n(\alpha_i - 0) = 0.$$

La fonction $\Delta_n(s)$ est donc une fonction continue de s.

Or dans chaque (α_i, α_{i+1}) il existe presque partout la dérivée $\frac{d^2\theta}{ds^2}$ bornée (en valeur absolue) indépendamment de n. Vu que $x(s)$, $y(s)$, $\frac{d\theta}{ds}$ sont aussi bornées (en valeur absolue) indépendamment de n, on s'assure à présent qu'il existe le nombre positif H independant de n tel que

$$\text{(87)} \qquad | \Delta_n(s'') - \Delta_n(s') | \leqq H | s'' - s' |; \quad 0 \leqq s' \leqq L_C, \ 0 \leqq s'' \leqq L_C.$$

Or la suite C étant la suite minimisante à la fois pour I C) et pour $J(C)$ dans le champ D, les bornes inférieures de $I(C)$ et de $J(C)$ dans D étant égales, on a

$$\int_0^{L_C} \Delta_n(s)ds \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \Delta_n(s) \geqq 0.$$

En vertu de (87), on voit donc que

$$\Delta_n(s) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte qu'à chaque ε on peut faire correspondre un nombre n_ε tel que pour tout $n \geqq n_\varepsilon$

$$| \Delta_n(s) | \leqq \varepsilon, \quad 0 \leqq s \leqq L_C.$$

Or si pour un point s_0, $\theta'(s_0) = P_{\varepsilon M_2}(s_0)$, ou si $\theta'(s_0) = Q_{\varepsilon M_2}(s_0)$, alors

$$\Delta_n(s_0) \geqq \delta > 0,$$

où δ ne dépend pas de n.

On voit donc que si l'on prend $\varepsilon \leq \delta$, alors pour tout $n \geqq n_\varepsilon$ et pour tout s intérieur à $(0, L_C)$, $\theta'(s)$ sont à l'exterieur de $(P_{\varepsilon M_2}(s), Q_{\varepsilon M_2}(s))$ de sorte que la courbe C devient une courbe *intérieure* au champ D_{n, M_2}.

Par conséquent tout arc (s_1, s_2) de C donne le minimum faible (libre) à l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} f(x, y, \theta, \theta')ds$$

les points extrêmes et les valeurs extrêmes des angles de direction des courbes de comparaison coincidant avec celles de l'arc considéré de C.

On voit maintenant que la courbe C est une extremaloïde relative à $I(C)$ formé d'un nombre (au plus égal à n) des extremales.

Cela démontre le théorème.

Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions du théoréme du § 9, alors dans le champ D il existe toujours au moins une extremaloïde relative à $I(C)$; de plus: quelque petit que soit le nombre ε, on peut trouver dans le champ D une telle extremaloïde relative à $I(C)$ qui donne à l'intégrale $I(C)$ la valeur qui différe au plus par ε de la borne inferieure i_D.

Funzioni continue da una parte con particolare riguardo alla loro derivabilità unilaterale.

Memoria di T. VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *Si estende alle funzioni continue da una parte un teorema fondamentale di* DENJOY *sui numeri derivati e se ne traggono notevoli conseguenze. Si dimostra che l'aggregato dei punti di discontinuità è numerabile, che sotto determinate condizioni può essere denso e in quest'ultima ipotesi se ne studia la struttura. Si dànno infine degli esempi di funzioni continue verso destra.*

In una piccola Nota comparsa nel n.° 1, anno X (1931), del « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » col titolo *Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale*, ho promesso di pubblicare per esteso la mia tesi di laurea, presentata nell'autunno 1930 alla Regia Università di Bologna. Mantengo ora la promessa per la prima parte della mia tesi ove trovansi dimostrate le proposizioni enunciate ai n.i 2, 3, di quella Nota.

Rivolgo un pensiero di devota riconoscenza al mio Maestro BEPPO LEVI che con tanta intelligenza e con tanto amore mi ha assistito in questa fatica.

§ 1. Estensione di un teorema fondamentale di Denjoy.

1. Definizioni. — Una funzione $F(x)$ della variabile reale x, data in un intervallo $\overline{a\,b}$, è continua verso destra in un punto x_0 di $\overline{a\,b}$ se, assegnato comunque un numero $\varepsilon > 0$, esiste sempre un numero $\delta > 0$ tale che, se $0 < x - x_0 < \delta$, è $| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon$.

Per una funzione $F(x)$ continua verso destra in un punto x_0 seguirò la terminologia abituale ed adotterò notazioni in uso presso varî autori. Dirò dunque:

« Rapporto incrementale destro » di $F(x)$ in x_0 il rapporto

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

per $x > x_0$ e sufficientemente prossimo ad x_0;

« Numero derivato superiore destro » di $F(x)$ in x_0 il numero

$$\overline{D}_+F(x_0) = \underset{x \to x_0+0}{\text{limite massimo}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0},$$

cioè il massimo dei valori limiti del rapporto incrementale destro di $F(x)$ in x_0 quando x tende a x_0; analogamente

« Numero derivato inferiore destro » di $F(x)$ in x_0 il numero

$$\underline{D}_+F(x_0) = \underset{x \to x_0+0}{\text{limite minimo}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0},$$

cioè il minimo dei valori limiti del rapporto incrementale destro di $F(x)$ in x_0 quando x tende a x_0.

Se una funzione $F(x)$ è continua verso destra in tutto un intervallo $\overline{a\,b}$ (cioè in tutti i punti di un intervallo $\overline{a\,b}$), si può immaginare x_0 variabile in $\overline{a\,b}$ (dopochè per ogni suo valore siano supposte effettuate le dette operazioni di limite) e, sostituendogli a sua volta per semplicità e chiarezza il simbolo di variabile indipendente x, si viene alla considerazione delle funzioni

$$\overline{D}_+F(x), \quad \underline{D}_+F(x),$$

dette rispettivamente « Derivata superiore destra » e « Derivata inferiore destra » di $F(x)$. Si ha, per ogni valore di x,

$$\overline{D}_+F(x) \geq \underline{D}_+F(x).$$

Se, per un valore x_0 di x, è $\overline{D}_+F(x_0) = \underline{D}_+F(x_0)$, la funzione $F(x)$ dicesi « derivabile verso destra » in x_0 e si scrive $\overline{D}_+F(x_0) = \underline{D}_+F(x_0) = D_+F(x_0)$. In tal caso è

$$D_+F(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Se ciò avviene in tutto $\overline{a\,b}$, resta definita la funzione $D_+F(x)$ « Derivata destra » di $F(x)$.

Analoghe definizioni valgono per una funzione continua verso sinistra.

Se, per un valore x_0 di x, è $\overline{D}_+F(x_0) = \underline{D}_+F(x_0) = \overline{D}_-F(x_0) = \underline{D}_-F(x_0)$, la funzione $F(x)$ dicesi « derivabile » in x_0 e si scrive

$$\overline{D}_+F(x_0) = \underline{D}_+F(x_0) = D_+F(x_0) =$$
$$= \overline{D}_-F(x_0) = \underline{D}_-F(x_0) = D_-F(x_0) = DF(x_0) = F'(x_0).$$

In tal caso è

$$DF(x_0) = F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Se ciò avviene in tutto $\overline{a\,b}$, resta definita la funzione $DF(x) = F'(x)$ « derivata » di $F(x)$.

Io considererò, sempre nel presente lavoro, generiche funzioni $F(x)$ continue da una stessa parte in tutto un intervallo $\overline{a\,b}$. Per fissare le idee supporrò sempre che la continuità in tutto l'intervallo $a\,b$ sussista dalla parte destra.

2. Si può estendere, coi dovuti accorgimenti, ad una funzione $F(x)$ ovunque continua verso destra in $\overline{a\,b}$ il teor. fondamentale di DENJOY sui numeri derivati delle funzioni continue e da lui chiamato « primo teorema » o « teorema descrittivo » (1). Ne dedurrò delle applicazioni analoghe ad applicazioni dedotte dal DENJOY per le funzioni continue. Riporto le dimostrazioni del DENJOY punto per punto. ma con le necessarie leggere varianti.

TEOREMA FONDAMENTALE. Se esiste un'infinità d'intervalli

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,\ S_n, \ldots$$

$(S_n \equiv \overline{c_n\,d_n})$, la cui lunghezza tende a 0 per n tendente ad ∞, i cui estremi sinistri $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ formano un insieme ovunque denso in $a\,b$; se, d'altra parte, il rapporto incrementale l_n della funzione $F(x)$ su S_n

a) resta costantemente superiore a un numero fisso k,

b) oppure resta costantemente inferiore a un numero fisso k,

c) oppure tende verso un limite unico finito od infinito l,

allora, indicato con E l'insieme dei punti di $\overline{a\,b}$ in cui è rispettivamente

a) $\overline{D}_+ F(x) \geq k$,

b) oppure $\underline{D}_+ F(x) \leq k$,

c) oppure il numero l è un derivato mediano (2) od estremo destro,

l'insieme E così definito è ovunque denso in $\overline{a\,b}$ ed anzi è un residuale 3) di $\overline{a\,b}$.

---

(1) ARNAUD DENJOY, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, in » Journal de Mathématiques pures et appliquées », année 1915, tome I, pag. 149.

(2) « Derivato mediano destro » è uno qualunque dei valori limiti del rapporto incrementale destro, che non sia nè $\overline{D}_+$ nè $\underline{D}_+$ (DENJOY, loc. cit., pag. 145).

(3) Secondo il DENJOY (loc. cit., pag. 123) si chiama « residuale » di un aggregato perfetto $\mathfrak{F}$ (continuo o no) il subaggregato di $\mathfrak{F}$ che rimane quando si escludano da $\mathfrak{F}$ succes-

DIM. Sia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ una successione di numeri positivi tendente a 0. Avendo posto

$$l_n = \frac{F(d_n) - F(c_n)}{d_n - c_n}$$

considero il rapporto incrementale $\dfrac{F(d_n) - F(x)}{d_n - x}$ con x variabile nelle vicinanze di c_n per valori maggiori di c_n. Poichè, per ipotesi, $F(x)$ è continua verso destra in c_n, esiste un intorno destro di c_n (segmento avente c_n per estremo sinistro) che indico con $\sigma_n \equiv \overline{c_n c'_n}$, minore di ε_n, avente per estremo destro c'_n compreso fra c_n e d_n, e tale che, per ogni suo punto x, il quoziente considerato è compreso fra $l_n - \varepsilon_n$ ed $l_n + \varepsilon_n$.

Dico che ogni punto ξ appartenente a un'infinità di σ_n appartiene ad E. Infatti, anzitutto, se σ_n contiene ξ, l'estremità destra d_n dell'intervallo S_n avente lo stesso indice di σ_n, supera ξ e ne dista per meno di S_n. Dunque, per la successione delle σ_n contenente ξ, d_n tende a ξ dalla destra. In secondo luogo il rapporto incrementale $\dfrac{F(d_n) - F(\xi)}{d_n - \xi}$ è, per la stessa successione di valori di n, compreso fra $l_n - \varepsilon_n$ ed $l_n + \varepsilon_n$. Dunque tutti i suoi valori limiti che sono dei derivati destri mediani od estremi di $F(x)$ in ξ, sono compresi nell'insieme dei valori limiti della successione l_n. Se dunque *a)* l_n supera k, $F(x)$ possiede in ξ un derivato mediano o estremo almeno uguale a k e perciò si ha $\overline{D}_+F(\xi) \geq k$; se *b)* $l_n < k$, $\underline{D}_+F(\xi) \leq k$, e se *c)* $\lim\limits_{n \to \infty} l_n = l$ finito od infinito, $\underline{D}_+F(\xi) \leq l \leq \overline{D}_+F(\xi)$, e precisamente l è un derivato mediano o estremo destro.

L'aggregato dei punti interni a un'infinità d'intervalli σ_n è ovunque denso su $\overline{ab}$. Infatti: sia $\overline{mn}$ un qualunque segmento parziale di $\overline{ab}$. Sia c_{n_1} il primo punto della successione $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ interno ad $\overline{mn}$ e tale che σ_{n_1} sia interamente contenuto in $\overline{mn}$. Sia c_{n_2} il primo punto della medesima successione $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ interno a σ_{n_1} e tale che σ_{n_2} sia interamente contenuto in σ_{n_1}. Così si prosegue costruendo una successione d'infiniti $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \sigma_{n_3}, \ldots$

---

sivamente un'infinità numerabile di aggregati non densi in $\mathfrak{F}$. Seguendo R. BAIRE (*Sur les fonctions de variables réelles*, in « Annali di Matematica », serie III, tomo III (1899), pag. 67) si può dire che un « residuale » di un aggregato perfetto $\mathfrak{F}$ è il subaggregato di $\mathfrak{F}$ che è complementare di un subaggregato di prima categoria su $\mathfrak{F}$. Si dimostra (DENJOY, loc. cit., pag. 232; BAIRE, loc. cit., pag. 67) che « ogni residuale d'un insieme perfetto contiene esso stesso un insieme perfetto ».

ciascuno contenuto nel precedente e in $\overline{mn}$. Questa successione ha per limite un punto ξ di E (⁴). Dunque E ha punti entro $\overline{mn}$ e perciò, per l'arbitrarietà della scelta di $\overline{mn}$, E è ovunque denso in $\overline{ab}$.

Resta da dimostrare che E è un residuale di ab. Infatti, essendo le σ_n definite come sopra, consideriamo l'insieme H_0 dei punti di $\overline{ab}$ che non sono interni a nessuno dei segmenti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. Questo insieme è evidentemente chiuso perchè un punto estraneo ad H_0, essendo interno a un intervallo σ_n interamente estraneo ad H_0, non può essere punto limite di H_0. Dico che H_0 è non denso in ab. In caso contrario esisterebbe un segmento $\overline{mn}$ appartenente interamente ad H_0. Ora l'insieme c_n essendo denso in $\overline{ab}$ esiste in $\overline{mn}$ almeno un punto c_n. L'intervallo σ_n corrispondente, avendo per estremo c_n, contiene tutta una porzione di $\overline{mn}$. Dunque H_0 è non denso in $\overline{ab}$. Se noi sopprimiamo un numero finito di punti c_n, questo insieme non cessa di essere denso. Sia dunque H_p l'insieme dei punti di ab che non sono interni a nessuno dei segmenti $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots$ H_p, che contiene H_{p-1}, è non denso in $\overline{ab}$ (e d'altra parte chiuso). Consideriamo l'insieme H costituito dalla riunione degli aggregati $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_p, \ldots$. Sia G il residuale di $\overline{ab}$ complementare di H. Ogni punto M di G è interno a un'infinità d'intervalli σ_n. Poichè se questo punto M fosse interno soltanto a un numero finito di essi, il più grande degl'indici di questi avrebbe un certo valore p. M apparterrebbe a tutti gl'insiemi $H_{p+1}, H_{p+2}, \ldots$, dunque ad H e non a G. Dunque M appartiene all'insieme E qualificato nell'enunciato. Dunque E contiene G. Inversamente si vede subito che G contiene E. Dunque $G \equiv E$, ed E è un residuale di $\overline{ab}$. c. d. d.

Seguendo le tracce del DENJOY possiamo dedurre dal teorema fondamentale delle importanti applicazioni. Ma non ne riportiamo tutte nè interamente le dimostrazioni per le quali rimandiamo alla citata memoria del DENJOY. Ci soffermeremo invece su quelle osservazioni che maggiormente interessano il nostro studio.

3. (DENJOY, loc. cit., pag. 152). Supponiamo verificata l'ipotesi *c)* del teorema fondamentale relativamente a due sistemi d'intervalli S_n ed S_n'. Supponiamo cioè che il rapporto incrementale l_n relativo ad S_n tenda ad un

(⁴) Che il punto ξ appartenga ad E si vede facilmente. Infatti gli estremi $c_{n1}, c_{n2}, c_{n3}, \ldots$ costituiscono una successione crescente, gli estremi $d_{n1}, d_{n2}, d_{n3}, \ldots$ una successione decrescente; e queste due successioni sono nelle condizioni d'applicabilità del postulato di DEDEKIND: esse individuano un punto limite ξ che è realmente interno a infiniti σ_k.

limite unico finito od infinito l, che il rapporto incrementale l_n' relativo ad S_n' tenda ad un limite unico finito od infinito $l' \neq l$. Indichiamo gli elementi omologhi relativi al sistema S_n' con gli stessi simboli adoperati per gli elementi relativi al sistema S_n, distinguendoli mediante un accento: così gli elementi σ_n', c_n', d_n'. Riprendiamo la dimostrazione del teor. fondamentale applicandola alternativamente alla successione c_n e alla successione c_n'. Veniamo allora a determinare una successione di segmenti $\overline{mn}$, σ_{n_1}, σ'_{n_1}, σ_{n_2}, σ'_{n_2}, σ_{n_3}, $\sigma'_{n_3}, \ldots$ ciascuno contenuto nel precedente. I segmenti σ'_{n_1}, σ'_{n_2}, $\sigma'_{n_3}, \ldots$ sono scelti fra i σ_n' così come i segmenti σ_{n_1}, σ_{n_2}, $\sigma_{n_3}, \ldots$, sono scelti fra i σ_n. La possibilità di determinare questa successione risulta dalla presenza, su ogni intervallo parziale di $a\,b$, degl'insiemi c_n e c_n' separatamente. La successione σ_{n_1}, σ'_{n_1}, σ_{n_2}, $\sigma'_{n_2}, \ldots$ tende ad un punto limite ξ appartenente ad $\overline{a\,b}$, interno a un'infinità di σ_n, a un'infinità di σ_n', e dove, quindi, F ammette per numeri derivati mediani o estremi destri sia l che l'.

Si deduce il corollario seguente:

(DENJOY, loc. cit., pag. 156). Se una funzione ammette da una stessa parte una derivata unica in ogni punto di $\overline{a\,b}$, è impossibile che i due aggregati in cui questa derivata è l per il primo, l' per il secondo, siano l'uno e l'altro densi su $\overline{a\,b}$.

4. (DENJOY, loc. cit., pag. 153). Se l_n è un numero funzione dell'intervallo $S_n \equiv \overline{c_n\,d_n}$, la cui lunghezza tende a 0 per n tendente ad ∞ (l_n essendo più precisamente in questo studio il rapporto incrementale di $F(x)$ su S_n), conveniamo di dire che « l'insieme l_n ammette in un punto M di $\overline{a\,b}$ il valor limite λ » finito od infinito, se esiste una successione scelta fra i c_n e tendente ad M in modo che i numeri l_n tendano a λ.

I punti di $\overline{a\,b}$ analoghi ad M, in cui l'insieme l_n ammette il valor limite λ, formano evidentemente un insieme chiuso. Supponiamo quest'ultimo coincidente con $\overline{a\,b}$. Qualunque sia ε, é possibile trovare, vicino quanto si vuole ad un punto M qualunque di $\overline{a\,b}$, un punto c_n tale che, per lo stesso indice n, l_n differisca da λ per meno di ε, se λ è finito (sia del segno di λ e sorpassi $\dfrac{1}{\varepsilon}$ in valore assoluto, se λ è infinito). Scegliamo su $\overline{a\,b}$ una successione φ_1, $\varphi_2, \ldots$ ovunque densa su $\overline{a\,b}$ e a ciascun φ_n facciamo corrispondere un numero positivo qualunque η_n ($\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$). Estragghiamo poi dalla successione c_1, $c_2, \ldots, c_n, \ldots$ una succersione γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ in modo che, per ogni n, sia

$$|\varphi_n - \gamma_n| < \eta_n \quad \text{e} \quad |\lambda - \lambda_n| < \eta_n$$

($|\lambda_n| > n$ e λ_n del segno di λ, se λ è infinito), avendo indicato con λ_n il valore di l_n che corrisponde a γ_n. È chiaro che i punti γ_n sono densi su $\overline{a\,b}$ e che λ_n tende a λ. Il teor. fondamentale ci permette immediatamente di concludere:

Se S_n è una successione d'intervalli aventi lunghezze tendenti a 0 quando n tende ad ∞, e il cui estremo sinistro descrive un insieme ovunque denso in $\overline{a\,b}$, se il rapporto incrementale l_n di $F(x)$ su S_n ammette in ogni punto di $\overline{a\,b}$ il valor limite λ, finito od infinito, sarà λ un derivato mediano o estremo destro di $F(x)$ in ogni punto di un residuale di $\overline{a\,b}$.

Quando è $\lambda = +\infty$ $(-\infty)$, diciamo che l_n è non limitato superiormente (inferiormente) in ogni porzione di $\overline{a\,b}$ od in vicinanza di ogni punto di $\overline{a\,b}$. In questo caso $F(x)$ ammette la derivata superiore (inferiore) destra $+\infty$ $(-\infty)$ in un residuale di $\overline{a\,b}$.

5. (Denjoy, loc. cit., pag. 154). Se l'insieme $E(l)$ dei punti in cui $F(x)$ ha per derivato mediano o estremo destro un numero l è ovunque denso su $\overline{a\,b}$, questo insieme è un residuale di $\overline{a\,b}$.

Infatti essendo $E(l)$ ovunque denso in $\overline{a\,b}$, noi possiamo estrarre da esso un'infinità numerabile di punti $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ovunque densa in $\overline{a\,b}$ (5). l essendo in c_n un derivato destro, esiste un intervallo $\overline{c_n\,d_n}$ di estremo sinistro c_n, di lunghezza inferiore ad ε_n ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ successione di numeri positivi tendente a 0, prefissata ad arbitrio), in cui il rapporto incrementale di $F(x)$ differisce da l per meno di ε_n, se l è finito, è del segno di l e superiore in valore assoluto ad n, se l è infinito. Siamo allora nelle condizioni d'applicabilità del teorema fondamentale: l'insieme $E(l)$ è dunque dappertutto un residuale.

Sono dunque dei residuali di $\overline{a\,b}$, tosto che essi siano ovunque densi in $\overline{a\,b}$, gli insiemi in cui 0 è un derivato mediano destro, o $F(x)$ ha il suo derivato superiore destro $+\infty$, il suo derivato inferiore destro $-\infty$.

(5) Infatti dividiamo $\overline{a\,b}$ in n parti uguali e su ciascuna di esse scegliamo indifferentemente un punto di $E(l)$. L'insieme dei punti scelti per tutti i valori di n è evidentemente numerabile, ovunque denso in $\overline{a\,b}$. La dimostrazione fa manifestamente uso del postulato di Zermelo, ma questo uso è legittimo, perchè esso conduce non ad una « costruzione » bensì ad una « dimostrazione », la quale risulta vera indipendentemente dalle scelte eseguite.

6. (DENJOY, loc. cit., pag. 156). Se $D_+F(x)$ è finita in ogni punto di $\overline{a\,b}$, l'insieme dei punti di $\overline{a\,b}$ in vicinanza dei quali $D_+F(x)$ è non limitata superiormente è non denso in $\overline{a\,b}$.

7. Confrontando il teorema fondamentale da noi dimostrato al n.° 2 con l'originale del DENJOY osserviamo che, quanto alla generalità, esso pressappoco gli equivale. Infatti gli toglie la condizione restrittiva della continuità verso sinistra, ma glie ne sostituisce un'altra, quella che l'aggregato perfetto $\mathfrak{S}$, a cui deve appartenere la successione $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ e in cui la medesima successione deve essere densa, sia l'intero segmento $\overline{a\,b}$. Questa condizione può sostituirsi con altra equivalente, ove l'aggregato perfetto $\mathfrak{S}$ si supponga discontinuo. Osserviamo infatti che, per la validità del ragionamento del n.° 2, occorre che di ogni c_n esista un intorno σ_n sufficientemente piccolo soddisfacente a due condizioni essenziali: 1ª) σ_n contiene altri infiniti punti c_n; 2ª) $F(x)$ varia in σ_n di quanto poco si vuole.

Se dunque si suppone, come al n.° 2, che $\mathfrak{S}$ sia continuo, queste due condizioni sono soddisfatte per un intorno destro σ_n di c_n. Se si suppone che $\mathfrak{S}$ sia discontinuo, occorre accertarsi di quelle condizioni, perchè esse non sono soddisfatte senz'altro.

Così ad es., supposto $\mathfrak{S}$ perfetto e ovunque non denso in $a\,b$, se la successione $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ nelle condizioni del teorema relativamente a $\mathfrak{S}$, non contiene nessun punto che sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\mathfrak{S}$ (o al più ne contiene un numero finito, od anche infiniti, ma in condizioni che si tratterebbe di precisare) (6), allora il teorema fondamentale vale ugualmente relativamente a $\mathfrak{S}$ (7), e valgono quindi tutte le conclusioni che ne abbiamo tratte.

Se in tutti i punti di $\mathfrak{S}$ che siano estremi sinistri d'intervalli contigui, la $F(x)$ è continua verso sinistra, il teorema fondamentale vale anche quando la successione $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ contenga degli estremi sinistri d'intervalli contigui a $\mathfrak{S}$ (infiniti di questi estremi, ovunque densi in $\mathfrak{S}$). Basta infatti, qualora, ripetendo i ragionamenti del n.° 2, ci s'imbatta nella scelta di qualche c_n che sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\mathfrak{S}$, assumere per intervallo σ_n un conveniente intorno sinistro di c_n.

---

(6) È noto che un aggregato perfetto e non denso è costituito da tutti e soli i punti che non sono interni a un sistema d'intervalli (detti « contigui all'aggregato perfetto ») ovunque densi sul continuo.

(7) La tesi afferma allora l'esistenza dell'aggregato E denso in $\mathfrak{S}$, ed anzi residuale di $\mathfrak{S}$

§ 2. Aggregato dei punti di discontinuità. Esempî.

1. Definizione. — Se $\varphi(x)$ è una funzione definita in un intervallo $\overline{mn}$, seguendo la nomenclatura di uso corrente chiameremo « oscillazione di $\varphi(x)$ in $\overline{mn}$ » la differenza fra il limite superiore di $\varphi(x)$ e il limite inferiore di $\varphi(x$ in $\overline{mn}$. Se gli estremi m, n dell'intervallo $\overline{mn}$ si suppongono variabili e precisamente tendenti ad un determinato punto x_0 interno all'intervallo stesso (cioè in modo che m tenda a x_0 dalla sinistra ed n dalla destra) allora l'oscillazione di $\varphi(x)$ in $\overline{mn}$ tende ad un valore limite ben determinato (ed indipendente dal modo di variare di m, n) che chiameremo « oscillazione (puntuale) di $\varphi(x)$ in x_0 ».

