N° D'ORDRE
217.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ J.-C. FORTOUL.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — Sur les oscillations d'un mobile. sollicité par plusieurs centres d'attraction fixes.

THÈSE D'ASTRONOMIE. — Sur les figures d'équilibre des liquides planétaires.

Soutenues le 14 Février 1859 devant la Commission d'Examen.

MM. DELAUNAY, *Président.*
LIOUVILLE, PUISEUX, } *Examinateurs.*

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1858.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES.	BIOT.	
	PONCELET.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DESPRETZ	Physique.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	PAYER	Botanique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	MASSON	Sciences physiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
	DUCHARTRE	Sciences naturelles.
SECRÉTAIRE	E. PREZ-REYNIER.	

A MONSIEUR L'ABBÉ BONDIL,

Chanoine théologal de Digne, mon maître de langues orientales.

Hommage de reconnaissance et de profonde vénération.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR LES OSCILLATIONS D'UN MOBILE, SOLLICITÉ PAR PLUSIEURS CENTRES D'ATTRACTION FIXES.

AVANT-PROPOS.

Ce travail sera consacré, presque tout entier, à l'étude d'un seul problème de mécanique rationnelle dont voici l'énoncé : Un mobile, sollicité par un nombre quelconque de centres fixes d'attraction, qui agissent suivant la loi de la nature, est légèrement dérangé d'une position d'équilibre *stable* : on demande la loi des petites oscillations qu'il exécute pour y revenir.

Après avoir établi les trois équations du problème, qui sont de la forme

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + Ax + By + Cz = 0,$$

A, B, C étant des constantes, je cherche si l'on ne pourrait pas les ramener toutes trois à la forme plus simple

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + Pu = 0,$$

P étant positif.

Cette forme offrirait un triple avantage : 1° de permettre d'intégrer les trois équations du mouvement, indépendamment les unes des autres; 2° de faire voir qu'il existerait, si elle était possible, des systèmes d'axes, par rapport auxquels les oscillations seraient périodiques comme celles d'un pendule; 3° de prouver directement, à la seule inspection des intégrales obtenues, qu'elles représenteraient bien réellement le mouvement d'un mobile légèrement dérangé d'une position d'équilibre *stable* : car l'intégrale de (2)

$$(3) \qquad u = E\sin\left(\sqrt{P}\,t + \varepsilon\right)$$

indique bien que u ne peut devenir infini, quel que soit t.

Or il existe un système d'axes coordonnés, mais un seul, qui permet de réduire l'équation (1) à la forme (2). Les calculs que je développe pour établir ce fait présentent le polynôme P sous une forme telle, que son signe + ressort tout de suite de l'hypothèse de la stabilité de l'équilibre d'où je suis parti. Ces deux points établis, les trois avantages, signalés ci-dessus, sont obtenus et la solution complète s'achève d'elle-même.

Je reprends ensuite le problème par la méthode ordinaire que proposent les traités de calcul intégral pour l'intégration des équations simultanées à l'aide de l'introduction de paramètres arbitraires. En suivant pas à pas cette méthode, je montre combien elle est inférieure à la précédente pour éclaircir les difficultés du problème. Enfin, je cherche la signification des paramètres arbitraires qui ont été introduits, et, chose remarquable, cette recherche me ramène au système d'axes coordonnés qui m'ont permis de mettre les équations du mouvement sous la forme (2).

Chacune des deux méthodes que j'ai employées s'éloigne de la méthode proposée par Lagrange (t. I^{er}, p. 320, 3^{e} édition) pour la solution des problèmes analogues à celui que j'ai traité. J'ai dû, en quelque sorte, me justifier d'être sorti de la voie tracée par le grand géomètre. C'est pourquoi j'ai établi, en tête de mon travail, les équations générales du mouvement d'un système de corps, légèrement écartés d'une position d'équilibre stable, et je démontre, à la fin, qu'en appliquant à ces équations la seconde méthode d'intégration que j'ai employée, on arrive à la véritable forme des intégrales générales, telle que l'a donnée *Lagrange*, et d'une manière très-simple et très-rigoureuse.

Équations différentielles du mouvement d'un système de points matériels très-peu écartés de leurs positions d'équilibre stable.

Lorsqu'un système de points matériels en mouvement est soumis à des liaisons, exprimées par des équations qui ne contiennent pas explicitement le temps, on sait que le principe des forces vives donne

$$(1) \qquad d\sum mv^2 = 2\sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Supposons maintenant qu'à une époque quelconque le système passe par une position dans laquelle les forces motrices se fassent équilibre, ou telle que les points matériels resteraient en repos sous l'action de ces forces, si ces points n'avaient pas de vitesses acquises, on aura alors, par le principe des vitesses virtuelles,

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \tag{2}$$

pour tous les déplacements virtuels, compatibles avec l'état du système. Mais dans le cas où nous nous plaçons, on peut prendre

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \ldots;$$

donc l'on aura aussi

$$\sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0, \tag{3}$$

et de là

$$d\sum mv^2 = 0;$$

c'est-à-dire que $\sum mv^2$ sera ordinairement un maximum ou un minimum.

Mais la réciproque n'est pas vraie en général; $\sum mv^2$ peut être un maximum ou un minimum sans qu'il y ait équilibre; car

$$d\sum mv^2 = 0$$

entraîne, il est vrai, l'équation (3), mais (3) n'entraîne pas (2), excepté lorsque le système est à liaisons complètes, cas auquel, comme on sait, on peut toujours faire

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz.$$

Ainsi lorsque $\sum mv^2$ devient un maximum ou un minimum, il n'y a pas nécessairement équilibre. Mais, *si l'équilibre existe*, on démontre que dans le cas du maximum il est stable, que dans le minimum il est instable.

Si nous posons

$$\int \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = T, \tag{3 bis}$$

nous pouvons dire que, lorsque T est maximum, l'équilibre, *s'il existe*, est stable; que lorsque T est minimum, l'équilibre, *s'il existe*, est instable.

Quand les forces, qui agissent sur les points du système, sont des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles, ou qu'elles sont dirigées vers les centres fixes, on sait que

$$\sum (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

est une différentielle exacte. Appelons $\varphi(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots)$ l'intégrale

$$\int \sum (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz),$$

il viendra

$$\int \sum (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \varphi(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots).$$

Soit n le nombre des points matériels du système. Il y aura $3n$ coordonnées, si ν est le nombre des équations qui expriment les liaisons, ν de ces coordonnées pourront s'exprimer en fonction des $3n - \nu$ autres, qui seules seront des variables indépendantes. Appelons ces dernières a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc., et conservons pour les premières les lettres ξ, η, ζ, etc., nous aurons, au lieu de l'équation précédente,

$$\int \sum (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \varphi(a,\ b,\ c,\ a, b, c, \ldots). \tag{4}$$

Si nous nous bornons au cas où l'équilibre existe, on a en même temps

$$\sum (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z) = 0. \tag{5}$$

De l'équation (4) on déduit

$$\sum (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z) = \delta\varphi(a, b, c,\ a, b, c, \ldots). \tag{6}$$

Si maintenant nous marquons de l'indice o les valeurs des diverses quantités qui entrent dans nos formules, et qui correspondent à la position d'équilibre, il viendra

$$\int \sum (\mathrm{X}_0\,dx_0 + \mathrm{Y}_0\,dy_0 + \mathrm{Z}_0\,dz_0) = \varphi(a_0, b_0, c_0, \ldots);$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum (\mathrm{X}_0\,\delta x_0 + \mathrm{Y}_0\,\delta y_0 + \mathrm{Z}_0\,\delta z_0) = \sum (\mathrm{X}_0\,dx_0 + \mathrm{Y}_0\,dy_0 + \mathrm{Z}_0\,dz_0) \\ &= \delta\varphi(a_0, b_0, c_0, \ldots) = \frac{d\varphi}{da_0}\delta a_0 + \frac{d\varphi}{db_0}\delta b_0 + \frac{d\varphi}{dc_0}\delta c_0 + \ldots = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Pendant le mouvement, on aura

$$\sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{X}\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-\mathrm{Y}\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-\mathrm{Z}\right)\delta z\right]=0;$$

d'où

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\\&=\sum(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z)=\delta\varphi(a,\,b,\,c,\ldots),\end{aligned}\right.$$

d'après ce que l'on a trouvé ci-dessus (6).

Le premier membre de l'équation précédente se rapporte à tous les points du système, et nous avons déjà dit que ν, des $3n$ coordonnées qu'il renferme, s'expriment en fonctions des $3n-\nu$ autres qui ont été désignées par $a,\,b,\,c,\ldots$. Il suffira donc, dans ce premier membre, pour le traduire complétement en $a,\,b,\,c,\ldots$, de transformer en ces dernières coordonnées les ν coordonnées dépendantes, auxquelles nous avons spécialement affecté, au pied de la page précédente, les désignations ξ,η,ζ, etc.

Nous avons désigné plus haut par $a_0,\,b_0,\,c_0,\ldots$, les valeurs des coordonnées indépendantes pour la position d'équilibre. Supposons maintenant que nous déplacions un peu, mais très-peu, les points de leurs positions d'équilibre, puis que nous les abandonnions à eux-mêmes, avec des vitesses initiales très-petites, ces points exécuteront de petites oscillations, autour de leurs positions d'équilibre, dont ils ne s'écarteront jamais beaucoup.

Pendant le mouvement, on aura donc

$$a=a_0+\alpha,\quad b=b_0+\beta,\quad c=c_0+\gamma,\ldots,$$

et α, β, γ resteront toujours très-petites.

Quant aux coordonnées dépendantes $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ldots$, fonctions de $a,\ b,\ c,$ $a_1,\ b_1,\ c_1,\ldots$, elles sont de la forme

$$\begin{aligned}\xi&=f(a,\,b,\,c,\ldots),\\ \eta&=f_{(1)}(a,\,b,\,c,\ldots),\\ \zeta&=f_{(2)}(a,\,b,\,c,\ldots),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Donc lorsque nous remplacerons $a,\,b,\,c,\ldots$ par $a_0+\alpha,\ b_0+\beta,\ c_0+\gamma,\ldots,$

il viendra

$$\xi = \xi_0 + \left(\frac{df}{da}\right)_0 \alpha + \left(\frac{df}{db}\right)_0 6 + \left(\frac{df}{dc}\right)_0 \gamma + \ldots,$$

$$\eta = \eta_0 + \left(\frac{df_{(1)}}{da}\right)_0 \alpha + \left(\frac{df_{(1)}}{db}\right)_0 6 + \left(\frac{df_{(1)}}{dc}\right)_0 \gamma + \ldots,$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{df_{(2)}}{da}\right)_0 \alpha + \left(\frac{df_{(2)}}{db}\right)_0 6 + \left(\frac{df_{(2)}}{dc}\right)_0 \gamma + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme les dérivées, marquées de l'indice o, sont des constantes, je les remplacerai, pour abréger, par une lettre unique; j'aurai ainsi, au lieu des expressions précédentes,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\xi = \xi_0 + \mathcal{E}_1 \alpha + \mathcal{E}_2 6 + \mathcal{E}_3 \gamma + \ldots, \\
\eta = \eta_0 + \mathcal{F}_1 \alpha + \mathcal{F}_2 6 + \mathcal{F}_3 \gamma + \ldots, \\
\zeta = \zeta_0 + \mathcal{G}_1 \alpha + \mathcal{G}_2 6 + \mathcal{G}_3 \gamma + \ldots, \\
\xi_1 = \xi_{01} + \mathcal{E}'_1 \alpha + \mathcal{E}'_2 6 + \mathcal{E}'_3 \gamma + \ldots, \\
\eta_1 = \eta_{01} + \mathcal{F}'_1 \alpha + \mathcal{F}'_2 6 + \mathcal{F}'_3 \gamma + \ldots, \\
\zeta_1 = \zeta_{01} + \mathcal{G}'_1 \alpha + \mathcal{G}'_2 6 + \mathcal{G}_3 \gamma + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Quant à $\varphi(a, b, c, \ldots)$, il devient, dans le mouvement,

$$\begin{aligned}
\varphi(a_0 + \alpha, b_0 + 6, c_0 + \gamma, \ldots) &= \varphi(a_0, b_0, c_0) + \left(\frac{d\varphi}{da}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)_0 6 + \left(\frac{d\varphi}{dc}\right)_0 \gamma \\
&+ \frac{1}{1.2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 \alpha^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 6^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 \gamma^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{da\,db}\right)_0 \alpha 6 \\ + 2\left(\frac{d^2\varphi}{da\,dc}\right)_0 \alpha\gamma + 2\left(\frac{d^2\varphi}{db\,dc}\right)_0 6\gamma^2 + \ldots \end{array}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \varphi(a_0, b_0, c_0) + \frac{1}{1.2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 \alpha^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 6^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 \gamma^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{da\,db}\right)_0 \alpha 6 \\ + 2\left(\frac{d^2\varphi}{da\,dc}\right)_0 \alpha\gamma + 2\left(\frac{d^2\varphi}{db\,dc}\right)_0 6\gamma^2 + \ldots \end{array}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

à cause de l'équation (7).

Nous supposons ici que les déplacements α, 6, γ sont très-petits; alors les termes du troisième ordre peuvent être négligés devant ceux du second, et nous ne nous occuperons plus du reste.

Cela dit, nous aurons

$$\begin{aligned}\delta\varphi(a, b, c\ldots) = {} & \left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 \alpha\delta\alpha + \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 \beta\delta\beta + \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 \gamma\delta\gamma + \left(\frac{d^2\varphi}{dadb}\right)_0 (\alpha\delta\beta + \beta\delta\alpha) \\ & + \left(\frac{d^2\varphi}{dadc}\right)(\alpha\delta\gamma + \gamma\delta\alpha) + \left(\frac{d^2\varphi}{dbdc}\right)(\beta\delta\gamma + \gamma\delta\beta).\end{aligned}$$

Si maintenant, à l'aide des équations (9), nous calculons les $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta, \ldots)}{dt^2}$ et les $\delta(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, que nous portions les valeurs trouvées, dans le premier membre de l'équation (8), il est clair que ce premier membre prendra, en mettant les $\delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ en facteurs communs, la forme

$$\sum m \left\{ \begin{array}{l} \delta\alpha \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{F}_1^2 + \mathcal{G}_1^2 + \ldots)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + (\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + \mathcal{G}_1\mathcal{G}_2 + \ldots)\frac{d^2\beta}{dt^2} \\ + (\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3 + \mathcal{F}_1\mathcal{F}_3 + \mathcal{G}_1\mathcal{G}_3 + \ldots)\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots \end{array} \right] \\ + \delta\beta \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}_2^2 + \mathcal{F}_2^2 + \mathcal{G}_2^2 + \ldots)\frac{d^2\beta}{dt^2} + (\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1 + \mathcal{G}_2\mathcal{G}_1 + \ldots)\frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ + (\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_3 + \mathcal{G}_2\mathcal{G}_3 + \ldots)\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots \end{array} \right] \\ + \delta\gamma \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}_3^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{G}_3^2 + \ldots)\frac{d^2\gamma}{dt^2} + (\mathcal{E}_3\mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_3\mathcal{F}_1 + \mathcal{G}_3\mathcal{G}_1 + \ldots)\frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ + (\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_3\mathcal{F}_2 + \mathcal{G}_3\mathcal{G}_2 + \ldots)\frac{d^2\beta}{dt^2} + \ldots \end{array} \right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{F}_1^2 + \mathcal{G}_1^2 + \ldots + &= \mathcal{A}_1, \\ \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{F}_2^2 + \mathcal{G}_2^2 + \ldots + &= \mathcal{A}_2, \\ \mathcal{E}_3^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{G}_3^2 + \ldots + &= \mathcal{A}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + \mathcal{G}_1\mathcal{G}_2 + \ldots + &= \mathcal{B}_{(1,2)}, \\ \mathcal{E}_1\mathcal{E}_3 + \mathcal{F}_1\mathcal{F}_3 + \mathcal{G}_1\mathcal{G}_3 + \ldots + &= \mathcal{B}_{(1,3)}, \\ \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_3 + \mathcal{G}_2\mathcal{G}_3 + \ldots + &= \mathcal{B}_{(2,3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

L'équation (8) deviendra

$$
(10) \qquad \sum m \left\{
\begin{array}{l}
\delta\alpha \left[\mathcal{A}_1 \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + (\mathcal{B}_{(1,2)}) \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + (\mathcal{B}_{(1,3)}) \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \right] \\
+ \delta\beta \left[\mathcal{B}_{(1,2)} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathcal{A}_2 \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{B}_{(2,3)} \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \right] \\
+ \delta\gamma \left[\mathcal{B}_{(1,3)} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathcal{B}_{(2,3)} \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{A}_3 \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \right]
\end{array}
\right\}
$$

$$
\begin{array}{l}
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= \delta\alpha \left[\left(\dfrac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 \alpha + \left(\dfrac{d^2\varphi}{da\,db}\right)_0 \beta + \left(\dfrac{d^2\varphi}{da\,dc}\right)_0 \gamma \right] \\
+ \delta\beta \left[\left(\dfrac{d^2\varphi}{da\,db}\right)_0 \alpha + \left(\dfrac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 \beta + \left(\dfrac{d^2\varphi}{db\,dc}\right)_0 \gamma \right] \\
+ \delta\gamma \left[\left(\dfrac{d^2\varphi}{da\,dc}\right)_0 \alpha + \left(\dfrac{d^2\varphi}{db\,dc}\right)_0 \beta + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 \gamma \right] + \ldots
\end{array}
$$

Il faut remarquer que cette équation contiendra dans chaque membre, en prenant chaque parenthèse pour un seul terme, autant de termes qu'il y a de variables indépendantes, et, comme elle ne peut exister qu'autant que les coefficients de la même variation sont égaux dans les deux membres, il s'ensuit qu'on aura bien autant d'équations que de variables indépendantes.

