ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

B. TORTOLINI E F. BRIOSCHI

SERIE QUARTA - TOMO XVII
(LXXXIX DELLA RACCOLTA)

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE
BOLOGNA, 1938-XVII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1938-XVII

SALVATORE PINCHERLE

Commemorazione di UGO AMALDI (a Roma) (¹).

SALVATORE PINCHERLE si è spento in Bologna la sera del 10 luglio dello scorso anno. Corrispondente Linceo dal 1887, Socio Nazionale dal 1901, era oramai il decano dei matematici italiani e, fra le nuove generazioni, recava ancora l'eco diretta degli elevati insegnamenti dei grandi promotori della rinascita matematica in Italia.

Nato l'11 marzo 1853 a Trieste, era stato portato nella prima infanzia a Marsiglia, dove il padre, per sottrarsi alle crescenti vessazioni poliziesche, cui nella città nativa lo esponevano i suoi sentimenti d'italianità, apertamente manifestati e difesi, si era indotto a cercare un nuovo centro ai suoi commerci; ed ivi il PINCHERLE trascorse la fanciullezza e l'adolescenza, in un ambiente famigliare modesto e raccolto, dove l'intimità degli affetti era rinsaldata dalla tristezza dell'esilio e dall'appassionata attesa degli eventi storici, che in quegli anni, fra il '59 e il '70, preparavano l'unificazione della Patria. Compiuti i primi studi sotto la guida della madre, donna di alto sentire e di fine cultura, s'iscrisse a quel Liceo Imperiale, e, mentre dapprincipio pareva inclinare verso le discipline umanistiche, acquistò, verso la fine delle Classi speciali, la consapevolezza della Sua vocazione per le scienze esatte. Scelta la via, fu senza incertezze deciso in famiglia ch'Egli dovesse continuare gli studi presso un'Università italiana; e, sul finire del '69, appena sedicenne, lasciò la casa paterna per raggiungere Pisa, dove per concorso si aggiudicò un posto di alunno interno in quella Scuola Normale Superiore.

Vi dominava l'alta figura del BETTI, che, in quegli anni, tornando dalla Fisica matematica all'Analisi, poneva le basi della Topologia generale, mentre, accanto a lui, il DINI, conchiuso ancor giovanissimo il primo ciclo della sua attività nel campo della Geometria differenziale, si era volto con fervore alla elaborazione dei suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* e a quel nuovo indirizzo ispirava il suo geniale insegnamento. Le elevate

(¹) Commemorazione letta davanti alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Reale Accademia Nazionale dei Lincei nell'adunanza del 5 dicembre 1937-XVI.

suggestioni di quei Maestri insigni trovarono immediata rispondenza nella mente aperta e versatile, nell'entusiasmo speculativo del PINCHERLE, che, compiuto brillantemente il Suo quadriennio di studi, conseguì nel 1874 la Laurea in Scienze fisico-matematiche e l'Abilitazione all'insegnamento con le due successive parti di una dissertazione teorico-sperimentale sulle superficie di capillarità e le relative costanti caratteristiche.

Gli si apriva così, larga di promesse, la via alla carriera scientifica; ma per proseguirla tranquillamente avrebbe dovuto ricorrere ancora agli aiuti paterni, e, posto dinnanzi al dilemma di chiedere nuovi sacrifici ai Suoi Cari o d'imporre a se stesso la via più dura, prescelse decisamente di entrare nell'insegnamento secondario.

Per Sua ventura fu destinato a Pavia, dove la Facoltà di Scienze doveva l'anno seguente accogliere nel suo seno il BELTRAMI e già contava fra i suoi Maestri il CASORATI, che, al pari del BETTI, era conoscitore profondo e divulgatore geniale delle concezioni del RIEMANN e, d'altra parte, per una certa propensione a problemi di natura operatoria, direttamente rispondenti alla mentalità del PINCHERLE, era destinato ad esercitare su di Lui un fascino particolare. Così, in quella sede tranquilla, il PINCHERLE trovava nuovi sussidi culturali, nuove suggestioni al Suo orientamento scientifico; e, nella freschezza delle Sue energie giovanili, apprendeva ad imporsi quella severa disciplina di lavoro, che poi costantemente osservò nella Sua lunga vita e che allora Gli consentì di non deviare dalla ricerca, pur tra le cure dell'insegnamento liceale, cui dedicava quell'indefesso fervore, che sempre Egli recò nella Scuola.

Decisivo fu per Lui l'anno accademico 1877-78, che, grazie ad una borsa di perfezionamento, potè passare a Berlino. Al Suo appassionato interesse culturale quel grande centro scientifico offriva le più larghe soddisfazioni; ma Egli si concentrò soprattutto nel seguire le lezioni del WEIERSTRASS, alle quali gli studi precedenti Lo avevano particolarmente preparato; e, tornato a Pavia, vi tenne, per invito dei professori di quell'Università, un corso, in cui, per la prima volta in Italia, venivano sistematicamente esposti i principi dell'Analisi secondo il WEIERSTRASS, fino all'applicazione della teoria generale delle funzioni analitiche alle funzioni ellittiche. Quel corso, da Lui riassunto in un *Saggio*, pubblicato nel *Giornale* del BATTAGLINI, ebbe larga risonanza e richiamò vivamente l'attenzione dei matematici italiani sulla forte tempra del giovane autore, che, conseguita per concorso nella primavera del 1880 la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica nell'Università di Palermo, era, nel successivo autunno, chiamato, per lo stesso insegnamento, a quella di Bologna.

Ancora era viva in quelle aule l'eco della parola incitatrice del CREMONA; e il PINCHERLE, formatosi nelle elevate tradizioni delle Scuole di Pisa e di Pavia, accolse come una missione, cui poi sempre tenne fede, il proposito di restituire anche la Scuola matematica di Bologna all'antico prestigio. Gli erano compagni in quel fervore di entusiamo giovanile due Suoi condiscepoli di Pisa, pur essi giunti allora alla cattedra in quello stesso Ateneo, C. ARZELÀ e L. DONATI; e i tre giovani, associando i loro sforzi, ottennero anche a Bologna quel completamento dell'ordine degli studi per la Laura in Matematica, che già era stato promosso, ma non raggiunto, dal CREMONA, dal CHELINI, dal BELTRAMI.

Così nel 1882 il PINCHERLE assumeva per incarico quell'insegnamento di secondo biennio, che poi conservò ininterrottamente per quarantasette anni. Sorretto da una cultura eccezionale, che mai cessò di approfondire e di estendere, anche fuori del Suo campo preferito di lavoro ed oltre i confini stessi della Matematica, variava di anno in anno l'argomento delle Sue lezioni, pur mirando sempre allo scopo d'illustrare la teoria generale delle funzioni analitiche nel suo sviluppo storico, nei suoi diversi orientamenti, nei suoi rapporti con gli altri rami dell'Analisi. Alle trattazioni strettamente monografiche preferì generalmente lo sviluppo a grandi linee di intere dottrine, spesso di due teorie che a vicenda s'illuminassero; e, pronto com'era a cogliere ogni nuovo atteggiamento di pensiero, recava nella Scuola i più recenti apporti di metodi e di risultati, dopo averli sottoposti ad una profonda rielaborazione personale. Le lezioni così accuratamente preparate esponeva con impeccabile nobiltà di forma e vi trasfondeva un fervore di entusiasmo, un calore di emozione estetica, che risultavano tanto più comunicativi quanto più erano contenuti e quasi dissimulati.

Altrettanto meditati e suggestivi erano i Suoi corsi di primo biennio, che Egli, costantemente dominato dalla preoccupazione delle contrastanti esigenze degli allievi ingegneri e degli aspiranti alle Laure scientifiche, non si stancò mai di rimaneggiare e perfezionare sia nell'assetto generale, che in ogni più minuta particolarità di sviluppo; e la Sua raffinata perizia didattica resta documentata dalla serie di trattati, in cui via via riassunse le linee fondamentali del Suo insegnamento di ogni grado, dalle Matematiche elementari alla teoria delle funzioni analitiche, dalle lezioni di Algebra complementare a quelle di Calcolo, che, già preparate di lunga mano, pubblicò quando, scomparso prematuramente, nel 1912, l'ARZELÀ, ne assunse la cattedra di Analisi infinitesimale.

Col volgere degli anni, il crescente prestigio personale e la rinomanza scientifica via via più larga Lo designavano a sempre nuovi e più gravi doveri di uffici accademici; ma trovava tempo a tutto e mai negò di assecondare fattivamente qualsiasi iniziativa diretta al vantaggio della Scienza o della Scuola. Dal 1918 in poi partecipò con assidua cura alla direzione degli « Annali di Matematica »; nel 1922 promosse la costituzione dell'*Unione Matematica Italiana,* di cui tenne per un decennio la presidenza e sempre diresse il « Bollettino »; nel 1928, su mandato conferitogli a Toronto dai Delegati dei Comitati aderenti all'Unione Matematica Internazionale, organizzò e presiedette il Congresso di Bologna.

E, intanto, Gli erano venuti, dall'Italia e dall'estero, molteplici onori accademici; e, come già nel 1889 l'Accademia dei Lincei Lo aveva designato a dividere con L. BIANCHI il Premio Reale, che, per la prima volta, si assegnava a matematici; così, al Suo collocamento a riposo il Comune di Bologna Gli conferiva il Premio « SACCHETTI »; destinato ad onorare i Maestri più insigni e più benemeriti di quello Studio glorioso.

Ma a chi ebbe la ventura di conoscerNe a fondo l'animo e le intime aspirazioni, tutto ciò non appare che estrinseco episodio in una vita, che, fuori di ogni preoccupazione di personale interesse, fu tutta raccolta e tesa in un perenne sforzo di elevazione intellettuale, in una completa dedizione alla ricerca scientifica.

Come generalmente accade, anche il PINCHERLE, nei primi passi della Sua attività scientifica, aveva traversato un periodo d'incerto orientamento, e, pur essendosi decisamente volto dalla Fisica, cui s'era dapprincipio indirizzato, all'Analisi pura, aveva cercato la Sua via in direzioni svariate: superficie ad area minima ed equazioni algebrico-differenziali; relazioni fra coefficienti e radici di una trascendente intera, riprese più tardi dal MAILLET; funzioni monodrome dotate di un teorema di moltiplicazione bilineare e funzioni a moltiplicatori, quali punto di partenza per una teoria delle funzioni ellittiche, che per quella stessa via fu, molti anni dopo, sviluppata dal RAUSENBERGER.

Ma la Sua personalità matematica si delineò precisa dopo il viaggio a Berlino. Del WEIERSTRASS Egli amò sempre considerarsi discepolo; e in verità ne risentì fortemente l'influsso; tuttavia gli impulsi, che ne aveva tratto, si erano in Lui composti con quelli, che, a Pisa e a Pavia, aveva ricevuto dal BETTI e dal CASORATI in senso prevalentemente riemanniano; mentre già la Sua prima formazione culturale Lo aveva naturalmente condotto, fin dall'inizio dei Suoi studi matematici, a famigliarizzarsi con gli indirizzi della Scuola francese. Di qui il largo eclettismo di metodi e di vedute, che Egli sempre recò nella teoria delle funzioni di variabile complassa e che, in particolare, si rispecchia nel tipo dei problemi, da Lui affrontati nel dodicennio dall'82 al '94, in cui il Suo pensiero matematico, traverso una progressiva evoluzione, doveva raggiungere la sua piena maturità.

Era apparsa nell'80 la classica Memoria del WEIERSTRASS *Zur Funktionenlehre,* che col celebre teorema sulle serie uniformemente convergenti di funzioni analitiche aveva aperto la via a superare il tecnicismo delle serie di potenze; e il PINCHERLE, intuendo acutamente i nessi profondi, che intercedono fra il problema, così sollevato, dello sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le funzioni di un sistema prestabilito e il problema dell'inversione degli integrali definiti nel campo complesso, concepì un vasto programma di ricerche, dirette a indagare sistematicamente i rapporti fra le singolarità di una funzione e quelle degli elementi funzionali di riferimento adottati per una sua rappresentazione analitica sia mediante lo sviluppo in serie di funzioni prefissate, sia mediante un integrale curvilineo. E si può notare come nella natura stessa di tali questioni Egli trovasse un incentivo ad applicare considerazioni di quel tipo operatorio, verso cui doveva in seguito orientarsi sempre più decisamente.

Degli sviluppi in serie, sotto ipotesi svariate circa il sistema base, si occupò in tutta una ricca serie di lavori, che per lo stesso tipo dei problemi e dei risultati, sfuggono alla possibilità di un rapido riassunto; ma già in quelle ricerche giovanili colpisce l'ingegnosa novità di taluni concetti e di taluni spedienti, che assai più tardi dovevano entrare nell'uso corrente: tali la nozione di successione di funzioni equilimitate, l'intervento di relazioni nettamente pertinenti alla teoria dei determinanti infiniti, in quel tempo nemmeno abbozzata, l'esplicito enunciato e l'applicazione, nel caso delle regioni piane, di quel *teorema di copertura,* che un ventennio dopo fu ritrovato e messo in valore dal BOREL.

Seguono in quello stesso periodo di tempo — e più precisamente dall'85 in poi — le ricerche sull'inversione degli integrali definiti nel campo complesso. Secondo la nomenclatura odierna, i problemi da Lui affrontati per primi in questo campo si riconnettono alla risoluzione di notevoli classi di equazioni integrali di prima specie; ma in ogni singolo caso Egli fissa più particolarmente la Sua attenzione sull'operazione funzionale, rappresentata dall'integrale a primo membro, e ne indaga le proprietà analitiche sia in rapporto al nucleo — o, com'Egli allora diceva, della *funzione caratteristica* —, sia in relazione al campo funzionale, cui l'operazione s'intende applicata. Ed anche qui taluni Suoi risultati precorsero i tempi: cercando le operazioni integrali, la cui inversa ammette una analoga rappresentazione analitica, fu condotto a quei nuclei, che conservano la derivazione, e che più tardi, nel campo reale, si ripresentarono nella teoria della composizione del VOLTERRA, il quale, com'è ben noto, li chiamò *del ciclo chiuso.*

Ma sull'ulteriore sviluppo del pensiero del PINCHERLE un più decisivo influsso ebbero gli studi da Lui compiuti sulle proprietà intrinseche e sulle applicazioni di talune fra le più importanti operazioni funzionali classiche, in ispecie sulla trasformazione di LAPLACE-ABEL. Egli per primo riconobbe come questa trasformazione, indipendentemente da ogni sua espressione analitica, si possa univocamente definire per mezzo di certe due proprietà operatorie — relative al suo comportamento di fronte alla derivazione e alla moltiplicazione per la variabile indipendente — e mise in luce come l'espressione, che per tale operazione va adottata, dipenda caso per caso dalla natura analitica della classe funzionale, in cui essa è destinata ad operare. Così svincolata da contingenti particolarità di forma, la trasformazione acquista una maggiore agilità algoritmica e una più larga possibilità di applicazioni, che il PINCHERLE illustrò in direzioni svariate; e fra i molti e notevoli risultati così conseguiti va ricordata una inattesa e riposta dualità fra le due generalizzazioni dell'equazione differenziale lineare ipergeometrica, dovute al POCHHAMMER e al GOURSAT, alla quale Egli pervenne, movendo dall'osservazione (da Lui per primo rilevata nella sua forma esplicita e generale) che la trasformazione di LAPLACE-ABEL stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali e le analoghe equazioni alle differenze.

Ritrovava così sul Suo cammino il vecchio Calcolo delle differenze, al quale, in quegli stessi anni, era stato ricondotto anche il POINCARÉ nelle sue celebri ricerche sulle equazioni differenziali lineari a integrali irregolari; e il PINCHERLE, riesumando quell'antico ordine di questioni alla luce dei metodi e delle vedute della teoria delle funzioni di variabile complessa, vi conseguì taluni dei Suoi risultati più importanti e più originali.

Tornando dapprima sugli sviluppi in serie secondo le funzioni di un sistema prestabilito, ravvisò nella *ricorrenza lineare,* quale risulta definita fra le funzioni di un tale sistema da un'equazione lineare alle differenze, un presupposto particolarmente atto a consentire, nello studio di quegli sviluppi, conclusioni precise; ed, esaurito rapidamente il caso delle ricorrenze del primo ordine, si trovò, con quelle del secondo, di fronte all'algoritmo delle frazioni continue algebriche. che indagò in senso inverso a quello prima di Lui considerato, cioè mirando a risalire dalle proprietà analitiche delle ridotte di una frazione continua convergente, data a priori, a quelle della funzione così definita. Ma ben più ardue difficoltà si presentavano nel caso delle ricorrenze d'ordine superiore, dove si trattava di scoprire la via a quella generalizzazione dell' algoritmo delle frazioni continue algebriche, che già era stata inutilmente cercata da E. HEINE, sulla traccia del tentativo compiuto in senso strettamente aritmetico dallo stesso JACOBI; e il PINCHERLE risolse la questione in modo definitivo e geniale, introducendo, come analogo del valore della frazione continua, l'integrale da Lui chiamato *distinto*, che è quell'integrale dell'equazione lineare alle differenze, caratteristica della ricorrenza considerata, il cui rapporto ad ogni altro integrale della stessa equazione converge allo zero al tendere all'infinito dell'indice. Non è qui possibile render conto degli importanti sviluppi, che il PINCHERLE dedicò alla determinazione di siffatto integrale e alla sua applicazione al problema della migliore approssimazione di una data funzione per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti polinomiali, di prefissate serie di potenze. Basti ricordare, come una delle più profonde Memorie del PINCHERLE, quella del tomo 16° degli *Acta Matematica* sulla generazione di sistemi ricorrenti per mezzo di equazioni differenziali lineari, nella quale estende agli sviluppi di una funzione analitica secondo serie procedenti per gli elementi di un sistema ricorrente le condizioni per la sviluppabilità secondo i denominatori delle ridotte di una frazione continua algebrica e pone in evidenza le proprietà asintotiche dei sistemi ricorrenti costituiti dai coefficienti dello sviluppo del TAYLOR degli integrali delle equazioni differenziali lineari di tipo regolare.

In tutte queste ricerche le equazioni lineari alle differenze, pur considerate nel campo complesso, intervenivano ancora sotto il loro originario aspetto di semplici relazioni di ricorrenza; ma il PINCHERLE, seguendo il naturale orientamento del Suo pensiero, fu condotto a superare quella concezione ristretta del Calcolo delle differenze e a considerarlo un particolare capitolo del Calcolo funzionale nel campo complesso. Come tale lo ricostruì sistematicamente, raccogliendo dapprima le teorie formali in un'*Algebra delle forme lineari alle differenze*, poi volgendosi ai problemi analitici veri e propri, fino ad una prima risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, da Lui conseguita per mezzo di serie operatorie, di accertata convergenza, ordinate secondo le potenze dell'operatore del CASORATI.

Con questo vasto e ben connesso gruppo di ricerche il PINCHERLE contribuì, forse più di ogni altro, a promuovere ed avviare quell'indirizzo, per cui il Calcolo delle differenze, uscendo dal primitivo suo stadio puramente formale ed aritmetico, è oramai entrato in modo organico nel quadro della teoria generale delle funzioni analitiche; e, se a quel nuovo ordine d'indagini più decisivi contributi sono stati in seguito recati da tutta una schiera di altri ricercatori, fra cui primeggia il NÖRLUND, basta scorrere le magistrali

Vorlesungen über Differenzenrechnung dell'insigne matematico danese per riconoscere come, anche in un assetto definitivo della teoria, le vedute e i risultati del PINCHERLE conservino immutata la loro fondamentale importanza.

Tuttavia, nella progressiva evoluzione del Suo pensiero, le ricerche da Lui compiute sino allora costituirono soprattutto il prodromo ad una più larga visione di problemi e a un più elevato programma di lavoro. Sulla base del ricco materiale di osservazioni, di raffronti, di risultati concreti, raccolto nei precedenti Suoi studi su svariate classi di operazioni funzionali, e traverso una larga indagine storica sui vecchi metodi di Calcolo simbolico, il PINCHERLE concepì, intorno al 1894, il disegno di costruire nel campo complesso una teoria generale delle operazioni funzionali lineari, o, come Egli preferì dire, *distributive*, la quale, conservando l'agilità di quegli antichi metodi formali, conducesse a procedimenti di effettiva validità, controllabile, quanto meno caso per caso, così da costituire un nuovo ramo della teoria delle funzioni analitiche. Fu quello per Lui il periodo di più acceso fervore di ricerca, sicchè già nel 1897 potè presentare nel *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (« Math. Annalen », XLIX) lo schema organico della Sua teoria sintetica delle eperazioni funzionali; poi, sperimentato in ripetuti corsi universitari lo sviluppo sistematico delle Sue idee, ne curò una trattazione divulgativa nel volume su *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, pubblicato nel 1901.

A fondamento della Sua teoria Egli pose quel concetto di *spazio funzionale*, che, da Lui per primo definito e fecondamente studiato, doveva poi evolversi in forme più larghe o più determinate, fino a costituire oramai una delle nozioni fondamentali e, in un certo senso, caratteristiche dell'Analisi contemporanea. Per il PINCHERLE si trattava di quegli *spazi affini*, o meglio *vettoriali*, ad una infinità numerabile di dimensioni, che costituiscono un'immagine geometrica degli insiemi lineari di funzioni analitiche sviluppabili secondo le funzioni di un prestabilito sistema, quando agli elementi di un tale sistema si attribuisca l'ufficio di vettori fondamentali di una base di riferimento.

Già nel caso di un numero finito di dimensioni sorgono per le operazioni distributive, che trasformano in sè un tale spazio — e che i vettorialisti chiamarono più tardi *omografie vettoriali* —, interessanti problemi di classificazione; e, per quanto, astrazion fatta dalla particolare interpretazione, tutto sostanzialmente si riduca alla classica discussione dell'equazione caratteristica di una sostituzione lineare, la trattazione sintetica datane dal PINCHERLE e, in ispecie, una Sua caratterizzazione operatoria dei divisori elementari presentano, rispetto alle molte trattazioni congeneri, singolari pregi di semplicità e di eleganza.

Negli spazi funzionali ad un' infinità di dimensioni, e, in particolare, in quello delle serie di potenze, cui più spesso si riferiva il PINCHERLE, ogni operazione distributiva assume la forma di un' affinità omogenea su infinite variabili, onde risulta, per l' operazione, una prima rappresentazione analitica per mezzo di una *matrice infinita*; e di questo tipo di rappresentazione (divenuta più tardi famigliare, oltre che ai matematici, ai fisici teorici) Egli si valse a più riprese, soprattutto per caratterizzare e studiare quelle operazioni, da Lui dette *normali*, che generalizzano sotto l' aspetto geometrico le cosiddette deformazioni pure, sotto l' aspetto analitico le forme differenziali lineari della classe del FUCHS, e che, nel gruppo totale delle operazioni distributive, costituiscono un sottogruppo di particolare interesse per le eleganti proprietà, di cui gode, e per le applicazioni, largamente illustrate dal PINCHERLE, di cui è suscettibile. E va rilevato come fin dal 1897 il PINCHERLE, in base a siffatta rappresentazione di un' operazione per mezzo di una matrice infinita, associasse sistematicamente, sotto ipotesi di larga generalità, al fascio dell' operazione e dell' identità quel determinante infinito, che doveva poi assumere un ufficio essenziale nella teoria del FREDHOLM; e, assodatone il carattere di trascendente intera rispetto al parametro del fascio, ne deducesse quegli elementi, che oggi diconsi gli *autovalori* e le *autofunzioni* dell' operazione.

Ma allo sviluppo della teoria occorreva si assegnasse per le operazioni distributive qualche altra rappresentazione più maneggevole; e il PINCHERLE vi pervenne, movendo da una geniale osservazione algoritmica. Notò che, se per una qualsiasi operazione distributiva si valuta lo scarto dalla permutabilità rispetto ad un' operazione fissa, si perviene ad una nuova operazione, la cui deduzione da quella di partenza presenta una completa analogia algoritmica con l' ordinaria derivazione delle funzioni. Assumendo, perciò, come *derivata funzionale* di un' operazione il suo scarto dalla permutabilità rispetto alla moltiplicazione per la variabile indipendente, potè stabilire che ogni operazione distributiva, nell' intorno di una generica funzione, è rappresentabile formalmente con una serie di potenze operatorie della derivazione ordinaria, perfettamente analoga alla serie del TAYLOR per le funzioni.

Non sfuggì naturalmente al PINCHERLE che tali serie operatorie, già da Lui prima incontrate nell' inversione delle forme differenziali lineari (o, se si vuole, nell' integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee), hanno di regola un campo funzionale di effettiva validità piuttosto ristretto; ma non mancò di mostrare (e di questo essenziale complemento non si è sempre tenuto il debito conto) che, con un ingegnoso trasporto di quegli stessi spedienti, che al WEIERSTRASS e al MITTAG-LEFFLER avevano consentito di assicurare la convergenza degli sviluppi di una funzione analitica in prodotto infinito e in serie di frazioni semplici, è possibile, caso per caso, ampliare quel primitivo campo funzionale di convergenza.

Ad ogni modo a questa rappresentazione di un'operazione con una serie di potenze della derivazione spetta, nella teoria del PINCHERLE, un ufficio in qualche modo sussidiario, giacchè per Lui ogni operazione è un'entità astratta, caratterizzata, indipendentemente da ogni espressione analitica, dalle sue proprietà operatorie intrinseche, che, quanto meno nei casi più noti, si traducono in equazioni simboliche assai semplici; e la *legge di permanenza* di tali proprietà consente, in generale, di *prolungare* l'operazione oltre i limiti del suo primitivo campo funzionale di definizione. Di queste Sue vedute, cui giustamente il PINCHERLE annetteva particolare importanza, diede un'espressiva applicazione, discutendo in modo esauriente il problema della derivazione di indice complesso qualsiasi, su cui già avevano fermato la loro attenzione, fra gli altri, il LIOUVILLE, il RIEMANN, l'HOLMGREN, il BOURLET.

D'altro canto, uno studio approfondito delle analogie, che intercedono fra le affinità vettoriali ordinarie e le operazioni distributive agenti in uno spazio ad infinite dimensioni condusse il PINCHERLE a riconoscere fra i due casi una differenza essenziale, che, rimasta allora pressochè inavvertita, fu nuovamente rilevata per le operazioni integrali da HELLINGER e TOEPLITZ quindici anni più tardi. In uno spazio ad un numero finito di dimensioni ogni operazione distributiva degenere gode insieme delle due proprietà di trasformare l'intero spazio in uno spazio ad un numero minore di dimensioni e di possedere, come il PINCHERLE diceva, qualche vettore *radice*, cioè qualche vettore, cui corrisponde il vettore nullo. Orbene, quando si passa alle operazioni distributive in uno spazio ad infinite dimensioni, queste due proprietà, pur trovandosi talvolta associate, possono anche presentarsi separatamente, talchè si hanno due tipi distinti di degenerazione; ed è manifesto come risulti essenzialmente diverso il problema d'inversione per le operazioni degeneri dell'una o dell'altra specie. Di queste operazioni degeneri il PINCHERLE indagò largamente le proprietà. In particolare, introdotta nello spazio funzionale l'omogeneità e sostituita all'immagine vettoriale quella puntuale, stabilì, pel tramite di convenienti operazioni degeneri, l'esistenza di spazi lineari, pur essi a infinite dimensioni, ma meno comprensivi di quello totale, cui competono tutte le proprietà di incidenza e di appartenenza che caratterizzano gli iperpiani ordinari; e, definite per questi *iperpiani* dello spazio funzionale punteggiato opportune coordinate omogenee, aventi carattere contragrediente rispetto a quelle puntuali, pervenne ad una corrispondenza per *dualità*, che Gli consentì di associare ad ogni operazione un'operazione correlativa, la quale generalizza, con le rispettive proprietà caratteristiche, tanto l'*aggiunta* del LAGRANGE, quanto quell'altra operazione analoga, che, sotto il medesimo nome, lo stesso PINCHERLE aveva introdotto nel Calcolo delle differenze.

Della Geometria dello spazio funzionale considerò anche altri problemi, più tardi ripresi, sotto punti di vista diversi, da varî ricercatori (curve e varietà non lineari dello spazio funzionale, loro spazi osculatori dei vari ordini, gruppi continui di operazioni e loro operazioni infinitesime, ecc.); ma non vi si indugiò, giacchè rifuggiva dalle generalizzazioni, che potessero apparire scopo a se stesse; e si volse, invece, ad illustrare operosamente le applicazioni, di cui la Sua teoria era suscettibile nel campo delle funzioni analitiche: operazioni normali, come atte ad aggiungere o togliere ad una funzione singolarità di natura determinata, onde risultarono chiariti nella loro origine profonda i teoremi dell'HADAMARD e del DARBOUX sulle singolarità delle serie di potenze; indagine approfondita delle dipendenze fra le singolarità di una *funzione determinante* e quelle della corrispondente *generatrice*; teoria generale dell'inversione delle operazioni integrali del ciclo chiuso nel campo complesso; classificazione delle equazioni funzionali lineari di seconda specie nei tre grandi tipi del VOLTERRA, del FREDHOLM, dell'HILBERT.

A queste ricerche, direttamente legate al progressivo sviluppo delle Sue idee, altre ne intercalava di carattere collaterale o, in qualche modo, sussidiario. Così, in relazione alla risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, riprendeva quelle serie di fattoriali e del NEWTON, che già aveva incontrate in un Suo precedente studio sulla interpolazione nel campo complesso, e ne indagava le proprietà di convergenza, pervenendo per primo alle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una data funzione ammetta uno sviluppo in serie newtoniana. Inoltre, da una ricerca, per se stessa molto notevole, su taluni nuclei analitici era condotto a svariati problemi d'iterazione, in particolare a quello fondamentale dell'iterazione « in grande » delle funzioni razionali, che doveva poi essere ulteriormente approfondito dal JULIA, dal FATOU, dal RITT.

Nell'ultimo periodo della Sua vita ebbe l'intimo compiacimento di veder confermate l'importanza e la vitalità delle Sue vedute sintetiche sulle operazioni funzionali non soltanto da recenti sviluppi di Analisi, ma più ancora da nuovi e inaspettati nessi coi concetti e i procedimenti algoritmici impostisi ai teorici della nuova Fisica. Con rinnovata fiducia tornò sui principi della Sua teoria e forse vagheggiò l'idea di rielaborarla su basi più larghe, chè ad un tale disegno sembra rispondere l'ultima Sua Memoria, che la morte interuppe e fu pubblicata postuma [1], quasi auspicio di ulteriori sviluppi per il Suo retaggio d'idee.

Quale posto Egli attribuisse alle Sue ricerche e ai Suoi contributi nel quadro generale degli indirizzi congeneri fu da Lui stesso chiarito nel magistrale articolo sulle equazioni e operazioni funzionali per la grande Enciclopedia delle Scienze matematiche [2]. Ma nella rigida Sua obbiettività scientifica, nel Suo scrupoloso senso delle proporzioni finì con l'essere severo con se stesso; e ben più alta e più giusta valutazione dell'opera Sua fu solennemente espressa a Bologna, nel 1928, da J. HADAMARD, che, delineando da par suo in una larga sintesi le origini, gli sviluppi, i futuri presumibili orientamenti del Calcolo funzionale [3], additò nel PINCHERLE uno degli iniziatori ed uno dei cultori più insigni di quel promettente e caratteristico indirizzo della Matematica contemporanea.

A questo giudizio autorevolissimo null'altro andrebbe aggiunto; ma il vecchio discepolo, chiamato all'onore di parlare di Lui in quest'alta sede, non può negare a se stesso di rievocarne qui la luminosa figura morale, quale gli apparve fin dagli anni lontani della giovinezza. Pensoso e parco di parole, pareva che, soprattutto di fronte ai discepoli, amasse nascondere la Sua personalità dietro un fitto velo di geloso riserbo. Ma appunto per questo i giovani, con più intenso sforzo di comprensione e di reverente simpatia, scrutavano oltre quel velo le sue note profondamente umane: il culto tenerissimo degli affetti famigliari, il fervido amor patrio, il multiforme interesse per ogni indirizzo speculativo, la raffinata sensibilità per ogni forma d'Arte, particolarmente per la Musica. Era ambito privilegio di pochissimi l'essere ammessi nell'intimità della Sua casa, dove, in piccola cerchia, recava nella conversazione, con arguzia garbata e senz'ombra di pesantezza, tutte le risorse della Sua vastissima cultura; e talvolta sedeva al pianoforte per interpretarvi, con una Sua caratteristica finezza di passione contenuta, le musiche classiche,

(1) *Contributo alla teoria degli operatori lineari*, in questi « Annali », serie IV, t. XV, 1936-XV, pp. 243-308. Solo ora (febbraio 1938) dalla elevata ed esauriente Commemorazione, che del PINCHERLE tenne il prof. ETTORE BORTOLOTTI all'Accademia di Bologna (« Rendiconto delle Sessioni, Sez. di Sc. Fis. e Mat. », anno 1936-37), apprendo che fra i manoscritti inediti del PINCHERLE furono trovati i primi otto Capitoli di una nuova opera sulla teoria generali delle operazioni lineari.

(2) Vedasi specialmente l'edizione francese: *Équations et operations fonctionnelles*, t. III, 5me vol., pp. 1-81, Paris 1912.

(3) *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel*, « Atti del Congresso Intern. dei Matematici », Bologna 1928-VI, tomo I, pp. 143-161.

che più Gli erano care, e alle quali mai cessò di dedicar quotidianamente qualche ora, nemmeno nei periodi di più intensa attività scientifica, quasi vi cercasse, più che uno svago, una fonte d'ispirazione intellettuale. In ogni circostanza Egli conservava quel Suo contegno di composta superiorità, in cui si rifletteva l'interiore equilibrio, da Lui raggiunto fra le ingenite inclinazioni di un'indole affettiva e sensibilissima e la concezione elevata ed austera, che della vita e dei rapporti umani aveva imposto a se stesso. Così alla profonda modestia, che Gli era istintiva, si associava in Lui un alto senso di dignità personale; l'estrema mitezza dell'animo si armonizzava con la sicura fermezza delle convinzioni, con la severità rettilinea dei criteri morali; e chi più Gli era vicino ben sapeva come, ad ogni richiamo della coscienza, Egli fosse pronto ad assumere la responsabilità di atteggiamenti o di decisioni, che pur ferivano la Sua sensibilità. Ma non ebbe nemici, nè mai suscitò intorno a sè risentimento o rancore, perchè la rigidezza della Sua dirittura era temperata dalla larga tolleranza di chi dalla stessa saldezza delle proprie convinzioni sa trar motivo a comprendere chiunque batta altre vie con pari purezza di cuore, e da ogni Suo atto traspariva limpidamente, come unica norma, l'ossequio incondizionato al dovere, cui sempre seppe sacrificare per primo se stesso.

Fu soprattutto per sentimento del dovere che, alieno per indole da ogni ufficio di comando e già quasi settantacinquenne, accettò a Toronto l'arduo compito di preparare e presiedere il Congresso di Bologna, col preciso mandato, confermatoGli dal Governo Nazionale, di restaurarvi, per la prima volta dopo la Grande Guerra, la completa internazionalità delle adesioni e degli interventi. Gli animi erano turbati e divisi; e al di là delle Alpi parve dapprima che, sull'una e sull'altra sponda, quel tentativo di riavvicinamento non fosse destinato che ad esasperare le mal sopite passioni, ad approfondire i dissensi tenacemente superstiti. Ma il PINCHERLE, convinto di servire insieme la causa della Scienza e la secolare tradizione di universalità culturale dell'Italia, non si scoraggiò. Ai contrasti e alle amarezze, che non Gli furono risparmiate, oppose la Sua dignitosa serenità; le difficoltà ostinatamente risorgenti dominò e superò con un mirabile sforzo di tatto, di energia, di saggezza; e mai si ebbe, in quest'Europa senza pace, un più largo e più concorde raduno di scienziati di ogni nazione. Fu quello il coronamento ideale della Sua vita; e, assolto il nobile mandato, scese, in silenzioso accoramento, dalla cattedra, che aveva onorato per quasi cinquant'anni.

Giusto compenso alla Sua perenne spiritualità, non conobbe l'angoscioso declinare dell'attività intellettuale; e conservò intatti, nella vegeta vecchiezza, l'interesse per la ricerca, la gioia del lavoro, la fede nella missione progressiva della Scienza. Così, anche nell'ultimo Suo giorno, incurante di qualche oscuro presagio dell'incombente ora suprema, tornò all'usato lavoro, si raccolse ancora una volta a meditare sulla Memoria che doveva lasciare incompiuta, ancora una volta nella serena intimità domestica irradiò fra i Suoi Cari l'inesausta Sua affettività, quando, al calar della notte sulla giornata operosa, quasi d'improvviso il puro e fervido cuore si arrestò.

Ma Egli vive nella Sua opera di Scienziato e di Maestro, vive nella luce della incontaminata Sua nobiltà morale.

Elenco cronologico delle pubblicazioni di Salvatore Pincherle (1).

1874 - *Sulle superficie di capillarità.* (Il Nuovo Cimento, s. 2ª, vol. XII, Pisa).
1875 - *Sulle costanti di capillarità.* (Il Nuovo Cimento, s. 2ª, vol. XIV, Pisa).
1876 - *Sulle superficie d'area minima.* (Programma del R. Liceo « Foscolo », Pavia).
» - *Sopra alcuni problemi relativi alle superficie d'area minima.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. IX).
1877 - *Sulle equazioni algebrico-differenziali di prim'ordine e primo grado a primitiva generale algebrica.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. X).
1878 - *Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XI).
1879 - *Sulle funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XII).
» - *Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome.* (Giorn. di Mat., XVII, Napoli).
1880 - *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi di* C. Weierstrass. (Giorn. di Mat., XVIII, Napoli).
1881 - *Geometria pura elementare.* Milano, Hoepli; 8ª ediz., 1918.
1882 - *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.* (Mem. Bol., s. IV, t. III).
» - *Geometria metrica e trigonometria.* Milano, Hoepli; 9ª ediz., 1922.
» - *Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XV).
1883 - *Sopra una applicazione delle funzioni sferiche al teorema di* Mittag-Leffler, *e alla determinazione di funzioni a spazi lacunari.* (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
» - *Una formula sui determinanti.* (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
» - *Sui prodotti infiniti per funzioni analitiche.* (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
» - *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi.* Memoria I. (Ann. di Mat., s. II, t. XII, Milano).
» - *Di una generalizzazione della derivazione nelle funzioni analitiche.* (Giorn. di Mat., XXII, Napoli).
» - *Algebra elementare.* Milano, Hoepli; 13ª ediz., 1920.
1884 - *Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. V).

(1) Abbreviazioni: Boll. U. M. I. — Bollettino della Unione Matematica Italiana; Mem. Bol. — Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Rend. Bol. = Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Rend. Lincei = Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali; Rend. Lomb. — Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; Rend. Pal. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Ringrazio vivamente il prof. A. Mambriani, che cortesemente ha colmato alcune lacune rimaste nell'elenco da me primitivamente preparato.

1884 - *Sui gruppi lineari di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VI).
» - *Sui sistemi di funzioni analitiche e gli sviluppi in serie formati coi medesimi.* Memoria II. (Ann. di Mat., s. II, t. XII, Milano).
1885 - *Note sur une intégrale definie.* (Acta Math., VII, Stockholm).
» - *Sopra una formula del sig.* HERMITE. (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. I).
» - *Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VI).
1886 - *Alcune osservazioni sui polinomi del prof.* APPELL. (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. II).
» - *Studi sopra alcune operazioni funzionali.* (Mem. Bol., s. IV, t. VII).
» - *Sur une formule dans la théorie des fonctions.* (Ofversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, n.° 3, Stockholm).
» - *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XIX).
1887 - *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales definies.* (Acta Math., X, Stockholm).
» - *Costruzioni di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. III).
» - *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. III).
» - *Della trasformazione di* LAPLACE *e di alcune sue applicazioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VIII).
» - *Sulla risoluzione dell'equazione* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti costanti.* (Rend. Bol., anno accad. 1887-88).
» - *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XX).
1888 - *Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni differenziali o alle differenze.* (Rend. Pal., II).
» - *Una trasformazione di serie.* (Rend. Pal., II).
» - *Sopra certi integrali definiti.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. IV).
» - *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. IV).
« - *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti costanti.* (Mem. Bol., s. IV, t. IX).
» - *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti razionali.* (Mem. Bol, s. IV, t. IX).
» - *Sur une généralisation des fonctions eulériennes.* (Comptes Rendus, 23 janvier, Paris).
» - *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes.* (Comptes Rendus, 17 décembre, Paris).
» - *Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.* (Crelle, CIII, Berlin).
1889 - *I sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. V).
» - *Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di primo e di secondo grado.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. V).
» - *Alcuni teoremi sulle frazioni continue.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. V).
» - *Su alcune forme approssimate per la rappresentazione di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. X).
» - *Quelques applications des fractions continues.* (Comptes Rendus, 29 avril, Paris).
» - *Di un'estensione dell'algoritmo delle frazioni continue.* (Rend. Lomb., s. 2ª, vol. XXII).
» - *Sur les fractions continues algébriques.* (Ann. scient. de l'Éc. Norm. Sup., s. III, t. VI, Paris).
1890 - *Sulla trasformazione di* HEINE. (Rend. Pal., IV).
» - *Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. Lincei, s. 4ª, vol. VI).
» - *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Mem. Bol., s. IV, t. X).

1890 - *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante irrazionali quadratici.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXIII).

1891 - *Un teorema sulle frazioni continue.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. VII).

» - *Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell' invariante assoluto.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. VII).

» - *Una nuova estensione delle funzioni sferiche.* (Mem. Bol., s. V, t. I).

» - *Sulla generalizzazione delle funzioni sferiche.* (Rend. Bol., anno accad. 1891-92).

» - *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Ann. di Mat., s. II, t. XIX).

» - *Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analisi.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXIV).

» - *Sopra una trasformazione nelle equazioni differenziali lineari.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXV).

» - *Gli elementi di aritmetica* ad uso delle scuole secondarie inferiori. Bologna, Zanichelli.

1892 - *Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation différentielle.* (Acta Math., XVI).

» - *Sulle forme differenziali lineari.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. I).

» - *Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti.* (Mem. Bol., s. V, t. II).

» - *Applicazione alla geometria di una osservazione di aritmetica.* (Rend. Bol., anno accad. 1892-93).

1893 - *Sull'interpolazione.* (Mem. Bol., s. V, t. III).

» - *Sulle serie di potenze.* (Ann. di Mat., s. II, t. XXI).

» - *Sur les séries de fonctions.* (Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, XI).

» - *Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica.* (Rivista di Mat., III).

» - *Algebra Complementare*, I: *Analisi algebrica.* Milano, Hoepli; 4^a ediz., 1920.

1894 - *Sulle equazioni alle differenze.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. III).

» - *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue.* (Mem. Bol., s. V, t. IV).

» - *L'Algebra delle forme lineari alle differenze.* (Rend. Bol.. anno accad. 1894-95).

» - *Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti.* (Giorn. di Mat., XXXII).

» - *Algebra Complementare*, II: *Teoria delle equazioni.* Milano, Hoepli; 4^a ediz., 1920.

1895 - *Sulle operazioni funzionali distributive.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. IV).

» - *Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni differenziali e alle differenze.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. IV).

» - *L'Algebra delle forme lineari alle differenze.* (Mem. Bol., s. 5^a, t. V).

» - *Sopra alcune equazioni simboliche.* (Mem. Bol., s. 5^a, t. V).

» - *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data.* (Atti della R. Accad delle Sc. di Torino, vol. XXX).

1896 - *Sullo spirito aritmetico nella Matematica.* Traduzione di un opuscolo di F. Klein. (Rend. Pal., X).

» - *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V).

» - *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V).

» - *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V)

» - *Sulle equazioni differenziali lineari non omogenee e le operazioni funzionali che esse definiscono.* (Rend. Bol., anno accad. 1895-96).

» - *Le operazioni distributive e le omografie.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t, XXIX)

» - *Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions.* (Math. papers read at the Int. math. congress, Chicago).

1896 - *Esercizi sull'Algebra elementare.* Milano, Hoepli; 3ª ediz., 1921.
1897 - *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive di una funzione.* (Rend. Pal., XI).
» - *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante wronskiano.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. VI).
» - *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale.* (Rend. Bol., N. S., I).
» - *Commemorazione di* C. WEIERSTRASS. (Rend. Bol., N. S., I).
» - *Appunti di calcolo funzionale distributivo.* (Rend. Lomb., s. 2ª, vol. XXX).
» - *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif.* (Math. Annalen, XLIX).
» - *Esercizi sulla Geometria elementare.* Milano, Hoepli; 2ª ediz., 1915,
1898 - *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. VII).
» - *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. VII).
» - *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni.* (Rend. Bol., N. S., II).
» - *Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche.* (Rend. Bol., N. S., II).
» - *Sull'operazione aggiunta.* (Rend. Bol., N. S., II).
» - *Sur la transformée d'*EULER. (Crelle, CXIX).
1899 - *Sopra un problema d'interpolazione.* (Rend. Pal., XIV).
» - *Di un'equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. VIII).
» - *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. VIII).
» - *A proposito di un recente teorema del sig.* HADAMARD. (Rend. Bol., N. S., III).
» - *Sur les séries de puissances toujours divergentes.* (Comptes Rendus, 13 fevrier, Paris).
» - *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives.* (Bibliotheca Mathematica, nouv. s., XIII).
» - *Sulla continuità delle funzioni.* (Rend. Bol., N. S., IV).
1900 - *Commemorazione di* E. BELTRAMI. (Rend. Bol., N. S., V).
» - *Sulla scomposizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni.* (Rend. Bol., N. S., V).
» - *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica.* (Ann. di Mat., s. 3ª, t. IV).
1901 - *Commemorazione di* CH. HERMITE. (Rend. Bol., N. S., V).
» - *La trasformazione di* LAPLACE *e le serie divergenti.* (Rend. Bol., N. S, V).
» - *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi,* in collab. con U. AMALDI. Bologna, Zanichelli.
1902 - *Sulle serie di fattoriali.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XI).
» - *Sulle derivate ad indice qualunque.* (Mem. Bol., s. 5ª, t. IX).
» - *Alcune formule di Analisi combinatoria* (Giorn. di Mat., XL).
1903 - *Sur une série d'*ABEL. (Acta Math., XXVIII).
» - *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XII).
» - *Sulle funzioni meromorfe.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XII).
» - *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione.* (Rend. Bol., N. S., VII).
» - *Sopra un'estensione della formula di* TAYLOR *nel calcolo delle operazioni.* (Rend. Bol., N. S., VII).
» - *Sur l'approximation des fonctions par des irrationnelles quadratiques.* (Comptes Rendus, 9 novembre, Paris).
1904 - *Risoluzione di una classe di equazioni funzionali.* (Rend. Pal., XVIII).

1904 - *Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XIII).
» - *Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche.* (Rend. Bol., N. S., VIII).
1905 - *Studio sopra un teorema del* Poincaré *relativo alle equazioni ricorrenti.* (Rend. Bol., N. S., IX).
» - *Sur les fonctions déterminantes.* (Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., s. 3ª, t. XXII).
» - *Sulle equazioni funzionali lineari.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XIV).
1906 - *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XV).
» - *Sulle equazioni funzionali lineari.* (Mem. Bol., s. 6ª, t. III).
» - *Sull'inversione analitica degli integrali definiti.* (Rend. Bol., N. S., XI).
» - *Funktionaloperationen und Gleichungen.* (Enc. der math. Wiss., Bd. II, A. 11).
» - *Lezioni di Algebra complementare: Analisi algebrica.* Bologna, Zanichelli; 3ª ediz., 1924.
1907 - *Sopra l'estensione agli sviluppi asintotici di un teorema del sig.* Hurwitz. (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XVI).
» - *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Atti della Soc. It. delle Sc., detta dei XL, s. 3ª, t. XV).
1908 - *Commemorazione di* F. P. Ruffini. (Rend. Bol., N. S., XII).
» - *Sui fasci di omografie.* (Rend. Lomb., s. 2ª, t. XLI).
» - *Sulla teoria dei limiti.* (Per. di Mat. e Boll. di « Mathesis », anno XXIII).
» - *Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.* (Atti del IV Congr. Intern. dei Matematici (Roma, 1908), vol. II).
» - *Sul nuovo sistema pei Concorsi alle Cattedre delle Scuole Medie.* (Boll. di Mat., Anno VII).
1909 - *Alcune osservazioni sulle funzioni determinanti.* (Rend. Bol., N. S., XIII).
» - *Sopra certe equazioni integrali.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XVIII).
» - *Lezioni di Algebra complementare: Teoria delle equazioni.* Bologna, Zanichelli; 2ª ediz, 1921
1910 - *Sul concetto di divisibilità in generale.* (Rend. Bol., N. S., XIV).
1911 - *Sopra alcune omografie dello spazio funzionale.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XX).
» - *Appunti di Calcolo funzionale.* (Mem. Bol., s. 6ª, t. VIII).
» - *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (Giorn. di Mat., XLVIII).
» - *Sugli studi per la Laurea in matematica e sulla Sezione delle Scuole di magistero.* Comm. intern. per l'insegnamento matematico. (Atti della Sottocomm. italiana).
1912 - *Quelques observations sur les fonctions déterminantes.* (Acta Math., XXXVI).
» - *Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXI).
» - *Alcune osservazioni sopra i sistemi di funzioni associate e sopra un gruppo di operazioni lineari.* (Mem. Bol., s. 6ª, t. IX).
» - *Commemorazione di* C. Arzelà. (Rend. Bol., N. S., XVI).
» - *Lo spazio funzionale e le sue omografie.* (Giorn. di Mat., L)
» - *Équations et opérations fonctionnelles.* (Enc. des Sc. mathématiques, t. II, 5me vol., Paris-Leipzig).
» - *Recensione dell'opera*: « Theorie der linearen Differenzengleichungen » *di* Wallenberg e Guldberg.
1913 - *Un'applicazione della convergenza in media.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXII).
» - *Alcune osservazioni ed una rettifica alla Memoria*: « *Appunti di Calcolo funzionale* ». (Rend. Bol., N. S., XVIII).
» - *Sull'operazione aggiunta di* Lagrange. (Ann. di Mat., s. 3ª, t. XXI).
1914 - *Alcune osservazioni sull'iterata di una funzione data.* (Rend. Bol., N. S., XVIII).
» - *Sulle serie di fattoriali generalizzate.* (Rend. Pal., XXXVII).

1915 - *La Matematica e il futuro.* Discorso inaugurale. (Annuario della R. Univ. di Bologna).
» - *Lezioni di Calcolo Infinitesimale.* Bologna, Zanichelli; 3ª ediz. in due voll., 1926-27.
1916 - *Sopra alcuni nuclei analitici.* (Rend. Bol., N. S., XX).
» - *Il Calcolo delle probabilità e l'intuizione.* (Rivista « Scientia », XIX).
1917 - *Appunti su alcuni problemi d'iterazione.* (Rend. Bol., N. S., XXI).
1918 - *Sulle radici reali delle equazioni iterate di un'equazione quadratica.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXVII).
» - *Sull'iterazione della funzione* $x^2 - a$. (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXVII).
» - *Sulle catene di radicali quadratici.* (Rend. Bol., N. S., XXII).
» - *Sulle catene di radicali quadratici.* (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. LIII).
» - *Commemorazione di* E. E. LEVI. (Semin. Mat. dell'Univ. di Roma).
» - *La crisi della Scuola media.* (Rivista pedagogica, anno XI).
1919 - *Un teorema sull'iterazione della funzione quadratica.* (Rend. Bol., N. S., XXIII).
» - *Commemorazione di* U. DINI. (Period. di Mat. e Boll. di « Mathesis »).
1920 - *L'iterazione completa di* $x^2 - 2$. (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXIX).
» - *Sulla funzione iterata di una razionale intera.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXIX).
» - *Sopra alcune equazioni funzionali.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXIX).
» - *Sull'iterata di un polinomio razionale intero.* (Rend. Bol., N. S., XXIV).
» - *Commemorazione di* A. RAZZABONI. (Rend. Bol., N. S., XXV).
1921 - *Sur une équation intégrale dans le domaine complexe.* (Comptes Rendus, 6 juin, Paris).
» - *Sobre la iteracion analitica.* (Revista mathemática hispano-americana, Madrid).
» - *Un'interpretazione geometrica e un'estensione della divisibilità dei polinomi.* (Per. di Mat., s. IV, vol. I).
» - *Spigolature nel campo del Calcolo funzionale.* (Atti della Soc. It. per il Progr. delle Sc., XI Riunione, Trieste).
» - *Sulla preparazione degli Insegnanti.* (Rivista Pedagogica, anno XIV).
1922 - *Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari.* (Rend. Bol., N. S., XXVI).
» - *Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione.* (Rend. Bol., N. S., XXVIII).
» - *Recensione dell'opera*: « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie » *di* E. LANDAU. (Boll. U. M. I., anno I).
« - *Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione.* (Boll. U. M. I., anno I).
» - *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.* T. I, Bologna, Zanichelli.
1923 - *Operazioni funzionali permutabili colla derivazione.* (Boll. U. M. I., anno II).
1924 - *Sulle funzioni trascendenti semplici.* (Rend. Lincei, s, 5ª, vol. XXXIII).
» - *Ancora sulle funzioni trascendenti semplici.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXXIII).
» - *Su una separazione di singolarità in una funzione analitica.* (Rend. Lincei, s. 5ª, vol. XXXIII).
» - *Sulla generalizzazione di alcune trascendenti classiche.* (Rend. Bol., N. S., XXVIII).
» - *Relazione del Presidente all'adunanza pubblica solenne dell'Accademia del 22 giugno 1924.* (Mem. Bol., s. VIII, t. I).
» - *Recensione dell'opera*: « Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen » *di* H. W. E. JUNG. (Boll. U. M. I., anno III).
1925 - *Di alcune trasformazioni funzionali.* (Rend. Lincei, s. 6ª, vol. I).
» - *Recensione dell'opera*: « Le calcul des probabilités à la portée de tous » *di* FRÉCHET e HALBWACHS. (Boll. U. M. I., anno IV).
» - *Commemorazione di* A. MERLANI. (Rend. Bol., N. S., XXIX).
1926 - *Sur la résolution de l'équation fonctionnelle* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *à coefficients constants.* (Acta Math., XLVIII).

1926 - *Sulle serie di potenze negative di una variabile.* (Rend. Bol., N. S., XXX).
» - *Il Calcolo delle differenze finite.* (Boll. U. M. I., anno V).
» - *Notice sur les travaux de* S. PINCHERLE. (Acta Math., XLVI).
1927 - *Una classe speciale di forme differenziali lineari d'ordine infinito.* (Mem. Bol., s. 8ª, IV).
1928 - *Recensione dell'opera*: « Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications » *di* P. MONTEL. (Boll. U. M. I., anno VII).
» - *Sulle operazioni funzionali lineari.* (Proceedings Congress Toronto, I).
» - *Discorso d'apertura del Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna.* (Atti, tomo I).
» - *Recensione dell'opera*: « Les espaces abstraits » *di* M. FRÉCHET. (Boll. U. M. I., anno VII).
1929 - *Recensione dell'opera*: « Leçons sur l'intégration » *di* H. LEBESGUE. (Boll. U. M. I., anno VIII).
» - *Recensione dell'opera*: « Leçons sur les équations linéaires aux différences finies » *di* N. E. NÖRLUND. (Boll. U. M. I., anno VIII).
» - *Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero.* (Rend. Lincei, s. 6ª, vol. IX).
» - *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (Rend. del Semin. Mat. di Milano, III).
» - *Una generalizzazione della divisibilità algebrica* (con relativa traduzione in francese). Bologna, Zanichelli.
» - *Commemorazione del socio* FRANCESCO BRIOSCHI. (Atti della Soc. It. delle Sc., detta dei XL, s. 3ª, t. XXIII).
» - *Osservazioni sulla trasformazione di* EULER-LINDELÖF. (Rend. Bol., N. S., XXXIII).
» - *Osservazioni sopra una classe di operazioni lineari.* (Atti del Congr. Int. dei Mat. (Bologna-1928), t. III).
1930 - *Sui coefficienti di fattoriali.* (Ann. di Mat., s. 4ª, t. VII).
» - *Sulle serie ordinate per le potenze successive dell'integrazione.* (Rend. Bol., N. S., XXXIV).
» - *Sugli autotrasformatori.* (Rend. Bol., N. S., XXXIV).
» - *Recensione dell'opera*: « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Zweite Auflage) » *di* E. LANDAU. (Boll. U. M. I., anno IX).
» - *Parole d'apertura all'adunanza pubblica dell'Accademia del 30 novembre 1930.* (Mem. Bol., s. VIII, t. VIII).
1931 - *Sopra uno speciale operatore lineare.* Note I, II e III. (Rend. Lincei, s. 6ª, voll. XIII, XIV).
» - *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare.* (Enciclopedia Matem. elementari, vol. I).
» - *Sullo scarto della permutabilità nelle operazioni lineari.* (Rend. Bol., N. S., XXV).
» - *Sulla permutabilità negli operatori lineari.* (Atti Società Italiana Progr. Scienze, XX Riunione, vol. II).
» - *Determinanti.* (Enciclopedia Italiana, vol. XII).
» - *Recensione dell'opera*: « Integralgleichungen », *di* G. KOWALEWSKI. (Boll. U. M. I., anno X).
1932 - *Un'applicazione del metodo simbolico.* (Boll. U. M. I., anno XI).
» - *Generalizzazione della teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* (Mem. Bol., s. VIII, t. IX).
» - *Recensione dell'opera*: « Leçons sur les fonctions entières ou monodromes » *di* P. MONTEL. (Boll. U. M. I., anno XI).
» - *Commemoriazione di* GIUSEPPE VITALI. (Rend. Bol., N. S., XXXVI).
» - *Recensione dell'opera*: « Knotentheorie » *di* K. REIDEMEISTER. (Boll. U. M. I., anno XI).

1933 - *Sull'iterazione dell'operatore* xD. (Boll. U. M. I., anno XII).
» - *Operatori lineari e coefficienti di fattoriali.* (Rend. Lincei, s. 6ª, vol. XVIII).
» - *Operatori normali di rango uno nello spazio delle serie di potenze.* (Rend. Bol., N. S., XXXVII).
» - *Recensioni delle opere*: « The theorie of matrices » *di* C. C. MAC-DUFFEE; « Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum selbst Studium » *di* H. v. MANGOLDT'S (vol. III, edizione curata da K. KNOPP); « Cours d'Algèbre (à l'usage des classes de 3ème, 2de et 1ère de l'enseignement secondaire) » *di* R. ESTÈVE *e* H. MITAULT. (Boll. U. M. I., anno XII).
» - *Funzioni notevoli.* (Enciclopedia italiana, vol. XVI).
1934 - *Su una decomposizione in fattori degli operatori normali* (Rend. Bol., s. 2ª, t. XXXVIII).
» - *Recensione dell'opera*: « Topologie I. Espaces of matrices » *di* C. C. MAC-DUFFEE. (Boll. U. M. I., anno XIII).
1935 - *Una generalizzazione del concetto di divisibilità.* (Boll. U. M. I., anno XIV).
» - *Alcune osservazioni sugli operatori normali nello spazio delle serie di potenze.* (Rend. Bol., N. S., XXXIX).
» - *Recensione dell'opera*: « Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. I; Arithmetik, Algebra und Analysis » *di* H. WEBER, nuova ediz. di P. EPSTEIN. (Boll. U. M. I., anno XIV).
s - *Recensioni delle opere*: « Curvas definidas por una ecuacion diferencial de primer orden y de primer grado » *di* H. DULAC; « Cours de Géométrie, t. I (Géométrie plane) » *di* R. ESTÈVE *e* H. MITAULT. (Boll. U. M. I., anno XIV).
» - *Recensioni delle opere*: « Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théorie de l'Algèbre moderne » *di* P. DUBREUIL; « Ueber die Darstellung von Gruppen in Galois-Feldern « *di* R. BRAUER; « Carakterisung des Spektrums eines Integraloperators » *di* J. *von* NEUMANN; « Cours de Géométrie, t. II (Géométrie dans l'espace) *di* R. ESTÈVE *e* H. MITAULT; « Leçons d'Algèbre et de Géométrie (à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences), t. I » *di* R. GARNIER. (Boll. U. M. I., anno XIV).
1936 - *Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze.* (Ann. di Mat., s. 4ª, t. XIV).
» - *Un operatore normale e la divisibilità.* (Rend. Bol., N. S., XL).
» - *Recensioni delle opere*: « Interpolation and approximation by rational functions in the còmplex domain » *di* J. L. WALSH; « General analysis » *di* E. H. MOORE; « Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions » *di* S. MANDELBROJT. (Boll. U. M. I., anno XV).

PUBBLICAZIONI POSTUME

1936 - *Sulla permutabilità negli operatori lineari* (redatta su appunti manoscritti dell'A. da B. LEVI). (Boll. U. M. I., anno XV).
» - *Alcune osservazioni sulle serie di potenze del simbolo di derivazione.* In « Scritti Matematici offerti a L. BERZOLARI ». (Pavia, Istituto Matematico della R. Università).
» - *Contributo alla teoria degli operatori lineari.* (Ann. di Mat., s. 4ª, t. XV).
1937 - WEIERSTRASS. (Enciclopedia Italiana, vol. XXXV).

Superficie particolari dello spazio a cinque dimensioni in relazione con le loro linee principali.

Memoria di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

Sunto. - *L'A. studia alcune particolarità inerenti alle linee principali di una superficie dello spazio a cinque dimensioni, sopratutto in relazione con l'ordine di approssimazione secondo il quale sono incidenti i piani tangenti di una superficie in punti consecutivi di una tale linea. Tra l'altro, studia le superficie i cui piani tangenti sono incidenti a quattro piani fissi, le quali costituiscono un'estensione della nota superficie di* VERONESE.

1. Nella presente Memoria mi propongo di portare alcuni contributi allo studio delle linee principali di una superficie appartenente allo spazio a cinque dimensioni: contributi di indole assai diversa, ma — come si vedrà — collegati tra loro. Alcune delle cose che si diranno sembrano indicare l'opportunità di ulteriori sviluppi.

Le linee principali di una superficie dello spazio a cinque dimensioni costituiscono nel campo complesso, al quale qui intendiamo riferirci, cinque sistemi ∞^1: queste linee che dal punto di vista proiettivo sono certamente le più notevoli fra quelle tracciate su una superficie S dello S_5 possono notoriamente definirsi in modi svariati tra i quali ricordiamo i seguenti:

a) fra gli ∞^1 iperpiani che segano la superficie S secondo una linea avente una cuspide nel punto generico x della superficie stessa, ve ne sono generalmente cinque per ciascuno dei quali il punto x diventa un tacnodo: le relative tangenti sono le tangenti principali alla superficie S nel punto x (tangenti inviluppanti le linee principali) (1);

b) le tangenti principali in x si possono caratterizzare come appartenenti a curve della superficie S passanti per il punto x e tali che i loro S_3 osculatori in x coincidano con gli S_3 2-tangenti alla superficie nel punto x secondo le tangenti stesse (2);

c) le linee principali sono le linee autoconiugate di seconda specie (3);

(1) C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, « Rend. del Circ. mat. di Palermo », t. XXX, 1910, v. il n. 24.

(2) E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XLVIII, 1913.