2. Se $\varphi(x)$ è una funzione derivabile verso destra nel punto x_0 e se $\omega(x)$ è la sua oscillazione puntuale (considerata come funzione della x), è

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0.$$

Infatti è, per definizione della derivata destra, $(h_1 > 0,\ h_2 > 0)$

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varphi(x + h_1) &= \varphi(x_0) + (x + h_1 - x_0)D_+\varphi(x_0) + (x + h_1 - x_0)\varepsilon_1 , \\ \varphi(x + h_2) &= \varphi(x_0) + (x + h_2 - x_0)D_+\varphi(x_0) + (x + h_2 - x_0)\varepsilon_2 , \end{aligned}$$

ε_1 ed ε_2 infinitesimi rispettivamente con $(x + h_1 - x_0)$, $(x + h_2 - x_0)$. Segue

$$(2)\quad \varphi(x + h_1) - \varphi(x + h_2) = (h_1 - h_2)D_+\varphi(x_0) + (x + h_1 - x_0)\varepsilon_1 - (x + h_2 - x_0)\varepsilon_2 .$$

Perciò, potendosi scrivere

$$\omega(x) = \overline{\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}}} \left| \varphi(x + h_1) - \varphi(x + h_2) \right|$$

è $\omega(x) = (x - x_0)\varepsilon$, essendo ε infinitesimo con $x - x_0$. Segue l'enunciato.

Osservazione. L'oscillazione puntuale $\omega(x)$ potrebbe definirsi « l'oscillazione di $\varphi(x)$ in un intorno nullo » del punto x. La formola dimostrata vale anche nell'ipotesi meno stretta che $\omega(x)$ sia l'oscillazione di $\varphi(x)$ in un intorno non nullo del punto x, purchè sufficientemente piccolo: per es. di ampiezza inferiore ad $(x - x_0)^2$. Poniamo

$$\omega(x) = \overline{\lim_{-\delta \leq (h_1, h_2) \leq \delta < (x - x_0)^2}} \left| \varphi(x + h_1) - \varphi(x + h_2) \right| .$$

Dalla (2) segue allora

$$\frac{\omega(x)}{x - x_0} \leq 2(x - x_0) \mid D_+\varphi(x_0) \mid + 2(\mid \varepsilon_1 \mid + \mid \varepsilon_2 \mid)$$

e quindi l'enunciato.

3. Ritorniamo ora ad una generica funzione $F(x)$, continua verso destra in tutto un intervallo $\overline{a\, b}$. Ci proponiamo di studiare la struttura dell'aggregato dei suoi punti di discontinuità.

I punti di discontinuità della $F(x)$ sono soltanto punti di discontinuità verso sinistra. Essi si possono distinguere in punti di discontinuità di 1ª specie (o « salti »), per i quali esiste il

$$\lim_{h \to +0} F(x - h) = F(x - 0),$$

e in punti di discontinuità di 2ª specie, per i quali tale limite non esiste.

Indichiamo con $\mathfrak{N}$ l'aggregato dei punti di discontinuità di $F(x)$ in $\overline{a\, b}$.

4. TEOR. L'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità di $F(x)$ in $a\, b$ è numerabile.

DIM. Assegnato ad arbitrio un numero $\eta > 0$, ad ogni punto di $\overline{a\, b}$ si può far corrispondere un intorno destro (segmento avente quel punto per estremo sinistro) in cui l'oscillazione di $F(x)$ è $< \eta$. I punti in cui l'oscillazione a sinistra è $> \eta$ sono tutti estremi sinistri di tali segmenti. Formiamo l'aggregato dei segmenti che si ottengono riunendo in un solo tutti quelli che hanno punti comuni (interni od estremi). I punti in cui l'oscillazione a sinistra è $> \eta$ risultano allora estremi di un sistema di segmenti senza punti comuni e perciò costituiscono un aggregato numerabile ([8]).

Ripetendo il ragionamento successivamente per

$$\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{4}, \dots, \frac{\eta}{2^n}, \dots$$

si vengono a classificare tutti i punti di $\mathfrak{N}$ in una successione di aggregati numerabili, il primo dei quali è costituito dai punti di $\mathfrak{N}$ in cui l'oscillazione a sinistra è maggiore di η, il secondo dai punti di $\mathfrak{N}$ in cui l'oscillazione a sinistra è compresa fra η ed $\frac{\eta}{2}$, il terzo dai punti di $\mathfrak{N}$ in cui l'oscillazione

---

([8]) Per un noto teor. di CANTOR: un insieme d'intervalli di una retta, non sovrapponentisi, è numerabile.

a sinistra è compresa fra $\frac{\eta}{2}$ ed $\frac{\eta}{4}, \ldots,$ l'$(n+1)^{mo}$ dai punti di $\mathfrak{N}$ in cui l'oscillazione a sinistra è compresa fra $\frac{\eta}{2^{n-1}}$ ed $\frac{\eta}{2^n}$. Dunque $\mathfrak{N}$ è numerabile.

c. d. d.

5. Studiamo anzitutto il caso che $\mathfrak{N}$ sia denso in qualche parte $\overline{mn}$ di $\overline{ab}$. In tale ipotesi, supponiamo $\mathfrak{N}$ numerato (com'è sempre possibile per il teor. del n.° prec.) nella successione $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$. Sia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ una successione di numeri positivi tendente a 0. A sinistra di d_1 esiste certamente un punto c_1 tale che $d_1 - c_1 < \varepsilon_1$ e che il rapporto incrementale l_1 di $F(x)$ su $\overline{c_1 d_1}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon_1}$. A sinistra di d_2 esiste certamente un punto c_2 tale che $d_2 - c_2 < \varepsilon_2$ e che il rapporto incrementale l_2 di $F(x)$ su $\overline{c_2 d_2}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon_2}$.... In generale, a sinistra di d_n esiste certamente un punto c_n tale che $d_n - c_n < \varepsilon_n$ e che il rapporto incrementale l_n di $F(x)$ su $\overline{c_n d_n}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon_n}$.

I segmenti $S_n \equiv \overline{c_n d_n}$, per $n = 1, 2, 3, \ldots$ sono nelle condizioni del teor. fondamentale (§ 1, n.° 2) (9). Si conclude dunque col seg.

Teor. Se $\mathfrak{N}$ è denso in un segmento $\overline{mn}$ parziale di $\overline{ab}$ (eventualmente in tutto $\overline{ab}$) l'aggregato dei punti x in cui è verificata almeno una delle due uguaglianze

$$\overline{D}_+ F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_+ F(x) = -\infty,$$

è denso in $\overline{mn}$ ed anzi è un residuale di $\overline{mn}$ (10).

Cor. Se i numeri derivati destri di $F(x)$ sono ovunque finiti in $a\,b$, l'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità di $F(x)$ è ovunque non denso in $\overline{ab}$.

---

(9) Si può sempre fare in modo che i punti c_n appartengano all'intervallo $\overline{mn}$ (evidentemente questa condizione non è neanche necessaria, poichè basterebbe, in caso contrario. trascurare tutti i c_n che stanno fuori di $\overline{mn}$). Essi costituiscono una successione densa in $\overline{mn}$. Infatti se $\overline{rs}$ è un intervallo parziale di $\overline{mn}$ preso ad arbitrio, esistono nel terzo medio di $\overline{rs}$ infiniti punti d_n: di questi, tutti quelli che hanno indice n sufficientemente elevato perchè ε_n sia inferiore ad $\frac{s-r}{3}$ hanno per corrispondenti dei punti c_n che sono interni ad $\overline{rs}$.

(10) Vedi la nota alla fine del n.° 11.

6. Indichiamo con $\mathfrak{N}_1$ l'aggregato dei punti di discontinuità di 1ª specie per la $F(x)$ in $\overline{ab}$, con $\mathfrak{N}_2$ quello dei punti di discontinuità di 2ª specie. $\mathfrak{N}_1$ ed $\mathfrak{N}_2$ sono entrambi contenuti in $\mathfrak{N}$ (è $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$), entrambi numerabili.

Sia $\mathfrak{N}_2$ denso in qualche parte $\overline{mn}$ di $\overline{ab}$, numerato nella successione $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$. Sia $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ una successione di numeri positivi tendente a 0. Nell'intervallo comune ai due intervalli $h_1 - \overline{\tau_1 h_1}$, $\overline{mn}$, esiste una coppia (anzi esistono infinite coppie) d'intervalli S_1, S_1' tali che i rispettivi rapporti incrementali l_1, l_1' di $F(x)$ siano il primo maggiore di $+1$, il secondo minore di -1 [11]. Nell'intervallo comune ai due intervalli $h_2 - \overline{\tau_2 h_2}$, $\overline{mn}$, esiste una coppia d'intervalli S_2, S_2' tali che i rispettivi rapporti incrementali l_2, l_2' di $F(x)$ siano il primo maggiore di $+2$, il secondo minore di -2. Così si prosegua: in generale nell'intervallo comune ai due intervalli $h_n - \overline{\tau_n h_n}$, $\overline{mn}$, esiste una coppia d'intervalli S_n, S_n' tali che i rispettivii rapporti incrementali l_n, l_n' di $F(x)$ siano il primo maggiore di $+n$, il secondo minore di $-n$.

I due sistemi d'intervalli $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, S_1', S_2', \ldots, S_n', \ldots$, ovunque densi in $\overline{mn}$ [12], sono nelle condizioni d'applicabilità del teor. fondamentale e precisamente delle considerazioni del § 1, n.° 3. Si deduce quindi il

Teor. Se l'aggregato $\mathfrak{N}_2$ dei punti in cui $F(x)$ ha una discontinuità di 2ª specie è denso in un segmento $\overline{mn}$ parziale di ab (eventualmente in tutto $\overline{ab}$), l'aggregato dei punti x in cui sono verificate entrambe le uguaglianze

$$D_+F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_+F(x) = -\infty,$$

è denso in $\overline{mn}$, ed anzi è un residuale di $\overline{mn}$.

---

[14] Infatti sia

$$\lambda = \overline{\lim_{x \to h_1 - 0}} F(x), \quad \underline{\lambda} = \underline{\lim_{x \to h_1 - 0}} F(x),$$

e supponiamo, per fissare le idee, che tanto $\bar{\lambda}$ e $\underline{\lambda}$ siano finiti. Poniamo $\varepsilon = \dfrac{\bar{\lambda} - \lambda}{3}$. Sia k il massimo dei tre numeri

$$h_1 - \tau_1, \ m, \ h_1 - \varepsilon.$$

Siano $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ quattro punti interni all'intervallo kh_1 e tali che

$$\underline{\lambda} - F(\alpha_1) < \varepsilon, \quad \lambda - F(\alpha_2) < \varepsilon, \quad |\bar{\lambda} - F(\alpha_3)| < \varepsilon, \quad \lambda - F(\alpha_4)| < \varepsilon.$$

Il rapporto incrementale di $F(x)$ è > 1 nell'intervallo $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, è < -1 nell'intervallo $\overline{\alpha_3\alpha_4}$.

La dimostrazione si estende in modo ovvio al caso che uno od ambedue i numeri λ, λ siano infiniti.

[12] Vedi la nota [9].

COR. Se in ogni punto di $\overline{a\,b}$ almeno uno dei numeri derivati estremi destri di $F(x)$ è finito, l'aggregato $\mathfrak{N}_2$ dei punti di discontinuità di 2ª specie di $F(x)$ è ovunque non denso in $\overline{a\,b}$.

COR. Se $F(x)$, oltrecchè continua, è anche ovunque derivabile verso destra in $\overline{a\,b}$, allora l'aggregato $\mathfrak{N}_2$ dei punti di discontinuità di 2ª specie di $F(x)$ è ovunque non denso in $\overline{a\,b}$.

Si può nella stessa ipotesi affermare la stessa tesi per l'aggregato $\mathfrak{N}_1$ dei punti di discontinuità di 1ª specie? Non certo in base alle considerazioni dei n.i 5 e seg., ma in base alla formola del n.° 2, come ora precisamente vogliamo mostrare.

7. TEOR. Se $F(x)$ è ovunque derivabile verso destra in $a\,b$, l'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità di $F(x)$ è ovunque non denso su $\overline{a\,b}$ ([13]).

DIM. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo, se possibile, che $\mathfrak{N}$ sia denso su una parte $\overline{m\,n}$ di $\overline{a\,b}$. Siano

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$
$$h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$$

due successioni di numeri positivi tendenti a 0, la seconda più rapidamente della prima. È dunque, per ipotesi, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\omega_n}{h_n} = \infty$.

Indichiamo con $\omega(x)$ l'oscillazione puntuale di $F(x)$ (considerata come funzione della x). Sia a_1 un punto qualsiasi di discontinuità per la $F(x)$, interno ad $\overline{m\,n}$ (per es. il primo che s'incontra nell'ordinamento di $\mathfrak{N}$). Sia r_1 un indice (ad es. il più piccolo) tale che $\omega(a_1) \geq \omega_{r_1}$. Sia a_2 un punto qualsiasi di discontinuità per la $F(x)$, interno al segmento $\overline{m\,a_1}$ e tale che sia $a_1 - a_2 < h_{r_1}$. Sia r_2 un indice tale che $\omega(a_2) \geq \omega_{r_2}$. Sia a_3 un punto qualsiasi di discontinuità per la $F(x)$, interno al segmento $\overline{m\,a_2}$ e tale che sia $a_1 - a_3 < h_{r_1}$, $a_2 - a_3 < h_{r_2}, \dots$. Così si prosegua: essendosi in generale scelto un a_n, si sceglierà un indice r_n tale che $\omega(a_n) \geq \omega_{r_n}$, indi un a_{n+1} interno al segmento $\overline{m\,a_n}$ e tale che sia $a_1 - a_{n+1} < h_{r_1}$, $a_2 - a_{n+1} < h_{r_2}, \dots$, $a_n - a_{n+1} < h_{r_n}$.

I punti $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ costituiscono una successione decrescente e quindi ammetteranno un punto limite x_0 $(\geq m)$.

Posto $k_n = a_n - x_0$, è $k_n \leq h_{r_n}$ e quindi $\dfrac{\omega(a_n)}{k_n} \geq \dfrac{\omega_{r_n}}{h_{r_n}}$. Dunque, per l'ipo-

([13]) Questo teorema evidentemente racchiude il cor. 2° del n.° 6 come caso particolare.

tesi fatta, è

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\omega(a_n)}{k_n} = \infty.$$

Ma questa conclusione è assurda perchè, contraddicendosi alla proposizione del n.° 2, dovrebbe mancare la derivata destra di $F(x)$ nel punto x_0.

OSSERVAZIONE. Nella dimostrazione non abbiamo contemplato il caso che in x_0 la derivata di $F(x)$ sia infinita: è evidente che allora la proposizione del n.° 2 non può applicarsi. In una Nota che pubblico nell' « Accademia dei Lincei » ragiono in modo analogo dando la dimostrazione simultanea dei due teoremi qui dimostrati separatamente ai n.i 5, 7 e facendo osservare che nell'enunciato del presente numero può benissimo supporsi che in uno o più punti x_0 di $\overline{ab}$ la derivata destra di $F(x)$ sia infinita, purchè il rapporto incrementale tenda ad infinito « asintoticamente », cioè compiendo oscillazioni limitate.

Questa restrizione si dovrà perciò supporre tacitamente nel seguito.

8. L'ipotesi assurda che sta alla base della dimostrazione del n.° precedente è anche troppo restrittiva. Può essere sostituita dall'ipotesi: ogni punto di $\mathfrak{N}$ è limite verso la sua sinistra di punti di $\mathfrak{N}$; o dall'ipotesi: i punti di $\mathfrak{N}$ che sono limiti verso la loro sinistra di punti di $\mathfrak{N}$ costituiscono un aggregato ovunque denso in $\mathfrak{N}$ (14).

Supponiamo $F(x)$ ovunque derivabile verso destra in ab. Allora $\mathfrak{N}$ è ovunque non denso in ab. Diciamo $\mathfrak{N}^{(1)}$ l'aggregato dei punti di $\mathfrak{N}$ che sono limiti verso sinistra di punti di $\mathfrak{N}$. Ripetendo il ragionamento del n.° 7 si vede che $\mathfrak{N}^{(1)}$ è ovunque non denso in $\mathfrak{N}$ (15). Diciamo $\mathfrak{N}^{(2)}$ l'aggregato dei punti di $\mathfrak{N}^{(1)}$ che sono limiti verso sinistra di punti di $\mathfrak{N}^{(1)}$. Anche $\mathfrak{N}^{(2)}$ è ovunque non denso in $\mathfrak{N}^{(1)}$. Così si prosegua: in generale l'aggregato $\mathfrak{N}^{(n)}$ dei punti di $\mathfrak{N}^{(n-1)}$ che sono limiti verso sinistra di punti di $\mathfrak{N}^{(n-1)}$ è ovunque non denso in $\mathfrak{N}^{(n-1)}$.

Può darsi che esista un aggregato comune a tutti gli aggregati

$$\mathfrak{N}^{(1)}, \mathfrak{N}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(n-1)}, \mathfrak{N}^{(n)}, \ldots.$$

In caso affermativo lo si indichi con $\mathfrak{N}^{(\omega)}$. $\mathfrak{N}^{(\omega)}$ sarà non denso in tutti

(14) Ciò significa, com'è noto, che in ogni segmento $\overline{mn}$ contenente punti di $\mathfrak{N}$ esistono punti di $\mathfrak{N}$ che sono limiti verso la loro sinistra di punti di $\mathfrak{N}$.

(15) Cioè, entro ogni segmento $\overline{mn}$ contenente punti di $\mathfrak{N}$, esiste un segmento parziale $\overline{rs}$, contenente punti di $\mathfrak{N}$, ma nessun punto di $\mathfrak{N}^{(1)}$.

questi. Così si prosegua costruendo la successione transfinita di aggregati

$$\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{M}^{(\omega)},\ \mathfrak{M}^{(\omega+1)}, \ldots,\ \mathfrak{M}^{(2\omega)}, \ldots,$$

ciascuno contenuto e non denso nei precedenti, mediante le due operazioni seguenti:

1ª) Operazione O_1, che estrae da un aggregato $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ l'aggregato $\mathfrak{M}^{(n)}$ dei punti limiti verso sinistra, per ogni n intiero o transfinito di 1ª specie;

2ª) Operazione O_2, che estrae da una successione d'infiniti aggregati

$$\mathfrak{M}^{(r_1)},\ \mathfrak{M}^{(r_2)}, \ldots$$

con indici r_1, r_2, ... transfiniti crescenti, un aggregato $\mathfrak{M}^{(\mu)}$ con indice transfinito di 2ª specie.

Entrambe le operazioni O_1, O_2 possono avere per risultati aggregati nulli.

Indichiamo con

$$\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega+1)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2\omega)}, \ldots$$

gli aggregati che si ottengono dai precedenti mediante chiusura ([16]). La successione

$$\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(n-1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(n)}, \ldots$$

è una successione di aggregati chiusi, ciascuno contenuto ([17]) e non denso nel precedente. Sia $\mathfrak{C}$ il suo aggregato limite ([18]). Evidentemente $\mathfrak{C}$ contiene $\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega)}$. Ma $\mathfrak{C}$ è non denso in tutti gli aggregati

$$\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(n-1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(n)}, \ldots.$$

Dunque anche $\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega)}$ è non denso nei medesimi. Ne segue che la successione

$$\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega)},\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(\omega+1)}, \ldots,\ \mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(2\omega)}, \ldots$$

è « riduttibile » ([19]) e quindi è « riduttibile » anche la successione

$$\mathfrak{M}^{(1)},\ \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathfrak{M}^{(\omega)},\ \mathfrak{M}^{(\omega+1)}, \ldots,\ \mathfrak{M}^{(2\omega)}, \ldots.$$

([16]) Cioè con l'aggiunta dei punti limiti che eventualmente non appartengono a ciascuno di essi ($\mathfrak{C}\mathfrak{M}^{(n)} = \mathfrak{M}^{(n)} +$ derivato di $\mathfrak{M}^{(n)}$).

([17]) È evidente che un punto limite di un aggregato A contenuto in un aggregato B è anche punto limite di B.

([18]) È noto dalla teoria degli aggregati che una successione di aggregati chiusi, ciascuno contenuto nel precedente, ammette sempre un aggregato limite $\mathfrak{C}$, cioè un aggregato chiuso contenuto in tutti gli aggregati della successione.

([19]) Nella teoria degli aggregati il termine « riduttibile » si usa propriamente dire di un aggregato di cui un derivato è nullo. Qui lo usiamo, per comodità, a proposito di una « successione », nel senso che abbiamo indicato.

La riduttibilità consiste nel fatto che esiste un transfinito ben determinato τ tale che $\mathcal{C}\mathfrak{N}^{(\tau+1)}$ è nullo ed $\mathfrak{N}^{(\tau+1)}$ è nullo. Se τ è di prima specie è $\mathcal{C}\mathfrak{N}^{(\tau)} \neq 0$ ed anche $\mathfrak{N}^{(\tau)} \neq 0$. Se τ è di seconda specie può essere anche $\mathcal{C}\mathfrak{N}^{(\tau)} = \mathfrak{N}^{(\tau)} = 0$.

9. Le stesse osservazioni si possono fare a proposito del n.° 5; ma è necessario analizzare accuratamente la possibilità di ripetere la dimostrazione del n.° 5, perchè questa, come si è accennato alla fine del n.° 6 è (nonostante qualche analogia) di tutt'altra natura di quella del n.° 7: quella del n.° 5 è basata sul teorema fondamentale, mentre quella del n.° 7 è basata sulla formola del n.° 2.

Supponiamo dunque che i numeri derivati estremi destri di $F(x)$ siano ovunque finiti in $\overline{a\,b}$. Allora $\mathfrak{N}$ è non denso in tutto $a\,b$. Dico che $\mathfrak{N}^{(1)}$ è non denso in tutto $\mathfrak{N}$. Supponiamo infatti, se possibile, che $\mathfrak{N}^{(1)}$ sia denso sulla parte di $\mathfrak{N}$ ch'è contenuta in un intervallo $\overline{m\,n}$ parziale di $\overline{a\,b}$ (eventualmente in tutto $\overline{a\,b}$). Sarà $\mathfrak{N}^{(1)}$ denso anche nella parte dell'aggregato chiuso $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ che è contenuta in $\overline{m\,n}$. Inoltre la parte di $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ contenuta in $\overline{m\,n}$ sarà certamente perfetta.

Per ogni punto ξ di $\mathfrak{N}^{(1)}$ in $\overline{m\,n}$ possono darsi due ipotesi:

1ª ipotesi. ξ è punto di discontinuità di 1ª specie. Allora esiste un intorno sinistro σ di ξ, contenente una parte di $\mathcal{C}\mathfrak{N}$, tale che, per tutti i valori di x ad esso appartenenti, il rapporto incrementale l di $F(x)$ su $\overline{x\,\xi}$ è, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$ (ε prefissato piccolo ad arbitrio). Si scelga un punto c di $\mathcal{C}\mathfrak{N}$, contenuto in σ, che non sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\mathcal{C}\mathfrak{N}$. Il rapporto incrementale l di $F(x)$ su $\overline{c\,\xi}$ è, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$.

2ª ipotesi. ξ è punto di discontinuità di 2ª specie. Allora è possibile scegliere due punti c, $\bar{\xi}$ a sinistra di ξ e in un intorno sinistro comunque piccolo di ξ, tali che c appartenga a $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ ma non sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ e che il rapporto incrementale di $F(x)$ su $\overline{c\,\bar{\xi}}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$.

Sia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ una successione arbitrariamente prefissata di numeri positivi tendente a 0. Siano $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_3, \dots$ i punti di $\mathfrak{N}^{(1)}$ contenuti in $\overline{m\,n}$. Per ognuno di essi ξ_n, sia nella prima che nella seconda ipotesi, è possibile scegliere due punti c_n, d_n contenuti entrambi nell'intervallo comune ai due intervalli $\overline{m\,n}$, $\overline{\xi_n - \varepsilon_n\,\xi_n}$, il primo dei quali c_n appartenente a $\mathcal{CM}$ ma non estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\mathcal{CM}$, il secondo d_n eventualmente (1ª ipotesi) coincidente con ξ_n, tali che il rapporto incrementale l_n di $F(x)$ su $\overline{c_n\,d_n}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon_n}$.

I segmenti $S_n \equiv \overline{c_n\,d_n}$, per $n = 1, 2, \ldots$ sono nelle condizioni del teor. fondamentale (per il n.º 7 del § 1). Dunque esistono dei punti di $\mathcal{CM}$ in $\overline{m\,n}$ per i quali è verificata almeno una delle due uguaglianze

$$\overline{D}_+F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_+F(x) = -\infty.$$

Ma ciò è assurdo perchè contrario all'ipotesi. Dunque $\mathcal{M}^{(1)}$ è non denso in tutto $\mathcal{M}$. Analogamente si dimostra che $\mathcal{M}^{(2)}$ è non denso in tutto $\mathcal{M}^{(1)}$, che $\mathcal{M}^{(3)}$ è non denso in tutto $\mathcal{M}^{(2)}, \ldots$, che $\mathcal{M}^{(n)}$ è non denso in tutto $\mathcal{M}^{(n-1)}, \ldots$.

Le considerazioni del n.º prec. intorno alla successione transfinita

$$\mathcal{M}^{(1)},\ \mathcal{M}^{(2)}, \ldots,\ \mathcal{M}^{(\omega)},\ \mathcal{M}^{(\omega+1)}, \ldots,\ \mathcal{M}^{(2\omega)}, \ldots$$

si ripetono identicamente punto per punto.

10. Teor. Se $\overline{D}_+F(x)$ e $\underline{D}_+F(x)$ sono finite in tutti i punti di $\overline{a\,b}$ e se $\mathcal{M}$ è un qualunque aggregato chiuso contenuto in $\overline{a\,b}$, l'insieme dei punti di $\mathcal{M}$ in cui $\overline{D}_+F(x)$ è non limitata superiormente [20] e l'insieme dei punti di $\mathcal{M}$ in cui $\underline{D}_+F(x)$ è non limitata inferiormente sono ambedue chiusi [21] e non densi in $\mathcal{M}$.

---

(20) Com'è noto una funzione $f(x)$ è « limitata » in un intervallo $\overline{a\,b}$ se esiste un numero positivo M tale che $|f(x)| < M$ per tutti i punti x di $\overline{a\,b}$.

Una funzione $f(x)$ è « limitata » in un punto $\bar{x}$ di $\overline{a\,b}$ se esiste un intorno di $\bar{x}$ nel quale è limitata. È « non limitata » in $\bar{x}$ nel caso contrario.

Una funzione $f(x)$ è « limitata » in un punto $\bar{x}$ di un aggregato $\mathcal{M}$ contenuto in $\overline{a\,b}$, rispetto ad $\mathcal{M}$, se esiste un intorno $\overline{p\,q}$ di $\bar{x}$ e un numero M tale che $|f(x)| < M$ per tutti i punti comuni a $\overline{p\,q}$ e ad $\mathcal{M}$. È in quest'ultimo senso che, nella presente dimostrazione, useremo l'espressione « funzione limitata in un determinato punto di un aggregato ».