Posons

$$\mathbf{A}_1 = \sum m\mathcal{A}_1,\quad \mathbf{A}_2 = \sum m\mathcal{A}_2,\ldots,$$

$$\mathbf{B}_{(1,2)} = \sum m\mathcal{B}_{(1,2)},\quad \mathbf{B}_{(1,3)} = \sum m\mathcal{B}_{(2,3)},\ldots,$$

$$A_1 = -\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0,\quad A_2 = -\left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0,\quad A_3 = -\left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0,\ \text{etc.}$$

$$B_{(1,2)} = -\left(\frac{d^2\varphi}{da\,db}\right)_0,\quad B_{(1,3)} = -\left(\frac{d^2\varphi}{da\,dc}\right)_0,\quad B_{(2,3)} = -\left(\frac{d^2\varphi}{db\,dc}\right)_0.$$

Les équations du mouvement seront enfin

$$
(11) \left\{
\begin{array}{l}
\mathbf{A}_1 \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathbf{B}_{(1,2)} \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + \mathbf{B}_{(1,3)} \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots + A_1\alpha + B_{(1,2)}\beta + B_{(1,3)}\gamma + \ldots = 0, \\
\mathbf{B}_{(1,2)} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathbf{A}_2 \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + \mathbf{B}_{(2,3)} \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots + B_{(1,2)}\alpha + A_2\beta + B_{(2,3)}\gamma + \ldots = 0, \\
\mathbf{B}_{(1,3)} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathbf{B}_{(2,3)} \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + \mathbf{A}_3 \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots + B_{(1,3)}\alpha + B_{(2,3)}\beta + A_3\gamma + \ldots = 0.
\end{array}
\right.
$$

Ces équations sont du premier degré par rapport aux dérivées secondes

$\frac{d^2(\alpha, 6, \gamma \ldots)}{dt^2}$; si donc on les résolvait par rapport à ces quantités, il est clair que les résultats seraient de la forme

$$(12) \qquad \frac{d^2(\alpha, 6, \gamma \ldots)}{dt^2} + M\alpha + N6 + P\gamma + \ldots = 0.$$

Application aux oscillations d'un mobile, sollicité par plusieurs centres d'attraction fixes.

Si le système mobile se réduit à un point unique, sollicité par plusieurs centres fixes qui l'attirent en raison inverse du carré des distances, l'équation (8) conduit à des résultats remarquables. Soient A un de ces centres, p, q, s ses coordonnées, R la force avec laquelle il attire le mobile m; soient $a + x$, $b + y$, $c + z$ les coordonnées de ce point à une époque quelconque du mouvement lorsque, après avoir été légèrement écarté de sa position d'équilibre, il y revient en oscillant, a, b, c étant les coordonnées de la position d'équilibre. On aura, pour les composantes de R suivant les axes,

$$R\frac{p - (a + x)}{r},$$

$$R\frac{q - (b + y)}{r},$$

$$R\frac{s - (c + z)}{r};$$

et

$$r = \sqrt{(a + x - p)^2 + (b + y - q)^2 + (c + z - s)^2},$$

Pour la partie de $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, provenant de ce centre, on aura donc

$$R\frac{p - (a + x)}{r}\delta x + R\frac{q - (b + y)}{r}\delta y + R\frac{s - (c + z)}{r}\delta z,$$

ou, à cause de la valeur de r, $- R\delta r$, ce qui, en remplaçant R par la valeur que nous lui supposons, savoir $\frac{\mu}{r^2}$, donne, par l'intégration, $\frac{\mu}{r}$, et tous les centres attirants donneraient des résultats analogues; donc la quantité $\varphi(a, b, c, \ldots)$ prendra la forme

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{6}{r_1} + \frac{\gamma}{r_2} + \ldots\right).$$

L'équation (8), dans le cas que nous considérons, devient

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\delta x + \frac{d^2y}{d\tau^2}\delta y + \frac{d^2z}{d\tau^2}\delta z\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r_1} + \frac{\gamma}{r_2} + \ldots\right) = \delta \sum \frac{\mu}{r}.$$

Mais ici, puisque nous n'avons qu'un point unique, nous n'avons pas de liaisons. Il est facile de voir qu'alors, dans le premier membre de l'équation (10), tirée de (8), $\delta\alpha$ n'aura pour coefficient que $m\frac{d^2\alpha}{dt^2}$; que le coefficient de $\delta\beta$ sera $m\frac{d^2\beta}{dt^2}$; que celui $\delta\gamma$ sera $m\frac{b^2\gamma}{dt^2}$. De là, pour les trois équations du mouvement du point, en introduisant x, y, z au lieu de α, β, γ :

$$(a)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 x + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dadb}\right)_0 y + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dadc}\right)_0 z, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\varphi}{dadb}\right)_0 x + \left(\dfrac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 y + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dbdc}\right)_0 z, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\varphi}{dadc}\right)_0 x + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dbdc}\right)_0 y + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 z. \end{cases}$$

Les coefficients des variables sont faciles à calculer; il suffira d'indiquer le calcul dans l'hypothèse de $\varphi = \frac{\mu}{r}$. Alors on trouve

$$\frac{d\varphi}{da} = -\mu\frac{a+x-p}{r^3},$$

$$\frac{d\varphi}{db} = -\mu\frac{b+y-q}{r^3},$$

$$\frac{d\varphi}{dc} = -\mu\frac{c+z-s}{r^3};$$

$$\frac{d^2\varphi}{da^2} = \mu\left[\frac{3(a+x-p)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{db^2} = \mu\left[\frac{3(b+y-q)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{dc^2} = \mu\left[\frac{3(c+z-s)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right];$$

$$\frac{d^2\varphi}{dadb} = \mu\frac{(a+x-p)(b+y-q)}{r^5},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dadc} = \mu\frac{(a+x-p)(c+z-q)}{r^5},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dbdc} = \mu\frac{(b+y-q)(c+z-q)}{r^5}.$$

Il sera facile de tirer de ces expressions les valeurs des coefficients différentiels cherchés, lorsqu'ils doivent être affectés de l'indice o, et, comme un nouveau terme $\frac{\mu}{r_1}$ donnerait des résultats analogues, on peut regarder les coefficients comme calculés.

Avant d'aller plus loin dans l'étude du problème spécial que je viens de me proposer, qu'on me permette quelques réflexions que fait naître la forme des coefficients différentiels que je viens de calculer, et qui d'ailleurs tiennent de près à l'étude même de ce problème.

Soit donc un point matériel libre, attiré par plusieurs centres fixes, il est certain que ces centres d'attraction fixes peuvent être remplacés par des sphères, par exemple, de masses convenables, soit alors, ρ le potentiel relatif à ce point, on sait que l'on a

$$\rho = \sum \frac{m\mu}{r}.$$

Soient x, y, z les coordonnées du point, α, β, γ celles de l'un quelconque des centres fixes. On a toujours

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

De là on tire

$$\frac{d\rho}{dx} = \sum m\mu \left(-\frac{x-\alpha}{r^3}\right);$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \sum m\mu \left(\frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right);$$

et deux expressions semblables en y et en z. Si l'on fait la somme

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2},$$

on trouve

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} = 0.$$

C'est l'équation qui exprime l'équilibre de température dans les corps homogènes non cristallisés. La température et le potentiel suivent donc la même loi.

Dans l'expression

$$\rho = \sum \frac{m\mu}{r},$$

donnons à ρ une valeur constante, nous avons l'équation d'une surface. Cette surface satisfaisant à

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} = 0$$

est une surface isotherme. Je dis de plus que, par rapport à l'attraction totale, exercée sur le mobile par l'ensemble des centres fixes, c'est une surface de niveau. En effet, si nous cherchons les composantes de l'attraction totale, suivant les trois axes, nous avons, M étant la masse du point attiré,

$$\mathrm{M}\frac{d\rho}{dx}, \quad \text{suivant l'axe des } x,$$

$$\mathrm{M}\frac{d\rho}{dy}, \quad \text{suivant l'axe des } y,$$

$$\mathrm{M}\frac{d\rho}{dz}, \quad \text{suivant l'axe des } z;$$

d'où, pour l'attraction totale F,

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}\sqrt{\frac{d\rho^2}{dx^2} + \frac{d\rho^2}{dy^2} + \frac{d\rho^2}{dz^2}} = \mathrm{M}h.$$

Les cosinus des angles de la normale à la surface avec les axes des (x, y, z) sont,

$$\frac{d\rho}{dx}\frac{1}{h}, \quad \frac{d\rho}{dy}\frac{1}{h}, \quad \frac{d\rho}{dz}\frac{1}{h};$$

donc la composante de la force F, suivant la normale, sera

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho}{dx}\frac{1}{h} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho}{dy}\frac{1}{h} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho}{dz}\frac{1}{h}\right) = \mathrm{M}\frac{h^2}{h} = \mathrm{M}h.$$

L'attraction totale est donc dirigée suivant la normale à la surface; donc cette surface est une surface de niveau, et de plus, ce qui est remarquable, elle est en même temps une surface isotherme.

Intégration des équations du problème. — On indique une première méthode qui pourrait être employée.

Je reviens maintenant au problème particulier que j'ai commencé à traiter, et pour lequel j'ai établi les équations du mouvement (1). Ces équations, en faisant tout passer au premier membre, peuvent s'écrire :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &m\frac{d^2x}{dt^2} + Ax + My + Nz = 0,\\ &m\frac{d^2y}{dt^2} + By + Mx + Pz = 0,\\ &m\frac{d^2z}{dt^2} + Cz + Nx + Py = 0,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 = -A,\quad \left(\frac{d^2\varphi}{dadb}\right)_0 = -M,$$
$$\left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 = -B,\quad \left(\frac{d^2\varphi}{dbdc}\right)_0 = -P,$$
$$\left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 = -C,\quad \left(\frac{d^2\varphi}{dadc}\right)_0 = -N.$$

Telles sont les équations qu'il faut maintenant intégrer, pour résoudre le problème; car il est clair que la question ne sera résolue que lorsqu'on aura exprimé x, y et z en t.

Pour parvenir à cette intégration, on pourrait employer, les coefficients étant constants, la méthode ordinaire indiquée par les traités de calcul intégral, pour intégrer un système d'équations simultanées du premier ordre. Il faudrait alors multiplier la seconde par un facteur indéterminé p, la troisième par un autre q, et, en faisant la somme, on trouverait

$$(2)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{d^2y}{dt^2} + q\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{A+pM+qN}{m}\left(x + \frac{M+pB+qP}{A+pM+qN}y + \frac{N+pP+qC}{A+pM+qN}z\right) = 0.$$

p et q étant arbitraires, on peut, pour les déterminer, les assujettir à vérifier les deux équations

$$(3) \qquad p = \frac{M + pB + qP}{A + pM + qN}, \quad q = \frac{N + pP + qC}{A + pM + qN}.$$

Si de plus on fait

$$k^2 = \frac{A + pM + qN}{m},$$

l'équation (2) deviendra, en posant $x + py + qz = u$,

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} + k^2 u = 0;$$

d'où

$$(5) \qquad u = E \sin(kt + \varepsilon),$$

E et ε étant deux constantes arbitraires. Mais le groupe (3) donne pour p, q et k^2 trois systèmes de valeurs, et chacun de ces systèmes satisfait à (5) ; de là les trois équations :

$$\begin{aligned} x + p_1 y + q_1 z &= E_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \\ x + p_2 y + q_2 z &= E_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ x + p_3 y + q_3 z &= E_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3). \end{aligned}$$

C'est un système de trois équations linéaires et du premier degré en x, y, z. Si l'on résout par rapport à ces variables, il est clair que l'on trouvera pour (x, y, z) des valeurs de la forme :

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= H_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + H_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ y &= K_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + K_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + K_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ z &= L_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + L_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + L_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \end{aligned} \right.$$

où il reste à déterminer les neuf constantes (H, K, L), ce qui peut se faire en remontant aux équations mêmes du mouvement. Ainsi cette marche résout le problème, mais il me semble qu'on peut procéder plus simplement de la manière suivante.

Simplification des équations.

Je remarque que si l'on pouvait ramener les trois équations (1) à la forme

$$
(6)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + Qx = 0, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} + Q_1y = 0, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} + Q_2z = 0, \end{cases}
$$

elles s'intégreraient indépendamment les unes des autres ; il y a plus, elles prouveraient que, par rapport à certains axes, les oscillations du mobile sont isochrones comme celles d'un pendule.

Essayons donc si l'on peut ramener les équations (1) à la forme (6). Pour cela, nous allons changer la direction des axes des coordonnées en passant à de nouveaux axes rectangulaires. Les calculs qu'exige la transformation sont un peu longs, mais la simplicité des résultats auxquels on doit arriver me semble valoir la peine qu'on les fasse.

Si les nouveaux axes sont liés aux anciens, comme l'indique le tableau

	x'	y'	z'
x	m_1	m_2	m_3
y	n_1	n_2	n_3
z	p_1	p_2	p_3

on a les relations suivantes :

$$
\begin{aligned} x &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ y &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \\ z &= p_1x' + p_2y' + p_3z'. \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x\ y\ z \\ x'\ y'\ z' \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 &= 1, \\ m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 &= 1, \\ m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 &= 1. \end{aligned} \qquad (m_i\ n_i\ p_i)
$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$
$$m_1 m_3 + n_1 n_3 + p_1 p_3 = 0, \qquad (m_i m_j,\ n_i n_j,\ p_i p_j)$$
$$m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 = 0.$$

De là on tire

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 z'}{dt^2},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = n_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + n_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + n_3 \frac{d^2 z'}{dt^2},$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = p_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + p_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + p_3 \frac{d^2 z'}{dt^2}.$$

Si l'on porte ces valeurs des $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$ et des variables x, y, z dans les équations (1), on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
& m\left(m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) + A(m_1 x' + m_2 y' + m_3 z') \\
& + M(n_1 x' + n_2 y' + n_3 z') + N(p_1 x' + p_2 y' + p_3 z') = 0, \\
& m\left(n_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + n_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + n_3 \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) + B(n_1 x' + n_2 y' + n_3 z') \\
& + M(m_1 x' + m_2 y' + m_3 z') + P(p_1 x' + p_2 y' + p_3 z') = 0, \\
& m\left(p_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} + p_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + p_3 \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) + C(p_1 x' + p_2 y' + p_3 z') \\
& + N(m_1 x' + m_2 y' + m_3 z') + P(n_1 x' + n_2 y' + n_3 z') = 0.
\end{aligned}\right.$$

Résolvons maintenant ces équations par rapport aux dérivées secondes $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$. Pour cela, multiplions la première par m_1, la seconde par n_1, la troisième par p_1 et additionnons, il viendra, en vertu des relations qui existent entre les (m_i, n_i, p_i),

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
& m \frac{d^2 x'}{dt^2} + (A m_1^2 + B n_1^2 + C p_1^2 + 2 M m_1 n_1 + 2 N m_1 p_1 + 2 P p_1 n_1) x' \\
& + \left[\begin{aligned} & A m_1 m_2 + B n_1 n_2 + C p_1 p_2 + M(m_1 n_2 + n_1 m_2) \\ & + N(p_1 m_2 + m_1 p_2) + P(n_1 p_2 + p_1 n_2) \end{aligned}\right] y' \\
& + \left[\begin{aligned} & A m_1 m_3 + B n_1 n_3 + C p_1 p_3 + M(m_1 n_3 + n_1 m_3) \\ & + N(p_1 m_3 + m_1 p_3) + P(n_1 p_3 + p_1 n_3) \end{aligned}\right] z' = 0.
\end{aligned}\right.$$

La multiplication de la première par m_2, de la seconde par n_2, de la troisième par p_2, suivie de l'addition des trois résultats, donnera

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}+(Am_2^2+Bn_2^2+Cp_2^2+2Mm_2n_2+2Nm_2p_2+2Pp_2n_2)y'$$
$$+\left[\begin{array}{l}\quad Am_1m_2+Bn_1n_2+Cp_1p_2+M(n_1m_2+m_1n_2)\\ +N(m_1p_2+p_1m_2)+P(p_1n_2+n_1p_2)\end{array}\right]x'$$
$$+\left[\begin{array}{l}\quad Am_2m_3+Bn_2n_3+Cp_2p_3+M(m_2n_3+n_2m_3)\\ +N(p_2m_3+m_2p_3)+P(n_2p_3+p_2n_3)\end{array}\right]z'=0.$$

Enfin, en répétant une troisième fois avec les paramètres m_3, n_3, p_3, sur les trois équations, une opération analogue, on trouve le troisième résultat suivant :

$$m\frac{d^2z'}{dt^2}+(Am_3^2+Bn_3^2+Cp_3^2+2Mm_3n_3+Nm_3p_3+2Pp_3n_3)z'$$
$$+\left[\begin{array}{l}\quad Am_1m_3+Bn_1n_3+Cp_1p_3+M(n_1m_3+m_1n_3)\\ +N(m_1p_3+p_1m_3)+P(p_1n_3+n_1p_3)\end{array}\right]x'$$
$$+\left[\begin{array}{l}\quad Am_2m_3+Bn_2n_3+Cp_2p_3+M(n_2m_3+m_2n_3)\\ +N(m_2p_3+p_2m_3)+P(p_2n_3+n_2p_3)\end{array}\right]y'=0.$$

A la seule inspection des trois équations que nous venons d'obtenir, on voit que, pour les ramener à la forme (6), il suffira d'avoir les trois relations :

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}Am_1m_2+Bn_1n_2+Cp_1p_2+M(m_1n_2+n_1m_2)+N(p_1m_2+m_1p_2)\\ \qquad +P(n_1p_2+p_1n_2)=0,\\ Am_1m_3+Bn_1n_3+Cp_1p_3+M(m_1n_3+n_1m_3)+N(p_1m_3+m_1p_3)\\ \qquad +P(n_1p_3+p_1n_3)=0,\\ Am_2m_3+Bn_2n_3+Cp_2p_3+M(m_2n_3+n_2m_3)+N(p_2m_3+m_2p_3)\\ \qquad +P(n_2p_3+p_2n_3)=0.\end{array}\right.$$

Nous avons ici les neuf paramètres $(m_in_ip_i)$, mais à l'aide des deux groupes, désignés plus haut par $(m_in_ip_i)$, $(m_im_j,\ n_in_j,\ p_ip_j)$, on pourrait en éliminer (6), et les trois dernières relations donneraient les valeurs des trois autres. Les formules connues d'Euler pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un nouveau système rectangulaire comme le premier, permettent d'éviter cette élimination pénible, et donnent de suite la valeur des (m_i, n_i, p_i) en fonctions de trois paramètres qui sont, comme on le sait : 1° l'angle ψ compris entre l'intersection du nouveau plan des (x', y') avec l'ancien plan des (x, y), et l'ancien axe des x; 2° l'angle ψ', formé par le nouvel axe des x' avec cette intersection; 3° l'angle du plan des (x', y') avec le plan des (x, y), appelé θ.