(3) E. BOMPIANI, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, « Rend. del Circolo mat. di Palermo », t. XLVI, 1922.

d) lungo una linea principale è caratteristica la proprietà che due piani tangenti alla superficie abbiano — nel senso definito da CORRADO SEGRE (4) — un « ordine di vicinanza » maggiore dell'ordinario, e precisamente ordine di vicinanza *sette* anzichè *cinque*. A proposito di quest'ultima definizione, rileviamo esplicitamente che — come ho precisato in una mia Memoria recente (5) — per un sistema semplicemente infinito di piani dello S_5, entro il quale il piano generico sia incidente al consecutivo in un punto (quali sono i piani tangenti a una superficie nei singoli punti di una sua linea), tale incidenza si può verificare in vari *ordini di approssimazione*; l'ordine di approssimazione σ è suscettibile di tutti i valori pari tali che $2 \leq \sigma \leq 16$, dopo di che si passa subito al caso $\sigma = \infty$, nel quale gli ∞^1 piani in questione sono a due a due incidenti, e rientrano così secondo un teorema del MORIN (6) o fra i *sistemi elementari* (piani di uno S_4, piani per un punto, piani incidenti in rette un piano fisso), oppure fra i sistemi ∞^1 di piani appartenenti a una delle seguenti totalità: piani di un sistema di una quadrica generale, piani tangenti a una superficie di VERONESE, piani contenenti le coniche di questa stessa superficie. Orbene, riferendoci all'ordine di approssimazione σ da me definito e adottato nella Memoria citata (il quale per un sistema ∞^1 di piani di cui due consecutivi incidenti in un punto è inferiore di tre unità all'ordine di vicinanza considerato dal SEGRE), la caratterizzazione *d)* delle linee principali si esprime dicendo che lungo una linea principale i piani tangenti a una superficie sono incidenti ciascuno al consecutivo in un ordine di approssimazione $\sigma \geq 4$ (7).

---

(4) *Sulle linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (5), vol. XXX, 1921.

(5) *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia 1936.

(6) *Sui sistemi di piani a due a due incidenti*, « Atti del Regio Istituto Veneto », t. LXXXIX, 1930.

(7) Se una superficie si rappresenta, a meno di omografie, con un sistema lineare alle derivate parziali del terz'ordine, quale è il sistema (30) che si trova al n. 14 del presente lavoro. con la variante che nell'ultima di quelle equazioni si aggiunge a secondo membro un termine $e_{11}x_{uu}$ (non occorrendo qui supporre, come là si suppone, che le linee v siano linee principali della superficie, mentre — qui come là — supponiamo che tali siano le linee u), si trova facilmente, applicando i risultati della mia citata Memoria, *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini*, che la condizione affinchè le linee principali u diano luogo a un ordine di approssimazione $\sigma \geq 6$ è che esse siano piane, oppure che sia

$$3a_{12u}b_{22} - 6a_2b_{22} - a_{11}a_{12}b_{22} - a_{12}b_{12}b_{22} - a_{12}b_{22u} - a_{12}b_{22}c_{22} = 0$$

a meno che le linee principali u siano asintotiche per la superficie (nel qual caso i piani tangenti a questa in punti consecutivi di tali linee sono addirittura incidenti in rette).

2. Ricordiamo ancora che è stata recentemente studiata la possibile particolarità che lungo ogni singola linea principale di un sistema, o di più sistemi, i piani tangenti di una superficie S stiano in un medesimo iperpiano, come avviene p. es. per una superficie costituita da ∞^1 linee in altrettanti S_3 passanti per un piano fisso (la superficie ha allora un sistema *conico* di linee principali). Il BOMPIANI ([8]) ha fra altro assegnata la costruzione della più generale superficie avente tre sistemi di linee principali con iperpiano tangente fisso, e ha posto la questione se oltre a una superficie indicata dal BOL esistano ulteriori superficie per le quali tutti cinque i sistemi di linee principali siano sistemi a iperpiano tangente fisso: effettivamente ([9]) io ho poi indicato, oltre alla superficie del BOL, altre superficie che si trovano in queste condizioni.

Aggiungiamo, quanto al caso ora indicato di linee principali con iperpiano tangente fisso, che — ritornando a quanto sopra si è detto relativamente alla caratterizzazione *d)* delle linee principali — in tale eventualità l'ordine di approssimazione σ considerato sale evidentemente al caso massimo $\sigma = \infty$. Ma anche in allri casi potrà avvenire che per qualche sistema di linee principali sia $\sigma = \infty$: basta, ovviamente, che i piani tangenti lungo quelle linee principali formino una delle configurazioni precisate dal MORIN. Se, per un sistema di linee principali, quei piani rientrano in uno dei *sistemi elementari* del MORIN, si hanno (prescindendo dalle superficie rappresentanti un'equazione di LAPLACE) due sole possibilità: che la superficie ammetta precisamente la particolarilà qui sopra considerata di possedere un sistema di linee principali con iperpiano tangente fisso, oppure che quel sistema di linee principali sia costituito da linee piane; è invero quest'ultima la conclusione alla quale si arriva partendo dall'ipotesi di un sistema ∞^1 di linee, tali che i piani tangenti alla superficie lungo ciascuna di esse incontrino in rette un piano fisso ([10]). Invece l'ulteriore caso di sistema elementare, in cui

([8]) Cfr. BOMPIANI e BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuova caratterizzazione della superficie di Veronese*, « Math. Zeitschrift », Band 42, 1937.

([9]) A. TERRACINI, *Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie.* Note I e II, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (6), vol. XXIX, 1937.

([10]) Come può avvenire che tutti cinque i sistemi di linee principali di una superficie siano a iperpiano tangente fisso, così può anche avvenire che le linee principali siano piane in tutti cinque i sistemi. Un esempio estremamente semplice è offerto dalla superficie del quinto ordine S^5 rappresentabile su un piano π col sistema lineare delle cubiche passanti per quattro punti fissi G_1, G_2, G_3, G_4 (superficie di DEL PEZZO). Come è notissimo, questa superficie contiene cinque fasci di coniche (rappresentati sul piano π dai quattro fasci di rette aventi i centri in G_1, G_2, G_3, G_4 e dal fascio di coniche avente questi quattro punti base): il fatto che si tratta di linee piane è già sufficiente per concludere che sono prini piani tangenti alla superficie nei punti di ogni singola linea del sistema devono passare per un punto fisso, esso conduce evidentemente a una superficie con un sistema di coni circoscritti, e come tale rappresentante un'equazione di LAPLACE. Ma, all'infuori di questi casi si potrà ancora avere $\sigma = \infty$, quando i piani tangenti alla superficie nei singoli punti delle linee principali di un sistema sono a due a due incidenti senza costituire uno dei nominati *sistemi elementari*; p. es., per stare al caso più semplice, quando quei piani tangenti appartengono a una stessa quadrica (generale) come piani di un medesimo sistema.

Un esempio notevole di questa eventualità si troverà precisamente nel presente lavoro. L'argomento che ho scelto per servire di filo conduttore è offerto dalle superficie dello S_5 che sono dotate di quattro sistemi *conici* di linee principali, ove i quattro piani fissi relativi ai quattro sistemi π_1, π_2, π_3, π_4 si suppongono a due a due incidenti (in punti distinti, e non appartenenti a un medesimo iperpiano): in altre parole si tratta delle superficie dello S_5 i cui piani tangenti sono incidenti ai quattro piani fissi considerati π_1, π_2, π_3, π_4. Esse costituiscono dunque per la loro stessa definizione una generalizzazione della superficie di VERONESE. Queste superficie — la cui determinazione si compie agevolmente — si dividono in due tipi, che ho chiamato (A) e (B): per entrambi, come si vedrà, avviene necessariamente che lungo le singole linee principali del quinto sistema (che non risultano a iperpiano tangente fisso) i piani tangenti alle superficie in esame appartengono a una quadrica. Si ha così un esempio particolarmente semplice della possibilità dianzi accennata.

Mi è poi sembrato opportuno di considerare insieme con questa possibilità relativa a un sistema di linee principali di una superficie qualunque, anche una forma per così dire attenuata della particolarità stessa, la quale consiste in ciò, che lungo un sistema ∞^1 di linee (necessariamente principali) gli iperpiani bitangenti a una superficie secondo le direzioni di quelle linee corrispondano ai punti di contatto in polarità ordinarie dipendenti unicamente dalle linee stesse. In tal caso l'ordine di approssimazione secondo il quale sono incidenti piani tangenti alla superficie in punti consecutivi di una linea del sistema considerato vale generalmente 4 (così come avviene per linee principali affatto qualunque); ma è notevole il fatto che, analizzando i casi

cipali (poichè, i piani tangenti alla superficie in due punti di una tale linea essendo sempre incidenti, si applica la caratterizzazione *d*)). Volendosene una conferma mediante applicazione della caratterizzazione *a*) delle linee principali, è ovvia sul piano rappresentativo π la considerazione delle cubiche del sistema lineare aventi un tacnodo in un punto generico *M*.

intermedi che si possono presentare per il valore di σ prima di passare al valore $\sigma = \infty$, ho trovato che tutti i valori possibili a priori per σ (numero pari ≤ 16) si escludono eccezion fatta per il solo valore $\sigma = 6$.

Ho poi anche richiamato l'attenzione su un'altra proprietà che si presenta in particolare per le superficie delle classi (A) e (B). Fissato per una superficie qualunque un determinato sistema di linee principali, si possono considerare gli iperpiani bitangenti alla superficie secondo le direzioni delle linee di tale sistema. Nasce così generalmente un inviluppo ∞^2 di iperpiani, riferito alla superficie di partenza, il quale sarà dotato di cinque sistemi di inviluppi principali (la cui definizione si ricava per dualità da quella delle linee principali di una superficie). In generale vi è un solo sistema di linee principali della superficie di partenza al quale corrisponde un sistema di inviluppi principali, ed è il sistema stesso attraverso il quale si è operato il passaggio dalla superficie all'inviluppo ∞^2 di iperpiani. Per quelle superficie invece, adottando, per operare il passaggio, il quinto sistema di linee principali (come è necessario perchè servendosi di uno degli altri quattro non si ottengono ∞^2 iperpiani bitangenti), anche a ciascuno dei rimanenti sistemi di linee principali corrisponde sempre un sistema di inviluppi principali.

3. Partiamo dunque, nello spazio a cinque dimensioni, da quattro piani π_1, π_2, π_3, π_4 a due a due incidenti (in punti tutti distinti, e non appartenenti a un medesimo iperpiano). Chiamando i punti d'intersezione delle coppie di piani ordinatamente A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 secondo lo schema $A_1 \equiv \pi_1\pi_2$, $A_2 \equiv \pi_1\pi_3$, $A_3 \equiv \pi_1\pi_4$, $A_4 \equiv \pi_2\pi_3$, $A_5 \equiv \pi_2\pi_4$, $A_6 \equiv \pi_3\pi_4$, i sei punti così definiti risultano dunque indipendenti. Possiamo pertanto adottarli come vertici della piramide di riferimento per le coordinate proiettive omogenee di punto $x_1, x_2, \dots, x_6$ e di iperpiano $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$. Inoltre, a partire da quei sei punti, i quattro piani risultano definibili come piani $\pi_1 \equiv A_1A_2A_3$, $\pi_2 \equiv A_1A_4A_5$, $\pi_3 \equiv A_2A_4A_6$, $\pi_4 \equiv A_3A_5A_6$. Chiameremo, più avanti, $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ il piano, ben determinato, che è incidente secondo una retta a ciascuno dei tre piani che si ottengono dalla quaderna π_1, π_2, π_3, π_4 sopprimendo il piano π_i (cosicchè $\sigma_1 \equiv A_4A_5A_6$, $\sigma_2 \equiv A_2A_3A_6$, $\sigma_3 \equiv A_1A_3A_5$, $\sigma_4 \equiv A_1A_2A_4$).

Vogliamo ora ottenere, nel modo più generale, una superficie S dotata di quattro sistemi ∞^1 di linee situate in S_3 per i quattro piani fissi $\pi_i (i = 1, 2, 3, 4)$: chiameremo ordinatamente Σ_i quei quattro sistemi (*conici*) di linee (*principali*). Possiamo adottare per la superficie S coordinate curvilinee u, v, tali che le linee v (cioè le linee $u = \text{cost.}$) e le linee u coincidano rispettivamente con le linee dei sistemi Σ_1, e Σ_2; e allora la superficie S in esame avrà equazioni parametriche del tipo

(1) $$x_1:x_2:x_3:x_4:x_5:x_6=\varphi(u,v):V(v):v:U(u):u:1;$$

le ipotesi fatte sui sistemi Σ_3 e Σ_4 si traducono in quella che $\varphi(u,v)$ si possa scrivere sotto ciascuna delle due forme $uf\left(\frac{v}{u}\right)$ e $Ug\left(\frac{V}{U}\right)$, dove ognuna delle f e g è un'opportuna funzione dell'argomento rispettivamente indicato.

Dobbiamo perciò ricercare anzitutto qual è il modo più generale di determinare le funzioni $U(u)$, $V(v)$, $f\left(\frac{v}{u}\right)$, $g\left(\frac{V}{U}\right)$, tali che sia identicamente

(2) $$uf\left(\frac{v}{u}\right)=Ug\left(\frac{V}{U}\right).$$

Volendo poi escludere le superficie che non appartengano allo S_5, risultano per le funzioni $U(u)$, $V(v)$, $\varphi(u,v)$ le esclusioni: nessuna tra le funzioni $U(u)$, $V(v)$, $f\left(\frac{v}{u}\right)$ deve essere lineare.

4. Introdotte provvisoriamente in luogo di u e di U le loro inverse, alle quali manteniamo tuttavia le medesime denominazioni. e scritta pertanto la (2) sotto la forma

(2') $$\frac{f(uv)}{u}=\frac{g(UV)}{U}$$

dobbiamo imporre che $\frac{u}{U}g(UV)$ sia funzione del prodotto uv, vale a dire (designando con accenti le derivazioni rispetto ai singoli argomenti delle varie funzioni di una variabile che entrano in considerazione)

(3) $$\frac{g'(UV)}{g(UV)}=\frac{uU'-U}{U(uU'V-vUV')},$$

dove il denominatore del secondo membro nelle nostre ipotesi è certo non nullo. Sono dunque da determinare le funzioni $U(u)$, $V(v)$ in modo che il secondo membro sia funzione del prodotto UV, vale a dire in modo che risulti

(4) $$uUU''V'(V-vV')+U'(U-uU')vVV''+2U'(U-uU')V'(V-vV')=0$$

identicamente rispetto alle variabili indipendenti u, v.

Scrivendo la (4) sotto la forma

$$\frac{uUU''}{U'(U-uU')}=\frac{-2V'(V-vV')-vVV''}{V'(V-vV')}$$

se ne conclude che esiste una costante n tale che

(5) $$\frac{uUU''}{U'(U-uU')}=-2-n,$$

(6) $$\frac{vVV''}{V'(V-vV')}=n.$$

La (6) considerata come equazione differenziale del 2° ordine nella funzione incognita $V(v)$ porge, integrata:

$$\begin{array}{lll} \text{se} & n \neq -1, & V=qv(1+pv^{-n-1})^{\frac{1}{n+1}}, \\ \text{se} & n=-1, & V=pv^q \end{array}$$

dove p, q sono costanti arbitrarie. Analogamente si ha $U(u)$ dalla (5); dove è da osservare che se $n=-1$, cosicchè la funzione $V(v)$ è del secondo fra i due tipi ora assegnati, altrettanto vale della $U(u)$.

5. Tornando ora alla u e alla $U(u)$ iniziali, si hanno i due seguenti modi di soddisfare alla (2): la forma di $U(u)$, $V(v)$ segue da quanto si è detto al n. 4, mentre quella della funzione g si trae dalla (3), ricavandone poi f in base alla stessa (2),

a) $$U=ru(1+su^{-n-1})^{\frac{1}{n+1}}, \quad V=qv(1+pv^{-n-1})^{\frac{1}{n+1}} \qquad (n \neq -1)$$

dove r, s, p, q sono costanti arbitrarie tutte diverse da zero per non cadere nelle esclusioni formulate alla fine del n. 3. Esse si possono rendere tutte unitarie alterando per opportuni fattori costanti le u, v, U, V, il che è lecito equivalendo a modificare il punto unità del sistema di riferimento. Si ha allora ([11]), ponendo $m=\dfrac{1}{n+1}$,

(a) $$\begin{cases} U=\left(1+u^{\frac{1}{m}}\right)^m, \quad V=\left(1+v^{\frac{1}{m}}\right)^m, \quad g=\left[-1+\left(\dfrac{V}{U}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^m, \\ f=\left(-1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m, \quad \varphi=\left(v^{\frac{1}{m}}-u^{\frac{1}{m}}\right)^m, \end{cases}$$

dove m è una costante arbitraria soggetta alle sole limitazioni di essere diversa da 0 e da 1;

b) $$U=ru^s, \quad V=pv^q$$

([11]) Nel calcolo di g — che si ottiene mediante una quadratura — (e quindi in f e in φ) si presenta una costante arbitraria, da cui si può prescindere variando ancora il punto unità.

dove p, q, r, s sono costanti, arbitrarie salvo alcune limitazioni tra le quali sono le $r \neq 0$, $p \neq 0$, cosicchè si può supporre $r = p = 1$. Inoltre $s \neq 0$, $q \neq 0$, $s \neq 1$, $q \neq 1$, $s \neq q$ [12]. Allora (cfr. la penultima nota a piè di pagina)

$$\text{(b)} \qquad U = u^s, \quad V = v^q, \quad g = \left(\frac{V}{U}\right)^{\frac{s-1}{s-q}}, \quad f = \left(\frac{v}{u}\right)^l, \quad \varphi = u^{1-l} v^l$$

dove si è posto

$$\text{(7)} \qquad l = q\frac{s-1}{s-q}.$$

Perciò *la più generale superficie dello* S_5 *dotata di quattro sistemi conici di linee principali, situate in* S_3 *passanti per quattro piani fissi a due a due incidenti (in punti distinti e non situati in uno stesso iperpiano), è riducibile, mediante omografie, all'uno o all'altro dei due tipi:*

$$\text{(A)} \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \left(v^{\frac{1}{m}} - u^{\frac{1}{m}}\right)^m : \left(v^{\frac{1}{m}} + 1\right)^m : v : \left(u^{\frac{1}{m}} + 1\right)^m : u : 1,$$

$$\text{(B)} \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = u^{1-l} v^l : v^q : v : u^s : u : 1$$

dove nelle (A) m *è una costante arbitraria distinta da zero e da uno, e nelle* (B) s *e* q *sono costanti arbitrarie ciascuna distinta da zero e da uno e inoltre distinte fra loro, mentre* l *è definito dalla* (7).

Indicheremo rispettivamente con $S(m)$ e con $S(s, q)$ la superficie rappresentata dalle (A) o dalle (B), o una superficie ad essa omografica. Nel caso (A) porremo anche

$$\text{(8)} \qquad u = u_1{}^m, \quad v = v_1{}^m$$

sostituendo allora alla precedente la rappresentazione parametrica

$$\text{(A')} \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = (v_1 - u_1)^m : (v_1 + 1)^m : v_1{}^m : (u_1 + 1)^m : u_1{}^m : 1.$$

6. Osserviamo subito, per le superficie di tipo (A), che i quattro sistemi conici di linee principali sono a due a due proiettivamente equivalenti fra loro, in quanto, precisamente, ciascuna di quelle superficie è mutata in sè da una omografia involutoria $\Omega_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$ che scambia tra loro i due sistemi di linee principali Σ_i, Σ_j, lasciando immutato ciascuno dei due rimanenti sistemi conici di linee principali. Per avere le omografie Ω_{12}, Ω_{13}, Ω_{14} basta far corrispondere al punto (u_1, v_1) il punto (u_1', v_1') ove ri-

[12] Perchè se no la (3) scritta sotta forma intiera (dalla quale forma intiera è appunto stata dedotta la (3)) darebbe $s = q = 1$, il che è escluso.

spettivamente sia

$$u_1' = v_1, \; v_1' = u_1; \quad u_1' = \frac{1}{u_1}, \; v_1' = -\frac{v_1}{u_1}; \quad u_1' = -\frac{u_1}{v_1}, \; v_1' = \frac{1}{v_1}.$$

Allora le tre omografie indicate sono ovviamente

$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = (-1)^m x_1:x_4:x_5:x_2:x_3:x_6,$$
$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = (-1)^m x_2:(-1)^m x_1:(-1)^m x_3:x_4:x_6:x_5,$$
$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = x_4:x_2:x_6:x_1:(-1)^m x_5:x_3.$$

Il prodotto $\Omega_{13}\Omega_{12}\Omega_{13}$ scambia Σ_2 con Σ_3, ecc..

Quanto alle superficie di tipo (B) si possono ottenere analoghi scambi tra i sistemi conici di linee principali, ma operando mediante omografie involutorie $\Theta_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j)$ tra una superficie di tipo (B) e *un'altra* superficie di tipo (B). Basta naturalmente anche qui assegnare le omografie Θ_{12}, Θ_{13}, Θ_{14}. Esse si ottengono facendo corrispondere al punto (u, v) delle superficie $S(\bar{s}, \bar{q})$, dove rispettivamente nei tre casi

$$\bar{s} = q, \; \bar{q} = s; \quad \bar{s} = 1 - s, \; \bar{q} = l; \quad \bar{s} = 1 - l, \; \bar{q} = 1 - q$$

(punto che designeremo con $\bar{x}$), il punto $(u'v')$ della superficie originaria $S(s, q)$ essendo nei tre casi

$$u' = v, \; v' = u; \quad u' = \frac{1}{u}, \; v' = \frac{v}{u}; \quad u' = \frac{u}{v}, \; v' = \frac{1}{v}.$$

Si hanno così le tre omografie involutorie

$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = \bar{x}_1:\bar{x}_4:\bar{x}_5:\bar{x}_2:\bar{x}_3:\bar{x}_6,$$
$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = \bar{x}_2:\bar{x}_1:\bar{x}_3:\bar{x}_4:\bar{x}_6:\bar{x}_5,$$
$$x_1':x_2':x_3':x_4':x_5':x_6' = \bar{x}_4:\bar{x}_2:\bar{x}_6:\bar{x}_1:\bar{x}_5:\bar{x}_3.$$

L'esistenza delle omografie ora indicate per le superficie di tipo (A) e di tipo (B) permette, tra altro, di conchiudere quanto segue in base al solo esame del sistema Σ_1.

Per le superficie di tipo (A) le linee principali contenute in spazi S_3 passanti per il piano $\pi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sono curve « *con simmetria tetraedrale* » *di* De la Gournerie, e quindi appartenenti a un complesso tetraedrale avente come tetraedro fondamentale quello che ha i suoi vertici nei tre punti $\pi_i\pi_j (j = 1, 2, 3, 4; j \neq i)$ e ulteriormente nel punto che è traccia di quegli S_3 sul piano σ_i (n. 3).

Per le superficie del tipo (B) le analoghe linee principali sono invece linee W di Klein-Lie, appartenenti ai medesimi complessi tetraedrali ora indicati.

7. Le superficie di tipo (A) sono ovviamente algebriche se m è un numero razionale; quelle di tipo (B) se s, q sono entrambi razionali.

Particolarmente semplice è il caso offerto dalle superficie di tipo (A) quando il numero m è intero positivo. La superficie $S(m)$ è allora una superficie algebrica razionale di ordine m^2, rappresentata su un piano in modo che il sistema delle sue sezioni iperpiane ha per immagine il sistema lineare ∞^5 delle curve di ordine m individuato dai sei lati di un quadrangolo piano completo $G_1G_2G_3G_4$, contati ciascuno m volte. Ai quattro vertici G_1, G_2, G_3, G_4 corrispondono sulla superficie altrettanti punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, giacenti rispettivamente nei quattro piani π_1, π_2, π_3, π_4: se m è dispari i quattro punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 risultano complanari, mentre per m pari i quattro spazi $\sigma_i Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ concorrono in un punto. Le linee principali di ciascuno dei quattro sistemi $\Sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sono dotate di quattro punti di iperosculazione, e rientrano pertanto in una classe di curve dello spazio ordinario particolarmente nota ([13]). La superficie è poi incontrata da ciascuno dei sei iperpiani $\lambda_{ij} \equiv \pi_i\pi_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$ secondo una linea γ_{ij}, contata m volte: tale linea è essa stessa una linea *piana* dotata di tre punti di iperosculazione: il piano in cui giace la linea γ_{ij} è il piano dei punti Q_i, Q_j e del punto $\pi_i\pi_j$. Dei quattro punti di iperosculazione di una linea principale variabile nel sistema Σ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ uno è fisso nel punto Q_i, mentre gli altri tre hanno per luogo le tre linee γ_{jl} $(j, l = 1, 2, 3, 4;\ j \neq l)$.

Queste superficie si proiettano su uno S_3 generico, da ciascuna delle tre rette congiungenti il punto comune a due fra i quattro piani π_i col punto comune ai due rimanenti, secondo superficie di tipo noto, rappresentabili parametricamente ponendo le quattro coordinate omogenee proporzionali a potenze m-esime dei primi membri delle equazioni di quattro rette indipendenti del piano u, v; tali superficie furono ripetutamente studiate, in particolare da A. BRAMBILLA ([14]) e recentemente da A. R. WILLIAMS ([15]).

([13]) Cfr. citazioni su queste nell'articolo di ROHN e BERZOLARI, *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*, « Enc. der math. Wiss. », Band III, C. 9, v. il n. 57.

([14]) *Le curve asintotiche di una classe di superficie algebriche*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », t. XX, 1885; *Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano*, « Rend. R. Ist. Lombardo », t. XXI, 1888; *Di una certa superficie algebrica razionale*, « Rend. Circ. mat. di Palermo », t. II, 1888; *La curva doppia di una particolare superficie razionale del 9° ordine*, « Giornale di matematiche », t. XXXII, 1894. Cfr. anche dello stesso A., *Sopra una classe di superficie e di varietà razionali*, « Atti della R. Acc. di Napoli », (2), vol 9, 1899; e inoltre G. LAZZERI, *Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie algebriche*, « Atti Ist. Veneto », (6), t. VI, 1888.

([15]) *Analogs of the Steiner surface and their double curves*, « Bull. of the Amer. math. Society », t. 39, 1933.

Fra gli altri casi particolari rileviamo esplicitamente che per $m = -1$ la superficie di tipo (A) è la S^6 razionale normale rappresentabile su un piano col sistema delle C^5 che contengono come doppi i vertici di un quadrangolo e come semplici i suoi tre punti diagonali, o anche col sistema delle C^4 passanti, con rette tangenti determinate e concorrenti in un punto doppio per le quartiche stesse, per tre punti fissi non allineati.

8. Se di una superficie si domanda che i suoi piani tangenti siano incidenti a un piano fisso π, la superficie è luogo di ∞^1 linee in altrettanti spazi S_3 passanti per il piano π (linee inviluppate sulla superficie dalle rette tangenti appoggiate a quel piano). Perciò *le superficie di tipo* (A) *e* (B) *di cui all'enunciato del n. 5 sono evidentemente le sole superficie dello spazio a cinque dimensioni i cui piani tangenti risultano incidenti a ciascuno di quattro piani fissi* π_1, π_2, π_3, π_4 *situati nella posizione precisata nell'enunciato stesso.* Le superficie dei due tipi appaiono dunque come estensioni della superficie di VERONESE. Però, come si vedrà (cfr. n. 9) per esse non esiste nessun ulteriore piano incontrato da tutti i piani tangenti.

9. Volendosi per le precedenti superficie il 5° sistema Σ_5 di linee principali, conviene partire dal sistema di equazioni alle derivate parziali del 3° ordine rappresentato dalle superficie stesse. Esso si ottiene senza difficoltà a partire dalla rappresentazione parametrica sotto la forma [16]

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_{uuu} &= \frac{1-2m-(1+m)u^{1/m}}{mu(1+u^{1/m})}\,x_{uu} + \frac{(m-2)u^{\frac{1-2m}{m}}\,v(1+v^{1/m})}{m(1+u^{1/m})(v^{1/m}-u^{1/m})}\,x_{uv}\\
x_{uuv} &= \frac{u^{1/m}-(m-1)v^{1/m}}{mu(v^{1/m}-u^{1/m})}\,x_{uv}\\
x_{uvv} &= \frac{(m-1)u^{1/m}+v^{1/m}}{mv(v^{1/m}-u^{1/m})}\,x_{uv}\\
x_{vvv} &= -\frac{(m-2)uv^{\frac{1-2m}{m}}\,(1+u^{1/m})}{m(1+v^{1/m})(v^{1/m}-u^{1/m})}\,x_{uv} + \\
&\quad + \frac{1-2m-(1+m)v^{\frac{1}{m}}}{mv(1+v^{1/m})}\,x_{vv}
\end{aligned}
\right.
$$

---

[16] Gli indici u, v designano derivazione parziale (e così in seguito).

$$(10)\quad \begin{cases} x_{uuu} = \dfrac{s-2}{u} x_{uu} + \dfrac{s(s-1)}{s-q}\dfrac{v}{u^2} x_{uv} \\ x_{uuv} = \qquad -\dfrac{l}{u} x_{uv} \\ x_{uvv} = \qquad \dfrac{l-1}{v} x_{uv} \\ x_{vvv} = \qquad \dfrac{q(q-1)}{q-s}\dfrac{u}{v^2} x_{uv} + \dfrac{q-2}{v} x_{vv}. \end{cases}$$

Ne seguono, in modo noto ([17]), le equazioni (omogenee di quinto grado in du, dv) delle linee principali. Ora sono già note le linee principali

$$(11)\qquad v = \text{cost.},\quad u = \text{cost.},\quad \frac{v}{u} = \text{cost.},\quad \frac{V}{U} = \text{cost.}$$

le quali ultime secondo le (a), (b) coincidono dunque nei due casi con le

$$(12)\qquad \frac{1+v_1}{1+u_1} = \text{cost.},\quad vu^{-\frac{s}{q}} = \text{cost.}.$$

Perciò restano come linee principali del 5° sistema Σ_5 le

$$(13_A)\qquad \frac{v_1+1}{v_1} : \frac{u_1+1}{u_1} = c$$

$$(13_B)\qquad v^{q-1} : u^{s-1} = c^{q-1},$$

dove c è una costante arbitraria. È solo da osservare — per quanto riguarda il tipo (A) — che l'equazione di 5° grado di cui sopra presenta il fattore costante $(m-1)(m-2)$: prescindendone, come abbiamo fatto, escludiamo (oltre ai valori $m = 0$ e $m = 1$ come si è detto più sopra) anche il nuovo valore $m = 2$ che conduce ovviamente alla superficie di VERONESE (la quale ha, come è notissimo, linee principali indeterminate).

Formando le coordinate dell'iperpiano ξ bitangente in un punto x generico di una delle superficie S considerate secondo la direzione della linea principale del quinto sistema, si ottiene facilmente in base alle (13_A), (13_B)

$$(14_A)\qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 =$$
$$= -(v_1 - u_1)^{1-m} : -u_1(v_1+1)^{1-m} : (u_1+1)v_1^{1-m} : v_1(u_1+1)^{1-m} :$$
$$-(v_1+1)u_1^{1-m} : -(v_1 - u_1)$$

$$(14_B)\qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 =$$
$$= (q-s)u^{l-1}v^{-l} : sv^{-q} : -qv^{-1} : -qu^{-s} : su^{-1} : q-s.$$

([17]) Cfr. p. es. BOMPIANI e BORTOLOTTI, op. cit., n. 12.

Ora al variare del punto x su una linea (13_A) o risp. (13_B) la considerazione p. es. di ξ_1/ξ_6 o risp. di ξ_5/ξ_6 mostra appunto che l'iperpiano ξ non resta fisso.

Perciò *tanto per le superficie di tipo* (A) *quanto per quello di tipo* (B) *lungo le linee principali del quinto sistema non esiste più iperpiano tangente fisso.*

Ma le formole ora scritte conducono, oltre che a questa constatazione negativa, ai seguenti risultati. Anzitutto, studiando quegli iperpiani bitangenti lungo una singola linea principale del quinto sistema, (13_A) o (13_B), per la quale possiamo dunque esprimere v_1 (o v) in funzione di u_1 (o di u) e di c, si constata che lungo tali linee si ha

$$(15_A) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 =$$
$$= -(1-c)^{1-m} x_6 : -c^{1-m} x_5 : x_4 : x_3 : -c^{1-m} x_2 : -(1-c)^{1-m} x_1 ,$$

$$(15_B) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 =$$
$$= (q-s)c^{q-l} x_6 : s x_5 : -q c^{q-1} x_4 : -q c^{q-1} x_3 : s x_2 : (q-s) c^{q-l} x_1 .$$

Concludiamo pertanto che *sia per le superficie* (A) *sia per le* (B) *lungo le singole linee principali del quinto sistema i relativi iperpiani bitangenti corrispondono ai punti di contatto in una polarità ordinaria* (variabile con quelle linee principali). Sussiste anzi una proprietà più espressiva, come si vedrà tra poco (n. 11).

Inoltre — per quanto riguarda le superficie di tipo (B) — confrontando le (14_B) con la rappresentazione parametrica (B) si vede che *per le superficie di tipo* (B) *l'insieme degli* ∞^2 *iperpiani bitangenti secondo le direzioni delle linee principali del* 5° *sistema corrisponde in una polarità ordinaria alla superficie stessa, dove l'iperpiano bitangente nel punto di coordinate curvilinee* (u, v) *è polare del punto di coordinate curvilinee* (u^{-1}, v^{-1}). La quadrica fondamentale di questa polarità ha l'equazione

$$(q-s)(x_1^2 + x_6^2) + s(x_2^2 + x_5^2) - q(x_3^2 + x_4^2) = 0.$$

Dal punto di vista topologico i cinque sistemi di linee principali delle superficie considerate equivalgono:

per le superficie di tipo (A) al 5-tessuto piano formato da quattro fasci di rette coi centri nei vertici di un quadrangolo, e dal fascio di coniche avente in tali vertici i suoi punti base (5-tessuto di rango massimo che si presenta già per le linee principali della superficie di Bol avente come conici tutti cinque i sistemi di linee principali);

per le superficie di tipo (B) a cinque fasci di rette (coi vertici allineati); come è chiaro rappresentandole su un piano dove si adottano $\log u$, $\log v$ come coordinate p. es. cartesiane.

10. In relazione con la proprietà rilevata al n. prec. per il quinto sistema di linee principali delle superficie dei due tipi (A) e (B), vale la pena di osservare che *per una superficie* S *dello* S_5 (che supponiamo non rappresentante nessuna equazione di Laplace) *senza ulteriori particolarità si equivalgono le due ipotesi:* 1) *che la superficie possieda un sistema* ∞^1 *di linee* λ *tali che per ciascuna di esse esista una polarità ordinaria che muti ogni punto della linea nell'iperpiano ivi bitangente alla superficie* S *secondo la direzione della linea stessa;* 2) *che la superficie possieda un sistema* ∞^1 *di linee* λ *tali che per ciascuna di esse esista una quadrica* $V_4^2 \equiv Q(\lambda)$ *contenente le rette* g *tangenti alla tinea* λ, *in modo che inoltre il piano tangente alla superficie in ogni singolo punto della linea* λ *sia pure tangente alla quadrica* $Q(\lambda)$ *in tutti i punti della relativa tangente* g. Inoltre *le* ∞^1 *linee* λ *che godono dell'una o dell'altra proprietà ora considerate sono necessariamente linee principali della superficie* S.

Se invero $x = x(u, v)$ è il punto che descrive la S, e si considerano sulla S come linee λ le linee u, indicando con $f(x, y)$ una forma bilineare simmetrica nelle due serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e $y_1, y_2, \ldots, y_6$, con coefficienti funzioni della sola v, l'ipotesi 1) si traduce nelle

$$(16)\qquad f(x, x) = 0, \quad f(x, x_u) = 0, \quad f(x, x_v) = 0, \quad f(x, x_{uu}) = 0, \quad f(x, x_{vv}) = 0$$

e l'ipotesi 2) nelle

$$(17)\qquad f(x, x) = 0, \quad f(x, x_u) = 0, \quad f(x_u, x_u) - 0, \quad f(x, x_v) = 0, \quad f(x_u, x_v) = 0.$$

Ora i due sistemi (16) e (17) risultano equivalenti. Inoltre derivando rispetto alla variabile u (dalla quale non dipendono i coefficienti della forma f) la terza fra le (17) e poi la quarta fra le (16), segue che il punto x_{uuu} è combinazione lineare dei punti $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}$, il che appunto dice che le linee u sono principali.

Per una superficie che si trovi nelle condizioni qui indicate, generalmente la quadrica $Q(\lambda)$ varia con la linea λ. È possibile una sola eccezione: essa è fornita da una superficie S costituita da ∞^1 linee sghembe situate negli ∞^1 S_3 che proiettano da un piano fisso una conica (non degenere). Se invero la quadrica $Q(\lambda) \equiv Q$ si suppone fissa, cosicchè i coefficienti della forma bilineare f dianzi considerata si possono supporre costanti, derivando la terza (17) rispetto a u e rispetto a v si traggono le $f(x_u, x_{uu}) = 0$, $f(x_u, x_{uv}) = 0$, le quali, insieme con le (16) e con le (17) dicono che rispetto alla supposta quadrica ciascuno dei due punti x e x_u è coniugato rispetto a ciascuno dei cinque punti $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}$; e siccome questi sono linearmente indipendenti (avendo noi escluse le superficie rappresentanti equazioni di LAPLACE), la quadrica Q è necessariamente un cono quadrico, avente per vertice uno spazio S_i $(0 \leq i \leq 2)$ incontrato da ogni retta xx_u. Si vede subito che per non ricadere su superficie rappresentanti un'equazione di LAPLACE bisogna escludere $i=0$, $i=1$; mentre nel caso $i=2$ si ottengono effettivamente le superficie indicate. Quindi *se nell'enunciato precedente la quadrica* $Q(\lambda)$ *si suppone fissa, la superficie* S *è necessariamente costituita da* ∞^1 *linee negli* ∞^1 S_3 *generatori di una quadrica avente un piano doppio.*

Escluso questo caso, la quadrica $Q(\lambda)$ è dunque variabile con λ; e anzi, *prefissato il sistema* ∞^1 *di quadriche* $Q(\lambda)$, *è possibile in infiniti modi di realizzare la superficie* S *nelle condizioni del primo enunciato di questo numero (essendovi ancora l'arbitrarietà della scelta di una funzione arbitraria di due variabili).* Data infatti ad arbitrio la forma f, con coefficienti funzioni arbitrarie della v, si tratta di cercare le sei funzioni $x_i(u, v)$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$, in modo che valgano p. es. le (17). Queste, indicando con f^* la nuova forma avente per coefficienti le derivate rispetto a v dei coefficienti dalla forma f, equivalgono alle quattro equazioni

$$f(x, x) = 0, \qquad f^*(x, x) = 0; \tag{18}$$

$$f(x_u, x_u) = 0, \quad f(x_u, x_v) = 0; \tag{19}$$

delle quali le (18) sono in termini finiti nelle funzioni incognite: ricavando dalle due (19) le due derivate di una stessa funzione incognita, sia p. es. la $x_5(u, v)$, e formando poi la relativa condizione (e) di integrabilità, risulta questa sola (e) come equazione a derivate parziali fra le rimanenti funzioni incognite, che si riducono essenzialmente al numero di due, tenendo conto della omogeneità delle coordinate e delle due equazioni in termini finiti (18). Si potrà dunque scegliere arbitrariamente l'una delle due, mentre l'altra si ha integrando la (e); le rimanenti, esclusa x_5, si deducono in termini finiti, e finalmente la x_5 si ha per quadrature dalle (19).

La superficie S cercata appartiene ovviamente, p. es. in base alle (18), alla varietà a quattro dimensioni inviluppata dal sistema ∞^1 di quadriche prefissato ove questo non sia un fascio, e — ove questo sia un fascio — alla varietà V_3^4 base del fascio stesso.

11. Le nostre superficie dei due tipi (A) e (B) godono però di una proprietà più profonda di quella enunciata al n. 9 e ulteriormente analizzata al n. 10. *Per ogni superficie di tipo* (A) *oppure* (B) *i piani tangenti lungo una linea principale del quinto sistema appartengono a una quadrica generale.* Il primo enunciato del n. 10 chiarisce che questa proprietà comprende quella prima studiata, ma esprime qualche cosa di più.

La nuova proprietà si controlla senz'altro in quanto le quadriche fondamentali delle polarità ordinarie definite rispettivamente dalle (15_A) e dalle (15_B) cioè le quadriche

$$(20_A) \qquad (1-c)^{1-m}x_1x_6 + c^{1-m}x_2x_5 - x_3x_4 = 0$$

$$(20_B) \qquad (q-s)^{q-l}x_1x_6 + sx_2x_5 - qc^{q-1}x_3x_4 = 0$$

lungo la linea (13_A) oppure (13_B), non solo soddisfano al sistema (17) ma contengono ulteriormente il punto x_v.

La proprietà ora rilevata stabilisce un nuovo riavvicinamento fra le superficie (A) e (B) da un lato e la superficie di VERONESE da un altro lato (cfr. n. 8), in quanto la proprietà caratteristica di quest'ultima superficie di avere i suoi piani tangenti a due a due incidenti viene conservata, per quanto riguarda le nuove superficie, per i piani tangenti in punti di una linea principale di uno qualunque dei cinque sistemi.

12. Rifacendoci ora alle considerazioni del n. 10 relativamente a una superficie S (senz'altra ipotesi), non rappresentante equazioni di LAPLACE, dotata di un sistema ∞^1 di linee λ lungo le quali gli iperpiani bitangenti corrispondano ai punti di contatto in polarità ordinarie, è chiaro che ove si domandi che i piani tangenti alla S lungo ciascuna di tali linee appartengano (come al n. 11) alle quadriche stesse, occorre aggiungere al sistema (16) l'ulteriore condizione

$$(21) \qquad f(x_v, x_v) = 0.$$

Il sistema ∞^1 *delle quadriche* $Q(\lambda)$ *deve ora essere contenuto in un sistema lineare almeno* ∞^2, perchè derivando rispetto a v la $f(x, x_v) = 0$ la (21) porge $f^*(x, x_v) + f(x, x_{vv}) = 0$: se le quadriche $Q(\lambda)$ costituissero un fascio, la S starebbe sulla sua V_3^4 base, la retta xx_v sarebbe tangente in x a ogni quadrica del fascio, e seguirebbe $f(x, x_{vv}) = 0$, cosicchè il punto x_{vv} non sarebbe linearmente indipendente dai punti $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}$.

Effettivamente l'esempio che è fornito dalle nostre superficie (A) e (B) corrisponde proprio ad un sistema di quadriche contenute in una rete (avente per base gli otto piani π_i e σ_i).

13. Ritornando ancora a una superficie S quale è stata considerata nel n. 10 vale a dire ancora dotata di un sistema ∞^1 di linee λ lungo le quali gli iperpiani bitangenti corrispondono ai punti di contatto in polarità ordinarie, tra questo caso e quello considerato al n. 12 si interpongono possibilità per così dire intermedie, in quanto l'ordine di approssimazione σ secondo il quale sono incidenti due piani tangenti consecutivi della superficie lungo una di quelle linee λ è, almeno a priori, suscettibile di valori intermedi prima di passare dal valore $\sigma = 4$, che compete a una generica linea principale di una superficie generica (cfr. quanto si disse sotto *d*) al n. 1) — valore che come ora risulterà si conserva ancora generalmente per le superficie che si trovano nel caso del n. 10 — al valore $\sigma = \infty$ che si ha per le superficie del n. 12. Secondo i risultati della mia Memoria citata *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini*, per una ∞^1 di piani dello spazio S_5 tale che due piani consecutivi siano incidenti in un punto sono realizzabili tutti i casi in cui σ è un numero pari ≤ 16, prima di passare al caso $\sigma = \infty$. Orbene, dimostreremo invece che qui le cose stanno ben diversamente.

Premettiamo il seguente

LEMMA. — *Se una linea* L (non piana [18]) *sta su una quadrica generale* Q *dello* S_5 *insieme con le sue rette tangenti, e si costruisce una* ∞^1 *di piani conducendo per ciascuna di quelle rette tangenti un piano situato entro lo* S_3 *polare della medesima retta, si ha generalmente una* ∞^1 *di piani di cui due consecutivi sono incidenti con ordine di approssimazione* $\sigma = 4$ *(anzichè* $\sigma = 2$ *come avviene generalmente per* ∞^1 *piani tangenti a una linea). La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* $\sigma \geq 6$ *è che il piano generatore condotto per una tangente di* L *formi col piano osculatore alla linea* L *nel punto di contatto e coi due piani della quadrica* Q *uscenti da quella tangente un birapporto costante. E allora precisamente è* $\sigma = 6$, *e non* $\sigma > 6$, *a meno che sia addirittura* $\sigma = \infty$, *il che avviene se quegli* ∞^1 *piani appartengono come piani di uno stesso sistema a una quadrica* Q' (*non necessariamente coincidente con la quadrica* Q).

Consideriamo invero, tracciata su una quadrica generale Q dello S_5 avente equazione $f(x, x) = 0$ — dove la f è ancora una forma bilineare simmetrica avente ora però coefficienti costanti —, una linea L descritta dal punto $x = x(t)$ nelle condizioni dell'enunciato $\left(\text{porremo } x^{(i)} = \dfrac{d^i x}{dt^i},\ x^{(0)} = x, \text{ ecc.}\right)$. Il piano generico del sistema sia determinato, oltre che dai punti x, x', da un ulteriore punto $y(t)$, non appartenente al piano $xx'x''$. Le ipotesi del Lemma dànno allora (indicando con i, j numeri intieri positivi o nulli)

$$f(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0 \qquad (i + j \leq 3), \tag{22}$$

$$f(x, y) = 0, \quad f(x', y) = 0 \quad \text{e quindi} \quad f(x, y') = 0. \tag{23}$$

---

[18] Il caso in cui la linea L è piana è ovvio, e non vale la pena di inglobarlo nell'enunciato.

Normalizzando poi, come è lecito, le coordinate del punto x in modo che sia $f(x'', x'') = 1$, si ha inoltre

$$f(x'', x'') = 1, \quad f(x', x''') = -1, \quad f(x, x^{\mathrm{IV}}) = 1\,; \tag{24}$$
$$f(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0 \qquad (i+j=5). \tag{25}$$

I punti x, x', x'', x''', y, y', risultando tutti coniugati del punto x rispetto alla quadrica Q, sono legati linearmente; perciò [19]

$$y' = Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' + Ey$$

dove $A, B, \ldots, E$ sono funzioni di t, il che esprime appunto che $\sigma \geq 4$. Ora la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\sigma \geq 6$, secondo il n. 9 della mia Memoria citata, è data dalla circostanza che i punti

$$x,\ x',\ x'',\ x''',\ 5(DE - D')x^{\mathrm{IV}} - Dx^{\mathrm{V}},\ y$$

siano linearmente dipendenti. Attualmente — in base alle (24) e (25) — anche il punto x^{V} è coniugato di x rispetto alla Q, mentre x^{IV} non lo è: perciò la condizione $\sigma \geq 6$ si traduce nella $DE - D' = 0$. Ma $f(x', y') = -D$, cioè $f(x'', y) = D$, mentre

$$f(x'', y') = C + DE, \quad f(y, y') = CD + Df(x''', y) + Ef(y, y).$$

Ne segue

$$DD' = f(y, y') - Ef(y, y) + D^2E,$$

cosicchè se $f(y, y) - D^2 \neq 0$, si ha $E = \dfrac{DD' - f(y, y')}{D^2 - f(y, y)}$. Allora la condizione in esame $DE - D' = 0$ si scrive [20] $f(y, y') : f(y, y) = D' : D$ da cui

$$f(y, y) = kD^2 \tag{26}$$

dove k è costante [21] (e il risultato vale ovviamente anche se fosse $f(y, y) - D^2 = 0$). La (26), ricordando che $D = f(x'', y)$, ha proprio l'interpretazione geometrica inerente alla costanza del birapporto considerato nell'enunciato del Lemma.

---

(19) I punti x, x', x'', x''' e y si possono ritenere linearmente indipendenti, perchè altrimenti — in base a quanto è osservato nella nota (15) della mia Memoria cit. — la linea L sarebbe piana, ciò che per noi è escluso, oppure non potrebbe risultare $\sigma > 4$.

(20) I denominatori che seguono possono supporsi non nulli, perchè per $\sigma \geq 6$ é certo $D \neq 0$, e d'altro lato $f(y, y) \neq 0$, se il sistema ∞^1 di piani esaminato non è tracciato sulla quadrica Q.

(21) Ovviamente $k \neq o$, se gli ∞^1 piani non stanno sulla quadrica Q.

Supponiamo ora che deva risultare $\sigma \geq 8$. Intanto essendo già $\sigma \geq 6$ (cfr. il n. 10 della mia Memoria cit.), si può supporre che valgano le

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} y' = Ax + x''' \\ x^{\mathrm{v}} = h_0 x + h_1 x' + h_2 x'' + h_5 y, \end{cases}$$

dove h_0, h_1, h_2, h_5 sono funzioni di t. E anzi, partendo unicamente dalle (Σ) e dalle (22), (23), posto $f(x'', x'') = m(t)$, la seconda equazione del sistema (Σ) dà $f(x, x^{\mathrm{v}}) = 0$ e quindi $m =$ cost.: è dunque ancora possibile, senza compromettere la forma del sistema (Σ), adottare le (24), (25). Quella stessa seconda equazione fornisce poi $f(x', x^{\mathrm{v}}) = 0$ da cui

$$(27) \qquad f(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0 \qquad (i + j = 6, 7).$$

D'altro lato attualmente $D = 1$, e la (26) dà $f(y, y) = k$, cioè $f(y, y') = 0$, da cui — in base al sistema (Σ) — $f(x'', y) = 0$. Ma — ancora in base al sistema (Σ) — $f(x''', y') = 0$, cosicchè $f(^{\mathrm{IV}}, y) = 0$. Poi $f(x^{\mathrm{v}}, y) = h_2 + h_5 k$ e $f(x^{\mathrm{IV}}, y') = A$, che paragonate dànno $A = -h_2 - h_5 k$. Finalmente ricorrendo ancora una volta al sistema (Σ) le (27) dànno ulteriormente $0 = f(x'', x^{\mathrm{v}}) = h_2 + h_5$. Abbiamo così in definitiva

$$(28) \qquad h_2 + h_5 = 0, \quad A = -h_2 - h_5 k.$$

Quanto all'ipotesi $\sigma \geq 8$, essa (Mem. cit. n. 12) si traduce nella $A = \frac{2}{7} h_2 + \frac{9}{7} h_5$, e le (28) trasformano questa condizione nelle

$$(29) \qquad h_2 = h_5 = A = 0.$$

Inoltre calcolando, sempre coll'aiuto delle (Σ), $f(x''' \; x^{\mathrm{v}}) = -h_1$ e $f(x^{\mathrm{IV}}, x^{\mathrm{v}}) = h_0$, il paragone fra queste due relazioni porge $h_1' = 2h_0$. E questa (Memoria cit. n. 12) dice che avendo noi richiesto soltanto $\sigma \geq 8$ è già $\sigma \geq 10$, e di più il teorema finale del n. 16 della stessa Memoria assicura che il sussistere dell'ultima relazione trovata $h_1' = 2h_0$, insieme con le (29) è già sufficiente perchè gli ∞^1 piani considerati appartengano a una quadrica $V_4^2 \equiv Q'$ (cosicchè $\sigma = \infty$) [22].

---

[22] Per quanto così il Lemma sia già dimostrato, vale la pena di osservare che nell'ultimo caso studiato, essendo $h_5 = 0$, la linea L sta in un iperpiano θ_4, e che questo iperpiano deve segare le due quadriche Q e Q' secondo una stessa V_3^2, contenente la sviluppabile circoscritta alla linea L. Quindi la quadrica Q' si ottiene dalla Q mediante un'omologia avente θ_4 come iperpiano di punti uniti. Questa omologia ha poi come centro il polo T dell'iperpiano θ_4 rispetto alla quadrica Q, perchè lo S_3 individuato dei due piani λ e μ di questa quadrica uscenti da una retta g tangente alla L (dovendo contenere il piano λ' del sistema ∞^1 considerato uscente dalla stessa g, piano che nella omologia corrisponde a uno

Ritornando ora, dopo la dimostrazione del Lemma, alla questione di cui al principio di questo numero, concludiamo che *se una superficie* S *possiede un sistema* ∞^1 *di linee* λ *(principali) in modo che per ciascuna di esse esista una quadrica* $Q(\lambda)$ — che ci limitiamo a supporre generalmente irriducibile — *tale che ogni punto della linea abbia come iperpiano polare l'iperpiano ivi bitangente secondo la direzione della linea stessa, i piani tangenti alla superficie in due punti consecutivi di una di quelle linee sono incidenti con ordine di approssimazione* $\sigma > 4$ *esclusivamente nei seguenti casi: è* $\sigma \geq 6$ *se lungo ogni linea* λ *si mantiene costante il birapporto formato dal piano tangente alla superficie col piano osculatore alla linea* λ *e coi due piani della quadrica* $Q(\lambda)$ *uscenti dalla retta tangente alla linea* λ ([23]); *e precisamente o è* $\sigma = 6$, *oppure è senz'altro* $\sigma = \infty$ *nel quale caso i piani tangenti alla* S *nei punti di una linea* λ *appartengono a una quadrica.*

14. Ritornando ora, dopo queste digressioni, alle nostre superficie (A) e (B), vogliamo soffermarci su un'altra particolarità che esse presentano. Abbiamo già indicato al n. 9, equazioni (14_A) e (14_B), la rappresentazione parametrica della totalità ∞^2 costituita dagli iperpiani bitangenti secondo la direzione delle linee principali del quinto sistema.

Tale totalità costituisce ovviamente un inviluppo ∞^2 di iperpiani, figura duale di una superficie S come luogo di punti: essa possiederà perciò cinque sistemi di « *sviluppabili principali* » dove le sviluppabili principali si definiscono in modo duale delle linee principali. Orbene, sussiste la proprietà che *per le superficie di tipo* (A) *e* (B) *passando dalla superficie all'inviluppo* ∞^2 *costituito dagli iperpiani bitangenti secondo le linee principali dei quinto sistema* Σ_5, *si corrispondono linee principali e sviluppabili principali non solo nel quinto sistema* (come accade per ogni superficie) *ma per tutti cinque i sistemi.* Per le superficie di tipo (B) la nuova proprietà discende ovviamente dall'osservazione già fatta allo stesso n. 9, secondo la quale la totalità degli iperpiani bitangenti considerati si ottiene mediante una polarità dalla super-

---

di quei due) è unito; lo S_3 tangente alla Q lungo ogni tangente della L passa dunque per il centro dell'omologia, e questo è sufficiente per asserire che questo centro cade nel polo di θ_4. Quindi, chiamando ω il piano osculatore alla L nel punto di contatto della g, i due piani λ e μ dividono armonicamente la coppia ω, $g0$, mentre — stando al caso generale in cui l'omologia non è speciale il birapporto dei quattro piani λ, λ', ω, $g0$ è costante. Di qui segue direttamente che è costante il birapporto (λ', ω, λ, μ) conformemente al Lemma.

([23]) Con le notazioni del n. 10, l'ipotesi $\sigma \geq 6$ si traduce aggiungendo alle equazioni del sistema (16) l'ulteriore condizione che il rapporto fra $f^2(x_{uu}, x_v)$ e $f(x_{uu}, x_{uu}) f(x_v, x_v)$ sia funzione della sola v, come segue subito dall'interpretazione geometrica del Lemma.

ficie stessa, previa una opportuna trasformazione puntuale di questa superficie in sè: e siccome questa trasformazione puntuale conserva, sulla S, le linee principali così segue senz'altro la proprietà asserita. La proprietà continua a sussistere per le superficie di tipo (A), per le quali si verifica p. es. per quanto riguarda le linee u, calcolando il determinante del sesto ordine formato con le sei coordinate ξ espresse dai secondi membri della (14_A) e con le corrispondenti ξ_u, ξ_v, ξ_{uu}, ξ_{uv}, ξ_{uuu} e controllando che il determinante è nullo. Accertato così il risultato per il sistema Σ_2, non occorre ripetere i controlli per i sistemi Σ_1, Σ_3, Σ_4, approfittando delle omografie Ω_{ij} di cui al n. 6.

In generale per una superficie di S_5 descritta dal punto $x = x(u, v)$, passando dai suoi punti agli iperpiani bitangenti secondo le linee principali di un determinato sistema, questo sistema dà luogo a un sistema di *inviluppi principali*, ma soltanto questo sistema: se si suppone p. es. che (a differenza di quanto finora si supponeva) le linee principali in questione siano le linee u, basta osservare che designando p. es. relativamente a uno S_4 ξ e a un punto y con (ξ, y) la $\sum_{i=1}^{6} \xi_i y_i$, dall'ipotesi

$$(\xi, x) = 0, \quad (\xi, x_u) = 0, \quad (\xi, x_v) = 0, \quad (\xi, x_{uu}) = 0, \quad (\xi, x_{uv}) = 0, \quad (\xi, x_{uuu}) = 0$$

seguono le

$$(\xi_u, x) = 0, \quad (\xi_v, x) = 0, \quad (\xi_{uu}, x) = 0, \quad (\xi_{uv}, x) = 0, \quad (\xi_{uuu}, x) = 0.$$

Ma se si considera sulla S un secondo sistema di linee principali che si possono supporre coincidenti con le linee v, la condizione affinchè ad esse corrispondano inviluppi principali nell'inviluppo ∞^2 degli iperpiani ξ, è che gli iperpiani ξ, ξ_u, ξ_v, ξ_{uv}, ξ_{vv}, ξ_{vvv} siano legati linearmente, vale a dire che al variare della sola v la retta $r \equiv \xi\xi_u\xi_v\xi_{vv}$ descriva una sviluppabile. Ora se la S è individuata a meno di omografie dal sistema lineare del terz'ordine (con coefficienti funzioni di u, v):

$$(30) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_{uuu} = ax + a_1x_u + a_2x_v + a_{11}x_{uu} + a_{12}x_{uv} & \\ x_{uuv} = bx + b_1x_u + b_2x_v + b_{11}x_{uu} + b_{12}x_{uv} + b_{22}x_{vv} & \\ x_{uvv} = cx + c_1x_u + c_2x_v + c_{11}x_{uu} + c_{12}x_{uv} + c_{22}x_{vv} & \\ x_{vvv} = ex + e_1x_u + e_2x_v + \qquad\qquad e_{12}x_{uv} + e_{22}x_{vv} & \end{array} \right.$$

il piano caratteristico di ξ entro la totalità ∞^2 descritta da questo S_4, cioè il piano $\xi\xi_u\xi_v$ è, come si riscontra subito, il piano individuato dai tre punti x, x_u, $x_{uu} - b_{22}x_v$; questo piano è poi segato dall'iperpiano ξ_{vv} secondo la retta che congiunge i due punti

(31) $$x_u - c_{22}x, \quad x_{uu} - b_{22}x_v - \varphi x,$$

dove si è posto

(32) $$\varphi = b_2 - b_{22v} + b_{11}b_{22} + b_{12}c_{22}.$$

La retta r è dunque la congiungente i due punti (31); scrivendo che al variare di v essa descrive una sviluppabile, si ha la condizione

(33) $$b - \varphi_v + b_{11}\varphi + b_1 c_{22} + b_{12}c_{22v} = 0.$$

La (33) *è dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè passando da una superficie* S *definita dal sistema* (30), *sulla quale le linee* u *e le linee* v *sono principali, all'inviluppo degli* ∞^2 *piani bitangenti secondo le linee* u, *anche alle linee principali* v *corrispondano inviluppi principali.* Ora generalmente la (33) non è conseguenza delle condizioni di integrabilità del sistema (30), come basta controllare su un esempio ([24]).

Appare dunque notevole la particolarità enunciata per le superficie (A) e (B), perchè allora — trasformando mediante Σ_5 — a tutti i sistemi di linee principali corrispondono sistemi di inviluppi principali.

E terminiamo rilevando, ancora più in particolare, un esempio di *superficie tale che,* ***qualunque sia*** *il sistema di linee principali che si adotta per passare dalla superficie a un inviluppo* ∞^2 *di piani bitangenti,* ***sempre tutti cinque*** *i sistemi di linee principali si trasformano in sistemi di inviluppi principati.* Esso è offerto dalla già citata superficie S^5 di DEL PEZZO. Se invero si parte dalla $S(-1)$ considerata come ultimo esempio nel n. 7, e si passa da essa all'inviluppo ∞^2 degli iperpiani bitangenti secondo le linee principali del quinto sistema, si ottiene per questo la rappresentazione parametrica (14_A) del n. 9, ove si adotti $m = -1$, la quale mostra trattarsi appunto di un inviluppo duale della S^5 di DEL PEZZO; cosicchè, viceversa, partendo da questa superficie e passando all'inviluppo degli iperpiani bitangenti secondo *un certo* sistema fra i cinque di coniche principali ha luogo la proprietà in esame. E siccome sulla S^5 di DEL PEZZO i cinque sistemi di coniche principali sono proiettivamente identici, la proprietà si estende agli inviluppi di iperpiani bitangenti secondo linee principali di un sistema *qualunque.*

([24]) P. es. si verifica subito che per la superficie

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \alpha(u) + u\beta(v) : v\alpha(u) : uv : u : v : 1$$

(che ammette come principali le linee u e le linee v) se $\alpha(u)$ e $\beta(v)$ sono funzioni generiche dei loro argomenti, la (33) non è soddisfatta.

Ueber Geradengewebe.

« Topologische Fragen der Differentialgeometrie » (65).

Von G. Bol (in Hamburg).

In einer vorigen Arbeit dieser Reihe [1] behandelte ich die Invariantentheorie dreier Geradenscharen in der Ebene von Standpunkt der topologischen Differentialgeometrie. Es zeigte sich, dass ein solches Gewebe, falls es nicht Sechseckgewebe ist, im wesentlichen schon durch seine topologischen Invarianten auch projektiv gekennzeichnet wird:

Wenn ein Nicht-Sechseckgewebe sich überhaupt durch topologische Abbildung geradlinig machen lässt, so gibt es unter den Geradengeweben die ihm topologisch gleichwertig sind, höchstens 17 *projektiv verschiedene.*

Man kann sich nun fragen, ob statt dieser Vieldeutigkeit vielleicht überhaupt Eindeutigkeit besteht, sodass die fragliche Abbildung, und damit das geradlinige Abbild, projektiv eindeutig bestimmt wären [2]. Eine Entscheidung darüber war damals der zu komplizierten Rechnungen wegen nicht möglich. Inzwischen ist es mir gelungen, die Rechenmethode erheblich zu vereinfachen, sodass man jetzt zwar noch nicht das allgemeine Problem, aber doch viele Beispiele zu Ende durchrechnen kann. Merkwürdigerweise war in jedem dieser Sonderfälle die fragliche Eindeutigkeit wirklich vorhanden.

In dieser Note möchte ich das angedeutete Rechenverfahren sowie die Beispiele bekanntgeben, vor allem in der Hoffnung, dass es einem besseren Rechner gelingen könnte, hieran anschliessend die vermutete Eindeutigkeit durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

§ 1. **Invariantentheorie der Gewebe.** — Um nicht auf die vorige Arbeit zurückreifen zu müssen, seien zunächst die Hauptformeln kurz zusammen-

---

(1) *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* 31, *Geradlinige Kurvengewebe*, « Hamb. Abhandlungen », Bd. 8, 1930, S. 264-270, im folgenden zitiert, T. 31.

(2) Die Frage ist gleichbedeutend mit jener der eindeutigen Darstellbarkeit einer vorgegebenen Funktion durch ein geradliniges Nomogramm. Vgl. dazu W. Blaschke, *Ueber topologische Fragen der Differentialgeometrie*, « Jahresber. d. D. M. V. », 38 (1929), S. 193. Als erster hat derartige Fragen Gronwall behandelt, « Journal de Liouville , 1912. *Sur les équations à trois variables.*

gestellt. Jede der drei Kurvenscharen eines Gewebes in der (u, v)-Ebene kann man darstellen als Bahnkurven eines linearen Differentialoperators

$$\Gamma_i = A(u, v)\partial_u + B(u, v)\partial_v \qquad i = 1, 2. 3 \tag{1}$$

wobei man von vornherein so normieren kann, dass

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0. \tag{2}$$

Durch die Γ_i sind eindeutig zwei neue Operatoren Δ_1, Δ_2 bestimmt, für die

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Delta_1 + \Delta_2, \\ \Gamma_2 &= \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2, \qquad \text{mit} \quad \varepsilon^3 = 1, \ \varepsilon \neq 1 \\ \Gamma_3 &= \varepsilon^2\Delta_1 + \varepsilon\Delta_2 \qquad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Durch das Gewebe sind die Γ_i wie die Δ_i nur bis auf einen gemeinsamen Normungsfaktor σ festgelegt, es bleiben Umnormungen möglich von der Art

(4) « Sterntransformation » $\Gamma_i^* = \sigma\Gamma_i, \quad \Delta_i^* = \sigma\Delta_i.$

Solche topologische Invarianten von Δ_1 and Δ_2 die auch bei (4) Invariant sind, sind Gewebeinvarianten.