(21) Che debbano essere chiusi è evidente. Infatti se $\bar{x}$ è un punto di $\mathcal{M}$ in cui per es. $\overline{D}_+F(x)$ è limitata superiormente, cioè se $\bar{x}$ è interno a un intervallo nel quale è $\overline{D}_+F(x) < M$ per tutti gli x di $\mathcal{M}$ in quell'intervallo, anche in tutti i punti di $\mathcal{M}$ sufficientemente vicini a $\bar{x}$, poichè essi sono interni allo stesso intervallo, è $\overline{D}_+F(x)$ limitata superiormente.

DIM. La dimostrazione si riallaccia da più parti al teor. fondamentale. Precisamente, limitandoci per es. alla $\bar{D}_+F(x)$, noi dimostreremo che, se $\overline{lm}$ è un qualunque intervallo contenuto in ab e contenente una parte di $\mathfrak{M}$, esistono un numero M e un intervallo $\overline{rs}$ contenuto in $\overline{lm}$ e contenente una parte di $\mathfrak{M}$ tali che, per tutti i punti x comuni a $\mathfrak{M}$ e ad $\overline{rs}$, è $\bar{D}_+F(x) < M$.

Infatti osserviamo anzitutto che, poichè $\bar{D}_+F(x)$ e $\underline{D}_+F(x)$ sono finite in tutti i punti di $\overline{ab}$, l'aggregato $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ che si ottiene per chiusura dall'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità di $F(x)$ è non denso in ab (n.° 5).

Se $\mathfrak{M}$ ha in $\overline{lm}$ un punto isolato $\bar{x}$, il segmento $\overline{rs}$ è un intorno contenente soltanto $\bar{x}$ e il numero M è un qualunque numero $> \bar{D}_+F(\bar{x})$.

Se la parte di $\mathfrak{M}$ che è contenuta in $\overline{lm}$ non è interamente contenuta in $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ la dimostrazione è pure immediata. Infatti in questo caso esiste un intervallo $\overline{\alpha\beta}$ contenuto tanto in $\overline{lm}$ quanto in un intervallo contiguo a $\mathcal{C}\mathfrak{N}$ e contenente una parte di $\mathfrak{M}$. In tutto l'intervallo $\overline{\alpha\beta}$ la funzione $F(x)$ è continua bilateralmente e l'esistenza del numero M e dell'intervallo $\overline{rs}$ contenuto in $\overline{\alpha\beta}$ sono affermati da un corollario che il DENJOY deduce dal teor. fondamentale (loc. cit., pag. 156).

Supponiamo dunque che la parte $\overline{\mathfrak{M}}$ di $\mathfrak{M}$ contenuta in lm sia perfetta e che sia altressí contenuta in $\mathcal{C}\mathfrak{N}$. Sia $\tau_i \equiv \overline{\mu_i \nu_i}$ un generico intervallo contiguo a $\overline{\mathfrak{M}}$.

In $\overline{lm}$ vi sono certamente dei punti μ_i. Dico che i punti μ_i che sono punti di discontinuità per la $F(x)$ e che sono limiti verso sinistra di punti di discontinuità per la $F(x)$ costituiscono un insieme Q non denso in $\overline{\mathfrak{M}}$. Infatti nel caso contrario, ragionando per assurdo, basta ripetere una dimostrazione analoga a quella del n.° 9. Per maggiore chiarezza la ripetiamo intieramente.

Sia, se possibile, Q denso in $\overline{\mathfrak{M}}$. Per ogni punto μ di Q possono darsi due ipotesi:

1ª ipotesi. μ è punto di discontinuità di 1ª specie. Allora esiste un intorno sinistro σ di μ, intieramente contenuto in $\overline{lm}$ e contenente una parte di $\overline{\mathfrak{M}}$, tale che, per tutti i valori di x ad esso appartenenti, il rapporto incrementale l di $F(x)$ su $\overline{x\mu}$ è, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$ (ε prefissato piccolo ad arbitrio). Si scelga un punto c di $\overline{\mathfrak{M}}$, contenuto in σ, che non sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\overline{\mathfrak{M}}$. Il rapporto incrementale l di $F(x)$ su $\overline{c\mu}$ è, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$.

2ª ipotesi. μ è punto di discontinuità di 2ª specie. Allora è possibile scegliere due punti c, μ' a sinistra di μ e in un intorno sinistro comunque piccolo di μ, tali che c appartenga ad $\overline{\mathfrak{M}}$ ma non sia estremo sinistro di un intervallo contiguo a $\overline{\mathfrak{M}}$, e che il rapporto incrementale di $F(x)$ su $\overline{c\,\mu'}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon}$.

Per ogni punto μ_i di Q, sia nella 1ª che nella 2ª ipotesi, è possibile scegliere due punti c_i, d_i contenuti entrambi nell'intervallo comune ai due intervalli $\overline{l\,m}$, $\overline{\mu_i - \varepsilon_i\, \mu_i}$ (essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots$ una successione arbitrariamente prefissata di numeri positivi tendente a O), il primo dei quali c_i appartenente ad $\overline{\mathfrak{M}}$ ma non estremo sinistro di un intervallo contiguo ad $\overline{\mathfrak{M}}$, il secondo d_i eventualmente (1ª ipotesi) coincidente con μ_i, tali che il rapporto incrementale l_i di $F(x)$ su $\overline{c_i d_i}$ sia, in valore assoluto, $> \frac{1}{\varepsilon_i}$.

I segmenti $S_i \equiv \overline{c_i d_i}$, per $i = 1, 2, \ldots$ sono nelle condizioni del teorema fondamentale (per il § 1, n.º 7). Dunque esistono dei punti di $\overline{\mathfrak{M}}$ per i quali è verificata almeno una delle due uguaglianze

$$\overline{D}_+ F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_+ F(x) = \quad \infty.$$

Ma ciò è assurdo perchè contrario all'ipotesi. Dunque Q è non denso in $\overline{\mathfrak{M}}$.

Sia $\overline{l'\,m'}$ un intervallo contenuto in $\overline{l\,m}$, contenente una parte $\overline{\mathfrak{M}'}$ di $\overline{\mathfrak{M}}$ ma nessun punto di Q. Dico che $\overline{r\,s}$ esiste entro $\overline{l'\,m'}$. Ragioniamo infatti per assurdo e supponiamo, se possibile, che $\overline{D}_+ F(x)$ sia non limitata superiormente in ogni punto di $\overline{\mathfrak{M}'}$ (rispetto a $\overline{\mathfrak{M}'}$). Segnamo in $\overline{\mathfrak{M}'}$ una successione di punti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ovunque densa in $\overline{\mathfrak{M}'}$. Esiste nell'intorno $\overline{\gamma_1 - \varepsilon_1\, \gamma_1 + \varepsilon_1}$ dal punto γ_1 un punto p_1 di $\overline{\mathfrak{M}'}$ tale che $\overline{D}_+ F(p_1) > \frac{2}{\varepsilon_1}$ e quindi esiste un punto q_1 alla destra di p_1 (q_1 non appartiene necessariamente nè a $\overline{\mathfrak{M}'}$ nè a $\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{M}}$) tale che $\frac{F(q_1) - F(p_1)}{q_1 - p_1} > \frac{1}{\varepsilon_1}$ e che $q_1 - p_1 < \varepsilon_1$. Esiste nell'intorno $\overline{\gamma_2 - \varepsilon_2\, \gamma_2 + \varepsilon_2}$ del punto γ_2 un punto p_2 di $\overline{\mathfrak{M}'}$ tale che $\overline{D}_+ F(p_2) > \frac{2}{\varepsilon_2}$ e quindi esiste un punto q_2 alla destra di p_2 tale che $\frac{F(q_2) - F(p_2)}{q_2 - p_2} > \frac{1}{\varepsilon_2}$ e che $q_2 - p_2 < \varepsilon_2$, ecc. In generale esiste nell'intorno $\overline{\gamma_r - \varepsilon_r\, \gamma_r + \varepsilon_r}$ del punto γ_r

un punto p_r di $\overline{\mathfrak{M}'}$ tale che $\overline{D}_+F(p_r) > \frac{2}{\varepsilon_r}$ e quindi esiste un punto q_r alla destra di p_r tale che $\frac{F(q_r) - F(p_r)}{q_r - p_r} > \frac{1}{\varepsilon_r}$ e che $q_r - p_r < \varepsilon_r$.

I segmenti $T_r \equiv \overline{p_r\, q_r}$, per $r = 1, 2, \ldots$ sono nelle condizioni del teorema fondamentale rispetto ad $\overline{\mathfrak{M}'}$. Infatti se p_r è estremo sinistro di un intervallo contiguo ad $\mathfrak{M}'$, p_r è limite verso sinistra di punti di discontinuità (perchè $\overline{\mathfrak{M}'}$ è intieramente contenuto in $\mathcal{C}\mathfrak{N}$); dunque p_r non è punto di discontinuità. Se p_r non è estremo sinistro di un intervallo contiguo ad $\mathfrak{M}'$, esiste un intorno destro di p_r che contiene punti di $\mathfrak{M}'$ (vedi il § 1, n.° 7).

Dunque esistono dei punti di $\overline{\mathfrak{M}'}$ per i quali è verificata almeno una delle due uguaglianze

$$\overline{D}_+F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_+F(x) = -\infty,$$

il che è nuovamente assurdo, come sopra.

Così il teorema è completamente dimostrato.

11. Il teorema fondamentale si potrebbe applicare, coi dovuti riguardi, anche dalla banda sinistra ([22]). Ci limitiamo a dimostrare direttamente il seguente

TEOR. Se l'aggregato

$$\mathfrak{N} \equiv d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$$

dei punti di discontinuità di $F(x)$ è denso in tutto $\overline{a\,b}$, allora l'insieme dei punti di continuità di $F(x)$ in $\overline{a\,b}$, nei quali è verificata almeno una delle due relazioni

$$\overline{D}_-F(x) = +\infty, \quad \underline{D}_-F(x) = -\infty.$$

è denso in tutto $\overline{a\,b}$.

DIM. Sia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ una successione di numeri positivi tendente a 0. Sia d_{r_1} un punto qualunque di $\mathfrak{N}$. Alla sinistra di d_{r_1} esiste certamente un punto c_{r_1}, appartenente $\overline{a\,b}$, tale che $d_{r_1} - c_{r_1} < \varepsilon_1$ e che $\frac{|F(d_{r_1}) - F(c_{r_1})|}{d_{r_1} - c_{r_1}} > \frac{2}{\varepsilon_1}$, e ciò per la discontinuità verso sinistra di $F(x)$ in d_{r_1}. Alla destra di d_{r_1} esiste certamente un intorno σ_1 di ampiezza minore di ε_1, intieramente contenuto in $a\,b$, tale che $\frac{|F(x) - F(c_{r_1})|}{x - c_{r_1}} > \frac{1}{\varepsilon_1}$, per tutti i valori di x ad esso apparte-

([22]) S'intende riguardo ai punti di continuità, poichè soltanto in questi sono definiti i numeri derivati a sinistra.

nenti. Sia d_{r_2} un punto qualunque di $\mathfrak{N}$ in σ_1, distinto da d_{r_1} ($r_2 > r_1$). Alla sinistra di d_{r_2} esiste un punto c_{r_2} appartenente ad $a\,b$, tale che $d_{r_2} - c_{r_2} < \varepsilon_2$ e che $\frac{|F(d_{r_2}) - F(c_{r_2})|}{d_{r_2} - c_{r_2}} > \frac{2}{\varepsilon_2}$. Alla destra di d_{r_2} esiste un intorno σ_2 di ampiezza minore di ε_2, intieramente contenuto in σ_1 tale che $\frac{F(x) - F(c_{r_2})}{x - c_{r_2}} > \frac{1}{\varepsilon_2}$, per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia d_{r_3} un punto qualunque di $\mathfrak{N}$ in σ_2, distinto da d_{r_2} ($r_3 > r_2$). Così si prosegue indefinitamente: in generale, essendosi scelto d_{r_n} che segue $d_{r_{n-1}}$ nell'ordinamento di $\mathfrak{N}$, si osserverà che alla sinistra di d_{r_n} esiste un punto c_{r_n} appartenente ad $\overline{a\,b}$, tale che $d_{r_n} - c_{r_n} < \varepsilon_n$ e che $\frac{|F(d_{r_n}) - F(c_{r_n})|}{d_{r_n} - c_{r_n}} > \frac{2}{\varepsilon_n}$. Alla destra di d_{r_n} esiste un intorno σ_n di ampiezza minore di ε_n, intieramente contenuto in σ_{n-1}, tale che $\frac{|F(x) - F(c_{r_n})|}{x - c_{r_n}} > \frac{1}{\varepsilon_n}$ per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia $d_{r_{n+1}}$ un punto qualunque di $\mathfrak{N}$ in σ_n, distinto da d_{r_n} ($r_{n+1} > r_n$).

Si può sempre scegliere la successione crescente

$$d_{r_1},\ d_{r_2}, \dots,\ d_{r_n}, \dots$$

in modo che abbia per limite un punto di continuità. In quel punto esistono numeri derivati sinistri, e precisamente deve essere verificata almeno una delle due relazioni enunciate. Inoltre, data la scelta arbitraria di d_{r_1} e del suo intorno destro σ_1, tali punti di continuità sono ovunque densi in $a\,b$ [23]. c. d. d.

---

(23) Il procedimento del n.° 11 è simile a quello del n.° 5, ma ben più di quello sembra far uso del postulato di ZERMELO, onde può far dubitare della sua correttezza. Vale la pena che c'indugiamo per mostrare la possibilità di liberarnelo.

Scelto ad arbitrio d_{r_1} in $\mathfrak{N}$, può scegliersi per c_{r_1} il primo punto di $\mathfrak{N}$ medesimo soddisfacente alle condizioni volute. Tale primo punto esiste certamente: infatti sia x_0 un qualunque punto (cioè anche non appartenente ad $\mathfrak{N}$) alla sinistra di d_{r_1}, appartenente ad $\overline{a\,b}$, tale che $d_{r_1} - x_0 < \varepsilon_1$ e che $\frac{F(d_{r_1}) - F(x_0)}{d_{r_1} - x_0} > \frac{3}{\varepsilon_1}$. x_0 esiste certamente ed esiste un intorno destro di x_0, intieramente contenuto in $\overline{x_0 d_{r_1}}$, tale che $\frac{F(d_{r_1}) - F(x)}{d_{r_1} - x} > \frac{2}{\varepsilon_1}$ per tutti i valori di x ad esso appartenenti, quindi anche per tutti i punti di discontinuità ad esso appartenenti. Analogamente possono regolarizzarsi le scelte dei successivi $c_{r_2}, c_{r_3}, \dots, c_{r_n}, \dots$.

Anche la scelta dei punti di discontinuità $d_{r_2}, d_{r_3}, \dots, d_{r_n}, \dots$ può facilmente regolarizzarsi in modo da soddisfare alle condizioni volute. Basta per es. porre la condizione $d_{r_{n+1}} - d_{r_n} \leq \frac{1}{2^n}(d_{s_n} - d_{r_n})$, ove con d_{s_n} si indica il più prossimo a d_{r_n} fra tutti i punti di $\mathfrak{N}$ che hanno indice $< r_n$ e che sono $> d_{r_n}$. Infatti se la successione $d_{r_1}, d_{r_2}, \dots, d_{r_n}, \dots$ costruita con questa condizione tendesse ad un punto d_k di discontinuità, basterebbe consi-

Nella dimostrazione non ci siamo indugiati sopra i dettagli, per non ripeterci. Per essi rimandiamo al § 1, n.° 2.

12. I procedimenti dei n.ⁱ 5 e 11 si possono alternare in modo analogo a quanto si è fatto al § 1, n.° 3. Riassumendo allora entrambi i n.ⁱ 5 ed 11, si ottiene il seguente notevole

TEOR. Se $\mathfrak{N}$ è denso in un segmento $\overline{mn}$ parziale di ab (eventualmente in tutto $\overline{ab}$) l'aggregato dei punti x di continuità in cui da ogni parte almeno uno dei numeri derivati estremi è infinito, è denso in $\overline{mn}$.

DIM. A ciascuno dei punti $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ dell'aggregato $\mathfrak{N}$ facciamo corrispondere un punto c_j $(j = 1, 2, \dots, n, \dots)$ secondo la regola indicata al n.° 5.

Alla destra del punto c_{r_1} (r_1 è un indice arbitrario) esiste certamente un intorno σ_1 di ampiezza minore di ε_1, intieramente contenuto in $\overline{ab}$, tale che $\dfrac{|F(d_{r_1}) - F(x)|}{d_{r_1} - x} > \dfrac{1}{2\varepsilon_1}$ per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia d_{r_2} un punto qualunque di $\mathfrak{N}$ in σ_1, distinto da c_{r_1} $(r_2 > r_1)$. Alla destra di d_{r_2} esiste certamente un intorno σ_2, di ampiezza minore di ε_2, intieramente contenuto in σ_1, tale che $\dfrac{|F(x) - F(c_{r_2})|}{x - c_{r_2}} > \dfrac{1}{2\varepsilon_2}$ per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia c_{r_3} un punto c_j in σ_2, distinto da d_{r_2} $(r_3 > r_2)$. Così si prosegua indefinitamente: in generale, essendosi scelto $c_{r_{2n-1}}$, si osserverà che alla destra di $c_{r_{2n-1}}$ esiste un intorno σ_{2n-1} di ampiezza $< \varepsilon_{2n-1}$, intieramente contenuto in σ_{2n-2}, tale che $\dfrac{|F(d_{r_{2n-1}}) - F(x)|}{d_{r_{2n-1}} - x} > \dfrac{1}{2\varepsilon_{2n-1}}$ per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia $d_{r_{2n}}$ un punto qualunque di $\mathfrak{N}$ in σ_{2n-1}, distinto da $c_{r_{2n-1}}$ $(r_{2n} > r_{2n-1})$. Alla destra di $d_{r_{2n}}$ esiste un intorno σ_{2n} di ampiezza $< \varepsilon_{2n}$, intieramente contenuto in σ_{2n-1}, tale che $\dfrac{|F(x) - F(c_{r_{2n}})|}{x - c_{r_{2n}}} > \dfrac{1}{2\varepsilon_{2n}}$

---

derare il più piccolo intiero n tale che $r_n > k$. Sarebbe $d_{r_n} < d_k$, ma

$$d_{r_{n+1}} - d_{r_n} \leq \frac{1}{2^n}(d_k - d_{r_n}),$$

$$d_{r_{n+2}} - d_{r_n} \leq \frac{1}{2^n}(d_k - d_{r_n}) + \frac{1}{2^{n+1}}(d_k - d_{r_{n+1}}) < \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)(d_k - d_{r_n}),$$

$$d_{r_{n+3}} - d_{r_n} < \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}\right)(d_k - d_{r_n}),$$

. . . .

e al limite

$$d_k - d_{r_n} < \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)(d_k - d_{r_n}) = \frac{1}{2^{n-1}}(d_k - d_{r_n}).$$

Assurdo.

per tutti i valori di x ad esso appartenenti. Sia $c_{r_{2n+1}}$ un punto c_j in σ_{2n}, distinto da $d_{r_{2n}}$ $(r_{2n+1} > r_{2n})$.

Si può sempre scegliere la successione crescente

$$c_{r_1},\ d_{r_2},\ c_{r_3},\ d_{r_4},\dots,\ c_{r_{2n-1}},\ d_{r_{2n}},\ c_{r_{2n+1}},\dots$$

in modo che abbia per limite un punto di continuità. In quel punto esistono i derivati destri e i derivati sinistri e precisamente deve valere la proposizione enunciata. Inoltre, data la scelta arbitraria di c_{r_1} e del suo intorno destro σ_1, tali punti di continuità sono ovunque densi in $\overline{ab}$ (24).

13. Nella dimostrazione del teor. del n.° 11, l'ipotesi che $\mathfrak{N}$ sia denso in $\overline{ab}$ può sostituirsi con altra equivalente: ogni punto di $\mathfrak{N}$ è limite verso la sua destra di punti di $\mathfrak{N}$, oppure: i punti di $\mathfrak{N}$ che sono limiti verso la loro destra di punti di $\mathfrak{N}$ costituiscono un aggregato ovunque denso in $\mathfrak{N}$ (25). La tesi che allora si dimostra col procedimento del n.° 11 è: i punti di continuità in cui è verificata almeno una delle due relazioni $\overline{D}_-F(x) = +\infty$, $\underline{D}_-F(x) = -\infty$, costituiscono un aggregato ovunque denso in $\mathfrak{N}$ (26).

14. Terminiamo con alcuni interessanti esempi:

1°) Funzione $F(x)$ derivabile ovunque verso destra nell'intervallo $\overline{01}$. L'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità è costituito dagli estremi destri degl'intervalli contigui al noto aggregato perfetto non denso di CANTOR (27). In tutti i punti dell'aggregato perfetto di CANTOR la derivata destra è nulla, in tutti gli altri punti è > 0. La funzione si costruisce nel modo seguente:

si pone $F(x) = C$ (costante arbitrariamente prescelta) in tutti i punti dell'aggregato di CANTOR;

se $\overline{\alpha_n \beta_n}$ è un generico intervallo contiguo, per ogni x interno ad esso si pone $F(x) = C + (x - \alpha_n)^2$.

Per ogni punto $\bar{x}$ dell'aggregato di CANTOR è, se $x > \bar{x}$,

$$C \leq F(x) \leq C + (x - \bar{x})^2.$$

---

(24) Vedi la nota (23).

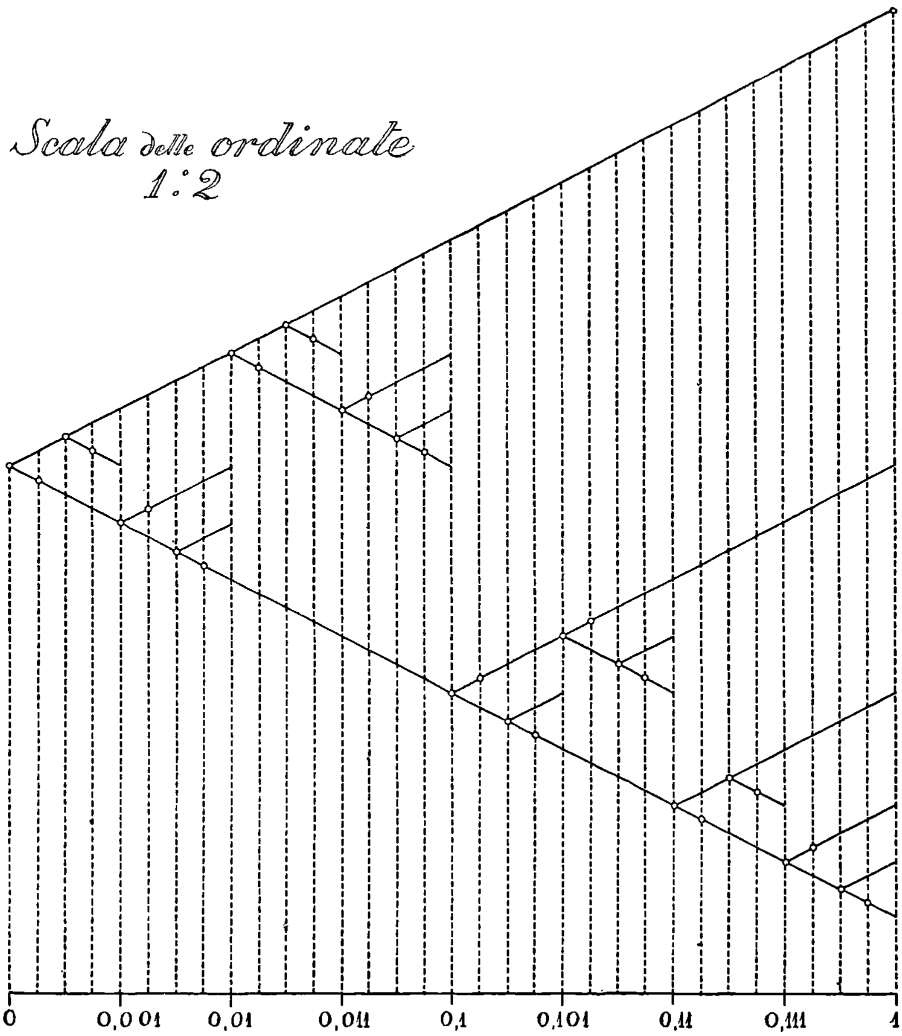
(25) Vedi il § 1, n.° 7, e il § 2, n.° 8.

(26) Cioè entro ogni segmento $\overline{mn}$ contenente punti di $\mathfrak{N}$ esistono punti di continuità x in cui è verificata almeno una delle due relazioni $\overline{D}_-F(x) = +\infty$, $\underline{D}_-F(x) = -\infty$.

(27) Per la definizione e le proprietà di questo aggregato vedi ad es. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 1928, pag. 27, oppure TONELLI. *Calcolo delle Variazioni*, 1921, vol. I, pag. 108, oppure DENJOY, loc. cit., pag. 121.

I punti dell'aggregato di CANTOR che sono punti di continuità e nei quali è $\underline{D}_-F(x) = -\infty$ costituiscono un aggregato ovunque denso nell'aggregato di CANTOR (per il n.° 13). Evidentemente in tutti questi punti è però anche $\overline{D}_-F(x) = 0$.

15. 2°) Funzione $F(x)$ continua ovunque verso destra nell'intervallo 0 1. L'aggregato $\mathfrak{M}$ dei punti di discontinuità è quello dei punti di $\overline{0\,1}$ che in



numerazioue binaria si rappresentano con un numero finito di cifre dopo la virgola (cifre 0 e 1) ed è denso in tutto $\overline{0\,1}$. In tutti i punti di $\mathfrak{M}$ è $D_+F(x) = +1$,

$\underline{D}_+F(x) = -1$. La figura qui disegnata nè dà una rappresentazione cartesiana approssimata.

La funzione si costruisce nel modo seguente. Si assegnano ad $F(0)$ e ad $F(1)$ valori arbitrari. Indi si pone

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{4}\right) = F(0) + \frac{1}{4}, \quad F\left(\frac{1}{16}\right) = F(0) + \frac{1}{16}, \dots, \quad F\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = F(0) + \frac{1}{2^{2n}}, \dots \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = F(0) - \frac{1}{2}, \quad F\left(\frac{1}{8}\right) = F(0) - \frac{1}{8}, \dots, \quad F\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right) = F(0) - \frac{1}{2^{2n-1}}, \dots \end{cases}$$

Si è così definita la funzione in un primo aggregato di punti $Q(0)$ aventi per limite il punto O.

Si consideri l'aggregato $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ simile [28] a $Q(0)$ contenuto in $\overline{\frac{1}{2}1}$ e si definisca la funzione $F(x)$ per tutti i valori di $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ in modo che la differenza $F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right)$ stia alla corrispondente differenza già definita $F(x) - F(0)$ nel rapporto di similitudine $\left(= \frac{1}{2}\right)$ che intercede fra $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ e $Q(0)$.