Pour abréger l'écriture, je poserai

$$\begin{aligned} \sin\psi &= s, & \cos\psi &= c; \\ \sin\psi' &= s', & \cos\psi' &= c'; \\ \sin\theta &= \sigma, & \cos\theta &= k. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} m_1 &= cc' - s'sk, & n_1 &= s'ck + c's, & p_1 &= \sigma s', \\ m_2 &= -sc'k - s'c, & n_2 &= cc'k - s's, & p_2 &= c'\sigma, \\ m_3 &= s\sigma; & n_3 &= -c\sigma; & p_3 &= k. \end{aligned}$$

De ces valeurs on tire :

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= -csk(c'^2 - s'^2) + s'c'(s^2k^2 - c^2), \\ m_1 m_3 &= cc's\sigma - s^2 s'\sigma k, \\ m_2 m_3 &= -s^2 c'\sigma k - ss'\sigma c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= csk(c'^2 - s'^2) + s'c'(c^2k^2 - s^2), \\ n_1 n_3 &= -c^2 s'\sigma k - cc's\sigma, \\ n_2 n_3 &= -c^2 c'k\sigma + css'\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= c's'\sigma^2, \\ p_1 p_3 &= s'\sigma k, \\ p_2 p_3 &= c'\sigma k, \end{aligned}$$

$$m_1 n_2 + n_1 m_2 = -2cc'ss'(1 + k^2) + k(c^2 - s^2)(c'^2 - s'^2),$$

$$
\begin{aligned}
p_1 m_2 + m_1 p_2 &= c\sigma(c'^2 - s'^2) - 2ss'kc'\sigma,\\
m_1 n_3 + n_1 m_3 &= c'\sigma(s^2 - c^2) + 2ss'\sigma ck,\\
n_1 p_3 + p_1 n_3 &= cs'(k^2 - \sigma^2) + sc'k,\\
p_2 m_3 + m_2 p_3 &= sc'(\sigma^2 - k^2) - s'ck,\\
n_1 p_2 + p_1 n_2 &= s\sigma(c'^2 - s'^2) + 2cc'ks'\sigma,\\
p_1 m_3 + m_1 p_3 &= -ss'(k^2 - \sigma^2) + kcc',\\
m_2 n_3 + n_2 m_3 &= \sigma s'(c^2 - s^2) + 2cc's\sigma k,\\
n_2 p_3 + p_2 n_3 &= -cc'(\sigma^2 - k^2) - ss'k.
\end{aligned}
$$

Portons ces valeurs dans nos trois équations (9); elles deviendront

$$
(10)\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{A}[-csk(c'^2 - s'^2) + (s^2k^2 - c^2)s'c'] + \mathrm{B}[csk(c'^2 - s'^2) + (c^2k^2 - s^2)s'c']\\
&\qquad + \mathrm{C}\sigma^2 c's' + \mathrm{M}[k(c^2 - s^2)(c'^2 - s'^2) - 2(1 + k^2)cc'ss']\\
&\qquad + \mathrm{N}[c\sigma(c'^2 - s'^2) - 2ss'kc'\sigma] + \mathrm{P}[s\sigma(c'^2 - s'^2)\\
&\qquad + 2cc'ks'\sigma] = 0,\\
&\mathrm{A}[cc's\sigma - s^2s'\sigma k] + \mathrm{B}[-c^2s'\sigma k - cc's\sigma] + \mathrm{C}s'\sigma k + \mathrm{M}[c'\sigma(s^2 - c^2)\\
&\qquad + 2ss'\sigma ck] + \mathrm{N}[ss'(\sigma^2 - k^2) + kcc']\\
&\qquad + \mathrm{P}[-cs'(\sigma^2 - k^2) + sc'k] = 0,\\
&\mathrm{A}[-s^2c'\sigma k - ss'\sigma c] + \mathrm{B}[-c^2c'k\sigma + css'\sigma] + \mathrm{C}c'\sigma k\\
&\qquad + \mathrm{M}[\sigma s'(c^2 - s^2) + 2cc's\sigma k] + \mathrm{N}[sc'(\sigma^2 - k^2) - s'ck]\\
&\qquad + \mathrm{P}[-cc'(\sigma^2 - k^2) - ss'k] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si dans la première on met en facteurs communs les deux quantités $s'c'$ et $(c'^2 - s'^2)$ dans tous les termes où elles se trouvent, on pourra écrire, en faisant passer dans le second membre la partie qui contient le facteur $(c'^2 - s'^2)$:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{A}(s^2k^2 - c^2) + \mathrm{B}(c^2k^2 - s^2) + \mathrm{C}\sigma^2 + 2k\sigma(\mathrm{P}c - \mathrm{N}s) - 2\mathrm{M}(1 + k^2)cs]s'c'\\
&\qquad = [csk(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \sigma(\mathrm{P}s + \mathrm{N}c) - \mathrm{M}k(c^2 - s^2)](c'^2 - s'^2).
\end{aligned}
$$

De là, en appelant Δ le coefficient de $s'c'$, $\mathfrak{M}$ celui de $(c'^2 - s'^2)$, multipliant par 2, remarquant que $c'^2 - s'^2 = \cos 2\psi'$, que $2s'c' = \sin 2\psi'$, il vient

$$
\operatorname{tang} 2\psi' = \frac{2\mathfrak{M}}{\Delta}.
$$

On remarquera que $\mathfrak{M}$ et Δ ne contiennent que θ et ψ; si donc on trouve pour ces dernières variables des valeurs réelles, ψ' aura toujours une valeur réelle correspondante.

Revenons aux deux autres équations. Elles peuvent évidemment s'écrire

$$\begin{aligned}
&c'[(A-B)sc\sigma - M(c^2-s^2)\sigma + (Ps+Nc)k] \\
&- s'[(As^2+Bc^2-C)\sigma k + (Ns-Pc)(k^2-\sigma^2) - 2Ms\sigma ck] = 0, \\
&- s'[(A-B)sc\sigma - M(c^2-s^2)\sigma + (Ps+Nc)k] \\
&- c'[(As^2+Bc^2-C)\sigma k + (Ns-Pc)(k^2-\sigma^2) - 2Ms\sigma ck] = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on multipliait la première de ces équations par c', la seconde par s', qu'on retranchât les résultats, le second coefficient disparaîtrait, et le premier serait égal à 0.

Si l'on faisait au contraire l'addition, après avoir multiplié la première par s' et la seconde par c', on trouverait que le second coefficient doit être égal à 0. Donc les deux équations ne peuvent exister simultanément qu'autant que l'on a

$$\begin{aligned}
&(B-A)sc\sigma + M(c^2-s^2)\sigma = (Ps+Nc)k, \\
&(As^2+Bc^2-C-2Mcs)\sigma k = (Pc-Ns)(k^2-\sigma^2).
\end{aligned}$$

La première donne

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sigma}{k} = \frac{Ps+Nc}{(B-A)sc+M(c^2-s^2)} = \frac{\mathfrak{N}_1}{\Delta_1}.$$

De la deuxième, on tire

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2(Pc-Ns)}{As^2+Bc^2-C-2Mcs} = \frac{2\mathfrak{N}_2}{\Delta_2} = \frac{2\operatorname{tang}\theta}{1-\operatorname{tang}^2\theta} = \frac{2\mathfrak{N}_1\Delta_1}{\Delta_1^2-\mathfrak{N}_1^2}.$$

D'où l'équation

$$(11) \qquad \Delta_1(\mathfrak{N}_1\Delta_2 - \mathfrak{N}_2\Delta_1) + \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_1^2 = 0.$$

$\mathfrak{N}_1$, Δ_1, $\mathfrak{N}_2$, Δ_2 ne contiennent plus que c et s; la dernière équation déterminera donc ψ. Il résulte aussi des valeurs de $\mathfrak{N}_1$ et Δ_1, qu'à une valeur réelle de ψ répondra toujours une valeur réelle de θ.

En portant dans (11), à la place des lettres qu'elle contient, les valeurs qu'elles représentent, et effectuant les réductions convenables, cette équation fournit la suivante

$$\begin{aligned}&[(B-A)sc+M(c^2-s^2)]\{[(A-C)P-MN]s+[(B-C)N-MP]c\}\\&+[(P^2-N^2)cs+PN(c^2-s^2)](Ps+Nc)=0.\end{aligned}$$

Il reste encore ici deux variables, mais si l'on divise par c^3, il ne restera que $\operatorname{tang}\psi$, et en faisant $\operatorname{tang}\psi = u$, on trouve enfin

$$\begin{aligned}&[(B-A)u+M(1-u^2)]\{[(A-C)P-MN]u+[(B-C)N-MP]\}\\&+[(P^2-N^2)u+PN(1-u^2)](Pu+N)=0.\end{aligned}$$

Cette équation du troisième degré a nécessairement une racine réelle; mais cette racine, à cause de l'indifférence des axes, ne se rapportant pas plus à l'un qu'à l'autre, il s'ensuit qu'elle en a trois. Donc il y a un système de valeurs de θ, ψ, ψ', ou de valeurs de (m_i, n_i, p_i) qui satisfait aux équations (9). Si l'on rapporte tout aux axes, fixés par ce système de valeurs, les équations du mouvement du mobile prennent la forme (6), c'est-à-dire que nous aurons

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}+Q_1x'=0,$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}+Q_2y'=0,$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2}+Q_3z'=0,$$

en posant

$$\begin{aligned}&Am_1^2+Bn_1^2+Cp_1^2+2Mm_1n_1+2Nm_1p_1+2Pp_1n_1=Q_1,\\&Am_2^2+Bn_2^2+Cp_2^2+2Mm_2n_2+2Nm_2p_2+2Pp_2n_2=Q_2,\\&Am_3^2+Bn_3^2+Cp_3^2+2Mm_3n_3+2Nm_3p_3+2Pn_3p_3=Q_3.\end{aligned}$$

J'appellerai ces quantités Q_i, i pouvant être 1 ou 2 ou 3.

Or, je dis que Q_1, Q_2, Q_3 sont trois quantités positives, lorsque la fonction

$$\varphi(a, b, c,\ldots)=\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r_1}+\frac{\gamma}{r_2}+\ldots\right),$$

pour le cas que nous traitons, est un maximum. En effet, on a alors

$$\varphi(a+x, b+y, c+z) = \varphi(a, b, c) + \left(\frac{d\varphi}{da}\right)_0 x + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)_0 y + \left(\frac{d\varphi}{dc}\right)_0 z$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 z^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dadb}\right)_0 xy \\ + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dadc}\right)_0 xz + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dbdc}\right)_0 yz\end{array}\right] + \rho.$$

Mais puisque $\varphi(a, b, c)$ est un maximum, il en résulte que l'on a

$$\left(\frac{d\varphi}{da}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{db}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dc}\right)_0 = 0,$$

et que l'ensemble des termes du second ordre doit former un polynôme toujours négatif, pour toutes les valeurs possibles de x, y, z. Donc, en représentant les coefficients différentiels, qui sont des constantes, par les lettres indiquées à la page 17, le polynôme

$$-Ax^2 - By^2 - Cz^2 - 2Mxy - 2Nxz - 2Pyz$$

doit être constamment négatif, ou bien

$$(p) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Mxy + 2Nxz + 2Pyz$$

doit être constamment positif, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, z.

Ce polynôme peut, comme l'on sait, s'écrire sous la forme

$$A\left(x + \frac{My + Nz}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{M^2}{A}\right)\left[y + \frac{z\left(P - \frac{MN}{A}\right)}{B - \frac{M^2}{A}}\right]^2$$
$$+ z^2\left[-\frac{\left(P - \frac{MN}{A}\right)^2}{B - \frac{M^2}{A}} + C - \frac{N^2}{A}\right],$$

et la condition, pour qu'il demeure toujours positif, se réduit aux trois inégalités

$$A > 0, \quad B - \frac{M^2}{A} > 0, \quad -\frac{\left(P - \frac{MN}{A}\right)^2}{B - \frac{M^2}{A}} + C - \frac{N^2}{A} > 0.$$

Ces inégalités sont donc satisfaites par les coefficients du polynôme (p) : donc elles le sont aussi par les trois polynômes Q_i, et notre proposition est démontrée. Un autre fait non moins important à remarquer, c'est que les Q_i sont trois quantités généralement inégales.

Intégration des équations simplifiées.

Ces faits importants étant établis, je remplacerai, pour simplifier l'écriture, par les carrés K_1^2, K_2^2, K_3^2 les quantités $\frac{Q_1}{m}$, $\frac{Q_2}{m}$, $\frac{Q_3}{m}$, et les équations du problème, réduites à leurs formes les plus simples, deviendront

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x'}{dt^2} + K_1^2 x' = 0, \\ \dfrac{d^2 y'}{dt^2} + K_2^2 y' = 0, \\ \dfrac{d^2 z'}{dt^2} + K_3^2 z' = 0, \end{cases}$$

dont les intégrales sont

$$(13) \quad \begin{cases} x' = H_1 \sin(K_1 t + \varepsilon_1), \\ y' = H_2 \sin(K_2 t + \varepsilon_2), \\ z' = H_3 \sin(K_3 t + \varepsilon_3), \end{cases}$$

H_i, ε_i étant les six constantes arbitraires, amenées par l'intégration.

La forme de ces intégrales fait connaître tout d'abord une propriété remarquable du mouvement que nous étudions : c'est que ce mouvement est oscillatoire, que les oscillations sont isochrones par rapport à nos trois axes des coordonnées, et que le temps de l'oscillation est $\frac{\pi}{K_i}$. Mais le système d'axes, auxquels le mouvement est maintenant rapporté, est le seul système qui jouisse de la propriété signalée. Cette propriété paraît d'autant plus singulière qu'il n'a été fait aucune hypothèse sur le nombre des centres d'attraction et que, par conséquent, elle existerait tout aussi bien, si le nombre des centres se réduisait à deux, que s'il était quelconque.

Voyons maintenant comment nous pourrons déterminer les six constantes arbitraires H_i, ε_i, introduites par l'intégration. Pour cela, il nous faut connaître la position initiale et la vitesse initiale du mobile. Cette position et cette vitesse seront généralement données en fonctions des premières coordonnées (x, y, z) et non en fonctions des nouvelles (x', y', z'), mais il est facile de passer des premières aux secondes. En effet, si nous nous reportons aux équations, qui sont au pied de la page 19 et suiv., il est facile d'exprimer (x', y', z') en (x, y, z). Pour cela, dans le groupe $\begin{pmatrix} x, y, z \\ x', y', z' \end{pmatrix}$, multiplions la première par m_1, la deuxième par n_1, la troisième par p_1, nous aurons, en prenant garde aux groupes (m_i, n_i, p_i) et $(m_i m_j, n_i n_j, p_i p_j)$,

$$x' = m_1 x + n_1 y + p_1 z, \tag{14}$$

et de même

$$y' = m_2 x + n_2 y + p_2 z,$$
$$z' = m_3 x + n_3 y + p_3 z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx'}{dt} = m_1 \frac{dx}{dt} + n_1 \frac{dy}{dt} + p_1 \frac{dz}{dt},$$
$$\frac{dy'}{dt} = m_2 \frac{dx}{dt} + n_2 \frac{dy}{dt} + p_2 \frac{dz}{dt},$$
$$\frac{dz'}{dt} = m_3 \frac{dx}{dt} + n_3 \frac{dy}{dt} + p_3 \frac{dz}{dt}.$$

La résolution des équations (10) a fait connaître ψ, ψ', θ, et, par les relations de la page 22, elle a donné les (m_i, n_i, p_i); donc, dans les équations que nous venons d'écrire, lorsque (x, y, z), $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ auront été données, les seconds membres seront entièrement connus, et l'on aura les valeurs initiales des (x', y', z'), $\left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right)$. Appelons les premières x'_0, y'_0, z'_0, et les secondes α_0, β_0, γ_0.