Einfachste Invarianten von Δ_1 und Δ_2 sind die « Klammerkoeffizienten », drückt man den Klammerausdruck beider Operatoren aus des Linearkombination von beiden:

$$[\Delta_1\Delta_2] = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_2\Delta_1 = h_2\Delta_1 - h_1\Delta_2 \tag{5}$$

so sind h_1 und h_2 topologisch Invariant mit Δ_1 und Δ_2 verknüpft. Bei der Sterntransformation (4) ändern sie sich so:

$$h_1^* = \sigma h_1 - \Delta_1\sigma, \quad h_2^* = \sigma h_2 - \Delta_2\sigma. \tag{6}$$

Setzt man

$$\rho = \Delta_2 h_1 - \Delta_1 h_2 \tag{7}$$

so gilt

$$\rho^* = \sigma^2\rho; \tag{8}$$

ρ ist eine Halbinvariante des Gewebes, wenn sie überall verschwindet, so ist das Gewebe ein Sechseckgewebe.

Wenn ρ nicht verschwindet, so kann man die Normung (4) so festlegen, dass $\rho^* = 1$ wird. Die so genormten Operatoren sind dann vom Gewebe (bis auf das Vorzeichen) eindeutig bestimmt, und ihre Invarianten sind auch Gewebeinvarianten. Das volle Invariantensystem des Gewebes besteht aus den Klammerkoeffizienten h_1^*, h_2^* der genormtem Operatoren und allen ihren Ableitungen nach diesen, $\Delta_1^* h_1^*$ u. s. w. (1).

(1) Vgl. G. Bol und G. Howe, T. 27, *Invarianten von Differenziatorgespinsten*, « Hamb. Abhandlungen », Bd. 8, (1930), S. 194.

Es ist nun aber, und aus dieser Einsicht geht die erwähnte Vereinfachung der Rechnungen hervor, nicht zweckmassig, jene Normung von vornherein vorzunehmen. Viel besser ist es, den benutzten Differentiationsprozess so abzuwandeln, dass die Ableitung einer Halbinvariante stets wieder eine Halbinvariante wird. Sei etwa m eine Halbinvariante vom Gewicht s:

$$m^* = \sigma^s m, \tag{9}$$

dann wollen wir die « Halbinvariante Ableitung » von m nach unseren Operatoren, die gleich durch angehängte Indizes angedeutet werden sollen, so definieren:

$$\begin{aligned} m_1 &= \Delta_1 m + s h_1 m \\ m_2 &= \Delta_2 m + s h_2 m. \end{aligned} \tag{10}$$

Dann gilt in der Tat, wie man sofort nachrechnet:

$$\begin{aligned} (m_1)^* &= \Delta_1^* m^* + s h_1^* m^* = \sigma^{s+1} \{ \Delta_1 m + s h_1 m \} = \sigma^{s+1} m_1 \\ (m_2)^* &= \Delta_2^* m^* + s h_2^* m^* = \sigma^{s+1} \{ \Delta_2 m + s h_2 m \} = \sigma^{s+1} m_2 \end{aligned} \tag{11}$$

sodass m_1 und m_2 Halbinvarianten vom Gewicht $s+1$ sind. Es ist natürlich nur die Ableitung einer *Halbinvarianten* definiert und vom Gewicht abhängig, trotzdem gilt, wenn m und n Halbinvarianten vom gleichen Gewicht s sind:

$$(m+n)_i = m_i + n_i \tag{12}$$

und für zwei beliebige Halbinvarianten p und q hat man:

$$(pq)_i = pq_i + p_i q. \tag{13}$$

Beides folgt sofort aus der Definition des Differentiationsprozesses.

Schliesslich: Wenn $m = 0$, so auch $m_i = 0$; das braucht man, wenn Gleichungen differenziert werden sollen. Das Gewicht einer Halbinvariante darf auch gebrochen sein.

Normt man so, dass $\rho^* = 1$ wird, so ist nach (8) und (6):

$$h_i^* = \rho^{-\frac{3}{2}}(\Delta_i \rho + 2h_i \rho). \tag{14}$$

Die genormten Klammerkoeffizienten sind also bis auf den Faktor $\rho^{-\frac{3}{2}}$ mit den Halbinvarianten Ableitungen von ρ identisch, denn ρ hat nach (8) das Gewicht 2. Daher:

Die Halbinvariante ρ und ihre sämtlichen halbinvarianten Ableitungen bilden eine vollständiges System von Halbinvarianten für das Gewebe.

Denn jeder Ableitung der normierten h_i nach normierten Operatoren entspricht eine halbinvariante Ableitung von ρ, es kommen dabei nur Zusatzglieder niederer Differentiationsordnung vor.

Aus der Definition (10) folgt für eine beliebige Halbinvariante m:

(15) $$(m_1)_2 - (m_2)_1 = s\rho m.$$

(15) kommt beim halbinvarianten Rechnen an die Stelle der übliche Integrierbarkeitsbedingungen. Insbesondere gibt (15):

(16) $$\rho_{12} - \rho_{21} = 2\rho^2.$$

§ 2. **Geradengewebe.** — Seien

(17) $$\begin{matrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{matrix}$$

die projektiven Koordinaten des Gewebepunktes (u, v) im Geradengewebe, wir fassen sie zu dem Vektor

(18) $$X(u, v)$$

zusammen. Wir können X stets so normieren, dass die Determinante

(19) $$D = |X, \Delta_1 X, \Delta_2 X| = 1$$

wird, denn in einem Gewebe sind ja die drei Punkte X, $\Delta_1 X$, $\Delta_2 X$ linear unabhängig. Soll die Gleichung (19) erhalten bleiben bei der Sterntransformation (4) so muss man setzen

(20) $$X^* = \sigma^{-\frac{2}{3}} X$$

denn nur dann ist

(21) $$D^* = |X^*, \Delta_1{}^* X^*, \Delta_2{}^* X^*| = D.$$

Es ist also. zweckmässig, X als Halbinvariante vom Gewicht $-\frac{2}{3}$ aufzufassen. Macht man das, so kann man X Halbinvariant differenzieren, und (19) schreibt sich dann

(22) $$D = |X, X_1, X_2|,$$

weil ja die Zusatzglieder X enthalten, und also keinen Beitrag zur Determinante liefern.

Setzt man

(23) $$X_{ik} = a_{ik} X + b_{ik1} X_1 + b_{ik2} X_2$$

so folgt aus der Integrierbarkeitsbedingung

(24) $$X_{12} - X_{21} = -\frac{2}{3} \rho X$$

dass

$$b_{12k} = b_{21k}, \quad a_{12} - a_{21} = -\frac{2}{3}\rho$$

weiter erhält man durch Differenzieren der Halbinvariante nullter Ordnung D die beiden Bedingungen

$$b_{111} + b_{212} = 0, \quad b_{121} + b_{222} = 0.$$

Aus der Geradlinigkeit der ersten Schar folgt weil $X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$ eine Linearkombination von X und $X_1 + X_2$ sein soll, dass

$$b_{111} + 2b_{121} + b_{221} = b_{112} + 2b_{122} + b_{222}$$

und entsprechend für die zweite und dritte Schar.

Aus diesen sieben Bedingungen für b_{ikl} ergibt sich, dass nur b_{112} und b_{221} von Null verschieden sein können, und einander gleich sind. Wir setzen

$$b_{112} = b_{221} = \frac{1}{3}C.$$

Die weiteren Integrierbarkeitsbedingungen:

$$(25) \qquad \begin{aligned} X_{112} - X_{121} &= \frac{1}{3}\rho X_1, \\ X_{212} - X_{221} &= \frac{1}{3}\rho X_2 \end{aligned}$$

liefern dann die Werte der a_{ik}. Die Gleichungen (23) erhalten so die Gestalt

$$(26) \qquad \begin{aligned} X_{11} &= -\frac{1}{3}C_2 X + \frac{1}{3}CX_2, \\ X_{22} &= -\frac{1}{3}C_1 X + \frac{1}{3}CX_1, \\ X_{12} &= \left(\frac{1}{9}C^2 - \frac{1}{3}\rho\right)X, \\ X_{21} &= \left(\frac{1}{9}C^2 + \frac{1}{3}\rho\right)X \end{aligned}$$

und C muss den Gleichungen genügen:

$$(27) \qquad \begin{aligned} C_{11} &= -CC_2 - \rho_2, \\ C_{22} &= -CC_1 + \rho_1. \end{aligned}$$

C ist offenbar eine Halbinvariante vom Gewicht 1; aus der dritten Gleichung (26) sieht man, dass C^2 dasselbe Gewicht wie ρ hat.

Wie man sieht, erhalten wir erheblich einfachere Gleichungen wie die entsprechenden (12), (14), (15) in T. 31, die Invariante C ist aber mit der dortigen identisch.

C und ρ mit ihren Ableitungen bilden ein vollständiges projektives Invariantensystem des Geradengewebes. Notwendig und hinreichend für die Abbildbarkeit eines vorgegebenen Gewebes auf ein geradliniges ist die Lösbarkeit der Gleichungen (27), zu verschiedenen Lösungsfunktionen gehören projektiv verschiedene geradlinige Bilder. Die vermutete Eindeutigkeit wäre bewiesen, wenn man zeigen könnte, dass das Gleichungssystem (27) für $\rho \neq 0$ höchstens eine Lösung haben kann.

§ 3. **Besondere Gewebe.** — Die geometrische Bedeutung der Invariante C ist leicht anzugeben. Suchen wir nämlich einmal den Schnittpunkt einer Schargeraden mit einer benachbarten, fragen wir also, wann der Punkt

$$P = \alpha X + (X_1 + X_2) \tag{28}$$

beim Uebergang zur Nachbargeraden festbleibt. Man hat

$$P_1 = \alpha_1 X + \alpha X_1 + X_{11} + X_{21} = \varkappa P \tag{29}$$

setzt man hier nach (26) ein, so erhält man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha = \varkappa = \frac{1}{3} C \\ \alpha_1 - \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{9} C^2 + \frac{1}{3} \rho = \varkappa\alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Es muss also $\alpha = \frac{1}{3} C$ gewählt werden. Darin ist die gesuchte geomemetrische Bedeutung von C enthalten, ist $C = 0$, so liegen die drei Berührungspunkte der Schargeraden mit ihren Hüllkurven, die dann mit $X_1 + X_2$, $\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2$, $\varepsilon^2 X_1 + \varepsilon X_2$, zusammenfallen, auf einer Geraden. Verschwindet C überall, so ist nach (27) $\rho_1 = \rho_2 = 0$, nach (16) verschwindet auch ρ, und nach (26) sind dann die Punkte X_1 und X_2, also auch die eben genannten Berührungspunkte fest. Das Gewebe besteht dann offenbar aus drei Geradenbüscheln, deren Scheiteln auf einer Geraden liegen.

Aus (30) leitet man leicht die Bedingung dafür her, dass die erste Geradenschar ein Geradenbüschel wird. Das ist nämlich dann und nur dann der Fall, wenn unser Punkt P nicht mehr von der gewählten Geraden 1 abhängt, samtliche Gleichungen (30) müssen also befriedigt sein, wenn wir für α den Wert $\frac{1}{3} C$ einsetzen. Aus der dritten Gleichung erhalten wir so die Bedingung:

Dann und nur dann ist die erste Schar ein Geradenbüschel, wenn die Invariante C *der Bedingung genügt:*

(31) $$C_2 - C_1 = \rho.$$

Ebenso ist die zweite Schar ein Büschel, wenn

(32) $$\varepsilon^2 C_2 - \varepsilon C_1 = \rho$$

und die dritte wenn

(33) $$\varepsilon C_2 - \varepsilon^2 C_1 = \rho.$$

Ein weiterer wichtiger Fall ist der, dass zwei der Scharen, etwa die Scharen 2 und 3, einen Kegelschnitt berühren, und die dritte beliebig ist.

Um die entsprechenden Bedingungen aufzustellen, führen wir ein bewegliches Koordinatensystem ein, dessen Basispunkte die Punkte X und

(34) $$P_2 = \frac{1}{3} CX + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2, \qquad P_3 = \frac{1}{3} CX + \varepsilon^2 X_1 + \varepsilon X_2$$

sind, diese letzteren Punkte sind offenbar die Berührungspunkte der Geraden 2 und 3 mit ihren Hüllkurven. Beim Uebergang zu benachbarten Gewebepunkten ist dann:

(35) $$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{3} CX + \tau(\varepsilon P_2 - \varepsilon^2 P_3), & X_2 &= -\frac{1}{3} CX + \tau(\varepsilon P_3 - \varepsilon^2 P_2). \\ \varepsilon P_{21} &= \frac{1}{3} CP_2 + \frac{1}{3} XM_2, & \varepsilon^2 P_{22} &= \frac{1}{3} CP_2 - \frac{1}{3} XM_2, \\ \varepsilon^2 P_{31} &= \frac{1}{3} CP_3 + \frac{1}{3} XM_3, & \varepsilon P_{32} &= \frac{1}{3} CP_3 - \frac{1}{3} XM_3. \end{aligned}$$

Dabei ist gesetzt:

(36) $$\begin{aligned} M_2 &= \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_2 + \rho, \\ M_3 &= \varepsilon^2 C_1 - \varepsilon C_2 + \rho, \end{aligned} \qquad \tau = \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon} = -\frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Dementsprechend gilt für die Aenderung der Koordinaten ξ_0, ξ_2, ξ_3 einer *festen* Geraden beim Uebergang zum Koordinatensystem, das zu einem Nachbarpunkt gehört

(37) $$\begin{aligned} d\xi_0 &= \omega_1\left[-\frac{1}{3} C\xi_0 + \tau(\varepsilon\xi_2 - \varepsilon^2\xi_3)\right] + \omega_2\left[-\frac{1}{3} C\xi_1 + \tau(\varepsilon\xi_3 - \varepsilon^2\xi_2)\right], \\ d\xi_2 &= \frac{1}{3}\varepsilon^2\omega_1[C\xi_2 + M_2\xi_0] + \frac{1}{3}\varepsilon\omega_2[C\xi_2 - M_2\xi_0], \\ d\xi_3 &= \frac{1}{3}\varepsilon\omega_1[C\xi_3 + M_3\xi_0] + \frac{1}{3}\varepsilon^2\omega_2[C\xi_3 - M_3\xi_0], \end{aligned}$$

wo ω_1 und ω_2 die « Verrückungen » in der Richung der Operatoren Δ_1 und Δ_2 darstellen.

Ein Kegelschnitt, der die Geraden 2 und 3 durch den Gewebepunkt, und die Nachbargeraden dieser Scharen berührt, lässt sich darstellen in der Form

$$F = \xi_2\xi_3 + A\xi_0^2. \tag{38}$$

Soll dieser Kegelschnitt fest sein beim Uebergang zum Nachbarpunkt, so darf die Gleichungsform (38) sich nicht ändern, wenn die Koordinaten nach (37) variiert werden, also:

$$dF = \xi_2 d\xi_3 + \xi_3 d\xi_2 + 2A\xi_0 d\xi_0 + dA\xi_0^2 = F d\nu. \tag{39}$$

Hier sollen alle Koeffizienten links und rechts gleich sein bei beliebiger Wahl von ω_1 und ω_2. Das gibt die acht Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \nu_1 = -\frac{1}{3}C, & \nu_2 = -\frac{1}{3}C, & \\ A\nu_1 = +\frac{2}{3}AC + A_1, & A\nu_2 = +\frac{2}{3}AC + A_2 & d\nu = \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2, \\ 0 = \frac{1}{3}\varepsilon M_3 + 2A\tau\varepsilon, & 0 = -\frac{1}{3}\varepsilon^2 M_3 + 2A\varepsilon^2\tau, & dA = A_1\omega_1 + A_2\omega_2, \\ 0 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 M_2 - 2A\tau\varepsilon^2, & 0 = -\frac{1}{3}\varepsilon M_2 + 2A\varepsilon\tau. & \end{array} \tag{40}$$

Daraus kann man ablesen:

Dann und nur dann berühren die Geraden 2 und 3 einen festen Kegelschnitt, wenn

$$M_2 + M_3 = 0 \tag{41}$$

und die Grösse

$$A = -\frac{1}{6}(\varepsilon^2 - \varepsilon)M_3 = +\frac{1}{6}(\varepsilon^2 - \varepsilon)M_2 \tag{42}$$

den Bedingungen genügt:

$$A_1 = -AC, \quad A_2 = -AC. \tag{43}$$

(41) kann man auch so schreiben:

$$C_1 - C_2 = 2\rho \tag{44}$$

und für A hat man:

$$A = -\frac{1}{12}(\varepsilon^2 - \varepsilon)(M_3 - M_2) = -\frac{1}{12}(\varepsilon^2 - \varepsilon)^2(C_1 + C_2) = -\frac{1}{4}(C_1 + C_2). \tag{45}$$

Also: *Dann und nur dann berühren die Scharen* 2 *und* 3 *einen Kegelschnitt, wenn* (44) *gilt und*

$$C_{11} + C_{21} = -(C_1 + C_2)C, \quad C_{12} + C_{22} = -(C_1 + C_2)C. \tag{46}$$

Ebenso berühren die Scharen 1 *und* 3 *einen Kegelschnitt, wenn*

$$\begin{gathered} \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_2 = 2\rho \\ \varepsilon(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2)_1 = -C(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2) = \varepsilon^2(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2)_2 \end{gathered} \tag{47}$$

und die Scharen 1 *und* 2 *wenn*

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 C_1 - \varepsilon C_2 = 2\rho \\ \varepsilon^2(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2)_1 = -C(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2) = \varepsilon(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2)_2 . \end{gathered} \tag{48}$$

§ 4. **Abbildungsfragen.** — Bei unseren Beispielen ist stets eine der Geradenscharen ausgezeichnet. Dann hat es aber keinen Sinn mehr, die Formeln so völlig symmetrisch zu halten, wie bisher, und wir wollen sie deshalb noch etwas anders schreiben. Wir setzen:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2), & m_1 &= \frac{1}{2}\rho(m_{\mathrm{I}} - m_{\mathrm{II}}), \\ m_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{\rho}(-m_1 + m_2), & m_2 &= \frac{1}{2}\rho(m_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}}), \end{aligned} \tag{49}$$

wo m wieder eine Halbinvariante vom Gewicht s bedeuten soll. Offenbar sind m_{I} und m_{II} Halbinvarianten vom Gewicht $s-1$. An Stelle der Integrierbarkeitsbedingung (15) kommt

$$(\rho m_{\mathrm{I}})_{\mathrm{II}} - (\rho m_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\rho}(2m_{12} - 2m_{21}) = 2sm \tag{50}$$

oder auch

$$\rho(m_{\mathrm{I\,II}} - m_{\mathrm{II\,I}}) = 2sm + \rho_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}} - \rho_{\mathrm{II}} m_{\mathrm{I}} . \tag{51}$$

Die Gleichungen (27) lauten umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \rho(C_{\mathrm{I\,I}} + C_{\mathrm{II\,II}}) &= -(2C + \rho_{\mathrm{I}})C_{\mathrm{I}} - \rho_{\mathrm{II}} C_{\mathrm{II}} - 2\rho_{\mathrm{II}} , \\ \rho C_{\mathrm{I\,II}} &= C - \rho_{\mathrm{II}} C_{\mathrm{I}} + C C_{\mathrm{II}} + \rho_{\mathrm{I}} , \\ \rho C_{\mathrm{II\,I}} &= -C - \rho_{\mathrm{I}} C_{\mathrm{II}} + C C_{\mathrm{II}} + \rho_{\mathrm{I}} . \end{aligned} \tag{52}$$

Die erste Schar ist ein Büschel, wenn

$$C_{\mathrm{II}} = 1, \tag*{(53)$_1$}$$

die zweite wenn

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon)C_{\mathrm{I}} = 2 + C_{\mathrm{II}} , \tag*{(53)$_2$}$$

die dritte wenn

$$(\varepsilon - \varepsilon^2)C_{\mathrm{I}} = 2 + C_{\mathrm{II}} . \tag*{(53)$_3$}$$

Die Scharen 2 und 3 berühren einen Kegelschnitt, wenn

$$(54)\qquad C_{\mathrm{II}} = -2, \quad (\rho C_{\mathrm{I}})_{\mathrm{II}} = 0, \quad (\rho C_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}} = -2C_{\mathrm{I}}C.$$

Setzt man das in (37) ein, so ergibt sich dass

$$(55)\qquad C = \rho_{\mathrm{I}}$$

sein muss, und daher als notwendige und hinreichende Bedingungen:

$$(56)\qquad \rho_{\mathrm{I\,II}} = -2, \quad (\rho\rho_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{II}} = 0, \quad (\rho\rho_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{I}} = -2\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I\,I}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass hieraus beim Aufstellen der Integrierbarkeitsbedingungen keine neuen Gleichungen für ρ hervorgehen.

Dann und nur dann lässt sich ein Gewebe so geradlinig machen, dass die Scharen 2 *und* 3 *einen Kegelschnitt berühren, wenn* (56) *erfüllt ist.*

Ein Sonderfall tritt ein, wenn der Kegelschnitt in zwei Geradenbüschel zerfällt. Dann ist $A = 0$, und wir haben als zusätzliche Bedingung nach (45), (55):

$$(57)\qquad \rho_{\mathrm{I\,I}} = 0.$$

In der Tat ist das ein Sonderfall von (56). Im Uebrigen kann man diese Bedingungen auch leicht aus (53) herleiten.

Aus (55) geht hervor:

Wenn ein Gewebe mit $\rho \neq 0$ sich so geradlinig machen lässt, dass die Geraden der zweiten und dritten Schar einen Kegelschnitt berühren, so ist die Abbildung, die dies leistet, bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmt.

Im Sonderfall zweier Geradenbüscheln hat das schon Dubourdieu gezeigt [1]. Es wäre nun denkbar, dass ein Gewebe dieser Art sich vielleicht auch in der Weise geradlinig machen liesse, dass die Scharen 1 und 3 einen Kegelschnitt einhüllen. Wäre das möglich, so wäre die Abbildung die das macht sicher nicht projektiv, es sei denn, dass das Gewebe aus drei Geradenbüscheln besteht, und also ein Sechseckgewebe ist. Man sieht nun aber leicht, dass auch dies unmöglich ist. Denn es müsste dann ausser (56) noch ein entsprechendes System von Gleichungen erfüllt sein, das sich auf die Scharen 1 und 3 bezieht. Man prüft leicht nach, dass die erste dieser Gleichungen die Form hat

$$(58)\qquad -\frac{1}{4}(\varepsilon^2 - \varepsilon)\rho_{\mathrm{I\,I}} - \frac{1}{4}(\varepsilon^2 - \varepsilon)\rho_{\mathrm{II\,II}} + \frac{1}{4}\rho_{\mathrm{I\,II}} - \frac{3}{4}\rho_{\mathrm{II\,I}} = -2.$$

[1] J. Dubourdieu, *Questions topologiques de géometrie différentielle*, « Mémoires des Sciences Mathématiques », 78, Paris 1936.

Daraus ergibt sich wegen (56) und der (16) entsprechenden Gleichung

$$\rho_{\mathrm{I\,II}} - \rho_{\mathrm{II\,I}} = 4, \tag{59}$$

dass

$$\rho_{\mathrm{I\,I}} + \rho_{\mathrm{II\,II}} = -8i\sqrt{3} \tag{60}$$

und daher, wegen (56),

$$(\rho\rho_{\mathrm{II\,II}})_{\mathrm{II}} = 0, \quad (\rho\rho_{\mathrm{II\,II}})_{\mathrm{I}} = 2\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I\,I}},$$

$$[\rho(\rho\rho_{\mathrm{II\,II}})_{\mathrm{I}}]_{\mathrm{II}} - [\rho(\rho_{\mathrm{II\,II}})_{\mathrm{II}}]_{\mathrm{I}} = -4\rho\rho_{\mathrm{I\,I}} + 2(\rho\rho_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{II}} = -4\rho\rho_{\mathrm{I\,I}}.$$

Nach (50) aber hat dieser Ausdruck den Wert

$$4\rho\rho_{\mathrm{II\,II}}$$

and es wäre also

$$\rho_{\mathrm{I\,I}} + \rho_{\mathrm{II\,II}} = 0,$$

im Widerspruch zu (60). Man kann also den Satz aussprechen:

Eine Abbildung, die ein Nicht-Sechseckgewebe aus zwei Tangentenscharen eines Kegelschnitts und einer weiteren Geradenschar auf ein gleichartiges Gewebe abbildet, ist notwendig projektiv.

An zweiter Stelle wollen wir Gewebe betrachten, bei denen die erste Schar ein Geradenbüschel ist. Setzen wir die Bedingung $C_{\mathrm{II}} = 1$ aus $(53)_1$ in (52) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho C_{\mathrm{I\,I}} &= -(2C + \rho_{\mathrm{I}})C_{\mathrm{I}} - 3\rho_{\mathrm{II\,II}}, \\ \rho C_{\mathrm{I\,II}} &= 2C - \rho_{\mathrm{II}}C_{\mathrm{I}} + \rho_{\mathrm{I}}, \end{aligned} \tag{61}$$

während die dritte Gleichung identisch erfüllt ist. Der bequemen Rechnung halber setzen wir

$$D = 2C + \rho_{\mathrm{I}}. \tag{62}$$

Dann gilt nach $(53)_1$

$$D_{\mathrm{II}} = 2 + \rho_{\mathrm{I\,II}} \tag{63}$$

und (61) geht über in:

$$\begin{aligned} \rho D_{\mathrm{I\,I}} &= -DD_{\mathrm{I}} + D\rho_{\mathrm{I\,I}} - 6\rho_{\mathrm{II}} + \rho\rho_{\mathrm{I\,I\,I}} \\ \rho D_{\mathrm{I\,II}} &= -\rho_{\mathrm{II}}D_{\mathrm{I}} + 2D + (\rho\rho_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{64}$$

Nach (50) muss nun gelten

$$(\rho D_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{II}} - (\rho D_{\mathrm{I\,II}})_{\mathrm{I}},$$

dann D_{I} ist wie C_{I} eine Halbinvariante vom Gewicht Null. Wertet man das aus, so kommt

$$8\rho D_{\mathrm{I}} = -2D^2 + 6\rho\rho_{\mathrm{I\,I}} - 3(\rho^2)_{\mathrm{II\,II}} \tag{65}$$

wobei (59) benutzt wurde.

Rechnet man aus (65) den Wert von $D_{\text{I II}}$ aus, und vergleicht mit (64), so ergibt sich

(66) $$0 = D(24 + 4\rho_{\text{I II}}) + 3(\rho^2)_{\text{II II II}} + 2(\rho\rho_{\text{I I}})_{\text{II}}.$$

Aus dieser Gleichung kann man D, und damit auch C eindeutig auflösen, es sei denn dass

(67) $$\begin{gathered} 24 + 4\rho_{\text{I II}} = 0, \\ 3(\rho^2)_{\text{II II II}} + 2(\rho\rho_{\text{I I}})_{\text{II}} = 0. \end{gathered}$$

Zeigen wir, dass in keinem Gewebe die beiden Gleichungen (67) gleichzeitig erfüllt sein können, so haben wir bewiesen:

Eine Abbildung, die ein Nichtsechseckgewebe, das besteht aus einem Geradenbüschel und zwei Geradenscharen abbildet auf ein ebensolches, wobei sich die beiden Geradenbüschel entsprechen sollen, ist stets projektiv.

Nun folgt aus (67) dass

(68) $$\rho_{\text{I II}} = -6$$

also nach (59):

(69) $$\rho_{\text{II I}} = -10.$$

Weiter ist

(70) $$\begin{aligned} (\rho\rho_{\text{I I}})_{\text{II}} &= (\rho\rho_{\text{I II}})_{\text{I}} + 2\rho_{\text{I}} = -\ \ 4\rho_{\text{I}}, \\ (\rho\rho_{\text{II II}})_{\text{I}} &= (\rho\rho_{\text{II I}})_{\text{II}} - 2\rho_{\text{II}} = -12\rho_{\text{II}}, \end{aligned}$$

(71) $$\begin{aligned} &(\rho^2)_{\text{I I}} = 2\rho_{\text{I}}^2 + 2\rho\rho_{\text{I I}}, && (\rho^2)_{\text{II II}} = 2\rho_{\text{II}}^2 + 2\rho\rho_{\text{II II}}, \\ &(\rho^2)_{\text{I I II}} = 4\rho_{\text{I}}\rho_{\text{I II}} + 2(\rho_{\text{I I}})_{\text{II}} = -32\rho_{\text{I}}, && (\rho^2)_{\text{II II I}} = 4\rho_{\text{II}}\rho_{\text{II I}} + 2(\rho\rho_{\text{II II}})_{\text{I}} = -64\rho_{\text{II}}. \end{aligned}$$

Aus (67) und der ersten Gleichung (70) folgt

(72) $$3(\rho^2)_{\text{II II II}} = 8\rho_{\text{I}}.$$

Vergleicht man das mit der letzten Gleichung (72), so erhält man die Integrierbarkeitsbedingung

(73) $$27(\rho^2)_{\text{II II}} + (\rho^2)_{\text{I I}} = 0,$$

Das nach II differenziert, und das Ergebnis mit (72) und (71) verglichen gibt

$$27(\rho^2)_{\text{II II II}} = 72\rho_{\text{I}} = 32\rho_{\text{I}},$$

also $\rho_{\text{I}} = 0$. Dann aber wäre $\rho_{\text{I II}} = 0$, während wir $\rho_{\text{I II}} = -6$ gefunden hatten. Damit ist die Unmöglichkeit von (67) gezeigt.

Es sei noch bemerkt, dass man jetzt leicht die Bedingungen angeben kann, damit ein vorgegebenes Gewebe sich so geradlinig machen lässt, dass die Schar I ein Büschel wird. Man braucht dazu nur den Wert von D, der sich aus (66) berechnen lässt, in (64) einzusetzen, und erhält sofort die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. An Stelle der zweiten Gleichung

(64) kann man auch (65) nehmen. Die Bedingungen erhalten offenbar vierte Ableitungen von ρ. Möglicherweise würden sich daraus noch Integrierbarkeitsbedingungen in niedrigeren Ordnungen ergeben.

Auch hier haben wir keine nichtprojektive Abbildung gefunden, die drei Geradenscharen auf drei Geradenscharen abbildet. Als letztes wollen wir uns fragen, ob es vielleicht Gewebe gibt, die sich sowohl so geradlinig machen lassen, dass die erste Schar ein Büschel wird, als so, dass die Scharen 2 und 3 einen Kegelschnitt einhüllen. Auch dass wird sich nur als möglich herausstellen, wenn das Gewebe ein Sechseckgewebe ist.

Setzen wir nämlich einmal die Bedingungen (56) in unseren Gleichungen (62) bis (66) ein. Aus (66) wird dann

(74) $$D = -\frac{3}{16}(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II}}.$$

Daher ist wegen (63)

(75) $$(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II\,II}} = 2 + \rho_{\mathrm{I\,II}} = 0.$$

Andererseits berechnet man aus (56), (59) der Reihe nach

(76) $$\begin{gathered}(\rho^2)_{\mathrm{II\,I}} = 2\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} - 12\rho,\\ (\rho^2)_{\mathrm{II\,I\,II}} = 2\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II\,II}} - 16\rho_{\mathrm{II}}, \qquad (\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,I}} = -40\rho_{\mathrm{II}}.\\ (\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,I\,II}} = -40\rho_{\mathrm{II\,II}}, \qquad \rho(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II\,I}} = -24(\rho^2)_{\mathrm{II\,II}} - \rho_{\mathrm{I}}(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II}}.\end{gathered}$$

Aus (75) und der letzten Gleichung (76) erhält man aber die Integrierbarkeitsbedingung

$$2(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II}} = \{\rho(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II\,I}}\}_{\mathrm{II}} - \{\rho(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II\,II}}\}_{\mathrm{I}} = -22(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II}}.$$

Also ist

(77) $$D = \frac{3}{16}(\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0.$$

Dieser Wert für D befriedigt nach (56) die zweite Gleichung (64); die erste liefert

(78) $$6\rho_{\mathrm{II}} = \rho\rho_{\mathrm{I\,I\,I}},$$

oder wegen (56):

(79) $$\begin{gathered}6\rho_{\mathrm{II}} = -3\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I\,I}}\\ (\rho^2)_{\mathrm{II}} = -\rho_{\mathrm{I}}(\rho\rho_{\mathrm{I\,I}}).\end{gathered}$$

Das zuerst nach II, dann nach I differenziert liefert

(80) $$\begin{gathered}(\rho^2)_{\mathrm{II\,II}} = 2\rho\rho_{\mathrm{I\,I}}\\ (\rho^2)_{\mathrm{II\,II\,I}} = 2(\rho\rho_{\mathrm{I\,I}})_{\mathrm{I}} = -4\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I\,I}}.\end{gathered}$$

Vergleicht man das mit (76), so sieht man:

$$40\rho_{\mathrm{II}} = 4\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I\,I}}.$$

Auf Grund von der ersten Gleichung (79) ist dann aber

(81) $$\rho_{\text{II}} = \rho_{\text{I}}\rho_{\text{I I}} = 0,$$

was

$$\rho_{\text{II I}} = 0$$

liefert, im Widerspruch zum früher gefundenen Wert $\rho_{\text{II I}} = -6$.

Wir können also den Satz aussprechen:

Eine topologische Abbildung, welche ein Gewebe, das besteht aus zwei Tangentenscharen eines Kegelschnittes und einer weiteren Geradenschar auf ein anderes Geradengewebe abbildet, und zwar so, dass die letztgenannte Schar des ersten Gewebes dabei in ein Geradenbüschel übergeht, ist notwendig projektiv.

Schliesslich seien noch ein Paar Fälle angegeben, in denen es aussichtsreich erscheint, die Rechnung zu versuchen. Erstens könnte man nachsehen, ob sich ein Gewebe, das zwei Tangentenscharen eines Kegelschnittes enthält, überhaupt noch in anderer Weise geradlinig derstellen lässt. Dazu müsste man feststellen, ob wenn (56) gilt, die Gleichungen (52) noch eine von (55) verschiedene Lösung haben können. Ist das möglich, so ist damit das gesuchte Beispiel gefunden. Gegebenenfalls könnte man die Rechnung noch durch den Ansatz $\rho_{\text{I I}} = 0$, der bedeutet, dass der Kegelschnitt aus zwei Geradenbüscheln besteht, weiter vereinfachen.

Weiter könnte man versuchen, ob die Bedingungen, die bedeuten, dass eine solche geradlinige Abbildung möglich ist, dass die Schar 1 ein Büschel wird, mit den entsprechenden Bedingungen für die Scharen 2 und 3 verträglich sind, ohne dass $\rho = 0$ wird. In diesem Fall wäre wiederum das Beispiel da, denn wenn dieselbe Abbildung alle drei Scharen zu Geradenbüscheln macht, so muss das Gewebe ein Sechseckgewebe sein.

Ein rein formaler Ansatz wäre schliesslich, zu der Gleichung (27) eine neue von der Gestalt

(82) $$\alpha C_1 + \beta C_2 = \gamma\rho$$

hinzuzunehmen, wo man α, β und γ konstant nehmen könnte. Gelangt man zu invarianten Bedingungen, in denen C nicht mehr vorkommt, und kann es sein, dass die Bedingungen dieser Art, die zu verschiedenen Wertsysteme für α, β, γ gehören, verträglich sind, so könnte man zu dem erwünschten Beispiel gelangen. Erwähnt sei noch, dass man mit dem Ansatz $C_1 = \alpha\rho$, $C_2 = \beta\rho$; α, β konstant, nicht durchkommt.

Ohne Zusatzgleichung wie (82) durchzukommen ist deshalb so schwer, weil man stetz zu algebraischen Gleichungen für C in sehr hoher Ordnung gelangt, die sich daher schlecht übersehen lassen.

Theory of non-linear q-difference systems.

By W. J. TRJITZINSKY (Urbana, Ill., U. S. A.).

---

1. **Introduction.** — The object in this paper is to study properties of solutions of the system of non-linear q-difference equations

$$\text{(A)} \qquad x^{\overset{p}{s}} y_j(qx) = a_j(x, y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)) \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

where $|q| \neq 1$, say $|q| > 1$, p and s are integers $(p \geqq 0;\ s > 0)$ and

$$\text{(1.1)} \qquad a_j(x, y_1(x), \dots y_n(x)) = l_j(x, y_1(x), \dots y_n(x)) + q_j(x, y_1(x), \dots y_n(x)),$$

$$\text{(1.1a)} \qquad l_j(x, y_1(x), \dots y_n(x)) = l_{1,j}(x) y_1(x) + \dots + l_{n,j}(x) y_n(x),$$

$$\text{(1.1b)} \qquad q_j(x, y_1(x), \dots y_n(x)) = \Sigma_j a_{i_1, i_2, \dots i_n}(x) y_1^{i_1}(x) y_2^{i_2}(x), \dots y_n^{i_n}(x)$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_n \geqq 0;\ i_1 + \dots + i_n \geq 2) \qquad (j = 1, \dots n).$$

Here the $l_{i,j}(x)$, ${}_j a_{i_1, \dots i_n}(x)$ are analytic in $z (= x^{1/s})$, at $z = 0$, for $|z| \leqq r_1$ $(r_1 > 0)$; that is,

$$\text{(1.2)} \qquad l_{i,j}(x) = \sum_{\nu\ 0}^{\infty} l_{i,j:\nu} x^{\frac{\nu}{s}},$$

$$\text{(1.2a)} \qquad {}_j a_{i_1, \dots i_n}(x) = \sum_{\nu\ 0}^{\infty} {}_j a_{i_1, \dots i_n : \nu} x^{\frac{\nu}{s}},$$

the series in (1.2), (1.2a) being convergent for $|x| \leqq r = r_1{}^s$. The functions $q_j(x, y_1, \dots y_n)$ will be assumed to be analytic in $z (= x^{1/s})$, $y_1, \dots y_n$, at $z = 0$, $y_1 = \dots = y_n = 0$, for

$$\text{(1.3)} \qquad |x| \leqq r;\quad |y_1|, |y_2|, \dots, |y_n| \leqq \rho.$$

Thus, the series in the second member of (1.1b) will be convergent (absolutely and uniformly) when (1.3) is satisfied.

The above hypotheses can be condensed by merely stating that $q_j(x, 0, \dots, 0) \equiv 0$ $(j = 1, \dots n)$ *and that the* $q_j(x, y_1, \dots y_n)$ *are analytic in* $z (= x^{1/s})$ *and* $y_1, \dots y_n$ *at* $z = 0$, $y_1 = \dots = y_n = 0$.

This problem presents a singular point at $x = 0$. *Our purpose is to investigate properties of solutions of* (A) *in the complex neighborhood of the singular point.*

This problem is analogous to those treated by W. J. TRJITZINSKY [1] in the fields of non-linear differential equations and non-linear difference equations. In the papers (T_1), (T_2), (T_3) the author utilizes a special method applicable to an extensive variety of non-linear problems. This method will be applied in the present paper. On the other hand, it will be necessary to make use of the theory of the linear problem corresponding to the system (A), as well as of certain facts peculiar to the field of q-difference equations. The linear problem is

$$\text{(LA)} \qquad x^{\frac{p}{s}} y_i(qx) = l_i(x,\ y_1(x), \dots\ y_n(x)) \quad (i = 1, \dots\ n;\ \text{cf. (1.1a), (1.2)}).$$

The theory of linear q-difference equations (systems) has been developed in a general manner by W. J. TRJITZINSKY [2]. Important earlier developments for linear q-difference equations, given under certain conditions, are due to R. D. CARMICHAEL [3]. The success of treatment (complete from a certain point of view) of linear q-difference equations, as given by W. J. TRJITZINSKY, was due to the introduction of asymptotic methods into the field of q-difference equations.

2. **Preliminary developments.** — Use will be made of matrix notation. The symbol $(a_{i,j})$ $(i, j = 1, \dots\ n)$ will stand for a matrix of elements, where $a_{i,j}$ is the element in the i-th row and j-th column [4].

We assume that the system (LA) (§ 1) *is actually of order* n. Accordingly,

$$\text{(2.1)} \qquad |(l_{i,j}(x))| \equiv\!\!|\equiv 0.$$

The system (LA) (§ 1) in matrix form could be written as

$$\text{(2.2)} \qquad Y(qx) = Y(x)A(x), \quad Y(x) = (y_{i,j}(x)),$$

(1) W. J. TRJITZINSKY, *Analytic theory of non-linear singular differential equations*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », Paris. Referred to as (T_1).

W. J. TRJITZINSKY, *Theory of non-linear singular differential systems*, « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 42 (1937), pp. 225-321. Referred to as (T_2).

W. J. TRJITZINSKY, *Non-linear difference equations*, « Compositio Mathematica », vol. 5 (1937), pp. 1-66. Referred to as (T_3).

(2) W. J. TRJITZINSKY, *Analytic theory of linear* q-*difference equations*, « Acta Mathematica », vol. 61 (1933), pp, 1-38. Referred to as (T_4). Also see

W. J. TRJITZINSKY, *The general case of integro*-q-*difference equations*, « Proc. Mat. Ac. Sciences », vol. 18 (1932), pp. 713-719. Referred to as (T_5).

(3) R. D. CARMICHAEL, *The general theory of linear* q-*difference equations*, « Amer. Journ. of Math. », vol. 34 (1912), pp. 147-168.

Some other references with respect to linear q-difference equations are given in (T_4), in particular regarding important work of C. R. ADAMS.

(4) The product $(a_{i,j})(b_{i,j})$ is a matrix $(c_{i,j})$ where $c_{i,j} = \sum_{\lambda-1}^{n} a_{i,\lambda} b_{\lambda,j}$.

where

$$A(x) = \left(x^{-\frac{p}{s}} l_{i,j}(x)\right) \qquad \text{(cf. (1.2))}. \tag{2.3}$$

The elements of a row in $Y(t)$ are to constitute a solution of (2.2).

In consequence of the developments given in (T_4) [1] the following facts, which will be used in the sequel, may be stated.

Write

$$q = |q| e^{\sqrt{-1}\,\bar{q}} \qquad (0 \leqq \bar{q} < 2\pi). \tag{2.4}$$

The transformation

$$x = x^{t \log q} \qquad (t = u + \sqrt{-1}\,v), \tag{2.5}$$

applied to (2.2), will yield a difference system

$$Z(t+1) = Z(t)B(t), \quad Z(t) = (z_{i,j}(t)), \tag{2.6}$$

where

$$B(t) = A(e^{t \log q}) = \left(e^{-\frac{p}{s} t \log q} l_{i,j}(e^{t \log q})\right) = \left(e^{-\frac{p}{s} t \log q} b_{i,j}(t)\right) \tag{2.6a}$$

and

$$z_{i,j}(t) = y_{i,j}(e^{t \log q}) \qquad (i, j = 1, \dots n). \tag{2.6b}$$

As indicated in $(T_4$; p. 5), (2.5) will transform the circular region $|x| \leqq r$ (cf. (1.3)) of the x-plane into *the closed region* R, *in the* t*-plane, consisting of the half-plane bounded on the right by the line* [2]

$$\bar{q} v = u \log |q| - \log r. \tag{2.7}$$

We note that $x^{1/s}$, as a function of t, has a period

$$\omega = \frac{2\pi s \sqrt{-1}}{\log q}. \tag{2.8}$$

Hence, in view of (1,2), the functions $b_{i,j}(t)$ of (2.6a) are analytic in R (for $t \neq \infty$) and they are of period ω in R.

It is observed that

$$R(t^2 \log q) = 0 \tag{2.9}$$

---

(1) In particular see the remark in (T_4) at the end of § 1, as well as $(T_5$; pp. 714-716). Also it is to be noted that, in view of certain results due to G. D. BIRHKOFF (*Formal theory of irregular linear difference equations*, « Acta Mathematica », vol. 54 (1930), pp. 205-246; in particular, pp. 207-209) linear difference systems and single equations are in a certain sense equivalent. Analogous facts will hold for linear q-difference systems and single q-difference equations.

(2) This line cannot be parallel to the axis of reals in the t-plane.

along *rays* T_1 *and* T_2, *extending from* $t = 0$ *and having the slopes*

$$a_1 = \frac{-\bar{q} + |\log q|}{\log|q|}, \quad a_2 = \frac{-\bar{q} - |\log q|}{\log|q|} \qquad (\bar{q} = \text{angle of } q) \tag{2.9a}$$

($a_1 > 0$, $a_2 < 0$), *respectively.*

T_1 and T_2 are at right angles; moreover, inasmuch as $|q| > 1$, T_1 and T_2 will certainly extend interior the third and second quadrants respectively.

DEFINITION 1. — *In the* $t(= u + \sqrt{-1}\,v)$-*plane cosider the half plane* R (*cf. the statement in connection with* (2.7)). *Consider also rays* T_1 *and* T_2 *specified in connection with* (2.9a). W *will denote the part of* R *bounded above and below by* T_2 *and* T_1 *or by parts of* T_2 *and* T_1 *or by lines parallel to these, respectively,* $W_u = W_{u:-c}$ *will denote the part of* W *on and above the line* $v = -c$ $(c > 0)$. *Similarly,* $W_l = W_{l:c}$ *will denote the part of* W *on and below the line* $v = c$ $(c > 0)$.

DEFINITION 2. — *Let* ε *be positive, however small. Consider rays* T_1^ε *and* T_2^ε *having the slopes* $a_1 - \varepsilon$ *and* $a_2 + \varepsilon$ (*cf.* (2.9a)), *respectively.* W^ε *will be part of* W (*cf. Def. 1*) *bounded above and below by* T_2^ε *and* T_1^ε (*or by parts of these rays*), *respectively,* $W_u^\varepsilon = W_{u:-c}^\varepsilon$ *will denote the part of* W^ε *on and below the line* $v = c$ $(c > 0)$.

DEFINITION 3. — *Let* $\tilde{\rho}$ *denote the distance from the point* $t(= u + \sqrt{-1}\,v)$ *to the line* (2.7). *If* G *is a subregion of the half plane* R (*cf. statement preceding* (2.7)), *the symbol*

$$G \qquad (\tilde{\rho} \geq \rho_1 \geq 0)$$

will designate the part of G *consisting of points* t *for which* $\tilde{\rho} \geq \rho_1$.

Thus, W $(\tilde{\rho} \geq \rho_1)$ denotes the part of W (as specified in Definition 1) on and to the left of a line D (in R), the line D being parallel to the line (2.7) and at the distance ρ_1 to the left from (2.7).

DEFINITION 4. — *Generically* $\{t\}_{k,s}$ (*integers* k, s; $k \geq 0$, $s > 0$) *is to denote a formal expression*

$$\sigma_0(t) + t\sigma_1(t) + \ldots + t^k\sigma_k(t) \tag{2.10}$$

where

$$\sigma_i(t) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} e^{t\frac{\log q}{s}} + \sigma_{i:2} e^{2t\frac{\log q}{s}} + \ldots \qquad (i = 1, 0, \ldots k). \tag{2.10a}$$

The series (2.10a) may be divergent [1].

[1] It is observed that, if a serie like (2.10a) converges, convergence will be in a half plane to the left of a line parallel to (2.7).

DEFINITION 5. — *Generically* $[t]_{k,s}$ (t *in* W^{ε}) *is to denote a function of the form*

(2.11) $$f_0(t) + tf_1(t) + \dots + t^k f_k(t)$$

where the $f_i(t)$ ($i = 0, \dots k$) *are analytic in* W^{ε} (*for* $t = \infty$) *and*

(2.11a) $$f_i(t) \backsim \sigma_i(t), \quad (i = 0, \dots k;\ \sigma_i(t) \text{ given by } (2.10a))$$

for t *in* W^{ε}. *Analogous definitions are made for the generic symbols*

$$[t]_{k,s}\ (t \text{ in } W^{\varepsilon}_{l:c}),\quad [t]_{k,s}\ (t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c}).$$

In the stated regions $[t]_{k:s} \backsim \{ t \}_{k,s}$ (cf. Definition 4).

The meaning of an asymptotic relation designated by $\backsim$, as in (2.11a), is as follows:

(2.12) $$f_i(t) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} e^{t\frac{\log q}{s}} + \dots + \sigma_{i:m-1} e^{(m-1)\frac{t \log q}{s}} + \beta_{i:m}(t) e^{mt\frac{\log q}{s}},$$

where $\beta_{i:m}(t)$ is a function defined in W^{ε}, such that

(2.12a) $$|\beta_{i:m}(t)| \leqq \beta_{i,m} \qquad (t \text{ in } W^{\varepsilon});$$

the above being true for $m = 1, 2, \dots$. This is what we shall call an *ordinary asymptotic relation* (i. e., to infinitely many terms). Unless stated otherwise, $\backsim$ will denote an ordinary asymptotic relation. An asymptotic relation will be said to be *to* m' *terms* if (2.12), with (2.12a), is asserted only for $m = 1, 2, \dots m'$.

DEFINITION 6. — *Generically* $[t]^{*}_{k,s}$ (t *in* W) *will denote a function analytic in* W (*for* $t \neq \infty$), *of the form* $[t]_{k,s}$ (*cf. Definition 5*) *for* t *in* W^{ε} (*cf. Definition 2*) *and also of the form*

$$g_0(t) + tg_1(t) + \dots + t^k g_k(t),$$

where the functions $g_i(t)$ ($i = 0, \dots k$) *are uniformly bounded for all* t *in* W. *Similar definitions are made for the generic symbols*

$$[t]^{*}_{k,s}\ (t \text{ in } W_{l:c}),\quad [t]^{*}_{k,s}\ (t \text{ in } W_{u:-c}).$$

In view of known facts regarding formal solutions of a single q-difference equation [1] and in view of a type of equivalence (previously already referred to) between single equations and systems, it is not difficult to infer that *the system* (2.6) *is satisfied by the formal matrix solution*

(2.13) $$S(t) = (e^{Q_i(t)} e^{t \log q (r_i' + h_{i,j})} \sigma'_{i,j}(t)),$$

(1) For references and details cf. (T_4).

where the $h_{i,j}$ *are rational,*

(2.13a) $$\sigma'_{i,j}(t) = \{ t \}_{k_i, s_i} \qquad (i, j = 1, \dots n)$$

(cf. Definition 4), and

(2.13b) $$Q_i(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu_i \log q, \quad \left(\mu_i = \frac{\eta_i}{s_i};\ \eta_i \text{ integer}\right).$$

As a matter of notation, entailing no loss of generality we may write [1]

(2.14) $$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \dots \leqq \mu_n .$$

Since the $h_{i,j}$ are rational, on writing $r_i = r_i' + h'$ (h' being the least of the $h_{i,j}$; $i, j = 1, \dots n$) and assigning suitable values to the integers s_i ($i = 1, \dots n$), it is inferred that *the system* (2.6) *is satisfied by a formal matrix solution*

(2.15) $$S(t) = (e^{Q_i(t)} e^{r_i t \log q} \sigma_{i,j}(t)), \quad \left(Q_i(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu_i \log q\right),$$

where

(2.15a) $$\sigma_{i,j}(t) = \{ t \}_{k_i, s_i} \qquad (i, j = 1, \dots n;\ \text{cf. Definition 4}).$$

In consequence of $(\dot{T}_4)$ the following may be stated.

The difference system (2.6) (*corresponding to the linear* q-*difference system* (2.2), (2.3)) *possesses a matrix solution* ${}_0Z(t) = ({}_0z_{i,j}(t))$, *with elements analytic in* W *(for* $t \neq \infty$; *cf. Definition 1). Moreover,* ${}_0Z(t) \backsim S(t)$ (*cf.* (2.15), (2.15a)) *for* t *in* W *in the following sense. Let* ε *be positive, however small; we have*

(2.16) $${}_0z_{i,j}(t) = e^{Q_i(t)} e^{r_i t \log q}\, {}_0I_{i,j}(t), \quad {}_0I_{i,j}(t) = [t]^*_{k_i, s_i}$$
$$(t \text{ in } W;\ i, j = 1, \dots n;\ \text{cf. Definition 6}).$$

Finally, we shall note that the transformation (2.5), applied to (A) (§ 1), yields a non-linear difference system

$$z_j(t+1) = e^{-\frac{p}{s} t \log q} a_j(e^{t \log q},\ z_1(t), \dots,\ z_n(t))$$

where

(2.17) $$z_j(t) = y_j(e^{t \log q}) \qquad (j = 1, \dots n).$$

On writing, as in (2.6a), $l_{i,j}(x) = b_{i,j}(t)$ the above system may be put in the form

(2.18) $$z_j(t + 1) = e^{-\frac{p}{s} t \log q} b_j(t,\ z_1(t), \dots\ z_n(t)) \qquad (j = 1, \dots n),$$

---

(1) This can be achieved by suitable arrangement of the rows of the formal matrix solution.

where

(2.18a) $$b_j(t, z_1, \dots z_n) = \lambda_j(t, z_1, \dots z_n) + g_j(t, z_1, \dots z_n),$$

(2.18b) $$\lambda_j(t, z_1, \dots z_n) = b_{1,j}(t)z_1(t) + \dots + b_{n,j}(t)z_n(t),$$

(2.18c) $$g_j(t, z_1, \dots z_n) = \Sigma_j b_{i_1, \dots i_n}(t) z_1^{i_1}(t), \dots z_n^{i_n}(t)$$
$$(i_1, \dots, i_n \geqq 0;\ i_1 + \dots + i_n \geqq 2);$$

here

(2.19) $$_j b_{i_1, \dots i_n}(t) = {}_j a_{i_1, \dots i_n}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}_j a_{i_1, \dots i_n; \nu} e^{\frac{\nu}{s} t \log q}$$

(cf. (1.2a)); thus, the $_j b_{i_1, \dots i_n}(t)$, just as the $b_{i,j}(t)$ (cf. the statement subsequent to (2.8)), are analytic in R (for $t \neq \infty$) and they are also of period ω (cf. (2.8)) in R.

3. **Systems for determining formal solutions of (2.18).** — While along the rays T_1 and T_2 (cf. (2.9a)) we have (2.9), interior W (cf. Definition 1 (§ 2)) the inequality

(3.1) $$R(t^2 \log q) > 0$$

will hold. Since we intend to obtain solutions of the non-linear system (2.18) whose « first approximation » can be furnished by a suitable solution of the linear system (2.6) we are brought to the introduction of the following hypothesis.

HYPOTHESIS A. — *Of the numbers* (2.14) *there are some which are negative. Without any loss of generality we then may write*

(3.2) $$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \dots \leqq \mu_m < 0 \qquad (1 \leqq m \leqq n),$$

while $\mu_j \geqq 0$ (*for* $j = m + 1, \dots n$).

Under the above hypothesis, in consequence of (2.14) and (3.1), *the functions* $Q_i(t)$ (*cf.* (2.13b)) *satisfy the inequalities*

(3.3) $$RQ_1(t) \leqq RQ_2(t) \leqq \dots \leqq RQ_n(t) \qquad (t \text{ in } W),$$

(3.3a) $$RQ_1(t) \leqq RQ_2(t) \leqq \dots \leqq RQ_m(t) < 0 \qquad (t \text{ in } W);$$

moreover,

(3.3b) $$e^{Q_j(t)} \backsim 0 \qquad (j = 1, 2, \dots m;\ t \text{ in } W^\varepsilon)$$

(cf. Definition 2 (§ 2)). The asymptotic relations (3.3b) signify that, for $j \leqq m$ and t in W^ε,

$$e^{Q_j(t)} \backsim 0 + 0 \cdot e^{t \log q} + 0 \cdot e^{2t \log q} + \dots$$

in the sense specified in connection with (2.12), (2.12a) [1].

---

[1] In this case, then, we have $|\exp. Q_j(t)| \leq \beta_\alpha |\exp. (\alpha t \log q)$ $(t \text{ in } W^\varepsilon;\ \alpha = 1, 2, \dots;\ j < m)$.

Form a solution of the linear system (2.6)

$$ {}_1z_j(t) = \sum_{\lambda}^{m} p_\lambda(t)\,{}_0z_{\lambda,j}(t) \qquad (j=1, 2, \dots n), \tag{3.4}$$

where the ${}_0z_{\lambda,j}(t)$ *are given by* (2.16). *The* $p_\lambda(t)$ *are arbitrary functions, of period unity, analytic in* W ($t \neq \infty$) or in $W_{u:-c}$ or in $W_{l:c}$. In the sequel these functions will be subjected to certain inequalities.

A formal solution of (2.18) will be found of the form

$$ z_j(t) = {}_1z_j(t) + {}_2z_j(t) + \dots + {}_\nu z_j(t) + \dots \qquad (j=1, \dots n). \tag{3.5}$$

Here ${}_1z_j(t)$ *will be given by* (3.4). The terms of the series (3.5) will be determined as functions of the form

$$ {}_\nu z_j(t) = \sum_{k_1,\dots k_m} p_1^{k_1}(t), \dots\, p_m^{k_m}(t)\,{}_\nu\eta_{k_1,\dots k_n:j}(t) \tag{3.5a}$$
$$(k_1, \dots, k_m \geqq 0;\ k_1 + \dots + k_m = \nu).$$

We shall now find recurring difference systems satisfied by the coefficients involved in (3.5a). Substitution of (3.5) in (2.18) will yield

$$ \sum_{\nu=2}^{\infty} {}_\nu z_j(t+1) - e^{-\frac{p}{s}t\log q} \sum_{\nu=2}^{\infty} \lambda_j(t, {}_\nu z_1(t), \dots, {}_\nu z_n(t)) = e^{-\frac{p}{s}t\log q} g_j \tag{3.6}$$
$$(j = 1, 2, \dots n),$$

since ${}_1z_j(t)$ ($j = 1, \dots n$) constitutes a solution of (2.6). In (3.6)

$$ g_j = \sum_{i_1,\dots i_n} {}_jb_{i_1,\dots i_n}(t) \prod_{\alpha=1}^{n} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} {}_\nu z_\alpha(t)\right]^{i_\alpha} \tag{3.6a}$$
$$(i_1, \dots, i_n \geqq 0;\ i_1 + \dots + i_n \geqq 2;\ \text{cf. } (2.18\text{c})).$$

On writing

$$ L_j \equiv L_j(t, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:1}(t), \dots, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:n}(t)) = \tag{3.7}$$
$$ = {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:j}(t+1) - e^{-\frac{p}{s}t\log q}\lambda_j(t, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:1}(t), \dots, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:n}(t)),$$

it is observed that the first member in (3.6) may be written as follows

$$ \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{h_1+\dots+h_m=h} p_1^{h_1}(t), \dots\, p_m^{h_m}(t) L_j(t, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:1}(t), \dots, {}_h\eta_{h_1,\dots h_m.n}(t)). \tag{3.7a}$$

The expansion of g_j in powers of $p_1(t), \dots p_m(t)$ can be obtained at once if use is made of an analogous computation already carried out in (T_2) [1].

---

[1] g_j becomes q_j, as given by (2.13a) in (T_2; p. 230), if the ${}_jb_{i_1,\dots}(t)$, ${}_\nu z_\alpha(t)$, $p_i(t)$ are replaced by the ${}_ja_{i_1,\dots}(t)$, ${}_\nu y_\alpha(t)$, c_i, respectively. In (T_2) the formal expansion of q_j is given by (2.23a), (2.26).

Taking advantage of this computation one may write (formally)

$$g_j = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{h_1+\dots+h_m=h} p_1^{h_1}(t), \dots p_m^{h_m}(t)\, {}_h\Gamma_j^{h_1,\dots h_m}, \tag{3.8}$$

where

$$\begin{gathered} {}_h\Gamma_j^{h_1,\dots h_m} = \Sigma^{(4)}{}_j b_{i_1,\dots i_n}(t) \prod_{\alpha=1}^{n} \sum_{\nu_1+\dots+\nu_{i_\alpha}=\gamma_\alpha} \\ \sum^{(2)}_{k_1',\dots,k_m^{i_\alpha}} \prod_{r=1}^{i_\alpha} {}_{\nu_r}\eta_{k_1^r,\dots,k_m^r:\alpha}(t) \qquad (h = h_1 + \dots + h_m;\ h \geqq 2). \end{gathered} \tag{3.9}$$

The summation symbols involved in the second member of (3.9) are specified as follows. On one hand,

$$\begin{gathered} \Sigma^{(2)} = \Sigma\, [k_1^1 + \dots + k_1^{i_\alpha} = \delta_1;\ k_2^1 + \dots + k_2^{i_\alpha} = \delta_2; \dots; \\ k_m^1 + \dots + k_m^{i_\alpha} = \delta_m;\ k_1^1 + \dots + k_m^1 = \nu_1;\ k_1^2 + \dots + k_m^2 = \nu_2; \dots; \\ k_1^{i_\alpha} + \dots + k_m^{i_\alpha} = \nu_{i_\alpha}]. \end{gathered} \tag{3.9a}$$

On the other hand,

$$\Sigma^{(4)} = \sum_{s=2}^{h} \sum_{i_1+\dots+i_n=s} \sum_{\gamma_1+\dots+\gamma_n=h} \sum^{(3)}_{{}_1\delta_1,\dots,{}_n\delta_m} \qquad (\gamma_1 \geqq i_1, \dots, \gamma_n \geqq i_n). \tag{3.9b}$$

where

$$\begin{gathered} \Sigma^{(3)} = \Sigma\, [{}_1\delta_q + \dots + {}_n\delta_q = h_q \qquad (q = 1, \dots m); \\ {}_1\delta_1 + \dots + {}_1\delta_m = \gamma_1, \dots;\quad {}_n\delta_1 + \dots + {}_n\delta_m = \gamma_n]. \end{gathered} \tag{3.9c}$$

In consequence of (3.8), of the statement in connection with (3.7a) and of (3.6) the following set of difference relations is obtained, as a result of comparing the coefficients of the monomials

$$p_1^{k}(t), \dots p_m^{k_m}(t),$$

$$\begin{gathered} L_j(t,\ {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:1}(t), \dots,\ {}_h\eta_{h_1,\dots h_m:n}(t)) = e^{-\frac{p}{s} t \log q}\, {}_h\Gamma_j^{h_1,\dots h_m} \\ (j = 1, \dots n;\ h = h_1 + \dots + h_m;\ h_1 \geqq 0, \dots, h_m \geqq 0;\ \text{cf. } (3.7),\ (3.9)). \end{gathered} \tag{3.10}$$

As established in (T_2; p. 235) ${}_h\Gamma^{h_1,\dots h_m}$ *depende only on the* ${}_\nu\eta_{k_1,\dots k_m:\alpha}$ *for which* $\nu <$ h.

Consider the non-homogeneous linear difference system, written in matrix form,

$$Z(t+1) = Z(t)B(t) + G(t), \quad (G(t) = (g_{i,j}(t))), \tag{3.11}$$

where the matrix $B(t)$ is given by (2.6a). Let

$$\underset{\tau=t}{\mathfrak{S}} \tag{3.12}$$

denote a « difference summation »; that is,

(3.12a) $$\underset{\tau=t+1}{\mathfrak{S}} \varphi(\tau) - \underset{\tau=t}{\mathfrak{S}} \varphi(\tau) = \varphi(t).$$

Let ${}_0Z(t)$ be the matrix solution of (2.6), given by (2.16). The system (3.11) will be satisfied by

(3.13) $$Z(t) = C(t)_0Z(t), \quad (Z(t) = (z_{i,j}(t))),$$

where (1)

(3.13a) $$C(t) = (c_{i,j}(t)) = \underset{\tau=t}{\mathfrak{S}} G(\tau)_0Z^{-1}(\tau+1),$$

provided that the difference summations involved can be evaluated. *Assume the* $g_{i,j}(t) = g_j(t)$ *independent of* i; then the

(3.14) $$c_{i,j}(t) = c_j(t),$$

(3.14a) $$z_{i,j}(t) = z_j(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda(t)_0z_{\lambda,j}(t)$$

$(j = 1, 2, .. n)$ will be independent of i.