Si consideri l'aggregato $Q\left(\frac{1}{4}\right)$ simile a $Q(0)$ contenuto in $\overline{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ e si definisca la funzione $F(x)$ per tutti i valori di $Q\left(\frac{1}{4}\right)$ in modo che la differenza $F(x) - F\left(\frac{1}{4}\right)$ stia alla corrispondente differenza già definita $F(x) - F(0)$ nel rapporto di similitudine $\left(= \frac{1}{4}\right)$ che intercede fra $Q\left(\frac{1}{4}\right)$ e $Q(0)$.

Così si prosegue: in generale si consideri l'aggregato $Q\left(\frac{k}{2^n}\right)$ simile a $Q(0)$, definito per ogni numero $\frac{k}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots;\ k < 2^n)$, contenuto in $\overline{\frac{k}{2^n}\frac{k+1}{2^n}}$, e si definisca la funzione $F(x)$ per tutti i valori di $Q\left(\frac{k}{2^n}\right)$ in modo che la dif-

(28) Cioè tale che la distanza mutua di tutti i suoi punti e dagli estremi dell'intervallo $\overline{\frac{1}{2}1}$ in cui sono contenuti, stia alla corrispondente distanza dei punti di $Q(0)$ in $\overline{01}$, nel rapporto di similitudine $\left(= \frac{1}{2}\right)$ che intercede fra gl'intervalli $\overline{\frac{1}{2}1}$ e $\overline{01}$.

ferenza $F(x) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)$ stia alla corrispondente differenza già definita $F(x)$ $F(0)$ nel rapporto di similitudine $\left(=\frac{1}{2^n}\right)$ che intercede fra $Q\left(\frac{k}{2^n}\right)$ e $Q(0)$.

È evidente che la successione indefinita di queste operazioni fornisce la definizione della $F(x)$ in tutti i punti dell'aggregato $\mathfrak{N}$. Uno sguardo alla figura prova poi che tutti i punti dell'aggregato $\mathfrak{N}$ sono realmente punti di discontinuità; che in essi la $F(x)$ è continua verso destra e che è

$$\overline{D}_+ F(x) = +1, \quad \underline{D}_+ F(x) = -1.$$

In tutti gli altri punti di $\overline{0\,1}$ la $F(x)$ è definita per continuità. Ciò è possibile: sia infatti ξ un punto di $0\,1$ non appartenente ad $\mathfrak{N}$, e sia

$$\xi = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \qquad \left(\alpha_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}\right)$$

la sua espressione in numerazione binaria. In tutti i punti di $\mathfrak{N}$ che si trovano nell'intervallo $\overline{\left|\frac{\alpha_1}{2} \quad \frac{\alpha_1 + 1}{2}\right.}$ la $F(x)$ assume valori contenuti nell'angolo avente vertice in $\left[\frac{\alpha_1}{2}, F\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\right]$, ampiezza $= \frac{\pi}{2}$ (29) e bisettrice orizzontale verso destra. In tutti i punti di $\mathfrak{N}$ che si trovano nell'intervallo $\left|\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} \quad \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2 + 1}{2^2}\right.$ la $F(x)$ assume valori contenuti nell'angolo avente vertice in $\left[\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2}, F\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2}\right)\right]$, ampiezza $= \frac{\pi}{2}$ e bisettrice orizzontale verso destra. In generale: in tutti i punti di $\mathfrak{N}$ che si trovano nell'intervallo

$$\overline{\left|\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} \quad \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{\alpha_n + 1}{2^n}\right.}$$

la $F(x)$ assume valori contenuti nell'angolo avente vertice in

$$\left[\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n}, \quad F\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n}\right)\right],$$

ampiezza $= \frac{\pi}{2}$ e bisettrice orizzontale verso destra.

---

(29) Nella figura, per economia di spazio, si è fatto uso di scale diverse per le ascisse e per le ordinate.

Poichè questa successione d'intervalli aperti verso destra non si arresta a nessun indice finito, ma prosegue indefinitamente avendo per limite il punto ξ, è chiaro che esiste il $\lim_{x \to \xi} F(x)$ ed è lecito quindi completare la definizione della funzione ponendo $F(\xi) = \lim_{x \to \xi} F(x)$.

Applicando il ragionamento del n.° 12 si può poi vedere che i punti di $\overline{0\,1}$, non appartenenti ad $\mathfrak{N}$, in cui i quattro numeri derivati estremi di $F(x)$ sono tutti infiniti, costituiscono un aggregato denso in $\overline{0\,1}$.

16. 3°) Una classe assai estesa di funzioni continue verso destra si può definire nel modo seguente.

Prefissato l'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità

$$a_1,\ a_2, \dots,\ a_n, \dots,$$

denso in tutto un intervallo $\overline{a\,b}$, facciamo corrispondere biunivocamente ad ogni suo elemento il termine con lo stesso indice di una serie $S = u_1 + u_2 + \dots$ a termini positivi, convergente.

Sia x un punto di $\overline{a\,b}$. Se x è un a_r, estraggo da $\mathfrak{N}$ un gruppo di termini (necessariamente in numero finito) aventi indici $\leq r$ e susseguentisi sul segmento $\overline{a\,b}$ da sinistra verso destra Eseguisco l'estrazione con la legge seguente: a_{m_1} è il primo termine di $\mathfrak{N}$ tale che

$$m_1 \leq r, \quad a_{m_1} \leq a_r,$$

a_{m_2} è il primo termine di $\mathfrak{N}$ tale che

$$m_1 < m_2 \leq r, \quad a_{m_1} < a_{m_2} \leq a_r,$$

..., arrestando il procedimento al primo termine per cui è $m_n = r$ [30].

Se x non è un a_r, estraggo con la medesima legge da $\mathfrak{N}$ un gruppo di termini (necessariamente in numero infinito) susseguentisi da sinistra verso destra sul segmento $\overline{a\,b}$, aventi indici ordinatamente crescenti e tendenti al limite x. Nell'un caso e nell'altro pongo

$$F(x) = u_{m_1} + u_{m_2} + u_{m_3} + \dots,$$

cioè definisco $F(x)$ come somma rispettivamente di un numero finito, oppure di una serie, di termini estratti (in ordine crescente) dalla serie S.

---

(30) Se fosse, in particolare, $m_1 = r$. il gruppo estratto si ridurrebbe al solo termine $a_{m_1} \equiv a_r$.

La funzione $F(x)$ così definita è continua verso destra in tutto $a\,b$. Infatti l'incremento destro relativo ad un punto x qualunque è della forma

$$(3)\quad F(x+h)-F(x)=(u_{m_s}+u_{m_{s+1}}+u_{m_{s+2}}+\ldots)-(u_{m'_s}+u_{m'_{s+1}}+u_{m'_{s+2}}+\ldots).$$

In questa espressione, se tanto x che $x+h$ non appartengono ad $\mathfrak{N}$, minuendo e sottraendo nel secondo membro sono delle serie ed è $x<a_{m_s}<$ $<x+h$, $m_s'>m_s$. Se x appartiene ad $\mathfrak{N}$, il sottraendo è una somma di un numero finito di termini che può eventualmente scomparire del tutto (come avviene effettivamente da un certo punto in poi quando h tende a zero). Se $x+h$ appartiene ad $\mathfrak{N}$, il minuendo è una somma di un numero finito di termini, eventualmente ridotta al solo primo termine u_{m_s}. In ogni caso, fissato arbitrariamente un intiero μ, basta prendere h minore della distanza di x da ciascuno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ per assicurare che $m_s'>m_s>\mu$. Allora

$$0<F(x+h)-F(x)<u_{\mu+1}+u_{\mu+2}+\ldots$$

e quindi, per la convergenza della serie S, $|F(x+h)-F(x)|<\varepsilon$ assegnato arbitrariamente piccolo.

La $F(x)$ è continua verso sinistra in tutti i punti x di $a\,b$ che non appartengono ad $\mathfrak{N}$. Infatti l'incremento sinistro di $F(x)$ relativo ad x (ora è $h<0$) è ancora della forma (3): il minuendo è una somma di un numero finito di termini se $x+h$ è un punto di $\mathfrak{N}$ (ed eventualmente può scomparire), è una serie nel caso contrario; il sottraendo è sempre una serie. In ogni caso è

$$a_{m_s}\leq x+h<a_{m'_s}<x.$$

Partendo da un valore iniziale facciamo tendere h a 0. Quando $x+h$ raggiunge il valore $a_{m'_s}$, il sottraendo perde il primo termine $u_{m'_s}$ e il minuendo si riduce a 0. Quando $x+h$ sorpassa il valore $a_{m'_s}$, il sottraendo resta stazionario mentre il minuendo si riforma a cominciare da un termine con indice superiore ad m'_{s+1}. Dunque è

$$|F(x+h)-F(x)|<u_{m'_s}+u_{m'_{s+1}}+\ldots$$

e, per la convergenza della serie S, $|F(x+h)-F(x)|<\varepsilon$ arbitrariamente assegnato.

Se x appartiene ad $\mathfrak{N}$ (sia precisamente, conservando la notazione, $x\equiv a_{r'}\equiv a_{m'_n}$), il sottraendo nel secondo membro della (3) è sempre $\neq 0$, riducendosi ad $u_{m'_n}$ quando $h > x - a_{m'_{n-1}}$. Il minuendo, quando h tende a zero, tende ad una serie ben determinata: è la serie dei termini u corrispondenti al gruppo estratto da $\mathfrak{N}$ con la legge descritta, relativamente all'intervallo $\overline{a_{m'_{n-1}} x}$. La serie S deve dunque essere scelta in modo che $F(x + h) - F(x)$ tenda a un valore $\neq 0$ quando h tende a 0.

In un lavoro in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » espongo un esempio molto semplice di funzione continua verso destra definita secondo le regole del presente numero.

Sur les directions de Borel des fonctions entières

par Georges Valiron (à Paris)

$f(z)$ étant une fonction entière ou plus généralement une fonction holomorphe autour du point à l'infini (donc pour $|z| > R$), d'ordre ρ positif, c'est-à-dire telle que, $M(r, f)$ désignant le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$,

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} > 0,$$

j'appelle *direction de Borel d'ordre réel* ρ', $\rho' \leqq \rho$, de $f(z)$ une direction Δ, $\arg z = \varphi = \text{const.}$, jouissant de cette propriété: dans tout angle A de bissectrice Δ et de sommet origine, l'ordre réel des zéros de $f(z) - x$ est égal à ρ' sauf au plus pour une seule valeur finie de x pour laquelle cet ordre est inférieur à ρ'. C'est dire que, $r_n(x, A)$ étant la suite des modules des zéros de $f(z) - x$, $r_n(x, A) > R$, la série

(1) $$\Sigma[r_n(x, A)]^{-\sigma}$$

converge pour $\sigma > \rho'$, et diverge pour $\sigma < \rho'$ sauf au plus pour un x.

J'ai démontré ailleurs qu'il existe toujours au moins une direction de Borel d'ordre ρ (1). J'ai établi d'autre part que, si l'on considère une direction Δ ($\arg z = \varphi_0$) donnée quelconque et si l'on appelle $\rho(x, \Delta)$ l'ordre réel de $f(z)$ x dans cette direction, c'est-à-dire la limite de l'ordre réel de $f(z) - x$ dans les angles A de bissectrice Δ lorsque l'ouverture de ces angles tend vers 0, on a ces deux propriétés:

I. $\rho(\mathrm{x}, \Delta)$ *a la même valeur* $\rho(\Delta) \equiv \rho(\varphi_0)$ *pour tous les* x, *sauf pour ceux d'un ensemble exceptionnel* $\mathrm{E}(\Delta)$ *qui est de mesure linéaire nulle dans toute région finie du plan des* x. *Pour les* x *de* $\mathrm{E}(\Delta)$, $\rho(\mathrm{x}, \Delta) > \rho(\Delta)$ *sauf au plus pour une valeur finie de* x.

II. ε *étant donné positif, on peut trouver un angle* A *de bissectrice* Δ *pour lequel la série (1) converge pour* $\sigma = \rho(\Delta) + \varepsilon$ *sauf pour les* x *appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle, indépendant de* ε (2).

(1) « Acta math. », t. 52, 1928, p. 67-92.

(2) « Comptes Rendus », t. 192, 1931, p. 269-271.

J'appellerai $\rho(\Delta)$ *l'ordre réel moyen dans la direction* Δ.

La seconde proposition montre qu'il existe au moins une direction Δ pour laquelle $\rho(\Delta) = \rho$, ce qui établit l'existence des directions de BOREL d'ordre ρ.

Je me propose d'étudier ici la relation entre la valeur de l'ordre réel moyen et la valeur de l'ordre apparent de $f(z)$ dans la même direction et principalement de montrer que les droites frontières des angles dans lesquels $f(z)$ est d'ordre ρ sont toujours directions de BOREL d'ordre ρ. Je donne d'autre part des exemples effectifs où l'ordre réel de $f(z) - x$ dans une certaine direction dépasse, pour une valeur x, l'ordre réel moyen qui est positif, mais évidemment inférieur à ρ. Il conviendrait de rechercher si cette circonstance peut se présenter pour plusieurs valeurs x.

1. J'introduirai d'abord la notion *d'ordre apparent de* f(z) *dans une direction* Δ. Si B est un angle de bissectrice Δ, l'ordre apparent de $f(z)$ dans B est

$$\rho_a^B = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} M(r, B)}{\log r} \quad (^1) \tag{2}$$

$M(r, B)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$ et z appartenant à B. L'ordre apparent de $f(z)$ dans la direction Δ est la limite $\rho_a(\Delta)$ de ρ_a^B lorsque l'ouverture de B tend vers 0. Cet ordre $\rho_a(\Delta)$ peut être supérieur à *l'ordre apparent de* f(z) *sur* Δ, ordre défini par

$$\rho'_a(\Delta) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|}{\log r}$$

φ étant l'argument de la direction Δ. Par exemple, pour e^z on a $\rho'_a\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\rho_a\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 1$; pour $\sin z$, $\rho'_a(0) = 0$, $\rho'_a(\pi) = 0$ et $\rho_a(\Delta) = 1$ quel que soit Δ.

Il est évident que si Δ est direction limite de directions Δ_n, on a

$$\rho_a(\Delta) \geqq \overline{\lim}\, \rho_a(\Delta_n).$$

D'autre part, en supposant fini l'ordre ρ de $f(z)$, MM. LINDELÖF et PHRAGMÉN ont montré que, si Δ appartient à l'angle de Δ' et Δ'' supposé inférieur à $\frac{\pi}{\rho}$, $\rho_a(\Delta) \geqq \rho'_a(\Delta)$ est au plus égal au plus grand des nombres $\rho'_a(\Delta')$, $\rho'_a(\Delta'')$ (²).

(¹) $\overset{+}{u}$ est égal à u si $u > 0$ et à 0 si $u \leq 0$.

(²) « Acta math. », t. 31, 1908, p. 381-406.

ρ' étant donné inférieur ou égal à ρ, les directions Δ pour lesquelles

$$\rho_a(\Delta) \geqq \rho',$$

forment donc des angles B fermés (c'est-à-dire comprenant les droites qui les limitent) d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ au moins. Chacun de ces angles B est recouvert par les angles B' (ouverts ou fermés), d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ au moins dans lesquels

$$\rho'_a(\Delta) \geqq \rho'$$

auxquels on adjoint s'il y a lieu les droites limites. *Les angles formés par les* B' *auxquels on adjoint leurs droites limites coïncident avec les angles* B. Par exemple, pour $\sin z$, on a deux angles B' d'ouverture π, tous deux ouverts et B comprend tout le plan.

Il peut exister un ensemble infini dénombrable de directions Δ pour lesquelles $\rho'_a(\Delta) < \rho_a(\Delta)$. Considérons en effet la fonction de MITTAG-LEFFLER

$$E(z\,;\,\alpha) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(1+n\alpha)}, \qquad 0 < \alpha < 2$$

dont l'ordre est $\rho = \frac{1}{\alpha}$; on sait que

$$\lim_{r=\infty} E(re^{i\varphi}\,;\,\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2}\alpha < |\varphi| \leqq \pi$$

$$\lim_{r=\infty} |E(re^{i\varphi}\,;\,\alpha)| = \frac{1}{\alpha} \quad \text{si} \quad |\varphi| = \frac{\pi\alpha}{2}$$

tandis que $E(z;\,\alpha)$ est d'ordre $\frac{1}{\alpha}$ *sur* toutes les directions appartenant à l'angle $|\varphi| < \frac{\pi\alpha}{2}$ (1).

Il suit de là que la fonction entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^\infty E\left(z\,;\frac{q}{q+1}\right)\frac{1}{q^2} = \sum_0^\infty c_n z^n, \quad c_n = \sum_{q=1}^\infty \frac{1}{q^2\Gamma\left(1+\frac{nq}{q+1}\right)}$$

(1) MITTAG-LEFFLER, « Acta math. », t. 29, 1905, p. 101-181; en part., th. 8a, p. 136.

est d'ordre

$$\begin{array}{ll} 2 & \text{si } |\varphi| < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{3}{2} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leqq |\varphi| < \frac{\pi}{3}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{q+1}{q} & \text{si } \frac{q-1}{q}\frac{\pi}{2} \leqq |\varphi| < \frac{q}{q+1}\frac{\pi}{2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

et tend vers o sur les directions $\frac{\pi}{2} \leqq |\varphi| \leqq \pi$. Pour cette fonction

$$\rho_a\left(\pm\frac{\pi}{2}\frac{q}{q+1}\right) - \rho'_a\left(\pm\frac{\pi}{2}\frac{q}{q+1}\right) = \frac{q+1}{q} - \frac{q+2}{q+1} = \frac{1}{q(q+1)}.$$

Nous allons étudier d'une façon générale l'ensemble des directions φ pour lesquelles $\rho_a(\varphi) > \rho'_a(\varphi)$. Examinons d'abord les propriétés de la fonction $\rho_a(\varphi)$, l'ordre étant supposé fini.

En chaque point φ, $\rho_a(\varphi + 0)$ et $\rho_a(\varphi - 0)$ existent. Car, φ_n étant une suite de valeurs supérieures à φ par exemple et tendant vers φ, prises de façon que $\rho_a(\varphi_n)$ converge vers un nombre b, le théorème de PHRAGMÉN et LINDELÖF montre que, pour φ' supérieur à φ et tendant vers φ on aura

$$\overline{\lim}\, \rho_a(\varphi') = b$$

et par suite aussi

$$\lim \rho_a(\varphi) = b.$$

Ainsi, $\rho_a(\varphi + 0)$ et $\rho_a(\varphi - 0)$ existent et, en vertu d'une remarque faite plus haut, $\rho_a(\varphi)$ est égal au plus grand de ces deux nombres.

Considérons alors la fonction $\rho_a(\varphi)$ qui, si elle n'est pas constante et égale à ρ, est cependant constante et égale à ρ dans des segments de longueur $\frac{\pi}{\rho}$ au moins. Soit $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ un intervalle compris entre deux de ces segments. Un point φ' de (φ_0, φ_1) donnera un maximum relatif de $\rho_a(\varphi)$ s'il existe un segment (φ'', φ''') appartenant à (φ_0, φ_1) dans lequel $\rho_a(\varphi') \geq \rho_a(\varphi)$ tandis que $\rho_a(\varphi') > \rho_a(\varphi'')$, $\rho_a(\varphi') > \rho_a(\varphi''')$; on aura alors $\rho_a(\varphi) = \rho_a(\varphi')$ sur un segment de longueur $\frac{\pi}{\rho}$ au moins. Il y a donc un nombre fini de maxima relatifs. Soit $\varphi_2 < \varphi < \varphi_3$ un intervalle compris entre deux maxima relatifs; posons $\rho_a(\varphi_2) = \rho'$, $\rho_a(\varphi_3) = \rho''$. Supposons par exemple $\rho' < \rho''$. Il existe des points φ de (φ_2, φ_3)

pour lesquels $\rho_a(\varphi) < \rho'$, la borne inférieure ρ''' de $\rho_a(\varphi)$ est inférieure à ρ'. Cette borne inférieure peut ne pas être atteinte, mais alors il existe un point φ de (φ_2, φ_3) pour lequel $\rho_a(\varphi + 0)$ ou $\rho_a(\varphi - 0)$ est égal à ρ'''. D'une façon générale, on a un intervalle (φ_4, φ_5) dans lequel $\rho_a(\varphi) = \rho'''$ (l'intervalle peut ne pas exister, alors $\varphi_4 = \varphi_5$) et des φ aussi voisins que l'on veut de l'une au moins des extrémités pour lesquels $\rho_a(\varphi) - \rho'''$ est aussi petit que l'on veut. Pour $\varphi_2 < \varphi < \varphi_4$ la fonction $\rho_a(\varphi)$ ne croît pas; pour $\varphi_5 < \varphi < \varphi_3$, elle ne decroît pas. Car, si dans le premier intervalle par exemple, $\rho_a(\bar{\varphi}) < \rho_a(\bar{\varphi}')$ pour $\varphi_2 < \bar{\varphi} < \bar{\varphi}' < \varphi_4$, on aurait un maximum relatif sur le segment $(\bar{\varphi}, \varphi_4)$ ou $(\bar{\varphi}, \varphi_4 \pm \varepsilon)$ puisque la borne supérieure de $\rho_a(\varphi)$ sur ce segment, supérieure aux valeurs aux extrémités, égale a priori à un certain $\rho_a(\varphi + 0)$ ou $\rho_a(\varphi - 0)$ sera égale à $\rho_a(\varphi)$ maximum de ces deux nombres. Or l'existence d'un tel maximum relatif est contraire à l'hypothèse. On voit ainsi que

III. *La fonction* $\rho_a(\varphi)$ *est alternativement non croissante et non décroissante dans des intervalles adjacents dont le nombre est au plus égal à* 2ρ.

En un point de discontinuité de $\rho_a(\varphi)$, points qui forment un ensemble dénombrable, on peut avoir $\rho'_a(\varphi) < \rho_a(\varphi)$; les points en lesquels cette circonstance se présente et où $\rho'_a(\varphi)$ est supérieure ou égal au minimum de $\rho_a(\varphi \pm 0$ ne semblent soumis à aucune autre restriction. Si φ est un point de continuité de $\rho_a(\varphi)$ qui n'est pas limite de points de discontinuité et en lequel $\rho_a(\varphi)$ est soit croissante, soit décroissante (au sens strict) on a $\rho'_a(\varphi) = \rho_a(\varphi)$, sinon le théorème de PHRAGMÉN et LINDELÖF conduirait à une contradiction. Considérons enfin un point φ en lequel $\rho'_a(\varphi)$ est inférieur au plus petit des deux nombres $\rho_a(\varphi - 0)$, $\rho_a(\varphi + 0)$; d'aprés le théorème de LINDELÖF et PHRAGMÉN il n'y a pas d'autres points analogues dans l'intervalle $\varphi - \frac{\pi}{\rho}$, $\varphi + \frac{\pi}{\rho}$; le nombre de ces points est au plus égal à 2ρ. En dehors de ces points, $\rho'_a(\varphi)$ ne peut être inférieur à $\rho_a(\varphi)$ que si φ est point de discontinuité de $\rho_a(\varphi)$. Par suite

IV. *L'inégalité* $\rho'_a(\varphi) < \rho_a(\varphi)$ *ne peut avoir lieu qu'aux points de discontinuité de* $\rho_a(\varphi)$ *et en* 2ρ *autres points au plus. L'ensemble des points où* $\rho'_a(\varphi) < \rho_a(\varphi)$ *est dénombrable.*

Ces énoncés III et IV supposent que l'ordre est fini.

2. Soit $f(z)$ une fonction entière ou simplement une fonction holomorphe dans un angle B de sommet origine et sur les côtés tant que z est fini; son ordre apparent ρ_a^B dans B est défini par (2). On a la proposition suivante.

V. *Si* A *est un angle de sommet* O *complètement intérieur à* B (O *excepté*) *l'ordre réel des zéros de* f(z) — x *dans* A *est au plus égal à* ρ_a^B, *sauf* *au plus pour les* x *d'un ensemble exceptionnel qui est de mesure linéaire nulle dans toute région finie du plan des* x.

Partageons en effet A en s angles égaux, puis, pour $|z| > R$, partageons ces angles en rectangles curvilignes par les circonférences

$$|z| = R_p = R\left(1 + \frac{1}{s}\right)^p.$$

Soit $\gamma(p, j)$ l'un de ces rectangles compris dans le couronne $R_p < |z| < R_{p+1}$; soient $c(p, j)$ la circonférence circonscrite à ce rectangle et $C(p, j)$ la circonférence concentrique de rayon double. En prenant s assez grand, tous les $C(p, j)$ appartiennent à l'angle B. ε étant arbitraire et p assez grand, on a dans $C(p, j)$

$$\log |f(z)| < \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{p\rho'}, \quad \rho' = \rho_a^B + \varepsilon$$

et, en vertu du théorème de JENSEN, le nombre des zéros de $f(z) \quad x$ dans $c(p, j)$ est au plus égal à

$$\frac{1}{\log 2}\left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{p\rho'} + \overset{+}{\log} |x| - \log |f(z_p^j) \quad x|\right]$$

z_p^j désignant le centre du cercle, donc à

$$5\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{p\rho'} \tag{3}$$

si l'on suppose x extérieur à un cercle $\eta(p, j)$ de rayon e^{-K^p} (et de centre $f(z_p^j)$) et

$$|x| < e^{K^p}, \tag{4}$$

K étant un nombre fixe inférieur à $\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{\rho'}$. Excluons les x intérieurs à une infinité de cercles $\eta(p, j)$, x qui forment un ensemble de mesure linéaire nulle dans toute portion finie du plan, puisque la série formée par les rayons des cercles $\eta(p, j)$ est manifestement convergente. Si l'on suppose x fixe et extérieur à cet ensemble, la condition (4) est vérifiée et x est extérieur aux cercles $\eta(p, j)$ pourvu que p soit assez grand, $p > p(x)$, l'inégalité (3) est vérifiée, $f(z) - x$ a moins de

$$H(R_p)^{\rho'}$$

zéros dans la portion de A intérieure à la couronne

$$R_{p(x)} < |z| < R_p$$

H étant un nombre indépendant de x facile à calculer. Pour ces x la série 1 converge pour $\sigma > \rho'$ donc, pour $\sigma > \rho_a^B$ puisque ε est arbitraire. La proposition V est étable.