Du groupe (13) on tire

$$\begin{aligned} x'_0 &= H_1 \sin \varepsilon_1, \\ y'_0 &= H_2 \sin \varepsilon_2, \\ z'_0 &= H_3 \sin \varepsilon_3; \\ \alpha_0 &= K_1 H_1 \cos \varepsilon_1, \\ \beta_0 &= K_2 H_2 \cos \varepsilon_2, \\ \gamma_0 &= K_3 H_3 \cos \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Le système, venant de x', peut s'écrire

$$x'_0 = H_1 \sin \varepsilon, \quad \frac{\alpha_0}{K_1} = H_1 \cos \varepsilon,$$

d'où

$$H_1 = \pm \sqrt{x_0'^2 + \frac{\alpha_0^2}{K_1^2}}, \quad \operatorname{tang} \varepsilon_1 = K_1 \frac{x'_0}{\alpha_0}.$$

Le signe qu'il faudra prendre pour H_1 sera indiqué par le signe de x'_0.

Les deux systèmes binaires, provenant de y' et de z', donneraient des résultats analogues. Donc enfin les équations qui expriment le mouvement du mobile seront

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \sqrt{x_0'^2 + \frac{\alpha_0^2}{K_1^2}} \sin \left(K_1 t + \operatorname{arc\,tang} K_1 \frac{x'_0}{\alpha_0} \right), \\ y' &= \sqrt{y_0'^2 + \frac{\beta_0^2}{K_2^2}} \sin \left(K_2 t + \operatorname{arc\,tang} K_2 \frac{y'_0}{\beta_0} \right), \\ z' &= \sqrt{z_0'^2 + \frac{\gamma_0^2}{K_3^2}} \sin \left(K_3 t + \operatorname{arc\,tang} K_3 \frac{z'_0}{\gamma_0} \right). \end{aligned} \right.$$

Si la vitesse initiale était nulle, ce qui reviendrait, après avoir dérangé le mobile de sa position d'équilibre stable, à l'abandonner aux attractions des centres fixes, sans vitesse, on aurait

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0;$$

et alors nos trois équations intégrales prendraient la forme plus simple et très-remarquable

$$(16)\quad \begin{cases} x' = x'_0 \sin\left(K_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = x'_0 \cos K_1 t, \\ y' = y'_0 \sin\left(K_2 t + \frac{\pi}{2}\right) = y'_0 \cos K_2 t, \\ z' = z'_0 \sin\left(K_3 t + \frac{\pi}{2}\right) = z'_0 \cos K_3 t. \end{cases}$$

Intégrales générales des équations du problème.

Essayons maintenant, à l'aide des intégrales (13), auxquelles nous sommes parvenus, de trouver la forme générale des intégrales des équations compliquées (1), d'où nous sommes partis. Or il est clair que, pour cela, il n'y a qu'à substituer dans (13) à (x', y', z') leurs valeurs données par le groupe (14). Les intégrales du groupe (1), page 17, seront donc

$$(17)\quad \begin{cases} m_1 x + n_1 y + p_1 z = H_1 \sin(K_1 t + \varepsilon_1), \\ m_2 x + n_2 y + p_2 z = H_2 \sin(K_2 t + \varepsilon_2), \\ m_3 x + n_3 y + p_3 z = H_3 \sin(K_3 t + \varepsilon_3). \end{cases}$$

Mais les deux systèmes d'axes que nous avons employés sont rectangulaires; donc aux deux groupes, entre les (m_i, n_i, p_i), écrits aux deux pages 19 et 20, on peut ajouter les suivants :

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, & m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 &= 0, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1; & n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 &= 0; \end{aligned}$$

qui permettent de résoudre très-simplement le groupe (17) par rapport à (x, y, z). Si l'on multiplie la première par m_1, la seconde par m_2, la troisième par m_3, qu'on additionne les résultats en prenant garde aux relations précédentes, il vient

$$(18)\quad x = m_1 H_1 \sin(K_1 t + \varepsilon_1) + m_2 H_2 \sin(K_2 t + \varepsilon_2) + m_3 H_3 \sin(K_3 t + \varepsilon_3),$$

et, d'une manière analogue,

$$y = n_1 H_1 \sin(K_1 t + \varepsilon_1) + n_2 H_2 \sin(K_2 t + \varepsilon_2) + n_3 H_3 \sin(K_3 t + \varepsilon_3),$$
$$z = p_1 H_1 \sin(K_1 t + \varepsilon_1) + p_2 H_2 \sin(K_2 t + \varepsilon_2) + p_3 H_3 \sin(K_3 t + \varepsilon_3),$$

relations qui étaient d'ailleurs évidentes par le groupe $\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}$ de la page 19.

Toutes les constantes sont connues dans le second membre. Ce sont donc bien là les intégrales du groupe (1), page 17, sous leur forme la plus générale, après la détermination des constantes arbitraires par les données initiales du mouvement. Ainsi notre problème est complétement résolu.

Je remarque que le groupe (18) est susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Imaginons, en effet, à un instant quelconque du mouvement, la droite qui joint le point où le mobile était en équilibre avec la position qu'il occupe à cet instant, et prenons sa longueur pour unité; x', y', z' seront les trois projections de cette droite sur les axes des (x', y', z'). Si maintenant on veut avoir la projection de cette même droite sur les anciens axes des (x, y, z), il est clair qu'il suffira de projeter les (x', y', z') sur chacun de ces derniers axes, et l'on obtient ainsi les équations (18). Cette remarque si simple me semble être une très-bonne vérification du résultat auquel je suis arrivé.

Remarque. J'ai démontré, page 26, que les quantités Q_i sont positives. Cette démonstration était nécessaire. En effet, supposons que l'une quelconque seulement de ces trois quantités soit négative, Q_1, par exemple; la première équation du groupe (12) deviendra

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - K_1^2 x' = 0,$$

d'où

$$x' = C e^{K_1 t} + C' e^{-K_1 t},$$

et il est clair que t augmentant, x' augmente indéfiniment; donc le mouvement cesserait d'être oscillatoire, ou plutôt il resterait oscillatoire, mais les équations ne pourraient plus le représenter.

Intégration des équations différentielles par la première méthode indiquée.

Je vais maintenant reprendre, par la méthode indiquée à la page 17, la solution du problème, que je viens de résoudre complétement en simplifiant les équations qui le formulent. Il ressortira de la comparaison des deux méthodes des résultats qui me paraissent importants, et même qui semblent accuser une singularité, non encore expliquée, dans la théorie importante de l'attraction, malgré les magnifiques travaux des géomètres sur cette partie de la mécanique.

Pour cela, il faut d'abord résoudre le système des trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{A+pM+qN}{m}=k^2,\\ &\frac{M+pB+qP}{A+pM+qN}=p,\\ &\frac{N+pP+qC}{A+pM+qN}=q.\end{aligned}\right.$$

Mais si l'on pose $mk^2=s$, la première se simplifie, ainsi que les deux autres, et le système peut s'écrire :

$$(1')\qquad \left\{\begin{aligned} &A+pM+qN=s,\\ &M+pB+qP=ps,\\ &N+pP+qC=qs.\end{aligned}\right.$$

En éliminant p et q entre ces trois équations, on tombe sur le résultat suivant :

$$(s-A)(s-B)(s-C)-P^2(s-A)-N^2(s-B)-M^2(s-C)-2MNP=0,$$

qui peut encore s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &s^3-(A+B+C)s^2-(P^2-BC+M^2-AB+N^2-AC)s\\ &\quad+(BN^2+AP^2+CM^2-ABC-2MNP)=0.\end{aligned}\right.$$

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous un instant sur cette équation. Supposons-la résolue et soient s_1, s_2, s_3 ses trois racines, nous aurons pour k^2

trois valeurs correspondantes

$$(3)\qquad \begin{cases} k_1^2 = \dfrac{s_1}{m}, \\ k_2^2 = \dfrac{s_2}{m}, \\ k_3^2 = \dfrac{s_3}{m}, \end{cases}$$

et, en les portant dans l'équation générale

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + k^2 u = 0,$$

il faudra distinguer trois cas, suivant que les valeurs de k_i^2 seront positives, négatives ou imaginaires.

1°. Si elles sont toutes positives, il en résultera

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = x + p_1 y + q_1 z = E_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \\ u_2 = x + p_2 y + q_2 z = E_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ u_3 = x + p_3 y + q_3 z = E_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \end{cases}$$

d'où les valeurs générales de (x, y, z), déjà données à la page 18, lesquelles, comme on le sait, résolvent complétement le problème.

2°. Si elles sont négatives ou si l'une d'elles seulement est négative, s_1 par exemple, l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - k_1^2 u = 0$$

aura pour intégrale une expression de la forme

$$u = x + p_1 y + q_1 z = ce^{k_1 t} + c' e^{-k_1 t},$$

tandis que les deux autres racines donneraient pour u_2 et u_3 les valeurs déjà obtenues. Mais il est clair qu'en résolvant le groupe des trois intégrales, par rapport à (x, y, z), on tomberait sur des valeurs de ces variables qui croîtraient indéfiniment avec t, et qui, par conséquent, ne pourraient plus représenter le mouvement. Donc l'équation (2) ne peut avoir de racines négatives.

3°. Si les racines de (2) étaient imaginaires de la forme $\mu + \nu\sqrt{-1}$, ou si l'une d'elles seulement avait cette forme, on aurait pour intégrales des expressions telles que celle-ci :

$$u = \mathrm{E}\sin\left[(\alpha + 6\sqrt{-1})t + \varepsilon\right] = \mathrm{E}\cos\varepsilon\sin(\alpha + 6\sqrt{-1})t + \mathrm{E}\sin\varepsilon\cos(\alpha + 6\sqrt{-1})t,$$

et ces expressions se reproduiraient évidemment dans les valeurs de (x, y, z).

Or, on sait que

$$\sin(\alpha t + 6t\sqrt{-1}) = \frac{e^{6t} + e^{-6t}}{2}\sin\alpha t + \sqrt{-1}\,\frac{e^{6t} - e^{-6t}}{2}\cos\alpha t,$$

$$\cos(\alpha t + 6t\sqrt{-1}) = \frac{e^{6t} + e^{-6t}}{2}\cos\alpha t - \sqrt{-1}\,\frac{e^{6t} - e^{-6t}}{2}\sin\alpha t.$$

Donc (x, y, z) deviendraient infinis, en même temps qu'ils seraient imaginaires. Les racines de (2) ne peuvent donc pas être imaginaires; d'ailleurs aucune ne peut être négative, reste donc qu'elles soient toutes trois réelles et positives, ce qui a lieu, en effet, comme nous l'a prouvé la première méthode.

L'équation (2) est complète, elle doit avoir trois racines positives : donc, comme le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations, elle doit offrir trois variations, c'est-à-dire qu'on doit avoir les trois inégalités suivantes :

$$(5) \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} > 0,$$

ou

$$-\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0^2 > 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)_0 + \left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)_0 + \left(\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)_0 < 0,$$

$$\mathrm{P}^2 - \mathrm{BC} + \mathrm{M}^2 - \mathrm{AB} + \mathrm{N}^2 - \mathrm{AC} < 0,$$

$$\mathrm{BN}^2 + \mathrm{AP}^2 + \mathrm{CM}^2 - \mathrm{ABC} - 2\,\mathrm{MNP} < 0.$$

La première de ces inégalités montre que, pour la position d'équilibre du mobile, l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

n'a plus lieu alors même que le mobile ne coïncide pas avec la masse attirante. J'emploie ici le mot *masse*, vu que chaque centre fixe peut très-bien être remplacé par une sphère d'une masse convenable.

Car imaginons, par exemple, un parallélipipède rectangle droit, joignons, par la pensée, les centres des faces opposées, et plaçons aux deux extrémités des trois lignes ainsi obtenues deux sphères, égales pour chaque ligne, mais pouvant différer d'une ligne à l'autre, il est clair qu'une sphère placée dans l'intérieur du parallélipipède et attirée par les six autres se trouverait en équilibre au centre de figure, où elle ne coïnciderait avec aucun des corps ou centres attirants. Eh bien, pour cette position, on devrait avoir

$$\frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}<0.$$

Serait-ce parce que le corps attiré se trouve au centre de gravité du système attirant?

Quoi qu'il en soit, cette discussion montre clairement combien la première méthode est supérieure à la seconde : car elle résout sans peine, et avec les données mêmes de la question, des difficultés considérables qui se rencontrent dans la seconde, difficultés que celle-ci ne peut résoudre que par des considérations mécaniques infiniment moins satisfaisantes que les considérations analytiques, déduites de l'essence même de la question qu'on traite. Toutefois, la singularité signalée par l'inégalité

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}<0$$

me paraît remarquable, et c'est l'emploi de la seconde méthode qui l'a mise en évidence.

On peut, par un genre de discussion dû, je crois, à Cauchy, démontrer directement que l'équation (2) a ses trois racines réelles. En effet, cette équation peut s'écrire

$$(s-B)[(s-C)(s-A)-N^2]-[M^2(s-C)+P^2(s-A)+2MNP]=0.$$

Supposons que l'on eût

$$M = o, \quad P = o,$$

l'équation se réduirait à une autre équation plus simple du troisième degré dont les racines seraient : d'abord

$$s = B,$$

puis les racines de l'équation du second degré

$$(s - C)(s - A) - N^2 = o,$$

d'où

$$s = \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 + 4N^2 - 4AC}}{2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4N^2}}{2} = \left\{ \begin{matrix} e \\ \text{ou} \\ \eta \end{matrix} \right\}.$$

De là on tire

$$e - C = \frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + 4N^2}}{2} = h^2,$$

$$e - A = -\tfrac{1}{2}(A - C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + 4N^2} = f^2,$$

$$\eta - C = \frac{A - C}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + 4N} = -f^2,$$

$$\eta - A = -\frac{(A - C)}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + 4N^2} = -h^2.$$

Il est clair que $(e - C)$, $(e - A)$ sont positives, que $(\eta - C)$, $(\eta - A)$ sont négatives. Voilà pourquoi j'ai adopté, pour ces quantités, le mode de représentation employé.

D'ailleurs on a

$$N^2 = (e - C)(e - A) = (\eta - C)(\eta - A) = f^2 h^2.$$

Reprenons maintenant l'équation (2), et substituons successivement à

s, $+\infty$, e, η, $-\infty$, il est clair que nous aurons le tableau

$s = +\infty$	$+$
$s = e$	$-$
$s = \eta$	$+$
$s = -\infty$	$-$

Car dans la substitution de e pour s le premier terme disparaîtra, et le second prendra la forme

$$-[M^2h^2 + P^2f^2 \pm 2hfMP] = -[Mh \pm Pf]^2,$$

quantité essentiellement négative.

Lorsque l'on remplace S par η, on aura pour résultat

$$-[-Mf^2 - Ph^2 \pm 2hfMP] = +[Mf \pm Ph]^2,$$

quantité essentiellement positive.

Les trois racines de notre équation sont donc réelles, mais nous ne pouvons aller plus loin et démontrer qu'elles sont positives, ce qui, à mes yeux, rend la seconde méthode essentiellement inférieure à la première.

Signification des paramètres p *et* q.

Supposant maintenant l'équation (2) résolue, ses racines toutes positives trouvées, je veux chercher si les paramètres introduits p, q ont une signification soit géométrique, soit mécanique, comme cela arrive dans plusieurs questions importantes de la Mécanique, par exemple, lorsque l'on veut trouver les équations du mouvement d'un système de points matériels à l'aide du principe des vitesses virtuelles, combiné avec le principe de d'Alembert.

Pour effectuer cette recherche, je reprends le groupe (4), page 33. En le résolvant par rapport à (x, y, z) il est clair qu'il en résultera, pour ces variables, des valeurs de la forme

$$(6)\quad \begin{cases} x = H_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + H_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ y = K_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + K_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + K_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ z = L_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + L_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + L_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \end{cases}$$

où il faut déterminer les neuf constantes H_i, K_i, L_i.

Or ces valeurs de (x, y, z) doivent satisfaire identiquement aux équations du groupe (1), page 17. Si l'on effectue la substitution, on trouve, en ordonnant par rapport aux sinus $(k_i \tau + \varepsilon_i)$,

$$(7)\quad \begin{cases} \quad [-k_1^2 H_1 m + AH_1 + MK_1 + NL_1] \sin(k_1 t + \varepsilon_1) \\ + [-k_2^2 H_2 m + AH_2 + MK_2 + NL_2] \sin(k_2 t + \varepsilon_2) \\ + [-k_3^2 H_3 m + AH_3 + MK_3 + NL_3] \sin(k_3 t + \varepsilon_3) = 0, \\ \quad [-k_1^2 K_1 m + BK_1 + MH_1 + PL_1] \sin(k_1 t + \varepsilon_1) \\ + [-k_2^2 K_2 m + BK_2 + MH_2 + NL_2] \sin(k_2 t + \varepsilon_2) \\ + [-k_3^2 K_3 m + BK_3 + MH_3 + NL_3] \sin(k_3 t + \varepsilon_3) = 0, \\ \quad [-k_1^2 L_1 m + CL_1 + NH_1 + PK_1] \sin(k_1 t + \varepsilon_1) \\ + [-k_2^2 L_2 m + CL_2 + NH_2 + PK_2] \sin(k_2 t + \varepsilon_2) \\ + [-k_3^2 L_3 m + CL_3 + NH_3 + PK_3] \sin(k_3 t + \varepsilon_3) = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations ne peuvent évidemment subsister, quel que soit t, qu'autant que les coefficients des sinus sont nuls séparément, ce qui donne neuf équations pour déterminer les neuf constantes. Heureusement ce calcul laborieux peut être simplifié par les considérations suivantes.