Let ${}_0\bar{z}_{i,j}(t)$ designate the elements of the inverse of the matrix ${}_0Z(t+1)$; that is,

(3.15) $$({}_0\bar{z}_{i,j}(t)) = {}_0Z^{-1}(t+1) \qquad \text{(cf. (2.16))}.$$

Then, in view of (3.7) and on writing

(3.16) $$g_{i,j}(t) = g_j(t) = e^{-\frac{p}{s}t\log q}\, {}_h\Gamma_j^{h_1,..h_m},$$

a solution of (3.10) is obtained in consequence of (3.13) and (3;13a) in the form

(3.17) $${}_h\eta_{h_1,\dots,h_m;j}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda(t)_0z_{\lambda,j}(t) \qquad \text{(cf. (2.16))},$$

where

(3.17a) $$c_\lambda(t) = \sum_{\lambda_1=1}^{n} \underset{\tau=t}{\mathfrak{S}} e^{-\frac{p}{s}\tau\log q}\, {}_h\Gamma_{\lambda_1}^{h_1,\dots h_m}(\tau)_0\bar{z}_{\lambda_1,\lambda}(\tau),$$

provided that the functions (3.16) are known and that the difference summations can be evaluated.

LEMMA 1. — *Let* W *be a region as specified in Definition 1. Let* ${}_0Z(t) = ({}_0z_{i,j}(t))$ *be a matrix solution of the form* (2.16) *satisfying, for* t *in* W, *the linear system* (2.6). *A mechanism for constructing a formal solution of the non-linear system* (2.18) *as a series* (3.5) (*with* ${}_1z_j(t)$ $(j = 1, \dots n)$ *of form* (3.4)

(1) With $A = (a_{i,j})$, $A^{-1} = (a_{i,j})^{-1} = (\bar{a}_{i,j})$ will denote the inverse of the matrix A.

and constituting a solution of the linear problem, and the ${}_{\nu}z_j(t)$ *of form* (3.5a)) *is furnished by the formulas* (3.17), (3.17a), (3.9) (*with* (3.9a), (3.9b)) [1].

4. **Difference summations.** — In the sequel the following summation result given by TRJITZINSKY [2] in (T_4), will be useful. We state it on the basis of the notation of the present paper.

Consider the equation

$$z(t+1) - z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} g(t) = H(t) \tag{4.1}$$

where $\mu = \eta/s$ ($\eta > 0$; $s \geqq 1$; η, s *integers*) *and*

$$g(t) = [t]^*_{k,s} \qquad (t \text{ in } W_{u:-c};\ c > 0) \tag{4.1a}$$

(cf. Definitions 1 and 6 of § 2). The difference sum

$$\underset{\tau=t}{\mathrm{S}}\, H(\tau) \tag{4.2}$$

can be evaluated [3] as a function of the form

$$z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} I(t), \tag{4.2a}$$

where

$$I(t) = [t]^*_{k,s} \qquad (t \text{ in } {}_{1}W_{u:-c'}). \tag{4.2b}$$

Here ${}_{1}W_{u:-c'}$ *is the part of* $W_{u:-c'}$ *on and to the left of a line in* $W_{u:-c'}$ *parallel to the boundary* T_2 *of* $W_{u:-c'}$; $0 < c' < c$ *and* $c - c'$ *is however small*; moreover, it is clear that, according to Definition 1 (§ 2), ${}_{1}W_{u:-c'}$ is a region of the same type as $W_{u:-c}$ (it is a subregion of the latter).

In the sequel, however, we shall also need a suitable solution of *the problem*

$$z(t+1) - z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} g(t) = H(t) \tag{4.3}$$

where $\mu = \eta/s$ ($\eta \geq 0$; $s \geqq 1$; η, s *integers*) *and*

$$g(t) = [t]^*_{k,s} \qquad (t \text{ in } W_{u:-c}) \text{ [4]}. \tag{4.3a}$$

Suppose now that in (4.3) $\eta > 0$. Under suitable convergence conditions

---

(1) The ${}_{h}\eta_{h_1,\dots h_m:j}(t)$ are determined in succession in the order indicated in (T_2; p. 235).

(2) (T_4; p. 24).

(3) Cf. formula (16) in (T_4; p. 22).

(4) In (T_4) there was no occasion to obtain a solution of this problem.

a solution (for t in $W_{u:-c}$) of the equation (4.3) will be given by

(4.4) $$z(t) = \underset{\tau - t}{\S} H(\tau) = H(t-1) + H(t \quad 2) + \ldots + H(t-\nu) + \ldots .$$

Write

(4.4a) $$z(t) = e^{\frac{-\eta}{2s} t^2 \log q} e^{rt \log q} \varphi(t).$$

In consequence of (4.3a) and of Definition 6 (§ 2)

(4.5) $$g(t) = g_0(t) + t g_1(t) + \ldots + t^k g_k(t),$$

where

(4.5a) $$g_i(t) \backsim \sigma_i(t) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} e^{t \frac{\log q}{s}} + \ldots$$

(t in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$) and

(4.5b) $$| g_i(t) | \leqq \beta \qquad (t \text{ in } W_{u:-c};\ i = 0, \ldots k).$$

By (4.5a)

(4.5c) $$g_i(t) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} e^{t \frac{\log q}{s}} + \ldots + \sigma_{i:\gamma-1} e^{(\gamma-1)t \frac{\log q}{s}} + \beta_{i:\gamma}(t) e^{\gamma t \frac{\log q}{s}}$$
$$(i = 0,\ 1, \ldots\ k)$$

with

(4.5d) $$| \beta_{i:\gamma}(t) | \leqq {}_{\varepsilon}\beta_{\gamma} \qquad (\text{in } W^{\varepsilon}_{u:-c}),$$

a representation of the form (4.5c) (with (4.5d)) being valid for $\gamma = 0, 1, 2, \ldots$ (1).

To abbreviate writing we shall introduce the notation

(4.6) $$e^{t \frac{\log q}{s}} = I = I(t), \quad e^{-\frac{\log q}{s}} = w.$$

In consequence of (4.3), (4.5) and (4.4) it is inferred that $\varphi(t)$ from (4.4a) is expressible by

(4.7) $$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L_{\nu}(t) = \varphi_0(t) + t \varphi_1(t) + \ldots + t^k \varphi_k(t),$$

where

(4.7a) $$L_{\nu}(t) = e^{\left(\frac{\eta}{s} t\nu - \frac{\eta}{2s} \nu^2\right) \log q} e^{-r\nu \log q} g(t-\nu) =$$
$$= I^{\eta\nu} w^{\left(\frac{\eta}{2}\nu + rs\right)\nu} \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i} c_{i,j}(\nu) t^j \right) g_i(t-\nu)$$

with

(4.7b) $$c_{i,j}(\nu) = C_j{}^i (-\nu)^{i-j} \qquad (\text{the } C_j{}^i \text{ binomial coefficients}).$$

Arranging $L_{\nu}(t)$ in powers of t we get

(5,8) $$L_{\nu}(t) = L_{\nu,0}(t) + t L_{\nu,1}(t) + \ldots + t^k L_{\nu,k}(t),$$

---

(1) For $\gamma = 0$ we have $g_i(t) = \beta_{i:0}(t)$ and (4.5b) is applicable with $\beta = {}_{\varepsilon}\beta_0$ independent of ε.

where

$$(4.8a) \qquad L_{\nu,j}(t) = I^{\eta\nu} w^{\left(\frac{\eta}{2}\nu + rs\right)\nu} \sum_{i=j}^{k} c_{i,j}(\nu) g_i(t-\nu).$$

Thus the $\varphi_j(t)$ of (4.7) are given by

$$(4.9) \qquad \varphi_j(t) = \sum_{\nu-1}^{\infty} L_{\nu,j}(t) \qquad (j = 0, 1, \ldots k).$$

Since in (4.7b) $0 \leqq j \leqq i \leqq k$, the inequalities

$$(4.10) \qquad | c_{i,j}(\nu) | < c'\nu^k$$

will hold. Also it is noted that $t - \nu$ (with $\nu \geqq 0$) will represent a point in $W_{u:-c}$ if t does. Thus, by virtue of (4.8a), (4.10) and (4.5b), one has

$$(4.11) \qquad | L_{\nu,j}(t) | < | I |^{\eta\nu} \left| w^{\left(\frac{\eta}{2}\nu+rs\right)\nu} \right| (k+1) c'\nu^k \beta = | I |^{\eta\nu} q_\nu$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots; \ j = 0, 1, \ldots k; \ t \text{ in } W_{u:-c}).$$

Let δ be a non-negative integer. Consider the sum

$$(4.12) \qquad R_{\delta,j}(t) = \sum_{\nu \ \delta+1}^{\infty} L_{\nu,j}(t).$$

By (4.11) we obtain

$$(4.12a) \qquad R_{\delta,j}(t) = I^{\eta\cdot(\delta+1)} R'_{\delta,j}(t),$$

where

$$(4.12b) \qquad | R'_{\delta,j}(t) | < \sum_{\nu=\delta+1}^{\infty} | I |^{\eta\cdot(\nu-\delta-1)} q_\nu = R_\delta'' < R_\delta'$$
$$(j = 0, \ldots k; \ t \text{ in } W_{u:-c});$$

here R_δ' is independent of t, *the series representing* R_δ'' *being convergent*, provided $W_{u:-c}$ is suitably chosen (choice can be made independent of δ). In fact q_ν, as given in (4.11), is expressible as

$$(4.13) \qquad q_\nu = q_{(1)} e^{\nu\left[\left(\frac{\eta}{2}+r's\right)\log|w| - r''s\overline{w}\right] + k\log\nu}$$

($r = r' + \sqrt{-1}r''$; $\overline{w}$ = angle of w; $q_{(1)} = (k+1)c'\beta$). Now

$$(4.13a) \qquad | w | < 1; \quad | I | = | I(t) | \leqq \lambda_1 \qquad (\text{in } W_{u:-c}) \ (^1),$$

where λ_1 is independent of t. With the aid of (4.13) and (4.13a) the truth of the italicized statement subsequent to (4.12b) can be inferred without difficulty, if we note that by a suitable choice of $W_{u:-c}$ λ_1 is made as small as needed.

---

(1) Cf. (4.6). The inequality (4.13a) (for $I(t)$) will hold in $W_{u:-l}$ and W, as well.

Using (4.12), (4.12a), (4.12b) (with $\delta = 0$) and noting that, in view of (4.9),

$$\varphi_j(t) = R_{0,j}(t),$$

we infer that

$$\varphi_j(t) = I^{\eta} R'_{0,j}(t), \quad (|\, R'_{0,j}(t)\,| < R'_0) \tag{4.14}$$

for $j = 0, 1, \ldots k$ *and for* t *in* $W_{u:-c}$.

It will be necessary to establish the asymptotic form of the functions $\varphi_j(t)$ (cf. (4.7)) for t in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ ($\varepsilon > 0$, however small). In view of (4.9), *with* δ *forthwith assumed positive*, we shall write

$$\varphi_j(t) = \varphi_j'(t) + R_{\delta,j}(t) \qquad \text{(cf. (4.12), (4.12a))} \tag{4.15}$$

where

$$\varphi_j'(t) = \sum_{\nu=1}^{\delta} L_{\nu,j}(t) \qquad \text{(cf. (4.8a))}. \tag{4.15a}$$

Consider a function $g_i(t-\nu)$, where $1 \leqq \nu \leqq \delta$. With the aid of (4.6) and (4.5c), where we put

$$\gamma = \gamma_\nu = (\delta + 1 - \nu)\eta \quad (1 \leqq \nu \leqq \delta), \tag{4.16}$$

it follows that

$$\begin{aligned} g_i(t-\nu) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} I w^{\nu} + \sigma_{i:2} I^2 w^{2\nu} + \ldots + \sigma_{i:\gamma_\nu - 1} I^{\gamma_\nu - 1} w^{(\gamma_\nu - 1)\nu} + \\ + \beta_{i:\gamma_\nu}(t-\nu) I^{\gamma_\nu} w^{\gamma_\nu \nu} \qquad (i = 0, \ldots k). \end{aligned} \tag{4.16a}$$

On writing

$$\theta_\nu = w^{\left(\frac{\eta}{2}\nu + rs\right)\nu}, \tag{4.17}$$

from (4.8a) in consequence of (4.16a) one derives

$$\begin{aligned} L_{\nu,j}(t) &= I^{\eta\nu} \sum_{i=j}^{k} \theta_\nu c_{i,j}(\nu) [\sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} I w^{\nu} + \ldots \\ &\ldots + \sigma_{i:\gamma_\nu - 1} I^{\gamma_\nu - 1} w^{(\gamma_\nu - 1)\nu} + \beta_{i:\gamma_\nu}(t-\nu) I^{\gamma_\nu} w^{\gamma_\nu \nu}] = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\gamma_\nu - 1} \psi_{j:\alpha}(\nu) I^{\eta\nu + \alpha} + \Gamma_{j:\gamma}(t, \nu) I^{\eta\nu + \gamma_\nu}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

where

$$\psi_{j:\alpha}(\nu) = \theta_\nu w^{\alpha\nu} \sum_{i=j}^{k} c_{i,j}(\nu) \sigma_{i:\alpha} \tag{4.18a}$$

$$\Gamma_{j:\gamma_\nu}(t, \nu) = \theta_\nu w^{\gamma_\nu \nu} \sum_{i=j}^{k} c_{i,j}(\nu) \beta_{i:\gamma_\nu}(t-\nu). \tag{4.18b}$$

With γ_ν in (4.18) given by (4.16), consider the function $\varphi_j'(t)$ (cf. (4.15a)). One has

$$(4.19)\quad \varphi_j'(t) = \psi_{j:0}(1)I^{\eta} + \psi_{j:1}(1)I^{\eta+1} + \dots + \psi_{j:\gamma_1-1}(1)I^{(\delta+1)\eta-1} + \Gamma_{j:\delta\eta}(t,\ 1)I^{(\delta+1)\eta} +$$
$$+ \psi_{j:0}(2)I^{2\eta} + \psi_{j:1}(2)I^{2\eta+1} + \dots + \psi_{j:\gamma_2-1}(2)I^{(\delta+1)\eta-1} + \Gamma_{j:(\delta-1)\nu}(t,\ 2)I^{(\delta+1)\eta} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \psi_{j:0}(\delta)I^{\delta\eta} + \psi_{j:1}(\delta)I^{\delta\eta+1} + \dots + \psi_{j:\eta-1}(\delta)I^{(\delta+1)\eta-1} + \Gamma_{j:\eta}(t,\ \delta)I^{(\delta+1)\eta}.$$

Accordingly

$$(4.19a)\qquad \varphi_j'(t) = \varphi_{j:0}I^{\eta} + \varphi_{j:1}I^{\eta+1} + \dots + \varphi_{j:\delta\eta-1}I^{(\delta+1)\eta-1} + r_{j:\delta\eta}(t)I^{(\delta+1)\eta}$$
$$(j = 0,\ 1, \dots\ k)$$

where, for $m = 0,\ 1, \dots,\ \eta - 1$,

$$(4.20)\qquad \begin{aligned} \varphi_{j:m} &= \psi_{j:m}(1), \\ \varphi_{j:\eta+m} &= \psi_{j:\eta+m}(1) + \psi_{j:m}(2), \\ \varphi_{j:2\eta+m} &= \psi_{j:2\eta+m}(1) + \psi_{j:\eta+m}(2) + \psi_{j:m}(3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{j:\nu\eta+m} &= \psi_{j:\nu\eta+m}(1) + \psi_{j:(\nu-1)\eta+m}(2) + \dots + \psi_{j:m}(\nu+1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

(cf. (4.18a)) and

$$(4.20a)\qquad r_{j:\delta\eta}(t) = \Gamma_{j:\delta\eta}(t,\ 1) + \Gamma_{j:(\delta-1)\eta}(t,\ 2) + \dots + \Gamma_{j:\eta}(t,\ \delta) \qquad \text{(cf. (4.18b))}.$$

In consequence of (4.5d) every function (4.18b) is uniformly bounded, with respect to t, for t in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$. By virtue of (4.20a) the same will be true for the function $r_{j:\delta\eta}(t)$; that is

$$(4.21)\qquad |\, r_{j:\gamma\delta}(t)\,| < {}_{\varepsilon}r_{\delta} \qquad (j=0,\ 1, \dots\ k;\ t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c}),$$

where ${}_{\varepsilon}r_{\delta}$ is independent of t.

In view of (4.15), (4.19a) and (4.12a) one has

$$(4.22)\qquad \varphi_j(t) = I^{\eta}[\varphi_{j:0} + \varphi_{j:1}I + \dots + \varphi_{j:\delta\eta-1}I^{\delta\eta-1} + r'_{j:\delta\eta}(t)I^{\delta\eta}],$$

where

$$(4.22a)\qquad r'_{j:\delta\eta}(t) = r_{j:\delta\eta}(t) + R'_{\delta,j}(t) \qquad (j=0, \dots\ k).$$

By (4.21) and (4.12b)

$$(4.22b)\qquad |\, r'_{j:\delta\eta}(t)\,| < {}_{\varepsilon}r'_{\delta} \qquad (j=0, \dots\ k;\ t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c}).$$

A representation of $\varphi_j(t)$ of the form (4.22) (with (4.22b) will hold for $\delta = 1,\ 2, \dots$. *Thus*, in view of (4.6),

$$(4.22c)\qquad \varphi_j(t)e^{-\eta t\frac{\log q}{s}} \backsim \varphi_{j:0} + \varphi_{j:1}e^{t\frac{\log q}{s}} + \varphi_{j:2}e^{2t\frac{\log q}{s}} + \dots$$

for t *in* $W^{\varepsilon}_{u:-c}$; here the coefficients involved in the infinite series are given by (4.20) (with the aid of (4.18a)).

On the basis of the statements in connection with (4.22c) and (4.14) from (4.7) it is deduced that

$$\varphi(t) = e^{\eta t^{\frac{\log q}{s}}} [t]^{*}_{k,s} \qquad (t \text{ in } W_{u:-c}).$$

Thus, (4.4) *furnishes a solution of the problem* (4.3), (4.3a) (with $\eta > 0$) *in the form of a function* (4.4a), *for which* $\varphi(t)$ *is of the character just stated.* By precisely same steps it can be established that *if in* (4.3a) *we replace* $W_{u:-c}$ *by* W (*or* $W_{1:c}$) *the above result will hold for* t *in* W (*or* $W_{1:c}$), *when* $\eta > 0$.

Suppose now that in (4.3) $\eta = 0$. Thus, the problem is:

$$(4.23) \qquad z(t+1) - z(t) = e^{rt\log q} g(t), \quad g(t) = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i(t),$$

$$(4.23a) \qquad g_i(t) \backsim \sigma_i(t) = \sigma_{i:0} + \sigma_{i:1} e^{t^{\frac{\log q}{s}}} + \dots \qquad (\text{in } W^{\varepsilon}_{u:-c}),$$

$$(4.23b) \qquad |g_i(t)| \leqq \beta \qquad (\text{in } W^{\varepsilon}_{u:-c}).$$

The corresponding formal equation will be

$$(4.24) \qquad \bar{z}(t+1) - \bar{z}(t) = e^{rt\log q}\bar{g}(t), \quad \bar{g}(t) = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i(t),$$

$$\bar{g}_i(t) = \sigma_i(t) \qquad (i = 0, \dots k; \text{ cf. } (4.23a))\ (^1).$$

As shown in (T_4; pp. 9–11) (4.24) has a formal solution

$$(4.25) \qquad \bar{z}(t) = e^{rt\log q}\bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi}(t) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \bar{\varphi}_i(t),$$

with (^{2})

$$(4.25a) \qquad \bar{\varphi}_i(t) = \varphi_{i:0} + \phi_{i:1} e^{t^{\frac{\log q}{s}}} + \varphi_{i:2} e^{2t^{\frac{\log q}{s}}} + \dots \qquad (i = 0, \dots, k+1).$$

Let δ be a positive integer. Form the function $z'(t)$,

$$(4.26) \qquad z'(t) = e^{rt\log q}\varphi'(t), \quad \varphi'(t) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \varphi_i'(t),$$

where

$$(4.26a) \qquad \varphi_i'(t) = \sum_{\nu=0}^{\delta-1} \varphi_{i:\nu} e^{\nu t^{\frac{\log q}{s}}}.$$

(^{1}) The series $\sigma_i(t)$ may diverge (in every finite part of the region R defined in connection with (2.7)).

(^{2}) $\bar{\varphi}_{k+1}(t)$ may be present only if $q^{r+m/s} = 1$ for some integer $m (\geq 0)$. If the latter condition is satisfied $\bar{\varphi}_{k+1}(t) = \varphi_{k+1:m} \cdot \exp.\left(mt^{\frac{\log q}{s}}\right)$.

Applying the transformation

$$z(t) = z'(t) + \lambda(t) \tag{4.27}$$

to (4.23) we obtain

$$\lambda(t+1) - \lambda(t) = e^{rt \log q} g(t) - (z'(t+1) - z'(t)) = a_\delta(t). \tag{4.28}$$

On taking account of (4.23a) and of the relations satisfied by the $\varphi_{i:\nu}$ (that is, by the coefficients in a formal solution of the formal equation (4.24) [1] it is not difficult to infer that

$$a_\delta(t) = e^{rt \log q} e^{\beta(\delta) t \frac{\log q}{s}} \bar{a}_\delta(t), \tag{4.28a}$$

where $\beta(\delta)$ ($\leqq \delta$) *is an integer* [2] *such that* $\beta(\delta) \to \infty$, *as* $\delta \to \infty$, and

$$|\bar{a}_\delta(t)| \leqq |t|^{k+1} \beta'_\delta \qquad (t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c};\ |t| \geqq \lambda' > 0). \tag{4.28b}$$

A solution of (4.28) will be given in the form of the series

$$\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\delta(t-\nu) = e^{rt \log q} e^{\beta(\delta) t \frac{\log q}{s}} \bar{\lambda}(t), \tag{4.29}$$

where

$$\bar{\lambda}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-[rs + \beta(\delta)]\nu \frac{\log q}{s}} \bar{a}_\delta(t-\nu). \tag{4.29a}$$

On writing

$$\left| e^{-[rs+\beta(\delta)]\nu \frac{\log q}{s}} \right| = p_{\delta,\nu} \tag{4.30}$$

from (4.29a), in consequence of (4.28b), it is inferred that

$$|\bar{\lambda}(t)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\delta,\nu} \beta'_\delta |t-\nu|^{k+1}$$

for t in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ (and $|t| \geqq \lambda' > 0$). Now

$$|t-\nu| \leqq |t| + \nu \leqq |t| \left(1 + \frac{\nu}{\lambda'}\right) \qquad (\text{for } |t| \geqq \lambda')$$

so that one has

$$|\bar{\lambda}(t)| \leqq \beta'_\delta |t|^{k+1} \bar{\lambda}_\delta, \quad \bar{\lambda}_\delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\delta,\nu} \left(1 + \frac{\nu}{\lambda'}\right)^{k+1}, \tag{4.31}$$

$$(t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c};\ |t| \geqq \lambda').$$

---

(1) Except for obvious changes in notation these relations are those given by formulas (4), (4a),... in (T_4; pp. 9-10).

(2) In fact, it can be shown that $\beta(\delta)$ can be chosen so that $\delta - \beta(\delta) \leqq \delta_1$ (δ_1 independent of δ).

In view of (4.30) it is not difficult to infer that the above series for $\bar{\lambda}_\delta$ converges, provided $\delta \geqq \delta'$, where δ' is sufficient ly great ([1]). Il will be assumed forthwith that δ has been so taken.

By (4.29)

$$(4.32)\qquad \lambda(t) = e^{rt\log q} e^{(\beta(\delta)-1)t^{\frac{\log q}{s}}} \lambda_0(t)$$

where, in consequence of (4.31),

$$(4.32\text{a})\qquad |\lambda_0(t)| = \left| e^{t^{\frac{\log q}{s}}} \bar{\lambda}(t) \right| \leqq \beta'_\delta \bar{\lambda}_\delta \left| t^{k+1} e^{t^{\frac{\log q}{s}}} \right|$$

(for t in $W^\varepsilon_{u:-c}$ and $|t| \geqq \lambda' > 0$). With $|q| > 1$, the inequality

$$\left| t^{k=1} e^{t^{\frac{\log q}{s}}} \right| < \bar{\lambda}' \qquad (t \text{ in } W)$$

can be established without difficulty. Whence, by (4.32a),

$$(4.32\text{b})\qquad |\lambda_0(t)| < \lambda_0 \qquad (t \text{ in } W^\varepsilon_{u:-c};\ |t| \geqq \lambda' > 0).$$

With the aid of (4.27), (4.26) and (4.32) it is deduced that

$$(4.33)\qquad z(t) = e^{rt\log q} \sum_{i=0}^{k+1} t^i \eta_i(t)$$

where

$$\eta_0(t) = \varphi_0'(t) + \lambda_0(t) e^{(\beta(\delta)-1)t^{\frac{\log q}{s}}}, \quad \eta_i(t) = \varphi_i'(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k+1)$$

so that, by (4.26a),

$$(4.33\text{a})\qquad \eta_i(t) = \sum_{\nu=0}^{\beta(\delta)-2} \varphi_{i:\nu} e^{\nu t^{\frac{\log q}{s}}} + e^{(\beta(\delta)-1)t^{\frac{\log q}{s}}} \varphi^{i,\delta}(t)$$

$(i = 0, 1, \ldots, k+1)$ with

$$\varphi^{0,\delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{\delta-\beta(\delta)} \varphi_{0:\nu-1+\beta(\delta)} e^{\nu t^{\frac{\log q}{s}}} + \lambda_0(t),$$

$$\varphi^{i,\delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{\delta-\beta(\delta)} \varphi_{i:\nu-1+\beta(\delta)} e^{\nu t^{\frac{\log q}{s}}} \qquad (i = 1, \ldots, k+1);$$

thus, in consequence of (4.32b), one has

$$(4.33\text{b})\qquad |\varphi^{i,\delta}(t)| < h_\delta \qquad (i = 0, 1, \ldots, k+1;\ \text{in } W^\varepsilon_{u:-c})\ ([2]).$$

The function $z(t)$, as given by (4.33), appears to depend on δ ($\geqq \delta'$). It will be shown, however, that $z(t)$ *is independent of* δ; this incidentally, would

([1]) By a suitable choice of δ, $\beta(\delta)$ may be made as great as desired.

([2]) The inequality $|t| \geqq \lambda' > 0$ is made superfluous by suitable choice of the region W.

establish the formula

$$z(t) = e^{rt \log q}[t]_{k+1,s} \qquad (t \text{ in } W^{\varepsilon}_{u:-c}) \tag{4.34}$$

(cf. Definition 5 (§ 2)) [1]. In fact, let

$$ {}_1z(t) = e^{rt \log q} \sum_{i=0}^{k+1} t^i {}_1\eta_i(t) \tag{4.35}$$

be a function formed precisely as $z(t)$ of (4.33) but with δ replaced by δ_1, where $\delta_1 > \delta$. We have [2], by (4.33a) and (4.33b) (which also hold with δ replaced by δ_1),

$$ {}_1\eta_i(t) - \eta_i(t) = \sum_{\nu=\beta(\delta)-1}^{\beta(\delta_1)-2} \varphi_{i:\nu} e^{\nu t \frac{\log q}{s}} + e^{(\beta(\delta_1)-1)t \frac{\log q}{s}} \varphi^{i,\delta_1}(t) -$$
$$- e^{(\beta(\delta)-1)t \frac{\log q}{s}} \varphi^{i,\delta}(t) = e^{(\beta(\delta)-1)t \frac{\log q}{s}} \varphi^{i,\delta,\delta_1}(t)$$

where

$$|\varphi^{i,\delta,\delta_1}(t)| < h_{\delta,\delta_1} \qquad (i = 0, \dots, k+1;\ \text{in } W^{\varepsilon}_{u:-c}).$$

Thus, in consequence of (4.35) and (4.33), we have

$$ {}_1z(t) - z(t) = e^{rt \log q} e^{(\beta(\delta)-1)t \frac{\log q}{s}} z_{0,1}(t), \tag{4.36}$$

where

$$|z_{0,1}(t)| = \left| \sum_{i=0}^{k+1} t^i \varphi^{i,\delta,\delta_1}(t) \right| < h^{\delta,\delta_1} |t|^{k+1} \qquad (\delta_1 > \delta \geqq \delta') \tag{4.36a}$$

for t in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ [3]. Since ${}_1z(t)$ and $z(t)$ are solutions of the same difference equation (4.23), necessarily

$$p(t) = {}_1z(t) - z(t)$$

is analytic in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ $(t \neq \infty)$ and has a period equal to unity. In view of periodicity $p(t)$ will be analytic (for $t \neq \infty$) for $It = v \geqq -c$. Consider a periodo-strip S_0,

$$s_0 \leqq Rt = u \leqq s_0 + 1 \qquad (v \geqq -c).$$

Let $t_0 = u_0 + \sqrt{-1}\, v_0$ represent a point in S_0. We have $p(t_0 - \nu) = p(t_0)$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$. With the integer ν sufficiently great ($\nu \geqq \nu_0 \geqq 0$; ν_0 possibly depending on t_0) the point $t_0 - \nu$ will be in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ [4]. Thus, by (4.36) and

---

(1) Note that $\beta(\delta) \to \infty$, as $\delta \to \infty$.

(2) $\beta(\delta_1) > \beta(\delta)$.

(3) Here and in the sequel choose region W so that for t in W have $|t| \geqq \lambda' > 0$.

(4) This is because the part of the boundary of $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ which is in the second quadrant recedes indefinitely from the negative axis of reals.

(4.36a) we have

$$|p(t_0)| = |p(t_0 - \nu)| = |{}_1z(t_0 - \nu) - z(t_0 \quad \nu)| <$$
$$< \left| e^{rt_\nu \log q} e^{(\beta(\delta)-1)t_\nu \frac{\log q}{s}} \right| h^{\delta,\delta_1} |t_0 - \nu|^{k+1} \qquad (t_\nu = t_0 - \nu)$$

for $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$. If one takes δ' (cf. (4.36a)) sufficiently great (independent, however, of t_0), it can be shown that, inasmuch as t_ν is in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$ (as stated before), the second member in the above inequality can be made arbitrarily small by taking the integer ν sufficiently great. Hence $p(t_0) = 0$. Now, t_0 is any point in S_0; hence $p(t) \equiv 0$ (for $v \geqq -c$). Thus ${}_1z(t) = z(t)$ for all $\delta_1 > \delta$ $(\geqq \delta')$. *The formula* (4.34) *is accordingly established.* That is the $\eta_i(t)$ of (4.33) satisfy (in the ordinary sense; that is, to infinitely many terms) the asymptotic relations

$$\eta_i(t) \backsim \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{i:\nu} e^{\nu t \frac{\log q}{s}} \qquad (i = 0, \ldots, k+1)$$

when t is in $W^{\varepsilon}_{u:-c}$. The $\eta_i(t)$ are independent of ε and possess the stated property for every positive ε, however small. It can be also proved that

$$|\eta_i(t)| \leqq \eta' \qquad (t \text{ in } W_{u:-c};\ i = 0, \ldots, k+1).$$

We collect the results proved in this section, together with the difference summation result from (T_4; p. 24) in the following Lemma.

Lemma 2. — *Consider the equation*

$$z(t+1) - z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} g(t) = H(t) \tag{4.37}$$

where $\mu = \eta/s$ $(s \geqq 1;\ \eta,\ s$ *integers*) *and*

$$g(t) = [t]^{*}_{k,s} \qquad (t \text{ in } W_{u:-c};\ c > 0) \tag{4.37a}$$

(cf. Definitions 1, 6 of § 2).

Case 1. — $\mu > 0$. *One then has a solution*

$$z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} [t]^{*}_{k,s} \qquad (t \text{ in } {}_1W_{u:-c})$$

(*cf. the italics subsequent to* (4.2b)).

Case 2. — $\mu = 0$. *There is then a solution*

$$z(t) = e^{rt \log q} [t]^{*}_{k+1,s} \qquad (t \text{ in } W_{u:-c}).$$

Case 3. — $\mu < 0$. *A solution, as given by* (4.4) *will be of the form*

$$z(t) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{rt \log q} e^{-\mu t \log q} [t]^{*}_{k,s} \qquad (\text{in } W_{u:-c}).$$

Analogous statements can be made when $W_{u:-c}$ *is replaced by* $W_{l:c}$ (¹).

(¹) With $\mu > 0$ the Lemma cannot be asserted in W.

5. **Formal solutions.** — Consider now the matrix solution ${}_0Z(t)$, satisfying (2.6) and with elements ${}_0z_{i,j}(t)$ of the form (2.16) (for t in W and $i, j = 1, \dots n$). It is observed that the determinant $|{}_0Z(t)|$ is a function satisfying the first order difference equation

$$|{}_0Z(t+1)| = |Z(t)|\,|B(t)|.$$

Thus, if $|{}_0Z(t)|$ is expressed in the form

$$e^{Q_1(t)+\dots+Q_n(t)}e^{(r_1+\dots+r_n)t\log q}d(t),$$

$d(t)$ will be of the form $[t]_{0,s}$. Let the series corresponding to the latter symbol be

$$\sum_{\nu=\gamma}^{\infty} d_\nu e^{\nu t\frac{\log q}{s}},$$

where γ $(\geqq 0)$ *is an integer and* $d_\gamma \neq 0$ [1]. In view of (2.16) and of the facts just stated, on writing ${}_0Z^{-1}(t) = (\bar{z}^0_{i,j}(t))$ one obtains

$$\bar{z}^0_{i,j}(t) = e^{-Q_j(t)}e^{-\left(r_j+\frac{\gamma}{s}\right)t\log q}[t]^*_{k_j,\,s_j}$$

$$(t \text{ in } W;\; i, j = 1, \dots n;\; \text{cf. Definition 6 (§ 2)}).$$

Accordingly, the functions of (3.15) are of the form

(5.1) $$ {}_0\bar{z}_{i,j}(t) = \bar{z}^0_{i,j}(t+1) = e^{-Q_j(t+1)}e^{-\left(r_j+\frac{\gamma}{s}\right)t\log q}[t]^*_{k_j,\,s_j}$$

for t in the region W' formed by translating the boundary of W to the left through the distance unity, in the direction of the axis of reals, W' satisfies the conditions laid down in the definition of W (cf. Definition 1 of § 2); hence in the sequel we will be justified in designating W' as W. In view of (2,13b) one may write (5.1) in the form

(5.1a) $$ {}_0z_{i,j}(t) = e^{-Q_j(t)}e^{-\left(r_j+\mu_j+\frac{\gamma}{s}\right)t\log q}[t]^*_{k_j,\,s_j}$$

$$(\mu_j = \eta_j/s_j;\; i, j = 1, \dots n;\; t \text{ in } W).$$

In consequence of (5.1a) formula (3.17a) can be written as

(5.2) $$c_\lambda(t) = \sum_{\lambda_1=1}^{n} \underset{\tau=t}{\mathfrak{S}}{}_h \Gamma^{h_1,\dots h_m}_{\lambda_1}(\tau)e^{-Q_\lambda(\tau)}e^{-(r_\lambda+\mu_\lambda+p')\tau\log q}{}_0I_{\lambda_1,\lambda}(\tau)$$

[1] This is a consequence of the fact that $S(t)$ (cf. (2.15)) is a formal matrix solution of (2.6) and that therefore formally $|S(t)|$ does not reduce to zero.

($c_\lambda(t)$ generally depends on $h_1, \dots h_{m,j}$) where

$$p' = \frac{\gamma}{s} + \frac{p}{s}, \quad {}_0\bar{I}_{\lambda_1,\lambda}(\tau) = [\tau]^*_{k_\lambda, s_\lambda} \qquad \text{(in } W\text{)}. \tag{5.2a}$$

On the other hand, in view of (2.16), from (3.17) one gets

$$ {}_h\eta_{h_1,\dots h_m, j}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda(t) e^{Q_\lambda(t)} e^{r_\lambda t \log q}\, {}_0I_{\lambda,j}(t) \tag{5.3}$$

with

$$ {}_0I_{\lambda,j}(t) = [t]^*_{k_\lambda, s_\lambda} \qquad \text{(in } W\text{)}. \tag{5.3a}$$

It is observed that for $\nu = 1$ (3.5a) reduces to (3.4). Whence

$$ {}_1\eta_{k_1^r, k_2^r, \dots k_m^r : j}(t) = {}_0z_{\lambda,j}(t) \qquad (\lambda = 1, \dots m; j = 1, \dots n), \tag{5.4}$$

with $k_\lambda^r = 1$ and $k_i^r = 0$ for $i \neq \lambda$, so that (2.16) implies

$$ {}_1\eta_{k_1^r, \dots k_m^r : \alpha}(\tau) = e^{k_1^r Q_1(\tau) + \dots + k_m^r Q_m(\tau)} e^{(r_1 k_1^r + \dots + r_m k_m^r)\tau \log q}[\tau]^* \tag{5.4a}$$

$$(\tau \text{ in } W;\ k_1^r + \dots + k_m^r = 1).$$

Here and in the sequel $[\tau]^*$ *will denote in a generic sense a function which in the stated region has the form* $[\tau]^*_{k,s}$ *where* k *and* s *are some integers* ($k \geqq 0$; $s > 0$). We have $[\tau]^*[\tau]^* = [\tau]^*$.

With the aid of (5.4a) the character of the ${}_2\Gamma_j^{h_1, \dots h_m}$ will be determined. By (3.9)

$$ {}_2\Gamma_j^{h_1,\dots h_m}(\tau) = \Sigma^{(4)}\, {}_jb_{i_1,\dots i_n}(\tau) \prod_{\alpha=1}^{n} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_{i_\alpha} = i_\alpha} \Sigma^{(2)} \prod_{r-1}^{i_\alpha} {}_{\nu_r}\eta_{k_1^r, \dots k_m^r : \alpha}(\tau) \tag{5.5}$$

(cf. (3.9a), (3.9b)). In consequence of (5.4a) and (3.9a)

$$\prod_{r=1}^{i_\alpha} \dots = e^{\delta_1 Q_1(\tau) + \dots + \delta_m Q_m(\tau)} e^{(\delta_1 r_1 + \dots + \delta_m r_m)\tau \log q}[\tau]^*$$

(τ in W). Applying to the above product (with $\delta_i = {}_\alpha\delta_i$) the symbol

$$\sum_{\nu_1 + \dots + \nu_{i_\alpha} = i_\alpha} \Sigma^{(2)} \qquad \text{(cf. (3.9a))}$$

we obtain a function F'_α which is of the same form (in W) as the product. One further infers

$$\prod_{\alpha=1}^{n} F_\alpha' = e^{[({}_1\delta_1 + \dots + {}_n\delta_1) Q_1(\tau) + \dots + ({}_1\delta_m + \dots + {}_n\delta_m) Q_m(\tau)]}$$

$$e^{[({}_1\delta_1 + \dots + {}_n\delta_1) r_1 + \dots + ({}_1\delta_m + \dots + {}_n\delta_m) r_m]\tau \log q}[\tau]^* \qquad \text{(in } W\text{)}.$$

By virtue of (3.9b) (cf. (3.9c)) the second member above may be written as

$$e^{h_1 Q_1(\tau)+\dots+h_m Q_m(\tau)} e^{(h_1 r_1+\dots+h_m r_m)\tau\log q}[\tau]^* \qquad \text{(in } W). \tag{5.6}$$

Now, the ${}_j b_{i_1,\dots i_n}(\tau)$ are representable by convergent series (2.19); hence they are of the form $[\tau]_{0,s}$ (in W). On the other hand $[\tau]_{0,s}[\tau]^* = [\tau]^*$; hence

$$ {}_j b_{i_1,\dots i_n}(\tau) \prod_{\alpha-1}^{n} F_\alpha' = \text{generic form of (5.6)}. \tag{5.6a}$$

The summation with the superscript $^{(4)}$ (cf. (3.9b) with $s = h = 2$) is not with respect to $h_1, \dots h_m$. Whence by (5.6a) and (5.5) it is concluded that

$$ {}_2\Gamma_j^{h_1,\dots h_m}(\tau) = e^{h_1 Q_1(\tau)+\dots+h_m Q_m(\tau)} e^{(h_1 r_1+\dots+h_m r_m)\tau\log q}[\tau]^* \tag{5.7}$$
$$(h_1 + \dots + h_m = 2;\ \tau \text{ in } W).$$

In consequence of (5.7) and (5.2a) the summand (that is, the expression subsequent to the difference-summation symbol) displayed in (5.2) (with $h = 2$) is of the form

$$ {}_2T_{\lambda_1,\lambda}^{h_1,\dots h_m}(\tau) = e^{Q(\tau)} e^{r\tau\log q}[\tau]^* \qquad (\tau \text{ in } W), \tag{5.8}$$

where, with $h_1 + \dots + h_m = 2$,

$$Q(\tau) = \frac{1}{2}\mu t^2 \log q, \quad \mu = h_1\mu_1 + \dots + h_m\mu_m - \mu_\lambda, \tag{5.8a}$$

$$r = h_1 r_1 + \dots + h_m r_m - (r_\lambda + \mu_\lambda + p'). \tag{5.8b}$$

At this stage it will be appropriate to investigate, more generally, the functions $Q(\tau)$, as given in (5.8a), when the integers h_i $(i = 1, \dots m)$ are subject to the conditions

$$h_1 + \dots + h_m = h \geqq 2 \qquad (h_1 \geqq 0, \dots, h_m \geqq 0). \tag{5.8c}$$

When $\lambda > m$ we pick out an h_α which is positive and write

$$\mu = [h_1\mu_1 + \dots + (h_\alpha - 1)\mu_\alpha + \dots + h_m\mu_m] + \mu_\alpha - \mu_\lambda .$$

Here $\alpha \leqq m$ so that in view of the Hypothesis A (§ 2) $\mu_\alpha - \mu_\lambda < 0$; on the other hand, $h_1 + \dots + (h_\alpha - 1) + \dots + h_m = h - 1 \geqq 1$ while by (3.2) $\mu_i < 0$ $(i = 1, \dots m)$; *whence* $\mu < 0$ *when* $\lambda > \mathrm{m}$. When $\lambda \leqq m$, while $h_\lambda > 0$ one may write

$$\mu = h_1\mu_1 + \dots + (h_\lambda - 1)\mu_\lambda + \dots + h_m\mu_m .$$

In view of (5.8c) $h_1 + \dots + (h_\lambda - 1) + \dots + h_m = h - 1 \geqq 1$ so that, by (3.2), $\mu < 0$ *when* $\lambda \leq \mathrm{m}$ *and* $\mathrm{h}_\lambda > 0$. In the case, when $\lambda \leqq m$ and $h_\lambda = 0$, but for some α ($\alpha < \lambda$) whe have $h_\alpha > 0$, we shall write

$$\mu = [h_1\mu_1 + \dots + (h_\alpha - 1)\mu_\alpha + \dots + h_m\mu_m] + (\mu_\alpha - \mu_\lambda).$$

By (2. 14) $\mu_\alpha - \mu_\lambda \leqq 0$ while, by (3.2) and since $h_1 + \dots + (h_\alpha - 1) + \dots + h_m \geq 1$, one has $[\dots] < 0$; thus, $\mu < 0$ *in this case as well.* In the remaining case, which may occur only when $\lambda < m$ (and $m > 1$), one has

$$\mu = -\mu_\lambda + [h_{\lambda+1}\mu_{\lambda+1} + \dots + h_m\mu_m], \tag{5.9}$$

where $h_{\lambda+1} + \dots + h_m = h \geqq 2$ ($h_i \geqq 0$ of course). *In this case* μ *may be positive or negative or zero* [1]. Thinking of λ as fixed we note that, inasmuch as the numbers $\mu_{\lambda+1}, \dots \mu_m$ are negative, there exists a number $h(\lambda)$ such that μ, as given by (5.9), is negative for $h = h(\lambda)$, $h(\lambda) + 1, \dots$. Such a statement can be made for $\lambda = 1, 2, \dots, m-1$. Accordingly, *it is clear that* μ (*given by* (5.9)) *is negative for all* $\mathrm{h} \geqq \bar{\mathrm{h}}$, *where* $\bar{\mathrm{h}} =$ *max*, $[\mathrm{h}(1), \mathrm{h}(2), \dots, \mathrm{h}(m-1)]$.

Thus the numbers μ, *as given by* (5.8a) *subject to the inequalitie* (5.8c), *will all be negative so long as* $\mathrm{h}_1 + \dots + \mathrm{h}_\mathrm{m} = \mathrm{h} \geqq \bar{\mathrm{h}}$, *where* $\bar{\mathrm{h}}$ *is sufficiently great.*

Returning now to the function (5.8) (cf. (5.8a), (5.8b) with $h_1 + \dots + h_m = 2$) and applying Lemma 2 (§ 4) we obtain

$$\underset{\tau=t}{\mathfrak{S}}\, {}_2T^{h_1,\dots h_m}_{\lambda_1,\lambda}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{(r+\delta_\lambda)t \log q}[t]^* \qquad \text{(cf. (5.8a), (5.8b))} \tag{5.10}$$

for t in ${}_1W_{u:-c}$ (italics subsequent to (4.2b)), when $\mu > 0$, and for t in $W_{u:-c}$ when $\mu \leqq 0$; $\delta_\lambda = 0$ when $\mu \geqq 0$ and $\delta_\lambda = -\mu$ when $\mu < 0$. In view of (5.2) and (5.10) the functions $c_\lambda(t)$ (with $h = 2$) are given by

$$c_\lambda(t) = \text{generic form of (5.10)} \qquad (h = 2). \tag{5.11}$$

Accordingly (cf. (5.3), (5.3a), (5.8a), (5.8b))

$$\begin{aligned} c_\lambda(t) e^{Q_\lambda(t)} e^{r_\lambda t \log q}\, {}_0I_{\lambda,j}(t) &= e^{h_1 Q_1(t) + \dots + h_m Q_m(t)} \\ &\cdot e^{[h_1 r_1 + \dots + h_m r_m - p']t \log q} e^{(-\mu_\lambda + \delta_\lambda)t \log q}[t]^* \end{aligned} \tag{5.12}$$

(t in $W_{u:-c'}$ or $W_{u:-c}$, as the case may be). When μ (cf. (5.8a)) is ≥ 0 necessarily $\lambda < m$ (and μ is of the form (5.9)); one then has $-\mu_\lambda > 0$ (by (3.2)), $\delta_\lambda = 0$ and

$$e^{(-\mu_\lambda + \delta_\lambda)t \log q}[t]^* = e^{-\mu_{m-1} t \log q}[t]^* \qquad (-\mu_{m-1} > 0) \tag{5.13}$$

[1] Examples can be given when either of these possibilities actually takes place.

(for t in a stated region). *When* $\mu < 0$ *we have*, as stated subsequent to (5.10),

$$\delta_\lambda = -\mu = -h_1\mu_1 - \ldots - h_m\mu_m + \mu_\lambda$$

and

$$\text{(5.13a)} \qquad e^{(-\mu_\lambda+\delta_\lambda)t\log q}[t]^* = e^{(-h_1\mu_1-\ldots-h_m\mu_m)t\log q}[t]^*.$$

In view of (5.13) and (5.13a) and in consequence of (3.2) there exists *a rational number* p_2, *positive and independent of* λ, *so that for* $\lambda = 1, 2, \ldots n$

$$\text{(5.13b)} \qquad e^{(-\mu_\lambda+\delta_\lambda)t\log q}[t]^* = e^{p_2 t\log q}[t]^*$$

(t in stated region; $h_1 + \ldots + h_m = 2$; $h_1 \geqq 0, \ldots, h_m \geqq 0$).

Thus the function of (5.12) has the form

$$\text{(5.14)} \qquad e^{h_1Q_1(t)+\ldots+h_mQ_m(t)}e^{(h_1r_1+\ldots+h_mr_m)t\log q}e^{(p_2-p')t\log q}[t]^*$$

$$(t \text{ in } {}_1W_{u:-c'} \text{ or } W_{u:-c};\ h_1 + \ldots + h_m = 2).$$

By (5.3) (with $h = 2$)

$$\text{(5.15)} \qquad {}_2\eta_{h_1,\ldots h_m}(t) = \text{generic form of (5.14)} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

for t in ${}_1W_{u:-c'}$, if there are positive numbers μ (cf. (5.8a); $h_1 + \ldots + h_m = 2$), and for t in $W_{u:-c}$ if all the μ (defined as stated) are ≤ 0. In the latter case, the form (5.15) will be maintained in W, as well.

Relations (5.4a), (5.15) will be joined in a single one

$$\text{(5.16)} \qquad {}_{\nu_r}\eta_{k_1^r,\ldots k_m^r:\alpha}(\tau) = e^{k_1^rQ_1(\tau)+\ldots+k_m^rQ_m(\tau)}e^{(r_1k_1^r+\ldots+r_mk_m^r)\tau\log q}$$

$$\cdot e^{(\nu_r-1)(p_2-p')\tau\log q}[\tau]^* \qquad (\tau \text{ in } W_{u:-c'} \text{ or } W_{u:-c}),$$

$$\text{(5.16a)} \qquad k_2^r + \ldots + k_m^r = \nu_r \qquad (k_1^r \geqq 0, \ldots, k_m^r \geqq 0), \qquad \nu_r = 1,\ 2.$$

We shall now establish the form of the ${}_3\Gamma_j^{h_1,\ldots h_m}(\tau)$ (cf. (3.9)). In consequence of (3.9a) and (5.16)

$$\text{(5.17)} \qquad \prod_{r=1}^{i_\alpha} {}_{\nu_r}\eta_{k_1^r,\ldots k_m^r:\alpha}(\tau) = e^{\delta_1Q_1+\ldots+\delta_mQ_m(\tau)}e^{(\delta_1r_1+\ldots+\delta_mr_m)\tau\log q}$$

$$\cdot e^{(\gamma_\alpha-i_\alpha)(p_2-p')\tau\log q}[\tau]^* \qquad (\delta_i = {}_\alpha\delta_i)$$

since, by virtue of the relation $\nu_1 + \ldots + \nu_{i_\alpha} = \gamma_\alpha$ (displayed in (3.9)),

$$\text{(5.17a)} \qquad \sum_{r=1}^{i_\alpha} (\nu_r - 1) = \gamma_\alpha - i_\alpha.$$

With the summation symbol specified by (3.9a) the function

$$F_\alpha' = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{i_\alpha}=i_\alpha} \Sigma^{(2)} \left(\prod_{r=1}^{i_\alpha} \ldots\right)$$

is seen to possess the generic form of (5.17). The product with respect to α ($\alpha = 1, \dots n$) will accordingly possess the form

$$\prod_{\alpha=1}^{n} F_\alpha' = e^{({}_1\delta_1 + \dots + {}_n\delta_1) Q_1(\tau) + \dots + ({}_1\delta_m + \dots + {}_n\delta_m) Q_m(\tau)}$$

$$\cdot e^{[({}_1\delta_1 + \dots + {}_n\delta_1) r_1 + \dots + ({}_1\delta_m + \dots + {}_n\delta_m) r_m]\tau \log q} e^{\gamma'(p_2 - p')\tau \log q}[\tau]^*$$

where

$$\gamma' = \sum_{\alpha=1}^{n} (\gamma_\alpha - i_\alpha).$$

Now, as indicated in (3.9b) (with $h = 3$), $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 3$ and $i_1 + \dots + i_n = s$ ($s = 2, 3$); thus $\gamma' = 3 - s$. Whence, by (3.9c),

$$\text{(5.18)} \quad \prod_{\alpha=1}^{n} F_\alpha' = e^{h_1 Q_1(\tau) + \dots + h_m Q_m(\tau)} e^{(h_1 r_1 + \dots + h_m r_m)\tau \log q} e^{(3-s)(p_2 - p')\tau \log q}[\tau]^*$$

$$= e^{h_1 Q_1(\tau) + \dots} e^{(h_1 r_1 + \dots)\tau \log q} e^{k'\tau \log q}[\tau]^*,$$

where k' is independent of s ($s = 2, 3$) and

$$\text{(5.18a)} \qquad k' = 0 \quad (\text{when } p_2 - p' \geqq 0),\ k' = p_2 - p' \ (\text{when } p_2 - p' > 0).$$

Hence, on tåking account of (3.9) and (3.9b), it is deduced that

$$\text{(5.19)} \qquad {}_3\Gamma_j^{h_1, \dots h_m}(\tau) = e^{h_1 Q_1(\tau) + \dots + h_m Q_m(\tau)} e^{(h_1 r_1 + \dots + h_m r_m)\tau \log q}$$

$$\cdot e^{k'\tau \log q}[\tau]^* \qquad (\tau \text{ in } {}_1W_{u:-c'} \text{ or } W_{u:-c})$$

(cf. (5.18a)). Thus, for $h = 3$, the summand displayed in (5.2) is of the form

$$\text{(5.20)} \qquad {}_3T_{\lambda_1, \lambda}^{h_1, \dots h_m}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{r\tau \log q}[\tau]^* \qquad (\tau \text{ in } {}_1W_{u:-c'} \text{ or } W_{u:-c}),$$

where

$$\text{(5.20a)} \quad \mu = h_1\mu_1 + \dots + h_m\mu_m - \mu_\lambda, \quad r = h_1 r_1 + \dots + h_m r_m - r_\lambda - (\mu_\lambda + p') + k'$$

with $h_1 + \dots + h_m = 3$.

In consequence of (5.20) with the aid of Lemma 2 (§ 4) we obtain

$$\text{(5.21)} \qquad \underset{\tau - t}{\mathfrak{S}}\ {}_3T_{\lambda_1, \lambda}^{h_1, \dots h_m}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\mu t^2 \log q} e^{(r + \delta_\lambda')t \log q}[\tau]^* \qquad (\text{cf. (5.20a)})$$

for t in ${}_1W_{u:-c^{(2)}}$ ($0 < c^{(2)} < c'$; $c' - c^{(2)}$ however small; the right boundary of ${}_1W_{u:-c^{(2)}}$ to the left from the corresponding boundary of ${}_1W_{u:-c'}$ a distance which may be taken less than unity) [1]; here

$$\text{(5.21a)} \qquad \delta_\lambda' = 0 \quad (\text{for } \mu \geqq 0),\ \delta_\lambda' = -\mu \ (\text{for } \mu < 0; \text{ cf. (5.20a)}).$$

[1] (5.21) will hold in a more extensive region, say, ${}_1W_{u:-c'}$ or $W_{u:-c}$ under certain conditions. When $\mu > 0$ we have to use the difference summation methods (involving contour integrations) given in (T_4), obtaining results of stated character in a subset (as specified subsequent to (5.21)) of ${}_1W_{u:-c}$. For details see (T_4).

By virtue of (5.2) (with $h = 3$) and (5.21) it is inferred that

(5.22) $$c_\lambda(t) = \text{generic form of (5.21)} \qquad (h = 3).$$

In consequence of (5.3a) and (5.22) (cf. (5.20a))

(5.23) $$c_\lambda(t) e^{Q_\lambda(t)} e^{r_\lambda t \log q} {}_0I_{\lambda, j}(t) = e^{h_1 Q_1(t) + \dots + h_m Q_m(t)} \cdot e^{(h_1 r_1 + \dots + h_m r_m - p' + k') t \log q} e^{(-\mu_\lambda + \delta_\lambda') t \log q} [t]^* \qquad (\text{in } {}_1W_{u:-c^{(2)}}).$$

When $\mu \geqq 0$ (5.13) will hold with δ_λ replaced by δ_λ'. When $\mu < 0$ we have (5.13a) (with δ_λ replaced by δ_λ') subject to the condition $h_1 + \dots + h_m = 3$. In connection with (5.13) and (5.13a) (with $h_1 + \dots + h_m = 2$) we have previously defined p_2. Since now (5.13a) (with δ_λ') is subject to the condition $h_1 + \dots + h_m = 3$ (5.13b) (with δ_λ replaced by δ_λ' and $h_1 + \dots + h_m = 3$) could be asserted for t in ${}_1W_{u:-c^{(2)}}$, with p_2 replaced by a rational number $p_3 \geqq p_2$. Thus

(5.23a) $$e^{(-\mu_\lambda + \delta_\lambda') t \log q} [t]^* = e^{p_3 t \log q} [t]^* = e^{p_2 t \log q} [t]^* \qquad (\text{in } W_{u:-c^{(2)}}).$$

Substituting (5.23a) in (5.23) and on taking account of (5.3) (with $h = 3$) we infer that

(5.24) $${}_3\eta_{h_1, \dots h_m : j}(t) = e^{h_1 Q_1(t) + \dots + h_- Q_m(t)} e^{(h_1 r_1 + \dots + h_m r_m) t \log q} \cdot e^{(p_2 - p' + k') t \log q} [t]^* \qquad (\text{in } W_{u:-c^{(2)}})$$

for $h_1 + \dots + h_m = 3$ and $j = 1, \dots n$. By (5.18a)

(5.24a) $$p_2 - p' + k' = \begin{cases} (p_2 - p') & (\text{when } p_2 - p' \geqq 0), \\ 2(p_2 - p') & (\text{when } p_2 - p' > 0). \end{cases}$$

Hence, if $p_2 - p' < 0$, (5.16) *will hold for* $\nu_r = 1, 2, 3$ *and for* t *in* ${}_1W_{u:-c^{(2)}}$.

To abbreviate writing we shall put

(5.25) $$e^{h_1 Q_1(\tau) + \dots + h_m Q_m(\tau)} e^{(r_1 h_1 + \dots + r_m h_m) \tau \log q} = G_{h_1, \dots h_m}(\tau).$$

Suppose now that, for $\nu_r = 1, 2, \dots \varphi$ $(\geqq 3)$

(5.26) $${}_{\nu_r}\eta_{k_1^r, \dots k_m^r : \alpha}(\tau) = G_{k_1^r, \dots k_m^r}(\tau) e^{(\nu_r - 1)(p_2 - p') \tau \log q} [\tau]^*$$

when $p_2 - p' < 0$ *and*

(5.26a) $${}_{\nu_r}\eta_{k_1^r, \dots k_m^r : \alpha}(\tau) = G_{k_1^r, \dots k_m^r}(\tau) e^{(p_2 - p') \tau \log q} [\tau]^*$$

when $p_2 - p' \geqq 0$. *In* (5.26a) *the factor*

(5.26b) $$e^{(p_2 - p') \tau \log q}$$

is replaced by unity for $\nu_r = 1$. *Assume, moreover, that for* $h = 2, 3, \ldots \varphi$

(5.27) $$ {}_h\Gamma_j^{h_1,\ldots h_m}(\tau) = G_{h_1,\ldots h_m}(\tau) e^{(h-2)(p_2-p')\tau \log q}[\tau]^* \qquad \text{(cf. (5.25))}$$

when $p_2 - p' < 0$ *and*

(5.27a) $$ {}_h\Gamma_j^{h_1,\ldots h_m}(\tau) = G_{h_1,\ldots h_m}(\tau)\,[\tau]^* \qquad (\text{when } p_2 - p' \geqq 0).$$

The relations (5.26),... (5.27a) are supposed to hold in a suitable region ${}_1W_{u:-\bar c}$ (where $0 < \bar c \leqq c^{(2)}$).

The validity of these relations has been previously established for $\varphi = 3$ (that is, for $\nu_r = 1, 2, 3$ and $h = 2, 3$).

First (5.27) will be proved for $h = \varphi + 1$ when $p_2 - p_1 < 0$. Now ${}_{\varphi+1}\Gamma_j^{h_1,\ldots h_m}$, as given by (3.9), depends only on the ${}_\nu\eta_{k_1,\ldots k_m:\alpha}(\tau)$ for $\nu = 1, 2, \ldots \varphi$. The form of all the latter functions is known by (5.26). By (3.9a) and (5.26)

$$\prod_{r-1}^{i_\alpha} \ldots = G_{\delta_1,\ldots \delta_m}(\tau) e^{\nu'(p_2-p')\tau \log q}[\tau]^* \qquad (\delta_i = {}_\alpha\delta_i)$$

where, in view of the relation $\nu_1 + \ldots + \nu_{i_\alpha} = \gamma_i$, we have

$$\nu' = \sum_{r-1}^{i_\alpha} (\nu_r - 1) = \gamma_i - i_\alpha .$$

Hence the expression in (3.9) subsequent to the product-symbol with respect to α has the above generic form. Accordingly

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \ldots = G_{{}_1\delta_1+\ldots+{}_n\delta_1,\ldots,{}_1\delta_m+\ldots+{}_n\delta_m}(\tau)$$
$$\cdot\, e^{[(\gamma_1+\ldots+\gamma_n)-(i_1+\ldots+i_n)](p_2-p')\tau \log q}[\tau]^*.$$

In view of relations displayed in (3.9c) and (3.9b) (where $h = \varphi + 1$) the above implies that

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \ldots = G_{h_1,\ldots h_m}(\tau) e^{(\varphi+1-s)(p_2-p')\tau \log q}[\tau]^*$$
$$= G_{h_1,\ldots h_m}(\tau) e^{(\varphi-1)(p_2-p')\tau \log q}[\tau]^*$$

since $p_2 - p' < 0$ and $2 \leqq s \leqq h = \varphi + 1$ (cf. (3.9b). Hence by (3.9) and (3.9b) (with $h = \varphi + 1$)

(5.28) $$ {}_{\varphi+1}\Gamma_j^{h_1,\ldots h_m}(\tau) = G_{h_1,\ldots h_m}(\tau) e^{(\varphi-1)(p_2-p')\tau \log q}[\tau]^*.$$

This establishes the truth of (5.27) for $h = \varphi + 1$ (when $p_2 - p' < 0$).

When $p_2 - p' \geqq 0$, in consequence of the remark with reference to (5.26b) we might as well write

(5.29) $$ {}_{\nu_r}\eta_{k_1^r,\ldots k_m^r:\alpha}(\tau) = G_{k_1^r,\ldots k_m^r}(\tau)\,[\tau]^* \qquad (\nu_r = 1, \ldots \varphi).$$

Repeating the steps used in establishing the truth of (5.27) (for $h = \varphi + 1$), with $p_2 - p'$ in the discussion replaced by zero, we obtain

$$(5.30) \qquad {}_{\varphi+1}\Gamma_j^{h_1,\dots h_m}(\tau) = G_{h_1,\dots h_m}(\tau)\,[\tau]^*;$$

this, however, establishes (5.27a) for $h = \varphi + 1$ (when $p_2 - p' \geqq 0$).