Il est clair que, dans bien des cas l'ensemble exceptionnel possible se réduit à un point, ou ne contient aucun point. Il n'y a qu'un seul point exceptionnel possible s'il existe dans A un chemin Γ sur lequel $f(z)$ tend vers une limite finie. Pour le voir, il suffit de considérer un cercle inscrit dans un angle A' de sommet O contenant A et contenu dans B et le point ζ de ce cercle situé sur Γ et le plus proche du centre. On fait une représentation conforme du cercle sur lui-même amenant ζ au centre et on applique le théorème de Jensen; le cercle exceptionnel analogue à $\eta(p, j)$ a alors un centre qui tend vers le valeur asymptotique le long de Γ, la valeur exceptionnelle possible est unique.

En tenant compte de la définition de l'ordre réel moyen dans une direction, on voit que V entraîne ce corollaire:

VI. *L'ordre réel moyen dans une direction Δ est au plus égal à l'ordre apparent dans cette même direction.*

A fortiori, l'ordre moyen dans une direction de BOREL d'ordre réel ρ' étant égal à ρ':

VII. *Si Δ est une direction de Borel d'ordre réel ρ', l'ordre apparent de* f(z) *dans cette direction est au moins égal à ρ'.*

Ces énoncés ne supposent pas l'ordre fini.

3. ρ' étant inférieur ou égal à ρ, supposons que l'ordre apparent de $f(z)$ dans une certaine direction soit inférieur à ρ'. D'après le n.° 1, les directions Δ pour lesquelles $\rho_a(\Delta) \geqq \rho'$ forment des angles. Nous allons montrer que

VIII. *Les côtés des angles formés par les directions Δ pour lesquelles $\rho_a(\Delta) \geqq \rho'$ sont des directions d'ordre réel moyen au moins égal à ρ'*

Soit Δ un des côtés d'un tel angle. Supposons que l'on ait

$$\rho(\Delta) = \rho' - 3\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Il existe un angle A de bissectrice Δ tel que la série (1) converge pour $\sigma = \rho' - 2\alpha$ et presque pour tous les x. Pour ces x le nombre des zéros de $f(z) - x$ appartenant à A et à une couronne $R_x < |z| < R$ sera moindre que

$$R^{\rho' - 2\alpha}. \tag{5}$$

Il est loisible de supposer, en remplaçant $f(z)$ par $cf(z) + d$ que cette circonstance se présente pour $x = 0$ et $x = 1$. Soit B un angle d'ouverture 8δ, de bissectrice Δ, intérieur à A et soient B_1 l'angle de bissectrice Δ et d'ouverture 4δ, Δ' et Δ'' les côtés de cet angle B_1. ε positif arbitrairement petit étant donné, on peut supposer que δ a été pris assez petit pour que, sur l'un des côtés, Δ' par exemple, on ait

(6) $$\log|f(z)| < r^{\rho'-2\varepsilon}$$

dès que $r = |z|$ est assez grand, tandis qu'il existe dans l'angle (Δ, Δ'') des points z de module r aussi grand que l'on veut, pour lesquels

(7) $$\log|f(z)| > r^{\rho'-\varepsilon}.$$

Soit z_0 un point pour lequel (7) est vérifiée, $r_0 = |z_0|$. Dans le cercle de centre z_0 et rayon $r_0 \sin\delta$ existe, d'après le principe du module maximum, une ligne continue Γ joignant le centre z_0 à un point z_1 de la circonférence, en chaque point de laquelle

(8) $$\log|f(z)| > r_0^{\rho'-\varepsilon}.$$

Entourons les zéros de $f(z)[f(z)-1]$ situés dans A et dans la couronne C

$$\frac{1}{2} r_0 < |z| < 2r_0$$

de cercles d'exclusion de rayon commun

$$(2r_0)^{-\rho'-1+2\alpha}.$$

D'après (5), la somme des diamètres de ces cercles est au plus égale à

$$\frac{2}{r_0}.$$

Par suite, dès que r_0 est assez grand, il existe une droite D perpendiculaire au segment z_0z_1 et le coupant, donc coupant Γ, qui ne coupe pas les cercles d'exclusion. Il peut se faire que D coupe Δ' en un point z_2 du segment de cette demi-droite pour lequel $r_0(1-10\delta) < r < r_0(1+10\delta)$. Dans le cas contraire, il existe un arc de circonférence $|z| = r$ tel que

(9) $$r_0(1-10\delta) < r < r_0(1+10\delta)$$

qui ne coupe pas les cercles d'exclusion et qui coupe D à l'intérieur de B. On obtient encore ici un chemin γ ne coupant pas les cercles exclus et joignant un point z_2 de Δ' appartenant à (9) à un point z_3 de Γ. Dans tous les cas, le chemin γ reste dans la couronne (9) et dans B et sa longueur est au plus égale à $4r_0$; un cercle quelconque ayant pour centre un point de γ et pour rayon $20\delta r_0$ contient toujours z_3 à son intérieur. Enfin, il est loisible de supposer que ε puis δ ont été choisis assez petits pour qu'un cercle quelconque ayant pour centre un point de γ et pour rayon $80\delta r_0$ appartienne à la fois à la couronne C et à l'angle A. z' étant un point de γ, posons

$$g(Z) = f(z' + Z).$$

On sait que

$$T\left(\frac{1}{2}u, g\right) < 36N \log \frac{eu}{d'} + 4 \overset{+}{\log} \frac{1}{u\,|g'(0)|} + 12 \overset{+}{\log} |g(0)| + H \text{ (1)}.$$

H étant une constante absolue, N le nombre des zéros de $g(Z)[g(Z) - 1]$ pour $|Z| < u$ et d' la plus courte distance de ces zéros à l'origine $Z = 0$. Comme d'autre part

$$\log M\left(\frac{1}{4}u, g\right) < 3T\left(\frac{1}{2}u, g\right)$$

on aura, en prenant pour d' le rayon des cercles d'exclusion et en appliquant l'inégalité au point Z correspondant à z_3,

$$\log|f(z_3)| < 108(2r_0)^{\rho'-2\alpha} \log[80e\delta r_0(2r_0)^{\rho'+1-2\alpha}] + 12 \overset{+}{\log} \frac{1}{80\delta r_0\,|f'(z')|} +$$
$$+ 36 \log|f(z')| + 3H.$$

En tenant compte de (8), on aura donc, dès que r_0 sera assez grand et quel que soit z' sur γ:

(10) $$r_0^{\rho'-\varepsilon} < r_0^{\rho-\alpha} + 12 \overset{+}{\log} \frac{1}{|f'(z')|} + 36 \overset{+}{\log} |f(z')|.$$

Partons de z_2 et parcourons γ. Nous appliquerons (10) au premier point z' rencontré en lequel $|f'(z')| \geqq 1$. On aura en ce point

$$|f(z')| < |f(z_2)| + 4r_0$$

et en supposant r_0 assez grand, en vertu de (6)

(11) $$\log|f(z')| < (3r_0)^{\rho'-2\varepsilon}.$$

En tenant compte de ces inégalités, on déduit de (10)

$$r_0^{-\varepsilon} < r_0^{-\alpha} + 36(3r_0)^{-2\varepsilon}$$

ce qui est impossible puisqu'on peut supposer $0 < \varepsilon < \alpha$ et $\lim r_0 = \infty$.

(1) « Acta math. », t. 47, 1925, p. 117-142.

Il est d'ailleurs impossible que, sur γ, $|f'(z)|$ soit constamment inférieur à 1 puisque (11) serait alors vérifiée pour $z' = z_3$ ce qui contredirait 8).

L'hypothèse faite est donc absurde et la proposition VIII est établie. Elle suppose, comme il a été dit, qu'il existe un angle au moins dans lequel l'ordre de $f(z)$ est inférieur à ρ'.

On peut faire une hypothèse moins restrictive. Supposons seulement qu'il existe une direction sur laquelle $f(z)$ est d'ordre inférieur à ρ', $\rho' \leqq \rho$. Considérons les demi-droites frontières des angles dans lesquels $\rho'_a(\Delta) \geqq \rho'$; ou bien une telle demi-droite est aussi frontière des angles où $\rho_a(\Delta \geq \rho'$ et l'on est dans les conditions de la proposition VIII, ou bien cette demi-droite Δ' est telle que $\rho'_a(\Delta') < \rho'$ et $\rho_a(\Delta') \geqq \rho'$. Dans ce second cas, on peut faire jouer à Δ' le rôle de la direction portant le même nom dans la démonstration précédente, l'inégalité (6) est même renforcée, 2ε y étant remplacé par un nombre fixe β. On obtient ainsi cette proposition contenant VIII.

IX. *ρ' étant donné inférieur ou égal à ρ, les côtés des angles dans lesquels $\rho'_a(\Delta) \geqq \rho'$ sont, s'ils existent, des directions d'ordre réel moyen au moins égal à ρ'.*

Pour $\rho' = \rho$, on a ce corollaire:

X. *Si* f(z) *est d'ordre ρ autour du point à l'infini, les côtés des angles (fermés ou ouverts) dans lesquels $\rho'_a(\Delta) = \rho$ sont, s'ils existent, des directions de Borel d'ordre ρ.*

Pour une fonction d'ordre fini ρ, il existe d'après le théorème de LINDELÖF et PHRAGMÉN déjà utilisé au n.° 1, un angle ou des angles d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ au moins dans lesquels $\rho'_a(\Delta) = \rho$. D'une façon générale, si ρ' est un maximum relatif de $\rho'_a(\varphi)$, $\rho'_a(\varphi)$ est égal à ρ' dans un intervalle (ouvert ou fermé) de longueur $\frac{\pi}{\rho'}$, au moins. Si φ_0 est un point pour lequel $\rho'_a(\varphi)$ n'est pas stationnaire, c'est-à-dire n'est pas constant dans un intervalle contenant φ_0, la direction φ_0 est frontière d'un angle dans lequel $\rho'_a(\Delta) \geqq \rho_a(\varphi_0)$. Par suite, d'après V et IX.

XI. *Toute direction $\varphi(\arg z = \varphi)$, pour laquelle la fonction $\rho'_a(\varphi)$ n'est pas stationnaire, est une direction d'ordre réel moyen égal à $\rho_a(\varphi)$.*

4. Les propositions VIII à XI supposent que l'ordre ρ de $f(z)$ est fini. Il est aisé de voir comment on doit modifier les énoncés dans le cas de l'ordre infini. Il résulte toujours de la définition de l'ordre apparent $\rho_a(\Delta)$ que les directions pour lesquelles $\rho_a(\Delta) < \rho'$, ρ' fini, s'il en existe forment des angles ouverts C; l'ensemble complémentaire est parfait. Si Δ' est frontière d'un angle C dans lequel $\rho_a(\Delta) < \rho'$, l'ordre moyen dans la direction Δ' est au moins égal à $\rho_a(\Delta')$. Cet énoncé général correspond à VIII. Il reste vrai que, si pour une valeur φ_0, $\rho'_a(\varphi_0)$ est inférieur à $\rho_a(\varphi)$ la direction φ_0 est d'ordre moyen égal à $\rho_a(\varphi_0)$. A X correspond cet énoncé: les frontières des angles où $\rho'_a(\Delta) < \infty$ ainsi que les directions extérieures à ces angles pour lesquelles $\rho'_a(\Delta) \nearrow \infty$ sont directions de BOREL d'ordre infini. La proposition XI reste entièrement valable. Car, si $\rho'_a(\varphi)$ est fini et $\rho_a(\varphi)$ fini, $f(z)$ est d'ordre fini dans un petit angle de bissectrice φ, on retombe en somme sur le cas de l'ordre fini; si $\rho'_a(\varphi) < \infty$ et $\rho_a(\varphi) = \infty$ on est dans le cas qui a été signalé ci-dessus; enfin, si $\rho'_a(\varphi) = \infty$ et n'est pas stationnaire la direction φ est limite de directions sur lesquelles $\rho'_a(\varphi) < \infty$ et le raisonnement du n.° 3 s'applique.

Que l'ordre soit fini ou infini, les directions φ pour lesquelles $\rho'_a(\varphi)$ n'est pas stationnaire sont toujours des directions de JULIA. Car il existe alors des cercles $|z - te^{i\varphi}| < t\delta$, $\lim t = \infty$, contenant à la fois des points où $\log|f(z)| < t^{\rho'-2\varepsilon}$ et des points où $\log|f(z)| > t^{\rho'-\varepsilon}$, ε étant positif et dépendant de δ qui peut être pris arbitrairement petit. En vertu du théorème de SCHOTTKY, les cercles concentriques de rayon quadruple doivent contenir des zéros de $f(z)$ ou $f(z) - 1$, la famille $f(zue^{i\varphi})$ où u est un paramètre positif, ne peut être normale pour tous les z réels et positifs, la direction φ est direction de JULIA.

5. Que l'ordre soit fini ou infini, on a la proposition suivante:

XII. *La fonction $\rho_a(\varphi)$ est la même pour une fonction* f(z) *et pour sa dérivée.*

Nous désignerons ici par $\rho_a^B(f)$, $\rho_a(\varphi, f)$, $\rho'_a(\varphi, f)$ les ordres apparents de la fonction $f(z)$ dans l'angle B, dans la direction φ et sur la demi-droite d'argument φ. En intégrant, on a de suite

$$\rho_a^B(f) \leqq \rho_a^B(f'),$$

donc

$$\rho_a(\varphi, f) \leqq \rho_a(\varphi, f').$$

D'autre part, en considérant un angle C intérieur à B (et toujours de sommet origine), le théorème de CAUCHY donne

$$\rho_a^C(f') \leqq \rho_a^B(f),$$

donc, en prenant C d'ouverture égale à la moitié de celle de B et en faisant tendre ces ouvertures vers 0,

$$\rho_a(\varphi, f') \leqq \rho_a(\varphi, f). \tag{12}$$

La proposition XII est ainsi établie.

En ce qui concerne la comparaison des fonctions $\rho'_a(\varphi, f)$ et $\rho'_a(\varphi, f')$, l'intégration donne évidemment

$$\rho'_a(\varphi, f) \leqq \rho'_a(\varphi, f') \tag{13}$$

et l'inégalité (12) montre alors que l'on a

$$\rho'_a(\varphi, f) = \rho'_a(\varphi, f')$$

pour toutes les valeurs φ pour lesquelles $\rho'_a(\varphi, f) = \rho_a(\varphi, f)$. Dans le cas de l'ordre fini, (13) ne pourrait donc être une inégalité que pour un ensemble dénombrable de valeurs φ. Dans le cas de l'ordre infini, on peut trouver des exemples pour lesquels (13) est effectivement une inégalité. C'est le cas pour $f(z) \equiv e^{ie^z}$, pour laquelle $\rho'_a(0, f) = 0$, $\rho'_a(0, f') = 1$.

En rapprochent XII de VIII ou X on voit que

XIII. f(z) *étant holomorphe autour du point à l'infini, d'ordre* ρ *fini ou infini, si* $\rho_a(\varphi)$ *n'est pas toujours égal à* ρ, *les côtés des angles où l'on a* $\rho_a(\varphi) < \rho$ *sont des directions de Borel d'ordre réel* ρ *communes à* f(z) *et à toutes ses dérivées.*

D'une façon générale l'ordre réel moyen est certainement le même pour $f(z)$ et ses dérivées dans toutes les directions φ pour lesquelles $\rho_a(\varphi)$ n'est pas stationnaire.

6. Il existe effectivement dans certains cas des directions Δ pour lesquelles $0 < \rho(\Delta) = \rho_a(\Delta) < \rho < \infty$ et qui ne sont pas directions de BOREL d'ordre $\rho(\Delta)$. Cette circonstance se présente dans le cas des fonctions orientées à croissance irrégulière que j'ai étudiées autrefois [1]. Pour fixer les idées, prenons

$$f(z) = \prod_1^\infty \left[1 - \frac{z}{a(n)}\right] e^{\frac{z}{a(n)} + \dots + \frac{z^p}{p a(n)^p}}$$

avec $a(n)$ réel positif, p entier positif ou nul,

$$\log a(n) = \frac{\log n}{\rho - \frac{1}{2}\sin^2(\log_3 n)}, \quad p + \frac{1}{2} < \rho < p + 1.$$

[1] « Annales Faculté de Toulouse », t. 5, 1913, p. 236.

La direction $\varphi = 0$ est une direction telle que

$$\rho_a(0) = \rho(0) = p + \frac{1}{2}$$

alors que l'ordre réel des zéros dans cette direction est $p + \frac{1}{2}$ pour $f(z) - x$, $x \neq 0$ et est égal à $\rho > p + \frac{1}{2}$ pour $x = 0$.

L'ordre réel dans une direction peut donc effectivement dépasser l'ordre réel moyen supposé positif; mais il y aurait lieu de chercher si ceci peut avoir lieu pour plusieurs x.

Remarquons enfin que ces mêmes fonctions à croissance irrégulière fournissent des exemples de cas où la fonction $\rho_a(\varphi)$ est continue et monotone dans certains intervalles.

Sulle superficie integrali di due o più equazioni lineari a derivate parziali del 3° ordine.

Memoria di E. BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Questa Memoria trae occasione da una Nota di* E. P. LANE *sullo stesso argomento. Il* LANE *crede di rilevare manchevolezze in un lavoro dell'A. del 1919 in cui, a seguito di una teoria generale sulle superficie (le coordinate proiettive omogenee dei cui punti sono) integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee. è trattato come esempio il caso indicato nel titolo.*

L'A. riprende i risultati di quella Nota per mostrare la completezza della classificazione data nel 1919 e porre in rilievo una classe molto generale di superficie soddisfacenti al problema che è sfuggita al LANE. *Il* BOWLES, *allievo del* LANE, *ha aggiunto qualche ulteriore conseguenza geometrica in parte erronea. mentre i risultati esatti corrispondenti sono esplicitamente enunciati nella Nota dell'A. del 1919.*

1. In un lavoro pubblicato nel 1919 (¹) ho dato alcuni teoremi generali sulle superficie integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali, lineari ed omogenee, in due variabili indipendenti: cioè ho assegnato alcuni caratteri geometrici delle superficie le coordinate proiettive dei cui punti, $x(u, v)$, soddisfano a un tal sistema. E a titolo d'esempio ho aggiunto qualche dettaglio nel caso di superficie soddisfacenti ad una o a due equazioni a derivate parziali del 3° ordine.

Quest'ultimo caso è stato ripreso recentemente dal sig. E. P. LANE (²) e da un suo allievo CH. F. BOWLES (³). Il LANE si giova in parte della mia trattazione (⁴) e si preoccupa di arrivare a forme canoniche per il sistema di

(¹) *Determinazione delle superficie integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee.* « Rendic. del R. Istituto Lombardo », 1919, vol. LII: parte I. pagg. 610-625 e parte II, pagg. 626-636. Citerò questo lavoro con « D. S. I. ».

(²) *Integral surfaces of pairs of partial differential equations of the third order.* « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 32, n. 4, pagg. 782-793.

(³) *Integral surfaces of pairs of differential equalions of the third order.* A dissertation submitted to the graduate faculty in candidacy for the degree of doctor of philosophy by CH. F. BOWLES. « The University of Chicago Libraries ». Chicago, Ill., 1930, pagg. 1-106.

(⁴) Il che è stato detto dal LANE così: « On page 630 of his paper BOMPIANI attacks the problem of reducing a pair of third-order equations to canonical forms, using apparently the same point of view that we have adopted ». Cosicchè io ho avuto la fortuna nel 1919 due equazioni del 3° ordine; trovate le quali Egli crede opportuno stabilire un confronto fra i suoi e i miei risultati e scrive: « He obtains our equations (17), and then, appealing to some general theory developed earlier in his paper, arrives at two canonical forms which do not differ essentially from our canonical forms (23) and (24). He does not discover our four other canonical forms. He does not develop a theory based on our canonical form (23), but confines his further studies to our canonical form (24) obtaining extremely interesting results to which we shall refer again later ».

Chi legge questo passo ha l'impressione che mi siano sfuggiti alcuni tipi di superficie scoperti dal Lane: è un peccato che questi non abbia approfondito quella « general theory developed earlier in his paper » perchè avrebbe scoperto che non mi sono sfuggiti affatto, come si vedrà appresso ([5]). Nè è vero che io arrivi a quei due soli tipi: arrivo a quelli quando ho già scartato gli altri.

Trovo anche strano il rilievo di non aver sviluppato una teoria del sistema (23) ([6]); a parte che non avevo bisogno di farlo, a pag. 628 del mio lavoro sono esplicitamente enunciate le proprietà geometriche delle equazioni che compongono tal sistema e sono perfino dati schemi grafici atti ad illustrare la dipendenza lineare di certi punti espressa da quelle equazioni. Tanto più strano perchè il Lane non va oltre esse, ma si limita a scriverne le condizioni di integrabilità.

Ma è vero che, volendo, si può spingere oltre quello studio: il che ho appunto fatto nel corso di Geometria Superiore dato a Bologna nel 1926-27 ([7]).

---

d'indovinare il metodo pubblicato dal Lane nel 1930. A dir vero le forme canoniche (che del resto non sono sempre univocamente determinate dal tipo di superficie) non sono lo scopo del mio lavoro, nè m'interessano quando con altre considerazioni io riesco a caratterizzare le superficie integrali: questo è il problema, e le forme canoniche non sono che uno strumento.

([5]) Il Lane non cita che la parte II del mio lavoro; è un peccato ch'Egli non abbia portato la sua attenzione sulla parte I, cui si riferisce vagamente con le parole riportate fra virgolette, perchè ciò gli avrebbe evitato di fraintendere i miei risultati e quindi la presente messa a punto.

([6]) Sono le equazioni (1) di questa Nota.

([7]) A quel corso hanno assistito il prof. E. P. Lane dell'Università di Chicago, il prof. E. Stouffer dell'Università del Kansas, il prof. Enea Bortolotti, i dott. L. Burani, S. Cinquini, E. Lindner, G. Palozzi ed altri.

Le proprietà riguardanti l'intorno del 3° ordine sono state svolte dal 14 Marzo al 16 Maggio 1927. Negli appunti del corso che ho passato agli studenti (com'è mia abitudine) ho sviluppato largamente la teoria invariantiva (invarianti finiti, differenziali, loro interpretazione geometrica, trasformazioni) delle superficie integrali di una o due equazioni del 3° ordine, che mi riservo di pubblicare in altra occasione. Per quanto ricordo, nel periodo indicato i prof. Lane e Stouffer non erano più a Bologna.

Su qualche altro rilievo non esatto del LANE tornerò appresso; devo invece rilevare, come proverò, che le forme canoniche date dal LANE nel cap. III sono insufficienti perchè non comprendono il caso generale; come incompleti sono alcuni risultati del BOWLES relativi ad uno di quei casi che invece di essere sfuggiti a me sono sfuggiti al LANE nella lettura del mio lavoro.

È tempo di riferire su questo relativamente al caso che qui c' interessa di due equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee del 3° ordine.

2. Mi occorre ricordare la nozione di spazio ν-osculatore, $S(\nu)$, ad una superficie in un suo punto: è quello (di dimensione minima) cui appartengono gli S_ν osculatori alle curve della superficie nel punto ([8]).

Se la superficie (come vogliamo supporre col LANE; per quanto la mia teoria permetta di esaurire anche l'ipotesi opposta) non soddisfa ad equazioni a derivate parziali del 2° ordine è $S(2) \equiv S_5$. E se come nell'ipotesi soddisfa a due equazioni differenziali lineari omogenee del 3° ordine è $S(3) \equiv S_7$ (la dimensione si riduce da 9, come è in generale, a 7). La dimensione dello $S(4)$ può essere 7, 8 o 9.

3. Le superficie corrispondenti ai due primi casi (quelli sfuggitimi secondo il LANE) si classificano in base ai due Lemmi seguenti ([9]).

LEMMA I. Se gli $S(\nu)$ ed $S(\nu+1)$ in un punto generico della superficie hanno la stessa dimensione ρ, la superficie appartiene ad un S_ρ.

LEMMA II. Se in un punto generico della superficie $S(\nu) \equiv S_\rho$ e $S(\nu+1) \equiv S_{\rho+1}$ o la superficie sta in $S_{\rho+1}$ oppure possiede ∞^1 curve negli $S_{\rho-\nu}$ di una sviluppabile ([10]).

Applicando questi due Lemmi al nostro caso si ha:

Se $S(4) \equiv S_7$ la superficie integrale del sistema sta in S_7. E viceversa ogni superficie di S_7 (generica, cioè per cui $S(2) \equiv S_5$) soddisfa a due equazioni del 3° ordine lineari e omogenee; sicché questa classe di superficie è completamente esaurita.

Passiamo al caso $S(4) \equiv S_8$. Per il Lemma II si hanno due sottoclassi di superficie. Per una di esse si hanno ∞^1 curve negli S_4 di una sviluppabile.

([8]) Ho esposto questa nozione, ed altre che incontreremo poi, in numerosi lavori a partire dal 1912; v. p. es. *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* (« Atti Acc. di Torino », 1912).

([9]) « D. S. I. », pagg. 614 e 615 (Lemma e Corollario I).

([10]) Con ciò si esprime che due $S_{\rho-\nu}$ infinitamente vicini stanno in uno $S_{\rho-\nu+1}$ (tangente alla ∞^1 di $S_{\rho-\nu}$ in tutti i punti di un $S_{\rho-\nu}$).

E viceversa ogni superficie di questo tipo soddisfa a due equazioni a derivate parziali del 3° ordine che è facile scrivere. Sicchè anche questa sottoclasse è completamente esaurita.

L'altra sottoclasse si compone di superficie di S_8: viceversa *non* ogni superficie di S_8 soddisfa a due equazioni del 3° ordine (ma solo ad una, in generale); ma è facile studiare queste superficie una volta che ne è noto l'ambiente. Ritornerò presto su di esse.

4. Rimangono infine a considerare le superficie per le quali $S(4) \equiv S_9$.

Per esse dimostro che necessariamente le due equazioni del 3° ordine debbono potersi ridurre, con opportuna scelta di variabili, ad uno dei due tipi seguenti ([11]):

$$(1) \begin{cases} x_{30} = . . \\ x_{21} = . . \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_{21} = . . \\ x_{12} = . . \end{cases}$$

ove p. es. $x_{30} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^3}$ e ove i punti indicano espressioni lineari omogenee in x e nelle derivate prime e seconde (a coefficienti funzioni di u, v). S'intende bene che per esse debbono essere soddisfatte le condizioni di completa integrabilità, da scriversi tenendo conto del fatto che la superficie non rappresenta altre equazioni a derivate parziali del 3° ordine. L'ambiente d'appartenenza di queste superficie non è determinato dalle equazioni precedenti, e la sua dimensione può essere qualsiasi (≥ 9). È ben chiaro che superficie soddisfacenti ad uno dei due sistemi scritti possono esistere anche in S_7 e in S_8 (e quindi rientrare nelle classi precedenti); ma, se ciò accade, la superficie deve soddisfare non solo alle due equazioni del 3° ordine, ma anche a due o rispettivamente ad una equazione del 4° ordine (lineare omogenea in x e nelle sue derivate) non deducibili dalle precedenti per derivazione.