Si nous prenons d'abord les trois relations qui dérivent des trois coefficients de la première équation générale, nous obtenons

$$(8)\quad \begin{cases} k_1^2 = \dfrac{A + \dfrac{K_1}{H_1} M + \dfrac{L_1}{H_1} N}{m}, \\ k_2^2 = \dfrac{A + \dfrac{K_2}{H_2} M + \dfrac{L_2}{H_2} N}{m}, \\ k_3^2 = \dfrac{A + \dfrac{K_3}{H_3} M + \dfrac{L_3}{H_4} N}{m}. \end{cases}$$

Passons maintenant aux relations, fournies par les coefficients de la seconde équation du groupe (7), et prenons garde aux valeurs de mk_1^2 que donnent les résultats que nous venons d'écrire. Nous trouverons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{K_1}{H_1} &= \frac{M + B\dfrac{K_1}{H_1} + P\dfrac{L_1}{H_1}}{A + \dfrac{K_1}{H_1}M + \dfrac{L_1}{H_1}N}, \\ \frac{K_2}{H_2} &= \frac{M + B\dfrac{K_2}{H_2} + P\dfrac{L_2}{H_2}}{A + \dfrac{K_2}{H_2}M + \dfrac{L_2}{H_2}N}, \\ \frac{K_3}{H_3} &= \frac{M + B\dfrac{K_3}{H_3} + P\dfrac{L_3}{H_3}}{A + \dfrac{K_3}{H_3}M + \dfrac{K_3}{H_3}N}. \end{aligned}\right.$$

Enfin la troisième du groupe (7) donnera

$$\frac{L_1}{H_1} = \frac{N + C\dfrac{L_1}{H_1} + P\dfrac{K_1}{H_1}}{A + \dfrac{K_1}{H_1}M + \dfrac{L_1}{H_1}C},$$

. . . .

Si l'on compare ces équations au groupe (1), page 32, il est facile de voir qu'on y satisfera en prenant

$$(10)\qquad \frac{K_i}{H_i} = p_i, \quad \frac{L_i}{H_i} = q_i,$$

i étant 1 ou 2 ou 3, mais représentant le même nombre dans les deux membres.

Ces deux relations réduisent le nombre des constantes à trois, savoir les H_i, et ramènent les intégrales aux formes suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} x &= H_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + H_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ y &= p_1 H_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + p_2 H_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + p_3 H_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3), \\ z &= q_1 H_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + q_2 H_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + q_3 H_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3). \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs dans le groupe (4), page 33, il vient les trois équations :

$$H_1(1 + p_1^2 + q_1^2)\sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2(1 + p_1 p_2 + q_1 q_2)\sin(k_2 t + \varepsilon_2)$$
$$+ H_3(1 + p_1 p_3 + q_1 q_3)\sin(k_3 t + \varepsilon_3) = E_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1),$$
$$H_1(1 + p_1 p_2 + q_1 q_2)\sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2(1 + p_2^2 + q_2^2)\sin(k_2 t + \varepsilon_2)$$
$$+ H_3(1 + p_2 p_3 + q_2 q_3)\sin(k_3 t + \varepsilon_3) = E_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),$$
$$H_1(1 + p_1 p_3 + q_1 q_3)\sin(k_1 t + \varepsilon_1) + H_2(1 + p_2 p_3 + q_2 q_3)\sin(k_2 t + \varepsilon_2)$$
$$+ H_3(1 + p_3^2 q_3^2)\sin(k_3 t + \varepsilon_3) = E_3 \sin(k_3 t + \varepsilon_3).$$

Or il est clair que l'existence de ces équations entraîne les relations

$$(12)\quad H_1(1+p_1^2+q_1^2)=E_1,\quad H_2(1+p_2^2+q_2^2)=E_2,\quad H_3(1+p_3^2+q_3^2)=E_3;$$
$$(13)\quad 1+p_1 p_2+q_1 q_2=0,\quad 1+p_1 p_3+q_1 q_3=0,\quad 1+p_2 p_3+q_2 q_3=0.$$

Des trois premières on tire les H_i en fonctions des E_i, et par suite la forme définitive des valeurs de (x, y, z), lorsque l'on aura trouvé les E_i en fonctions des données initiales, ce qui n'offre aucune difficulté. Le groupe de la seconde ligne va me conduire au but de ma recherche actuelle, qui est de découvrir la signification des (p_i, q_i). En effet, joignant le point, qui est la position d'équilibre du mobile, et qui est aussi, comme on s'en souvient, l'origine des (x, y, z), avec la position du mobile à un instant quelconque, soit l la longueur de cette ligne, nous aurons toujours

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Faisons passer par l'origine une droite qui fasse avec les axes des (x, y, z) des angles $(\varphi_1, \theta_1, \psi_1)$. Soit ω_1 l'angle de cette droite avec l. En projetant l sur cette dernière droite et appelant h_1 la projection, nous aurons, à un instant quelconque du mouvement,

$$\begin{aligned} h_1 = l\cos\omega_1 &= l\left(\frac{x}{l}\cos\varphi_1 + \frac{y}{l}\cos\theta_1 + \frac{z}{l}\cos\psi_1\right) \\ &= x\cos\varphi_1 + y\cos\theta_1 + z\cos\psi_1, \end{aligned}$$

quels que soient les angles $(\varphi_1, \theta_1, \psi_1)$. Déterminons ces angles en prenant

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}, \quad \cos\theta_1 = \frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}, \quad \cos\psi_1 = \frac{q_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}},$$

alors il vient

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}(x + p_1 y + q_1 z),$$

ou, d'après le groupe (4), page 33,

$$h_1 = \frac{E_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}} \sin(k_1 t + \varepsilon_1).$$

Cette dernière relation ayant lieu à une époque quelconque du mouvement, h_1 est une véritable coordonnée, exprimée en fonction du temps, et dont la valeur est, comme on le voit, périodique.

p_2 et q_2, p_3 et q_3 donneraient de même

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} h_2 &= \frac{E_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}} \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ h_3 &= \frac{E_3}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}} \sin(k_3 t + \varepsilon_3). \end{aligned} \right.$$

Nous avons donc trois lignes ou axes, perpendiculaires entre eux, d'après le groupe (13), suivant lesquels le mobile exécute des oscillations périodiques et isochrones, et ces axes sont fixés précisément par les coefficients p_i, q_i. Il est clair que ces axes ne sont autre chose que ceux auxquels nous avons rapporté le mouvement dans la première méthode, pour parvenir plus facilement à l'intégration des équations du problème. Ainsi les p_i, q_i n'ont pas de signification mécanique, mais bien une signification géométrique : ce sont des rapports de cosinus qui s'introduisent dans la seconde méthode, comme pour rappeler au géomètre, dans toutes les phases de ses calculs, qu'il y a une voie plus courte, plus directe que celle qu'il a choisie, et que même si la voie la plus longue, la plus laborieuse le mène au résultat désiré, ce n'est qu'à la faveur des secours qu'il reçoit, sans qu'il s'en doute, de la méthode simple et directe.

Je dois dire néanmoins que la seconde méthode, appliquée aux équations différentielles du mouvement d'un système de points matériels, légèrement écartés de leurs positions d'équilibre stable, me semble propre à conduire d'une manière très-naturelle à leurs intégrales générales.

En effet, reprenons les équations de la page 12, (11), multiplions la première par 1, la seconde par p, la troisième par q, etc., et additionnons, il viendra

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left[\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots\right] + \frac{d^2\beta}{dt^2}\left[\mathbf{B}_{(1,2)} + p\mathbf{A}_2 + q\mathbf{B}_{(2,3)} + \ldots\right]\\
&+ \frac{d^2\gamma}{dt^2}\left[\mathbf{B}_{(1,3)} + p\mathbf{B}_{(2,3)} + q\mathbf{A}_3 + \ldots\right] + \ldots\\
&+ \alpha\left[A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots\right] + \beta\left[B_{(1,2)} + pA_2 + qB_{(2,3)} + \right]\\
&+ \gamma\left[B_{(1,3)} + pB_{(2,3)} + qA_3 + \ldots\right] + \ldots\ldots = 0,
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(15)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\mathbf{B}_{(1,2)} + p\mathbf{A}_2 + q\mathbf{B}_{(2,3)} + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots}\frac{d^2\beta}{dt^2}\\
&\qquad + \frac{\mathbf{B}_{(1,3)} + p\mathbf{B}_{(2,3)} + q\mathbf{A}_3 + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots}\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots\\
&= \frac{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots}\left\{\begin{aligned}&\alpha + \frac{B_{(1,2)} + pA_2 + qB_{(2,3)} + \ldots}{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots}\beta\\ &+ \frac{B_{(1,3)} + pB_{(2,3)} + qA_3 + \ldots}{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots}\gamma + \ldots\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Si nous déterminons les paramètres introduits par les conditions

$$(16)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{B}_{(1,2)} + p\mathbf{A}_2 + q\mathbf{B}_{(2,3)} + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots} = \frac{B_{(1,2)} + pA_2 + qB_{(2,3)} + \ldots}{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots} = \mathrm{G},\\
&\frac{\mathbf{B}_{(1,3)} + p\mathbf{B}_{(2,3)} + q\mathbf{A}_3 + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots} = \frac{B_{(1,3)} + pB_{(2,3)} + qA_3 + \ldots}{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots} = \mathrm{H},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\frac{A_1 + pB_{(1,2)} + qB_{(1,3)} + \ldots}{\mathbf{A}_1 + p\mathbf{B}_{(1,2)} + q\mathbf{B}_{(1,3)} + \ldots} = \mathrm{K}^2,
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathrm{G}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathrm{H}\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \ldots + \mathrm{K}^2(\alpha + \mathrm{G}\beta + \mathrm{H}\gamma + \ldots) = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + K^2 u = 0,$$

d'où

(17) $$u_i = E_i \sin(K_i t + \varepsilon_i)$$

en posant

$$\alpha + G\beta + H\gamma + \ldots = u.$$

Il est évident, à la seule inspection des formules (16), que l'élimination des (p_i, q_i) donnera en K^2 une équation du degré $(3n - \nu)$. Donc nous aurons, en employant les $3n - \nu$ valeurs de K^2, $3n - \nu$ intégrales semblables à (17), et ces intégrales suffisent pour déterminer les $3n - \nu$ variables indépendantes, dont chacune s'exprimera en fonction de $3n - \nu$ termes circulaires, c'est-à-dire précisément par autant de termes qu'il y aura de variables indépendantes. Les valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ seront semblables à celles que nous avons trouvées pour (x, y, z), groupe (6), page 38. Si l'on porte ces valeurs des $3n - \nu$ variables dans les équations du mouvement (11), page 12, mises, si l'on veut, sous la forme (12), on trouvera un groupe d'équations analogues au groupe (7), page 38, et du groupe d'équations trouvées on passera à deux autres analogues à (8) et (9) des pages 38 et 39, d'où enfin on tirera des relations analogues à (10) de la page 39, ce qui suffit pour établir la proposition que nous avions en vue, sans qu'il reste le plus léger doute sur la rigueur de la démonstration.

Vu et approuvé,
Le 16 novembre 1858,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 16 novembre 1858,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
ARTAUD.

6.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES PLANÉTAIRES.

INTRODUCTION.

La question générale des figures d'équilibre des liquides intéresse au plus haut point plusieurs branches des mathématiques appliquées. S'il est vrai que notre terre et les planètes en général aient été fluides à un instant quelconque de leur durée, ce sera à la solution de cette grande question qu'il faudra demander les figures qu'elles ont prises sous l'influence de l'attraction solaire, de leurs attractions réciproques et de leur propre attraction sur les molécules qui les composent. Mais la question, envisagée sous ce point de vue général, offre de grandes difficultés, des difficultés insurmontables peut-être. Aussi dans les essais, tentés jusqu'à ce jour, s'est-on borné, du moins à ma connaissance (1), à traiter un seul cas particulier de la question générale. On s'est demandé quelle figure d'équilibre convient à une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. Maclaurin le premier a démontré que l'ellipsoïde de révolution aplati résout le problème. Cette solution n'est pourtant pas la seule, du moins tant que la vitesse angulaire reste comprise entre certaines limites. Entre ces limites, l'ellipsoïde à trois axes inégaux satisfait aussi. Ce nouveau théo-

(1) Ce travail était terminé et déjà entre les mains de la Faculté des Sciences, lorsque j'ai appris de M. Liouville que la dernière question traitée dans cette thèse avait fait le sujet d'un Mémoire remarquable, présenté par M. Roche à l'Académie des Sciences, et favorablement accueilli par la savante compagnie qui en avait ordonné l'insertion au *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*.

reme, annoncé par M. Jacobi en 1834, a été démontré d'abord par M. Liouville; plus tard M. Meyer, de Kœnigsberg, l'a repris par un procédé élégant. Enfin la solution de cette intéressante question a été présentée avec toute la clarté que l'esprit français sait porter dans les sujets dont il s'empare, dans un Mémoire de M. Liouville, publié dans la *Connaissance des Temps* pour 1846.

La lecture de ces intéressants travaux m'a porté à me demander si l'on ne pourrait pas trouver une formule générale qui, en conduisant aux équations du problème précédent, permît, en même temps, de résoudre quelque nouveau cas particulier de la question générale. J'ai établi d'abord cette formule, qui me semble convenir aussi bien à l'hydrostatique qu'à l'hydrodynamique. Elle m'a donné les équations du problème résolu par MM. Liouville et Meyer. Ensuite, comme seconde application, j'ai résolu le problème dont voici l'énoncé : Quelle figure d'équilibre convient à une masse fluide homogène, tournant autour d'un axe fixe d'un mouvement uniforme, pendant que ses molécules s'attirent entre elles suivant la loi de la nature, et sont en outre attirées, suivant la même loi, par un corps central très-éloigné, dont le centre de gravité est sur l'axe même de rotation et dans le plan de l'orbite? J'ai trouvé que l'ellipsoïde de révolution allongé satisfait à la question.

I.

Formule fondamentale.

Les problèmes que je me propose de traiter sont des problèmes d'hydrodynamique; mais il existe une formule générale également applicable aux problèmes d'hydrostatique et d'hydrodynamique, que les liquides soient isolés ou en contact avec les solides, et dont les diverses questions, que l'on peut se proposer sur les liquides, ne sont que des applications particulières. C'est cette formule que je vais d'abord établir, en suivant une marche indiquée par Gauss dans son Mémoire intitulé : *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (1). Il sera facile ensuite d'en déduire les diverses formules particulières qui conviennent à chacune des questions que j'aurai à traiter.

(1) Gœttingue, 1830.

Depuis les essais de Canton et de Perkins pour constater la compressibilité des liquides, cette propriété a été mise hors de doute par les expériences d'un grand nombre d'habiles physiciens. Toutefois, dans l'établissement de la formule générale, je n'en tiendrai pas compte. Ce serait inutile pour les applications que j'en dois faire.

Soit donc un corps solide, immobile, en contact avec deux liquides qui ne se mêlent pas. Cherchons la condition d'équilibre d'un pareil système, lorsque chaque molécule de ce système n'est soumise qu'à des forces extérieures, toutes dirigées vers un centre commun et aux actions des autres molécules, soit du liquide auquel elle appartient, soit de l'autre liquide, soit enfin du corps solide. Appelons L l'un des liquides, A l'autre, C le corps solide. Soient m et m_1 deux molécules de L, μ une des molécules de A, M une des molécules de C. Désignons par (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (ξ, η, ζ), (ξ_2, η_2, ζ_2) les coordonnées de ces quatre molécules. m sera soumise : 1° à l'action d'une force extérieure mP, P étant la force rapportée à l'unité de masse; 2° à l'action de m_1 ; 3° à l'action de μ ; 4° enfin à l'action de M. Ces trois dernières actions seront des fonctions des distances des molécules. Soit ρ la distance qui sépare m et m_1, on aura pour exprimer l'action de m_1 sur m

$$mm_1 \mathrm{F}(\rho).$$

Les actions de μ et de M sur m s'exprimeront par

$$m\mu \mathrm{F}_1(\rho_1), \quad m\mathrm{M}\mathrm{F}_2(\rho_2),$$

ρ_1 et ρ_2 étant les distances de μ et M à m; F_1 et F_2 désignant des fonctions qui peuvent ne pas être de la même nature que F.