We shall now compute ${}_{\varphi+1}\eta_{k_1^r,\dots k_m^r;\lambda}(\tau)$ when $p_2 - p' < 0$. In view of (5.28) the summand displayed in (5.2) (with $h = \varphi + 1$) will be of the form

$$ {}_{\varphi+1}T_{\lambda_1,\lambda}^{h_1,\dots h_m}(\tau) = G_{h_1,\dots h_m}(\tau)e^{-Q_\lambda(\tau) - r_\lambda \tau \log q} \cdot e^{(-\mu_\lambda - p')\tau \log q} e^{(\varphi-1)(p_2-p')\tau\log q}[\tau]^*.$$

Using Lemma 2 (§ 4) one obtains

$$(5.31) \qquad \underset{\tau-t}{S}\, {}_{\varphi+1}T_{\lambda_1,\lambda}^{h_1,\dots h_m}(\tau) = G_{h_1,\dots h_m}(t)e^{-Q_\lambda(t) - r_\lambda t\log q} \cdot e^{[(\varphi-1)(p_2-p')-p']t\log q} e^{[-\mu_\lambda + \bar{\delta}_\lambda]t\log q}[t]^*$$

where, with μ denoting $h_1\mu_1 + \dots + h_m\mu_m - \mu_\lambda$

$$(5.31\text{a}) \qquad \bar{\delta}_\lambda = 0 \quad (\text{when } \mu \geqq 0), \quad \bar{\delta}_\lambda = -h_1\mu_1 - \dots - h_m\mu_m + \mu_\lambda \ (\text{when } \mu > 0).$$

When $\mu \geqq 0$, necessarily $\lambda < m$ and

$$(5.31\text{b}) \qquad e^{(-\mu_\lambda + \bar{\delta}_\lambda)t\log q} = e^{\ \mu_{m-1} t\log q}[t]^* \qquad (-\mu_{m-1} > 0).$$

When $\mu < 0$ one has

$$(5.31\text{c}) \qquad e^{(-\mu_\lambda + \bar{\delta}_\lambda)t\log q} = e^{(-h_1\mu_1 - \dots - h_m\mu_m)t\log q},$$

where $h_1 + \dots + h_m = \varphi + 1 > 2$. Recalling that $\mu_1 < \dots < \mu_m < 0$ and that p_2 was defined subsequent to (5.13a) ([1]), relations (5.31b), (5.31c) can be joined in a single formula

$$e^{(-\mu_\lambda + \bar{\delta}_\lambda)t\log q} = e^{\bar{p}\,t\log q}[t]^* \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n),$$

where $\bar{p}$ is rational, independent of λ and $\bar{p} \geq p_2$. Thus

$$(5.32) \qquad e^{(-\mu_\lambda + \bar{\delta}_\lambda)t\log q} = e^{p_2 t\log q}[t]^* \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n).$$

By (5.32) and (5.31)

$$(5.33) \qquad \underset{\tau-t}{S}\, {}_{\varphi+1}T_{\lambda_1,\lambda}^{h_1,\dots h_m}(\tau) = G_{h_1,\dots h_m}(t)e^{\ Q_\lambda(t) - r_\lambda t\log q} \cdot e^{\varphi\circ(p_2-p')t\log q}[t]^* \qquad (t \text{ in } {}_1W_{u;-\tilde{c}});$$

([1]) In the definition of p_2 in (5.13a) we have $h_1 + \dots + h_m = 2$.

here ${}_tW_{u:-\tilde{c}}$ may possibly have to be interior to ${}_tW_{u:-c}$ $(0 < \tilde{c} \leqq \bar{c})$. By virtue of (5.2) (with $h = \varphi + 1$) $c_\lambda(t)$ has the generic form of the second member in (5.33). By (5.3) (with $h = \varphi + 1$) and (5.3a) it is accordingly inferred that, with $p_2 - p' < 0$,

$$(5.34) \qquad {}_{\varphi+1}\eta_{h_1,\ldots h_m:j}(t) = G_{h_1,\ldots h_m}(t) e^{\varphi\cdot(p_2-p')t\log q}[t]^*$$

(t in ${}_tW_{u:-\tilde{c}}$) This, however, implies that (5.26) holds for $\nu_r = \varphi + 1$ (when $p_2 - p' < 0$).

It remains to compute ${}_{\varphi+1}\eta_{k_1^r,\ldots k_m^r:\alpha}(\tau)$ when $p_2 - p' \geqq 0$. In consequence of (5.30)

$${}_{\varphi+1}T^{h_1,\ldots h_m}_{\lambda_1,\lambda}(\tau) = G_{h_1,\ldots,h_m}(\tau) e^{-Q_\lambda(\tau) - r_\lambda \tau \log q} e^{(-\mu_\lambda - p')\tau \log q}[\tau]^* \qquad (\text{in } {}_tW_{u:-\tilde{c}}).$$

By virtue of Lemma 2 (§ 4) it is deduced that

$$\underset{\tau=t}{\mathcal{S}}\; {}_{\varphi+1}T^{h_1,\ldots h_m}_{\lambda_1,\lambda}(\tau) = G_{h_1,\ldots h_m}(t) e^{-Q_\lambda(t) - r_\lambda t \log q} \cdot e^{-p' t \log q} e^{(-\mu_\lambda + \bar{\varepsilon}_\lambda) t \log q}[t]^* \qquad (\text{in } {}_tW_{u:-\tilde{c}}).$$

In consequence of (5.32) the above difference sum has the generic form

$$G_{h_1,\ldots h_m}(t) e^{-Q_\lambda(t) - r_\lambda t \log q} e^{(p_2-p')t\log q}[t]^*$$

(in ${}_tW_{u:-\tilde{c}}$). With the aid of (5.3) (with $h = \varphi + 1$) it is accordingly inferred that

$$(5.35) \qquad {}_{\varphi+1}\eta_{h_1,\ldots h_m:j}(t) = G_{h_1,\ldots h_m}(t) e^{(p_2-p')t\log q}[t]^*$$

in ${}_tW_{u:-\tilde{c}}$. This establishes (5.26a) for $\nu_r = \varphi + 1$ (when $p_2 - p' \geqq 0$).

Accordingly it has been established by induction that formulas (5.26),... (5.27a) hold for all $\varphi \geqq 3$ (that is, for $\nu_r = 1, 2, \ldots$ and for $h = 2, 3, \ldots$) in a region $W^{(\varphi)}$ of the form $W_{u:-c^{(\varphi)}}$ $(c^{(\varphi)} > 0)$, where

$$(5.36) \qquad W^{(3)} > W^{(4)} > \ldots > W^{(\varphi)} > W^{(\varphi+1)} > \ldots$$

and $c^{(2)} \geqq c^{(3)} \geqq \ldots \geqq c^{(\varphi)} \geqq c^{(\varphi+1)} \geqq \ldots$. The right boundary of $W^{(\varphi+1)}$ has the same direction as the corresponding boundary [1] of $W^{(\varphi)}$ but it may be to the left a distance d_φ $(0 \leqq d_\varphi < 1)$, where d_φ cannot be always, taken arbitrarily small. On the other hand, the lower boundary of $W^{(\varphi+1)}$ is a portion of the line $It = v = -c^{(\varphi+1)}$, in the fourth quadrant, and can be taken arbitrarily close to the corresponding boundary of $W^{(\varphi)}$.

---

[1] These boundaries are portions of lines in the second quadrant with slope $a_2 = (-\bar{q} - |\log q|)/\log q$.

It is desirable, however, to establish the character of the ${}_{\nu}\eta_{k_1,\dots k_m:\alpha}(t)$ ($\nu = 1, 2, \dots$; $\alpha = 1, \dots j$; $k_1 + \dots + k_m = \nu$) in a region independent of ν. This can be achieved with the aid of the remark regarding μ, as given by (5.8a), made in italics preceding (5.10). In consequence of what has been established above it can be asserted that relations (5.26),... (5.27a) *hold for*

$$\nu_r = 1, 2, \dots, \bar{h} - 1, \quad h = 2, 8, \dots, \bar{h} - 1 \tag{5.37}$$

for t *in a region*

$$W^{(h-1)} = {}_1W_{u:-\bar{c}} \qquad (0 < \bar{c} = c^{(h-1)} \leqq c), \tag{5.37a}$$

where $\bar{h}$ is the number referred to preceding to (5.10). *Henceforth* ${}_1W_{u:-\bar{c}}$ *will designate the region* (5.37a). With the aid of the stated relations and by repeated applications of formulas (5.3) (with (5.2)) and (3.9) we determine in succession the forms of the

$${}_{\nu}\eta_{k_1,\dots k_m:\alpha}(t), \quad {}_h\Gamma_j^{h_1,\dots h_m}(t)$$

($\nu \geqq \bar{h}$, $h \geqq \bar{h}$) for t in ${}_1W_{u:-\bar{c}}$. It is somewhat obvious (and the details of the proof will therefore be omitted) that these forms will be as in (5.26),... (5.27a) (for $\varphi = 3, 4, \dots$); however, *for* $\nu_r \geqq \bar{h}$, *in general it will be possible to assert the truth of* (5.26) *and* (5.26a) (*in* ${}_1W_{u:-\bar{c}}$) *with the second members modified by the introduction of a factor*

$$\exp.\,[p'(\nu_r;\, k_1^r, \dots k_m^r)\tau \log q], \tag{5.38}$$

where $p'(\nu_r;\, k_1^r, \dots k_m^r)$ *is a suitable rational number* $\geqq 0$. A similar statement can be made with respect to (5.27) and (5.27a). The determination of these numbers can be carried out. This, however, is not essential for our purposes and hence will not be done.

LEMMA 3. — *Consider the non-linear difference system* (2.18) *which is obtained from the* q-*difference system* (A) (§ 1) *by the transformation* (2.5). *We recall the statements in connection with* (2.15), (2.15a) *and* (2.14). *Assume the conditions of Hypothesis A* (*cf.* (3.2)). *The system* (2.18) *will possess a formal solution consisting of the* n *series*

$$z_j(t) = {}_1z_j(t) + {}_2z_j(t) + \dots \qquad (j = 1, \dots n), \tag{5.39}$$

where the ${}_1z_j(t)$ ($j = 1, \dots n$) *are given by* (3.4) *and constitute a solution of the linear problem* (2.6). *Moreover,*

$${}_{\nu}z_j(t) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = \nu} p_1^{k_1}(t) p_2^{k_2}(t), \dots p_m^{k_m}(t)\, {}_{\nu}\eta_{k_2, k_2, \dots k_m:j}(t), \tag{5.39a}$$

where the $p_i(t)$ ($i = 1, \dots m$) *are arbitrary functions of period unity. In* (5.39a) *the* ${}_{\nu}\eta_{k_1, k_2, \ldots k_m : j}(t)$ *are function of the form*

$$(5.40)\qquad {}_{\nu}\eta_{k_1, k_2, \ldots k_m : j}(t) = e^{\frac{1}{2}(k_1\mu_1 + \ldots + k_m\mu_m)t^2 \log q} \cdot e^{(k_1 r_1 + \ldots + k_m r_m)t \log q} e^{(\nu - 1)(p_2 \quad p')t \log q} [t]^*_{k(1), s(1)}$$

($\nu = 1, 2, \ldots$; $k_1 + \ldots + k_m = \nu$; $j = 1, 2, \ldots n$; $p_2 - p'$ *rational* (cf. (5.2a))) [1]

when $p_2 - p' < 0$. *When* $p_2 - p' \geqq 0$

$$(5.40a)\qquad {}_{\nu}\eta_{k_1, \ldots k_m : j}(t) = e^{\frac{1}{2}(k_1\mu_1 + \ldots + k_m\mu_m)t^2 \log q} \cdot e^{(k_1 r_1 + \ldots + k_m r_m)t \log q} e^{(p_2 - p')t \log q} [t]^*_{k(1), s(1)}$$

where, for $\nu = 1$, *the factor* exp. $[(p_2 - p')t \log q]$ *may be replaced by unity. The relations* (5.40), (5.40a) *are asserted for* t *in a region* $W_{u:-c}$ (*cf. Definition 1* (§ 2)), *with the right boundary* [2] *sufficiently far to the left. The symbol* $[t]^*_{k(1), s(1)}$ (*in* $W_{u:-c}$) *has the meaning given by Definition 6* (§ 2).

NOTE. — The integers $k(1)$, $s(1)$ and the region $W_{u:-c}$ can be taken independent of ν, $k_1, \ldots k_m$, j. Let $\bar{h}$ be the number referred to in italics preceding (5.10); for $\nu \geqq \bar{h}$ one may introduce a factor in the second members of (5.40) of the form exp. $[p_{\nu; k_1, \ldots k_m} t \log q / s(1)]$, where $p_{\nu; k_1, \ldots k_m}$ is a suitable non-negative integer. *The results of the Lemma will hold in a region* $W_{1:c}$ (*Definition 6* (§ 2)) *as well.*

6. **The transformed system.** — Whenever the series $z_j(t)$ ($j = 1, \ldots n$), as given by (5.39), all converge in a region $W_{u:-c}$ they will constitute an « actual » solution of the system (2.18). Convergence, if at all, could take place only if the periodic functions, involved, satisfy suitable inequalities. We shall not undertake to investigate under what conditions the series (5.39) might converge. Instead *it will be shown how « actual » solutions of the system* (2.18) *can be constructed so as to be asymptotic (in a sense to be specified later) to the formal series* (5.39). As will be seen from the developments given in the sequel, this procedure would furnish a solution not only to our problem, as formulated, but also to a more general problem-a problem for which, in general, the series (5.39) will not constitute an « actual » solution, even if convergent in a region $W_{u:-c}$.

[1] p_2 is the number referred to subsequent to (5.13a).

[2] This is a portion, lying in the second quadrant, of a line with the slope $(-\bar{q} - |\log q|)/\log q$.

We shall proceed as follows. Consider the transformation

(6.1) $$z_j(t) = Z_j(t) + \rho_j(t) \qquad (j = 1, \dots n)$$

with

(6.2) $$Z_j(t) = {}_1z_j(t) + {}_2z_j(t) + \dots + {}_{n'-1}z_j(t);$$

here ${}_1z_j(t), \dots, {}_{n'-1}z_j(t)$ *are functions given in* (5.39a); n' is a fixed positive integer and may be taken as great as desired. This transformation will be applied to the system (2.18).

It has been previously assumed that the $p_i(t)$ are analytic for $It = v \geqq -c$ $(t \neq \infty)$; We have

(6.3) $$|p_i(t)| < h' f_i(v) \qquad (v \geqq -c;\ i = 1, 2, \dots m).$$

On the other hand, by Definition 6 (§ 2)

(6.4) $$|[t]^*_{k(1), s(1)}| \leqq \text{constant}.\ |t|^{k(1)}$$

(t in $W_{u:-c}$), provided $W_{u:-c}$ is taken not to include a neighborhood of $t = 0$ [1]. In view of (5.40), (5.40a), (6.4) and (6.3)

(6.5) $$|p_1^{k_1}(t) p_2^{k_2}(t) \dots p_m^{k_m}(t)_\nu \eta_{k_1, \dots k_m; j}(t)| < (h')^\nu {}_\nu H_{k_1, \dots k_m}(t)$$
$$\cdot |e^{c_\nu (p_2 - p') t \log q}|\ |t|^{k(1)} q^{(\nu)} \qquad (\text{in } W_{u:-c}),$$

where

(6.5a) $$c_\nu = \nu - 1 \qquad (\text{when } p_2 - p' < 0);$$
$$c_1 = 0, \quad c_\nu = 1 \qquad (\nu = 2, 3, \dots;\ \text{when } p_2 - p' \geqq 0)$$

and

(6.6) $${}_\nu H_{k_1, \dots k_m}(t) = \left| \left[e^{\left(\frac{1}{2}\mu_1 t^2 + r_1 t\right)\log q} f_1(v) \right]^{k_1} \dots \right.$$
$$\left. \dots \left[e^{\left(\frac{1}{2}\mu_m t^2 + r_m t\right)\log q} f_m(v) \right]^{k_m} \right|.$$

DEFINITION 7. — *Let* $p_1(t), \dots, p_m(t)$ *be analytic for* $It = v \geqq -c$ $(t \neq \infty)$, *of period unity. If the* $f_i(v)$ *in* (6.3) *can be chosen so that*

$$e^{\frac{1}{2}\mu_i t^2 \log q} f_i(v) \backsim 0 \qquad (i = 1, \dots m;\ t \text{ in } W_{u:-c}),$$

$p_1(t), \dots, p_m(t)$ *will be termed proper* (*in* $W_{u:-c}$).

Since $\mu_1, \dots \mu_m$ are negative, in consequence of (6.6) it is easy to infer that *the periodic functions form a proper set when the* $f_i(v)$ *are constants*; more generally, *the* $f_i(v)$ *may be allowed to approach infinity* (*as* $v \to +\infty$),

[1] The latter condition is not essential. If it does not hold one may replace t in (6.4) by $|t + a|$, where a is a suitable constant.

but not too fast, in order that the $p_i(t)$ *should form a proper set.* The variety of functions $p_i(t)$ forming proper sets is extensive.

In consequence of (5.39a) and (6.5) we have

$$|{}_{\nu}z_j(t)| < (h')^{\nu} h_{\nu}' \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n'-1; \text{ in } W_{u:-c}),$$

where h_{ν}' could be considered independent of h', provided the $p_i(t)$ form a proper set. Thus, assuming h' sufficiently small we observe that $Z_j(t)$, as given by (6.2), satisfies an inequality (¹)

$$(6.7) \qquad |Z_j(t)| \leq \rho' \qquad (j = 1, \dots n; \text{ in } W_{u:-c})$$

with

$$(6.7a) \qquad 0 < \rho' < \rho \qquad (\rho \text{ from } (1.3)).$$

Moreover,

$$(6.7b) \qquad Z_j(t) \backsim 0 \qquad (j = 1, \dots n; \text{ in } W_{u:-c}).$$

Substituting (6.1) in (2.18) we obtain

$$(6.8) \qquad e^{\frac{p}{s} t \log q} \rho_j(t+1) - \lambda_j(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) = - e^{\frac{p}{s} t \log q} Z_j(t+1)$$
$$+ \lambda_j(t, Z_1(t), \dots, Z_n(t)) + g_j(t, Z_1(t) + \rho_1(t), \dots, Z_n(t) + \rho_n(t)) \qquad (j = 1, \dots n),$$

with

$$(6.8a) \qquad g_j(t, Z_1(t) + \rho_1(t), \dots) = g_j(t, Z_1(t), \dots, Z_n(t)) + \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} \alpha_{\nu_1, \dots \nu_n: j}(t) \rho_1^{\nu_1}(t) \dots \rho_n^{\nu_n}(t)$$
$$(\nu_1 \geq 0, \dots, \nu_n \geq 0; \ \nu_1 + \dots + \nu_n = 1, 2, \dots),$$

$$(6.8b) \qquad \nu_1! \dots \nu_n! \, \alpha_{\nu_1, \dots \nu_n: j}(t) = \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}{\partial^{\nu_1} z_1 \dots \partial^{\nu_n} z_n} g_j(t, z_1, \dots, z_n) \qquad (z_i = Z_i(t); \ i = 1, \dots n).$$

In view of (6.7) and (6.7a) *the series* (6.8a) *will converge* (absolutely and uniformly) *provided*

$$(6.8c) \qquad |\rho_i(t)| \leqq \rho'' < \rho - \rho' \qquad (i = 1, \dots n).$$

The system (6.8), for the $\rho_i(t)$ $(i = 1, \dots n)$, may be written as follows:

$$(6.9) \qquad e^{\frac{p}{s} t \log q} \rho_j(t+1) - \lambda_j(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) = \bar{g}_j(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) - F_j(t)$$

$(j = 1, \dots n)$ with

$$(6.9a) \qquad \bar{g}_j = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n \geq 1} \alpha_{\nu_1, \dots \nu_n: j}(t) \rho_1^{\nu_1}(t) \dots \rho_n^{\nu_n}(t) \qquad (\text{cf. } (6.8b)),$$

$$(6.9b) \qquad F_j(t) = e^{\frac{p}{s} t \log q} Z_j(t+1) - \lambda_j(t, Z_1(t), \dots, Z_n(t)) - g_j(t, Z_1(t), \dots, Z_n(t)).$$

(¹) (6.7), (6.7a) could be secured for t in $W_{u:-c}$, $|t| \geq r'$, by taking r' sufficiently great (deleting the assumption regarding h').

On taking account of the way in which (3.8) has been obtained, in view of (6.2) is now inferred that

$$(6.10) \qquad g_j(t, Z_1(t), \dots, Z_n(t)) = \sum_{h \geq 2} \sum_{h_1+\dots+h_m=h} p_1^{h_1}(t) \dots p_m^{h_m}(t)_h \Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t);$$

here

$$(6.10a) \qquad {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) = {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) \qquad \text{(cf. (3.9))},$$

provided that in the second member of (6.10a) the functions

$$(6.10b) \qquad {}_\nu\eta_{k_1, \dots k_m: j}(t) \qquad (\nu = n', n'+1, \dots)$$

are replaced by zeros. With the aid of the fact stated subsequent to (3.10) it is concluded that

$$(6.11) \qquad {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) = {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) \qquad (h = 2, 3, \dots n').$$

For $h > n'$ (6.11) generally cannot be asserted. In consequence of the statement with reference to (6.10a) and (6.10b)

$$(6.12) \qquad \begin{aligned} {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) &= \text{generic form } ([1]) \text{ of } {}_h\Gamma^{h_1, \dots h_m}_j(t) \\ &= G_{h_1, \dots h_m}(t) e^{c_h'(p_2 - p')t \log q} [t]^*_{k(1), s(1)} \qquad \text{(cf. (5.25))} \end{aligned}$$

for t in $W_{u:-c}$, where (with $h \geqq 2$),

$$(6.12a) \qquad c_h' = h - 2 \quad (\text{if } p_2 - p' < 0); \qquad c_h' = 0 \quad (\text{if } p_2 - p' \geqq 0).$$

Relations (6.12) can be asserted for $h = 2, 3, \dots$.

Let the $z_i(t)$ $(i = 1, \dots n)$ denote the formal series of Lemma 3 (§ 5). In consequence of the developments of § 3 (in particular, cf. (3.5), ... (3.8)) we shall have formally

$$(6.13) \qquad \begin{aligned} &e^{\frac{p}{s} t \log q} z_j(t+1) - \lambda_j(t, z_1(t), \dots, z_n(t)) - g_j(t, z_1(t), \dots, z_n(t)) \\ &= \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{h_1+\dots+h_n=h} p_1^{h_1}(t) \dots p_m^{h_m}(t)_h W_{h_1, \dots h_m: j}(t) \end{aligned}$$

where

$$(6.13a) \qquad \begin{aligned} {}_h W_{h_1, \dots h_m: j}(t) = e^{\frac{p}{s} t \log q} {}_h\eta_{h_1, \dots h_m: j}(t+1) - \lambda_j(t, {}_h\eta_{h_1, \dots h_m: 1}(t), \dots) \\ - {}_h\Gamma'^{h_1, \dots h_m}_j(t) \qquad (j = 1, \dots n). \end{aligned}$$

By (3.10) (with (3.7)) one has

$$(6.14) \qquad {}_h W_{h_1, \dots h_m: j}(t) = 0 \qquad (h_1 + \dots + h_m = h;\ h = 2, 3, \dots).$$

Now, if in (6.13) the series $z_i(t)$ are cut short so as to retain precisely the

---

([1]) As given in (5.27), (5.27a); these relations hold for $\nu = 2, 3, \dots$.

first $n'-1$ terms — which would give us the functions $Z_i(t)$, respective ly - the first member in (6.13) will become the function $F_j(t)$ of (6.9b). In place of (6.13) we shall now obtain

$$F_j(t) = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{h_1+\dots+h_m=h} p_1^{h_1}(t) \dots p_m^{h_m}(t)_h W'_{h_1,\dots h_m;j}(t), \tag{6.15}$$

where

$${}_h W'_{h_1,\dots h_m;j}(t) = {}_h W_{h_1,\dots h_m;j}(t) \tag{6.15a}$$

with the functions ${}_\nu\eta_{k_1,\dots k_m;j}(t)$ $(\nu \geqq n')$ replaced by zeros. Accordingly, by virtue of (6.14)

$${}_h W'_{h_1,\dots h_m;j}(t) \equiv {}_h W_{h_1,\dots h_m;j}(t) = 0 \qquad (h=2, 3, \dots, n'-1), \tag{6.16}$$

$${}_h W'_{h_1,\dots h_m;j}(t) = - {}_h\Gamma'^{h_1,\dots h_m}_j(t) \qquad (h=n', n'+1, \dots). \tag{6.16a}$$

Whence, by (6.15), the function $F_j(t)$ is given by

$$-F_j(t) = \sum_{h>n'} \sum_{h_1+\dots+h_m=h} p_1^{h_1}(t) \dots p_m^{h_m}(t)_h \Gamma'^{h_1,\dots h_m}_j(t). \tag{6.17}$$

Now, in view of (6.12) and (6.3),

$$| p_1^{h_1}(t) \dots p_m^{h_m}(t)_h \Gamma'^{h_1,\dots h_m}_j(t) | < (h')^h {}_h H_{h_1,\dots h_m}(t) \cdot | e^{c_h'(p_2-p')t \log q} | \, | t |^{k(1)} q'^{(h)} \qquad (\text{in } W_{u;-c};\ h \geqq n'). \tag{6.18}$$

Since the $p_i(t)$ have been assumed to constitute a proper set, according to Definition 7. It is observed that the second members in (6.18) are asymptotic to zero [1], for t in $W_{u:-c}$. With the aid of (6.17) and (6.18) it is not difficult to infer that $F_j(t)$ is of the order of the sum of those terms (in (6.17)) for which $h_1 + \dots + h_m = n'$. That is,

$$| F_j(t) | < h_0 (h')^{n'} | t |^{k(1)} | e^{-2(p_2-p')t \log q} | \cdot \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} g^{p_2-p'}_{h_1,\dots h_m}(t) \qquad (t \text{ in } W_{u:-c}), \tag{6.19}$$

where

$$g^{p_2-p'}_{h_1,\dots h_m}(t) = \prod_{i=1}^{m} \left| f_i^{h_i}(v) \exp. \left\{ h_i \left[\frac{1}{2} \mu_i t^2 + (r_i + p_2 - p')t \right] \log q \right\} \right|, \tag{6.19a}$$

provided that in (6.19) *and* (6.19a) *we write zero in place of* $p_2 - p'$ *whenever* $p_2 - p' \geqq 0$.

We continue to investigate the character of the transformed system (6.9) by establishing the form of the coefficients in the series (6.9a). In conse-

(1) That is, to the series $0 + 0 \exp. (t \log q) + 0 \exp. (2t \log q) + \dots$.

quence of (6.8b) and (2.18c)

$$(6.20) \qquad \alpha_{\nu_1,\dots\nu_n;j}(t) = \sum_{\lambda_1,\dots\lambda_n} {}_jb_{\nu_1+\lambda_1,\dots,\nu_n+\lambda_n}(t) C_{\lambda_1}^{\nu_1+\lambda_1} \dots C_{\lambda_n}^{\nu_n+\lambda_n} Z_1^{\lambda_1}(t) \dots Z_n^{\lambda_n}(t),$$

where the ${}_jb_{\nu_1+\lambda_1,\dots}(t)$ are functions of the form (2.19) and

$$(6.20a) \qquad \lambda_1 \geqq 0, \dots, \lambda_n \geqq 0; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n \geqq 2 - (\nu_1 + \dots + \nu_n).$$

For $\nu_1 + \dots + \nu_n = 1$ in the series (6.20) $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \geqq 1$; hence, by (6.7b),

$$(6.21) \qquad \alpha_{\nu_1,\dots\nu_n;j}(t) \backsim 0 \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n = 1; \text{ in } W_{u:-c}).$$

On the other hand,

$$(6.21a) \qquad \alpha_{\nu_1,\dots\nu_n;j}(t) = {}_jb_{\nu_1,\dots\nu_n}(t) + {}_j\beta_{\nu_1,\dots\nu_n}(t) \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n \geqq 2)$$

(cf. (2.19)) with

$$(6.21b) \qquad {}_j\beta_{\nu_1,\dots\nu_n}(t) \backsim 0 \qquad (\text{in } W_{u:-c}).$$

LEMMA 4. — *Let* n′ *be a fixed number (however large). Apply the transformation* (6.1) (*with* (6.2)) *to the system* (2.18). *The periodic functions* $p_i(t)$ ($i = 1, \dots m$), *involved in* (6.2), *are assumed to form a proper set (cf.* (6.3) *and Definition 7) for* t *in* $W_{u:-c}$. *Accordingly* (6.7b) *will hold. Let* ρ' *be a number satisfying* (6.7a). *Inequalities* (6.7) *will be assumed to be secured (by whichever device; cf. the statement preceding* (6.7) *and the corresponding foot-note). The transformed system will be of the form*

$$(6.22) \qquad \begin{aligned} & e^{\frac{p}{s} t \log q} \rho_j(t+1) - \lambda_j^*(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) \\ & = g_j^*(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) - F_j(t) \qquad (j = 1, \dots n), \end{aligned}$$

where

$$(6.22a) \qquad g_j^*(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_n \geqq 2} \alpha_{\nu_1,\dots\nu_n;j}(t) \rho_1^{\nu_1}(t) \dots \rho_n^{\nu_n}(t)$$

(*cf.* (6.21a), (6.21b)), *the series being absolutely and uniformly convergent for* $|\rho_i(t)| \leq \rho'' < \rho - \rho'$ ($i = 1, \dots n$; *cf.* (6.8c)) (¹). *Moreover,*

$$(6.22b) \qquad \lambda_j^*(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) \backsim \lambda_j(t, \rho_1(t), \dots, \rho_n(t))$$

($j = 1, \dots n$; t *in* $W_{u:-c}$; *cf.* (2.18b)) (²) *and the functions* $F_j(t)$ *satisfy inequalities* (6.19) (*with* (6.19a)).

7. The Existence Theorem. — We shall now obtain an « actual » solution of (6.22). It is observed that under appropriate convergence conditions

(¹) Since then $|Z_j(t) + \rho_j(t)| \leqq \rho$ (by (6.7)).

(²) That is, in $\lambda_j^* - \lambda_j$ the coefficients of $\rho_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ are asymptotic to $0 + 0 \exp.(t \log q) + 0 \cdot \exp.(2t \log q) + \dots$ (in $W_{u:-c}$); see (6.21).

such solutions can be given in the form of the series

(7.1) $$\rho_j(t) = w_{j:0}(t) + w_{j:1}(t) + \dots \qquad (j = 1, \dots n),$$

where the $w_{j:\nu}(t)$ are in succession defined by the sequence of non-homogeneous linear difference systems

(7.2) $$e^{\frac{p}{s} t \log q} w_{j:0}(t+1) - \lambda_j^*(t, w_{1:0}(t), \dots, w_{n:0}(t)) = -F_j(t) \qquad (j = 1, \dots n),$$

(7.2a) $$e^{\frac{p}{s} t \log q} w_{j:k}(t+1) - \lambda_j^*(t, w_{1:k}(t), \dots, w_{n:k}(t)) = g_{j:k}$$
$$(j = 1, \dots n;\ k = 1, 2, \dots)$$

with

(7.2b) $$g_{j:k} = g_j^*(t, \rho_{1:k-2}(t) + w_{1:k-1}(t), \dots, \rho_{n:k-2}(t) + w_{n:k-1}(t)) - g_j^*(t, \rho_{1:k-2}(t), \dots, \rho_{n:k-2}(t)),$$

where for brevity we write $\rho_{j:-1} = 0$ and

(7.3) $$\rho_{j:k} = w_{j:0} + w_{j:1} + \dots + w_{j:k} \qquad (j=1, \dots n;\ k=0, 1, \dots).$$

In consequence of (6.23b) in any of the systems (7.2), (7.2a) the left members involve difference operators with coefficients which for t in $W_{u:-c}$ are asymptotically identical with the corresponding coefficients in the left members of any system (3.10) (with both members of (3.10) multiplied by exp. $\left(\frac{p}{s} t \log q\right)$; cf. (3.7)). It is to be recalled that a system (3.10) has been solved with the aid of (3.17) and (3.17a) and that the latter formulas were written in the form (5.3) (with (5.3a) and (5.2)). In view of the asymptotic equivalence, referred to above, formulas for the $w_{j:k}(t)$ $(j = 1, \dots n)$ may be obtained as follows. In (5.3) replace the left member by $w_{j:k}(t)$; in the second member replace ${}_0I_{\lambda,j}(t)$ by $I^{\lambda,j}(t)$, which will be of the form $[t]^*_{k_\lambda, s_\lambda}$ (in $W_{u:-c}$). The $c_\lambda(t)$ in (5.3) are to be replaced by functions $c_{\lambda:k}(t)$ given by (5.2), where ${}_h\Gamma_{\lambda_1}^{h_1, \dots h_m}(\tau)$ is replaced by $g_{\lambda_1:k}$ and ${}_0\bar{I}_{\lambda_1,\lambda}(\tau)$ is replaced by a function $\bar{I}^{\lambda_1,\lambda}(\tau)$, which will be of the form $[\tau]^*_{k_\lambda, s_\lambda}$ (in $W_{u:-c}$). In other words, we may write for $k = 0, 1, \dots$

(7.4) $$w_{j:k}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda:k}(t) e^{Q_\lambda(t)} e^{r_\lambda t \log q} I^{\lambda,j}(t),$$

(7.4a) $$c_{\lambda:k}(t) = \sum_{\lambda_1=1}^{n} \underset{\tau=t}{\mathrm{S}}\, g_{\lambda_1,k} e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda + \mu_\lambda + p')\tau \log q} \bar{I}^{\lambda_1,\lambda}(\tau)$$

(cf. (5.2a)), where

(7.4b) $$g_{j:0} = -F_j(\tau)$$

and

(7.4c) $$I^{\lambda,j}(t) = [t]^{*}_{k_\lambda, s_\lambda}, \quad \bar{I}^{\lambda_1,\lambda}(\tau) = [\tau]^{*}_{k_\lambda, s_\lambda} \qquad (\text{in } W_{u:-c}).$$

Since $k_\lambda \leq k(1)$ $(\lambda = 1, \dots n)$, in consequence of Definition 6 (§ 2) it is noted that (7.4c) implies

$$|I^{\lambda,j}(t)|, \quad |\bar{I}^{\lambda_1,\lambda}(t)| < \gamma\, |t|^{k(1)} \qquad (\text{in } W_{u:-c}).$$

Hence, whenever

(7.6) $$|g_{j:k}| < g_k \qquad (j = 1, \dots n;\ \text{in } W_{u:-c}),$$

we shall have

$$|w_{j:k}(t)| < n\gamma^2 \sum_{\lambda=1}^{n} |e^{Q_\lambda(t)} e^{r_\lambda t \log q}|\, |t|^{k(1)} \underset{\tau=t}{\mathfrak{S}} T'_{k,\lambda}(\tau)$$

(in $W_{u:-c}$) where

$$T'_{k,\lambda}(\tau) = g_k\, |e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda + \mu_\lambda + p')\tau \log q}|\, |\tau|^{k(1)+2} |\tau|^{-2}.$$

It will be convenient to use these formulas in the less precise form:

(7.7) $$|w_{j:k}(t)| < \gamma_1 \sum_{\lambda=1}^{n} |e^{Q_\lambda(t)} e^{(r_\lambda - \varepsilon)t \log q}| \underset{\tau-t}{\mathfrak{S}} T_{k,\lambda}(\tau)$$

(in $W_{u:-c}$), where

(7.7a) $$T_{k,\lambda}(\tau) = \gamma_2 g_k\, |e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda + p'' + \varepsilon)\tau \log q}|\, |\tau|^{-2} \qquad (p'' = \mu_n + p');$$

here ε is taken positive (however small) and γ_1, γ_2 generally depend on ε. In establishing (7.7) (with (7.7a)) use has been made of the inequalities [1]

$$|t^{k(1)+2}| < \gamma' |e^{-\varepsilon t \log q}|, \quad |e^{(\mu_n - \mu_\lambda)\tau \log q}| < \gamma'',$$

which are valid in $W_{u:-c}$.

In consequence of the type of reasoning which was used in establishing (7.17) of (T_2) [cf. $(T_2$; pp. 267-268)] the following can be asserted. *Let* t *be in* $\mathrm{W}_{u:-c}$. *Suppose*

(7.8) $$|\rho_i(t)| \leqq \rho^*, \quad |w_i(t)| \leqq w^* \qquad (i = 1, \dots n),$$

with

(7.8a) $$\rho^* + w^* \leqq \rho'' < \rho - \rho' \qquad (\text{cf. } (6.8c)).$$

Then

(7.8b) $$|g_j^*(t, \rho_1 + w_1, \dots, \rho_n + w_n) - g_j^*(t, \rho_1, \dots, \rho_n)| < (q'\rho^* + q''w^*)w^* \qquad (\mathrm{q}', \mathrm{q}'' \text{ independent of } \mathrm{t})$$

for t *in* $\mathrm{W}_{u:-c}$.

---

(1) Note that $\mu_n - \mu_\lambda \geq 0$.

In accordance with (6.19a)

(7.9) $$g^{\delta}_{h_1,\dots h_m}(t) = \prod_{i=1}^{m} \left| f_i^{h_i}(v) e^{h_i\left[\frac{1}{2}\mu_i t^2 + \bar{r}_i t\right]\log q} \right| \qquad (\bar{r}_i = r_i + \delta).$$

We shall write also

(7.9a) $$g^{\delta}_h(t) = \sum_{h_1,\dots h_m} g^{\delta}_{h_1,\dots h_m}(t)$$
$$(h_1 \geqq 0, \dots, h_m \geqq 0;\ h_1 + \dots + h_m = h),$$

(7.9b) $${}_\lambda\Lambda^{\delta}_{h_1,\dots h_m}(t) = g^{\delta}_{h_1,\dots h_m}(t) \left| e^{-\left[\frac{1}{2}\mu_\lambda t^2 + \bar{r}_\lambda t\right]\log q} \right|$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{m} f_i^{h_i}(v)\right) \left| e^{\left(\frac{1}{2}\mu t^2 + \bar{r} t\right)\log q} \right| \qquad (\bar{r}_\lambda = r_\lambda + \delta),$$

where

(7.9c) $$\mu = h_1\mu_1 + \dots + h_m\mu_m - \mu_\lambda, \quad \bar{r} = h_1\bar{r}_1 + \dots + h_m\bar{r}_m - \bar{r}_\lambda .$$

It will be said that *a function* G(t), *defined in* W′, *is monotone in* W′ *if* $G(t_1) \leqq G(t_2)$, *whenever* t_2 *is in* W′ *and* $It_1 = It_2$, *while* $Rt_1 \leqq Rt_2$ (1).

We recall now the statement in italics preceding (5.10). In this statement was defined a certain integer $\bar{h}$ ($\geqq 0$). *Forthwith* n′ *will be taken* $\geqq \bar{h}$. As a consequence we shall have

(7.10) $$\mu \text{ (defined by (7.9c))} < 0$$
$$(h_1 \geqq 0, \dots, h_m \geqq 0;\ h_1 + \dots + h_m = h;\ h = n',\ n' + 1, \dots).$$

On writing $t = u + \sqrt{-1}\, v$, $\bar{r} = r' + \sqrt{-1}\, r''$, $\bar{q} =$ angle of q and letting μ and $\bar{r}$ denote any numbers, with $\mu < 0$, we have

$$R\left[\left(\frac{1}{2}\mu t^2 + \bar{r}t\right)\log q\right] = \log|q| \left[\frac{1}{2}\mu(u^2 - v^2) + (r'u - r''v)\right]$$
$$- \bar{q}\,[\mu u v + (r''u + r'v)].$$

Furthermore

(7.11) $$\frac{\partial}{\partial u} R\left[\left(\frac{1}{2}\mu t^2 + \bar{r}t\right)\log q\right] = \mu \log|q|\, u - \bar{q}\mu v + f(r', r''),$$

where

(7.11a) $$f(r', r'') = r' \log|q| - \bar{q} r''.$$

One has

(7.12) $$\frac{\partial}{\partial u} R\left[\left(\frac{1}{2}\mu t^2 + \bar{r}t\right)\log q\right] \geqq 0$$

(1) W' must be such that if t represents a point in W' then $t - \nu$ ($\nu > 0$) also represents a point in W'.

in the *half-plane* P′ bounded on the right by the line

$$\mu \log |q| u - \bar{q}\mu v + f(r', r'') = 0 \qquad \text{(cf. (7.11a))}. \tag{7.13}$$

In P′ *the function displayed preceding to* (7.11) *will be monotone*, according to the definition introduced subsequent to (7.9c). On the other hand, we note that the line (7.13) is parallel to the line (2.7). Recalling the definition of the half-plane *R*, as given preceding (2.7), and *letting* P *denote the part of* P′ *common with* R *we have*

$$P = R \qquad (\tilde{\rho} \geqq \rho_1 \geqq 0), \tag{7.14}$$

the notation being that of Definition 3 (§ 2) (1); here ρ_1 generally depends on μ, $\bar{r}$. Thus, it may be said that *the function* $\left|\exp.\left[\left(\frac{1}{2}\mu t^2 + \bar{r}t\right)\log q\right]\right|$ (*with any* $\mu < 0$) *is monotone in a region* R (*with* $\tilde{\rho} \geqq \rho_1 = \rho_1(\mu, \bar{r}) \geqq 0$).

Let δ be a real number for the present undefined. Write $\bar{r}_i = r_i + \delta$ ($i = 1, \dots n$). Take $h \geqq \bar{h}$. On noting that

$$\mu_i - \mu_\lambda < 0 \qquad (i \leqq m;\ i < \lambda), \tag{7.15}$$

in consequence of the italicized statement, immediately preceding, the following can be asserted. The functions

$$\left| e^{\frac{1}{2}(\mu_j t^2 + r_j t)\log q} \right| \qquad (j = 1, \dots m), \tag{7.15a}$$

$$f_i(v)\left| e^{\frac{1}{2}[(\mu_i - \mu_\lambda)t^2 + (\bar{r}_i - \bar{r}_\lambda)t]\log q} \right| = f^{i,\lambda}(t) \qquad (i < m;\ i < \lambda) \tag{7.15b}$$

formed for $\lambda = 1, \dots n$ are all monotone in a common half-plane R_δ of the form

$$R_\delta = R \qquad (\text{with } \tilde{\rho} \geqq \rho(\delta) \geqq 0). \tag{7.16}$$

In consequence of the latter fact *the functions displayed in the first members of* (7.9b) [with (7.9c), $\bar{r}_i = r_i + \delta$ ($i = 1, \dots n$) and $h_1 + \dots + h_m \geqq h$] *are all monotone in a region* R ($\tilde{\rho} \geq \rho_\delta \geqq \rho(\delta) \geqq 0$). To establish this we first note that the functions (7.9) (with $h_1 \geqq 0, \dots, h_m \geqq 0$) will be monotone in R_δ so long as the functions (7.15a) are. If $\lambda > m$, some h_i ($i < m$) being necessarily positive we may write the function (7.9b) in the form

$$g^{\delta}_{h_1, \dots, h_i - 1, \dots h_m}(t) f^{i,\lambda}(t) \tag{7.17}$$

(cf. (7.9), (7.15b)); the function just displayed, however, is a product of two

(1) That is, P is the part of R at the distance $\geqq \rho_1$ from the boundary of R.

functions monotone in R_δ. If $\lambda \leqq m$ and $h_\lambda > 0$, the function (7.9b) will be of the form $g^\delta_{h_1,\dots,h_\lambda-1,\dots h_m}(t) f_\lambda(v)$ (with $h_\lambda - 1 \geqq 0$), which is monotone in R_δ. If $\lambda \leqq m$, $h_\lambda = 0$ and some h_i (with $i < \lambda$) is positive, we have (7.17) ($i < \lambda \leqq m$; $h_i - 1 \geqq 0$) so that again the function (7.9b) will be a product of two functions monotone in R_δ. In the remaining case, necessarily $\lambda < m$ and $h_i = 0$ ($i = 1, \dots \lambda$); the function (7.9b) will be of the form

$$\text{(7.18)} \qquad \varphi(v) \cdot \left| e^{\frac{1}{2}\left(\mu' t^2 + \bar{r}' t\right) \log q} \right| g^\delta_{0,\dots,0,h_{\lambda+1}-k_{\lambda+1},\dots,h_m-k_m}(t)$$

with

$$\text{(7.18a)} \qquad \mu' = -\mu_\lambda + k_{\lambda+1}\mu_{\lambda+1} + \dots + k_m \mu_m, \quad \bar{r}' = -\bar{r}_\lambda + k_{\lambda+1}\bar{r}_{\lambda+1} + \dots + k_m \bar{r}_m,$$

where $k_{\lambda+1} + \dots + k_m = \bar{h}$ and $h_{\lambda+1} - k_{\lambda+1} \geqq 0, \dots, h_m - k_m \geqq 0$. There is only a finite number of functions $\left| \exp. \left[\left(\frac{1}{2}\mu' t^2 + \bar{r}' t\right) \log q\right] \right|$ (with (7.18b)) for which $k_{\lambda+1} + \dots + k_m = \bar{h}$ ($k_{\lambda+1} \geqq 0, \dots, k_m \geqq 0$; $\lambda = 1, \dots, m-1$); on the other hand, by the definition of $\bar{h}$ one always has $\mu' < 0$. Wence by virtue of the italicized statement subsequent to (7.14) there exists a region

$$\text{(7.18b)} \qquad R^{(\delta)} = R \qquad (\text{with } \tilde{\rho} \geqq \rho_\delta \geqq \rho(\delta) \geqq 0)$$

in which the functions $\left| \exp. \left[\left(\frac{1}{2}\mu' t^2 + \bar{r}' t\right) \log q\right] \right|$ (with $k_{\lambda+1} + \dots + k_m = \bar{h}$; $k_{\lambda+1} \geqq 0, \dots$; $\lambda = 1, \dots, m-1$) are all monotone. $R^{(\delta)}$ is a subset of R_δ. Of the three factors in (7.18) the first is obviously monotone; the second will be monotone in $R^{(\delta)}$ (R_δ also) because $h_{\lambda+1} - k_{\lambda+1} \geqq 0, \dots$. Hence the functions (7.9b) (with $h_1 + \dots + h_m \geqq \bar{h}$) are all monotone in $R^{(\delta)}$. Thus the statement subsequent to (7.16) has been verified.

In the sequel $W^{(\delta)}_{u:-c}$ will be taken as the part of the original $W_{u:-c}$ in common with $R^{(\delta)}$; that is, $W^{(\delta)}_{u:-c}$ *will designate* $W_{u:-c}$ (*with* $\tilde{\rho} \geqq \rho_\delta$; ρ_δ *from* (7.18c); *cf. Definition 3* (§ 2)).

By (6.19), (7.9a) and (7.4b)

$$\text{(7.19)} \qquad |g_{j:0}| < h^0 (h')^{n'} \left| e^{-(2\delta+\varepsilon)t \log q} \right| |g^\delta_{n'}(t)|$$

(in $W_{u:-c}$) [1] where

$$\text{(7.19a)} \qquad \delta = p_2 - p' \quad (\text{if } p_2 - p' < 0), \qquad \delta = 0 \quad (\text{if } p_2 - p' \geqq 0).$$

In conformity with (7.6) the second member in (7.19) may be designated as g_0.

---

(1) h^0 may depend on ε (> 0).

In consequence of (7.7a) (with $k=0$) we shall have

$$T_{0,\lambda}(\tau) = |\tau|^{-2}\gamma_2 h^0(h')^{n'} \,|\, e^{-(\delta+2\varepsilon+p'')\tau\log q} \,| \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} g^{\delta}_{h_1,\dots h_m}(\tau) \,|\, e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda+\delta)\tau\log q} \,|.$$

This, in view of (7.9b), can be written as

(7.20) $$T_{0,\lambda}(\tau) = |\tau|^{-2}\gamma_2 h^0(h')^{n'}{}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(\tau) \qquad (\text{in } W_{u:-c})$$

where

(7.20a) $${}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(\tau) = \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} {}_\lambda\Lambda^{\delta'}_{h_1,\dots h_m}(\tau),$$

$$\delta' = \delta - (\delta + 2\varepsilon + p'')/(n'-1) \qquad (\text{cf. (7.9b), (7.19a)}).$$

In a region

$$W^{(\delta')}_{u:-c} = W_{u:-c} \qquad (\text{with } \tilde{\rho} \geqq \rho_{\delta'} \geqq \rho_\delta),$$

where δ is from (7.19a), the function ${}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(\tau)$ as given by (7.20a) is monotone, being a sum of monotone functions. Whence in evaluating the difference sum displayed in (7.7) (with $k=0$) in consequence of (7.20) it is inferred that

(7.21) $$\underset{\tau=t}{\mathrm{S}}\, T_{0,\lambda}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{0,\lambda}(t-\nu) < \gamma_2 h^0(h')^{n'}{}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(t) \sum_{\nu=1}^{\infty} |t-\nu|^{-2}$$
$$< |t|^{-1}\omega\gamma_2 h^0(h')^{n'}{}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(t) < \omega_1 {}_\lambda S^{\delta'}_{n'}(t) = T^*_{0,\lambda}(t)$$

(in $W^{(\delta')}_{u:-c}$) (1). In deriving (7.21) use was made of the inequality

(7.22) $$\sum_{\nu\, 1}^{\infty} \frac{1}{|t-\nu|^2} < \frac{\omega}{|t|},$$

due to G. D. BIRKHOFF and certainly valid in $W^{(\delta')}_{u:-c}$.

By (7.7) (with $k=0$) and (7.21) (cf. (7.20a) and (7.9b))

(7.23) $$|w_{j:0}(t)| < n\gamma_1\omega_1 \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} g^{\delta'}_{h_1,\dots h_m}(t) \,|\, e^{-(\delta'+\varepsilon)t\log q} \,|$$
$$= w_0 g^{\delta'}_{n'}(t) \,|\, e^{-(\delta'+\varepsilon)t\log q} \,| = w_0{}^*(t) \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c};\ \text{cf. (7.9a), (7.20a)}),$$

where $w_0 = n\gamma_1\omega_1$.

We shall write

(7.24) $$n'\delta'' = (n'-1)\delta' - (p'' + 3\varepsilon);$$

(7.24a) $$w^0 = n\gamma_1\gamma_2 b\omega \qquad (\text{cf. (7.22)}),$$

---

(1) In (7.21) ${}_\lambda s^{\delta'}_{n'}(t)$ may be replaced by ${}_\lambda s^{\delta'}_{n'}(t-1)$; however, in view of our purposes this additional precision will not be necessary. $W^{(\delta')}_{u:-c}$ does not contain the origin either on the boundary nor interior. In fact, it vill be supposed that in $W^{(\delta')}_{u:-c}$ one has $|t| \geqq 1$.

where $b = q'(1+\rho'') + q''$ (cf. (7.8b));

$$\Gamma(t) = w_0 w^0 g_{n'}^{\delta''}(t). \tag{7.25}$$

Either by chosing $\rho_{\delta'}$ (cf. definition of $W_{u:-c}^{(\delta')}$ subsequent to (7.20a)) or by taking h' (from the inequalities satisfied by the periodic functions) sufficiently small *the inequalities*

$$w_0{}^*(t) \leqq \frac{\rho''}{1+\rho''}, \quad \Gamma(t) \leqq \frac{\rho''}{1+\rho''} \qquad (\text{in } W_{u:-c}^{(\delta')}) \tag{7.26}$$

(ρ'' from (7.8a), (6.8c)) *will be secured.* Moreover, with suitable choice of $\rho_{\delta'}$ *the functions*

$$g_{n'}^{\delta''}(t), \quad {}_\lambda\Lambda_{h_1,\dots h_m}^{\delta'}(t) \qquad (h_1+\dots+h_m=n';\ \lambda=1,\dots n) \tag{7.27}$$

(cf. (7.24)) *will be all monotone in* $W_{u:-c}^{(\delta')}$.

With these preliminaries in view we now proceed to derive an inequality for $|w_{j:1}(t)|$. With the aid of the statement made in connection with (7.8),..., (7.8b) it is inferred that the functions $g_{j:1}$ of (7.2b) (with $k=1$) satisfy

$$|g_{j:1}(t)| < b(w_0{}^*(t))^2 = g_1{}^*(t) \qquad (\text{in } W_{u:-c}^{(\delta')}). \tag{7.28}$$

where $w_0{}^*(t)$ is from (7.23). By (7.7a) (under (7.6), with $g_1 = g_1{}^*(\tau)$) we obtain

$$T_{1,\lambda}(\tau) = |\tau|^{-2}\gamma_2 b w_0{}^2 g_{n'}^{\delta''}(\tau) \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} {}_\lambda\Lambda_{h_1,\dots h_m}^{\delta'}(\tau). \tag{7.29}$$

With $|\tau|^{-2}$ deleted the second member of (7.29) is monotone in $W_{u:-c}^{(\delta')}$ (cf. statement in connection with (7.27)). Hence

$$\underset{\tau=t}{\mathfrak{S}}\, T_{1,\lambda}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{1,\lambda}(t-\nu) < \frac{\omega}{|t|} T^{1,\lambda}(t) \qquad (\text{in } W_{u:-c}^{(\delta')}) \tag{7.29a}$$

where ω is from the inequality of BIRKHOFF and $T^{1,\lambda}(t)$ consists of the second member of (7.29) with $|\tau|^{-2}$ deleted and τ replaced by t. Since $|t|^{-1} \leqq 1$ in $W_{u:-c}^{(\delta')}$, from (7.29a) it follows that

$$\underset{\tau-t}{\mathfrak{S}}\, T_{1,\lambda}(\tau) < \gamma_2 b\omega w_0{}^2 g_{n'}^{\delta''}(t) g_{n'}^{\delta'}(t)\, |e^{-Q_\lambda(t)} e^{-(r_\lambda+\delta')t\log q}|. \tag{7.30}$$

In consequence of (7.7) and (7.30)

$$|w_{j:1}(t)| < n\gamma_1\gamma_2 b\omega w_0{}^2 g_{n'}^{\delta''}(t) g_{n'}^{\delta'}(t)\, |e^{-(\delta'+\varepsilon)t\log q}|.$$

Thus, by definition of $w_0^*(t)$, given in (7.23), and by (7.24a), (7.25)

$$(7.31)\qquad |w_{j:1}(t)| < w^0 w_0 w_0^*(t) g_{n'}^{\delta''}(t) = \Gamma(t) w_0^*(t) = w_1^*(t)$$

for t in $W_{u:-c}^{(\delta')}$.

Now (7.26) and (7.31) implies that

$$(7.32)\qquad w_1^*(t) \leqq \left(\frac{\rho''}{1+\rho''}\right)^2, \quad w_0^*(t) + w_1^*(t) < \rho''.$$

Thus, since $w_1^*(t) \leqq w_0^*(t)$ and $q' + q'' < b$ (cf. (7.24a)), the function $g_{j:2}$ of (7.2b) (with $k = 2$) satisfies the inequality

$$(7.33)\qquad |g_{j:2}(t)| < (q' w_0^*(t) + q'' w_1^*(t)) w_1^*(t) \leqq b w_0^*(t) w_1^*(t) = g_2^*(t) \qquad (\text{in } W_{u:-c}^{(\delta')}).$$

Suppose that in $\mathrm{W}_{\mathrm{u}:-\mathrm{c}}^{(\delta')}$ *for* $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{k}$ $(\mathrm{k} \geqq 2)$ *we have*

$$(7.34)\qquad |g_{j:i}(t)| < g_i^*(t) = b w_0^*(t) w^*_{i-1}(t),$$

$$(7.34\text{a})\qquad |w_{j:i-1}(t)| < w^*_{i-1}(t) = \Gamma^{i-1}(t) w_0^*(t) \qquad (j = 1, \ldots n).$$

The inequalities (7.34), (7.34a) have been already established for $k = 2$; that is, for $i = 1, 2$ (cf. (7.23), (7.28), (7.31), (7.33)). It will be now proved that (7.34), (7.34a) will hold for $i = k+1$ as well.

By (7.34) and (7.34a)

$$(7.35)\qquad g_k^*(t) = b(w_0^*(t))^2 \Gamma^{k-1}(t).$$

In consequence of (7.7a)

$$T_{k,\lambda}(\tau) = \gamma_2 b (w_0^*(\tau))^2 \Gamma^{k-1}(\tau) \, |e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda + p'' + \varepsilon)\tau \log q}| \, |\tau|^{-2}.$$

Substitution of the expressions for $w_0^*(\tau)$ and $\Gamma(\tau)$ (cf. (7.23) and (7.25)) will yield

$$(7.36)\qquad T_{k,\lambda}(\tau) = \gamma_2 b w_0^2 (g_{n'}^{\delta'}(\tau))^2 \, |e^{-(2\delta' + 2\varepsilon)\tau \log q}| \, (w_0 w^0)^{k-1} \cdot (g_{n'}^{\delta''}(\tau))^{k-1} \, |e^{-Q_\lambda(\tau)} e^{-(r_\lambda + p'' + \varepsilon)\tau \log q}| \, |\tau|^{-2}$$
$$= |\tau|^{-2} \gamma_2 b w_0^2 (w_0 w^0)^{k-1} (g_{n'}^{\delta''}(\tau))^k \sum_{h_1 + \ldots + h_m = n'} {}_\lambda\Lambda_{h_1, \ldots h_m}^{\delta'}(\tau).$$

In deriving the above use has been made of (7.24). Let $T^{k,\lambda}(\tau)$ denote the function of the last member of (7.36), with $|\tau|^{-2}$ deleted. In consequence of the statement with respect to (7.27) it is inferred that $T^{k,\lambda}(\tau)$ *is monotone* *in* $W^{(\delta')}_{u:-c}$. Whence, with the aid of the inequality of BIRKHOFF we obtain

$$\underset{\tau=t}{\mathfrak{S}}\, T_{k,\lambda}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\, t - \nu\,|^{-2} T^{k,\lambda}(t-\nu)$$

$$< \omega\,|\,\tau\,|^{-1} T^{k,\lambda}(t) \leqq \omega T^{k,\lambda}(t) \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c})\ (^1).$$

With the aid of (7.7) and of the above inequality, on substituting the explicit expression for $T^{k,\lambda}(t)$, it is inferred that

$$|\, w_{j:k}(t)\,| < n\gamma_1\omega\gamma_2 b w_0{}^2(w_0 w^0)^{k-1}(g^{\delta''}_{n'}(t))^k$$

$$\cdot \sum_{h_1+\ldots+h_m=n'} g^{\delta'}_{h_1,\ldots h_m}(t)\,|\, e^{-(\delta'+\varepsilon)t\log q}\,| \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}).$$

By virtue of (7.24a), (7.25) and (7.23) this leads to

$$|\, w_{j:k}(t)\,| < w_0(w_0 w^0 g^{\delta''}_{n'}(t))^k g^{\delta'}_{n'}(t) e^{-(\delta'+\varepsilon)t\log q} \tag{7.37}$$

$$= \Gamma^k(t) w_0{}^*(t) = w_k{}^*(t) \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}).$$

It is observed that in (7.37) we established (7.34a), for $i = k+1$.

Now, in view of (7.2b) (with k replaced by $k+1$)

$$|\, g_{j:k+1}\,| = |\, g_j{}^*(t,\ \rho_{1:k-1}(t) + w_{1:k}(t), \ldots) - g_j{}^*(t,\ \rho_{1:k-1}(t), \ldots)\,|, \tag{7.38}$$

where

$$|\, \rho_{j:k-1}(t)\,| = |\, w_{j:0}(t) + \ldots + w_{j:k-1}(t)\,| < w_0{}^*(t) + \ldots + w^*{}_{k-1}(t) \tag{7.38a}$$

$$= \rho^*{}_{k-1}(t) \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}).$$

By (7.26), (7.34a) and (7.37)

$$w_i{}^*(t) \leqq \left(\frac{\rho''}{1+\rho''}\right)^i w_0{}^*(t) \leqq w_0{}^*(t) \qquad (i=0, 1, \ldots k;\ \text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}) \tag{7.39}$$

so that in consequence of (7.38a)

$$|\, \rho_{j:k-1}(t)\,| < \rho^*{}_{k-1}(t) < w_0{}^*(t) \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho''}{1+\rho''}\right)^i = w_0{}^*(t)(1+\rho'') \leqq \rho''. \tag{7.39a}$$

Also

$$\rho^*{}_{k-1}(t) + w_k{}^*(t) = \rho_k{}^*(t) < w_0{}^*(t)(1+\rho'') \leqq \rho'' \qquad (\text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}).$$

The latter inequality enables application of the statement with respect to (7.8), ..., (7.8b) for the purpose of obtaining an ineqnality for the function

---

(1) We make use of the inequality $|\, t\,|^{-1} \leqq 1$ (in $W^{(\delta')}_{u:-c}$).

$| g_{j:k+1} |$ of (7.38). We have, with the aid of (7.39a) and (7.39) (for $i = k$),

$$(7.40)\qquad | g_{j:k+1} | < (q'\rho^*_{k-1}(t) + q''w_k^*(t))w_k^*(t)$$
$$< [q'(1+\rho'')w_0^*(t) + q''w_0^*(t)]w_k^*(t) = bw_0^*(t)w_k^*(t) = g^*_{k+1}(t)$$

(t in $W^{(\delta')}_{u:-c}$; b as defined in (7.24a)). This establishes the truth of (7.34) (with $i = k+1$).

The induction is complete and it is possible to assert that *inequalities* (7.34), (7.34a) *hold for* $i = 1, 2, \ldots$ *when* t *is in* $W^{(\delta')}_{u:-c}$. In consequence of (7.26) one accordingly has

$$| w_{j:i}(t) | \leq \left(\frac{\rho''}{1+\delta''}\right)^i w_0^*(t) \qquad (i = 0, 1, \ldots;\ \text{in } W^{(\delta')}_{u:-c})$$

so that the series $\rho_j(t)$, as given by (7.1) ($j = 1, \ldots n$), will be all uniformly and absolutely convergent in $W^{(\delta')}_{n-:c}$. *The inequalities*

$$(7.41)\qquad | \rho_j(t) | \leqq \sum_{i=0}^{\infty} | w_{j:i}(t) | < w_0^*(t) \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho''}{1+\rho''}\right)^i = w_0^*(t)(1+\rho'') \leqq \rho''$$

($j = 1, \ldots n$) *will certainly hold in* $W^{(\delta')}_{u:-c}$. *The functions* $\rho_1(t(, \ldots \rho_n(t)$, *analytic in* $W^{(\delta')}_{u:-c}$ ($t \mp \infty$), *will constitute an* « *actual* » *solution of the transformed difference system* (6.22).

Thus the following theorem has been proved.

EXISTENCE THEOREM. — *Consider the non-linear* q-*difference system* (A) (§ 1). *The transformation* $x = \exp.(t \log q)$ *will yield the difference system* (2.18). *The linear system* (2.6), *corresponding to* (2.18), *possesses a formal matrix solution* $S(t)$ *of the form* (2.15). *The exponential factors of the elements of* $S(t)$ *involve numbers* μ_i ($i = 1, \ldots n$). *Purely as a matter of notation, entailing no loss of generality, the* μ_i *are supposed to be so ordered that* $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_n$. *We make Hypothesis* A (§ 3); *thus, for some* m ($\leqq$ n), $\mu_1 \leq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_m < 0$. *With* $c > 0$, *let* $W_{u:-c}$ *denote a region specified according to Definition 1* (§ 2). *Let* $p_1(t), \ldots, p_m(t)$ *be arbitrary function of period unity, analytic for* $It = v \geqq -c$ ($t \mp \infty$) *and forming a proper set* (*in* $W_{u.-c}$; *cf. Definition* 7 (§ 6) *and the inequalities* (6.3).

Let n′ *be an integer* $\geqq \bar{h}$ ($\bar{h}$ *from the italics preceding* (5.10). *Then, provided the part of the boundary of* $W_{u.-c}$ *in the second quadrant is chosen sufficiently far to the left* [1], *there exists an* « *actual* » *solution of the system* (2.18) $z_j(t)$ ($j = 1, \ldots n$), *with elements analytic in* $W^{(\delta')}_{u.-c} = W_{u.-c}$ ($\tilde{\rho} \geqq \rho_{\delta'}$; $\rho_{\delta'}$ *suf-*

[1] This choice is independent of n'. It is necessitated by the character of the difference-summations $Se^{\frac{1}{2}\mu\tau^2 \log q}\ldots$ (with $\mu > 0$), finite in number, requisite in the process of determining the formal solution referred to in Lemma 3.

ficiently great (1); *cf. Definition 5* (§ 2) ($t \neq \infty$), *such that*

$$z_j(t) \sim {}_1z_j(t) + {}_2z_j(t) + \dots \qquad (j=1,\dots n;\ \text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}). \tag{7.42}$$

Here the series constitute a formal solution of the system (2.18) *and their constituent terms are functions of the form* (5.39a), (5.40) (*or* 5.40a); (*cf. Lemma 3* (§ 5)). *The asymptotic relations* (7.42) *are in the following sense:*

$$z_j(t) = {}_1z_j(t) + \dots + {}_{n'-1}z_j(t) + {}_{n'}\rho_j(t) \qquad (j=1,\dots n), \tag{7.42a}$$

where the ${}_{n'}\rho_j(t)$ *are functions defined in* $W^{(\delta')}_{u.-c}$ *and satisfying inequalities*

$$|{}_{n'}\rho_j(t)| < (1+\rho'')w_0^*(t) \leqq \rho'' \qquad (j=1,\dots n;\ \text{in } W^{(\delta')}_{u:-c}). \tag{7.42b}$$

Here (*by* (7.23), (7.9a), (7.9))

$$w_0^*(t) = w_0\,|e^{[(n'-1)\delta'-\varepsilon]t\log q}| \sum_{h_1+\dots+h_m=n'} \prod_{i=1}^{m} \left| f_i^{h_i}(v) e^{h_i\left[\frac{1}{2}\mu_i t^2 + r_i t\right]\log q} \right|$$

($h_1 \geqq 0,\dots,\ h_m \geqq 0$; *the* $f_i(v)$ *from* (6.3)) *and*

$$(n'-1)\delta' - \varepsilon = \begin{cases} (n'-2)(p_2-p') - p'' - 3\varepsilon & (\text{if } p_2 - p' < 0), \\ -p'' - 3\varepsilon & (\text{if } p_2 - p' \geqq 0)\ (^2) \end{cases}$$

(p_2, p', p'' *from* (5.13b), (5.2a) (*cf.* (5.1a)), (7.7a)).