Il significato geometrico delle equazioni (1) o (2) è il seguente:

Sulle superficie integrali del sistema (1) *esiste un doppio sistema di*

([11]) « D. S. I. », pag. 631. Questi due tipi, (23) e (24) nella numerazione del LANE, sarebbero secondo il LANE gli unici da me trovati. Sia nella discussione sia nel risultato è detto esplicitamente che « *se* $\nu > 3$ etc. »; il che $\left(\text{riferendosi al Cap. III colà citato, cioè ad un sistema di } \frac{\nu(\nu-1)}{2} - 1 \text{ equazioni}\right)$ vuol proprio dire « se $S(2) \equiv S_5$, $S(3) \equiv S_7$, $S(4) \equiv S_9$. L'aver trascurato questa limitazione ha portato il LANE a credere che mi fossero sfuggiti gli altri casi, per i quali $S(4) \equiv S_7$ o $S(4) \equiv S_8$, che invece erano già stati classificati.

linee u, v *tali che lo* S_4 *bitangente* ([12]) *in* x *alla superficie in direzione della linea* u *contiene lo* S_3 *osculatore alla* u; *e inoltre lo* S_5 *osculatore lungo la generatrice per* x *alla rigata* ([13]) *delle tangenti alle linee* v *lungo una* u *(cioè lo* S_5 *contenente le tangenti alle linee* v *in* x *e in due punti infinitamente vicini sulla linea* u *per* x*) coincide con lo* S_5 *2-osculatore in* x *alla superficie.*

Sulle superficie integrali del sistema (2) *esiste un doppio sistema di linee* u, v *a carattere involutorio tali che la rigata delle tangenti alle linee* u *(o* v*) lungo uua linea* v *(o* u*) ha il primo indice di sviluppabilità* $=2$ ([14]); *cioè tre generatrici infinitamente vicine di una di queste rigate stanno in* S_4 *(e non in* S_5*, come accade in generale).*

Per queste superficie, cioè per la coppia di equazioni (2), ho dato una trasformazione analoga a quella di LAPLACE ([15]).

La proprietà caratteristica di esse enunciata nel penultimo alinea (insieme ad altre) relativa alle rigate circoscritte alle superficie soddisfacenti alle (2) è stampata *in corsivo* nella mia Memoria (pag. 633); il LANE, proprio al termine della sua ([16]), scopre una « interesting interpretation » delle (2) « which seems to have escaped notice hitherto » : la quale interpretazione è esattamente quella precedente !

5. Riassumendo :

Le superficie integrali di due equazioni a derivate parziati lineari omogenee del 3° ordine (e di nessuna del 2° ordine) appartengono necessariamente ad uno dei tipi seguenti :

1°) *Superficie di* S_7.

2°) *Superficie di* S_8, *con* $S(3) \equiv S_7$.

([12]) « D. S. I. » pag. 612 in nota. Spazio bitangente è ogni spazio congiungente i piani tangenti in due punti infinitamente vicini; esso dipende quindi da un punto della superficie e da una tangente in esso (ed è un S_4 se $S(2) \equiv S_5$). Analogamente (loc. cit.) si definisce lo spazio ν-tangente per un elemento di curva d'ordine ν.

([13]) Spazio osculatore (o meglio 2-osculatore) ad una rigata lungo una generatrice è quello contenente la generatrice e due infinitamente vicine (cioè i piani osculatori a curve della rigata in tutti i punti della generatrice). Questa ed altre nozioni più generali si trovano nella mia Memoria : *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazî.* « Rend. Circ. Matem. di Palermo », t. XXXVII (1914).

([14]) Nella Memoria ora citata ho introdotto la nozione di *indici di sviluppabilità* di una rigata. Il primo di essi è, in termini infinitesimali, il massimo numero di generatrici infinitamente vicine linearmente indipendenti.

([15]) « D. S. I. », pag. 632 e segg..

([16]) Loc. cit., pag. 793.

3°) *Superficie con* ∞^1 *curve negli* S_4 *di una sviluppabile.*

4°) *Superficie soddisfacenti al sistema* (1).

5°) *Superficie soddisfacenti al sistema* (2).

L'ambiente delle superficie delle ultime tre classi non è determinato dalle equazioni del 3° ordine: esso può venire determinato soltanto dall'aggiunta di equazioni di ordine > 3 non conseguenze differenziali di quelle date.

Il lettore che abbia presenti le Note dei sigg. LANE e BOWLES vedrà che le superficie da loro trovate si trovano tutte fra le precedenti. Con ciò non affermo che i miei risultati coincidano con i loro, perchè, come ora proverò, ci sono nelle loro Note risultati sbagliati, e alcuni tipi sono ad essi sfuggiti.

6. Veniamo alla parte analitica. Il procedimento da me dato nel lavoro più volte ricordato è il seguente [17].

Ad un'equazione del 3° ordine

$$\alpha x_{30} + 3\beta x_{21} + 3\gamma x_{12} + \delta x_{03} = . \; .$$

(i punti indicando sempre una combinazione lineare omogenea di x e delle sue derivate d'ordine ≤ 2) associo (per ogni coppia u, v) l'equazione algebrica

$$\alpha\xi^3 + 3\beta\xi^2\eta + 3\gamma\xi\eta^2 + \delta\eta^3 = 0$$

che definisce per ogni punto della superficie tre direzioni *caratteristiche* (distinte o no).

Date *due* equazioni a derivate parziali del 3° ordine considero il *fascio* di equazioni ottenute combinando linearmente quelle due (i parametri della combinazione essendo funzioni di u, v). Nel fascio considero quella o quelle equazioni [18] le cui direzioni caratteristiche in ogni punto non sono tutte distinte.

Precisamente per una equazione avente in ogni punto una direzione caratteristica doppia e una semplice si possono scegliere variabili u, v tali da ri-

[17] « D. S. I. », pagg. 626-631.

[18] che si ottengono annullando il discriminante di un'equazione cubica i cui coefficienti sono lineari omogenei nei parametri della combinazione. Si hanno quindi 4 (distinte o no) equazioni del tipo voluto. Nel mio lavoro « D. S. I. » ho scritto *tre* (pag. 631) e il LANE ha creduto opportuno ristampare tutto il periodo per segnalare quest'errore forse credendo di trovare in esso la ragione della lacuna che mi attribuisce (e che non corrisponde al vero). Ma si sarebbe subito disilluso se avesse letto accuratamente tutto il periodo. Dove, dopo aver detto erroneamente che esistono *tre* di quelle equazioni, è anche detto: « In ogni modo fissiamone una ». Sicchè le rimanenti, quante esse siano, non intervengono nel ragionamento che resta perciò del tutto giusto e non va toccato.

durla al tipo

$$x_{12} = a_{20}x_{20} + a_{11}x_{11} + a_{02}x_{02} + a_{10}x_{10} + a_{01}x_{01} + a_{00}x. \tag{3}$$

Per un'equazione le cui tre direzioni caratteristiche coincidano si può scegliere la variabile v p. es. (cioè le linee $du = 0$ sulla superficie) in modo che essa si riduca alla forma

$$x_{03} = a_{20}x_{20} + a_{11}x_{11} + a_{02}x_{02} + a_{10}x_{10} + a_{01}x_{01} + a_{00}x \tag{4}$$

mentre la variabile u, cioè le linee $dv = 0$ sulla superficie, rimangono ancora arbitrarie.

Questo secondo caso è eccezionale, il primo è quello generale. Esaminiamoli separatamente.

7. Cominciamo dal caso in cui nel fascio esista una (almeno) equazione con una direzione caratteristica doppia e una semplice. Scelte le linee da queste inviluppate sulla superficie come linee parametriche, tale equazione può ridursi, come s'è detto, al tipo (3).

Il significato geometrico di quest'equazione, dato esplicitamente nella mia Nota ([19]), è il seguente:

I piani osculatori a due curve v (du $= 0$) *in un punto* x *e nel punto infinitamente vicino della curva* u *per* x *stanno nello* S_5 *2-osculatore in* x *alla superficie.*

La stessa proprietà, se si vuole, può mettersi sotto altra forma introducendo la nozione di spazio 2-osculatore ad una rigata lungo una generatrice.

La rigata delle tangenti alle linee u *nei punti di una linea* v *ha come spazio 2-osculatore lungo la generatrice per il punto* x *lo spazio 2-osculatore alla superficie ivi (o è contenuto in esso; precisamente si ha questo secondo caso quando* $a_{20} = 0$ *e allora la rigata ha indice di sviluppabilità 2).*

Segue anche dalla sola equazione (3) che gli S_5 2-osculatori alla superficie si possono ordinare in due modi distinti come 2-osculatori lungo generatrici di rigate passanti per le linee u e v.

8. Veniamo ora all'ipotesi che c'interessa, cioè che oltre all'equazione (3 la superficie sia integrale di un'altra equazione a derivate parziali del 3° ordine. Nel fascio da esse individuato possiamo sempre scegliere come seconda equazione quella, *unica*, in cui è zero il coefficiente di x_{12}; basta infatti eliminare dall'altra per sottrazione il termine in x_{12} in essa eventualmente esistente.

([19]) « D. S. I. », pagg. 628. 629.

Sicchè il sistema può scriversi, nel caso più generale,

$$(5)\quad \begin{cases} x_{12} = a_{20}x_{20} + a_{11}x_{11} + a_{02}x_{02} + a_{10}x_{10} + a_{01}x_{01} + a_{00}x \\ b_{30}x_{30} + 3b_{21}x_{21} + b_{03}x_{03} = b_{20}x_{20} + b_{11}x_{11} + b_{02}x_{02} + b_{10}x_{10} + b_{01}x_{01} + b_{00}x. \end{cases}$$

È bene ripetere che, scelta nel fascio un'equazione con una direzione caratteristica doppia e una semplice, il sistema (5) è determinato (a meno di cambiamenti inessenziali) perchè la prima equazione determina le linee parametriche u, v e la seconda equazione è unica. I cambiamenti inessenziali sono quelli indotti da una trasformazione del tipo

$$(6)\qquad \bar{x} = \rho(u, v)x, \quad \bar{u} = \bar{u}(u), \quad \bar{v} = \bar{v}(v)$$

o dal sostituire alla prima equazione un'altra possedente la stessa proprietà riguardo alle sue direzioni caratteristiche. A parte questi mutamenti, che non modificano la forma del sistema (5), non ce ne sono altri che possano ulteriormente semplificarla: sicchè essa è una *forma canonica*; anzi è la forma canonica corrispondente al caso più generale.

Il LANE crede a questo punto ([20]) di perfezionare la mia trattazione sostituendo alla seconda delle equazioni (5) un'altra equazione dello stesso tipo, cioè con $b_{12} = 0$, ma con direzioni caratteristiche non tutte distinte. Ciò è ovviamente impossibile (se la seconda equazione non ha già la proprietà richiesta, cioè appunto nel caso generale) perchè, come s'è detto, l'equazione del fascio con $b_{12} = 0$ (fissata la (3)) è *unica*: e quindi non le si possono imporre altre condizioni.

Non si incorre in quest'errore (in cui consiste l'unica sostanziale differenza fra il lavoro del LANE ed il mio e che gli lascia sfuggire proprio il caso più generale) se si nota il significato geometrico delle (5). La prima di esse, cioè la (3), che definisce le linee u, v ha un significato già noto. La seconda esprime che lo S_6 3-tangente secondo una linea u in x (cioè contenente il piano tangente in x e in due punti infinitamente vicini sulla u che vi passa) e lo S_3 osculatore in x alla linea v stanno in S_7 (e non in S_8).

Queste proprietà geometriche delle linee u, v non possono esser rese più particolari dalla scelta di un'equazione nel fascio, come avverrebbe se la conclusione del LANE fosse giusta.

([20]) Cioè dopo aver seguito, nel suo Cap. III, il procedimento da me dato e aver scritto le (17), cioè le precedenti (5), il LANE (pag. 787) scrive: « System (17) can be reduced still more by taking as the first equation therein another singular equation ». Quest'osservazione sbagliata, sulla quale si basa la ricerca delle forme canoniche, inficia tutto il Cap. III.

E che essa non lo sia risulta ancora, *ad abundantiam*, da quanto segue. Se si opera una trasformazione del tipo (6) sul sistema (5) si trova che il sistema possiede gli invarianti ([21])

$$\frac{b_{30}}{b_{21}}\frac{dv}{du}, \quad \frac{b_{21}}{b_{03}}\frac{dv^2}{du^2}, \quad \frac{b_{30}}{b_{03}}\frac{dv^3}{du^3}, \quad \frac{b_{30}^2 b_{03}}{b_{21}^3}(=I) \tag{7}$$

di cui due indipendenti. Ora è subito visto che quando I non si presenti sotto forma indeterminata esso ha, nelle forme canoniche (24), (25) e (26) del LANE, valori numerici ben determinati (0 per le due prime e -4 per l'ultima): sicchè nessuna delle forme canoniche date dal LANE (e riprese integralmente dal BOWLES) è atta a rappresentare il più generale sistema del tipo (5).

Poichè dunque al LANE è sfuggito proprio il caso più generale, darò qui un fugace accenno della trattazione analitica; da essa verrà confermato quanto s'è già trovato, cioè che le superficie integrali di due equazioni del 3° ordine sono quelle e soltanto quelle delle cinque classi indicate al n. 5.

9. Cominciamo dal supporre nelle (5) $b_{30}b_{21}b_{03} \neq 0$. Se la superficie non appartiene ad S_7 (caso ovvio perchè *tutte* le superficie di S_7 sono integrali di due equazioni del 3° ordine; in questo caso però la superficie dev'essere integrale di un'equazione del 4° ordine che non può ottenersi con una derivazione dalle due date) si vede subito che deve appartenere ad uno spazio S_8.

Infatti, usando notazioni di cui mi son servito parecchie altre volte ([22]), le due equazioni si scrivono

$$\begin{cases} x_{12} = [S(2)] \\ b_{30}x_{30} + 3b_{21}x_{21} + b_{03}x_{03} = [S(2)]; \end{cases} \tag{8}$$

dalla prima di esse per derivazione si ha

$$x_{22} = [S(3)], \quad x_{13} = [S(3)] \tag{9}$$

([21]) Con lo stesso procedimento seguito nella mia Nota: *Le forme elementari etc.* « Boll. Un. Mat. Ital. », 1926.

([22]) V. p. es. oltre « D. S. I. »: *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.* (« Rendic. Ist. Lombardo », 1914, vol. XLVII); *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici.* (« Memoria R. Acc. dei Lincei », 1921). Cito quest'ultima Memoria perchè in essa (e in una Nota preventiva sulla superficie di VERONESE pubblicata nei « Rendic. dei Lincei ») ho ripetutamente insistito sul fatto che non è sempre necessario scrivere tutte le condizioni d'integrabilità di un sistema, bastando talvolta le più espressive di esse aventi un significato geometrico immediato per determinare la natura della superficie o varietà.

Con la notazione [. . .] indico una combinazione lineare dei punti indicati in parentesi (quando non occorra specificarne i coefficienti): se poi non occorre specificare nemmeno i punti, ma solo il fatto che essi sono punti derivati d'ordine $\leq \nu$, scrivo più brevemente $[S(\nu)]$ per indicare che quei punti appartengono alla $S(\nu)$ osculatore in x.

e dalla seconda

(10) $$\begin{cases} b_{30}x_{40} + 3b_{21}x_{31} = [S(3)] \\ b_{30}x_{31} + b_{03}x_{04} = [S(3)] \end{cases}$$

ove $S(3)$ è individuato da $S(2)$ e da due dei punti x_{30}, x_{21}, x_{03}. Da esse risulta che lo $S(4)$ in x è lo S_8 di $S(3)$ e di x_{31}. Per ulteriore derivazione si trova che $S(5) \equiv S(4)$ cioè che la superficie sta in S_8.

Le proprietà proiettive di queste superficie si possono mettere in luce considerandone le quasi-asintotiche ([23]) $\gamma_{3,4}$: cioè le curve della superficie tali che lo S_4 osculatore ad una di esse in un suo punto x appartenga allo $S(3) \equiv S_7$ osculatore in x alla superficie. Per la loro stessa definizione, queste curve devono esser tali che, indicando con du, dv i differenziali su di esse, si abbia dipendenza lineare fra $S(3)$ e

$$x_{40}du^4 + 4x_{31}du^3dv + 6x_{22}du^2dv^2 + 4x_{13}dudv^3 + x_{04}dv^4$$

ovvero, per le (9), fra $S(3)$ e

$$x_{40}du^4 + 4x_{31}du^3dv + x_{04}dv^4.$$

Le (10) permettono di sostituire all'ultimo punto

$$x_{31}\left(-\frac{3b_{21}}{b_{30}}du^4 + 4du^3dv - \frac{b_{30}}{b_{03}}dv^4\right);$$

poichè x_{31} non è contenuto in $S(3)$, altrimenti la superficie starebbe in S_7 ciò che si è escluso, sulle $\gamma_{3,4}$ deve essere

(11) $$3b_{21}b_{03}du^4 - 4b_{30}b_{03}du^3dv - b_{30}^2dv^4 = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale delle $\gamma_{3,4}$. Segue da essa che per ogni punto della superficie ne passano quattro, sempre distinte dalle linee u, v. La mancanza nella (11) dei termini in du^2dv^2 e in $dudv^3$ si enuncia geometricamente dicendo che la quaterna delle tangenti quasi-asintotiche è apolare a ciascuna delle due quaterne $du^2dv^2 = 0$ e $du^3dv = 0$ formate con le tangenti caratteristiche semplice e doppia relative alla prima equazione (8). Questa proprietà geometrica vale naturalmente anche per le altre equazioni del fascio a caratteristiche non tutte distinte.

([23]) Ho introdotto questa nozione nella Nota del 1912: *Sopra alcune estensioni etc.* e me ne sono servito nei lavori finora citati e in diversi altri. Chiamo *quasi-asintotica* $\gamma_{r,s}$ una curva di una superficie tale che lo $S(r)$ osculatore in un punto alla superficie e lo S_s osculatore ivi alla curva abbiano una incidenza superiore alla normale (quale si ha per una curva *generica* in un punto generico).

L'invariante assoluto della quaterna delle tangenti quasi-asintotiche in un punto è un invariante proiettivo del sistema (8): a meno di un fattore numerico esso è proprio I di cui si ha così il significato geometrico. Quando $I = 1$ quelle tangenti non sono tutte distinte.

10. Oltre alle quasi-asintotiche $\gamma_{3,4}$ sono invarianti le curve definite annullando l'Hessiana della (11) cioè da

$$b_{03} du^3 - 3b_{21} du dv^2 + 2b_{30} dv^3 = 0 \tag{12}$$

e ancora dall'annullare l'Hessiana di questa, cioè da

$$b_{03} b_{21} du^2 - 2b_{30} b_{03} du dv + b_{21}^2 dv^2 = 0. \tag{13}$$

In realtà l'Hessiana della (11) si ha moltiplicando il primo membro della (12) per du, sicchè di essa fa parte la tangente caratteristica doppia della prima equazione (8); il che vuol dire che *la* (12) *rappresenta complessivamente le altre tre direzioni caratteristiche doppie delle equazioni del fascio che hanno la proprietà di possederne.*

In ogni punto l'invariante assoluto delle due direzioni definite dalla (13) e delle tangenti $du = 0$ e $dv = 0$ dà di nuovo il significato dell'invariante I; mentre gli invarianti assoluti della quaterna formata dalle tangenti (13), da una tangente arbitraria $\frac{du}{dv}$ e da una o dall'altra delle due tangenti $du = 0$, $dv = 0$ danno il significato geometrico degli invarianti $\frac{b_{30}}{b_{21}} \frac{dv}{du}$, $\frac{b_{21}}{b_{03}} \frac{dv^2}{du^2}$.

Come s'è detto, l'esame di questo caso generale manca completamente nel LANE.

11. Passiamo all'ipotesi $b_{30} b_{03} \neq 0$, $b_{21} = 0$ cioè al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{12} = [S(2)] \\ b_{30} x_{30} + b_{03} x_{03} = [S(2)]. \end{array} \right. \tag{14}$$

Le superficie integrali appartengono pure ad S_8. Le curve $u(dv = 0)$ sono quasi-asintotiche $\gamma_{3,4}^{\prime}$ e le rimanenti quasi-asintotiche sono definite da

$$4b_{03} du^3 = b_{30} dv^3 \tag{15}$$

cioè le loro tangenti costituiscono una terna apolare a $du = 0$, $dv = 0$. L'invariante assoluto di questa terna di tangenti quasi-asintotiche e di una tangente generica $\frac{dv}{du}$ si esprime razionalmente per mezzo di $\frac{b_{30}}{b_{03}} \frac{dv^3}{du^3}$ di cui quindi è noto il significato geometrico (è l'unico degli invarianti (7) che sia finito e diverso da zero nell'ipotesi in esame).

Le altre equazioni del fascio con una caratteristica doppia e una semplice sono del tipo

$$b_{30}x_{30} + 3\lambda x_{12} + b_{03}x_{03} = [S(2)] \tag{16}$$

quando si determini λ con la condizione

$$b_{30}b_{03}^2 + 4\lambda^3 = 0; \tag{17}$$

sicchè si hanno 4 equazioni distinte con la stessa proprietà (la prima delle (14) e le tre ora determinate); e nessuna ha, come subito si verifica, una direzione caratteristica tripla.

Se si cercano le direzioni caratteristiche semplici delle ultime tre equazioni 16) con λ radice di (17) si trova ch'esse sono definite proprio dalla (15); sicchè:

Nell'ipotesi attuale esistono nel fascio 4 equazioni con una direzione caratteristica doppia ed una semplice (in ciascun punto): le 4 direzioni caratteristiche semplici sono le tangenti alle quasi-asintotiche $\gamma_{3,4}$ nel punto. L'Hessiana di questa quaterna dà le direzioni caratteristiche doppie di quelle 4 equazioni.

Anche di questo caso non v'è traccia nel LANE.

12. Passiamo a considerare il caso $b_{30} = 0$, $b_{21}b_{03} \neq 0$ cioè la forma canonica

$$\left\{\begin{aligned} x_{12} &= a_{20}x_{20} + a_{11}x_{11} + a_{02}x_{02} + \dots \\ 3b_{21}x_{21} &+ b_{03}x_{03} = [S(2)] \end{aligned}\right. \tag{18}$$

la quale, come le precedenti, manca nel LANE.

Nella prima equazione si sono scritti i termini con le derivate seconde perchè due casi sono possibili secondo che $a_{20} = 0$ o $a_{20} \neq 0$.

Se $a_{20} \neq 0$ la superficie sta in S_7 (e siccome ogni superficie di S_7 soddisfa due equazioni del 3° ordine, non ci occupiamo oltre di questo caso).

Se $a_{20} = 0$ l'ambiente della superficie non è determinato dalle due equazioni date e può avere qualsiasi dimensione ≥ 7. Se si cercano le quasi-asintotiche $\gamma_{2,4}$ si trova ch'esse coincidono tutte con le linee $v(du = 0)$. Vogliamo provare che queste stanno negli S_4 di una sviluppabile, cioè che la superficie appartiene alla classe 3) (v. n.° 5).

Riscriviamo perciò il sistema (18) nell'ipotesi $a_{20} = 0$

$$\left\{\begin{aligned} x_{12} &= [x_{11},\ x_{02},\ S(1)] \\ 3b_{21}x_{21} &+ b_{03}x_{03} = [S(2)]. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Per derivazione dalla prima (19_1) e sostituendo x_{12} e x_{21} date dalle stesse

(19) si ha

$$x_{13} = [x_{03}, x_{11}, x_{02}, S(1)], \quad x_{22} = [x_{03}, S(2)]$$
$$x_{14} = [x_{03}, x_{11}, x_{02}, S(1)]$$

mentre per derivazione della (19_2) rispetto a v

$$x_{04} = [x_{03}, S(2)].$$

Derivando però questa rispetto ad u, se essa contiene x_{20}, si ottiene nell'espressione di x_{14} un termine in x_{30} che non figura nell' altra espressione di x_{14}; sicchè, non potendo esistere per ipotesi una terza equazione del 3° ordine quale si otterrebbe confrontando le due espressioni di x_{14}, dev'essere

$$x_{04} = [x_{03}, x_{11}, x_{02}, S(1)].$$

Derivando una o più volte x_{04} e x_{13} rispetto a v si vede che tutti i punti x_{0q} e x_{1q} (q qualsiasi) stanno nello S_5 dei punti x, x_{10}, x_{01}, x_{11}, x_{02}, x_{03}. Ciò già prova l'asserto: perchè questo S_5 contiene la curva v per x e quella infinitamente vicina; affinchè non tutta la superficie stia in un S_5 (quello di una curva v) bisogna che le curve v stiano in S_4 e due S_4 infinitamente vicini in S_5, cioè gli ∞^1 S_4 delle curve v siano quelli di una sviluppabile.

Del resto può controllarsi la conclusione anche per via analitica. Se le curve v appartenessero effettivamente ad S_5 (e non ad S_4), detto S_5 potrebbe individuarsi con i punti x, x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05} e poichè esso contiene i punti x_{10} e x_{11} si avrebbe

$$x_{10} = [x_{05}, x_{04}, x_{03}, x_{02}, x_{01}, x], \quad x_{11} = [x_{05}, \ldots, x]$$

da cui, per derivazione rispetto ad u, anche x_{20} risulterebbe appartenente allo stesso S_5: cioè si avrebbe una relazione d'appartenenza fra x_{03} e lo $S(2)$ contro l'ipotesi $b_{21} \neq 0$. Quei punti non sono indipendenti cioè le linee v stanno in S_4: e quanto s'è già detto prova che due S_4 infinitamente vicini stanno in S_5 ([24]).

13. Proviamo ora inversamente che ogni superficie con ∞^1 linee negli S_4 di una sviluppabile può, con una conveniente scelta delle variabili u, v, considerarsi integrale di un sistema del tipo (19).