Si l'on cherchait les actions qu'une molécule du second fluide éprouve de la part de trois molécules prises, comme plus haut, respectivement dans chaque corps, on trouverait

$$\mu\mu_1 \mathrm{F}_3(\rho_3), \quad \mu m \mathrm{F}_1(\rho_1), \quad \mu\mathrm{M}\mathrm{F}_4(\rho_4).$$

Une molécule du corps solide éprouverait les actions

$$\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{F}_5(\rho_5), \quad m\mathrm{M}\mathrm{F}_2(\rho_2), \quad \mu\mathrm{M}\mathrm{F}_4(\rho_4).$$

Faisons maintenant subir aux deux liquides, supposés incompressibles, un déplacement virtuel compatible avec les liaisons existantes. Les points d'application de toutes les forces qui sollicitent les molécules se déplaceront, et l'on aura, pour les moments virtuels des forces agissant sur m, citées plus haut,

$$\begin{aligned} m\mathrm{P}\delta p &+ mm_1 \mathrm{F}(\rho)\left(\frac{x_1-x}{\rho}\delta x + \frac{y_1-y}{\rho}\delta y + \frac{z_1-z}{\rho}\delta z\right) \\ &+ m\mu \mathrm{F}_1(\rho_1)\left(\frac{\xi-x}{\rho_1}\delta x + \frac{\eta-y}{\rho_1}\delta y + \frac{\zeta-z}{\rho_1}\delta z\right) \\ &+ m\mathrm{M}\mathrm{F}_2(\rho_2)\left(\frac{\xi_2-x}{\rho_2}\delta x + \frac{\eta_2-y}{\rho_2}\delta y + \frac{\zeta_2-z}{\rho_2}\delta z\right). \end{aligned}$$

En appelant Π la force extérieure qui agit sur μ, ϖ la distance au centre fixe, on aura de même, pour la somme des moments virtuels des forces qui agissent sur μ,

$$\begin{aligned} \mu\Pi\delta\varpi &+ m\mu \mathrm{F}_1(\rho_1)\left(\frac{x-\xi}{\rho_1}\delta\xi + \frac{y-\eta}{\rho_1}\delta\eta + \frac{z-\zeta}{\rho_1}\delta\zeta\right) \\ &+ \mu\mu_1 \mathrm{F}_3(\rho_3)\left(\frac{\xi_1-\xi}{\rho_3}\delta\xi + \frac{\eta_1-\eta}{\rho_3}\delta\eta + \frac{\zeta_1-\zeta}{\rho_3}\delta\zeta\right) \\ &+ \mu\mathrm{M}\mathrm{F}_4(\rho_4)\left(\frac{\xi_2-\xi}{\rho_4}\delta\xi + \frac{\eta_2-\eta}{\rho_4}\delta\eta + \frac{\zeta_2-\zeta}{\rho_4}\delta\zeta\right). \end{aligned}$$

Mais l'on a

$$\rho = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2};$$

si nous indiquons par $\delta_m\rho$ la variation que subit ρ dans le déplacement de m, il viendra

$$\delta_m\rho = \frac{(x-x_1)\delta x + (y-y_1)\delta y + (z-z_1)\delta z}{\rho}.$$

Les deux sommes précédentes peuvent donc s'écrire

$$m\mathrm{P}\delta p - mm_1\mathrm{F}(\rho)\delta_m\rho - m\mu\mathrm{F}_1(\rho_1)\delta_m\rho_1 - m\mathrm{M}\mathrm{F}_2(\rho_2)\delta_m\rho_2;$$

$$\mu\Pi\delta\varpi - m\mu\mathrm{F}_1(\rho_1)\delta_\mu\rho_1 - \mu\mu_1\mathrm{F}_3(\rho_3)\delta_\mu\rho_3 - \mu\mathrm{M}\mathrm{F}_4(\rho_4)\delta_\mu\rho_4.$$

Toutes deux entreront dans la somme des moments virtuels du système total : mais il est clair que le second terme de la première somme sera accompagné d'un autre terme qui sera $-mm_1 F(\rho)\delta_{m_1}\rho$, lequel additionné avec le terme précité donnera $-mm_1 F(\rho)\delta\rho$, $\delta\rho$ étant ici la variation totale de ρ; que le troisième terme de la première et le second de la deuxième se réduiront à un seul qui sera $-m\mu F_1(\rho_1)\delta\rho_1$, $\delta\rho_1$ ayant une signification analogue à $\delta\rho$; que le troisième terme de la deuxième somme aura un correspondant $-\mu\mu_1 F_3(\rho_3)\delta_{\mu_1}\rho_3$ qui réuni avec lui fournira $-\mu\mu_1 F_3(\rho_3)\delta\rho_3$; qu'enfin les derniers termes de chaque somme n'auront pas de correspondants, le corps solide et toutes ses molécules étant supposés absolument fixes. Si l'on additionne les deux sommes après les réductions indiquées, il viendra

$$m P \delta p + \mu \Pi \delta\varpi - mm_1 F(\rho)\delta\rho - m\mu F_1(\rho_1)\delta\rho_1 - \mu\mu_1 F_3(\rho_3)\delta\rho_3$$
$$- m M F_2(\rho_2)\delta\rho_2 - \mu M F_4(\rho_4)\delta\rho_4.$$

Appelons maintenant $\varphi(\rho)$ l'intégrale $\int F(\rho)\delta\rho$ et conservons à chaque φ l'indice de l'F d'où il provient, cette quantité pourra se mettre sous la forme

$$m P \delta p + \mu \Pi \delta\varpi - \delta mm_1 \varphi(\rho) - \delta m\mu\varphi_1(\rho_1) - \delta\mu\mu_1\varphi_3(\rho_3)$$
$$- \delta m M \varphi_2(\rho_2) - \delta\mu M \varphi_4(\rho_4).$$

Désignons par S une sommation sur le liquide L, par Σ une sommation sur le liquide Λ, par $\mathfrak{S}$ une troisième sommation relative au corps solide; il est évident que pour écrire l'équation d'équilibre, fournie par le principe des vitesses virtuelles, pour le système total, nous devons avoir

$$(\text{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{S} m P \delta p + \sum \mu \Pi \delta\varpi - \tfrac{1}{2}\delta \mathrm{S} m \mathrm{S} m_1 \varphi(\rho) \\ & - \tfrac{1}{2}\delta \mathrm{S} m \sum \mu \varphi_1(\rho_1) - \tfrac{1}{2}\delta \sum \mu \sum \mu_1 \varphi_3(\rho_3) \\ & - \delta \mathrm{S} m \,\mathfrak{S} M \varphi_2(\rho_2) - \delta \sum \mu \,\mathfrak{S} \varphi_4(\rho_4) = 0. \end{aligned} \right.$$

Je mets le coefficient $\frac{1}{2}$ devant les trois premières sommes doubles, parce que, dans chacune d'elles, les variations devront être prises par rapport aux deux molécules qui sont en évidence dans chacun des termes qu'elle représente, chacun de ces termes en donnera deux qui, additionnés, reproduiront la variation totale de la fonction φ qui entre dans ce terme de la somme.

Si l'on ne tenait pas compte des actions moléculaires, il ne resterait que les deux premiers termes de la somme, et, dans le cas où il n'y aurait d'autres forces extérieures que la pesanteur, l'équation (A) apprendrait que, pour l'équilibre, le centre de gravité doit être le plus haut ou le plus bas possible. Ainsi se trouverait démontré ce théorème bien connu d'hydrostatique, que deux liquides, d'inégale densité, étant superposés, l'équilibre ne peut être stable que si le plus dense est le plus bas.

J'ai supposé jusqu'ici qu'il n'y avait pas de pression extérieure, s'exerçant sur la surface des liquides. Si cette pression existait, soit $\mathfrak{P}$ sa valeur sur l'unité de surface, O la surface libre de L, Ω celle de Λ; dO, $d\Omega$ les éléments de ces surfaces; δn, $\delta \nu$ les distances, comptées sur les normales à ces surfaces, comprises entre dO, $d\Omega$ et les éléments qui leur correspondent sur les nouvelles surfaces, après le déplacement virtuel. On voit facilement qu'en désignant par $\mathbf{S}_o$, $\sum_\omega$ des sommations sur les surfaces primitives des deux liquides, la somme des moments virtuels, dus aux pressions extérieures, sera

$$-\mathfrak{P}\left(\mathbf{S}_o dO\,\delta n + \sum\nolimits_\omega d\Omega\,\delta\nu\right).$$

Je donne le signe $-$ à ces moments, parce que les fluides étant supposés incompressibles et la pression extérieure tendant à rapprocher leurs molécules, il s'ensuit que la projection du chemin parcouru par le point d'application de la pression sera toujours sur le prolongement de la direction de cette force, ce qui rend les moments virtuels négatifs.

L'expression que nous venons d'écrire est celle qu'il faudra ajouter au premier membre de (A), lorsqu'il existera une pression extérieure. Mais je ne tiendrai pas compte de cette force dans ce qui suit. Il sera facile d'y avoir égard dans les applications de la formule (A), où cette force devrait être prise en considération.

Désignons par (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) les composantes, suivant les axes, des forces extérieures P et Π, la formule (A) peut encore s'écrire :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \sum \mu(X_1\delta\xi + Y_1\delta\eta + Z_1\delta\zeta)\\ &-\tfrac{1}{2}\delta\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\varphi(\rho) - \tfrac{1}{2}\delta\mathrm{S}m\sum\mu\varphi_1(\rho_1) - \tfrac{1}{2}\delta\sum\mu\sum\mu_1\varphi_3(\rho_3)\\ &-\delta\mathrm{S}m\,\mathfrak{S}\mathrm{M}\varphi_2(\rho_2) - \delta\sum\mu\,\mathfrak{S}\varphi_4(\rho_4) = 0.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation générale d'équilibre du système. Il ne sera pas difficile maintenant de trouver l'équation générale du mouvement. En effet, l'expression analytique des forces capables de produire ce mouvement étant $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, on sait par le principe de d'Alembert qu'il suffit, pour obtenir l'équation générale cherchée, d'écrire que l'équilibre existe entre les forces, agissant sur le système, et les forces effectives, prises en sens contraire. Donc on aura, pour l'équation du mouvement, l'expression suivante :

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{
\begin{aligned}
& Sm\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] \\
& + \sum \mu\left[\left(X_1 - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\delta \xi + \left(Y_1 - \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\delta \eta + \left(Z_1 - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\delta \zeta\right] \\
& - \frac{1}{2}\delta SmSm_1\varphi(\rho) - \frac{1}{2}\delta Sm\sum \mu\varphi_1(\rho_1) - \frac{1}{2}\delta\sum\mu\sum\mu\varphi_3(\rho_3) \\
& - \delta Sm\,\mathfrak{S}M\varphi_2(\rho_2) - \delta\sum\mu\,\mathfrak{S}M\varphi_4(\rho_4) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

C'est de cette équation générale que nous allons tirer la solution des problèmes astronomiques, annoncés dans l'introduction.

II.

Chercher la figure d'équilibre d'une masse fluide dont les molécules s'attirent entre elles suivant la loi de la nature et sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, ou, en d'autres termes, chercher la figure que la masse fluide doit affecter pour que, malgré le mouvement, une molécule ne se déplace pas par rapport aux autres.

Pour appliquer la formule générale (C) à ce cas particulier, il suffira d'y supprimer les termes relatifs au second liquide Λ et au corps solide C. Prenons l'axe de rotation pour l'axe des z, l'équation prend alors la forme simple

$$
(\mathrm{D})\quad Sm\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] - \frac{1}{2}SmSm_1\varphi(\rho) = 0.
$$

Ici il n'y a point de forces extérieures et X, Y, Z sont nuls. La force effective, prise en sens contraire est, en appelant θ la vitesse angulaire, $\theta^2 r$; les composantes, suivant les axes des (x, y, z), sont $\theta^2 x$, $\theta^2 y$, o. L'équation précédente devient

$$\mathrm{S}m\theta^2[x\,\delta x + y\,\delta y] - \frac{1}{2}\,\delta\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\,\varphi(\rho) = 0,$$

ou, comme

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

d'où

$$x\,\delta x + y\,\delta y = r\,\delta r,$$

r étant la distance d'une molécule à l'axe,

$$\mathrm{S}m\theta^2\,r\,\delta r - \frac{1}{2}\,\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\,\varphi(\rho) = 0.$$

L'attraction s'exerçant suivant la loi de la nature, on a

$$\mathrm{F}(\rho) = \frac{1}{\rho^2},$$

d'où

$$\varphi(\rho) = -\frac{1}{\rho}.$$

Si nous multiplions tout par 2, que nous fassions entrer ce facteur sous le signe S au premier terme, ce qui est permis, nous pourrons enfin écrire :

$$\theta^2\,\delta\mathrm{S}mr^2 + \delta\mathrm{S}m\,\mathrm{S}m_1\,\frac{1}{\rho} = 0. \tag{1}$$

Il nous faut maintenant trouver les variations des deux termes de cette équation. Pour cela j'imagine, dans l'intérieur du liquide et à peu de distance de la surface extérieure, une deuxième surface qui ait les mêmes normales que la première. Le fluide total sera alors décomposé en deux parties : 1° la partie comprise entre les deux surfaces; 2° la partie comprise dans le creux de la surface intérieure. En désignant par S_e et S_i des sommations relatives à ces deux parties, nous aurons

$$\mathrm{S}mr^2 = \mathrm{S}_e mr^2 + \mathrm{S}_i mr^2.$$

Or, lorsque l'on fait varier infiniment peu la surface extérieure, le second terme ne change pas. Quant au premier, appelons δn l'élément infiniment petit de la normale à la surface extérieure compté à partir de cette surface : par la variation que nous faisons subir au liquide, l'épaisseur du fluide entre les deux surfaces variera de δn, et la partie de ce fluide qui repose sur l'élément dO de la surface extérieure variera de $dO\,\delta n$. La variation du moment d'inertie, correspondante à cet élément du fluide, sera donc $r^2 dO\,\delta n$, et la variation du moment d'inertie du liquide total sera

$$\int r^2 dO\,\delta n,$$

l'intégrale s'étendant à toute la surface extérieure du liquide.

Pour le terme $SmSm_1\frac{1}{\rho}$, je remarque qu'il n'est autre chose que le potentiel du liquide sur lui-même, en appelant avec les géomètres, d'après George Green, *potentiel* d'un corps sur un point matériel la somme des éléments de masse du corps attirant, divisés respectivement par leurs distances au point attiré. Or, si nous concevons une loi d'attraction en raison inverse de la simple distance et en raison directe des masses, $SmSm_1\frac{1}{\rho}$ sera précisément l'attraction de tout le liquide sur lui-même. Cette conception permet de calculer facilement la variation de cette intégrale sextuple. En effet, $SmSm_1\frac{1}{\rho}$, en employant la surface intérieure dont il a été parlé plus haut, se décompose en deux parties : 1° l'attraction de tout le liquide sur la partie comprise entre les deux surfaces; 2° l'attraction de tout le liquide sur la partie comprise dans le creux de la surface intérieure. Soit U, dans la loi d'attraction que nous supposons, l'attraction de toute la masse liquide sur la partie du liquide comprise entre les deux surfaces et qui repose sur l'unité de surface de la surface extérieure, partie que nous pouvons prendre pour l'unité de masse; l'attraction exercée par toute la masse sur le liquide qui repose sur l'élément dO de la surface extérieure sera alors $U dO$. Si la surface extérieure varie de manière que la partie de la normale comprise entre les deux surfaces varie de δn, le produit $U dO$ variera de $U dO\,\delta n$, et la variation de l'attraction de toute la masse sur tout le liquide compris entre les deux surfaces sera exprimée par $\int U\,dO\,\delta n$, l'intégrale s'étendant à toute la surface du liquide. L'action étant égale et contraire à la réaction, la variation de l'attraction du liquide compris entre les deux surfaces sur toute la masse sera aussi $\int \mathrm{U}\, d\mathrm{O}\, \delta n$; la variation totale sera donc

$$2\int \mathrm{U}\, d\mathrm{O}\, \delta n.$$

Or, comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'attraction de tout le liquide sur lui-même, dans l'hypothèse où elle agit en raison inverse de la simple distance, n'est autre chose que le potentiel; donc la variation totale du potentiel est exprimée par

$$2\int \mathrm{U}\, d\mathrm{O}\, \delta n,$$

U étant le potentiel sur l'unité de masse, et l'intégrale s'étendant à toute la surface extérieure.

En portant les valeurs trouvées dans (1), on aura, pour l'équation de la surface d'équilibre du liquide

$$\theta^2 \int r^2\, d\mathrm{O}\, \delta n + 2\int \mathrm{U}\, d\mathrm{O}\, \delta n = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(2) \qquad \int (\theta^2 r^2 + 2\mathrm{U})\, d\mathrm{O}\, \delta n = 0.$$

L'intégrale $\int d\mathrm{O}\, \delta n$ exprime la variation du volume, puisqu'on l'étend à toute la surface extérieure. Elle est nulle, le volume étant supposé constant. La condition exprimée par l'équation précédente n'aura donc lieu que pour

$$\theta^2 r^2 + 2\mathrm{U} = \text{constante}$$

ou

$$\theta^2 (x^2 + y^2) + 2\mathrm{U} = \text{constante}.$$

Telle est l'équation de la surface d'équilibre. Il reste à remplacer U par sa valeur en fonction des coordonnées d'un point quelconque de cette surface; mais, pour obtenir cette valeur, il me faut entrer dans certains développements que je vais donner.

Attraction d'un ellipsoïde sur un point de son intérieur ou de sa surface.