Analogous rusults will hold in a suitable region $W_{1.-c}$ (*cf. Def. 1* (§ 2)).

NOTE. — If we reverse the transformation $x = \exp.(t \log q)$, the above theorem immediately yields existence results for the given non-linear q-difference system (A) (§ 1); the formulation of the latter result is obvious. We shall merely remark that the established properties will hold in the complex x-plane in regions bounded by certain logarithmic spirals extending to the origin. The term « asymptotic », employed in (7.42), is justified for reasons of the same type as previously used, in analogous connections, in (T_1), (T_2) and (T_3). Finally, it is clear that solutions of the description given in the above theorem will exist, with n' fixed, even for the more general non-linear systems obtained by replacing the second members of the given system (A) (§ 2) by suitable functions, satisfying with respect to $y_1,\dots y_n$ asymptotic relations to a finite number of terms (depending on n'). It is also to be noted that with the aid of the given non-linear system the analytic character of the elements $z_j(t)$ of an « actual » solution, such as (7.42a), can be investigated throughout the half-plane $It = v \geqq -c$.

(1) To satisfy the conditions stated in connection with (7.26), (7.27).

(2) Use is made of the definition of δ' and δ by (7.20a) and (7.19a).

Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento.

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra per la prima volta compiutamente con soli mezzi algebrico-geometrici il teorema sulla* completezza della serie caratteristica *di un sistema continuo completo di curve tracciate sopra una superficie algebrica, e se ne deduce un nuovo* principio di spezzamento *concernente i punti di collegamento di una curva riducibile, limite di una curva irriducibile variabile sopra una superficie algebrica, dal quale discende un* significato algebrico-topologico *pel genere geometrico della superficie.*

Prefazione.

1. La geometria sopra una superficie algebrica, F, si occupa precipuamente delle proprietà invariantive dei sistemi algebrici di curve tracciate su F. In tale studio si possono — anche dal punto di vista storico — nettamente distinguere due tempi, nel primo dei quali — culminante col quadriennio 1896-1900, e dominato dalle idee del CASTELNUOVO e dell'ENRIQUES — le ricerche sono per lo più limitate ai s i s t e m i l i n e a r i, mentre nel secondo — sbocciato col quadriennio 1904-1908, e dominato dalle idee del SEVERI — gioca in modo essenziale la considerazione dei s i s t e m i c o n t i n u i (ossia dei sistemi algebrici irriducibili, generalmente non lineari nè totalmente contenuti in alcun sistema lineare) e la fondamentale teoria della base dovuta allo stesso SEVERI [1].

Fra i risultati più salienti del primo periodo vi è il teorema di CASTELNUOVO (1897), da cui subito discende il teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie, che assegna l'irregolarità della superficie come valore massimo della deficienza della serie caratteristica dei sistemi lineari completi tracciati su essa (onde, in particolare, ogni sistema lineare completo è a serie caratteristica completa sempre e solo che la superficie sia regolare). La considerazione della serie caratteristica adempie qui all'ufficio importantissimo di ponte di passaggio fra la geometria sopra le superficie e la geometria sulle curve algebriche; per

---

[1] Ved. B. SEGRE, *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri,* questi « Annali », serie IV, t. 11 (1933), p. 1.

i sistemi lineari di curve, tale nozione fondamentale è stata sfruttata da C. SEGRE (1887) e poi dal CASTELNUOVO sul piano, e quindi dall'ENRIQUES e dal CASTELNUOVO sulle superficie algebriche.

Al SEVERI è dovuto (1904) il potente strumento offerto dall'estensione di quel concetto ai sistemi continui di curve, nonchè l'introduzione — su ogni curva di F — della così detta serie caratteristica virtuale (la quale, naturalmente, può anche in particolare risultare effettiva). La potenza del nuovo concetto si dimostrò subito nella scoperta del primo legame generale, così a lungo cercato, che il SEVERI riescì a porre fra l'irregolarità di una superficie e l'esistenza su questa d'integrali semplici di 1ª specie.

Fra le applicazioni più immediate che lo stesso SEVERI fece del concetto medesimo, va mentovata la semplicissima dimostrazione del teorema, anteriormente stabilito dall'ENRIQUES, affermante la non regolarità di ogni superficie che contenga un sistema continuo di curve non appartenenti ad un medesimo sistema lineare. Questo risultato può senz'altro venire invertito (poggiando sul citato teorema di CASTELNUOVO), ove si ammetta che *ogni sistema continuo completo (ossia non ampliabile) di curve tracciate sopra una superficie algebrica,* F, *debba avere la serie caratteristica completa:* e ciò, come ha osservato l'ENRIQUES, fornisce una notevole caratterizzazione delle superficie algebriche irregolari.

Il teorema in corsivo (il cui reciproco è evidente), sussiste effettivamente sotto certe limitazioni, che sembra non si possano completamente evitare, ma che per nulla restringono la portata delle importantissime applicazioni che ne son state fatte; esso costituisce veramente un ganglio vitale, al quale fra l'altro si collegano alcune delle ricerche di SEVERI e quelle di CASTELNUOVO sull'esistenza degli integrali semplici di PICARD annessi ad una superficie irregolare, ed i molteplici risultati che dipendono dalla considerazione della varietà di PICARD di una superficie, la cui introduzione si deve al CASTELNUOVO. Lo diremo perciò brevemente il teorema fondamentale; ad esso è principalmente dedicato il presente lavoro: onde non saranno fuori di luogo le particolareggiate indicazioni storiche e bibliografiche che lo concernono, che passiamo ad esporre nel n.° successivo [2].

2. Il precedente enunciato del teorema fondamentale trovasi in un lavoro di ENRIQUES [3], nel quale — mediante la rappresentazione di F su di un

---

[2] Cfr. in proposito (tranne che pel contenuto dell'ultimo capoverso del n. 2) O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, « Ergebn. der Math. », t. III, 5 (Berlin, Springer. 1935), pp. 82-88.

[3] F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, « Rend. Acc. delle Scienze di Bologna », nuova serie, t, 9 (1904-5), p. 5.

piano multiplo — la determinazione dei sistemi continui completi sulla F viene ricondotta alla costruzione dei sistemi continui di curve piane dotate di certe singolarità ed aventi opportuni contatti con una curva fissa. La dimostrazione — di carattere infinitesimale — data ivi dall'ENRIQUES per il teorema fondamentale, è però soltanto valida per le superficie di genere geometrico $p_g = 0$, e precisamente per curve a serie caratteristica non speciale su esse tracciate, come assai più tardi pose in evidenza il SEVERI (4); e che per stabilire tale teorema non bastino in generale considerazioni di carattere infinitesimale, risulterà ancora meglio dall'esempio — che qui addurremo nel n. 6 — di un sistema continuo completo di curve piane del tipo suddetto, la cui serie caratteristica è non speciale e completa sulla curva generica, mentre è incompleta e speciale su di una sua curva particolare (i cui caratteri proiettivi non differiscono da quelli della curva generica del sistema).

Poco dopo la comparsa del suddetto lavoro di ENRIQUES, il SEVERI espose un'altra costruzione, più semplice e diretta, dei sistemi continui completi di curve tracciate su di una superficie (5); ma, anche coll'indagine del SEVERI, il teorema fondamentale restò acquisito solo per $p_g = 0$.

La prima dimostrazione rigorosa e generale del fatto che sopra una superficie algebrica di irregolarità $q = p_g - p_a > 0$ esiste sempre un sistema continuo ∞^q di curve, una generica delle quali risulta linearmente disequivalente con tutte le altre, si deve al POINCARÉ (6); ed è opportuno notare che tale dimostrazione si vale in modo essenziale dello strumento trascendente, nonostante la natura algebrica del risultato. La costruzione del POINCARÉ, successivamente semplificata — sempre però coll'uso di mezzi trascendenti — dal SEVERI (4) e dal LEFSCHETZ (7), permise al primo di questi Autori di stabilire la completezza della serie caratteristica, sulla curva generica di ogni sistema continuo completo di curve generalmente irriducibili e aritmeticamente effettive. Da quest'ultima restrizione ci si può svincolare nel modo indicato da

(4) F. SEVERI, *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica* (Nota V), « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, t. 30 (1921), nota a piè di p. 297.

(5) F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, « Rend. del Circolo mat. di Palermo », t. 20 (1905), p. 93.

(6) H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, « Ann. École norm. sup. », serie III, t. 27 (1910), p. 55; H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique*, « Sitzungsber. Berlin. math. Ges. », t. 10 (1911).

(7) S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique*, « Mém. des Sciences math. », n. 40 (Paris, Gauthier-Villars, 1924), § VI.

B. Segre ([8]), il quale (servendosi del precedente risultato di Severi) provò che, se esiste — effettiva — la serie caratteristica sopra una curva irriducibile di una superficie F, tale curva sta (almeno) in un sistema continuo completo di F, segante su essa la serie caratteristica completa.

Il teorema fondamentale restava così finora acquisito (colle limitazioni indicate), soltanto per via trascendente; ed una questione che si imponeva, di grandissima importanza per la Geometria algebrica, era quella di dare di esso una dimostrazione con mezzi algebrico-geometrici adeguati alla sua natura. Nuove ricerche in tale intento sono state fatte in questi ultimi anni dall'Enriques ([9]); pare però a chi scrive che le argomentazioni di questo Autore cadano sotto alcune serie obiezioni (qui specificate nel n. 6), onde la questione segnalata rimaneva tuttora in attesa di risposta.

3. Nella prima parte di questo lavoro daremo quella che, dopo quanto precede, ci può essere consentito di chiamare la prima dimostrazione algebrico-geometrica del teorema fondamentale. Tale dimostrazione muove dalla costruzione dei sistemi continui completi nella forma datale nel 1905 dal Severi — integrata col metodo dell'intersezione di falde lineari, esposto da questo Autore nel 1921 — e sfrutta l'importante nozione di serie di equivalenza su di una curva riducibile, introdotta e sviscerata dallo stesso Severi nel 1932 ([10]). *L'idea nuova su cui essa s'impernia — e che costituisce l'elemento essenziale del successo — si vale di una opportuna serie di equivalenza su di una curva riducibile, definita come limite di una serie lineare sopra una curva irriducibile variabile,* e del fatto che la dimensione della prima non può risultare inferiore alla dimensione della seconda.

La suddetta dimostrazione conduce in pari tempo in modo spontaneo, e senza uscire dall'ordine d'idee algebrico-geometrico, al seguente principio

([8]) B. Segre, *Sulla completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di curve irriducibili tracciate su di una superficie algebrica*, « Rend. del Circolo mat. di Palermo », t. 55 (1931), p. 443.

([9]) Cfr.: *a)* F. Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*, « Rend. Seminario mat. R. Univ. Roma », serie III, t. 1 (1931-33), p. 7, § 6; *b)* F. Enriques, *La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 23 $(1936)_1$, p. 459; *c)* F. Enriques, *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica*, « Rend. Seminario mat. R. Univ. Roma », serie IV, t. 1 (1936-37), p. 1, con un'*Addizione* a p. 119; *d)* F. Enriques, *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 25 $(1937)_2$, p. 193. In *a)* la questione trovasi solo impostata; e *b)* non è che un riassunto di *c)*.

([10]) F. Severi, *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, « Mem. R. Acc. d'Italia », t. 3 (1932), Mem. N. 5.

di spezzamento, stabilito in tutta la sua generalità nella seconda parte del lavoro:

Se una curva E *algebrica irriducibile — variando con continuità sopra una superficie algebrica* F, *di genere geometrico* p_g — *viene a spezzarsi in due distinte componenti irriducibili,* C *e* D, *di cui (almeno) una abbia la serie caratteristica effettiva, le* C, D *ammettono in generale di conseguenza non meno di* $p_g + 1$ *punti di collegamento* (ossia punti comuni, che non sono limiti di punti doppi di E). *Più precisamente, supposto — come accadrà in generale — che* (CD) *consti di punti distinti, i punti di collegamento possono essere in numero* $\leq p_g$ *solo s'essi risultano linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di* F.

Questo principio di spezzamento permette intanto (n. 12) di dare una nuova definizione, di carattere algebrico-topologico, pel genere geometrico p_g. Esso arreca inoltre una notevole precisazione al principio di degenerazione di ENRIQUES, secondo cui, se una curva E algebrica irriducibile — variando con continuità sopra una superficie algebrica F — viene a spezzarsi in due componenti, C e D, queste ammettono necessariamente almeno un punto di collegamento. In base al principio di spezzamento si può infatti p. es. asserire, di più, che — se una (almeno) delle C, D possiede la serie caratteristica effettiva — C e D possono ammettere un unico punto di collegamento solo se è $p_g = 0$, oppure se — essendo $p_g > 0$ — il punto di collegamento cade in un punto base del sistema canonico impuro di F (il che, in particolare, senz'altro fornisce la nota proprietà di tale sistema, di contenere necessariamente come parti fisse tutte le curve eccezionali di 1ª specie della superficie).

Il principio di degenerazione è stato stabilito dall'ENRIQUES [11], mediante semplicissime considerazioni topologiche; dimostrazioni di carattere algebrico-geometrico sono state ottenute in seguito dal SEVERI (per curve variabili su di un piano) [12] e da B. SEGRE [13]. Qui (nel n. 4) diamo di esso un'altra dimostrazione puramente algebrico-geometrica, e di semplicità irriducibile, ispirata all'idea nuova a cui si è alluso in principio.

---

[11] Cfr. loc. cit. in [3]; oppure F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. III (Bologna, Zanichelli, 1924), pp. 404-405.

[12] F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, (Leipzig, Teubner, 1921), Anhang F, pp. 319-321.

[13] B. SEGRE, *Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica*, questi « Annali », serie IV, t. 16 (1937), p. 157, n. 6.

PARTE PRIMA

Il teorema fondamentale.

4. Stabiliremo dapprima il principio di degenerazione (enunciato nel n. 3), ponendoci nelle condizioni più semplici. Consideriamo perciò in uno spazio S_k un sistema continuo Σ di curve E generalmente irriducibili e prive di punti multipli, al quale appartenga una curva spezzata in due componenti, C e D, esse pure irriducibili e prive di punti multipli; si tratta di dimostrare che, necessariamente, queste ammettono qualche punto di collegamento.

Suppongasi all'uopo, per assurdo, che C, D non abbiano alcun punto comune; denotando rispettivamente con n, n', n'' e π, π', π'' l'ordine ed il genere delle curve C, D, E, si avrà pertanto:

$$n'' = n + n', \quad \pi'' = \pi + \pi' - 1 \text{ (}^{14}\text{)}.$$

Il sistema lineare costituito dalle forme T di S_k di ordine t sufficientemente elevato, determina sulle curve C, D, E serie lineari g^{γ}_{nt}, $g^{\delta}_{n't}$, $g^{\varepsilon}_{n''t}$ complete e non speciali, le cui dimensioni valgono perciò ordinatamente

$$\gamma = nt - \pi, \quad \delta = n't - \pi', \quad \varepsilon = n''t - \pi''.$$

Orbene, quando E — variando in Σ — tende alla curva spezzata $C + D$, la serie lineare $g^{\varepsilon}_{n''t}$, ottenibile nel modo indicato sulla prima curva, tende manifestamente ad una serie di equivalenza contenuta totalmente nella serie di equivalenza completa della seconda che subordina sulle due componenti C, D le suddette serie lineari g^{γ}_{nt}, $g^{\delta}_{n't}$; e l'assurdità dell'ipotesi ammessa discende subito dal fatto che la dimensione della serie limite risulta inferiore ad ε, valendo al più

$$\gamma + \delta = (n + n')t - (\pi + \pi') = n''t - (\pi'' + 1) = \varepsilon - 1.$$

Allo scopo di stabilire con tutto rigore l'assurdità di questa conclusione, rappresentiamo le curve E di Σ coi punti di una varietà algebrica M ([15]), ed i

---

([14]) La prima di queste due formule è ovvia; la seconda è caso particolare di una nota formula di VALENTINER e NOETHER, per una dimostrazione algebrico-geometrica generale della quale ved. p. es. É. PICARD-G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1906), pp. 105-107.

([15]) Ciò può notoriamente farsi in molti modi, restando nel consueto dominio della geometria algebrica. Un altro modo semplice ed elegante, di carattere più strettamente algebrico, trovasi in W.-L. CHOW e B. L. VAN DER WAERDEN, *Ueber zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten*, « Math. Ann. », t. 113 (1937), p. 692, § 1.

vari gruppi (ET) coi punti di una varietà algebrica N (che può p. es. pensarsi subordinata alla varietà di VERONESE generalizzata, i cui punti rappresentano i gruppi non ordinati di $n''t$ punti di S_k). Fra M ed N intercede allora una corrispondenza algebrica, manifestamente irriducibile, nella quale sono associati un punto di M ed uno di N che rispettivamente rappresentino una curva E di Σ ed un gruppo segato su essa da una T. Siccome ad un punto generico di M corrisponde su N una V_ε, così la dimensione della varietà che corrisponde ad un qualunque punto di M (e la dimensione delle singole parti di tale varietà, s'essa si spezza) non può scendere al disotto di ε ([16]); mentre invece, per ciò che precede, la varietà di N omologa del punto rappresentante $C+D$ su M ha la dimensione non superiore ad $\varepsilon-1$.

La dimostrazione che precede resta sostanzialmente valida — salvo modificazioni di dettaglio, sulle quali è superfluo insistere — se si suppone che la curva irriducibile E sia comunque dotata di punti multipli (nel qual caso si dovranno considerare forme T aggiunte alla E, e perciò generalmente variabili con questa curva), ed anche nell'ipotesi che le C, D ammettano qualche punto multiplo o non siano irriducibili.

5. Ci proponiamo ora d'indicare come — seguendo il SEVERI ([17]) — possa venire impostata la dimostrazione del teorema fondamentale.

Consideriamo sopra una superficie algebrica F, di genere aritmetico p_a e genere geometrico p_g, un sistema lineare regolare irriducibile privo di punti base, di cui C denoti una curva generica; e fissiamo ad arbitrio su F una curva irriducibile D, che determini un sistema lineare regolare e che seghi C secondo un gruppo

$$\Gamma = (CD) \qquad \text{di } c \text{ punti distinti } P_1, P_2, \ldots, P_c,$$

tale che — su C — la somma di questo con un gruppo caratteristico sia non speciale. Allora il sistema lineare

$$|E| = |C + D| \tag{1}$$

risulta irriducibile e regolare, e taglia sulla curva C (che certo non ammette come parte fissa) una serie lineare completa e non speciale; ne consegue che il gruppo Γ impone alle curve di $|E|$ (che debbano contenerlo) precisamente

---

([16]) Questa proprietà — che può ovviamente venir dimostrata con tutto il rigore mediante argomentazioni algebrico-geometriche — trovasi pure stabilita, con mezzi puramente algebrici, da B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen* (Zur algebraische Geometrie, VI), « Math. Ann. », t. 110 (1935), p. 134, § 2.

([17]) Ved. loc. cit. in ([5]), tenendo anche presente quanto è detto nei loc. cit. in ([4]) ed in ([12]).

$c - p_g$ condizioni linearmente indipendenti [18]. Se n, n', n'' e π, π', π'' ordinatamente denotano il grado ed il genere virtuali dei tre sistemi lineari regolari $|C|$, $|D|$, $|E|$, le dimensioni r, s, t di questi vengono espresse dalle

$$(2) \qquad r = p_a + n - \pi + 1, \quad s = p_a + n' - \pi' + 1, \quad t = p_a + n'' - \pi'' + 1;$$

e, in forza della (1), sussistono le

$$(3) \qquad n'' = n + n' + 2c, \quad \pi'' = \pi + \pi' + c - 1.$$

In base al principio di degenerazione di ENRIQUES (qui dimostrato nel n.° precedente), la totalità Σ delle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — dotate di c punti doppi prossimi ai punti di Γ, coincide colla totalità delle curve di $|E|$ spezzate in una curva C_1 prossima a C ed in una curva D_1 prossima a D. Per effettuare nel modo migliore lo studio di Σ, ricorriamo alla rappresentazione proiettiva delle curve di $|E|$ coi punti di uno spazio S_t. In questo vi è luogo a considerare la V_{t-1} algebrica i cui punti corrispondono alle curve di $|E|$ dotate di punto doppio, e la V_α algebrica rappresentante la totalità delle curve di $|E|$ che si spezzano nel modo indicato; ed è chiaro che V_{t-1} passa per V_α colla molteplicità c, e che il punto O — imagine della curva spezzata $C + D$ — sta su V_α, ed anzi, sostituendo eventualmente a C, D opportune curve C_1, D_1 [19], può supporsi (generico su questa, e quindi) semplice per essa: onde Σ ammetterà come imagine in S_t la falda analitica Ψ di V_α — lineare e di dimensione α — avente per origine O.

Sopra l'ipersuperficie V_{t-1}, il punto O è origine di c falde lineari distinte, i punti di una qualunque Φ_i delle quali corrispondono alle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — aventi un punto doppio prossimo ad uno P_i determinato dei c punti di Γ (per $i = 1, 2, \ldots, c$); ed è noto che l'iperpiano tangente in O a Φ_i rappresenta il sistema lineare ∞^{t-1} costituito dalle curve di $|E|$ che passano per P_i. La falda lineare Ψ, risulta per ciò che precede l'intersezione delle c falde lineari

$$(4) \qquad \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_c;$$

dunque lo spazio S_α ad essa tangente in O è subordinato allo spazio S_a lungo cui si segano gli iperpiani tangenti in O alle (4), o coincide con questo: e nei due casi, rispettivamente, si ha

$$(5) \qquad \alpha < a,$$

[18] Relativamente alle semplici proprietà dei sistemi lineari di cui qui si fa uso, si può p. es. vedere quanto è detto in seguito nel n. 8.

[19] In guisa naturalmente da non contraddire alle ipotesi iniziali sulle C, D, il che certo si verifica per le C_1, D_1 generiche.

oppure

$$\alpha = a. \tag{6}$$

Lo spazio S_a, d'altro canto, rappresenta il sistema lineare delle curve di $|E|$ passanti per Γ; ond'è:

$$a = t - (c - p_g). \tag{7}$$

Il sistema continuo $\{C\}$ che si ottiene prolungando analiticamente il sistema analitico costituito dalle suddette curve C_1, ammette su C la serie caratteristica completa, sempre e solo ch'esso abbia dimensione

$$\rho = p_g + n - \pi + 1. \tag{8}$$

Ebbene, questa relazione equivale precisamente alla (6). Invero, una qualunque delle ∞^ρ curve C_1 fa parte di infinite curve del sistema ∞^α Σ, la cui parte ulteriore è necessariamente una delle curve del sistema lineare $|D_1| = |E - C_1|$ prossime a D. Questo sistema lineare ammette gli stessi caratteri virtuali di $|D|$, onde, in virtù del teorema di Riemann–Roch, la sua dimensione dev'essere $\geq s$ ([20]); ma poichè quando $C_1 + D_1$ — variando in Σ – tende a $C + D$, $|D_1|$ tende al sistema lineare ∞^s $|D|$, così in forza di un'argomentazione analoga a quella svolta nel penultimo capoverso del n. 4, anche $|D_1|$ dev'essere ∞^s. Si ha pertanto

$$\alpha = \rho + s;$$

e basta tenere conto di questa relazione e delle (2), (3), (7), per poter verificare la perfetta equivalenza fra la (6) e la (8).

6. Prima di procedere oltre nella dimostrazione del teorema fondamentale, sarà opportuno che ci si soffermi per giustificare quanto abbiamo asserito nel n. 2, a proposito delle ricerche dell'Enriques ivi citate in ([9]). Ecco intanto la via seguita da questo Autore, a prescindere da modificazioni non sostanziali, introdotte solo per semplificare l'esposizione e ricollegarla a quanto precede.

In base al n. precedente, tutto sta nel dimostrare l'impossibilità della (5). Ammesso perciò che la limitazione (5) sussista, si tratta di stabilire l'assurdità di tale ipotesi. La (5) implica che le falde (4) si tocchino lungo tutta la Ψ, esistendo nell'intorno del 1° ordine del generico punto O di V_α qualche punto O' situato su dette falde ma non sulla Ψ [e cioè giacente in S_a ma non

([20]) È ovvio che $|D_1|$ non può essere speciale, tale non essendo per ipotesi $|D|$.

in S_α] ([21]). L'ENRIQUES ritiene di poter dedurre da O ed O' una successione infinita di punti

$$O'',\ O''',\ldots, \tag{9}$$

appartenenti ad intorni di O degli ordini $2^o, 3^o, \ldots$ e tutti situati su ciascuna delle (4); e ciò, qualora fosse dimostrato (il che l'Autore non fa) che la successione (9) definisce un ramo analitico, verrebbe a contraddire al fatto che le (4) non possono avere in O — lungo questo ramo — che un contatto d'ordine finito. Ma la stessa costruzione della successione (9) poggia in modo essenziale su certe ammissioni, che tosto esporremo, sulle quali vertono altre nostre riserve.

Al punto O', infinitamente vicino ad O e situato sulle (4), corrisponde su F una curva E' di $|E|$, infinitamente vicina alla $C+D$ ed avente c punti doppi infinitamente vicini ai punti di Γ. L'ENRIQUES applica ad essa il suo principio di degenerazione, e ne inferisce che la curva E' necessariamente *deve spezzarsi* in una curva C' infinitamente vicina (e non equivalente) a C ed in una curva D' infinitamente vicina (e non equivalente) a D; ma per l'applicabilità del suddetto principio dovrebbe la curva E' poter variare in un sistema continuo, mentre essa è stata solo definita come curva dell'intorno del 1^o ordine di $C+D$ in $|E|$. Per superare questa prima difficoltà, l'ENRIQUES dice che — nelle ipotesi ammesse — le curve $C+D$ ed E' stanno in un sistema continuo di curve E^*, di un conveniente spazio S_k in cui si può pensare immersa F, le E^* essendo tutte dotate di c punti doppi e quindi — per il principio di degenerazione — spezzate in due curve C^* e D^* [tendenti rispettivamente alle C, D quando $E^* \to C+D$] ([22]). Questa affermazione (che, per essere rigorosamente stabilita, necessiterebbe qualche indagine ulteriore), esprime soltanto che C' è curva consecutiva a C in un sistema continuo Ω (che può senza restrizione supporsi ∞^1) di curve C^* situate in S_k, ma non giacenti in generale sulla F; ed analogamente per D'. Nè certo si può far sì che le curve C^* (e, parimente, le D^*) appartengano tutte alla F, poichè se no il punto O' — dianzi considerato in S_t — verrebbe a stare (non solo in S_a, ma addirittura) in S_α, contro il supposto; senza contare che, qualora ciò fosse invece dimostrato sempre possibile, ne seguirebbe subito il teorema fondamentale, e la considerazione della successione (9) risulterebbe del tutto superflua.

([21]) Nel ragionamento dell'ENRIQUES si suppone anzi soltanto che O' appartenga alle (4) e non stia sulla varietà (contenuta in V_α) imagine delle curve di $|E|$ che si spezzano in una curva di $|C|$ ed in una curva di $|D|$.

([22]) Cfr. la nota a piè di p. 59 del lavoro *a*) cit. in ([9]). In *c*) la suddetta difficoltà vien superata (nel n. 3) mediante delicate considerazioni infinitesimali, poggianti sulla rappresentazione di F sopra un piano multiplo; ma, anche per la curva C' a cui in tal guisa si perviene, i rilievi che seguono continuano a sussistere.

È evidente che (non potendosi naturalmente supporre note le proprietà della varietà di PICARD di F, prima di aver stabilito il teorema fondamentale), dal semplice fatto che C' è la curva (sia pure situata su F) ***consecutiva*** a C nel sistema continuo Ω, la cui curva C^* generica non giace su F, *non può dedursi un significato per ogni operazione a cui si voglia assoggettare* C', la quale abbia un senso se applicata alle curve di F (intese nell'accezione solita), ma non lo abbia per le curve C^* di S_k non situate su F. Orbene, dalla possibilità di applicare a C' un'operazione di tale tipo (precisamente: la somma o sottrazione di C' con un qualunque sistema lineare di curve di F), dipende appunto in modo essenziale la dimostrazione indicata in ([9]), *d*) dall'ENRIQUES.

Un'analoga obiezione non può invece venir rivolta ad un'argomentazione, apparentemente consimile, su cui si basa la dimostrazione dell'ENRIQUES data in ([9]), *c*) [e riassunta in ([9]), *b*)]. Ivi infatti si considerano, sopra una curva K di F, i gruppi infinitamente vicini

$$G = (CK), \quad G' = (C'K),$$

e da questi si deduce una successione

$$G'', \quad G''', \ldots \tag{10}$$

di gruppi di K, appartenenti ad intorni di G degli ordini 2°, 3°,..., tali che risulti

$$G' - G \equiv G'' - G' \equiv G''' - G'' \equiv \ldots ;$$

e questa deduzione (alla quale si dà un preciso significato coll'introduzione su K dell'operazione infinitesima $+ G' - G$, generatrice di un gruppo nel senso di LIE) è perfettamente lecita, potendo venir fondata su note proprietà della varietà di JACOBI di K. Tuttavia anche la suddetta dimostrazione è infirmata da una lacuna, che non pare facilmente colmabile, ammettendosi in essa tacitamente che — quando K descrive su F un fascio lineare — ciascuno dei gruppi (10) generi una curva ***algebrica***: il che appare tutt'altro che ovvio, quando si osservi che si perviene sostanzialmente a tali gruppi applicando (ad elementi algebrici) un processo d'integrazione.

Diamo da ultimo l'esempio annunciato nel n. 2, provante che la *serie caratteristica* di un sistema continuo completo di curve piane algebriche — aventi un certo numero di contatti con una curva fissa — *può risultare incompleta* sopra una curva particolare del sistema (i cui caratteri proiettivi non differiscono da quelli della curva generica).

Sopra una quartica piana di genere 3, C, fissiamo 12 punti distinti Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{12}$ segati da una cubica; e consideriamo, nel piano di C, una qualunque curva algebrica L che la tocchi semplicemente negli 11 punti $Q_2, \dots, Q_{12}$. Siccome questi punti presentano 11 condizioni indipendenti alle quartiche che debbano contenerli, le quali passano tutte di conseguenza per Q_1, così il sistema delle quartiche piane prossime a C e tangenti ad L in 11 punti prossimi a $Q_2, \dots, Q_{12}$ ha la dimensione 3, ed ammette Q_1 come punto caratteristico principale [23]. È noto che i punti caratteristici principali di un sistema continuo di curve piane non possono invadere un campo a due dimensioni [24]; se dunque fissiamo genericamente una curva algebrica L_1 che tocchi semplicemente C in Q_1, ed imponiamo alle curve del suddetto sistema ∞^3 di risultare tangenti alla L_1 in un punto prossimo a Q_1, veniamo a definire un sistema continuo completo Σ, ∞^2, contenente C. La serie caratteristica di Σ su C è una serie semplicemente infinita subordinata alla g_4^2 canonica, ed è quindi incompleta.

7. Riprendendo il filo delle considerazioni del n. 5, ci proponiamo ora di dimostrare che *il sistema continuo* $\{C\}$, *ivi definito, ammette la serie caratteristica su* C *completa*; per il che (n. 5) basterà stabilire la (6).

A tal uopo dividiamo (com'è certo sempre possibile) il gruppo $\Gamma = (CD)$ in due gruppi Γ_1 e Γ_2, il primo dei quali consti di $c - p_g$ punti — e siano, per fissare le idee, $P_1, P_2, \dots, P_{c-p_g}$ — che impongano $c - p_g$ condizioni linearmente indipendenti alle curve di $|E|$; mentre per il secondo gruppo (di p_g punti) non abbia a passare alcuna curva canonica impura di F. Le falde lineari

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{c-p_g}$$

ammettono conseguentemente in O $c - p_g$ iperpiani tangenti fra loro linearmente indipendenti (e quindi segantisi lungo S_a), onde — a norma di un classico teorema sulle funzioni implicite definite da un sistema di equazioni analitiche a matrice jacobiana non nulla — esse si segano lungo una falda analitica lineare Ξ, di origine O, avente la dimensione a. Raggiungeremo l'intento prefissoci, provando che — quando si scelga D opportunamente — la falda analitica Ξ concide colla Ψ, ossia (supposto $p_g > 0$) appartiene anche a ciascuna delle falde lineari

(11) $$\Phi_{c-p_g+1}, \dots, \Phi_c.$$

Ragioniamo per assurdo, facendo l'ipotesi che una delle (11) non passi per Ξ; ed incominciamo col mostrare che, conseguentemente, nessuna delle (11) potrà

---

(23) Relativamente a questa nozione, ved. F. SEVERI e B. SEGRE, *L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane*, questi « Annali », serie IV, t. 8 (1930), p. 173, n. 1.

(24) Cfr. loc. cit. in (23), n. 2.

contenere Ξ, ove si ammetta — com'è lecito — che la curva D possa descrivere su F un fascio Λ che seghi C secondo una g_c^1 priva di punti fissi, non composta mediante un'involuzione, ed il cui gruppo jacobiano contenga qualche punto semplice. Il gruppo di monodromia del parametro da cui si possono far dipendere le curve di Λ, pensato come funzione algebrica di una generica funzione razionale del punto scorrente su C, contiene perciò qualche trasposizione ed è (transitivo per l'irriducibilità di C e) primitivo. Per una nota proposizione esso di conseguenza risulta il gruppo totale ([25]), il che significa che — mediante una circolazione di D in Λ — i punti di Γ possono venire permutati fra loro arbitrariamente; in particolare esisteranno circolazioni di D in Λ trasformanti in sè ciascuno dei gruppi Γ_1, Γ_2, e subordinanti fra i punti di Γ_2 una qualsiasi sostituzione. Associando la curva D — variabile in Λ nel modo suddetto — alla curva fissa C, si ottiene una curva — variabile in $|E|$ — la cui imagine in S_t descrive un ciclo, uscente da O e tracciato su V_α, seguendo il quale la falda Ξ viene trasformata in sè, mentre le (11) vengono fra loro permutate arbitrariamente: dunque effettivamente, poichè per ipotesi una delle (11) non passa per Ξ, lo stesso dovrà accadere per ciascuna di tali falde.

La conclusione a cui così siamo pervenuti, e di cui ci proponiamo di stabilire l'assurdità, mostra che su F — in corrispondenza a Ξ — si ha un sistema analitico di curve di $|E|$ prossime alla $C+D$, che ancora denoteremo colla lettera Ξ, una generica E^* delle quali ammette $c-p_g$ punti doppi — costituenti un gruppo Γ_1^* prossimo a Γ_1 — e nessun punto doppio ulteriore; dunque E^* è necessariamente irriducibile (perchè, essendo vicina a $C+D$, non potrebbe spezzarsi che in una curva C_1 prossima a C ed in una curva D_1 prossima a D, onde verrebbe ad avere c punti doppi), ed il suo genere effettivo — uguale al genere virtuale di E^* coi $c-p_g$ punti doppi assegnati — vale

$$\pi^* = \pi'' - (c - p_g) = \pi + \pi' + p_g - 1.$$

Le curve di $|E|$ passanti per Γ_1^* segano su E^* — fuori di Γ_1^* — una g_{n^*}, di ordine

$$n^* = n - 2(c - p_g) = n + n' + 2p_g$$

ed indice di specialità $\geq p_g$ (in quanto essa ammette come residui rispetto

---

([25]) Cfr. p. es. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa, Spoerri, 1900), § 13. — [Aggiunta fatta durante la correzione delle bozze]. Quest'argomentazione trovasi già in F. Enriques, *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, t. 13 (1904), p. 382.

alla serie canonica i gruppi segati su E^* dalle curve canoniche impure di F). Quando E^* — muovendosi in Ξ — tende a $C+D$, la suddetta g_{n^*} tende alla serie di equivalenza segata su $C+D$ — fuori di Γ_1 — dalle curve di $|E|$ che contengono questo gruppo, e che perciò passano anche per Γ_2. Le serie lineari complete $g^{\gamma}_{n+p_g}$, $g^{\delta}_{n'+p_g}$ rispettivamente subordinate da tale serie di equivalenza sulle curve C, D, si hanno manifestamente sommando alle relative serie caratteristiche il gruppo Γ_2, il quale rimane fisso per ciascuna di esse (dato che Γ_2 non sta su alcuna curva canonica impura di F); risulta pertanto:

$$\gamma = n - \pi + p_g, \quad \delta = n' - \pi' + p_g.$$

Mostreremo fra un istante che la $g^{\varepsilon}_{n^*}$ ottenuta completando la g_{n^*} di E^* può farsi tendere con continuità ad una serie di equivalenza totalmente contenuta nella $g^{\gamma}_{n+p_g} + g^{\delta}_{n'+p_g}$ di $C+D$; dal che seguirà senz'altro (come nel n. 4) l'assurdità dell'ipotesi ammessa in principio, dato che si ha:

$$\varepsilon \geq n^* - \pi^* + p_g = n + n' + 2p_g - \pi - \pi' + 1 = \gamma + \delta + 1.$$

Per assodare il punto che ancora resta da stabilire, fissiamo su F una curva A di un sistema lineare $|A|$ così ampio, che le curve di $|A+E|$ passanti per il gruppo $\Gamma_1{}^* + (AE^*)$ seghino ulteriormente su E^* la $g^{\varepsilon}_{n^*}$ completa. È chiaro allora che, quando E^* — muovendosi in Ξ — tende alla $C+D$, le curve ultimamente considerate tendono alle curve di $|A+E|$ che passano pel gruppo $\Gamma_1 + (AC) + (AD)$, le quali appunto ordinatamente segano sulle C, D le suddette $g^{\gamma}_{n+p_g}$, $g^{\delta}_{n'+p_g}$.

Il risultato enunciato in principio di questo n.° è così compiutamente dimostrato (per via algebrico-geometrica). Da esso possono facilmente trarsi, come s'è detto nel n. 2, le forme date da SEVERI e da B. SEGRE pel teorema fondamentale.

PARTE SECONDA

Il principio di spezzamento.

8. Incominciamo col richiamare il seguente lemma [26], di cui poi faremo frequentemente uso.

Dato su di una superficie algebrica F *un sistema regolare* $|C|, \infty^r$ $(r \geq 0)$, *ed una curva irriducibile* D, *non comune a tutte le* C *ed avente la serie caratteristica effettiva, se la somma della serie lineare segata da* $|C|$ *su* D *colla serie*

---

[26] Per la dimostrazione del quale ved. B. SEGRE, *Sui moduli delle superficie algebriche irregolari*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 19 (1934)$_1$, p. 488, n. 1.

caratteristica è non speciale, anche il sistema lineare $|E| = |C + D|$ *risulta regolare, ed inoltre sulla curva* D - *che non ammette certo come parte fissa — questi sega una serie completa (non speciale).*

Da qui discende — come ora appunto ci proponiamo di far vedere — che, se fissiamo in $|C|$ una qualunque curva C, eventualmente spezzata, ma non contenente D come parte, *il gruppo* $\Gamma = (C\,D)$ *impone alle curve di* $|E|$ *(che debbano contenerlo) precisamente* c d *condizioni,* dove c sta per indicare il numero dei punti di Γ e d (≥ 0) denota l'indice di specialità della serie caratteristica $|\Delta|$ di D (serie che per ipotesi risulta effettiva).

Conservando infatti per Γ, $|C|$, $|D|$, $|E|$ le notazioni del n. 5, talchè continueranno a valere le (2), (3), tranne al più la seconda delle (2) (dato che attualmente non abbiamo supposto che $|D|$ sia regolare), in virtù del lemma ricordato si può asserire che le curve di $|E|$ passanti per Γ segano ulteriormente su D la serie caratteristica $|\Delta|$ completa, di dimensione

$$n' - \pi' + d.$$

L'infinità τ del sistema lineare costituito da quelle curve si ha allora subito osservando che, per staccare D da esso, ottenendone come residuo il sistema lineare ∞^r $|C|$, occorre precisamente imporre $n' - \pi' + d + 1$ condizioni indipendenti. Risulta dunque

$$\begin{aligned}\tau = r + (n' - \pi' + d + 1) &= p_a + (n + n') - (\pi + \pi') + d + 2 = \\ &= (p_a + n'' - \pi'' + 1) - c + d = t - (c - d),\end{aligned}$$

ciò che dimostra l'asserto.

9. Supporremo d'ora in poi, per semplicità, che il gruppo Γ consti di c punti distinti. Fra questi punti, in base al n. 8, ne esistono certo $c - d$ offrenti alle curve di $|E|$ $c - d$ condizioni indipendenti, e tali siano p. es. i punti

$$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_{c-d}. \tag{12}$$

Consideriamo su F la totalità Θ delle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — che hanno $c - d$ punti doppi prossimi ai punti (12). Ricorrendo alla rappresentazione iperspaziale di $|E|$ già indicata nel n. 5, si vede facilmente che — nelle ipotesi attuali — Θ costituisce un unico sistema analitico, di dimensione

$$t - (c - d) = \tau.$$

Vogliamo dimostrare che *le curve di* Θ *sono tutte necessariamente spezzate in due parti, l'una prossima a* C *e l'altra prossima a* D.

Raggiungeremo tale intento constatando l'esistenza di un sistema continuo di curve di $|E|$ così spezzate, avente dimensione non inferiore (e quindi uguale) a quella τ di Θ.

Ora intanto, poichè per ipotesi su D esiste — effettiva — la serie caratteristica (avente, se completa, dimensione $n' - \pi' + d$), D dovrà stare (almeno) in un sistema continuo completo, $\{D\}$, di dimensione

$$n' - \pi' + d + 1 \text{ (27)}.$$

Se D_1 è una qualunque curva di $\{D\}$, la curva virtuale $E - D_1$ ha gli stessi caratteri virtuali della C, ond'è virtualmente effettiva; applicando ad essa il teorema di RIEMANN-ROCH, nella forma più generale ottenuta dal SEVERI [28], si ha pertanto che esiste — effettivo — il sistema lineare $|C_1| = |E - D_1|$, di dimensione $\geq r$. Si conclude così nel modo indicato, in quanto la dimensione del sistema continuo costituito dalle curve E spezzate in una somma del tipo $C_1 + D_1$ risulta proprio

$$\geq r + (n' - \pi' + d + 1) = \tau.$$

10. Conservando le precedenti ipotesi e notazioni, supponiamo che una curva E di $|E|$ — prossima alla $C + D$ — eventualmente spezzata, ma che *non consti di due parti prossime l'una a* C *e l'altra a* D [29], tenda alla $C + D$. I punti di Γ si potranno allora distinguere in due categorie, secondochè provengono o meno come limiti da punti doppi di E, ossia rispettivamente a seconda che non risultano oppure risultano punti di collegamento fra C e D; denotiamo ordinatamente con Γ_1, Γ_2 i gruppi costituiti dai punti del primo o del secondo tipo, e con c_1, c_2 il numero di tali punti, talchè sarà

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad c = c_1 + c_2.$$

In virtù del n. 9, non si dovranno poter trovare in Γ_1 dei punti che impongano alle curve di $|E|$ $c - d$ condizioni indipendenti (perchè, in caso contrario, la curva E considerata in principio dovrebbe risultare spezzata nel modo ch'è stato escluso), e quindi potranno solo presentarsi le seguenti due eventualità.

---

(27) Ved. B. SEGRE, loc. cit. in (8), n. 6.

(28) Cfr. F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 40 (1905), p. 766.

(29) Le due contingenze possono verificarsi assieme, poichè (n. 8) *non è escluso che la curva* C *sia riducibile.*

I. — Sia $c_1 < c - d$, onde il gruppo Γ_2 dei punti di collegamento non può essere vuoto, poichè viene a constare di

$$c_2 = c - c_1 \geq d + 1$$

punti. Detto i l'indice di specialità di D su F, si ha sempre ovviamente

$$d \geq p_g - i$$

in quanto — supposto $p_g > 0$, $i < p_g$ — il sistema canonico impuro di F sega su D una serie lineare $\infty^{p_g - i - 1}$, contenuta totalmente in quella residua della serie caratteristica $|\Delta|$ (d'indice di specialità d) rispetto alla serie canonica di D. Dunque intanto, nell'ipotesi che sia $i = 0$, *necessariamente risulta*

(13) $$c_2 \geq p_g + 1.$$

Mentre invece, se $i > 0$, si ottiene

$$p_g - c_2 \leq p_g - d - 1 < i;$$

questo implica che *i punti di* Γ_2 *offrano condizioni linearmente dipendenti alle curve canoniche impure di* Γ, dato che D — e perciò pure Γ_2 — sta in i di tali curve fra loro linearmente indipendenti.

II. — Sia $c_1 \geq c - d$, e (come s'è detto) i punti di Γ_1 impongano alle curve di $|E|$ meno di $c - d$ condizioni. Poichè (n. 8) i punti di $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ impongono invece a tali curve precisamente $c - d$ condizioni, così il gruppo Γ_2 non potrà risultare vuoto — onde per $p_g = 0$ *varrà la* (13) — ed in ogni caso dovrà esserci qualche curva di $|E|$ passante per Γ_1 e non contenente tutti i punti di Γ_2, p. es. escludente il punto P di questo gruppo.

I punti di Γ_2 che restano, in numero di

$$c_2 - 1 = c - c_1 - 1 \leq d - 1,$$

costituiscono un gruppo

$$\Gamma_2^* = \Gamma_2 - P,$$

eventualmente vuoto; ed è chiaro che su D la serie lineare $|\Delta + \Gamma_2^*|$ risulta speciale, $|\Delta|$ avendo per ipotesi l'indice di specialità d. D'altro canto, in base a ciò che precede, la serie lineare completa

$$|(\Delta + \Gamma_2^*) + P| = |\Delta + \Gamma_2|$$

— segabile su D mediante le curve di $|E|$ passanti per Γ_1 — non ammette P come punto fisso. Ne consegue, in forza del teorema di riduzione di NOETHER, che tutti i gruppi canonici di D contenenti un gruppo $\Delta + \Gamma_2^*$ debbono pure contenere P; onde — nell'ipotesi che sia $p_g > 0$ — ogni curva canonica impura di F passante per Γ_2^* deve anche passare per P, sicchè *il gruppo* $\Gamma_2 = \Gamma_2^* + P$

risulta costituito da punti linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di F.

L'analisi precedente fornisce una dimostrazione del principio di spezzamento, enunciato nel n. 3, nell'ipotesi più ampia che C possa essere riducibile, ma colle due seguenti restrizioni, che però verranno tolte nel n.º successivo:

a) la curva E deve variare su F entro un sistema lineare;

b) le due componenti C, D della curva limite spezzata $C+D$ debbono soddisfare alle condizioni espresse nel lemma del n. 8.

11. Stabiliremo ora il summentovato principio di spezzamento in tutta la sua generalità, riconducendoci al risultato parziale già acquisito nel n. 10.

Consideriamo per ciò su di una superficie F una curva E irriducibile, che vari con continuità tendendo ad una curva spezzata in due distinte parti irriducibili, C, D; ed ammettiamo inoltre soltanto che p. es. su D esista — effettiva — la serie caratteristica, e che il gruppo (CD) consti di punti distinti.

Fissiamo su F (in uno qualunque degli infiniti modi possibili) un sistema lineare regolare, $|C_1|$, il quale non ammetta D come parte fissa, determini su questa curva una serie lineare non speciale, ed inoltre contenga parzialmente $|C|$ lasciando un residuo $|C_1 - C|$ a cui appartenga una curva A — virtualmente effettiva — incontrante D in un gruppo (AD) di punti distinti fra loro e dai punti di (CD). La curva $A+C+D-E$ è pertanto virtualmente effettiva, avendo gli stessi caratteri virtuali della A, alla quale si riduce quando $E \to C+D$; si può dunque scrivere l'equivalenza

$$A+C+D-E \equiv A_E,$$

dove A_E è una curva effettiva, variabile con continuità insieme alla E, e tendente ad A per $E \to C+D$.

Posto per abbreviare

$$E_1 = E + A_E, \quad C_1 = C + A,$$

è chiaro che la curva E_1 varia nel sistema lineare fisso $|A+C+D|$, riducendosi per $E \to C+D$ alla curva $C_1 + D$, senza però che esistano curve E_1 — prossime a quest'ultima — spezzate in una parte prossima a C_1 ed in una parte prossima a D. Di più, in base a ciò che precede, le due parti C_1 e D (di cui la seconda irriducibile) che costituiscono la curva limite C_1+D si incontrano in punti distinti, divisi nei due gruppi

$$(AD), \quad (CD),$$

e soddisfanno a tutte le condizioni espresse nel lemma del n. 8 (ove in luogo di C si legga C_1).

Nessuno fra i punti di (AD) può risultare di collegamento fra C_1 e D, in quanto ciascuno di tali punti è limite di un punto (comune alle curve A_E ed E, e perciò) doppio per E_1; mentre invece manifestamente un punto di (CD) è o non è punto di collegamento fra C_1 e D, a seconda ch'esso è o non è tale per la curva $C+D$ considerata come limite della E. Il gruppo dei punti di collegamento fra C e D coincide dunque col gruppo dei punti di collegamento fra C_1 e D, al quale sono applicabili le conclusioni del n. 10; sicchè effettivamente, come asserisce il principio di spezzamento, il gruppo suddetto consta di punti che o sono in numero $\geq p_g+1$, oppure risultano linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di F.

12. Vogliamo da ultimo dimostrare che:

p_g+1 *è il minimo numero di punti assegnabili genericamente sulla* F, *quali punti di collegamento fra due sue curve irriducibili.*

A norma del principio di spezzamento, meno di p_g+1 punti non possono intanto venir assunti genericamente su F come punti di collegamento fra due curve irriducibili di F (dato che queste dovrebbero risultar variabili con quelli, epperciò dotate di serie caratteristiche effettive).

Preso invece comunque su F un gruppo Γ_2 di p_g+1 punti distinti, di cui (se $p_g>0$) p_g qualsiansi non stiano su di una medesima curva canonica impura di F, consideriamo su F due curve irriducibili, C, D, passanti per Γ_2 e segantisi ulteriormente in un gruppo Γ_1 di $c-(p_g+1)$ punti distinti fra loro e dai p_g+1 punti di Γ_2; e mostriamo che, p. es. nell'ipotesi che $|C|$, $|D|$ siano regolari e che non risulti speciale la somma della serie caratteristica (effettiva) di D colla serie lineare segata su questa curva da $|C|$, Γ_2 può venir assunto come gruppo dei punti di collegamento fra C e D.

La serie lineare $|\Delta+\Gamma_2|$ di D, ove Δ denota un gruppo caratteristico di tale curva, non può certo ammettere come fisso alcun punto di Γ_2. Ciò è evidente per $p_g=0$, nel qual caso — stante la supposta regolarità di $|D|$ — $|\Delta|$ riesce non speciale; mentre per $p_g>0$, se un siffatto punto P di Γ_2 esistesse, risulterebbe speciale la serie $|\Delta+(\Gamma_2-P)|$, onde i p_g punti del gruppo Γ_2-P dovrebbero stare (almeno) su una curva canonica impura di F, contro il supposto. Poichè (in virtù del lemma del n. 8) la serie lineare completa $|\Delta+\Gamma_2|$ può venir segata su D dalle curve del sistema lineare $|E|=|C+D|$ che passano per Γ_1, ne deriva che la generica di tali curve non potrà contenere alcuno dei punti di Γ_2. Da qui, sfruttando la rappresentazione iperspaziale del n. 5, si deduce facilmente che in $|E|$ esiste un sistema analitico di curve E^* — prossime alla $C+D$ — aventi $c-(p_g+1)$ punti doppi prossimi ai punti di Γ_1, ma generalmente prive di punti doppi prossimi a qualche punto di Γ_2 (e perciò irriducibili): dunque, effettivamente, Γ_2 risulta il gruppo dei punti di collegamento della curva spezzata $C+D$, considerata come limite delle suddette curve E^*.

La proposizione enunciata in principio, e così dimostrata, porge una nuova *definizione* possibile per il *genere geometrico* p_g di una superficie algebrica F; a tale definizione può venir data veste *topologica*, rammentando che l'equivalenza algebrica fra due curve di F equivale all'omologia fra i cicli bidimensionali che ad esse corrispondono sulla riemanniana di F.

La suddetta proposizione potrà quindi fors'anche venir stabilita direttamente mediante considerazioni topologiche: nel qual caso da essa agevolmente si potrebbe dedurre una nuova dimostrazione del teorema fondamentale, di carattere algebrico-topologico.

Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini.

Par CLAUDE CHABAUTY (à Paris).

Introduction.

Soit à résoudre en entiers rationnels X_i l'équation

$$(1) \qquad \text{Norme } (X_1\omega_1 + \dots + X_n\omega_n) = \pm 1$$

où les ω_i forment une base des entiers d'un corps de nombres algébriques K de degré n (¹). A une telle solution correspond une unité $\varepsilon = X_1\omega_1 + \dots + X_n\omega_n$ de K, et réciproquement les composantes d'une unité de K, par rapport à la base considérée, fournissent une solution de (1) en entiers rationnels. L'existence et la structure des solutions nous sont donc données par le théorème de DIRICHLET: Les unités de K forment, par rapport à la multiplication, un groupe abélien Γ admettant une base minima formée de r éléments d'ordre infini et d'un élément d'ordre fini, et l'on a $r = r_1 + r_2 - 1$, r_1 désignant le nombre de corps réels, $2r_2$ le nombre de corps complexes, parmi les n corps conjugués de K. Nous appellerons r le nombre de DIRICHLET de K.

Le résultat classique de THUE (²) sur les solutions en entiers rationnels d'une équation $F(X, Y) = 1$ où F est une forme homogène à coefficients rationnels, peut s'interpréter comme suit: S'il y a une infinité d'unités dans un module de dimension 2 de nombres de K, les unités contenues dans ce module sont toutes les unités d'un sous-corps quadratique réel de K, multipliées par une unité fixe de K.

Plus généralement, on peut se proposer d'étudier des conditions de possibilité à l'existence d'une infinité de solutions en entiers rationnels à l'équation (1) à laquelle on adjoint un certain nombre d'équations algébriques

$$(2) \qquad F_j(X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, h$$

(¹) Après les expressions: « degré, ou corps conjugués d'un corps de nombres algébriques », « module », nous supposons toujours qu'il est sous-entendu « par rapport au corps R des nombres rationnels ».

(²) A. THUE, « Journ. für Math. », Bd. 135 (1909).

dont nous pouvons, sans restreindre la généralité du problème, supposer les coefficients rationnels. (Le cas envisagé par THUE correspond à un système (2) formé de $n-2$ équations linéaires, homogènes, indépendantes, sur les X_i).

On obtient facilement des conditions suffisantes assez larges, que doit remplir le système d'équations (1), (2), pour qu'il ait une infinité de solutions en entiers rationnels X_j. Alors l'ensemble des unités de K qui correspondent à ces solution, a une structure assez simple: A condition de négliger peut-être un nombre fini d'entre elles, il est constitué par la réunion des éléments d'un nombre fini de sous-groupes de Γ ou de classes de Γ par rapport à des sous-groupes. On peut conjecturer que ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires, et que les solutions du système ont toujours cette structure. C'est ce que confirme le résultat de THUE qui donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une infinité d'unités dans un module de dimension 2, et le résultat analogue que nous établirons dans ce travail pour certains modules de dimension 3. Mais rien de pareil n'est démontré dans des cas plus généraux, et l'on obtient des conditions nécessaires qui ne sont pas suffisantes.

Les résultats antérieurs à ce travail, autres que ceux de THUE, concernent encore le cas où (2) est un système d'équations linéaires et homogènes. En approfondissant les méthodes d'approximation diophantiennes de THUE, C. SIEGEL a montré [3] que dans un module de base 1, ω, $\omega^2,\dots,$ ω^{s-1} du corps $K=R[\omega]$ de degré n, il n'y a qu'un nombre fini d'unités quand s ést suffisamment petit par rapport à n ($n>4s^4-2s^2+1$). En se servant d'une métrique p-adique convenable, T. SKOLEM [4] a montré que pour un corps de degré 5 ayant 4 corps conjugués imaginaires, il n'y a qu'un nombre fini d'unités dans un module de dimension 3.

Les résultats de ce travail concernent le cas suivant: les équations du système (2) sont en général de degré quelconque, mais la variété algébrique W définie dans l'espace de $X_1,\dots,$ X_n par les équations (1) et (2) est supposée formée de composantes irréductibles de dimension $s\leq n-r-1$, r étant toujours le nombre de DIRICHLET de K. Le résultat central est le suivant:

A tout ensemble $\mathfrak{E}$ d'une infinité d'unités de K *appartenant à une variété algébrique* W *de dimension* s *correspond au moins un sous-groupe* γ *de* Γ *ayant les propriétés suivantes:*

([3]) C. SIEGEL, « Math. Zeit. », Bd. 10 (1921).
([4]) T. SKOLEM, « Math. Annal », Bd. 111 (1936).

1°) *Il y a au moins une classe de* Γ/γ *qui contient un sous-ensemble infini de* $\mathfrak{S}$.

2°) *Entre* $\sigma = r + s - 1$ *quelconques des conjugués d'une unité* ε *appartenant à* γ, *soient* $\varepsilon^{(q_1)}, \ldots, \varepsilon^{(q_\sigma)}$, *il y a une relation*

$$\varepsilon^{(q_1)^{m_{q_1}}} \ldots \varepsilon^{(q_\sigma)^{m_{q_\sigma}}} = 1 \tag{3}$$

les exposants $m_{q_1}, \ldots, m_{q_\sigma}$ *étant des entiers rationnels non tous nuls, ne dépendant que du choix des conjugués, mais non du choix de* ε *dans* γ.

Nous donnons deux types d'applications de ce théorème, en examinant la compatibilité des équations (3) avec la nature du groupe de Galois G de K, ou avec la nature de la variété W. Nous obtenons ainsi les résultats suivants:

1.° *Pour toute une catégorie de corps de nombres algébriques finis, qui contient en particulier tous les corps de degré premier, et tous les corps dont le groupe de Galois est le groupe symétrique, il ne peut y avoir une infinité d'unités appartenant à une variété algébrique de dimension* $\leq n - r - 1$.

2.° *L'existence d'une infinité d'unités dans un module de nombres algébriques de base* $(1, \alpha, \beta)$, *où le corps* $K = R[\alpha, \beta]$ *a au moins* 4 *corps conjugués complexes, admet une condition nécessaire et suffisante analogue à celle trouvée par* Thue *pour les modules de dimension* 2, *à savoir que le module considéré contienne le module des nombres d'un certain sous-corps de* K.

Nous en déduisons que *l'inégalité*

$$|X + Y\alpha + Z\beta| \leq \frac{c}{(|X| + |Y| + |Z|)^{n-1}}$$

où n *est le degré de* $K = R[\alpha, \beta]$, *toujours assujetti à avoir au moins* 4 *conjugués imaginaires, n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels* X, Y, Z, *quelle que soit la constante réelle positive* c.

Le chapitre I est consacré à l'étude des variétés algébroïdes dans un espace où les points sont des systèmes de n nombres pris dans un corps p-adique algébriquement fermé. Nous démontrons principalement que ces variétés sont localement décomposables en variétés irréductibles, et que chaque élément irréductible est susceptible d'une représentation paramétrique locale de « Weierstrass », le nombre de paramètres indépendants définissant la dimension de l'élément.

Dans le chapitre II, nous considérons un « groupe abélien multiplicatif de points » de X^n, Γ, de « rang » r, $r \leq n - 1$, dont les points de base ont pour coordonnées des nombres algébriques. Nous supposons qu'une variété algébrique W de X^n de dimension $s \leq n - r$ contienne un ensemble infini $\mathcal{E}$ d'éléments de Γ. Nous étudions les relations entre W et Γ par l'intermédiaire de sous-variétés algébriques de W et de sous-groupes de Γ « minimaux » par rapport à l'ensemble $\mathcal{E}$. Nous utilisons des transformations de l'espace X^n (congruences) et des procédés de composition de variété (produits de variétés). Ils nous permettent de construire dans X^n une variété algébrique $\widehat{W}$ de dimension $\leq s+r-1$ contenant tous les éléments d'un sous-groupe convenablement choisi de Γ. Il en résulte un théorème analogue au théorème (3.1).

Dans le chapitre III, nous supposons que le groupe Γ est le groupe des points ayant pour coordonnées une unité de K et ses conjuguées, le théorème précédent donne alors le théorème (3.1). Nous en faisons ensuite les applications mentionnées plus haut à des équations diophantiennes particulières.

Une partie de ces résultats a été résumée dans trois notes aux « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris » [5].

Monsieur GARNIER m'a donné de précieux conseils durant la rédaction de ce travail. Je suis heurex de l'en remercier.

CHAPITRE I. - Séries entières à coefficients p-adiques.

Corps p-adiques. — Rappelons quelques définitions et propriétés des corps p-adiques qui nous seront utiles par la suite [6].

Soit R le corps des nombres rationnels, p un nombre naturel premier. Tout nombre q de R peut se mettre sous la forme $q = p^\lambda q'$, où λ est un entier rationnel, q' un nombre de R égal au quotient de deux entiers de R premiers entre eux, dont aucun n'est multiple de p; p^λ s'appelle la participation de p à q, λ l'ordre de q (pour p). On appelle *valeur absolue* p-*adique de* q, que l'on notera $|q|_p$, le nombre réel $\left(\frac{1}{p}\right)^\lambda$ quand $q \neq 0$. On pose $|0|_p = 0$. On a:

$$(1)\quad \begin{cases} |q_1 \cdot q_2|_p = |q_1|_p \cdot |q_2|_p \\ |q_1 + q_2|_p = \mathrm{Max}\,(|q_1|_p, |q_2|_p) \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \lambda(q_1 \cdot q_2) = \lambda(q_1) + \lambda(q_2) \\ \lambda(q_1 + q_2) = \mathrm{Min}\,(\lambda(q_1), \lambda(q_2)). \end{cases}$$

Si l'on prend comme distance de deux éléments q_1, q_2 de R, $|q_2 - q_1|_p$, R devient un espace métrique. Sa fermeture topologique R_p s'appelle *le corps*

---

[5] « C. R. », t. 202, p. 2117, Juin 1936; t. 204, p. 942, Mars 1937; t. 205, p. 943, Novembre 1937.

[6] Pour leur démonstration, Cf. CHEVALLEY, « Thèse «, Paris, 1933, *Sur la théorie du corps de classe*, chap. V, p. 407-423, et « Journ. of the faculty of sciences », Tokyo, 1933.

des nombres rationnels p-*adiques*. La valeur absolue p-adique définie dans R induit une valeur absolue p-adique dans R_p.

On sait [7] que pour tout corps on peut former *des extensions algébriquement fermées* (c. à. d. dans laquelle tout polynôme d'une variable à coefficients dans le premier corps se décompose en un produit de facteurs linéaires) qui soient algébriques sur ce corps, et de telles extensions sont équivalentes. Soit H_p l'une d'elle. Soit q un élément de H_p, $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$ $\dots + a_n = 0$ l'équation irréductible à coefficients dans R_p à laquelle satisfait q, μ l'ordre de la norme a_n de q, on démontre que la valeur absolue $|q|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{\mu}{n}}$ est un prolongement de la valeur absolue définie dans R_p et elle satisfait encore aux relations (1). Nous appellerons $\lambda = \frac{\mu}{n}$ l'ordre de q, il satisfait aux relations (2).

Les nombres de H_p d'ordre ≥ 0 sont dits *entiers* p-*adiques*. Ils forment un anneau E_p dans H_p. Ceux d'ordre nul ont aussi leurs inverses dans E_p; ils sont dits *unités* p-*adiques*. Ils forment un groupe abélien multiplicatif. Les entiers et les unités algébriques sont des entiers et unités p-adiques.