Scegliamo le linee date negli S_4 come linee $v(du = 0)$, lasciando per il

---

([24]) Il tipo di ragionamento usato in questo numero consiste in sostanza nell'utilizzare quelle condizioni d'integrabilità che hanno un significato espressivo, come s'è detto nella nota antiprecedente ([22]), e non tutte. Scriverle tutte è un lavoro materiale che non ha scopo se non si riesce ad interpretarle geometricamente.

momento indeterminate le linee $u(dv=0)$. I piani tangenti alla superficie nei punti di una v stanno in uno S_5 (quello di due linee v infinitamente vicine); quindi lo spazio 3-tangente alla superficie secondo una linea v è uno S_5 e non uno S_6. Ciò si esprime con una relazione del tipo

$$(20) \qquad 3c_{12}x_{12}+c_{03}x_{03}=c_{11}x_{11}+c_{02}x_{02}+c_{10}x_{10}+c_{01}x_{01}+c_{00}x.$$

Di più, gli $S(2)$ osculatori in x e in un punto infinitamente vicino sulla v per x stanno in S_6 (quello della v per x e di due v infinitamente vicine) e non in uno S_7; perciò vale una relazione del tipo

$$(21) \qquad 3d_{21}x_{21}+3d_{12}x_{12}+d_{03}x_{03}=d_2\, x_{20}+d_{11}x_{11}+d_{02}x_{02}+\ldots.$$

Come s'è detto, rimane ancora arbitraria la scelta delle linee u. Cerchiamo se esiste un sistema di linee tali che i piani osculatori alle v in due punti infinitamente vicini di una di esse stiano in uno S_4 (e non in S_5); cioè se si può determinare $\frac{du}{dv}$ così che i punti

$$x, \quad x_{01}, \quad x_{02}, \quad x_{10}du+x_{01}dv, \quad x_{11}du+x_{02}dv, \quad x_{12}du+x_{03}dv$$

siano linearmente dipendenti.

Ciò accade evidentemente per le curve definite dall'equazione differenziale

$$c_{03}du-3c_{12}dv=0;$$

cioè esiste una curva per ogni punto della superficie avente la proprietà voluta. Scelte queste come curve u si ha $c_{03}=0$ $(c_{12}\neq 0)$; con ciò l'equazione (20) è dello stesso tipo della prima delle (19); e alla (21), con una combinazione lineare, può sostituirsi un'equazione dello stesso tipo della seconda delle (19). È così provato quanto si voleva ed è esaurito l'esame della forma canonica (19).

14. Esaminiamo il caso $b_{03}=0$, $b_{30}b_{21}\neq 0$, cioè il sistema

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{12} &= a_{20}x_{20}+a_{11}x_{11}+a_{02}x_{02}+\ldots \\ b_{30}x_{30}+3b_{21}x_{21} &= b_{20}x_{20}+b_{11}x_{11}+b_{02}x_{02}+\ldots. \end{aligned} \right.$$

Se $b_{02}\neq 0$ la superficie sta in S_7.

Supponiamo invece $b_{02}=0$. Le quasi-asintotiche $\gamma_{3,4}$ coincidono ora tutte con le linee $u(dv=0)$ e questo fatto ci fa già avvertiti che le superficie in esame, nonostante la diversa apparenza delle forme canoniche, coincidono con le precedenti, salvo che qui le $\gamma_{3,4}$ sono le linee u invece delle v. Per facilitare il confronto scambiamo nell'ultimo sistema le variabili u e v e riscriviamolo così

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{21} &= a'_{20}x_{20}+a'_{11}x_{11}+a'_{02}x_{02}+\ldots \\ 3b'_{12}x_{12}+b'_{03}x_{03} &= b'_{11}x_{11}+b'_{02}x_{02}+\ldots \end{aligned} \right. \qquad (b'_{12}b'_{03}\neq 0).$$

Si riconosce qui la forma canonica (25) del LANE: per quanto s'è visto le superficie integrali posseggono ∞^1 curve v negli S_4 di una sviluppabile, cioè appartengono alla classe 3) già trovata (n. 5).

15. Il LANE non indica affatto la natura geometrica di questa classe di superficie. Il BOWLES invece nella sua Tesi (p. 95, n. 3) cerca di determinarla ed arriva alla conclusione che le linee v sono immerse in spazi S_6 senza poi dare alcuna proprietà di questi S_6. Ora, una superficie (non di S_7) con ∞^1 curve in ∞^1 S_6 non soddisfa affatto ad un sistema del tipo, perchè questa circostanza non implica nessuna proprietà relativa all'intorno del 3° ordine di un punto della superficie; sicchè il risultato è certo sbagliato.

Ma è anche facile trovare quello giusto seguendo lo stesso metodo tenuto nel caso precedente.

Infatti dalla prima delle (23) si ha per derivazione rispetto a v

$$x_{22} = [x_{03},\ S(2)] \tag{24}$$

e dalla seconda derivando rispetto ad u e poi a v

$$x_{13} = [x_{03},\ S(2)], \quad x_{04} = [x_{03},\ S(2)] \tag{25}$$

e dalla (24) derivata rispetto a v

$$x_{23} = [x_{03},\ S(2)].$$

Se invece si deriva la prima delle (25) rispetto ad u, e se in essa comparisce un termine in x_{20}, si ottiene un'espressione di x_{23} contenente x_{30}: ciò è impossibile (per l'ipotesi dell'esistenza di *due* equazioni del 3° ordine), quindi

$$x_{13} = [x_{03},\ x_{11},\ x_{02},\ S(1)]$$

e perciò anche

$$x_{04} = [x_{03},\ x_{11},\ x_{02},\ S(1)].$$

Da queste con successive derivazioni rispetto a v segue che x_{0q}, x_{1q} con q qualsiasi appartengono allo S_5 dei 6 punti x, x_{10}, x_{01}, x_{11}, x_{02}, x_{03}. Se questo S_5 potesse individuarsi con i punti x, x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05} (qualora fossero indipendenti) dovrebbe aversi

$$x_{10} = [x,\ x_{01},\ x_{02},\ x_{03},\ x_{04},\ x_{05}]$$

quindi anche x_{20} apparterrebbe allo stesso S_5: cioè si avrebbe una relazione fra i 6 punti prima nominati e x_{20}, cioè una nuova equazione del 3° ordine, necessariamente indipendente dalle (23) contro l'ipotesi. Sicchè le curve v stanno in S_4 e due infinitamente vicine di esse nello S_5 più volte nominato.

È così nuovamente provato che le superficie integrali sono quelle della classe 3) e che il risultato del BOWLES è sbagliato; in conseguenza sono poi sbagliate le deduzioni del BOWLES sulle quasi-asintotiche appartenenti alla superficie.

Si prova poi facilmente che ogni superficie con ∞^1 linee negli S_4 di una sviluppabile soddisfa ad un sistema del tipo (23). Le linee v sono necessariamente quelle ora nominate, mentre le u sono quelle caratterizzate dalla proprietà espressa dalla prima equazione, già enunciata al n. 7.

16. Se si confrontano i risultati degli ultimi due numeri relativi alle forme canoniche (19) e (23), si vede che esse rappresentano la stessa classe di superficie: il che mette ancora in evidenza che le forme canoniche hanno un interesse secondario, e solo di strumento, rispetto alla caratterizzazione geometrica delle superficie. La diversa apparenza delle forme canoniche dipende dalla diversa scelta delle linee parametriche sulla superficie nei due casi. Le linee v sono le medesime (quelle situate negli ∞^1 S_4): differiscono invece nei due casi le linee u determinate da proprietà geometriche diverse. È interessante vedere come si passi dall'una forma all'altra.

Riferiamoci perciò alla prima forma canonica (19) e determiniamo sulla superficie quelle linee per cui le tangenti alle linee v in x e in due punti infinitamente vicini sulla linea del sistema da determinare per x stanno nello $S(2)$ osculatore in x (è questa appunto la proprietà delle linee u relative alla forma canonica (23) che vogliamo determinare a partire dalla (19)). Su una tale linea, caratterizzata dai differenziali $\frac{du}{dv}$, devono essere linearmente dipendenti i punti che definiscono $S(2)$ e il punto

$$x_{21}du^2 + 2x_{12}dudv + x_{03}dv^2.$$

Tenuto conto delle (19) si ha l'equazione differenziale delle linee cercate

$$b_{03}du^2 = 3b_{21}dv^2; \tag{26}$$

il loro carattere invariantivo è palese perchè per esse il secondo degli invarianti (7) vale $\frac{1}{3}$. V'è dunque un doppio sistema di tali linee e queste sono divise armonicamente dalle linee u, v della forma canonica (19).

Ne segue che delle due forme canoniche (19) e (23) rappresentanti la medesima classe di superficie, la prima, non considerata dal LANE, è preferibile perchè univocamente determinata dalla superficie, mentre la seconda ha lo svantaggio d'introdurre una irrazionalità ed eventualmente linee parametriche u immaginarie anche se la superficie è reale, ciò che non è affatto necessario.

17. Passiamo brevemente in rivista i casi nei quali due dei coefficienti b_{30}, b_{21}, b_{03} della seconda delle (5) sono nulli. Se $b_{30} = b_{21} = 0$ si ha il sistema (1); se $b_{30} = b_{03} = 0$ si ha il sistema (2). Se infine $b_{21} = b_{03} = 0$ si ha il sistema

$$\left\{\begin{aligned} x_{12} &= [S(2)] \\ x_{30} &= [S(2)] \end{aligned}\right. \tag{27}$$

in cui la seconda equazione ha le tre direzioni caratteristiche coincidenti. Su di essa non m'intrattengo ora perchè essa si ripresenta come caso particolare nello studio di un fascio di equazioni contenente un'equazione (almeno) con direzione caratteristica tripla, studio che ora passiamo a fare esaurendo così l'ipotesi che nel fascio esista un'equazione riducibile al tipo (4).

18. È bene dire esplicitamente, per evitare malintesi, che, escluso il caso in cui nel fascio esistano due siffatte equazioni, gli altri casi che si otterranno pur presentando aspetti diversi dal lato formale, cioè nelle forme canoniche a cui si giunge, non offrono tipi di superficie che non siano già stati incontrati. Ciò non toglie che lo studio delle stesse superficie da un punto di vista differente presenti interesse: perchè, come p. es. già accade nella teoria delle coniche o delle quadriche, forme canoniche differenti si prestano a stabilire agevolmente proprietà che sarebbe più difficile raggiungere attenendosi ad una sola di esse.

Quando nel fascio esiste una (almeno) equazione a direzione caratteristica tripla, la convenienza di assumerla come una delle due equazioni canoniche sta nel fatto che *la riduzione di essa alla forma tipica* (4) *implica la determinazione di* ***un solo*** *sistema di linee parametriche*; sicchè poi ci si potrà giovare e della scelta dell'altro sistema di linee parametriche e della scelta di un'altra equazione nel fascio per determinare nel modo più semplice la seconda equazione del sistema.

È questo un vantaggio notevole che si ha sul caso in cui non esista nel fascio un'equazione a direzioni caratteristiche tutte coincidenti.

19. Supponiamo dunque che nel fascio di equazioni del 3° ordine ve ne sia una (almeno) per cui le tre direzioni caratteristiche coincidono. Prese le linee inviluppate da queste come linee v, e lasciando affatto arbitrarie le linee u, un'equazione del fascio può sempre scriversi, come s'è detto,

$$x_{03} = a_{20}x_{20} + a_{11}x_{11} + a_{02}x_{02} + a_{10}x_{10} + a_{01}x_{01} + a_{00}x. \tag{28}$$

Questa esprime che le linee v sono quasi-asintotiche $\gamma_{2,3}$.

La seconda equazione del fascio, senza particolarizzare le linee u, può sempre scriversi

$$b_{30}x_{03} + 3b_{21}x_{21} + 3b_{12}x_{12} = b_{20}x_{20} + b_{11}x_{11} + b_{02}x_{02} + \ldots . \tag{29}$$

Se nel fascio v'è un'altra equazione a direzioni caratteristiche coincidenti, le linee inviluppate da esse possono prendersi come linee u e si ha

$$x_{30} = b_{20}x_{20} + b_{11}x_{11} + b_{02}x_{02} + \ldots \tag{30}$$ [25]

le superficie integrali stanno in S_7 o in S_8, com'è evidente.

20. Esaminiamo il caso generale $b_{30} \neq 0$. Le quasi-asintotiche della superficie $\gamma_{3,4}$ si compongono del sistema, contato due volte, delle $\gamma_{2,3}$ (linee v) e del doppio sistema rappresentato da

$$(3b_{21}^2 - b_{12}b_{30})du^2 - 4b_{21}b_{30}dudv + 2b_{30}^2dv^2 = 0.$$

È naturale assumere come linee u, non ancora determinate, quelle che dividono armonicamente in ogni punto col sistema delle $\gamma_{2,3}$ il doppio sistema delle $\gamma_{3,4}$. Con questa scelta $b_{21} = 0$; e più in particolare se le $\gamma_{3,4}$ per ogni punto coincidono (necessariamente in $\gamma_{2,3}$) $b_{12} = 0$ e si ottiene il caso particolare già segnalato.

Sicchè la forma canonica per $b_{30} \neq 0$ è

$$\begin{cases} x_{03} = \ldots \\ b_{30}x_{30} + 3b_{12}x_{12} = \ldots \end{cases} \tag{31}$$

(e in generale $b_{12} \neq 0$) di cui è inutile scrivere l'evidente interpretazione geometrica.

Si prova poi che $\dfrac{b_{30}}{b_{12}}\dfrac{dv^2}{du^2}$ è invariante (per le trasformazioni che lasciano inalterate le linee u, v) e si hanno quindi sistemi doppi di linee invarianti quali

$$b_{30}dv^2 + b_{12}du^2 = 0, \quad b_{30}dv^2 - b_{12}du^2 = 0.$$

Le superficie di questa categoria appartengono, come sottoclasse, a quelle rappresentate dal sistema (5): e precisamente sono quelle per cui dei quattro

---

(25) Il LANE impiega il Cap. II del suo lavoro per giungere a questa conclusione pressochè evidente. Le linee u, v della superficie sono quasi-asintotiche $\gamma_{2,3}$: in « D. S. I. » è già enunciato *in corsivo* (pag. 630) il fatto che se una superficie possiede un doppio sistema di $\gamma_{2,3}$ essa sta in S_8 (o in uno spazio minore). Nonostante ciò, questo sarebbe uno dei casi sfuggitimi secondo il LANE. È pure ovvio che le $\gamma_{2,3}$ assorbono tutte le $\gamma_{3,4}$.

sistemi di quasi-asintotiche $\gamma_{3,4}$ uno è doppio e dà luogo quindi ad un sistema (semplice) di $\gamma_{2,3}$ (le linee v del sistema (31) attualmente in esame). Riferendoci al sistema (3), questo caso si presenta quando $I = \frac{b_{30}^2 b_{03}}{b_{21}^3} = 1$; e viceversa quando si presenta questo fatto si ha nel fascio un'equazione a direzioni caratteristiche tutte coincidenti (che è precisamente quella assunta ora, nel sistema (31), come prima equazione).

Quando si presenta questo caso, l'ultima forma canonica (31) è preferibile all'altra (5) con la condizione dell'invariante $I = 1$, perchè mentre questa non è univocamente determinata lo è invece la (31).

Anche la forma canonica (31), come quella più generale (5), è sfuggita al LANE.

21. Esaminiamo ora l'ipotesi $b_{30} = 0$, $b_{21} \neq 0$ cioè il sistema

$$(32) \qquad \begin{cases} x_{03} = a_{20} x_{20} + \dots \\ 3b_{21} x_{21} + 3b_{12} x_{12} = b_{20} x_{20} + \dots . \end{cases}$$

Se $a_{20} \neq 0$ la superficie sta in S_7. Escluso questo caso, dev'essere $a_{20} = 0$.

Possiamo determinare sulla superficie un sistema di curve tali che le tangenti alle linee v in tre punti infinitamente vicini di una di esse stiano in un $S(2)$; questo sistema è rappresentato dall'equazione differenziale

$$b_{12} du - 2b_{21} dv = 0;$$

quindi assunte le linee di questo sistema come u (ancora non determinate) si ha $b_{12} = 0$, cioè la forma canonica

$$(33) \qquad \begin{cases} x_{03} = a_{11} x_{11} + a_{02} x_{02} + \dots \\ x_{21} = b_{20} x_{20} + b_{11} x_{11} + b_{02} x_{03} + \dots . \end{cases}$$

Questa è la forma canonica (22) o (30) del LANE per $a' = 0$ (che corrisponde al nostro $a_{20} = 0$). Ma nè il LANE nè il BOWLES determinano i caratteri di queste superficie: essi si limitano a dire che esse possono esistere in S_n con $n \geq 7$, pur scrivendone tutte le condizioni di integrabilità.

È invece facile mostrare ch'esse appartengono tutte alla nostra classe 3).

Infatti si mostra immediatamente che tutti i punti del tipo x_{0q}, x_{1q} con $q > 0$ qualsiasi stanno nello S_5 dei punti (indipendenti) x_{12}, x_{11}, x_{02}, x_{10}, x_{01}, x. E tanto basta per concludere geometricamente che due curve v infinitamente vicine stanno in S_5 e quindi (poichè non può starvi la superficie) che le curve v stanno in S_4 e che questi appartengono ad una sviluppabile.

Ma se si vuole una dimostrazione analitica di quest'ultimo fatto basta osservare che, se x, $x_{01}, \ldots, x_{05}$ fossero indipendenti, con essi si individuirebbe lo S_5 di poco fa, e quindi x_{10} sarebbe esprimibile linearmente per essi. La relazione così ottenuta derivata rispetto ad u (e tenuto conto delle precedenti) darebbe x_{20} come appartenente allo stesso S_5, cioè si avrebbe una nuova equazione del 3° ordine (del tipo $x_{12} = \ldots$) cosa esclusa, altrimenti sarebbe $S(3) \equiv S_6$. E ciò prova che le curve v stanno in S_4; e le relazioni prima stabilite che i loro S_4 appartengono ad una sviluppabile.

Sicchè anche queste superficie erano perfettamente note, appartenendo alla classe 3). Esse ne formano una sottoclasse (ottenuta dalla (23) per $b'_{12} = 0$); e ciò pure è geometricamente evidente, perchè su una superficie con ∞^1 curve negli S_4 di una sviluppabile, scelte queste come linee v, si può sempre determinare un sistema di linee u in modo da soddisfare alla seconda delle equazioni (32) ma non, in generale, alla prima: la proprietà, facile ad enunciarsi, da questa espressa caratterizza le superficie in esame fra quelle della classe 3).

Se infine $b_{30} = b_{21} = 0$ si ha il tipo (1) già trovato (salvo lo scambio du u con v).

22. In un altro lavoro ([26]) il LANE esamina le superficie integrali di 3 equazioni a derivate parziali lineari omogenee del 3° ordine. Anche qui Egli si preoccupa della riduzione a forme canoniche, ricavandone qualche conseguenza geometrica. In poche parole, utilizzando i risultati del mio lavoro in casi estremamente particolari, si esaurisce la questione.

Infatti se $S(2) \equiv S_5$ per l'esistenza delle 3 equazioni del 3° ordine si ha $S(3) \equiv S_6$; e perciò (Lemma II) o la superficie sta in S_6 o contiene ∞^1 curve negli S_3 di una sviluppabile in un ambiente qualsiasi). Siccome poi tutte le superficie di queste due classi soddisfano a 3 equazioni del tipo voluto, la ricerca è terminata.

Se invece $S(2) \equiv S_4$, caso che il LANE esclude, e si hanno 3 equazioni del 3° ordine (di cui due necessariamente derivate da una del 2°) si ha $S(3) \equiv S_5$ e perciò (Lemma II) o la superficie sta in S_5 e possiede un doppio sistema coniugato o un sistema semplice di asintotiche, oppure contiene ∞^1 curve nei piani di una sviluppabile. E siccome queste affermazioni s'invertono, non c'è altro da dire.

([26]) E. P. LANE: *Integral surfaces of triads of partial differential equations of the third order.* (« The Tôhoku Mathem. Journal », vol. 33, n.i 1 e 2; 1930).

Über die Äquivalenz und Klassifikation dynamischer Probleme

von ERWIN SCHUNTNER (Wien)

Bei der Betrachtung der Gesamtheit aller dynamischen Probleme eines bestimmten Freiheitsgrades taucht die Frage auf, ob es möglich ist, diese Gesamtheit so in Klassen einzuteilen, dass in jeder einzelnen Klasse nur solche Probleme stehen, die durch geeignete Transformationen miteinander äquivalent sind, in verschiedenen Klassen aber nur solche, für die es keine derartige Transformation gibt. Ferner ergibt sich die Frage nach dieser Klassenanzahl für jeden Freiheitsgraden und schliesslich nach dem möglichst zweckmässig gewählten Repräsentanten jeder Klasse.

Es sei vorweg bemerkt, dass man heute nicht im Stande ist, auch nur die Klassenanzahl für jeden Freiheitsgrad anzugeben, weil man noch weit davon entfernt ist, die Gruppenanzahl für jede beliebige Zahl von Variablen zu kennen, geschweige denn, die Transformationsgruppen selbst.

Im folgenden werde ich mir gestatten, einen Weg zur Beantwortung der Fragestellung zu zeigen, der, wie ich glaube, dahin führt, jeden Fortschritt in der Theorie der continuierlichen Gruppen mit einem Fortschritt im obgenannten Problem zu verknüpfen. Einleitend gebe ich eine kurze Uebersicht über die bisherigen Arbeiten und Fortschritte in dieser Frage.

1. **Historisches.** — Den Anstoss zur Fragestellung und gleichzeitig die Richtung der ganzen Entwicklung gab SOPHUS LIE mit seinen beiden Arbeiten: « Classifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Linien: Universitätsprogramm Christania 1879 » sowie « Untersuchungen über geodätische Kurven » (1). In ihnen untersucht LIE alle jene Flächen, deren geodätische Linien eine oder mehrere inf. Transformationen zulassen und stellt die zugehörigen Linienelemente auf. Es ergeben sich einige wenige Typen und damit eine Klassifikationsmöglichkeit für diese Flächengattung,

(1) « Math. Annalen », Bd. 20, 1882, S. 357-459.

indem man alle jene, die auf eine der gefundenen Typen abbildbar sind, in eine Klasse rechnet.

Zur Anwendung in der Dynamik war nur notwendig, die Dimensionszahl von ihrer Beschränkung auf $n = 2$ zu befreien, was wohl schon von LIE ins Auge gefasst, jedoch nicht durchgeführt wurde ([1]). Charakterisiert man nämlich ein dynamisches Problem durch seine Kräftefunktion $U = U(x_1, x_2, \dots x_n)$ und die lebende Kraft $\Sigma a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$ (wo $a_{ik}(x_1, x_2, \dots x_n) = a_{ki}(x_1, x_2, \dots x_n)$ ist und $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots$ die Ableitungen nach der Zeit bedeuten), so wird im Raume $R_n(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine Schar von « Trajektorien » oder « Bahnkurven des dynam. Problems » hervorgerufen. Es erweist sich unmittelbar, dass diese Trajektorien zusammenfallen mit den geodätischen Linien dieses Raumes, wenn er die Massbestimmung

$$ds^2 = (h - U) \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$$

trägt. Dabei bedeutet h eine willkürliche Konstante. Auf die Fälle $n = 2$ ([2]) und $n = 3$ ([3]) wendet STAUDE die LIE'sche Methode an.

Den allgemeinen Fall nimmt sodann P. STÄCKEL in Angriff. Sein Bestreben ist, Typen dynamischer Probleme n-ten Freiheitsgrades aufzustellen, deren Trajektorien *eine* inf. Transformation gestatten, dann solche, deren Trajektorien *zwei* inf. Transformationen gestatten u. f. s., überhaupt Typen, deren Trajektorien eine LIE'sche Gruppe gestatten. Nun ordnen sich aber die ∞^{2n-1} Trajektorien zu ∞^1 Familien von je ∞^{2n-2} züsammen, gemäss der Willkür in der Wahl des Parameters h.

STÄCKEL beginnt mit den Falle, jene dynamischen Probleme aufzustellen, deren h-Bündel von Bahnkurven ohne Rücksicht auf den Wert des h *eine* inf. Transformation zulassen ([4]) und geht in einer folgenden Note an die Vorbereitungen heran, jene Typen zu suchen, deren natürliche Bahnfamilien untereinander von inf. Transformatlonen vertauscht werden ([5]). Dieser allgemeinere

([1]) Vergleiche auch LIOUVILLE, *Sur un problème de l'Analyse, qui se rattache aux équations de la Dynamique.* (« C. R. », t. 115, 12. Sept. 1892).

([2]) STAUDE, *Ueber die Bahnkurven eines, auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche inf. Transformationen zulassen.* (Leipziger Berichte, 17. Okt. 1892, pag. 429-46).

([3]) STAUDE, *Ueber die Bahnkurven eines im Raume von 3 Dimensionen beweglichen Punktes, welche inf. Transformationen zulassen.* (Leipziger Berichte, 31. Juli 1893, pag. 511-522).

([4]) P. STÄCKEL, *Ueber dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine inf. Transformation zulassen.* (Leipzig. Berichte, 8. Mai 1893).

([5]) P. STÄCKEL, *Sur les problèmes en Dynamique, dont les équations différentielles admettent un groupe continu* (« C. R. », t. 119, S. 1723-5).

Fall wird von ihm dann noch weiter ausgeführt und schliesslich alle Typen dynamischer Probleme gefunden, deren Bahnfamilien — ohne Rücksicht auf den Freiheitsgrad — durch *ein* und *zwei*gliedrige Gruppen vertauscht werden [1].

Sind schon diese Rechnungen überaus weitläufig, so würde ein Weiterschreiten auf dem eingeschlagenen Wege auf immer grösser werdende Schwierigkeiten stossen.

Auf dieselbe Fragestellung wurde PAINLEVÉ [2] anlässlich von Untersuchungen über die Transformation der Bahngleichungen dynamischer Systeme geführt und behandelt sie eingehend in einer Arbeit « Sur les mouvements des systèmes dont les trajectoires admettent une transformation infinitésimale [3] ». Ohne alle Fragen restlos bereinigen zu können, kommt er mehrmals darauf zurück [4]. Eine abschliessende Darstellung gibt PAINLEVÉ in einer grösseren Arbeit im « Journal de Math. » [5], doch gelangt dort mehr die Transformation der Bahngleichungen zur Behandlung, während der gruppentheoretische Charakter zurücktritt.

An diese Arbeit schliessen sich zwei Publikationen von Bedeutung an: eine Abhandlung von T. LEVI-CIVITA im Jahre 1896 [6] und eine solche von GUIDO FUBINI im Jahre 1903 [7].

Was zünachst die drei FUBINI' schen Noten anlangt, so wird in der ersten von ihnen gezeigt, wie die STÄCKEL' sche Methode wesentlich vereinfacht und ihr Resultat ergänzt werden kann, so dass die Aufgabe, *mehrgliedrige* Gruppen zu bestimmen, die die ∞^1 natürlichen Familien in sich überführen (PAINLEVÉ bezeichnet dies als die « wahre Schwierigkeit ») viel von ihrer abschreckenden Weitschweifigkeit verliert. Dies macht sich in der zweiten Note bemerkbar, wo von FUBINI alle Problemtypen in drei Variablen aufgestellt und den STÄCKEL' schen (für ein-u. zweigliedrige Gruppen) noch weitere zehn angereiht

---

(1) P. STÄCKEL, *Anwendung von Lie' s Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen der Dynamik.* (Leipziger Berichte, Bd. 49, 1897, S. 411-442).