Comme, dans les applications qui vont suivre, je ferai un fréquent usage des formules qui expriment l'attraction d'un ellipsoïde sur un point de son intérieur ou de sa surface, et que, pour les appliquer aux besoins des questions traitées, je serai obligé de les mettre sous une forme particulière, il est nécessaire que j'établisse, en peu de mots, ces formules, et que j'indique la forme à donner au potentiel de l'ellipsoïde pour l'introduire facilement dans les calculs.

Soit donc un ellipsoïde homogène

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et, dans l'intérieur de ce corps, un point quelconque K ayant pour coordonnées suivant les axes des (x, y, z) α, β, γ. Soit μ la masse de ce point, f le coefficient de l'attraction, ρ la densité de la matière. Si l'on appelle A, B, C les composantes, suivant les axes, de l'attraction, exercée par l'ellipsoïde entier sur le point de masse μ, on sait que l'on a

$$A_1=f\mu\rho\iiint\frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz}{r^3},$$

$$B_1=f\mu\rho\iiint\frac{(y-\beta)\,dx\,dy\,dz}{r^3},$$

$$C_1=f\mu\rho\iiint\frac{(z-\gamma)\,dx\,dy\,dz}{r^3}.$$

Transportons maintenant l'origine au point attiré K, sans changer la direction des axes, puis passons des nouvelles coordonnées rectilignes à des coordonnées polaires, savoir : le rayon vecteur r qui joint le point attiré à un point attirant quelconque ; l'angle θ de r avec une parallèle à l'axe des x, menée par le point K ; enfin l'angle ψ que fait avec une parallèle à l'axe des y, menée par K, la projection de r sur le plan, passant par K et parallèle au plan des yz, il viendra

$$x=\alpha+x'=\alpha+r\cos\theta,$$

$$y=\beta+y'=\beta+r\sin\theta\cos\psi,$$

$$z=\gamma+z'=\gamma+r\sin\theta\sin\psi.$$

Quant au produit $dxdydz$, on sait qu'en coordonnées polaires il devient $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, dr$, résultat qu'on trouverait encore, en différentiant les trois équations précédentes, et en suivant, pour combiner les équations différentielles qui en résulteraient, la marche indiquée par M. Catalan ou par M. Cauchy, pour les changements de variables dans le calcul intégral.

De là résulte

$$A_1 = f \mu \rho \int\int\int \cos\theta \sin\theta \, d\psi \, d\theta \, dr.$$

L'intégration par rapport à r peut s'effectuer. Pour connaître les limites relatives à cette variable, il faut, dans l'équation de l'ellipsoïde, remplacer (x, y, z) par leurs valeurs et résoudre par rapport à r. La substitution donne

$$\frac{(r\cos\theta + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\theta\cos\psi + \beta)^2}{b^2} + \frac{(r\sin\theta\sin\psi + \gamma)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

ou en posant

$$M = \frac{\alpha\cos\theta}{a^2} + \frac{\beta\sin\theta\cos\psi}{b^2} + \frac{\gamma\sin\theta\sin\psi}{c^2},$$

$$L = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}$$

$$= \cos^2\psi\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) + \sin^2\psi\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right),$$

$$N = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1,$$

$$r = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{2L},$$

N est négatif. Donc l'équation a une racine positive et une racine négative, ce qui était évident à priori; mais il ne sera pas nécessaire de considérer les deux. On pourra se borner à la racine positive, pourvu qu'on prenne, pour limites de θ, 0 et π; pour limites de ψ, 0 et 2π. Les limites de r sont alors 0 et la racine positive précédente.

D'après cela, si l'on prend garde que l'intégrale, provenant du radical, est nulle, ainsi que l'intégrale provenant des deux derniers termes de **M**, on trouvera

$$A_1 = -\frac{f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\,d\psi}{\cos^2\psi\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\sin^2\psi\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)}.$$

Les deux limites supérieures peuvent être réduites à $\frac{\pi}{2}$ pourvu que l'on multiplie par 2, pour l'intégrale relative à θ, par 4, pour l'intégrale relative à ψ. Ensuite, en posant $\tang\psi = t$, l'intégration relative à ψ s'effectue et donne

$$A_1 = -\frac{4\pi f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)}}.$$

Posons $\tang^2\theta = \frac{u}{a^2}$; par des réductions faciles, il viendra

$$A_1 = -\frac{2\pi f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)}}$$

$$= -\frac{2\pi f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R}$$

en faisant

$$R = \sqrt{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)}.$$

Des calculs analogues donneraient

$$B_1 = -\frac{2\pi f\mu\rho\beta}{b^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R},$$

$$C_1 = -\frac{2\pi f\mu\rho\gamma}{c^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R}.$$

Telle est la forme que nous garderons, pour ces quantités, dans les applications que nous en ferons. Elle nous fournira des résultats plus faciles à interpréter que la forme

$$A_1 = -\frac{4\pi f \mu \rho \alpha bc}{a^2} \int_0^1 \frac{u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que l'on aurait obtenue en posant

$$\cos\theta = u, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 + \lambda^2, \quad \frac{c^2}{a^2} = 1 + \lambda'^2;$$

mais lorsqu'on voudra effectivement calculer l'attraction d'un ellipsoïde sur un point de sa masse et arriver aux nombres, c'est cette dernière forme qu'il faudra adopter. Admettons, par exemple, que l'on ait, entre les axes de l'ellipsoïde, la double relation

$$a < c < b,$$

il s'ensuit $\lambda^2 > \lambda'^2$. Posons alors $\lambda u = \tang \varphi$, il en résultera

$$\int_0^1 \frac{u^2\, du}{\sqrt{1+\lambda^2 u^2}\sqrt{1+\lambda'^2 u^2}} = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi}} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Si l'on pose $\frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda^2} = c^2$, que l'on remplace $\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$ par $\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}$, et que l'on prenne garde à la relation

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi} = -\left(1 - \frac{1}{1-\sin^2\varphi}\right),$$

on pourra écrire

$$\int_0^1 \frac{u^2\, du}{\sqrt{1+\lambda^2 u^2}\sqrt{1+\lambda'^2 u^2}} = -\frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \lambda} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$
$$+ \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \lambda} \frac{1}{1-\sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

où c est moindre que 1. On aura ainsi ramené la question à la recherche des valeurs numériques de deux fonctions elliptiques, l'une de première, l'autre de troisième espèce, problème qui est résolu par les Tables du *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre. La forme dont nous nous occupons donnerait des résultats analogues pour B_1 et C_1.

Soient maintenant (A, B, C) les attractions exercées par l'ellipsoïde sur trois points de sa surface, situés respectivement aux extrémités des axes (a, b, c), nous aurons

$$A = -\frac{2\pi f\rho}{a}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R},$$

$$B = -\frac{2\pi f\rho}{b}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R},$$

$$C = -\frac{2\pi f\rho}{c}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R}.$$

En remplaçant, dans les coordonnées du point attiré, (α, β, γ) par (x, y, z), les valeurs de (A_1, B_1, C_1) pourront s'écrire sous la forme très-simple

$$A_1 = \frac{A}{a}x, \quad B_1 = \frac{B}{b}y, \quad C_1 = \frac{C}{c}z.$$

Le potentiel est une fonction de (x, y, z) telle qu'étant différentiée successivement par rapport à (x, y, z), elle donne les trois composantes, suivant les axes, de l'attraction exercée par l'ellipsoïde sur le point attiré. En l'appelant U, comme plus haut, on doit donc avoir pour l'ellipsoïde

$$U = \frac{1}{2}\left(A\frac{x^2}{a} + B\frac{y^2}{b} + C\frac{z^2}{c}\right).$$

C'est à cette formule remarquable que j'avais besoin d'arriver, pour pouvoir introduire facilement le potentiel de l'ellipsoïde dans mes calculs. Si

8.

l'on différentie la valeur donnée de U successivement par rapport à (x, y, z), on trouve bien

$$\frac{dU}{dx} = \frac{A}{a} x, \quad \frac{dU}{dy} = \frac{B}{b} y, \quad \frac{dU}{dz} = \frac{C}{c} z.$$

Je reviens au problème que je m'étais proposé, et je vais faire l'application de la formule (2), qui donne la surface d'équilibre d'un liquide, tournant uniformément autour d'un axe fixe, à l'ellipsoïde. En d'autres termes, je vais me demander si un ellipsoïde à trois axes inégaux, ayant commencé à tourner autour d'un axe, conservera sa forme, malgré le mouvement. L'équation (2) pour cette surface deviendra

$$\theta^2 (x^2 + y^2) + A \frac{x^2}{a} + B \frac{y^2}{b} + C \frac{z^2}{c} = 0.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

permet d'éliminer z, et l'expression précédente devient

$$x^2 \left(\theta^2 + \frac{Aa - Cc}{a^2}\right) + y^2 \left(\theta^2 + \frac{Bb - Cc}{b^2}\right) = \text{constante},$$

ce qui équivaut à la double relation

$$\theta^2 = \frac{Cc - Aa}{a^2} = \frac{Cc - Bb}{b^2}.$$

De là on tire

$$\frac{Cc - Aa}{a^2} = \frac{Cc - Bb}{b^2},$$

$$\theta^2 = \frac{Cc - Aa}{a^2}.$$

La première donne

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)Cc=\frac{Aa}{a^2}-\frac{Bb}{b^2}.$$

Si l'on remplace les produits Aa, Bb, Cc par leurs valeurs connues, qu'on supprime le facteur commun $2\pi f\rho$, il vient

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right)\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R}=-\frac{1}{a^2}\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R}+\frac{1}{b^2}\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2b^2}\int_0^\infty\frac{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}+\frac{a^2}{a^2b^2}\int_0^\infty\frac{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)}{a^2b^2}\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{a}{c^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R},$$

d'où

$$(1)\qquad \int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}=\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R}.$$

L'équation en θ^2 donne

$$\theta^2=-\frac{2\pi f\rho}{a^2}\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R}+\frac{2\pi f\rho}{a^2}\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R},$$

et, en éliminant la première intégrale par l'équation précédente,

$$(2)\left\{\begin{aligned}\theta^2&=\frac{2\pi f\rho}{a^2}\left[\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R}-\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}\right]\\&=\frac{2\pi f\rho}{a^2}\int_0^\infty\frac{\left(1+\frac{u}{b^2}-1\right)du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R}=\frac{2\pi f\rho}{a^2b^2}\int_0^\infty\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R},\end{aligned}\right.$$

Les équations (1) et (2), qui sont les équations du problème, ont été établies par M. Liouville dans le XXIII^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, mais il y est parvenu par une voie toute différente de celle que nous avons suivie.

Posons

$$b = \frac{c}{\sqrt{s}}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{t}}, \quad u = c^2 y,$$

et portons ces valeurs dans (1) et (2). Au lieu de (1), on aura

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+ty)(1+sy)\sqrt{(1+ty)(1+sy)(1+y)}}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)\sqrt{(1+ty)(1+sy)(1+y)}},$$

ou, en réduisant les deux intégrales au même dénominateur et faisant tout passer dans le premier membre,

$$(1-s-t)\int_0^\infty \frac{y\,dy}{[(1+ty)(1+sy)(1+y)]^{\frac{3}{2}}} - st\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{[(1+ty)(1+sy)(1+y)]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

L'équation (2), en posant $\frac{\theta^2}{2\pi f \rho} = v$ se transforme, par des calculs analogues aux précédents, en

$$v = st\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(1+ty)(1+sy)\sqrt{(1+ty)(v+sy)(1+y)}}.$$

Telle est la forme définitive donnée aux équations (1) et (2) par M. Liouville. C'est sous cette forme qu'il les a développées avec tant d'élégance dans le Mémoire, déjà cité dans l'introduction de cette thèse. Avant le travail du savant géomètre français, M. Meyer de Kœnigsberg avait prouvé qu'une masse liquide, dont les molécules s'attirent suivant la loi de la nature, peut, dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, se maintenir en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, lorsque la vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite.

Des deux équations ci-dessus, on a encore déduit ce résultat remarquable, que si la vitesse angulaire est infiniment petite, le liquide peut prendre la forme d'une aiguille infiniment allongée, ayant à très-peu près la forme d'un cylindre circulaire.

III.

Étudions maintenant, comme application de notre formule générale, un second problème non moins intéressant que le premier, et qui, par un côté, se rapproche déjà plus que lui des phénomènes que l'univers offre à notre admiration.

Cherchons quelle figure d'équilibre convient à une masse fluide homogène, tournant autour d'un axe fixe, d'un mouvement uniforme, pendant que ses molécules s'attirent entre elles suivant la loi de la nature, et sont en outre attirées, suivant la même loi, par un corps central très-éloigné, dont le centre de gravité est sur l'axe même de rotation et dans le plan de l'orbite.

Pour donner à la solution de ce problème toute la clarté possible, nous allons rappeler un théorème, d'ailleurs connu, dont voici l'énoncé : Lorsqu'un corps de forme quelconque agit sur un point matériel très-éloigné, la résultante des actions des diverses parties du corps sur le point matériel passe par le centre de gravité du corps attirant et a la même valeur que si toute la masse attirante était concentrée en ce point.

Pour établir en peu de mots ce théorème, prenons pour origine le centre de gravité du corps et faisons passer l'axe des x par le point attiré. Soit dm la masse d'un point quelconque du corps attirant, r le rayon vecteur qui l'unit à l'origine des coordonnées, x son abscisse, δ la distance du point attiré à l'origine; nous aurons, pour la distance du point attiré au point dm,

$$\mathrm{D} = (r^2 - 2\delta x + \delta^2)^{\frac{1}{2}};$$

pour le potentiel du corps attirant sur le point attiré,

$$\mathrm{U} = \sum \frac{dm}{\mathrm{D}} = \frac{1}{\delta} \sum dm \left[1 - \left(2\frac{x}{\delta} - \frac{r^2}{\delta^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

En développant le second membre et se bornant aux infiniment petits du second ordre, par rapport à $\frac{x}{\delta}$, il vient

$$U = \frac{M}{\delta} + \frac{1}{\delta} \sum dm \left(\frac{x}{\delta} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\delta^2} \right).$$

L'origine étant le centre de gravité du corps, $\sum xdm$ est nul, et il vient avec une très-grande approximation, si δ est assimilable à la distance du soleil à une planète,

$$U = \frac{M}{\delta} = \frac{M}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

en désignant par (α, β, γ) les coordonnées du point attiré par rapport à des axes rectangulaires quelconques, passant par le centre de gravité du corps attirant. On tire de là, pour les composantes de l'attraction, si μ est la masse du point attiré et f le coefficient de l'attraction,

$$X = -\frac{f\mu M}{\delta^2} \frac{\alpha}{\delta}, \quad Y = -\frac{f\mu M}{\delta^2} \frac{\beta}{\delta}, \quad Z = -\frac{f\mu M}{\delta^2} \frac{\gamma}{\delta},$$

ce qui prouve le théorème énoncé.

Revenons à notre problème. Supposons l'équilibre existant et menons du centre de gravité du corps fixe à tous les points du fluide des rayons vecteurs. Il est clair que tous ces rayons tourneront autour de l'axe de rotation, qui est perpendiculaire au plan de l'orbite, avec une même vitesse angulaire θ. De plus l'attraction de la masse mobile sur chacun de ses points variant d'une manière continue de la surface au centre, il y aura généralement un point dans l'intérieur sur lequel cette attraction sera nulle. Soit Q ce point. Prenons pour origine des coordonnées le centre de gravité du corps attirant; dirigeons l'axe des x vers le point Q; choisissons pour axe des z l'axe de rotation, et enfin l'axe des y perpendiculaire au plan des deux premiers. Supposons le système d'axes, mobiles avec la masse, alors dans l'état d'équilibre chaque point conservera constamment les mêmes coordonnées, et il n'y aura pas de courants dans le fluide.