La valeur absolue p-adique fait du corps H_p un espace métrique, mais il n'est plus complet, comme l'était R_p (une suite de nombres de H_p, convergente au sens de CAUCHY, n'a pas nécessairement une limite dans H_p). Les relations (1) entraînent:

THÉORÈME 1.1. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* a_n *d'éléments de* H_p *soit convergente au sens de Cauchy, est que* $\lim\limits_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

Soit K_p un sous-corps de H_p qui soit une extension algébrique finie de R_p. Il y a [6] dans K_p un nombre π, entier p-adique, qui n'est pas une unité p-adique et dont l'ordre est minimal. L'ordre de tout nombre de K_p est un multiple de celui de π, de sorte que tout nombre de K_p peut se mettre sous la forme $\pi^\mu u$, μ entier rationnel, u une unité p-adique de K_p. Les seuls idéaux de l'anneau des entiers de K_p sont les idéaux $(\pi)^m$, le seul idéal premier est (π). En particulier (p) est un idéal de la forme $(\pi)^e$. Le nombre de classes de restes de l'anneau des entiers de K_p par rapport à l'idéal (π), est un nombre fini p^f. Cela permet de démontrer que K_p est localement compact (de toute suite infinie d'éléments bornés de K_p on peut extraire une suite convergente au sens de CAUCHY).

[7] Cf. Van der WAERDEN, *Moderne Algebra*, Bd. 1, § 60.

On démontre aussi (6) que K_p peut être obtenu en adjoignant à R_p un nombre θ, algébrique sur R, et que K_p est la fermeture topologique de $K = R[\theta]$ pour la valeur absolue p-adique. Donc K_p est complet et les suites convergentes qu'on peut extraire d'une suite infinie d'éléments bornés de K_p convergent vers un élément de K_p. C'est la propriété de compacité en soi. *Tout sous-corps de* $\mathrm{H_p}$ *qui est une extension algébrique finie de* $\mathrm{R_p}$ *est localement compact en soi.*

Séries à coefficients p-adiques. — Dans la suite, nous considérerons des systèmes de n valeurs $x_1, \ldots, x_n$, prises dans H_p comme un point d'un espace X^n, produit direct de n espaces H_p. La métrique p-adique definie dans H_p, induit dans X^n une topologie qu'on peut engendrer par la métrique $\mathrm{Dist}\,(A_1 A_2) = \sum_{i=1}^{n} | a_{2i} - a_{1i} |_p$, par exemple. Nous appellerons *voisinage* d'un point Q de X^n un domaine de X^n contenant pour certaines valeurs des nombres réels positifs m_2 tous les points tels que

$$| x_i - x_{iQ} |_p \leq m_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous considérerons des séries de puissances entières rationnelles positives de n variables $x_1, \ldots, x_n$

$$A = \sum_{h_1, \ldots, h_n} a_{h_1 \ldots h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

où nous supposerons que les coefficients appartiennent à une même extension algébrique finie $\mathrm{K_p}$ *de* $\mathrm{R_p}$, de sorte que si la série converge quand on substitue aux x_i des valeurs x_i^0 de H_p, elle converge vers un nombre du corps topologiquement complet $K_p[x_1^0, \ldots, x_n^0]$. Par définition, une *fonction analytique* de n variables $x_1, \ldots, x_n$ est la somme d'une telle série dans son domaine de convergence.

Appelons *hauteur* d'un terme de la série le nombre naturel $h = h_1 + \ldots + h_n$. D'après le théorème (1.1), on a:

THÉORÈME 1.2. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série multiple* $\sum_{\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n} \mathrm{b}_{\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n}$ $(\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ *converge, est que la valeur absolue du terme général tende vers zéro quand* h *croit indéfiniment.*

Ce théorème donne pour la convergence des séries une condition beaucoup plus large qu'en analyse ordinaire. Aussi dès qu'une série à coefficients p-adiques est convergente, elle aura des propriétés qui en analyse ordinaire, caractérisent les séries absolument convergentes. En effet, du théorème (1.2) résulte que: toute série extraite d'une série p-adique convergente A, est elle-même convergente. Soit une suite de telles séries partielles A_n. Soit h_n la plus petite hauteur des termes de A figurant dans A_n, si h_n croit indéfiniment avec n alors $|A_n|_p$ tend vers zéro. Donc:

THÉORÈME 1.3. — *Si on somme les termes d'une série convergente par un procédé quelconque qui épuise tous les termes de la série, on obtient la même limite qu'avec le procédé qui définit la série* ([8]).

Du théorème (1.2) résulte aussi que *si une série entière à* n *variables est convergente pour* $x_i = b_i$ *elle converge uniformément pour tout le domaine* $|x_i|_p \leq |b_i|_p$. Si tous les b_i sont $\neq 0$, nous appellerons un tel domaine un *cube de convergence.*

Si une suite de points Q de X^n tend vers le point Q_0 de coordonnées x_{i0}, on finit par avoir $|x_i|_p = |x_{i0}|_p$ pour les valeurs de l'indice i telles que $x_{i0} \neq 0$; il en résulte que si une série entière converge pour une suite de points de l'espace des variables, elle converge pour tous les points limites de la suite,

On démontre aisément que *si la somme d'une série entière est nulle dans tout un voisinage de l'origine, la série est identiquement nulle, c. a. d. tous ses coefficients sont nuls.*

THÉORÈME 1.4. — *Si une série entière* $f(x_1, \dots, x_n)$ *converge au voisinage de l'origine, si l'on fait le changement de coordonnées* $(x_i \to a_i + y_i)$, a_i *étant un point où* f *converge, et si l'on ordonne la série obtenue par rapport aux puissances des* y_i, *on obtient une série entière* $\varphi_a(y_1, \dots, y_n)$ *qui a même domaine de convergence que* f, *et même somme que* f *aux mêmes points.* (Il n'y a donc pas de prolongement analytique).

En effet, considérons la série entière à $2n$ variables $F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, obtenue en substituant dans f, $x_i + y_i$ à x_i. Si f admet le cube de convergence $|x_i|_p = |p^{m_i}|_p$, faisons le changement de variables $x_i' = x_i/p^{m_i}$, $y_i' = y_i/p^{m_i}$. Appelons f', φ', F', les fonctions correspondantes. Comme f' converge pour $|x_i'|_p = 1$, le valeur absolue p-adique de ses coefficients tend vers 0 quand la hauteur de leur indice croit indéfiniment. Comme chacun des coefficients de F' est égal à un coefficient de f' multiplié par un entier rationnel, ils ont aussi cette propriété, et F' admet le cube $|x_i|_p \leq 1$,

---

([8]) Le théorème (1.3) est valable plus généralement pour toute série d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque lorsque la série est *commutativement convergente* c. a. d. qu'elle reste convergente après un changement quelconque de l'ordre de ses termes (cf. BANACH, *Opérations linéaires*, p. 240). Les séries p-adiques sont un exemple de séries qui peuvent être commutativement convergentes sans être absolument convergentes.

$|y_i|_p \leq 1$ comme cube de convergence. Puisque pour un système de valeurs a_i', b_i', des x_i', y_i' en valeur absolue ≤ 1 la valeur de f s'obtient en sommant les termes de la série convergente $F'(a_i'; b_i')$ suivant une loi qui les épuise tous, il résulte du théorème (1.3) que $f'(a_i' + b_i') = F'(a_i'; b_i')$. Mais le même théorème montre que $\varphi_a'(b_i')$ converge alors vers la même valeur. Donc, dans tout domaine où f converge, φ converge vers la même valeur, et réciproquement puisque f et φ jouent un rôle symétrique.

On déduit facilement du théorème (1.4):

THÉORÈME 1.5. — *Si une série entière est identiquement nulle, dans tout un voisinage d'un point du domaine de convergence, elle est identiquement nulle.*

REMARQUE. — Ayant défini comme en analyse ordinaire, les dérivées partielles d'un polynôme en $x_1, \dots, x_n$ par rapport aux différentes variables, et celles d'une série entière $f(x_1, \dots, x_n)$ comme obtenues par la dérivation terme à terme, on voit facilement que si f converge dans le cube $|x_i|_p = |a_i|_p$ ses dérivées convergent aussi dans le même cube. On a donc l'interprétation des coefficients du développement de f, et du développement de $\varphi_a(y_1, \dots, y_n) \equiv$ $\equiv f(a_1 + y_1, \dots, a_n + y_n)$ par les formules de MAC-LAURIN et TAYLOR

$$\varphi_a = \sum_{h_1, \dots, h_n} b_{h_1, \dots, h_n} y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n} = \sum_n \frac{1}{n!} \left\| y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|^n.$$

On démontre de même à l'aide du théorème (1.2) l'analyticité d'une fonction analytique de fonctions analytiques:

THÉORÈME 1.6. — *Soient* A *une série entière de* n *variables* $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$, *convergente dans un voisinage* D *de* $\mathrm{x}_1 = \dots = \mathrm{x}_n = 0$; $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n$ *des séries entières de* m *variables,* $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m$ *convergentes dans un voisinage* D' *de* $\mathrm{y}_1 = \dots$ $\dots = \mathrm{y}_m = 0$, *nulles pour* $\mathrm{y}_1 = \dots = \mathrm{y}_m = 0$; *si nous effectuons dans* A *la substitution* $\mathrm{x}_i = \mathrm{B}_i$, $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$, *on obtient une série entière* A' *en* y_i *qui converge pour tous les systèmes de valeurs des* y_i *de* D' *qui donnent des systèmes de valeurs des* x *appartenant à* D.

Et le théorème:

THÉORÈME 1.7. — *Soient* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r$ *des séries entières de* n *variables* $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$, *convergentes dans un voisinage de* $\mathrm{x}_1 = \dots = \mathrm{x}_n = 0$, *telles que la matrice à* r *lignes et* n *colonnes* $\left\| \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \mathrm{x}_j} \right\|$ *soit de rang* r *pour* $\mathrm{x}_1 = \dots = \mathrm{x}_n = 0$. *Soient* $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n$, n *séries entières de* n *variables* $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n$, *convergentes au voisinage de* $\mathrm{y}_1 = \dots = \mathrm{y}_n = 0$, *telles que la matrice à* n *lignes et* n *colonnes* $\left\| \frac{\partial \mathrm{B}_i}{\partial \mathrm{x}_j} \right\|$ *soit de rang* n *pour* $\mathrm{y}_1 = \dots = \mathrm{y}_n = 0$. *Effectuons dans les* A *la* *substitution* $x_i = B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *les* A *deviennent des fonctions des* y *telles que la matrice à* r *lignes et* n *colonnes* $\left\| \frac{\partial A_i}{\partial y_j} \right\|$ *soit de rang* r *pour* $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Idéaux de séries entières convergentes. — Considérons toutes les séries entières de n variables $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients dans H_p

$$A = \sum_{h_1, \ldots, h_n} a_{h_1, \ldots, h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n} \qquad (h_1, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty($$

satisfaisant aux conditions suivantes: chacune d'elles est convergente dans un voisinage de l'origine et ses coefficients sont dans une même extension algébrique finie de R_p. Elles forment un anneau d'intégrité U_n.

Pour l'anneau analogue dans les séries dont les coefficients sont des nombres complexes ordinaires, il y a des théorèmes classiques renseignant sur la structure des idéaux et des variétés des zéros de ces idéaux. Les mêmes problèmes se posent pour U_n. Nous y trouverons des réponses analogues, principalement: le résultat que pour la variété des zéros d'un idéal premier, il y a une représentation paramétrique de « Weierstrass ». Pour les obtenir, nous démontrerons entre éléments de U_n une identité connue dans le cas classique sous le nom de formule de Weierstrass. Nous référerons pour le détail des démonstrations de ses conséquences à un mémoire de W. Ruckert [9], (mémoire désigné dans la suite par W. R.), car elles en sont déduites par des procédés purement algébriques, valables encore dans le cas que nous considérons.

Donnons quelques définitions préalables. Un élément de U_n sera dit *unité* quand il existe un élément B de U_n tel que $AB = 1$. Alors, on a nécessairement $A(0, \ldots, 0) \neq 0$. L'identité $(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ et une majoration facile permettent de démontrer que cette condition est suffisante pour que A soit une unité. Deux éléments A, B de U_n seront dits *équivalents* s'il existe une unité C de U_n telle que $A = BC$.

Si $A(0, \ldots, 0, x_n) \neq 0$, A sera dit *régulier en* x_n de degré s, s étant la plus petite puissance de x_n à coefficient non nul dans $A(0, \ldots, 0, x_n)$. Par un changement de coordonnées, portant seulement sur $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on peut toujours amener un élément A à être régulier en x_n

Si A est un polynôme en x_n, à coefficients non unités de U_{n-1} (anneau analogue à U_n pour les séries entières en $x_1, \ldots, x_{n-1}$), à l'exception du terme

(9) W. Ruckert, « Math. Annal. », Bd. 107 (1932), p. 259-281.

de plus haut degré x_n^s dont le coefficient est 1, A est dit un *polynôme distingué* en x_n de degré s.

Démontrons alors la

FORMULE DE WEIERSTRASS. — *Soit* F *un élément de* $\mathrm{U_n}$, *régulier en* $\mathrm{x_n}$ *de degré* s, *à tout élément* A *de* $\mathrm{U_n}$ *correspondent les éléments* B *et* C *de* $\mathrm{U_n}$. C *étant en* $\mathrm{x_n}$ *un polynome de degré* $\leq \mathrm{s}-1$, *tels que l'on ait identiquement* $\mathrm{A = FB + C}$.

Prenons un voisinage de zéro $|x_i|_p \leq |\lambda|_p$ suffisamment petit pour que A et F y convergent tous deux. Par un changement de variables $x_i' = \frac{x_i}{\lambda}$ $i = 1, \ldots, n$, A et F donnent deux séries que nous continuons à appeler A et F, convergentes pour $|x_i'|_p = 1$, dont les coefficients ont une valeur absolue p-adique qui tend vers zéro avec l'inverse de la hauteur de leur indice. Par une changement de variables $x_n'' = \frac{x_n'}{\lambda'}$ avec $|\lambda'|_p$ suffisamment petit, nous obtenons que le coefficient de $x_n'^s$ dans F soit le plus grand de ces coefficients des pures puissances de x_n, et en faisant ensuite $x_i'' = \frac{x_i'}{\lambda''}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, avec $|\lambda''|_p$ assez petit, nous obtenons que ce coefficient soit le plus grand de tous les coefficients dans F.

Dans le corps K_p algébrique fini sur R_p, qui contient les coefficients de F et A on peut trouver un nombre π tel que tout nombre a du corps, se mette sous la forme $a = \pi^\mu \varepsilon$, ε étant une unité p-adique du corps, c'est-à-dire un nombre d'ordre zéro. Comme les coefficients de F et G tendent vers zéro quand la hauteur de leur indice croit indéfiniment, il n'y en a qu'un nombre fini de même ordre, on peut donc écrire:

$$A = \pi^h(g_0 + \pi g_1 + \ldots + \pi^q g_q + \ldots)$$

les g_i étant des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients unités de K_p, de même pour F, avec cette remarque que f_0 se réduit à $\varepsilon_0 x_n^s$

$$F = \pi^{h'}(\varepsilon_0 x_n^s + \pi f_1 + \ldots + \pi^q f_q + \ldots).$$

Nous pouvons supposer $h = h' = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, car nous ne considérons pas comme différents deux éléments de U_n dont le quotient est une constante.

Considérons des éléments de U_n, B, C:

$$B = \sum_{q=0}^{+\infty} \pi^q b_q \qquad C = \sum_{q\ 0}^{+\infty} \pi^q c_q$$

b_q et c_q étant des éléments de U_n à déterminer. L'identité $A = FB + C$ est équivalente au système de l'infinité de congruences $A \equiv FB + C$ (mod. π^q) ($q = 1, 2, \dots$ à l'infini). Ce système est satisfait s'il en est de même pour le système d'une infinité d'égalités:

$$(q) \qquad a_q = x_n{}^s b_q + f_1 b_{q-1} + \dots + f_q b_0 + c_q$$

obtenu en égalant les coefficients des différentes puissances de π.

Supposons qu'on ait pu, pour $q = 0, 1, \dots, h-1$, déterminer des éléments de U_n, b_q, c_q, qui satisfassent aux égalités d'indices (0), (1),..., $(h-1)$, et qui soient des polynômes en $x_1, \dots, x_n$, à coefficients d'ordre ≥ 0, les c_q de degré $\leq s-1$ en x_n. Alors, posant $d_h = a_q - x_n{}^s b_q - \dots - f_q b_0$, d_h est encore un polynome en $x_1, \dots, x_n$ à coefficients d'ordre ≥ 0. La relation (q) s'écrit, pour $q = h$:

$$(h) \qquad d_h = x_n{}^s b_h + c_h$$

d_h est connu. Si on prend pour b_h, c_h, respectivement le quotient et le reste de la division de d_h suivant les puissances décroissantes de x_n par $x_n{}^s$, l'égalité (h) est satisfaite et b_h et c_h sont des polynomes en $x_1, \dots, x_n$ à coefficients d'ordre ≥ 0, c_h étant de degré $\leq s-1$ en x_n. Nous formons donc ainsi par récurrence tous les polynômes b_q, c_q.

Dans $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} \pi^q b_q$ développé suivant les monômes en $x_1, \dots, x_n$, le coefficient du monôme $x_1{}^{r_1} \dots x_n{}^{r_n}$ est égal à $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} \varepsilon_{r_1, \dots, r_n, q}\, \pi^q$, $\varepsilon_{r_1, \dots, r_n, q}$ étant le coefficient de $x_1{}^{r_1} \dots x_n{}^{r_n}$ dans b_q, coefficient qui est d'ordre ≥ 0, le terme général de cette série tend vers 0 et c'est toujours un nombre de K_p, cette série converge vers une limite $b_{r_1, \dots, r_n}$ de K_p d'ordre ≥ 0, donc $B = \sum\limits_{r_1, \dots, r_n} b_{r_1, \dots, r_n} x_1{}^{r_1} \dots x_n{}^{r_n}$ converge pour $|x_i|_p = 1$ et tous ses coefficients appartiennent à K_p. B est donc un élément de U_n. De même C, qui en outre, est un polynome en x_n de degré $\leq s-1$. Et ils satisfont bien à l'identité $A = FB + C$. On a donc trouvé les éléments cherchés.

Applications. — Prenons $A = x_n{}^s$. A F correspond un élément B tel que $FB = A - C$ soit un polynome en x_n à coefficient dans U_{n-1}, dont le terme de degré la plus élevé est $x_n{}^s$. On montre facilement que B est une unité de U_n, que $A - C$ est un polynome distingué en x_n et qu'il est uniquement déterminé (Cf. W. R., p. 262). On a donc le

Lemme de Weierstrass [10]. — *Tout élément de* U_n, *régulier en* x_n, *de*

[10] Voir pour une démonstration directe Th. Skolem, « Math. Ann. », 111, 1936, p. 399. Mais le lemme de Weierstrass ne nous suffirait pas pour obtenir la représentation paramétrique dont nous avons besoin pour des variétés algébroïdes.

degré s, *est équivalent à un polynôme distingué de degré* s *en* x_n, *uniquement déterminé.*

Comme cas particulier pour les éléments de degré 1 en x_n, on a le:

Théorème de l'inversion. — *A étant un élément de* U_n *tel que* $A = 0$ *et* $\frac{\partial A}{\partial x_n} \neq 0$, *à l'origine, l'équation* $A = 0$ *définit* x_n *comme fonction analytique de* $x_1, \ldots, x_{n-1}$ *au voisinage de* $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$.

Par récurrence, on obtient le théorème analogue pour les fonctions implicites de plusieurs variables.

Théorème général de l'inversion. — *Soient* $F_1, \ldots, F_h$, h *fonctions analytiques des* $h + m$ *variables* $u_1, \ldots, u_h$, $x_1, \ldots, x_m$, *nulles quand les* u *et les* x *sont nuls, convergentes au voisinage de ce système de valeurs, et telles que le déterminant fonctionnel* $\frac{D(F_1, \ldots, F_h)}{D(u_1, \ldots, u_h)}$ *soit différent de zéro quand les* x *et les* u *sont nuls. Alors les équations* $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ *définissent les* u *comme fonctions analytiques des* x, *nulles pour les* x *nuls, et convergentes dans un voisinage de ce système de valeurs des* x.

Variétés algébroïdes. — Appelons *variété algébroïde* en 0 ($x_1 = \ldots = x_n = 0$) l'ensemble des points de l'espace X^n qui sont des zéros communs à un système d'éléments de U_n.

La formule de Weierstrass permet, par récurrence, sur le nombre des variables, de démontrer la propriété triviale dans $U_0 = H_p$ qui est un corps, que dans U_n tout idéal a une base finie (Cf. W. R., p. 264) et par conséquent peut se représenter comme intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires. A chaque idéal primaire est attaché un idéal premier (qui possède la même variété de zéros). La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété algébroïde soit *irréductible* (c'est-à-dire qu'elle ne puisse être représentée comme la somme de deux variétés algébroïdes en 0 dont aucune ne contient l'autre) est que son idéal propre (c'est-à-dire l'idéal de tous les éléments de A s'annulant sur tout un voisinage de 0 de la variété) soit premier. Il en résulte:

Théorème 1.8. — *Une variété algébroïde en* 0 *est décomposable dans un voisinage de* 0, *en un nombre fini de variétés algébroïdes en* 0, *irréductibles.*

Soit alors $\mathfrak{P}$ un idéal premier de U_n, Π_n le corps quotient de l'anneau de classes de restes $U_n/\mathfrak{P}$. On trouve (Cf. W. R., p. 266-269), qu'après, au besoin, une substitution linéaire et homogène non singulière sur les variables, il y a k des variables, soient $x_1, \ldots, x_k$, telles qu'on ait l'isomorphie $\Pi_n \cong \Lambda_k$, Λ_k étant le corps quotient de U_k, ω un élément algébrique sur U_k satisfaisant à une équation irréductible dans U_k, $g(\omega) = \omega^s + g_1\omega^{s-1} + \dots + g_s = 0$, où les g_i sont des éléments non unités de U_k. On en déduit (Cf. W. R., p. 275-280):

THÉORÈME 1.9. — *Une variété de* X^n, *algébroïde en* 0, *irréductible, admet au voisinage de* 0 *une représentation paramétrique « de* WEIERSTRASS »

$$x_{k+h} = \frac{P_h(x_1, \dots, x_k, \omega)}{D(x_1, \dots, x_k)} \qquad (h = 1, 2, \dots, n-k) \tag{3}$$

les P_h *étant des polynômes de degré* $s-1$ *en* ω, *à coefficients éléments de* U_k, ω *satisfaisant à une équation irréductible* $g(\omega) \equiv \omega^s + g_1\omega^{s-1} + \dots + g_s = 0$ *où les* g_i *sont des éléments de* U_k *nuls à l'origine,* D *étant le discriminant de l'équation* $g(\omega) = 0$.

Tout système de valeurs $x_1, \dots, x_k$ *de* H_p *suffisamment petites, telles que* $D(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, *donne par ces formules* s *points de la variété voisin de l'origine, et tout point de la variété suffisamment voisin de l'origine, tel que* $D(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, *est ainsi obtenu.*

Les points de la variété tels que $D(x_1, \dots, x_k) \neq 0$ seront appelés *points réguliers* de la variété. Sil n'y a que des points réguliers ($s = 1$) la variété algébroïde sera dite réguliere.

L'ensemble des points qui fournit une représentation paramétrique, telle que (3), sera appelé un *élément de* WEIERSTRASS. Le théorème (1.9) peut s'énoncer ainsi: *les points d'une variété* V, *algébroïde en* 0, *irréductible forment, au voisinage de* 0, *un élément de* WEIERSTRASS, *à condition de négliger au besoin les points d'une vraie sous-variété algébroïde de* V. Le nombre k est dit la dimension de l'élément. C'est aussi par définition la dimension de la variété algébroïde irréductible V car on démontre (Cf. W. R., p. 274) qu'il ne dépend pas de la façon dont on a choisi les variables $x_1, \dots, x_k$. On montre aussi que les composants irréductibles d'une vraie sous-variétè algébroïde de V ont des dimensions $< k$.

Démontrons maintenant quelques conséquences du théorème (1.9) qui nous seront utiles pour la suite. Les points de la variété V, tels que $D(x_1, \dots, x_n) = 0$ sont les zéros de l'idéal $(\mathfrak{F}, D)$. En leur appliquant le théorème (1.9), on obtient finalement:

THÉORÈME 1.10. — *On obtient tous les points appartenant à un voisinage de l'origine suffisamment petit d'une variété algébroïde, en* 0, *irréductible, en réunissant un nombre fini d'éléments de* WEIERSTRASS.

Parmi ceux-ci l'élément de WEIERSTRASS qui donne les points réguliers de V sera appelé l'élément de WEIERSTRASS principal.

Les éléments de WEIERSTRASS de dimension zéro fournissent un nombre fini de points. Il en résulte:

THÉORÈME 1.11. — *Si deux variétés algébroïdes en* 0, *ont en commun une infinité de points convergents en* 0, *elles ont en commun au moins un élément de* WEIERSTRASS *de dimension au moins* 1, *qui contient une infinité de ces points.*

Nous appellerons *élément paramétrique* de centre 0 l'ensemble des points

$$x_i = f_i(t_1, \dots, t_s) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les f_i étant des fonctions analytiques définies au voisinage de $t_1 = \dots = t_s = 0$ et nulles pour ce système de valeurs.

Soit F l'idéal des éléments de U_n qui s'annulent sur tous ces points. On démontre facilement que cet idéal est premier. La variété algébroïde des zéros de l'idéal F sera dite la *variété algébroïde de l'élément.* Elle contient tous les points de l'élément paramétrique, mais par contre, celui-ci n'en représente pas nécessairement tous les points voisins de 0 quand on donne aux t_j des valeurs voisines de 0.

Si la matrice fonctionnelle $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial t_j} \right\|$ est de rang s en 0, donc au voisinage de 0, nous dirons que l'élément paramétrique est *régulier* de dimension s; en effet le théorème de l'inversion permet facilement de montrer que la variété algébroïde de l'élément est régulière en 0 et de dimension s et que dans ce cas, l'élément paramétrique donne toute sa variété algébroïde au voisinage de 0.

Si la matrice fonctionnelle $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial t_j} \right\|$ est « en général » de rang s au voisinage de 0, mais non au point 0 même, la variété algébroïde de l'élément n'est plus nécessairement régulière en 0. On voit immédiatement qu'elle est de dimension $\geq s$. On peut montrer, qu'en fait, elle est exactement s.

En faisant un changement de coordonnées convenable et en utilisant encore le théorème de l'inversion, on voit aussi que si J est un élément de WEIERSTRASS de dimension k, A un point de J, le voisinage de A sur J est un élément régulier de dimension k.

Nous démontrerons d'autre part:

THÉORÈME 1.12. — *Soit* V *une variété irréductible algébroïde en* 0; *soit* A *un point régulier de l'élément de* WEIERSTRASS *principal de* V. *Si tout un voisinage de* A *est contenu dans une variété algébrique* W, *alors* W *contient toute la variété* V *au voisinage de* 0.

Soit $x_{k+h} = \dfrac{P(x_1, \dots, x_k;\ \omega)}{D(x_1, \dots, x_k)}$ $(h = 1, 2, \dots, n-k)$ la représentation de WEIERSTRASS de V, valable dans le domaine $|x_1|_p, \dots, |x_k|_p \leq m$ pour les points réguliers $D(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$. Soit $Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$ l'une des équations algébriques qui définissent W; $Q_1(x_1, \ldots, x_k;\ \omega)$ le résultat de la substitution aux x_{k+h} de leurs valeurs en fonction de $x_1, \ldots, x_k$, ω; $Q_2(x_1, \ldots, x_k) =$ $=$ Norme $(Q, (x_1, \ldots, x_k;\ \omega))$. le produit des expressions obtenues en remplaçant ω par ses conjugués dans Q_1; Q_2 est un élément de U_n qui converge dans tout le domaine $|x_1|_p, \ldots, |x_k|_p \leq m$. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont les coordonnées du point régulier A de l'énoncé $(|a_1|_p, \ldots, |a_k|_p < m)$, Q_2 est nul pour tout le voisinage du système de valeurs $a_1, \ldots, a_k$, donc (théorème 1.5) Q_2 est identiquement nul. Pour tout système de valeurs $x_1, \ldots, x_k$ en valeur absolue p-adique $\leq m$, il y a donc un des s points correspondants sur V (s degré de l'équation de ω) qui est sur la variété algébroïde (Q) d'équation $Q = 0$, (Q) contient donc l'origine. Si (Q) ne contient pas V, comme V est irréductible, son intersection avec V se compose d'un nombre fini d'éléments de dimensions $\leq k-1$ dont la projection sur l'espace des $x_1, \ldots, x_k$ ne peut recouvrir tout un voisinage de l'origine de cet espace à k dimensions. (Q) contient donc V tout entier. En appliquant ce résultat aux éléments d'une base de V, on obtient donc le résultat à démontrer.

Remarque. — Si on remplace le polynome en $x_1, \ldots, x_n$ par un élément quelconque s de U_n, la démonstration demeure encore valide. Donc on pourrait remplacer dans l'énoncé (1.12) les mots variété algébrique par variété algébroïde en 0. D'autre part, il en résulte que si un élément de U_n n'est pas identiquement nul sur V, tout point de V pour lequel il est nul est limite des points pour lesquels il n'est pas nul. Si on applique ce résultat au discriminant de l'équation de ω on voit que *tout point de* V *qui n'est pas régulier pour une représentation de Weierstrass donnée, est limite de points réguliers.* Nous mentionnons seulement ces propriétés que nous n'aurons pas à utiliser.

Fonctions exponentielles et logarithmes p-adiques. — Il est bien connu qu'on peut définir dans H_p des fonctions analogues aux fonctions exponentielles et logarithmiques de l'analyse classique. Considérons la série:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

p^ν désignant la plus haute puissance de p ne dépassant pas n, on a

$$\text{ordre } (n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^\nu}\right] \leq \frac{n}{p^\nu}\frac{p^\nu - 1}{p-1}$$

$$\text{ordre } \left(\frac{x^n}{n!}\right) \geq n\left(\text{ordre } (x) - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^\nu(p-1)}\right).$$

La série est donc convergente si ordre $(x) > \frac{1}{p-1}$ et elle représente alors une fonction analytique de x que nous désignerons par *Exp* (x).

On vérifie par un calcul formel, valable quand les $\operatorname{Exp} x_1$, $\operatorname{Exp} x_2$ convergent, que

$$\operatorname{Exp}(x_1 + x_2) = \operatorname{Exp}(x_1)\cdot\operatorname{Exp}(x_2).$$

Considérons la série

$$\xi - \frac{\xi^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{\xi^n}{n} + \dots;$$

On a:

$$\operatorname{Ordre}\left(\frac{\xi^n}{n}\right) = n\cdot\operatorname{ordre}(\xi) - \operatorname{ordre}(n).$$

La série converge donc si ordre $(\xi) > 0$, c'est-à-dire si ξ est un entier p-adique qui n'est pas une unité p-adique. Elle représente alors une fonction analytique de x que nous désignerons par *Log* $(1 + \xi)$.

Pour y_1 et y_2 suffisamment voisins de 1, $\operatorname{Log} y_1$, $\operatorname{Log} y_2$ et $\operatorname{Log} y_1 y_2$ sont définis et on vérifie par un calcul formel $\operatorname{Log}(y_1\cdot y_2) = \operatorname{Log} y_1 + \operatorname{Log} y_2$.

Pour x suffisamment petit $\operatorname{Log}(\operatorname{Exp} x)$ est défini et on vérifie formellement que sa valeur est x. De même pour y suffisamment voisin de 1, $\operatorname{Exp}(\operatorname{Log} y)$ est définie et sa valeur est y. Les fonctions $\operatorname{Exp} x$ et $\operatorname{Log} y$ sont des fonctions inverses.

Soit a un nombre tel que $\operatorname{Log} a$ existe. La fonction $\operatorname{Exp}(x \operatorname{Log} a)$ est une fonction analytique convergente pour x suffisamment voisin de zéro, et

$$\operatorname{Exp}(x_1 + x_2)\operatorname{Log} a = \operatorname{Exp}(x_1 \operatorname{Log} a)\cdot\operatorname{Exp}(x_2 \operatorname{Log} a).$$

Si ordre $(\operatorname{Log} a) > \frac{1}{p-1}$ alors $\operatorname{Exp}(x \operatorname{Log} a)$ converge pour tout x entier p-adique, en particulier pour tout x entier rationnel. On voit que cette fonction coïncide, pour $x = q$ entier rationnel, avec a « à la puissance q », les puissances entières rationnelles étant définies à partir de la multiplication et de l'inversion comme d'habitude. Pour abréger, nous la désignerons par a^x.

Les nombres pour lesquels a^y existe et converge pour tout y entier p-adique, sont des unités p-adiques suffisamment voisines de 1. Nous les appellerons *unités* p-*adiques distinguées.*

THÉORÈME 1.13. — *Si* K_p *est une extension algébrique finie de* R_p, *il y a un nombre naturel* m *tel que pour toute unité* p-*adique* ε *de* K_p, ε^m *soit une unité* p-*adique distinguée.*

Soit n le degré de K_p sur R_p, alors on peut trouver n entiers p-adiques de K_p tels que tout entier p-adique de K_p soit de la forme

$$x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n$$

les x_i étant des entiers de R_p. Chacun des x_i peut être mis sous la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i$, les a_i étant pris parmi p entiers rationnels incongrus (mod p). Donc, E_{K_p} désignant l'anneau des entiers p-adiques de K_p, h étant un nombre naturel quelconque, le nombre $C(h)$ de classes de restes de E_{K_p} modulo l'idéal principal (p^h), est fini.

Pour tout élément ε de E_{K_p}. premier à p, donc unité p-adique, on a

$$\varepsilon^{C(h)-1} \equiv 1 (p^h)$$
$$\varepsilon^{C(h)-1} = 1 + \eta \qquad \text{avec ordre } (\eta) \geq h$$

il nous suffira donc de prendre $h > \dfrac{1}{p-1}$ pour que la valeur correspondante de $C(h) - 1$ donne le nombre m cherché.

Chapitre II. - **Groupes abéliens de points.**

Opérations sur les points et variétés de X^n.

Congruences. — Soit, comme dans le chapitre précédent, X^n le produit topologique de n espaces H_p; un point de X^n est un système de n nombres $x_1, \dots, x_n$, de H_p, que nous appellerons les coordonnées du point. Nous définirons le *produit* $A_3 = A_1 \cdot A_2$ de deux points A_1, A_2 de X^n, comme étant le point ayant pour coordonnées les produits des coordonnées de même indice de A_1 et de A_2. Désignons par $\{X^n\}$ l'ensemble des points de X^n qui n'ont aucune coordonnée nulle. Ils forment un groupe abélien par rapport à la multiplication que nous venons de définir. Si nous multiplions tous les points de X^n par un même point A de $\{X^n\}$, nous obtenons une transformation de X^n en lui-même que nous appellerons une *congruence*. L'ensemble de toutes les congruences forme un groupe abélien isomorphe à $\{X^n\}$. Deux figures formées de points de X^n qui se correspondent dans une même congruence seront dites *congrues*. C'est évidemment une relation transitive. Une congruence étant une transformation affine non singulière de X^n, deux figures congrues ont en même temps le caractère d'être une variété algébrique irréductible, de dimension s, ou d'être une variété algébroïde irréductible de dimension s.

μ-Variétés. — Soient $A_1, \dots, A_r$, r points de X^n de coordonnées $a_{11}, \dots, a_{1n}; \dots; a_{r1}, \dots, a_{rn}$ Nous supposons que l'on a $r < n$, que les $\operatorname{Log}(a_{ij})$ existent, et que les r vecteurs

$$(1) \qquad (\operatorname{Log}(a_{j1}), \dots, \operatorname{Log}(a_{jn})) \qquad (j = 1, 2, \dots, r)$$

sont linéairement indépendants par rapport à H_p. Alors pour des valeurs des paramètres y suffisamment voisines de zéro $|y_i|_p \leq c$, les exponentielles $a_{ij}^{y_i}$ sont définies et sont des fonctions analytiques des y. Le point

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_i &= \operatorname{Exp}(y_1 \operatorname{Log} a_{1i} + \dots + y_r \operatorname{Log} a_{ri}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \\ &= a_{1i}^{y_1} \dots a_{ri}^{y_r} \end{aligned}$$

pour $|y_i|_p \leq c$, engendre un élément régulier, ayant pour centre le point $(1, \dots, 1)$, et de dimension r. Une telle variété ou ses variétés congrues

$$(3) \qquad x_i = q_i a_{1i}^{y_1} \dots a_{ri}^{y_r} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(où $q_1, \dots, q_n \neq 0$) seront dites des μ-*variétés* de dimension r.

On voit facilement que si

$$(b_{m1}, \dots, b_{mn}) \qquad (m = 1, 2, \dots, n - r)$$

sont $n - r$ vecteurs linéairement indépendants, dont chacun est orthogonal à tous les vecteurs (1), les équations implicites

$$(4) \qquad b_{m1} \operatorname{Log} \frac{x_1}{q_1} + \dots + b_{mn} \operatorname{Log} \frac{x_n}{q_n} = 0 \qquad (m = 1, 2, \dots, n - r)$$

définissent la même variété que les équations paramétriques (3).

Les μ-variétés jouent exactement par rapport au groupe des congruences, le rôle des variétés linéaires par rapport au groupe des translations. En effet, soient $y_1^0, \dots, y_r^0$ un système de valeurs des exposants telles que $|y_i|_p \leq c$, posons

$$q_i^0 = q_i a_{1i}^{y_1^0} \dots a_{ri}^{y_r^0} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les formules

$$(3') \qquad x_i = q_i^0 a_{1i}^{y_1'} \dots a_{ri}^{y_r'} \qquad (i = 1, 2, \dots, n$$

pour $|y_i'|_p \leq c$ fournissent les mêmes points que les formules (3). On voit qu'une μ-*variété est invariante globalement par la congruence qui fait passer de l'un à l'autre de deux quelconques de ses points.* Il en résulte qu'une μ-variété est bien définie quand on sait qu'elle est congrue à une μ-variété donnée, et qu'elle passe par un point donné (qu'il faut supposer appartenir à $\{X^n\}$).

Soit Q, $(q_1, \ldots, q_n)$ un point de $\{X^n\}$. Considérons la transformation

$$\bar{x}_i = \text{Log}\left(\frac{x_i}{q_i}\right). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Soit v un voisinage de Q, $\bar{v}$ le voisinage correspondant de l'origine. Supposons v suffisamment petit pour que la transformation soit biunivoque et bianalytique. Nous appellerons v un *voisinage propre de* Q. *Dans la suite de ce chapitre nous supposerons toujours pour toutes les études locales que nous ferons, que tous les points, les éléments de variétés, les voisinages considérés, sont intérieurs au voisinage propre d'un même point fixe de* $\{X^n\}$.

Par la transformation (5), aux μ-variétés passant par des points voisins correspondent des variétés linéaires de mêmes dimensions, voisines de l'origine et réciproquement. Aux congruences voisines de la transformation identique correspondent des translations d'amplitudes voisines de zéro. Moyennant la restriction indiquée, et grâce à la transformation (5) et au théorème (1.12) on voit facilement que:

H_A *étant un élément algébroïde irréductible au voisinage d'un point* A, *et* I_B *le voisinage sur* H_A *d'un point* B *régulier de* H_A, *si* I_B *est contenu dans une* μ*-variété* M, H_A *tout entier est contenu dans* M. *En particulier, si on montre que* I_B *est une* μ*-variété, il en résulte que* H_A *est une* μ*-variété.* On obtient aisément aussi grâce à la transformation (5), la démonstration de la réciproque d'une proposition énoncée plus haut:

Si I_A *est un élément régulier de centre* A, *et si pour tout point* B *de* I_A *il y a un voisinage de ce point sur* I_A *congru à un voisinage de* A *sur* I_A, I_A *est une* μ*-variété.*

Produit de deux variétés. — Nous appellerons *produit de deux figures* $F_1 \cdot F_2$, formées de points de X^n, la figure $F_3 = F_1 \cdot F_2$ formée par l'ensemble des points produits d'un point quelconque de la première par un point quelconque de la seconde. Nous appellerons *inverse d'une figure* F, la figure F^{-1} formée par l'ensemble des points inverses des points de F qui n'ont aucune coordonnée nulle. Nous nous occuperons de figures qui ne sont tout entières dans aucun des hyperplans de coordonnées $x_i = 0$. Dans ces conditions, $F_3 = F_1 \cdot F_2$ contient au moins une figure congrue à F_1 et une figure congrue à F_2, et F^{-1} existe.

Le produit de deux variétés algébriques irréductibles [11], W_1 *de dimen-*

[11] Une variété algébrique W est dite irréductible quand son idéal propre (W) dans l'anneau des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$, est premier. C'est une irréductibilité globale, dif-

sion s_1, W_2 *de dimension* s_2, *est une variété algébrique irréductible* W_3 *de dimension* $s_3 \leq s_1 + s_2$.

En effet, le point général de W_1 admet une représentation paramétrique, les coordonnées étant des fonctions algébriques de s_1 paramètres; de même W_2 avec s_2 autres paramètres. Donc les coordonnées du point général de W_3 sont des fonctions algébriques de $s_1 + s_2$ paramètres. Il en résulte que W_3 est une variété algébrique irréductible de dimension $\leq s_1 + s_2$.

On verrait de façon analogue que *si* W *est une variété algébrique irréductible de dimension* s, *non tout entière située dans un hyperplan de coordonnée*, W^{-1} *est une variété algébrique irréductible, de dimension* s.

Intersections de μ-variétés et de variétés algébriques.

Lemme 2.1. — *Soit* W *une variété algébrique irréductible de* X^n, *de dimension* s. *Soit* A *un point de* W, *non singulier et non situé dans un des hyperplans de coordonnées. Soit* M_A *une* μ*-variété de dimension* r, *passant par* A. *Supposons que* $M_A \cap W$ *soit, au voisinage de* A, *un élément régulier* I_A *de dimension* $k \geq 1$ *et qu'il n'y ait pas de variété algébrique de dimension inférieure à* s *qui contienne* I_A. *Alors en tout point* Q *de* W *étranger à une vraie sous-variété algébrique* w *de* W, *l'intersection* $M_Q \cap W$ (M_Q *étant la* μ*-variété congrue à* M_A *passant par* Q) *est un élément régulier* I_Q *de dimension* k, *qui dépend analytiquement des coordonnées locales de* Q, *quand on fait varier* Q *sur* W *au voisinage d'un point* Q_0 *étranger à* w.

Soient

$$F_h(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, f)$$

les équations qui définissent W

$$b_{m1} \operatorname{Log} \frac{x_1}{a_n} + \dots + b_{mr} \operatorname{Log} \frac{x_n}{a_n} = 0 \qquad (m = 1, 2, \dots, n - r)$$

celles de M_A, les $n - r$ vecteurs $(b_{m1}, \dots, b_{mn})$ étant par hypothèse linéairement indépendants. Celles de M_Q, Q étant un point quelconque de $\{X^n\}$,

---

férente de l'irréductibilité locale définie au chapitre I pour toute variété algébroïde. La dimension s de W, définie algébriquement à partir de cet idéal de polynômes, coïncide en tout point avec la dimension définie localement comme au chap. I. On démontre qu'il existe une représentation, comme fonctions algébriques de s paramètres, des coordonnées de tous les points de W étrangers à une vraie sous-variété de W ou comme on dit du point général de W.

(Cf. Van der Waerden, *Moderne Algebra*. tome II, chap. 13).

de coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, sont

$$b_{m1} \operatorname{Log} \frac{x_1}{q_1} + \ldots + b_{mr} \operatorname{Log} \frac{x_n}{q_n} = 0. \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-r)$$

Considérons les système d'équations aux différentielles totales

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} dx_1 \dfrac{\partial F_j}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \dfrac{\partial F_j}{\partial x_n} = 0 & (j = 1, 2, \ldots, f) \\ dx_1 \dfrac{b_{m1}}{x_1} + \ldots + dx_n \dfrac{b_{mn}}{x_n} = 0. & (m = 1, 2, \ldots, n-r) \end{cases}$$

Il est satisfait quand le point $(x_1, \ldots, x_n)$ parcourt l'élément I_A qui est une variété intégrale à k dimensions de (D). D'autre part, (D) est un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux dx, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des x. Son rang a donc la même valeur ρ en tous les points de W, sauf peut-être sur une vraie sous-variété algébrique de la variété algébrique irréductible W. Nous désignerons par w la réunion de cette sous-variété avec celles qui portent les points singuliers de W et les intersections de W avec les hyperplans coordonnées, s'ils n'étaient déjà contenus dans la première. w est une vraie sous-variété algébrique de W. Il est impossible que I_A soit contenu tout entier dans w donc ρ est égal à $n - k$. En un point quelconque Q_0 de W étranger à w le système (D) peut donc être résolu par rapport à k variables auxiliaires $d\xi_1, \ldots, d\xi_k$ sous la forme

$$\text{(D')} \qquad dx_i = g_{1i} d\xi_1 + \ldots + g_{ik} d\xi_k. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Les g_{ij} sont des fonctions rationnelles des x, et les k vecteurs $(g_{j1}, \ldots, g_{jn})$ sont linéairement indépendants. Les conditions d'intégrabilité de (D') sont des équations algébriques en x. Comme elles sont vérifiées sur I_A, elles sont nécessairement identiquement vérifiées sur tout W.

Soit maintenant

$$\text{(1)} \qquad x_i = f_i(t_1, \ldots, t_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'élément régulier, de dimension s, qui représente W au voisinage de Q_0 (Q_0 correspond à $t_1 = \ldots = t_s = 0$). Substituons les f aux x dans (D). Les premières équations de (D) sont identiquement vérifiées, les $n - r$ restantes forment un système (D'') complètement intégrable. On peut l'écrire à l'aide de k éléments auxiliaires $d\theta_1, \ldots, d\theta_k$, sous la forme

$$\text{(D'')} \qquad dt_j = h_{1j} d\theta_1 + \ldots + h_{kj} d\theta_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

les h_{ij} étant des fonctions analytiques des t, au voisinage de $t_1 = \ldots = t_s = 0$, et les k vecteurs à s dimensions $(h_{i1}, \ldots, h_{is})$ étant linéairement indépendants.

On peut calculer le développement en série des t suivant les puissances entières positives de k variables auxiliaires $\theta_1, \dots, \theta_k$. En effet les conditions d'intégrabilité étant identiquement vérifiées, on obtient les dérivées partielles des t par rapport aux θ pour les valeurs initiales t_i^0 comme fonctions analytiques des t_i^0 grâce aux formules

$$\frac{\partial}{\partial \theta_g} = \frac{\partial}{\partial t_1} h_{g1} + \dots + \frac{\partial}{\partial t_s} h_{gs} \qquad (g = 1, 2, \dots, k)$$

d'où

$$\frac{\partial^\nu t_j}{\partial \theta_1^{\nu_1} \dots \partial \theta_k^{\nu_k}} = \Theta_{j,\nu_1,\dots\nu_k}(t_1^0, \dots, t_s^0) \qquad (j = 1, \dots, s)$$

$$t_j = t_j + h_{1j}(t_1^0, \dots, t_s^0)\theta_1 + \dots + h_{kj}(t_1^0, \dots, t_s^0)\theta_k + \dots$$

$$\dots + \Theta_{j,\nu_1,\dots,\nu_k}(t_1^0, \dots, t_s^0) \frac{\theta_1^{\nu_1} \dots \theta_k^{\nu_k}}{(\nu_1 + \dots + \nu_k)!} + \dots .$$

On vérifie aisément que cette série, considérée comme série en $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, t_1^0, \dots, t_s^0$, converge pour les t^0 et θ assez petits (en supposant qu'on ait fait au besoin un changement de variables $\theta_g = p^N \theta_g'$, N étant un nombre naturel assez grand). Substituons aux t les expressions qu'on vient de calculer, dans les équations (1), on obtient

$$x_i = \Phi_i(t_1^0, \dots, t_s^0, \theta_1, \dots, \theta_k) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

les fonctions Φ_i étant des fonctions analytiques des t' et des θ. Pour $\theta_1 = \dots = \theta_k = 0$, elles se réduisent à

$$x_i = \Phi_i(t_1^0, \dots, t_s^0, 0, \dots, 0) \equiv f_i(t_1, \dots, t_s) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et représentent tout le voisinage de Q_0 sur W.

Si on y laisse $t_1^0, \dots, t_s^0$ fixes et si l'on fait varier les θ alors (2) représente un élément I_Q de dimension k, régulier autour du point Q $(q_1, \dots, q_n)$ de W, correspondant à $\theta_1 = \dots = \theta_k = 0$. Il est évidemment sur W. D'autre part, il satisfait à

$$dx_1 \frac{b_{m1}}{x_1} + \dots + dx_n \frac{b_{mn}}{x_n} = 0 \qquad (m = 1, 2, \dots, n - r)$$

donc, en tenant compte des conditions initiales, on voit qu'il est sur la μ-variété M_Q

$$b_{m1} \operatorname{Log} \frac{x_1}{q_1} + \dots + b_{mr} \operatorname{Log} \frac{x_n}{q_n} = 0 \qquad (m = 1, 2, \dots, n - r)$$

qui est la μ-variété congrue à M passant par Q. I_Q appartient donc à $W \cap M_A$, comme il est de dimension k, il constitue tout le voisinage de Q sur $W \cap M_Q$, le lemme est démontré.

LEMME 2.2. — *Conservons les notations et les hypothèses du lemme* 2.1. *Supposons en outre qu'il n'existe pas de* μ*-variété de dimension inférieure à* r *qui contienne* $\mathrm{I_A}$. *Alors il existe une variété algébrique* $\widehat{\mathrm{W}}$ *de dimension* $\widehat{\mathrm{s}} \leq \mathrm{s} + \mathrm{r} - \mathrm{k}$ *contenant* $\mathrm{M_A}$.

Prenons un point Q_0 de W, étranger à w et situé sur I_A. C'est toujours possible, puisque w ne peut contenir I_A. Alors Q_0 étant un point de M_A, M_{Q_0} est identique à M_A. Soit I_{Q_0} le voisinage de Q_0 sur I_A, c'est un élément régulier de dimension k qui représente $W \cap M_{Q_0}$ au voisinage de Q_0; W et M_{Q_0} sont la variété algébrique et la μ-variété de dimension minima contenant I_{Q_0}. Utilisons la représentation paramétrique (2) du lemme précédent pour le voisinage de Q_0 sur W. Soit C une courbe algébrique irréductible, située sur W, passant par Q_0 et régulière en Q_0. On peut la définir au voisinage de Q_0 par l'intermédiaire de (2), en se donnant les t comme fonctions analytiques convenablement choisies d'un paramètre ζ

$$t_j = u_j(\zeta) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

et en laissant les θ nuls. Nous supposons que grâce à une congruence convenable sur la figure initiale les coordonnées de Q_0 sont $1, \ldots, 1$. Formons la variété algébrique $W_1 = W \cdot C^{-1}$. Elle est irréductible et contient W comme sous-variété. Elle est donc de dimension $s+1$ ou s. Dans ce dernier cas, elle coincide avec W. Elle contient les points de l'élément paramétrique

$$x_i = \Phi_i(t_1, \ldots, t_s, \theta_1, \ldots, \theta_k)\Phi_i^{-1}(u_1(\zeta), \ldots, u_s(\zeta), 0, \ldots, 0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est même la variété algébroïde de cet élément.

Donnons à ζ une valeur fixe ζ^0 et faisons $t_1 = u_1(\zeta^0), \ldots, t_s = u_s(\zeta^0)$ et faisons varier les θ. On obtient ainsi un élément I_Q' congru à $I_Q = M_Q \cap W$ d'après le lemme précédent, (Q étant le point de coordonnées $x_i = \Phi_i(u_1(\zeta^0), \ldots$ $\ldots, u_s(\zeta^0), 0, \ldots, 0)$). Faisons $\theta_1 = \ldots = \theta_k = 0$ dans la représentation paramétrique de I_Q'. On obtient le point $Q_0(1, \ldots, 1)$. Donc I_Q' appartient à M_{Q_0}. Il en résulte que l'élément paramétrique

$$(\mathrm{J}_1) \qquad x_i = \Phi_i(u_1(\zeta), \ldots, u_s(\zeta), \theta_1, \ldots, \theta_k)\Phi_i^{-1}(u_1(\zeta), \ldots, u_s(\zeta), 0, \ldots, 0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

appartient à $W \cap M_{Q_0}$ et qu'il contient des éléments congrus à chacun des éléments réguliers de dimension k, $I_Q = W \cap M_Q$, pour chaque point Q de la courbe C voisin de Q_0.

Si tous ces éléments I_Q sont congrus à I_{Q_0}, quel que soit le choix de la courbe algébrique C passant par Q_0, ils sont congrus à I_{Q_0} quel que soit Q

sur W dans tout un voisinage de Q_0; en particulier quel que soit Q sur I_{Q_0}. Tous les voisinages sur I_{Q_0} sont congrus, I_{Q_0} est donc une μ-variété. Mais alors comme M_{Q_0} est la μ-variété de la plus petite dimension contenant I_{Q_0}, I_{Q_0} coincide avec M_{Q_0}, c'est-à-dire avec M_A, et k est égal à r. W est elle-même la variété algébrique $\widehat{W}$ cherchée.

S'il n'en est pas ainsi, on pourra choisir la courbe algébrique C de façon qu'un des I_Q, Q étant sur C, ne soit pas congru à I_{Q_0}. J_1 sera nécessairement de dimension plus grande que k. L'intersection de W_1 et M_{Q_0} est au voisinage de Q_0 une variété algébroïde. Il y a au moins une de ses composantes irréductibles, soit H_1, qui contient J_1; soit k_1 la dimension de H_1; on a $k_1 \geq k+1$. Soit A_1 un point de H_1 régulier et étranger aux autres composantes de $W_1 \cap M_{Q_0}$. Le voisinage de A_1 sur H_1 est un élément régulier I_{A_1} de dimension k_1, qui représente toute l'intersection $W_1 \cap M_{A_1}$ au voisinage de A_1 (M_{A_1} est identique à M_A). On voit facilement que W_1 est la variété algébrique de dimension minima contenant I_{A_1} et que $M_A \equiv M_{A_1}$ est la μ-variété de dimension minima contenant I_{A_1}.

On peut donc opérer à partir de W_1, de dimension $s_1 = s+1$, I_{A_1} de dimension $k_1 \geq k+1$ et M_{A_1} ($\equiv M_A$) comme on vient de faire à partir de W, I_A, M_A. Ou bien, $k_1 = r$, I_{A_1} est identique à M_{A_1} donc à M_A, ou bien on peut construire W_2 de dimension $s_2 = s_1+1$, telle que $W_2 \cap M_{A_2}$ ait au voisinage de A_2 une composante irréductible contenant I_{A_1} et de dimension $k_2 \geq k_1+1$, etc... Au bout de $r-k-1$ opérations au plus, on arrive donc à une variété W_m telle que $W_m \cap M_{A_m}$ ait une composante de dimension r, c'est-à-dire que W_m contienne M_{A_m} c'est-à-dire M_A. W_m est de dimension $\leq r+s-k$. C'est la variété $\widehat{W}$ cherchée.

Remarquons que le résultat peut être trivial si l'on n'a pas $r+s-k<n$ car alors W peut être l'espace X^n tout entier.

LEMME 2.3. — *Si une variété algébrique de dimension* s *contient une μ-variété, entre* s + 1 *quelconques des coordonnées d'un point de la μ-variété, soient* $x_{q_1}, \dots, x_{q_{s+1}}$, *il y a une relation*

$$x_{q_1}^{Nq_1}, \dots, x_{q_{s+1}}^{Nq_{s+1}} = C_{q_1, \dots, q_{s+1}}$$

où les exposants $N_{q_1}, \dots, N_{q_{s+1}}$ *sont des entiers rationnels, non tous nuls et* $C_{q_1, \dots, q_{s+1}}$ *un nombre différent de zéro indépendant du choix du point sur la μ-variété.*

Nous pouvons, par une congruence, amener le centre de la μ-variété, au point de coordonnées $1, \dots, 1$. Soient M la μ-variété, W la variété algébrique (toujours de dimension s), déduites des premières par la congruence.

$s+1$ coordonnées d'un point de W, soient $x_1, \ldots, x_{s+1}$ sont liées par une équation algébrique

$$f(x_1, \ldots, x_{s+1}) = 0.$$

Soient $b_1, \ldots, b_n$ les coordonnées d'un point de M autre que le point de coordonnées $1, \ldots, 1$, alors M contient aussi le point de coordonnées $b_1{}^h, \ldots, b^h$ quelque soit le nombre naturel h. Donc W le contient aussi, et l'on a

$$f(b_1{}^h, \ldots, b_{s+1}^h) = 0.$$

Soit ν le nombre de termes dans f. Ecrivons les équations précédentes pour $h = 1, 2, \ldots, \nu$. On a ainsi, entre les coefficients de f, ν équations linéaires et homogènes dont les coefficients sont des monômes en $b_1, \ldots, b_s$, et dont le déterminant est un déterminant de VAN DER MONDE. Pour que ces équations aient une solution non triviale, il faut que ce déterminant soit nul, donc qu'il ait deux colonnes égales, ce qui entraîne l'égalité de deux monômes en $b_1, \ldots, b_{s+1}$. On obtient un nombre fini de variétés algébriques, chacune définie par une équation du type

$$x_1^{N_1}, \ldots, x_{s+1}^{N_{s+1}} = 1$$

(les N étant des entiers rationnels non tous nuls), dont la réunion doit contenir tous les points de M. Comme M considéré comme variété algébroïde est irréductible, l'une des variétés précédentes doit contenir M tout entier. En revenant à la μ-variété initiale par la congruence inverse de la première, on trouve la propriété annoncée.

Groupes abéliens de points à bases finies. — Considérons des points à n coordonnées, qui soient des nombres algébriques, formant un groupe abélien Γ par rapport à la multiplication définie au début de ce chapitre et possédant une base minima finie à r générateurs d'ordre infini et r' générateurs d'ordre fini. Nous appellerons r le *rang* du groupe et nous supposerons $r > n$. Soient $(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, (a_{r1}, \ldots, a_{rm})$, les coordonnées des points de base d'ordre fini, $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}), \ldots, (a'_{r'1}, \ldots, a'_{r'n})$ celles des points de base d'ordre infini. Alors un élément quelconque du groupe Γ a pour coordonnées

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}^{m_1} \ldots a_{1r}^{m_r} a'^{m'_1}_{11} \ldots a'^{m'_{r'}}_{nr'} \\ a_n = a_{n1}^{m_1} \ldots a_{nr}^{m_r} a'^{m'_1}_{n1} \ldots a'^{m'_{r'}}_{nr'} \end{cases}$$

les exposants m étant des entiers rationnels.

Choisissons comme il est toujours possible, le nombre naturel premier p, de façon que les coordonnées des éléments de base, et par suite celle d'un élément quelconque du groupe, soient des unités p-adiques. Formons le corps H_p et l'espace X^n définis précédemment. Nous considérerons les éléments de Γ comme des points de l'espace X^n.

Nous dirons qu'un sous-groupe γ de Γ est *distingué* s'il admet une base minima formée de points dont les coordonnées sont des unités distinguées de H_p. Ces points de base sont tous des éléments d'ordre infini de γ car la seule unité p-adique distinguée qui soit racine de l'unité est 1. Leur nombre est donc égal au rang du sous-groupe.

Soit K_p l'extension finie de R_p, qu'on obtient en adjoignant à R_p les coordonnées des points de base. D'après le théorème (1.14) il existe un nombre naturel h_0 tel que, pour toute unité p-adique u de K_p, u^{h_0} soit une unité p-adique distinguée.

Posons

$$a_{ij}^{h_0} = b_{ij}. \qquad (i = 1, 2, \dots, r;\ j = 1, 2, \dots, n)$$

Le groupe

$$\Gamma_d, \quad a_i = b_{1i}^{m_1} \dots b_{ri}^{m_r} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les m_i sont des entiers rationnels, est un *sous-groupe d'indice fini de* Γ, *qui est distingué.*

Pour un sous-groupe quelconque γ, l'intersection de γ et de Γ_d nous fournira donc un sous-groupe γ^* de γ d'indice fini par rapport à γ (donc de même rang que γ) qui est distingué.

Nous appellerons *dimension* d'un sous-groupe distingué γ^*

$$\gamma^*, \quad a_i = c_{1i}^{m_1} \dots c_{pi}^{m_p} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le nombre d (au plus égal au rang de γ^*) de vecteurs linéairement indépendants par rapport à H, parmi les vecteurs formant « la base logarithmique » de γ^*. Nous entendons par là les vecteurs ayant chacun pour coordonnées les logarithmes p-adiques des coordonnées d'un même point de la base distinguée de γ^*. Soient $(c_{11}, \dots, c_{1n}), \dots, (c_{d1}, \dots, c_{dn})$, les points de base correspondant à d de ces vecteurs linéairement indépendants. La μ-variété de dimension d

$$\{\gamma^*\}, \quad x_i = c_{1i}^{y_1} \dots c_{di}^{y_d} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

contient tous les points de γ^* pour lesquels les m sont en valeur absolue p-adique, suffisamment voisins de zéro. Nous appellerons $\{\gamma\}$ *la μ-variété de* γ^*. On voit facilement qu'un ensemble infini $\mathcal{E}$ d'éléments de γ^*, a au moins un point d'accumulation, soit C, et que la μ-variété $C \cdot \{\gamma^*\}$ congrue à $\{\gamma^*\}$ et passant par C, contient un sous-ensemble infini d'éléments de $\mathcal{E}$, s'accumulant autour de C. On a le même résultat pour l'ensemble d'une infinité d'éléments appartenant à une même classe de Γ/γ.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble d'une infinité d'éléments de Γ, nous dirons qu'un sous-groupe γ de rang ρ est *minimal* par rapport à $\mathcal{E}$ pour la classe $c\gamma$ de Γ/γ si les deux conditions snivantes sont remplies:

1°) la classe $c\gamma$ de Γ/γ contient un sous-ensemble infini $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$;

2°) il n'y a pas de sous-groupe γ' de Γ, de rang moindre que celui de γ, tel qu'il y ait une classe de Γ/γ contenant un sous-ensemble infini de $\mathcal{E}_1$.

Si γ est minimal par rapport à $\mathcal{E}$ pour la classe $c\gamma$ le sous-groupe distingué $\gamma^* = \gamma \cap \Gamma_d$ est minimal par rapport à $\mathcal{E}$, pour l'une au moins des classes de Γ/γ^* dont la réunion forme la classe $c\gamma$, car celles-ci sont en nombre fini.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble infini d'éléments de Γ il y a toujours au moins un sous-groupe minimal, donc au moins un sous-groupe distingué minimal par rapport à $\mathcal{E}_1$.

$\mathcal{E}$ étant encore l'ensemble d'une infinité d'éléments de Γ, nous dirons qu'une variété algébrique W irréductible est *minimale* par rapport à $\mathcal{E}$ si:

1°) elle contient les éléments d'un sous-ensemble infini $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$, et si

2°) il n'y a aucune de ses variété algébriques de dimension inférieurs à celle de W qui contienne les éléments d'un sous-ensemble infini de $\mathcal{E}_1$.

Si les éléments de $\mathcal{E}$ sont contenus dans une variété algébrique de dimension s il y au moins une variété algébrique minimale par rapport à $\mathcal{E}$ de dimension $\leq s$.

THÉORÈME 2.4. — *Soit Γ un groupe abélien multiplicatif de points à coordonnées algébriques, de rang* r *inférieur au nombre* n *de coordonnées des points. Soit*

$$F_h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s') \tag{1}$$

un système d'équations algébriques à coefficients algébriques dont les premiers membres forment la base d'un idéal de polynômes premier de dimension s. *Supposons que les éléments de Γ satisfaisant à* (1) *forment un ensemble infini $\mathcal{E}$.*

A tout sous-ensemble infini $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ correspond au moins un sous-groupe γ de Γ ayant les propriétés suivantes:

1°) *il y a au moins une classe de Γ/γ qui contient un sous-ensemble infini d'élément de $\mathcal{E}'$.*

2°) *Posons $\sigma = \mathrm{s} + \mathrm{r}$; entre σ quelconques des coordonnées d'un élément de γ, soient $\mathrm{x}_{q_1}, \ldots, \mathrm{x}_{q_\sigma}$ il y a une relation*

$$x_{q_1}^{N_1} \ldots x_{q_\sigma}^{N_{q_\sigma}} = 1$$

où les exposants N *sont des entiers rationnels non tous nuls indépendants du choix de l'élément dans* γ.