(2) P. PAINLEVÉ, *Sur les transformations en mécanique.* (« C. R. », 11. Avril 1892, S. 901-904 und « C. R. », t. 119, S. 1109-1107.

(3) P. PAINLEVÉ, « C. R. », t. 116, 16. Mai 1892, S, 21-24.

(4) P. PAINLEVÉ, « C. R. », t. 116, 3. Janvier 1893, S. 22 und « C. R. », t. 119, 15. Octobre 1894.

(5) P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les transformations en Mécanique.* (« Journal de Mathém. », serie IV, tome X, 1894).

(6) T. LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.* (« Annali di Matematica pura ed applicata », serie II, tomo XXIV, 1896).

(7) GUIDO FUBINI, *Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica.* Nota I, II, III. (« Rend. Lincei », (5), 12, [1], pag. 502-506, pag. 60-70, pag. 145-151).

werden. Auch für $n = 4$ bietet das FUBINI'sche Verfahren keine Schwierigkeit mehr.

In der dritten Arbeit bringt FUBINI allgemeine Sätze über dynamische Probleme in n Variablen, deren Lagrange-Gleichungen LIE'sche Gruppen gestatten.

Der Charakter der Untersuchungen FUBINI's ist ein rein gruppentheoretischer und setzt, an Painlevé's grosser Arbeit anknüpfend, die Entwicklung LIE, STAUDE, STÄCKEL, PAINLEVÉ fort.

Ebenfalls an PAINLEVÉ anknüpfend, jedoch nach anderer Richtung fortschreitend ist die Arbeit von LEVI-CIVITA.

PAINLEVÉ bezeichnet zwei dynamische Probleme (A) und (A_1) als « correspondierend » wenn sie gleichbahnig sind, d. h. wenn die Trajektorienschar für beide Systeme dieselbe ist und stellt über solche « gleichbahnige Systeme » eine Anzahl von Sätzen auf. LEVI-CIVITA stellt und löst nun vollständig die Aufgabe, die Bedingungen anzugeben, unter denen zwei *kräftefreie* Systeme (A) und (A_1) correspondierend sind und die weitere, für correspondierende Systeme Typen anzugeben. Anders ausgedrückt: es wird die Aufgabe gelöst, einen Raum $R_n(x_1, x_2, \dots x_n)$ geodätisch auf einen anderen Raum $R_n(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$ abzubilden.

Dabei bedient sich LEVI-CIVITA des von RICCI neu entdeckten absoluten Differentialkalküls.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Entwicklungen von PAINLEVÉ und STÄCKEL durch Benützung des Begriffs der covarianten Ableitung an Einfacheit gewinnen würden. Eine weitere formale Vereinfachung würde sich ergeben, wenn man von einer covarianten Form der Trajektorien-gleichungen ausgehen würde (1).

Mit den Arbeiten von FUBINI haben die Untersuchungen über diesen Gegenstand ihren Abschluss gefunden. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass vom Anfang an die Aequivalenzfrage dynamischer Systeme eng verknüpft war mit der Transformationstheorie der Bahnkurven im Raum mit den Koordinatem $x_1, x_2, \dots x_n$.

Aber abgesehen davon, dass in den genannten Untersuchungen nur solche mechanische Systeme herangezogen werden können, deren Lagrangefunktion von der Form $L = \sum_{ik} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - U(x)$ ist, leiden die daraus entspringenden Klas-

(1) BERWALD und P. FRANK, *Ueber eine covariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme.* (« Math. Zeitschrift », 1924).

sifikationen an der weiteren Einschränkung, dass weitaus nicht alle derartigen Systeme auch die von PAINLEVÉ und STÄCKEL vorausgesetzten Transformationseigenschaften haben. Nicht alle Systeme von Lagrange-Gleichungen gestatten LIE' sche Gruppen.

* * *

Im Folgenden machen wir den Versuch, *jedem* dynamischen Problem (mit *beliebiger* Lagrangefunktion) umkehrbar eindeutig eine LIE' sche Gruppe zuzuordnen, so dass erreicht wird:

1.) dass *alle* dynamischen Probleme in Klassen eingeteilt werden,

2.) dass mit jeder neu gefundenen Gruppe der obgenannten Art auch ein neuer Typus dynamischer Probleme aufgestellt werden kann.

Die Trajektionen im n-fach ausgedehnten Raum mit den Koordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$ (den generellen Koordinaten des Problems) bleiben ausser acht, dafür stellen wir eine Verbindung her zwischen den oben genannten Gruppen und den Trajektorien im *Phasenraum* des dynamischen Problems.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich HERRN Prof. M. RADAKOVIC in Graz, dem ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke, für das lebhafte Interesse und die zahlreichen Ratschläge danken, mit denen er das Fortschreiten der Arbeit begleitet hat.

2. **Lagrange-Aequivalenz und Hamilton-Aequivalenz.** — Ein dynamisches Problem n-ten Freiheitsgrades möge die Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \dots x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots \dot{x}_n) = L(x|\dot{x})$ besitzen. Seine Bewegung vollzieht sich gemäss den Lagrange- Gleichungen zweiter Art

$$(L) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

Ein anderes dynamisches Problem mit ebensoviel Freiheitsgraden habe die Lagrangefunktion $L'(x'|\dot{x}')$ und die Bewegungsleichungen

$$(L') \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_\nu}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x'_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

Es kann nun der Fall eintreten, dass eine nicht singuläre Punkttransformation

$$(1) \qquad x_\nu = f_\nu(x'_1 x'_2 \dots x'_n), \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

existiert, die nach ihrer Erweiterung um

$$\dot{x}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x'_\alpha} \dot{x}'_\alpha, \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

das System (L) überführt in das System (L'). Dann ist (L') mit (L) äquivalent vermöge der Transformation (1).

Man kann jedoch auch von den Hamilton'schen Differentialgleichungen der Bewegung seinen Ausgangspunkt nehmen.

Sei ein canonisches System mit der Hamiltonfunktion $H(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = H(x|p)$ vorgelegt.

$$(H) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

und ein weiteres mit der Hamiltonfunktion $H'(x'\ p')$

$$(H') \qquad \frac{dx'_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_\nu}, \quad \frac{dp'_\nu}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial x'_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

Aus der Hamilton-Jacobi'schen Theorie ist bekannt, dass es stets, wie auch H und H' beschaffen sein mögen, eine Berührungstransformation

$$(2) \qquad \begin{gathered} x_\nu = X_\nu(x'_1 x'_2 \dots x'_n,\ p'_1,\ p'_2, \dots p'_n) \\ p_\nu = P_\nu(x'_1 x'_2 \dots x'_n,\ p'_1,\ p'_2, \dots p'_n) \\ (\nu = 1, 2, \dots n) \end{gathered}$$

mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante gibt, die (H) in (H') überführt. Um sie zu finden, hat man die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung

$$H\left(x \left| \frac{\partial W}{\partial x}\right.\right) = H'\left(x' \left| \frac{\partial W}{\partial x'}\right.\right)$$

vermöge einer Funktion W (die auch von willkurlichen Konstanten abhängen wird) zu integrieren und

$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial x_\nu}, \quad p'_\nu = -\frac{\partial W}{\partial x'_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

zu setzen. Die Auflösung dieser $2n$ Gleichungen nach den x_ν und p_ν liefert die Berührungstransformation (2). Die Systeme $(H$ und (H') sind *stets* durch eine Berührungstransformation äquivalent. Es erhebt sich nun die Frage: wenn die Gleichungen (H) dasselbe mechanische System repräsentieren, wie die Gleichungen (L), wenn anderseits (H') und (L') ebenfalls untereinander dasselbe mechanischen System charakterisieren: welche Bedingungen ergeben sich für die Transformationen (2), falls eine Transformation (1) existiert, bezw. falls dies nicht zutrifft?

Damit das Hamilton-System (H) dasselbe dynamische Problem charakterisiere wie das Lagrange-System (L), ist das Bestehen der Bindungsgleichungen

$$(\overline{B}) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} = p_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

$\left(\text{mit nicht identisch verschwindender Determinante } \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\right|\right)$ notwendig und hinreichend. Lagrangefunktion und Hamiltonfunktion stehen in der Beziehung

$$(3) \qquad H(x \ p) = (\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \dot{x} - L)_{p_1, p_2, \dots p_n}$$

wo die Indizes $p_1, p_2, \dots p_n$ an der Klammer andeuten, dass vermöge ($\overline{B}$) die $\dot{x}_\nu$ durch die p ersetzt sind.

Dasselbe gilt auch für die Systeme (H') und (L'). Auch zwischen ihnen müssen, wenn durch sie ein und dasselbe dynamische Problem charakterisiert werden soll, Bindungsgleichungen

$$(\overline{B}') \qquad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_\nu} = p'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

bestehen $\left(\text{mit } \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}'_i \partial \dot{x}'_k}\right| \neq 0\right)$. Zwischen Lagrangefunktion und Hamiltonfunktion besteht die Gleichung

$$(4) \qquad H'(x' \,|\, p') = (\sum_{\nu=1}^{n} p'_\nu \dot{x} - L')_{p'_1, p'_2, \dots p'_n}.$$

Wir machen nun die Annahme, dass (L) und (H) *ein und dasselbe* dynamische Problem (P) repräsentieren, andererseits durch (L') und (H') ebenfalls *ein* dynamisches Problem, und zwar ein anderes, (P'), charakterisiert werde. Welche Bedingungen ergeben sich für die Transformation (2), wenn eine Transformation (1) vorhanden ist, die (L) in (L') überführt? Offenbar wird die gesuchte Berührungstransformation (2) erhalten, indem man (1) zunächst erweitert.

$$x_\nu = f_\nu(x')$$
$$\dot{x}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial x'_\alpha} \dot{x}'_\alpha$$
$$(\nu = 1, 2, \dots n)$$

und für die $\dot{x}_\nu$ und $\dot{x}'_\nu$ vermöge (B') und (B) bezw. die Variablen p' und p einführt. Seien die Umkehrungsgleichungen von (B)

$$\dot{x}_\alpha = \Lambda_\alpha(x \mid p) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

und die Umkehrungsgleichungen von (B')

$$\dot{x}'_\alpha = \Lambda'_\alpha(x' \mid p') \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n).$$

Die gesuchte Berührungstransformation wird demnach von der Form sein

$$x^\nu = f_\nu(x')$$
$$\Lambda_\nu(x \mid p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial x'_\alpha} \Lambda'_\alpha(x' \mid p')$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n).$$

In übersichtlicherer Weise erhält man die Bedingung, der (2) zu unterwerfen ist, wenn man, — was genau dasselbe bedeutet, — fordert, dass die Transformation nicht nur (H) in (H'), sondern auch noch (B) in (B') überführe.

Wir definieren nun den Begriff « Hamilton-Aequivalenz » zweier dynamischer Probleme:

Definition: Zwischen zwei dynamischen Problemen besteht dann und nur dann Hamilton-Aequivalenz, wenn es eine Berührungstransformation gibt, die sowohl (H) *in* (H') *als auch* (B) *in* (B') *überführt. Zwei solche Probleme sind alsdann dynamisch nicht wesentlich verschieden und werden in dieselbe Klasse gerechnet.*

Aus dieser Forderung ergibt sich zunächst die Form der gesuchten Transformation. Damit sie (H) in (H') überführe, muss man offenbar fordern, dass sie

$$H(x \mid p) = H'(x' \mid p') \tag{5}$$

identisch erfülle. Damit sie weiters (B) in (B') überführe, hat man noch

$$L(x \mid \dot{x}) = L'(x' \mid \dot{x}') \tag{5a}$$

zu fordern. Daraus folgt aber: Die gesuchte Berührungstransformation enthält eine Punkttransformation

$$x'_\nu = \varphi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Weiters ist aus (5a) wegen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{x}_\alpha - H = \sum_{\alpha=1}^{n} p'_\alpha \dot{x}'_\alpha - H'$$

und $H \doteq H'$ auf

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} p'_\alpha dx'_\alpha \tag{6}$$

zu schliessen. Wird $dx'_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} dx_i$ in diese Forderung (6) eingetragen, so ergibt sich aus der Willkürlichkeit der dx die Beziehung

$$p_\nu = \sum_{\alpha-1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\nu} p'_\alpha \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Die Berührungstransformationen, die Hamilton-Aequivalenz vermitteln, sind demnach erweiterte Punkttransformationen

$$\begin{gathered} x'_\nu = \varphi_\nu(x) \\ p_\nu = \sum_{\alpha\ 1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\nu} p'_\alpha \\ (\nu = 1, 2, \ldots n). \end{gathered} \tag{7}$$

Die Situation ist also die: haben zwei dynamische Probleme (P) und (P') die Lagrange-Gleichungen (L) und (L'), und gibt es eine Punkttransformation (1), die diese Gleichungen ineinander überführt, so führt die zugehörige erweiterte Punkttransformation (7) die entsprechenden Hamiltonsysteme (H) und (H') ineinander über. Umgekehrt: existiert eine Berührungstransformation der Form (7), die (H) in (H') transformiert, so kennt man auch die Punkttransformation, die die zugehörigen Lagrange-Gleichungen ineinander transformiert. Dann, aber auch nur dann sind dynamischen Probleme (H) und (H') dynamisch gleichwertig und kommen in dieselbe Klasse.

Ein Kriterium dafür gibt der folgende Satz:

THEOREM. *Um zu entscheiden, ob zwischen den dynamischen Problemen* (P) *und* (P') *mit den Hamiltongleichungen* (H) *und* (H') *Hamilton'sche Aequivalenz besteht oder nicht, ob also* (P) *und* (P') *zur selben Klasse gehören oder nicht, hat man zu untersuchen, ob die Gleichung*

$$H(x \mid p) = H'(x' \mid p')$$

durch eine Transformation der Form

$$x'_\nu = \varphi_\nu(x), \quad p_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\nu} p'_\alpha$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

identisch befriedigt werden kann oder nicht. Dann und nur dann, wenn dies der Fall ist, zählen (P) *und* (P′) *zur selben Klasse.*

Gleichbedeutend damit ist die Formulierung:

Um zu entscheiden, ob zwischen den dynamischen Problemen (P) *und* (P′) *Hamilton'sche Aquivalenz besteht oder nicht, hat man das System von Gleichungen*

$$H(x\,|\,p) - H'(x'\,|\,p') = 0$$
$$x'_\nu - \varphi_\nu(x) = 0$$
$$p_\nu - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\nu} p'_\alpha = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

auf seine Widerspruchslosigkeit zu untersuchen. Ist das System widerspruchsfrei, dann allein gehören (P) *und* (P′) *zur selben Klasse.*

3. **Die zu einem dynamischen Problem gehörige Gruppe.** — Jedes dynamische Problem lässt sich durch eine bestimmte Gruppe von canonischen Berührungstransformationen charakterisieren.

Im Phasenraum $R_{2n}(x\,|\,p)$ des Systems vollzieht jeder Punkt gemäss (H) längs der « Bahnkurven » eine Bewegung. Diese Trajektorien sind durch die lineare, partielle Differentialgleichung

$$(Hf) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right) = 0 \tag{8}$$

definiert. Eine Transformation, die (H) in sich überführt, führt auch die Schar der Trajektorien im Phasenraum in sich über. Die einzelnen Bahnkurven werden dabei vertauscht, die Gesamtheit als solche bleibt unverändert. Eine solche Transformation führt $(Hf) = 0$ im sich über, oder, anders ausgedrückt, die Gleichung (8) gestattet diese Transformation.

Es wird eine Transformation sein, die x und p transformiert, also eine canonische Transformation. Ist sie infinitesimal, so kann sie aus einer « charakteristischen Funktion » abgeleitet werden. Sie ist von der Form

$$x'_\nu = x_\nu + \frac{\partial W}{\partial p_\nu}\delta\tau, \quad p'_\nu = p_\nu - \frac{\partial W}{\partial x_\nu}\delta\tau$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

wo $\delta\tau$ eine infinitesimale Grösse und W die von den x und p abhängende charakteristische Funktion ist.

Ihr Symbol ist

$$Wf = (Wf) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial W}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right).$$

Die Funktion W ist dabei ganz beliebig angenommen. Ist sie eine homogene Funktion der p, so hat man es mit einer inf. homogenen Berührungstransformation zu tun, ist sie *linear* homogen in den p, so repräsentiert Wf eine erweiterte Punkttransformation.

Damit nun die inf. canonische Berührungstransformation Wf die Schar der Bahnkurven im Phasenraum invariant lasse, ist notwendig und hinreichend, dass eine Beziehung der Form

$$W(Hf) - H(Wf) = \rho(x\,|\,p)Hf$$

bestehe, worin $\rho(x\ p)$ eine Funktion von x und p darstellt.

Man findet durch Rechnung unmittelbar

$$W(Hf) - H(Wf) = \sum_{\alpha-1}^{n} \left(\frac{\partial(WH)}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial(WH)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right)$$

und ersieht daraus, dass der Bedingung nur Genüge getan werden kann, wenn man, unter k eine Konstante verstanden, setzt

$$(WH) = kH.$$

$\rho(x\,|\,p)$ hat also den Wert k. Für $k = 0$ besagt die Gleichung

$$WH = 0,$$

dies bedeütet, dass W ein zeitfreies Integral des Problems (H), oder der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (Hf) = 0$$

ist.

Bedeuten die Gleichungen

$$H_i(x\,|\,p) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots 2n - 1)$$

$2n - 1$ erste, voneinander unabhängige, zeitfreie Integrale des Systems, so gestattet die Schar der Bahnkurven im Phasenraum die $2n - 1$ — gliedrige Gruppe $(H_1 f) \ldots (H_{2n-1} f)$. Unter den Gleichungen $H_i = c_i$ ist auch das Energieintegral $H = c$ vertreten. Es sei etwa $H_{2n-1} = H$, sodass also die Relationen bestehen müssen:

$$H_i(H_k f) - H_k(H_i f) = \sum_{s=1}^{2n-1} c_{ik}^{s}(H_s f)$$

$$(i,\ k = 1,\ 2, \ldots 2n - 2)$$

und (c_{ik}^{s} Konstanten)

$$H_i(H_{2n-1}f) - H_{2n-1}(H_i f) = H_i(Hf) - H(H_i f) = 0.$$

Da $(i = 1, 2, \dots 2n-1).$

$$H_i(H_k f) - H_k(H_i f) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial(H_i H_k)}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial(H_i H_k)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right)$$

für jedes i und k ist, folgen die Beziehungen

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (H_i H_k) = \sum_{s=1}^{2n-1} c_{ik}^{s} H_s \\ (i, k = 1, 2, \dots 2n-2) \\ (H_i H) = 0, \quad \text{für alle } i \end{array} \right.$$

Aus der Transformationsgruppe ist also eine Funktionengruppe ableitbar und zwar jene der zeitfreien Integrale. Sie besitzt die Struktur (9).

Die $2n-1$ gliedrige Gruppe mit den charakteristischen Funktionen $H_1(x|p)$, $H_2(x|p) \dots H_{2n-1}(x|p)$ charakterisiert das dynamische Problem vollständig. Es ist aber auch das Umgekehrte davon der Fall. Zu jedem dynamischen Problem gehört nur *eine* Gruppe der geschilderten Art. Der Nachweis kann etwa in folgender Weise erbracht werden mit Hilfe eines Theorems aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

Man betrachte die partielle Differentialgleichung

$$Xf \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Sie möge die infinitesimale Transformation

$$Af \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

derart gestatten, dass

$$(a) \qquad X(Af) - A(Xf) = 0$$

werde. In diesem Falle besteht für die Funktionen ξ das Differentialsystem

$$X_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} + \dots X_n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} = \xi_1 \frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial X_i}{\partial x_n},$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

nämlich die POINCARÉ'schen « Variationsgleichungen ».

Es besteht nun das Theorem:

Stellt die Gesamtheit der n *Funktionen* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *eine der* n — 1 *Fundamentallösungen der Variationsgleichungen dar, so besitzt jede andere Lösung die Form*

$$\xi_1 + \lambda X_1, \quad \xi_2 + \lambda X_2, \ldots \xi_n + \lambda X_n,$$

wo λ *eine willkürliche Funktion von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *bedeutet.*

Die allgemeinste Form einer inf. Transformation, die die partielle Differentialgleichung gestattet, so dass eine Gleichung der Bauart (a) erfüllt ist, ist demnach

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Auf canonische Systeme angewendet, liefert dieser Satz den Nachweis, dass zu jedem dynamischen Problem nur *eine* Gruppe gehören kann. Denn die Variationslösungen haben die Form

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H_1}{\partial p_n}, -\frac{\partial H_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial H_1}{\partial x_2}, \ldots -\frac{\partial H_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial H_2}{\partial p_1}, \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H_2}{\partial p_n}, -\frac{\partial H_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial H_2}{\partial x_2}, \ldots -\frac{\partial H_2}{\partial x_n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial H_{2n-1}}{\partial p_1}, \frac{\partial H_{2n-1}}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H_{2n-1}}{\partial p_n}, -\frac{\partial H_{2n-1}}{\partial x_1}, -\frac{\partial H_{2n-2}}{\partial x_2}, -\frac{\partial H_{2n-1}}{\partial x_n},
\end{array}$$

jede weitere kann daher nur das Aussehen

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1} + \lambda \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial H_i}{\partial p_n} + \lambda \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H_i}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots -\frac{\partial H_i}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial H}{\partial x_n}$$

haben.

$$Tf \equiv \sum_{\alpha\ 1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_\alpha} + \lambda \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_\alpha} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}\right) \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right\}$$

ist demnach die allgemeinste inf. Transformation, die das canonische System gestattet.

Damit ist der geforderte Nachweis erbracht: zu jedem dynamischen Problem gehört wesentlich *eine* Gruppe von canonischen Transformationen, der oben beschriebenen Art. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $\mathfrak{G}_n$.

Die Strukturgleichungen (9) haben ein gewisses historisches Interesse. Jacobi kannte diese Beziehungen lediglich an den allgemeinen Integralen des Mehrkörperproblems, d. h. am Energieintegral, den drei Flächen-und sechs Schwerpunktsätzen.

Diese Integrale, die er « von generellem Habitus » nennt, bilden einen Cyclus, d. h. durch Bildung des Poisson'schen Klammerausdruckes erhält man stets nur ein Integral dieses Inbegriffes (oder die Null). Die übrigen Integrale des Problems wären nach JACOBI dem Problem individuell und hätten einen zweiten Cyclus zu bilden. Die ganze Anstrengung sollte daher darauf gerichtet sein, wenigstens *ein* dem Problem individuelles Integral aufzufinden (1).

Es ist interessant zu sehen, warum es bein Mehrkörperproblem gelingt, gerade zehn Integrale so überaus einfach anzugeben. Diese Frage ist von F. ENGEL zuerst beantwortet worden. Man kann nämlich zeigen, dass gerade der Umstand, dass die Differentialgleichungen des Mehrkörperproblems die zehngliedrige Galileigruppe gestatten, auf die zehn allgemeinen Integrale führt (2).

Was jedoch die Bemerkung Jakobi's anlangt, ist sie offenbar in folgender Weise zu modifizieren: Die zeitfreien Integrale $H_i = c_i (i = 1, 2, \ldots, 2n - 1)$ geben Veranlassung zu einer $2n - 1$ gliedrigen Gruppe von canonischen Transformationen, deren allgemeinste Form sich vermöge

$$\mathcal{H} f = \sum_{\alpha=1}^{2n-1} l_\alpha H_\alpha f$$

darstellt, worin die l_α Konstanten bedeuten. Gibt es nun, unter $l_{\alpha\beta}$ wieder Konstanten verstanden, r inf. Transformationen

$$\mathcal{H}_\alpha f = \sum_{\beta=1}^{2n-1} l_{\alpha\beta} H_\beta f$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

derart, dass

$$(\mathcal{H}_i \mathcal{H}_k) f = \sum_{s=1}^{r} C_{ik}^s \mathcal{H}_s f$$

(C_{ik}^s Konstanten), so bilden die Transformationen $\mathcal{H}_\alpha$ eine r-gliedrige Untergruppe von $\mathcal{G}_n$ und solche Untergruppen sind es, die Jacobi'sche Integralzyclen herbeiführen. Dabei kann die Zerfällung des Problems in Integralzyklen eine recht komplizierte sein. Man kann mit Hilfe der Poisson'schen Klammeroperation im Allgemeinen die sämtlichen Integrale des Systems auch dann

(1) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik.* 2 Ausgabe, pag. 269.

(2) F. ENGEL, *Ueber die zehn allgemeinen Integrale der class. Mechanik.* (« Gött. Nachr. », 1916, S. 270-275).

nicht erschöpfen, wenn man *ein* oder mehrere « individuelle » Integrale kennt. Denn wenn diese Integrale einer Untergruppe von $\mathcal{G}_n$ angehören, so kann man über sie nicht hinausgehen.

Eine solche Untergruppe bildet z. B. die Gruppe der eüklidischen Drehungen und dies ist der Grund, warum man durch Bildung der Poisson'schen Klammer zwischen zwei Flächenintegralen stets wieder ein Flächenintegral erhält.

4. **Aequivalenz dynamischer Systeme.** — Da jedem dynamischen Problem n-ten Freiheitsgrades (P) eine Gruppe $\mathcal{G}_n$ von canonischen Berührungstransformationen zugeordnet werden kann, so kommt die Aufgabe, alle von einander wesentlich verschiedenen Problemtypen zu bestimmen, darauf hinaus, alle Gruppen der genannten Art in den $2n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ zu bestimmen, die nicht durch erweiterte Punkttransformationen miteinander ähnlich sind und deren inf. Transformationen mit *einer* in Involution liegen. Es besteht also folgendes.

THEOREM: *Um alle wesentlich verschiedenen dynamischen Probleme* n-*ten Freiheitsgrades aufzufinden, hat man folgendermassen vorzugehen:*

1.) *Man stellt zunächst alle* 2n — 1 *gliedrigen Gruppen canonischer Transformationen auf, die nicht miteinander durch eine Punkttransformation ähnlich sind.*

2.) *Unter ihnen scheidet man jene Gruppen aus, deren inf. Transformation man nicht eine solche Form erteilen kann, dass alle* 2n — 1 *mit einer unter ihnen in Involution liegen.*

Ist dies gelungen, so ist die charakteristische Funktion der letztgenannten inf. Transformation die Hamiltonfunktion eines dynamischen Problems.

Das die Zeit enthaltende Integral kann man stets durch eine Quadratur finden. Dazu benötigt man, wenn es in seiner symmetrischen Form angewendet wird [1] nur Differentiationen, nicht Eliminationen.

---

[1] DE DONDER, « C. R. », 10 Février 1913; E. SCHUNTNER, « Monatshefte für Math. u. Phys. », Bd. XXXVI, S. 296.

INDICE DEL TOMO IX DELLA SERIE 4ª