Cherchons maintenant quelle forme doit prendre le liquide pour que cet équilibre ait lieu d'une manière permanente. Si nous appelons γ le coefficient de l'attraction du corps central sur le liquide mobile, à la distance quelconque D, l'attraction totale de la masse M sur la molécule m du fluide sera, en vertu du théorème établi plus haut,

$$\frac{m\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2},$$

et les composantes de cette force suivant les axes seront

$$-\frac{m\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{x}{\mathrm{D}},\quad -\frac{m\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{y}{\mathrm{D}},\quad -\frac{m\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{z}{\mathrm{D}}.$$

D'autre part, les composantes de la force effective, prise en sens contraire, seront, comme dans le problème précédent,

$$m\theta^2 x,\quad m\theta^2 y,\quad 0.$$

L'équation (D) de la page 51 deviendra

$$\mathrm{S}m\left[\left(-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{x}{\mathrm{D}}+\theta^2 x\right)\delta x+\left(-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{y}{\mathrm{D}}+\theta^2 y\right)\delta y+\left(-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\frac{z}{\mathrm{D}}\right)\delta z\right]$$
$$+\frac{1}{2}\delta\mathrm{S}m\,\mathrm{S}m_1\frac{1}{\rho}=0.$$

Or cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{S}m\left[-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^3}(x\delta x+y\delta y+z\delta z)\right]+\mathrm{S}[m\theta^2(x\delta x+y\delta y)]$$
$$+\frac{1}{\rho}\delta\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\frac{1}{\rho}=0.$$

D étant la distance d'une molécule liquide quelconque au centre de gravité du corps attirant, appelons r la distance de cette molécule à l'axe de rotation, nous avons

$$\mathrm{D}^2=x^2+y^2+z^2,\quad r^2=x^2+y^2,\quad \mathrm{D}^2=r^2+z^2,$$

d'où

$$\mathrm{D}\delta\mathrm{D}=x\delta x+y\delta y+z\delta z,\quad r\delta r=x\delta x+y\delta y.$$

Mais puisque nous supposons la distance des deux corps, immense par rapport à leurs dimensions, y et z sont des infiniment petits de premier ordre par rapport à x; de là il suit que $y\delta y$, $z\delta z$ sont aussi des infiniment petits de premier ordre par rapport à $x\delta x$; $y\delta y$, $z\delta z$, étant des infiniment petits de premier ordre par rapport à $x\delta x$, leur somme

$$y\delta y + z\delta z$$

sera un infiniment petit de même ordre. Donc on pourra négliger $y\delta y + z\delta z$ devant $x\delta x$. Il en résulte que l'équation peut s'écrire

$$\mathrm{S}m\left(-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^3}\mathrm{D}\delta\mathrm{D}\right) + \mathrm{S}m\theta^2\mathrm{D}\delta\mathrm{D} + \frac{1}{2}\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\frac{1}{\rho} = 0,$$

ou encore

$$\mathrm{S}m\left(-\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2}\delta\mathrm{D}\right) + \mathrm{S}m\theta^2\mathrm{D}\delta\mathrm{D} + \frac{1}{2}\mathrm{S}m\mathrm{S}m_1\frac{1}{\rho} = 0.$$

Maintenant pour le point du mobile sur lequel l'attraction totale de la masse à laquelle il appartient est nulle, on doit avoir, si l'on appelle D_1 sa distance à l'origine,

$$\mathrm{D}_1\theta^2 = \frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}_1^2},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}_1^3}{\mathrm{D}^2}\theta^2 = \frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2},$$

ou

$$\frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{D}^2} = \mathrm{D}_1\theta^2\frac{\mathrm{D}_1^2}{\mathrm{D}^2}.$$

Cherchons le rapport $\frac{\mathrm{D}_1^2}{\mathrm{D}^2}$. Pour cela, je remarque que les x étant comptés sur la ligne D_1, l'x d'un point quelconque de la masse mobile sera égal à $\mathrm{D}_1 \pm$ une quantité que je désignerai par x'. D'ailleurs, on a

$$\mathrm{D}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

donc l'on pourra écrire

$$D^2 = (D_1 + x')^2 + y^2 + z^2,$$

et puisque $y^2 + z^2$ est un infiniment petit de second ordre par rapport à $(R_1 + x')^2$, on aura plus simplement

$$D^2 = (D_1 + x')^2 = D_1^2 \left(1 + \frac{x'}{D'}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{D_1^2}{D^2} = \left(1 + \frac{x'}{D'}\right)^2 = 1 - 2\frac{x'}{D'} + \ldots.$$

D'après cela, on a

$$\frac{M\gamma}{D^2} = D_1 \theta^2 \left(1 - 2\frac{x'}{D_1}\right) = \theta^2 (D_1 - 2x').$$

En portant cette valeur dans l'équation trouvée, il vient, d'après tout ce qui a été dit à la page précédente,

$$Sm\theta^2 (3x') \delta x + \frac{1}{2} SmSm_1 \frac{1}{\rho} = 0.$$

Passons à un nouveau système d'axes, parallèles aux premiers et dont l'origine soit au point Q. Il viendra évidemment, en désignant par x', y', z' les nouvelles coordonnées,

$$x = D_1 + x', \quad y = y', \quad z = z',$$

d'où

$$\delta x = \delta x'.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation précédente, on aura enfin, pour l'équation du problème,

$$3\theta^2 Smx' \delta x' + \frac{1}{2} \delta SmSm_1 \frac{1}{\rho} = 0,$$

ou, si l'on multiplie par 2,

$$(1) \qquad 3\theta^2 \delta \mathrm{S} m x'^2 + \delta \mathrm{S} m \mathrm{S} m_1 \frac{1}{\rho} = 0,$$

ce qui, d'après les remarques et calculs déjà faits au problème précédent, donne pour variation

$$\int (3\theta^2 x'^2 + 2\mathrm{U})\, d\mathrm{O}\, \delta n = 0,$$

O étant la surface du liquide mobile, et l'intégrale s'étendant à toute cette surface.

La variation du second terme se calcule, comme au problème précédent. Pour calculer la variation du premier ou la quantité $\delta \mathrm{S} m' x^2$, j'imagine, comme plus haut, une surface intérieure infiniment rapprochée de la surface extérieure, et qui ait les mêmes normales. Si l'on prend tous les éléments $d\mathrm{O}$ de la surface extérieure, qu'on mène les normales à cette surface sur leurs contours, l'intervalle, compris entre les deux surfaces, sera partagé en volumes infiniment petits, qui à la limite pourront être considérés comme des cylindres droits à bases parallèles. La partie de la masse liquide qui changera, dans une petite variation de la surface extérieure, sera celle qui est comprise entre les deux surfaces. Si $d\mathrm{O}$ est la base de l'un de nos cylindres sur la surface extérieure, δn la variation de la normale à cette surface, $d\mathrm{O}\,\delta n$ sera la variation du petit cylindre. Quant à l'x', on pourra, sans erreur appréciable, prendre l'x' du point de la surface extérieure qui lui servait de base. La variation totale sera donc $\int x'^2\, d\mathrm{O}\,\delta n$, l'intégrale étant étendue à toute la surface. Avec ces données, on trouve, pour variation totale, l'expression que nous avons écrite.

Pour que l'équilibre ait lieu, on doit avoir, en supprimant les accents désormais inutiles,

$$(2) \qquad 3\theta^2 x^2 + 2\mathrm{U} = 0,$$

telle est l'équation de la force d'équilibre.

Faisons l'application de cette formule à l'ellipsoïde à trois axes inégaux, c'est-à-dire, cherchons si une masse liquide, ayant commencé à tourner autour d'un corps central C, dans les conditions indiquées par l'énoncé du problème, sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, pourra, malgré le mouvement, se maintenir en équilibre sous cette forme.

On a vu que, pour cette surface,

$$2U = A\frac{x^2}{a} + B\frac{y^2}{b} + C\frac{z^2}{c};$$

par la substitution, l'équation (2) devient

$$3\theta^2 x^2 + A\frac{x^2}{a} + B\frac{y^2}{b} + C\frac{z^2}{c} = 0,$$

et, éliminant z par l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve

$$x^2\left(3\theta^2 + \frac{Aa - Cc}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{Bb - Cc}{b^2}\right) = \text{constante}.$$

Ce qui exige les deux conditions distinctes

$$(3) \qquad 3\theta^2 + \frac{Aa - Cc}{a^2} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{Bb - Cc}{b^2} = 0.$$

Considérons d'abord la dernière. En y portant les valeurs connues pour B et C, elle donne

$$(5) \qquad Bb - Cc = 2\pi f\rho\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R} = 0,$$

R et ρ ayant ici la signification définie à la page 57.

Or, il est évident que tous les éléments de l'intégrale étant positifs, cette expression ne peut s'annuler que par $b = c$. Donc déjà l'ellipsoïde, pour conserver sa figure, malgré le mouvement, doit être de révolution autour de l'axe dans la direction duquel le corps central attire la masse liquide, résultat que la symétrie seule pouvait faire prévoir. Reste à chercher la relation de grandeur qu'il y a entre l'axe de révolution et les deux axes égaux.

En posant

$$\frac{3\theta^2}{2\pi f \rho} = \nu,$$

comme dans le probleme précédent, et substituant à $\frac{Aa - Cc}{a^2}$ sa valeur, il vient

$$(6) \qquad \nu = \frac{Cc - Aa}{a^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \int_0^\infty \frac{udu}{\left(1 + \frac{u}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{u}{c^2}\right)^2}.$$

Le premier membre est essentiellement positif; le second doit l'être aussi. Or l'intégrale définie est positive évidemment : donc il faut que $c < a$. Ainsi l'ellipsoïde doit être allongé dans le sens de l'axe suivant lequel s'exerce l'attraction du corps central sur la masse fluide. Il est bien clair d'ailleurs, par la nature du mouvement, que du moment que la masse liquide se sera présentée une fois au corps central sous cette forme, et dans cette direction, cet état persévérera; car, par la nature même du mouvement que nous étudions, lorsque l'axe allongé aura pris la direction marquée par le centre de gravité du corps central et le centre de gravité de la masse liquide, il la gardera toujours. Or c'est là la seule condition pour que la figure d'équilibre soit permanente.

Ainsi une masse fluide homogène tournant, autour d'un axe fixe d'un mouvement uniforme, pendant que ses molécules s'attirent entre elles suivant la loi de la nature, et sont en outre attirées, suivant la même loi, par un corps central très-éloigné, dont le centre de gravité est sur l'axe même de rotation, et dans le plan de l'orbite, cette masse, dis-je, est susceptible d'une figure d'équilibre, qui est celle d'un ellipsoïde de révolution allongé suivant l'axe dans la direction duquel s'exerce l'attraction du corps central.

La marche que nous avons suivie ne peut toutefois nous assurer qu'il n'y a pas d'autres figures d'équilibre que l'ellipsoïde de révolution allongé. Elle nous apprend seulement que cet ellipsoïde de révolution en est une, et, en même temps, exclut un certain nombre de surfaces fermées, telles que la sphère, l'ellipsoïde à trois axes inégaux, etc.; mais exclut-elle toute surface fermée autre que l'ellipsoïde de révolution allongé? C'est ce que nous ne pouvons dire.

L'équation (6) nous apprend que θ ou v diminuant jusqu'à zéro, les axes de l'ellipsoïde doivent tendre vers l'égalité. En effet, l'intégrale dont tous les éléments sont positifs, ne peut devenir nulle; ce sont donc les facteurs en dehors du signe $\int$ qui doivent annuler le second membre, lequel deviendra nul pour $c = a$, et l'on aura la sphère.

Mais le mouvement circulaire cessant, la masse liquide doit se précipiter vers le corps central. Dans ce mouvement vers le centre, les moindres différences entre les distances des molécules à ce point se feront sentir, l'attraction agissant en raison inverse du carré des distances; les molécules les plus rapprochées se précipiteront les premières et avec la plus grande vitesse, et la masse liquide tendra à prendre la forme d'un cylindre infiniment allongé donné par

$$a = \infty .$$

Il me semble même que la sphère ne doit être qu'une figure d'équilibre instable.

Enfin de

$$\theta^2 = \frac{2}{3}\pi f \rho \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{u\,du}{\left(1 + \frac{u}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{u}{c^2}\right)^2}$$

on peut encore tirer une conséquence relative à la densité. Supposons que l'on donne deux volumes égaux de liquides de densités différentes et qu'on imprime à tous deux la même vitesse angulaire θ, les premiers membres, dans les deux équations analogues à la précédente et correspondantes aux deux liquides, seront égaux. Les seconds devront l'être aussi, ce qui ne pourrait être, si l'on supposait aux deux volumes donnés une forme identique. Nous aurons donc deux ellipsoïdes de révolution, mais inégalement allongés.

Nous avons pu tirer les conclusions que nous venons de formuler de l'équation (6) sans l'intégrer, mais cette équation peut être intégrée. Pour y parvenir plus facilement et simplifier la notation, je pose

$$a = \frac{c}{\sqrt{s}}, \quad u = c^2 y.$$

L'équation (6) devient alors

$$(7) \qquad v = s(1-s)\int_0^{\infty} \frac{y\,dy}{(1+sy)^{\frac{3}{2}}(1+y)^2}.$$

Je fais maintenant

$$1 + sy = z^2,$$

d'où

$$(1+sy)^{\frac{3}{2}} = z^3, \quad y = \frac{z^2-1}{s}, \quad dy = \frac{2\,z\,dz}{s}, \quad y\,dy = \frac{2(z^2-1)\,z\,dz}{s^2},$$

$$1 + y = \frac{s-1+z^2}{s} = \frac{\left(z-\sqrt{1-s}\right)\left(z+\sqrt{1-s}\right)}{s}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on obtient

$$v = 2s(1-s)\int_1^{\infty} \frac{(z^2-1)\,dz}{z^2\left(2-\sqrt{1-s}\right)^2\left(2+\sqrt{1-s}\right)^2},$$

intégrale, qui se ramène aux six suivantes :

$$\int_1^{\infty}\left[\frac{A_0}{z^2} + \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{\left(z-\sqrt{1-s}\right)^2} + \frac{B_1}{\left(z-\sqrt{1-s}\right)} + \frac{C_0}{\left(z+\sqrt{1-s}\right)^2} + \frac{C_1}{\left(z+\sqrt{1-s}\right)}\right],$$

les (A_i, B_i, C_i) étant des constantes que l'on peut déterminer par plusieurs méthodes bien connues. En employant une quelconque de ces méthodes on trouvera, comme il est facile de le vérifier,

$$A_0 = -\frac{1}{(1-s)^2},\quad B_0 = -\frac{s}{4(1-s)^2},\quad C_0 = -\frac{s}{4(1-s)^2};$$

$$A_1 = 0,\qquad B_1 = \frac{(2+s)}{4(1-s)^{\frac{5}{2}}},\qquad C_1 = -\frac{(2+s)}{4(1-s)^{\frac{5}{2}}}.$$

De là

$$v = 2s(1-s)\int_1^\infty \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{(1-s)^2}\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{s}{4(1-s)^2}\dfrac{1}{(z-\sqrt{1-s})^2} + \dfrac{2+s}{4(1-s)^{\frac{5}{2}}}\dfrac{1}{z-\sqrt{1-s}} \\ -\dfrac{s}{4(1-s)^2}\dfrac{1}{(z+\sqrt{1-s})^2} - \dfrac{2+s}{4(1-s)^{\frac{5}{2}}}\dfrac{1}{z+\sqrt{1-s}} \end{array} \right\}.$$

En effectuant les opérations, il vient

$$v = 2s(1-s)\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{(1-s)^2} - \dfrac{s}{4(1-s)^2}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{1-s}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-s}}\right) \\ -\dfrac{2+s}{4(1-s)^{\frac{5}{2}}}\log\dfrac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1+s}} \end{array} \right\},$$

ou, en réduisant entre les grands crochets,

$$(8)\qquad v = \frac{s}{(1-s)}\left[-3 - \frac{2+s}{2(1-s)^{\frac{1}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1+s}}\right].$$

On peut vérifier que cette expression devient nulle pour $s=0$ ou $a=\infty$. En effet, il est clair d'abord que le terme $\frac{3s}{(1-s)}$ est nul pour $s=0$. Quant au terme

$$\frac{s(2+s)}{2(1-s)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1+s}},$$

pour $s=0$, il prend la forme $0\times\infty$, qui provient du facteur double $s\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}$, dans lequel s devient nul, tandis que $\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}$ de-

10

vient ∞ ; mais si l'on écrit cette expression sous la forme

$$\frac{\log \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}}{\frac{1}{s}}$$

et qu'on lui applique les règles connues, on trouve qu'elle devient o.

J'ai dit aussi plus haut que v devient nul pour $a = c$, ou pour $s = 1$. On pourrait le vérifier sur l'équation (8); mais il vaut mieux le démontrer en remontant à l'intégrale (3). On a en effet

$$\int_1^\infty \frac{y\,dy}{(1+sy)^{\frac{3}{2}}(1+y)^2} < \int_1^\infty \frac{dy}{(1+sy)^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$\int_1^\infty \frac{dy}{(1+sy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{s}\,\frac{1}{(1-s)^{\frac{1}{2}}}:$$

donc

$$s(1-s)\int_1^\infty \frac{y\,dy}{(1+sy)^{\frac{3}{2}}(1+s)^2} < \frac{2(1-s)}{(1+s)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or le second membre s'annule pour $s = 1$; donc, à fortiori, v doit être nul pour $s = 1$.

Il peut paraître intéressant de chercher la relation qui lie les accroissements de v ou de θ avec ceux de s. Cette relation s'obtiendra en différentiant l'équation (8) par rapport à s et en cherchant le signe de la dérivée $\frac{dv}{ds}$.

La différentiation effectuée donne, après les réductions convenables,

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2+s}{2(1-s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(1-s)^3} - \frac{(4+6s-s^2)}{4}\,\frac{1}{(1-s)^{\frac{5}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}:$$

mais comme on a

$$\log\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} = -2\left[(1-s)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{(1-s)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(1-s)^{\frac{7}{2}}}{7} + \ldots\right]$$

on peut écrire

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2+s}{2(1-s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(1-s)^2} + \frac{(4+6s-s^2)}{2}\left[\frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-s)} + \frac{1}{5} + \frac{(1-s)}{7} + \dots\right].$$

Or il est facile de voir, sous cette forme, que pour des valeurs très-petites de s, le second membre est positif. Donc, à partir de $s = 0$ jusqu'à une *certaine limite* s_1 de s, s et v croissent en même temps. A partir de cette limite, s croissant, v décroît, puisqu'il doit être nul pour $s = 1$, qui est la limite de s.

v est donc susceptible d'un *maximum* qu'il ne peut dépasser. De là il suit que, pour une masse donnée de liquide, l'ellipsoïde de révolution ne peut être une figure d'équilibre qu'autant que la vitesse reste, au-dessous d'une certaine limite v_1, correspondante à la valeur s_1 de s. Pour les valeurs de $v > v_1$, l'ellipsoïde n'est plus une figure d'équilibre. Au contraire, à toute valeur de $v < v_1$ répondent deux ellipsoïdes.

Vu et approuvé,
Le 16 novembre 1858,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 16 novembre 1858,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
ARTAUD.

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.