(*Ces résultats deviennent triviaux si l'on n'a pas* $s \leq n - r - 1$).

Choisissons p de façon que les coordonnées des points d'une base de Γ soient des unités p-adiques. Supposons les points de Γ représentés dans l'espace X^n construit à l'aide du corps p-adique H_p. Désignons par W la variété algébrique de X^n, de dimension s, définie par les équations (1). Soit γ^* un sous-groupe de Γ distingué, minimal par rapport à l'ensemble $\mathcal{E}'$ pour une classe de $\Gamma\,\gamma^*$. Soit $\mathcal{E}''$ le sous-ensemble infini de $\mathcal{E}'$ dont cette classe contient les éléments. Les éléments de $\mathcal{E}''$ sont dans W de dimension s, donc il y a une variété algébrique W_0 (sous-variété de W) minimale par rapport à $\mathcal{E}''$ et de dimension $s_0 \leq s$. Soit $\mathcal{E}_0$ le sous-ensemble infini de $\mathcal{E}''$ dont elle contient les éléments. γ^* est encore évidemment minimal par rapport à $\mathcal{E}_0$ pour la classe de Γ/γ^* considérée plus haut. Il y a au moins un point d'accumulation C des éléments de $\mathcal{E}_0$. Soit M_C la μ-variété congrue à la μ-variété $\{\gamma^*\}$ de γ^* et passant par C. Elle a une dimension $d \leq r$, Elle contient un sous-ensemble infini $\mathcal{E}_C$ d'éléments de $\mathcal{E}_0$ convergents vers le point C, et aucune μ-variété de dimension plus petite ne peut contenir un sous-ensemble infini de $\mathcal{E}_C$. W_0 et M_C ont une infinité de points communs convergents en C. Leur intersection est au voisinage de C une variété algébroïde qui a au moins une composante irréductible H de dimension $k \geq 1$ contenant un sous-ensemble infini $\mathcal{E}_C'$ de $\mathcal{E}_C$. H ne peut être contenu dans une variété algébrique de dimension moindre que celle de W_0, une telle sous-variété contiendrait les éléments du sous-ensemble infini $\mathcal{E}_C'$ de $\mathcal{E}_0$ ce qui est contradictoire avec le choix de W_0. Soit A un point régulier de H et non situé sur une autre des composantes de $W_0 \cap M_C$. $W_0 \cap M_A$ est au voisinage de A un élément analytique régulier I_A de dimension $k \geq 1$. Et I_A ne peut être contenu dans aucune variété algébrique de dimension inférieure à s_0 car une telle sous-variété contiendrait H ce qui est impossible. I_A ne peut être contenu dans aucune μ-variété de dimension inférieure à celle de M_A, car une telle μ-variété contenant I_A contiendrait H, donc l'ensemble infini $\mathcal{E}_C'$, ce qui est impossible. On peut donc appliquer à W_0 le lemme 2.2. Il en résulte que M_A est contenu dans une variété algébrique irréductible W de dimension $s \leq s_0 + d - 1, \ \leq s + r - 1 = \sigma - 1$. Il en résulte d'après le lemme 2.3 que σ coordonnées d'un point de M_A sont liées par une relation

$$x_{q_1}^{N_{q_1}} \dots x_{q_\sigma}^{N_{q_\sigma}} = \text{constante}.$$

Donc pour les coordonnées des points de la μ-variété de γ^* et finalement pour celles des éléments de tout γ^* on obtient les relations annoncées.

Nous pouvons ajouter ce complément à l'énoncé:

p *étant un nombre naturel premier tel que les coordonnées des éléments de base de* Γ *soient des entiers* p-*adiques; tout sous-groupe de* Γ *distingué pour ce choix de* p, *et minimal par rapport à* $\mathcal{E}'$ *pour au moins une claese de* Γ/γ *fournit un sous-groupe ayant les proprietés indiquées dans le théorème* 2.4.

Chapitre III. - **Equations diophantiennes.**

Considérons le système d'équations diophantiennes à résoudre en entiers rationnels X_i

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (1) & \text{Norme } (X_1\omega_1 + \dots + X_n\omega_n) = \pm 1 \\ (2) & F_j(X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

où $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ représentent une base d'un corps de nombres algébriques fini K de degré n, et où les équations (2) sont des équations algébriques en $X_1, \dots, X_n$ (que nous pouvons sans restreindre la généralité du problème supposer à coefficients rationnels).

A toute solution $(A_1, \dots, A_n)$ en entiers rationnels de l'équation (1) correspond un entier de K, $\alpha = A_1\omega_1 + \dots + A_n\omega_n$ dont la norme est ± 1, c'est-à-dire une unité de K. Réciproquement les composantes d'une unité de K par rapport à la base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ fournissent une solution en entiers rationnels de (1).

Nous représenterons dans la suite tout nombre α de K par le point ayant pour coordonnées les n conjugués de α par rapport au corps des nombres rationnels

$$x_1 = \alpha^{(1)} = \alpha\,; \; x_2 = \alpha^{(2)}, \dots, \; x_n = \alpha^{(n)}$$

dans l'espace X^n (X^n est toujours le produit topologique de n corps p-adiques identiques au corps p-adique algébriquement fermé H_p, qu'on a considéré dans les chapitres précédents, le choix du nombre naturel premier p étant indifférent).

La transformation linéaire non singulière

$$x_i = X_1\omega_1^{(i)} + \dots + X_n\omega_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $\omega_j^{(1)}, \dots, \omega_j^{(n)}$ sont les conjugués de $\omega_j = \omega_j^{(1)}$ peut être interprétée comme un changement des coordonnées dans X^n, Le système I définit une variété algébrique W de X^n qui a pour équations en x

$$\text{(I')} \quad \begin{cases} (1') & x_1, \dots, x_n = \pm 1 \\ (2') & f_j(x_1, \dots, x_n) = 0. \qquad (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

Nous appellerons du même nom le nombre de K et le point qui le représente.

De la sorte *l'étude du système* I *est l'étude des unités de* K *appartenant à la variété algébrique* W. Nous énoncerons en général les résultats que nous obtiendrons sur le système I dans ce langage géométrique.

Le théorème de DIRICHLET sur les unités d'un corps algébrique fini nous apprend que ces unités forment un groupe abélien par rapport à la multiplication, admettant une base minima à r générateurs d'ordre infini, et un générateur d'ordre fini. r, que nous appellerons le *nombre de Dirichlet* de K, est défini de la façon suivante: soient r_1 le nombre de corps réels, $2r_2$ le nombre de corps complexes, parmi les n corps conjugués de K, $K^{(1)}=K$, $K^{(2)},\ldots, K^{(n)}$, on a $r=r_1+r_2-1$.

Les corps $K^{(1)},\ldots, K^{(n)}$ étant isomorphes, les éléments conjugués à ceux d'une base minima des unités de K forment des bases minima des unités des corps conjugués correspondants. On voit que les unités de K sont représentées dans X^n par un groupe abélien multiplicatif de points dont les coordonnées sont des unités p-adiques, et ce groupe est de rang $r<n$. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème (2.4). Nous obtenons ainsi:

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble, supposé infini, des unités d'un corps de nombres algébriques* K *de degré* n, *de nombre de* DIRICHLET r, *qui appartiennent à une variété algébrique* W *de dimension* s. *A tout sous-ensemble infini $\mathfrak{E}'$ de $\mathfrak{E}$ il correspond au moins un sous-groupe γ du groupe Γ des unités de* K, *ayant les propriétés suivantes:*

1°) *il y a au moins une classe de Γ/γ qui contient un sous-ensemble infini d'élément de $\mathfrak{E}'$;*

2°) *σ quelconques des conjugués d'un élément de γ, soient $\varepsilon^{(q_1)},\ldots, \varepsilon^{(q_\sigma)}$, satisfont à une relation indépendante du choix de l'élément dans γ*

$$\varepsilon^{(q_1)^{N_{q_1}}}\ldots\varepsilon^{(q_\sigma)^{N_{q_\sigma}}}=1 \tag{3}$$

les N *étant des entiers rationnels non tous nuls, et σ étant égal à* r + s.

(*Le résultat devient trivial si l'on n'a pas* $s\leq n-r-1$).

Nous avons donc obtenu une condition nécessaire pour l'existence d'une infinité de solutions en entiers rationnels au système I. Nous donnerons deux types d'applications de ce résultat à des systèmes I spécialisés, soit quant à la nature du corps K, soit quant à la nature de la variété W.

1° - Nous avons obtenu pour les unités de K appartenant au sous-groupe γ et leurs conjugués des relations (3) rationnelles entières à coefficients rationnels. En effectuant sur les conjugués des permutations du groupe de GALOIS G de K (nous entendons par là le groupe de GALOIS de l'équation rationnellement irréductible d'un élément primitif de K), nous obtenons de nouvelles relations dont nous examinerons la compatibilité pour certains types de groupe de GALOIS.

2° - Comme il y a une classe de Γ/γ contenant une infinité des unités situées sur W, les unités correspondantes de γ sont sur une variété W' congrue à W. Nous examinerons la compatibilité des relations (3) avec les équations de W' quand les équations (2) du système I sont linéaires et homogènes (problème des unités dans un module).

Première application. — Soit G le groupe de GALOIS de K. Une opération de g est une permutation entre les nombres conjugués de K

$$\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$$
$$\alpha^{(h_1)}, \dots, \alpha^{(h_n)}.$$

Dans l'espace des n variables $x_1, \dots, x_n$, les transformations $(x_i \to x_{h_i})$ correspondantes, nous donnent une représentation du groupe de GALOIS dans X''. Etant donné un vecteur issu de l'origine dans X'', il lui correspond par ces transformations, des vecteurs que nous appelons les transformés du vecteur donné, par les permutations de G.

Considérons le corps K du théorème (3.1) et supposons qu'uue infinité d'unités de K appartiennent à une variété algébrique W de dimension $s \leq n - r - 1$. Le sous-groupe γ mis en évidence dans le théorème (3.1) est d'ordre infini. Il contient donc au moins une unité ε qui n'est pas une racine de l'unité. $n - 1$ de ses conjugués, soient $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n-1)}$, satisfont à une relation $\varepsilon^{(1)N_1}, \dots, \varepsilon^{(n-1)N_{n-1}} = 1$, les N_i étant des entiers rationnels non tous nuls. On en déduit en multipliant au besoin membre à membre cette égalité et l'égalité $(\varepsilon^{(1)} \dots \varepsilon^{(n)})^h = 1$ une relation

$$\varepsilon^{(1)m_1} \dots \varepsilon^{(n)m_n} = 1$$

où les m sont des entiers rationnels non tous égaux et tels que $m_1 + \dots + m_n \neq 0$.

Considérons le vecteur $\vec{M}$ à coordonnées entières rationnelles $x_1 = m_1, \dots$ $\dots, x_n = m_n$, et les vecteurs transformés de $\vec{M}$ par les permutations du groupe de GALOIS de K. Supposons qu'aucune sous-variété linéaire de l'espace de représentation ne contienne $\vec{M}$ et ses transformés. On peut choisir n de ces vecteurs linéairement indépendants, soient

$$\vec{M}_1(m_{11}, \dots, m_{1n})$$
$$\vec{M}_n(m_{n1}, \dots, m_{nn}).$$

L'unité ε considérée satisfait aux n relations:

$$\varepsilon^{(1)m_{11}} \dots \varepsilon^{(n)m_{1n}} = 1,$$
$$\varepsilon^{(1)m_{n1}} \dots \varepsilon^{(n)m_{nn}} = 1.$$

Le déterminant des m_{ij} est $\neq 0$. Soit d sa valeur. C'est un nombre entier rationnel. Donc les équations

$$\begin{aligned} y_1 m_{11} + \dots + y_n m_{n1} &= d \\ y_1 m_{12} + \dots + y_n m_{n2} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_1 m_{1n} + \dots + y_n m_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

ont une solution en entiers rationnels $q_1, \dots, q_n$ non tous nuls. De

$$(\varepsilon^{(1)m_{11}} \dots \varepsilon^{(n)m_{1n}})^{q_1} \dots (\varepsilon^{(1)m_{n1}} \dots \varepsilon^{(n)m_{nn}})^{q_n} = 1$$

on tire ainsi

$$(\varepsilon^{(1)})^d = 1$$

et ε serait une racine de l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si, au contraire, le vecteur $\vec{M}$ et ses conjugués sont dans un même sous-espace linéaire L, celui-ci est un sous-espace invariant dans la représentation considérée de G, et il est défini par des équations à coefficients rationnels. Il y a toujours dans cette représentation, quelle que soit la nature de G, deux sous-espaces invariants rationnels triviaux: le sous-espace $x_1 + \dots + x_n = 0$ et le sous-espace $x_1 = \dots = x_n$. L contenant le vecteur $\vec{M}$ étranger à ces deux sous-espaces, ne peut être confondu avec l'un d'eux. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2. — *Soient* K *un corps de nombres algébriques de degré* n, G *son groupe de* GALOIS. *Supposons que la représentation de* G *dans un espace de dimension* n *par des permutations des* n *coordonnées soit rationnellement complètement réduite quand on a mis en évidence les sous-espaces invariants triviaux* $x_1 = \dots = x_n$ *et* $x_1 + \dots + x_n = 0$. *Alors il est impossible qu'il y ait une infinité d'unités de* K *appartenant à une variété algébrique de dimension* $s \leq n - r - 1$, r *désignant le nombre de* DIRICHLET *de* K. *En particulier, il n'y a qu'un nombre fini d'unités dans un module de dimension* $h \leq n - r$ *de nombres de* K.

La valeur de la limite imposée à h est $n - r$ et non $n - r - 1$, car quand on assujettit des unités de K à être sur un module de dimension h, c'est-à-dire sur une variété linéaire de dimension h, on les assujettit par là même à être sur l'une des deux variétés algébriques de dimension $h - 1$, intersections avec la variété linéaire précédente des variétés $x_1 \dots x_n = \pm 1$ (Cf. démonstration du théorème (3.4)).

Comme exemple de tels corps, il y a d'abord évidemment les corps ayant pour groupe de Galois, le *groupe symétrique*. En effet, s'il y avait un sous-espace invariant autre que les sous-espaces invariants totalement orthogonaux E_1 $x_1 = \dots = x_n$ et E_2 $x_1 + \dots + x_n = 0$, il y aurait un sous-espace invariant E_3 intérieur et non identique à E_2, donc de dimension $\leq n-2$. Il y aurait donc un point à coordonnées $a_1, \dots, a_n$ non toutes nulles et non toutes égales, satisfaisant à une relation

$$a_1 m_1 + \dots + a_{n-1} m_{n-1} = 0$$

à coefficients non tous nuls, ainsi qu'à toute relation déduite de celle-ci en y remplaçant $a_1, \dots, a_n$ par une permutation quelconque de ceux-ci.

Supposons que m_1, par exemple, soit $\neq 0$. Effectuons la permutation qui échange m_1 en m_n en laissant les autres inchangés, on voit que $a_1 = a_n$ et parconséquent, grâce à une permutation convenable de G, $a_i = a_j$ quels que soient i et j, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Un autre exemple de tels corps est donné par les corps *de degré* n *premier*. En effet, l'ordre du groupe de Galois G est un multiple de n, en vertu d'un théorème de Cauchy ([12]), G contient un élément d'ordre n. Une permutation d'ordre n sur n éléments, n étant premier, est nécessairement formée d'un seul cycle, puisque l'ordre d'une permutation est égal au p. p. c. m. du nombre de termes de chaque cycle. S'il y avait un sous-espace invariant rationnel autre que E_1 et E_2 dans la représentation considérée de G, il y aurait un vecteur à composantes rationnelles $a_1, \dots, a_n$, non toutes égales, et de somme non nulle, tel que ses n transformés par la permutation cyclique, mise tout à l'heure en évidence, et ses puissances, ne soient pas indépendantes. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

serait donc nul. Or, il est bien connu que

$$\Delta = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + a_2\xi_1 + \dots + a_n\xi_1^{n-1})$$
$$(a_1 + a_2\xi_{n-1} + \dots + \xi a_n{}^{n}_{n-1})$$

([12]) Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, p. 64

$\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ étant les racines de l'équation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} \equiv x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$$

qui est rationnellement irréductible puisque n est premier.

Le facteur $a_1 + \dots + a_n$ est $\neq 0$ par hypothèse, supposons que le facteur $a_1 + a_2\xi_1 + \dots + a_n\xi_1^{n-1}$ par exemple soit nul. On a aussi $1 + \xi_1 + \dots + \xi_1^{n-1} = 0$, et comme les a_i sont des nombres rationnels non tous nuls, et non tous égaux, on tirerait de ces deux relations une équation à coefficients rationnels de degré $n - 1$ pour ξ_1, ce qui est impossible. Δ est donc $\neq 0$, on arrive à une contradiction.

On a donc le résultat suivant:

Théorème 3.3. — *Les résultats du théorème* 3.2 *s'appliquent en particulier à tous les corps pour lesquels le groupe* G *est le groupe symétrique, et à tous les corps de degré* n *premier.*

Par exemple, posons $\theta = 2^{1/29}$, alors pour $K = R(\theta)$, $n = 29$, $r_1 = 1$, $2r_2 = 28$, $r = 14$, $n - r = 15$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels X_i à l'équation

$$\text{Norme } (X_0 + X_1\theta + \dots + X_{14}\theta^{14}) = \pm 1.$$

Deuxième application. — Sans faire d'hypothèse sur le groupe de Galois de K, nous étudions maintenant une infinité d'unités de K appartenant à un sous-module du module de dimension n par rapport au corps des rationnels, que forment les nombres du corps K.

Pour étudier les unités appartenant à un module de nombres algébriques, on peut évidemment supposer que la base du module a été amenée à la forme $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$ par division par une des unités contenues dans le module initial.

Soit $K = R[\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}]$ le corps obtenu en adjoignant $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$ au corps R des rationnels. Soit n son degré. Représentons tout nombre de K comme d'habitude par le point ayant pour coordonnées ce nombre et ses conjugués. Les points du module sont sur la variété linéaire L de dimension h

$$\text{(L)} \qquad x_i = X_0 + X_1\alpha_1^{(i)} + \dots + X_{h-1}\alpha_h^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dans laquelle les $X_1, \dots, X_{h-1}$ forment un système de coordonnées cartésiennes. Les unités sont sur l'une des variétés

$$\text{(N)} \qquad x_1 \dots x_n = +1 \qquad\qquad \text{(N')} \qquad x_1, \dots, x_n = -1.$$

L'intersection d'au moins l'une d'elles, soit N, avec L contient une infinité d'unités de K. Cette intersection W a pour équation en X_i

$$\text{(W)} \qquad \prod_{i=1}^{n} (X_0 + X_1\alpha_1^{(i)} + \dots + X_{h-1}\alpha_{h-1}^{(i)}) = 1.$$

Cette équation ne peut être une identité en X_i, car une telle identité entrainerait la proportionnalité d'au moins deux facteurs du produit. Soit

$$X_0 + X_1\alpha_1^{(i)} + \dots + X_{h-1}\alpha_{h-1}^{(i)} \equiv \lambda(X_0 + X_1\alpha_1^{(j)} + \dots + X_{h-1}\alpha_{h-1}^{(j)})$$

il en résulterait

$$\alpha_1^{(i)} = \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{h-1}^{(i)} = \alpha_{h-1}^{(j)}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que K a été défini comme égal à $R[\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}]$. W est donc une sous-variété algébrique de L dont les composantes irréductibles sont de dimension $h-1$. (On pourrait démontrer facilement qu'elle est en fait irréductible).

Supposons que, r étant toujours le nombre de DIRICHLET de K, on ait $h-1 \leq n-r$, alors il résulte du théorème (3.1) qu'il y a un sous-groupe γ du groupe des unités de K, dont les coordonnées satisfont à une relation

$$x_1^{N_1} \dots x_{n-1}^{N_{n-1}} = 1$$

les N étant des entiers rationnels non tous nuls. En la combinant à la relation à laquelle satisfont les coordonnées de toutes les unités considérées:

$$x_1 \dots x_n = 1$$

on peut toujours obtenir une relation homogène

$$x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} = 1 \qquad (q_1 + \dots + q_n = 0)$$

où les q_i sont des entiers rationnels non tous nuls, à laquelle satisfont les coordonnées de tous les éléments de γ. D'autre part, nous savons aussi qu'il y a au moins une classe de Γ/γ qui contient une infinité des unités situées sur W. Soit ε_0 un représentant de cette classe. Posons

$$c = \varepsilon_0^{(1)^{q_1}} \dots \varepsilon_0^{(n)^{q_n}}$$

il y a donc une infinité des unités situées sur W qui sont aussi sur la sous-variété C de L d'équation

$$\text{(C)} \qquad \prod_{i=1}^{n} (X_0 + X_1\alpha_1^{(i)} + \dots + X_{h-1}\alpha_{h-1}^{(i)})^{q_i} = c.$$

Comme pour l'équation de W, on démontre que celle-ci ne peut être une identité en X_i. Comme $q_1 + ... + q_n = 0$ elle représente un cône dans L. W n'étant pas un cône ne peut avoir en commun avec C que des variétés de dimension $h-2$ en nombre fini. On a donc le théorème:

THÉORÈME 3.4. — *Soit* M *un module d'entiers algébriques de dimension* h, *de base* $(1, \alpha_1, ..., \alpha_{h-1})$. *Soient* n *le degré,* r *le nombre de* DIRICHLET *du corps* $K = R[\alpha_1, ..., \alpha_{h-1}]$. *A tout ensemble infini* $\mathcal{E}$ *d'unités de* K *situées sur* M *correspond un sous-ensemble infini* $\mathcal{E}'$ *de* $\mathcal{E}$ *dont les éléments sont sur une variété de dimension* $h-2$.

Appliquons ce résultat à un module de dimension 2: comme une variété algébrique de dimension zéro se reduit à un nombre fini de points, il ne peut exister d'ensemble infini $\mathcal{E}'$. D'autre part, la condition $r \leq n-2$ peut se mettre sous la forme: le corps K n'a pas tous ses conjugués réels. On a donc:

THÉORÈME 3.5. — $K = R[\alpha]$ *étant un corps de nombres algébriques de degré* n, *dont les corps conjugués ne sont pas tous réels, il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'unités du corps dans le module de base* $(1, \alpha)$.

On en deduit facilement: f(t) *étant une équation algébrique de degré* n *à coefficients rationnels, qui est rationnellement irréductible et dont les racines ne sont pas toutes réelles, l'équation*

$$F(X, Y) = 1 \quad \text{où} \quad F(X, Y) \equiv Y^n f\left(\frac{X}{Y}\right)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels X, Y.

C'est le résultat de THUE, restreint au cas où l'équation $f(t)$ n'a as toutes ses racines réelles; il est obtenu indépendamment de l'étude de l'approximation des nombres algébriques par les nombres rationnels. Le travail de M. SKOLEM cité dans l'introduction donnait déjà ce résultat.

Le théorème (3.4) appliqué au cas d'un module de dimension 3, nous montre que si $r \leq n-3$, et si $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble d'une infinité d'unités contenues dans le module, $\mathcal{E}$ admet un sous-ensemble infini $\mathcal{E}'$ dont les éléments appartiennent à une courbe algébrique. En utilisant alors un résultat de M. SIEGEL sur les courbes algébriques contenant une infinité de points dont les coordonnées sont des entiers rationnels ou des entiers d'un même corps algébrique fini, nous pouvons démontrer un résultat plus précis. Ce résultat, à l'encontre des précédents, n'est plus indépendant des travaux sur l'approximation des nombres algébriques, puisque le théorème de M. SIEGEL qu'on utilise, tire de là son origine.

LEMME 3.6. — *Soient* K *un corps algébrique de degré* n *et* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *une base des entiers de ce corps. Soit* (N) *la variété Norme* $(X_1\omega_1 + ... + X_n\omega_n) = 1$.

Supposons qu' une courbe algébrique irréductible C *contienne une infinité de points à coordonnées* $X_1, \ldots, X_n$ *entières rationnelles, de* (N), *alors* K *doit contenir un sous-corps quadratique réel* k *et les points entiers de* C *correspondent à des unités de* K *qui forment une classe de restes du groupe des unités de* K *par rapport au sous-groupe des unités à norme positive de* k.

Le même résultat subsiste si on substitue à N *la variété* (N')

$$\text{Norme } (X_1\omega_1 + \ldots + X_n\omega_n) = -1.$$

La courbe C contenant une infinité de points entiers, admet ([13]) une représentation paramétrique des X_i par des polynômes en t et t^{-1}, donc

$$x_i = X_1\omega_1^{(i)} + \ldots + X_n\omega_n^{(i)} = \frac{P_i(t)}{t^{h_i}}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On a $x_1 \ldots x_n = 1$, donc $x_i = \lambda_i t^{m_i}$, les λ_i désignant des constantes et les m_i des entiers rationnels avec $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 0$. Soient $x_i = \varepsilon_0^{(i)}$ les coordonnées d'un point entier fixe de C, $x_i = \varepsilon^{(i)}$ celles d'un point entier quelconque de C, les $\varepsilon_0^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$, sont des unités de K et leurs conjugués. Posons $u_i = \dfrac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon_0^{(i)}}$; $u_1, \ldots, u_n$, sont les conjugués d'une même unité de K; on a pour $f = 1, \ldots, n$; $g = 1, \ldots, n$

$$u_f^{m_f} = u_g^{m_g}.$$

Soit T_{fg} la transformation du groupe de Galois de K qui transforme u_f en u_g; cette transformation est permutable avec l'élévation à une puissance entière rationnelle. On a donc

$$u_f^{m_g} = T_{fg}\, u_f^{m_f}$$

$$u_f^{(m_g^2)} = T_{fg} u_f^{m_f m_g} = T_{fg}^2 u_f^{(m_f^2)}$$

et plus généralement

$$u_f^{(m_g^q)} = T_{fg}^q u_f^{(m_f^q)}.$$

Soit Q l'ordre de T_{fg}; donnons à q la valeur Q. Il vient

$$u_f^{(m_g^Q)} = u_f^{(m_f^Q)}.$$

Comme il y a une infinité d'unités ε donc d'unités u différentes, elles ne

([13]) C.-L. Siegel, « Abh. Preuss. Akad. Wiss. », n. 1, 1929, p. 45.

peuvent toutes être des racines de l'unité, donc $m_g^Q = m_f^Q$, et comme m_f, m_g sont des entiers rationnels, Q un nombre naturel, on a $m_g = \pm m_f$. Les exposants m_i ne sont donc susceptibles que de deux valeurs au plus $\pm m$, donc $u_{(i)} = t_{\pm}^m$. Les unités u ont donc au plus deux conjugués distincts: donc elles sont rationnelles ou quadratiques. Comme il y a une infinité de ces unités distinctes, ce sont des unités de corps quadratiques réel.

Il y a un nombre fini de sous-corps quadratiques réels de K, il y en a donc un, soit k qui contient une infinité des unités u. La courbe C' d'équation $x_i = \pm t_i^m$ a donc une infinité de points communs avec l'hyperbole H qui porte les unités à norme positive de k, ou avec l'hyperbole H' qui porte les unités à norme négative de k. Elle est donc confondue avec H ou H'. Dans les deux cas, on voit que C correspond à H dans l'une des transformations $X_i' = {}^{(i)}x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Le résultat subsisterait si on était parti d'une courbe C située sur N'. La propriété énoncée dans le lemme en résulte immédiatement.

Théorème 3.7. — *Soit un module* M_3 *de nombres algébriques de base* $(1, \alpha, \beta)$. *Supposons que le corps* $\mathrm{K} = \mathrm{R}[\alpha, \beta]$ *ait au moins deux paires de corps conjugués imaginaires. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une infinité d'unités de* K *appartenant à* M_3, *est que* M_3 *contienne deux nombres* φ, ψ, *dont le quotient soit un nombre quadratique réel* $\theta = \dfrac{\psi}{\varphi}$, φ *étant une unité de* K. *Soit* ε *l'unité fondamentale du sous-corps* $\mathrm{k} = \mathrm{R}[\theta]$ *de* K, *toutes les unités* $\varphi\varepsilon^{\mathrm{n}}$ (n, *entier rationnel*) *appartiennent à* M_3 *et toutes les unités contenues dans* M_3 *à un nombre fini d'exceptions près, sont données par cette formule.*

K ayant au moins deux paires de conjugués imaginaires, son nombre de Dirichlet satisfait à l'inégalité $r < n - 3$. On peut donc appliquer le théorème 3.4.

De tout ensemble infini des unités de K appartenant au module, on peut extraire un sous-ensemble infini dont les éléments sont situés sur une courbe algébrique. Cette courbe doit être, en vertu du lemme précédent, la transformée d'une hyperbole portant les unités à norme positive d'un sous-corps quadratique réel $k = R[\theta]$ de K, par une transformation $(x_i \to \varphi^{(i)}x_i)$ φ étant une unité fixe de K. Le module M_3 contient donc le module de base $(\varphi, \varphi\theta)$ transformé du module des nombres de k. Il contient donc toutes les unités données par la formule $\varphi\varepsilon^n$, ε étant l'unité fondamentale de k, et n un entier rationnel quelconque. Si les unités de M_3 ne sont pas, à un nombre fini d'exceptions près, données par cette formule, le raisonnement précédent montre que M_3 contient encore un autre module de base $(\varphi', \varphi'\theta')$, θ' étant aussi un nombre quadratique réel, appartenant à K. Mais ceci est impossible. En effet, φ, $\varphi\theta$, φ', $\varphi'\theta'$, formeraient une base (surabondante) de M_3. Ils ne seraient pas rationnellement indépendants; $\frac{\varphi'}{\varphi}$ serait le quotient de deux nombres quadratiques réels, donc un nombre totalement réel. Le module M_3' de base $1, \frac{\varphi}{\theta}, \frac{\varphi'}{\varphi}, \frac{\varphi'}{\varphi}\theta'$ ne contiendrait que des nombres totalement réels. Comme M_3 contient le nombre 1, M_3' contiendrait le nombre $\frac{1}{\varphi}$, qui serait donc totalement réel; φ, et par conséquent φ', auraient aussi cette propriété, et M_3 serait composé de nombres totalement réels, ce qui est contraire aux hypothèses. Le théorème est donc démontré.

Remarquons que si le degré de K est impair, K ne peut avoir de sous-corps quadratique. Il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'unités dans M_3. Si en particulier K est de degré 5, nous obtenons le résultat de M. SKOLEM, cité dans l'introduction. C'est aussi d'ailleurs un cas particulier du théorème (3.3) puisque 5 est un nombre premier.

Nous allons maintenant déduire du résultat précédent un théorème sur l'approximation de 0 par des formes linéaires et homogènes à trois variables à coefficients algébriques, pour des valeurs entières rationnelles des variables. Considérons une telle forme, nous pouvons sans restreindre la généralité, l'écrire $X + Y\alpha + Z\beta$, α et β étant des entiers algébriques. Soit n le degré de $K = R[\alpha, \beta]$. Posons $H = |X| + |Y| + |Z|$ (la valeur absolue étant la valeur absolue ordinaire). Comme Norme $(X + Y\alpha + Z\beta)$, pour X, Y, Z entiers rationnels quelconques, est nécessairement un entier rationnel, il est trivial qu'il y a une constante positive c_0 telle que $|X + Y\alpha + Z\beta| > \frac{c_0}{H^{n-1}}$ quels que soient X, Y, Z entiers rationnels. Nous allons démontrer le résultat plus précis suivant:

THÉORÈME 3.8. — *Si le corps* $K = R[\alpha, \beta]$ *de degré* n *a au moins deux paires de corps conjugués imaginaires, l'inégalité*

$$|X + Y\alpha + Z\beta| < \frac{c}{H^{n-1}} \quad \text{où} \quad (H = |X| + |Y| + |Z|)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels X, Y, Z, *quelle que soit la constante positive* c.

Posons

$$A = \max(1, |\alpha^{(1)}|, |\beta^{(1)}|, \ldots, |\alpha^{(n)}|, |\beta^{(n)}|).$$

Supposons que l'inégalité ait une infinité de solutions en entiers rationnels X, Y, Z. Soient $\varphi = X + Y\alpha + Z\beta$ les entiers de K correspondant à ces solutions. On a

$$\text{Norme } \varphi = (X + Y\alpha + Z\beta) \prod_{i=2}^{n} (X + Y\alpha^{(i)} + Z\beta^{(i)})$$

donc

$$|\text{Norme } \varphi| \leq \frac{c}{H^{n-1}} A^{n-1} H^{n-1} = c'.$$

Ainsi les nombres $|\text{Norme } \varphi|$ étant des entiers rationnels bornés, ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Les idéaux principaux (φ) ne représentent qu'un nombre fini d'idéaux distincts. Il y a au moins un de ces idéaux qui est identique à l'idéal principal d'une infinité de nombres φ, soient $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots$.

On a $(\varphi_0) = (\varphi_m)$, donc $\frac{\varphi_m}{\varphi_0} = \varepsilon$, ε étant une unité de K. Il y a donc une infinité d'unités dans le module de base $\left(\frac{1}{\varphi_0}, \frac{\alpha}{\varphi_0}, \frac{\beta}{\varphi_0}\right)$. Alors on peut facilement montrer grâce au théorème 3.8 que K contient un sous-corps quadratique réel $k = R[\theta]$, que le module initial contient un sous-module $(\lambda, \lambda\theta)$, et que les nombres φ correspondant aux solutions en entiers rationnels de l'inégalité étudiée, sont à un nombre fini d'exceptions près, des nombres de ce sous-module $\varphi = \lambda(X' + X'\theta)$, X', Y' étant des entiers rationnels. Posons $H' = |X'| + |Y'|$, θ étant quadratique $|X' + Y'\theta| < \frac{c''}{H'^{1+q}}$ n'a qu'un nombre fini de solutions, quelles que soient les constantes réelles positives c'' et q. Mais on voit facilement qu'il y a une constante positive c''' telle que $H' < c'''H$. Une infinité de ces nombres ne peut donc satisfaire à $|\varphi| < \frac{c}{H^{n-1}}$ puisque n est supérieur à 4. On arrive donc à une contradiction et le théorème est démontré.

Notons que: le résultat du théorème (3.8) n'est plus précis que celui qu'on peut tirer des résultats de SIEGEL (« Math. Zeit. », Bd. 10, 1921) que quand n est < 57.

REMARQUE. — L'exemple simple auquel nous faisions allusion dans l'introduction, de variétés algébriques contenant une infinité d'unités de K est le suivant: Supposons que K contienne des unités ε satisfaisant avec leurs conjugués à un système de relations

$$\varepsilon^{(1)N_{1j}} \ldots \varepsilon^{(n)N_{nj}} = +1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

les N étant des entiers rationnels non tous nuls; toutes les unités du sous-groupe γ engendré par ces unités, satisfont à ces relations. Si au moins l'une d'elles n'est pas une racine de l'unité, ce sous-groupe est d'ordre infini, et la variété algébrique

$$(W^*) \qquad x_1^{N_{1j}} \dots x_n^{N_{nj}} = 1 \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

« contient une infinité d'unités » dans notre représentation habituelle des nombres de K.

De même η étant une unité quelconque de K

$$(W^{*\prime}) \qquad x_1^{N_{1j}} \dots x_n^{N_{nj}} = \eta^{(1)N_{1j}} \dots \eta^{(n)N_{nj}} \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

contient une infinité d'unités: toutes les unités de la classe de Γ/γ de représentant η.

Soient W_1^*, W_2^*,... les variétés algébriques irréductibles de dimension minima du type W^*, contenant au moins une unité de K non racine de l'unité, donc un sous-groupe d'ordre infini de Γ. La conjecture dont nous parlions dans l'introduction est la suivante: si une variété algébrique V contient une infinité d'unités, c'est qu'elle contient comme sous-variétés, des variétés W_i^*, ou des variétés congrues à des variétés W_i^* en nombre fini, et que les sous-groupes γ_i de Γ ou les classes de Γ/γ_i correspondant à ces sous-variétés ont tous leurs éléments contenus dans V, et donnent toutes les unités contenues dans V, à un nombre fini d'unités près. Alors si V est un hyperplan passant par l'origine (unités dans un module) les sous groupes γ_i mis en évidence seraient nécessairement les groupes des unités de sous-corps de K.

Remarquons que pour une variété algébrique V quelconque cette dernière proprieté des γ_i n'est sûrement pas nécessaire, comme on peut le voir par des exemples simples. Par exemple, considérons le corps k formé par l'adjonction à un corps k_1 de degré p_1 premier, d'un corps de degré p_2, premier. Soit N_1 la variété algébrique portant les unités à norme positive de k_1, N_2 la variété portant sur les unités à norme positive de k_2, la variété $N_1 \cdot N_2$ dans la représentation habituelle de k, contient toutes les unités d'un sous-groupe du groupe Γ des unités de K, qui n'est sûrement pas le groupe des unités d'un sous-corps de K, ni la réunion d'un nombre fini de classes de Γ par rapport à de tels sous-groupes.

Les résultats obtenus dans ce travail sont bien en accord avec la conjecture énoncée. Dans le cas étudié par le théorème (3.2), il ne peut exister de variété W^* (autre que les variétés triviales, d'équations $x_1 \dots x_n = \pm 1$), et nous trouvons que sur aucune des variétés que nous considérons il ne peut y avoir une infinité d'unités. Dans le théorème (3.7) la condition nécessaire et suffisante obtenue, pour l'existence d'une infinite d'unités dans les modules de dimension 3 considerés, est que la variété linéaire que définit le module, contienne une variété congrue à la variété formée par les 2 hyperboles portant les unités d'un sous-corps quadratique réel de K, hyperboles qui sont bien des variétés W^*. Et l'on a bien ainsi toutes les unités contenues dans le module, à un nombre fini d'exceptions près peut-être.

Sul numero degli zeri di certe serie di Laurent.

Memoria di LUIGI ONOFRI (a Bologna).

Sunto. - *Fondandosi su alcune disuguaglianze relative a serie trigonometriche, l'A, stabilisce vari criteri concernenti il numero degli zeri che una serie di* LAURENT, *a coefficienti reali, possiede nell'interno della propria corona di convergenza. Si estendono così diverse proposizioni relative agli zeri dei polinomi e delle serie di potenze, dovute a* B. SEGRE *ed all'A. medesimo.*

In un lavoro pubblicato nelle « Memorie della R. Accademia d'Italia » (1), ho stabilito un gruppo di proposizioni riguardanti il numero degli zeri che certe serie di potenze $f(z)$, a coefficienti reali, posseggono nell'interno del proprio cerchio di convergenza. I metodi ivi seguiti si fondano essenzialmente su alcune disuguaglianze relative a serie di seni o di coseni che estendono, nel modo più semplice e diretto, varie proposizioni sui polinomi trigonometrici ottenute da B. SEGRE, il quale da esse ha pure dedotto numerosi interessanti risultati concernenti gli zeri di certi polinomi (2). L'impiego delle suddette disuguaglianze consente precisamente, in casi assai estesi, di determinare i segni delle parti reale ed immaginaria di $f(z)$ e, con l'ausilio della nota formula dell'indicatore logaritmico, di valutare il numero degli zeri della serie medesima.

Nel presente lavoro mostro come, applicando quegli stessi metodi alle serie di LAURENT, si possano stabilire dei criteri, abbastanza generali, atti a determinare il numero degli zeri che una serie siffatta possiede nell'interno della propria corona di convergenza.

1. Consideriamo una funzione analitica $f(z)$ definita da una serie di LAURENT

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

(1) L. ONOFRI, *Intorno agli zeri di alcune classi di funzioni analitiche*, « Mem. della R. Acc. d'Italia », tomo 6° (1935), pag. 1267.

(2) B. SEGRE, *Intorno ad un teorema di Kakeya*, « Boll. della Unione Mat. Italiana », tomo 12° (1933), p. 123; *Sulla teoria delle equazioni algebriche a coefficienti reali*, « Mem. della R. Acc. d'Italia », tomo 5° (1934), p. 323.

a coefficienti reali e convergente entro una corona circolare di centro l'origine, limitata dalla circonferenza unitaria e da una circonferenza di raggio $r < 1$.

Posto $z = \rho e^{i\varphi}$ ed indicate con $R(\rho, \varphi)$, $iI(\rho, \varphi)$ la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$, dalla (1) si traggono le

$$R(\rho, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + a_{-n} \rho^{-n}) \cos n\varphi, \tag{2}$$

$$I(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n - a_{-n} \rho^{-n}) \operatorname{sen} n\varphi. \tag{3}$$

Lo studio del comportamento di queste funzioni nella corona più sopra definita, ci consentirà di stabilire varie proposizioni riguardanti il numero degli zeri che la $f(z)$ possiede nell'interno della corona medesima.

Per semplicità di scrittura, converremo di rappresentare col simbolo (ρ_1, ρ_2) la corona circolare definita dalle due circonferenze che hanno i centri nell'origine ed i raggi ρ_1 e ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$; in particolare, dunque, la corona entro cui converge la (1) verrà indicata con $(r, 1)$.

2. TEOREMA I. — *Se:*

$$a_n r^{2n} + a_{-n} \leq 0, \quad a_n + a_{-n} \leq 0 \qquad (n \geq 1),$$

e se esiste un numero $\varepsilon > 0$ *tale che negli intervalli* $r - r + \varepsilon$, $1 - \varepsilon - 1$ *la* $f(z)$ *sia positiva, allora la* $f(z)$ *non ha zeri nell'interno di* $(r, 1)$.

Anzitutto osserviamo che, in virtù delle condizioni cui soddisfano i coefficienti a_n, è

$$a_n \rho^n + a_{-n} \rho^{-n} \leq 0 \qquad (n \geq 1) \tag{4}$$

comunque si scelga ρ nell'intervallo $r - 1$.

Ciò premesso, prendiamo una corona circolare (ρ_1, ρ_2) tale che $r < \rho_1 < r + \varepsilon$, $1 - \varepsilon < \rho_2 < 1$, e valutiamo la funzione $R(\rho, \varphi)$ sul contorno di questa corona. Avendosi, per dato, $f(\rho_1) > 0$, $f(\rho_2) > 0$ e valendo le (4), deve essere

$$a_0 > \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \rho_1^n + a_{-n} \rho_1^{-n}|, \quad a_0 > \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \rho_2^n + a_{-n} \rho_2^{-n}|,$$

e, conseguentemente, $R(\rho_1, \varphi) > 0$, $R(\rho_2, \varphi) > 0$ per ogni valore di φ. Queste ultime disuguaglianze ci assicurano che la funzione $\arg f(z)$ non subisce variazione alcuna quando a z si fa percorrere l'intero contorno di (ρ_1, ρ_2). Ciò vuol dire, per la nota formula dell'indicatore logaritmico, che la $f(z)$ non si annulla mai nell'interno di (ρ_1, ρ_2), e quindi, per l'arbitrarietà consentita a ρ_1, ρ_2, nemmeno nell'interno di $(r, 1)$.

3. TEOREMA II. — *Se i coefficienti* a_n *sono non negativi, non tutti nulli, e tali che*

$$a_n \leq \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{a_{n-\mu} + r^\mu a_{n+\mu}}{1+r^\mu} \qquad (|n| \geq 1),$$

essendo m *un intero positivo fisso, la* f(z) *non ha zeri nell'interno di* (r, 1).

Formiamo il prodotto della funzione

$$\varphi(z) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{z^\mu + r^\mu z^{-\mu}}{1+r^\mu}$$

per la $f(z)$. La funzione

$$F(z) = f(z)\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(a_n - \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{a_{n-\mu} + r^\mu a_{n+\mu}}{1+r^\mu} \right) z^n,$$

che in tal guisa otteniamo, si mantiene positiva in tutto l'intervallo r^{-1} perchè $a_n \geq 0$ per ogni n, e $\varphi(z) > 0$ in ogni punto dell'intervallo medesimo. Si ha inoltre, in conseguenza delle ipotesi fatte sui coefficienti a_n,

$$a_n - \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{a_{n-\mu} + r^\mu a_{n+\mu}}{1+r^\mu} \lesseqgtr 0 \qquad (|n| \geq 1).$$

Tenendo conto di ciò, si può asserire, a norma del teorema I, che la $F(z)$, e quindi anche la $f(z)$, non si annullano mai nell'interno di $(r, 1)$.

Il teorema II include alcuni casi particolari degni di speciale rilievo. Facendo $r = 0$, $a_{-n} = 0$ $(n = 1, 2, ...)$ si ottiene il

COROLLARIO I. — *Se i coefficienti* a_n *di una serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sono reali, non negativi, non tutti nulli, e tali che

$$a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-m}}{m} \qquad (n \geq 1),$$

essendo m *un intero positivo fisso, la* f(z) *non ha zeri nell'interno del cerchio unitario.*

Se, invece, si suppone $m = 1$ ed r qualunque, si ottiene il

COROLLARIO II. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *sono non negativi, non tutti nulli, e tali che*

$$a_n \leq \frac{a_{n-1} + r a_{n+1}}{1+r} \qquad (|n| \geq 1),$$

la f(z) *non ha zeri nell'interno di* (r, 1).

Questa proposizione si può riguardare come la più semplice e diretta estensione alle serie di LAURENT di un noto teorema di KAKEYA relativo alle serie di potenze ([3]).

4. Passiamo ora ad esaminare la funzione $I(\rho, \varphi)$, sempre allo scopo di valutare il numero degli zeri posseduti dalla $f(z)$ nell'interno di $(r, 1)$.

Supponiamo dapprima che i coefficienti a_n soddisfino alle condizioni

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = r > 0; \tag{5}$$

$$a_n - a_{-n} > 0, \quad a_n r^n - a_{-n} r^{-n} > 0 \qquad (n \geq 1); \tag{6}$$

$$\Delta n(a_n - a_{-n}) < 0, \quad \Delta n(a_n r^n - a_{-n} r^{-n}) < 0 \qquad (n \geq 1); \tag{7}$$

il simbolo Δ indicando l'operazione di differenziazione finita.

Tenendo conto delle (5), (6) si prova immediatamente che:

a) *esiste un indice* $\bar{n} > 0$ *tale che, per* $n > \bar{n}$, *è* $a_n > 0$, $a_{-n} < 0$.

Ciò premesso, prendiamo in esame le funzioni

$$H_n(\rho) = \rho^{n+1} \Delta n(a_n\rho^n - a_{-n}\rho^{-n}) = (n+1)a_{n+1}\rho^{2n+2} - na_n\rho^{2n+1} + \\ + na_{-n}\rho - (n+1)a_{-n-1},$$

essendo $r \leq \rho \leq 1$.

A causa delle (7) e della a), una qualsiasi $H_n(\rho)$, d'indice $n > \bar{n}$, possiede due radici positive, al più, ed è positiva per $\rho = 0$ e negativa per $\rho = r$, $\rho = 1$. Pertanto, $H_n(\rho)$ si mantiene negativa in tutto l'intervallo $r \vdash\!\dashv 1$. Quindi:

b) *si può determinare un* $\varepsilon > 0$ *in guisa tale che, in ognuno degli intervalli* $r \vdash\!\dashv r + \varepsilon$, $1 - \varepsilon \vdash\!\dashv 1$, *sia* $H_n(\rho) < 0$ $(n \geq 1)$.

Questa proposizione ci offre il modo di determinare il segno della funzione $I(\rho, \varphi)$ in un qualsiasi punto z di $(r, 1)$ avente il modulo ρ maggiore di $1 - \varepsilon$ o minore di $r + \varepsilon$. Ed infatti, per essere $H_n(\rho) < 0$, la serie trigonometrica (3) si mantiene positiva per $0 < \varphi < \pi$ e negativa per $\pi < \varphi < 2\pi$ ([4]).

Consideriamo ora una corona circolare (ρ_1, ρ_2) tale che $r < \rho_1 < r + \varepsilon$, $1 - \varepsilon < \rho_2 < 1$. Per cose note, il numero m degli zeri che la $f(z)$ possiede nell'interno di (ρ_1, ρ_2) è dato dal quoziente per 2π della variazione subita da

---

([3]) Cfr. S. KAKEYA, *On the Limits of the Roots of an Algebraic Equations with Positive Coefficients*, « Tôhoku Math. Journ. », tomo 2° (1912); oppure B. SEGRE, loc. cit. in ([2]). Facendo $r = 0$, $a_n = 0$ $(n < 0)$ nell'enunciato del Cor. II, si ritrova appunto il teor. di KAKEYA.

([4]) A questa asserzione si perviene applicando alla (3) il teorema: *Se la variabile* b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *è mai negativa e non sempre nulla, e se inoltre* $\Delta n b_n \leq 0$, *la serie* $\sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} n\varphi$ $(0 < \varphi < \pi)$ *converge per ogni* φ, *e la sua somma è sempre positiva.* Cfr. L. ONOFRI, Mem. citata in ([1]), pag. 1274.

$\arg f(z)$ quando a z si fa percorrere, nel verso positivo, l'intero contorno di (ρ_1, ρ_2). Basandosi su quanto s'è detto più sopra intorno al segno di $I(\rho, \varphi)$, si vede subito che, in corrispondenza di un intero giro compiuto sulla circonferenza di raggio ρ_1 (di raggio ρ_2), $\arg f(z)$ aumenta di 2π se $f(\rho_1) < 0$, $f(-\rho_1) > 0$ (se $f(\rho_2) > 0$, $f(-\rho_2) < 0$); diminuisce di 2π se $f(\rho_1) > 0$, $f(-\rho_1) < 0$ (se $f(\rho_2) < 0$, $f(-\rho_2) > 0$); non subisce mutamenti se $f(\rho_1)$, $f(-\rho_1)$ (se $f(\rho_2)$, $f(-\rho_2)$) hanno egual segno. Pertanto, il calcolo della variazione totale di $\arg f(z)$, e conseguentemente di m, si sa eseguire tutte le volte che si conoscano i segni dei quattro numeri $f(\rho_1)$, $f(-\rho_1)$, $f(\rho_2)$, $f(-\rho_2)$.

Quando la corona (ρ_1, ρ_2) è sufficientemente prossima alla $(r, 1)$, si può sostituire alla considerazione dei suddetti quattro numeri quella dei limiti

$$(8) \qquad \begin{aligned} f(r+0) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + a_{-n} r^{-n}, & f(-r-0) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}), \\ f(1-0) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_{-n}, & f(-1+0) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + a_{-n}), \end{aligned}$$

certamente esistenti in forza delle (5), (6), (7). Anche nel caso in cui alcuni di questi limiti siano nulli, è possibile di determinare i segni di $f(\rho_1)$, ... Difatti, se ρ appartiene ad $r^{-}r+\varepsilon$. oppure a $1-\varepsilon^{-}1$, risulta

$$\begin{aligned} f'(\rho) &= \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \rho^n - a_{-n}\rho^{-n}) > 0, \\ f'(-\rho) &= -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (a_n \rho^n - a_{-n}\rho^{-n}) = \\ &= -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \Delta n (a_n \rho^n - a_{-n}\rho^{-n}) > 0, \end{aligned}$$

e quindi dall'annullarsi di uno dei quattro numeri $f(r+0)$, $f(-r-0)$, $f(1-0)$, $f(-1+0)$ consegue rispettivamente $f(\rho_1) > 0$, $f(-\rho_1) < 0$, $f(\rho_2) < 0$, $f(-\rho_2) > 0$.

Riassumendo le considerazioni superiormente svolte e convenendo che, qualora una delle espressioni

$$f(r+0), \quad f(-1+0); \quad f(-r-0), \quad f(1-0)$$

risulti nulla, ad essa venga attribuito il segno $+$ od il segno $-$ a seconda che si tratti di una delle prime due o delle ultime due espressioni, possiamo enunciare il

TEOREMA III. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5), (6), (7), *la* $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *tanti zeri quante sono le variazioni che complessivamente presentano le due successioni* $f(-1+0)$, $f(-r-0)$; $(fr+0)$, $f(1-0)$.

5. Supponiamo ora che i coefficienti a_n della (1) soddisfino alle (5) ed alle condizioni

(9) $$a_n - a_{-n} > 0, \quad a_n r^n - a_{-n} r^{-n} < 0 \qquad (n \geq 1);$$

(10) $$\Delta n(a_n - a_{-n}) < 0, \quad \Delta n(a_n r^n - a_{-n} r^{-n}) > 0 \qquad (n \geq 1).$$

Osserviamo anzitutto che, a causa delle (5) e (9):

a) *esiste un indice* $\bar{n} > 0$ *tale che, per* $n > \bar{n}$, *è* $a_n > 0$, $a_{-n} > 0$.

Riprendiamo poi a considerare le funzioni $H_n(\rho)$ introdotte al n° 4. Nel caso attuale, ogni $H_n(\rho)$ $(n > \bar{n})$ possiede una ed una sola radice in ciascuno degli intervalli $0 \overline{\ } r$, $r \overline{\ } 1$, $1 \overline{\ } + \infty$. Ciò si vede subito applicando la regola dei segni di Cartesio e tenendo presente che $H_n(0) < 0$, $H_n(r) > 0$. $H_n(1) < 0$, $H_n(+\infty) > 0$.

Inoltre, preso ρ nell'intervallo $\sqrt{r} \overline{\ } 1$, si ha, per le (5),

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{-n}}{a_{n+1}\rho^{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{-n-1}}{a_{n+1}\rho^{2n+1}} = 0,$$

onde:

$$\overline{\lim} \frac{H_n(\rho)}{(n+1)a_{n+1}\rho^{2n+1}} = \rho - \underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Ma per $\rho = 1$ è $H_n(1) < 0$, e perciò $1 - \underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 0$; quindi, fissato ρ in $\sqrt{r} \overline{\ } 1$, risulta

$$\overline{\lim} \frac{H_n(\rho)}{(n+1)a_{n+1}\rho^{2n+1}} < 0,$$

e conseguentemente $H_n(\rho) < 0$, per n sufficientemente elevato.

In modo analogo si prova che, fissato ρ nell'intervallo $r \overline{\ } \sqrt{r}$, è possibile determinare un indice n_1 in guisa che per $n > n_1$ risulti $H_n(\rho) > 0$.

Da quanto si è ora stabilito e dal fatto che $H_n(r) > 0$, $H_n(1) < 0$ $(n \geq 1)$ discende tosto la seguente proposizione:

b) *si possono determinare due intervalli* $r \overline{\ } r + \varepsilon$, $1 - \varepsilon \overline{\ } 1$ *in modo che nel primo di essi sia* $H_n(\rho) > 0$ *e nel secondo sia* $H_n(\rho) < 0$, *per ogni* $n \geq 1$.

Valendosi di questa proposizione e seguendo un procedimento del tutto analogo a quello tenuto al n° 4 per determinare la variazione di $\arg f(z)$, si perviene senza difficoltà al

Teorema IV. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5), (9), (10), *la* $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *tanti zeri quante sono le variazioni che complessivamente presentano le due successioni* $f(r+0)$, $f(-r-0)$; $f(1-0)$, $f(-1+0)$.

A completamento di questo enunciato è necessario osservare che i limiti $f(r+0), \ldots$ sono forniti sempre dalle (8) e che, qualora una delle espressioni

$$f(r+0),\ f(1-0);\quad f(-r-0),\ f(-1+0)$$

risulti nulla, si deve convenire di attribuire ad essa il segno $-$ od il segno $+$ a seconda che si tratti di una delle prime due o delle ultime due espressioni.

6. Stabiliamo, da ultimo, un nuovo gruppo di teoremi prendendo in esame la serie

$$F(z) = zf(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1} + a_{-n-1} z^{-2n-1}. \tag{11}$$

Manifestamente, la (11) converge entro la corona $(\sqrt{r},\ 1)$, ed ha ivi un numero di zeri doppio del numero degli zeri che la $f(z)$ possiede all'interno di $(r,\ 1)$.

Posto $z = \rho e^{i\varphi}$ ed indicate con $R_1(\rho, \varphi)$, $iI_1(\rho, \varphi)$ la parte reale e la parte immaginaria di $F(z)$, dalla (11) si traggono le:

$$R_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \rho^{2n+1} + a_{-n-1}\rho^{-2n-1}) \cos (2n+1)\varphi, \tag{12}$$

$$I_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \rho^{2n+1} - a_{-n-1}\rho^{-2n-1}) \operatorname{sen} (2n+1)\varphi. \tag{13}$$

Supposto che i coefficienti a_n soddisfino alle condizioni (5) ed alle

$$a_n + a_{-n-1} > 0, \qquad \Delta(2n+1)(a_n + a_{-n-1}) < 0 \qquad (n \geq 0); \tag{14}$$

$$a_n r^n + a_{-n-1} r^{-n-1} > 0, \quad \Delta(2n+1)(a_n r^n + a_{-n-1} r^{-n-1}) < 0 \qquad (n \geq 0); \tag{15}$$

si dimostra, con argomentazioni analoghe a quelle esposte al n° 4, l'esistenza di un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni ρ appartenente ad uno qualunque degli intervalli $\sqrt{r} \vdash\!\dashv \sqrt{r}+\varepsilon$, $1-\varepsilon \vdash\!\dashv 1$, risulti

$$a_n \rho^{2n+1} + a_{-n-1}\rho^{-2n-1} > 0, \quad \Delta(2n+1)(a_n \rho^{2n+1} + a_{-n-1}\rho^{-2n-1}) < 0 \quad (n \geq 0).$$

Da ciò discende che è $R_1(\rho, \varphi) > 0$ per $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, ρ essendo scelto comunque in uno dei suddetti intervalli [5]. Procedendo come al n° 4, si può

[5] A questa asserzione si perviene applicando alla serie (12) il teorema: *Se la variabile* b_n *è mai negativa e non sempre nulla, e tale inoltre che* $\Delta(2n+1)b_n \leq 0$ $(n \geq 0)$, *la serie* $\sum_0^{\infty} b_n \cos (2n+1)\varphi$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ *converge per ogni* φ, *escluso al più il valore* $\varphi = 0$, *e la sua somma è sempre positiva.* Cfr. L. ONOFRI, Mem. citata in [1], pag. 1276.

determinare la variazione di $\arg F(z)$ sul contorno di una corona (ρ_1, ρ_2), sufficientemente prossima alla $(\sqrt{r}, 1)$, pervenendo al

Teorema V. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5), (14), (15), *la* $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *uno zero al più (necessariamente negativo). E tale zero esiste se e solo se* $f(-1+0) > 0$, $f(-r-0) < 0$.

Se alla condizione (15) si sostituisce l'altra:

$$(16) \qquad a_n r^n + a_{-n-1} r^{-n-1} < 0, \quad \Delta(2n+1)(a_n r^n + a_{-n-1} r^{-n-1}) > 0 \qquad (n \geq 0),$$

si dimostra, con ragionamenti che sostanzialmente non differiscono da quelli fatti al n° 5, e con l'ausilio della proposizione citata in [5], il

Teorema VI. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5), (14), (16), *la* $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *uno ed un solo zero (necessariamente positivo).*

Consideriamo, infine, la funzione $I_1(\rho, \varphi)$. Tenuto conto che, se la variabile b_n è infinitesima decrescente, la serie $\sum_0^\infty b_n \operatorname{sen}(2n+1)\varphi$ $(0 < \varphi < \pi)$ converge per ogni φ e la sua somma è positiva [6], e ragionando sulla (13) come ai n^i 4, 5 sulla (3), si dimostrano senza difficoltà i seguenti

Teorema VII. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5) *ed alle*

$$(17) \qquad a_n - a_{-n-1} > 0, \qquad \Delta(a_n - a_{-n-1}) < 0 \qquad (n \geq 0),$$

$$(18) \qquad a_n r^n - a_{-n-1} r^{-n-1} > 0, \quad \Delta(a_n r^n - a_{-n-1} r^{-n-1}) < 0 \qquad (n \geq 0);$$

la $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *uno zero al più (necessariamente positivo). E tale zero esiste se e solo se* $f(1-0) > 0$, $f(r+0) < 0$.

Teorema VIII. — *Se i coefficienti* a_n *della* (1) *soddisfano alle condizioni* (5), (17) *ed alle*

$$a_n r^n - a_{-n-1} r^{-n-1} < 0, \quad \Delta(a_n r^n - a_{-n-1} r^{-n-1}) > 0 \qquad (n \geq 0);$$

la $f(z)$ *possiede nell'interno di* $(r, 1)$ *uno ed un solo zero (necessariamente negativo).*

---

[6] Cfr. L. Onofri, Mem. citata in [1], pag. 1277.

Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante.

(Extrait d'une lettre à M. Beniamino Segre)
par ÉLIE CARTAN (à Paris).

.... Les résultats que vous avez obtenus sur les familles isoparamétriques d'hypersurfaces de l'espace euclidien à n dimensions ([1]) peuvent être étendus aux espaces à n dimensions à courbure constante négative et, en partie, aux espaces à courbure constante positive. Dans les deux cas on peut démontrer que le problème revient à la recherche des hypersurfaces dont toutes les courbures principales sont constantes, mais, alors que pour les espaces à courbure constante *négative* ou nulle, le nombre des courbures principales distinctes ne peut dépasser deux, il n'en est plus de même si l'espace est à courbure constante positive. Le problème dans ce dernier cas est compliqué, mais fort intéressant; j'ai pu le résoudre complètement pour l'espace à courbure constante positive à 4 dimensions; on peut du reste dans le cas général trouver une loi donnant les courbures principales, dès que l'on connaît leurs degrés de multiplicité.

La méthode que j'ai employée fait appel à une technique différente de la vôtre: c'est la méthode du repère mobile, apparentée, comme vous le savez, à la méthode des congruences normales de G. RICCI.

1. Préliminaires. — Je suppose la forme fondamentale de l'espace, à n dimensions et de courbure riemannienne constante C, décomposée en une somme de n carrés $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2$, avec les formules de structure

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_i' = [\omega_k \, \omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik} \, \omega_{kj}] - C[\omega_i \, \omega_j], \end{array} \right.$$

où l'on a

$$(2) \qquad \omega_{ij} = - \omega_{ji} = \gamma_{ijk} \omega_k ;$$

les γ_{ijk} sont les coefficients de rotation de RICCI.

([1]) « Rendic. Lincei », VI s., 27, 1938, p. 203-207.

Soit f une fonction jouissant de la propriété que ses deux paramètres différentiels $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$ soient des fonctions de f. Je supposerai que le $n^{\text{ième}}$ vecteur du repère rectangulaire attaché à la décomposition en carrés est normal aux hypersurfaces de niveau de la fonction f; la différentielle df est alors un multiple $\varphi\omega_n$ de ω_n; φ est précisément la racine carrée de $\Delta_1 f$, donc une fonction de f, de sorte que ω_n est une différentielle exacte dt. D'où il résulte le résultat bien connu que les hypersurfaces de niveau de la fonction f forment une famille d'hypersurfaces parallèles et que cette famille est connue dès qu'on en connaît une hypersurface.

De la propriété de la forme ω_n d'être une différentielle exacte résulte $\omega_n' = 0$, et par suite, d'après (1),

$$[\omega_i \omega_{in}] = 0; \tag{3}$$

cela signifie que les ω_{in} sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ avec un tableau de coefficients symétrique.

Or la forme quadratique $\omega_i \omega_{in}$, qui est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $t = C^{te}$, peut être ramenée à une somme de carrés par un choix convenable des $n-1$ premiers vecteurs du repère; on peut donc poser

$$\omega_{in} = a_i \omega_i \qquad \text{(ne pas sommer)}, \tag{4}$$

formule dans laquelle les a_i sont les $n-1$ courbures principales de l'hypersurface.

Introduisons maintenant le paramètre différentiel $\Delta_2 f$. Les dérivées covariantes f_i de la fonction f *par rapport au repère choisi* sont

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots,\ f_{n-1} = 0,\ f_n = \varphi;$$

on a d'autre part, en désignant par D le symbole de la différentiation covariante,

$$Df_i = df_i - f_k\omega_{ik} = df_i - f_k\gamma_{ikh}\omega_h = \begin{cases} -\varphi\gamma_{inh}\omega_h = -\varphi a_i\omega_i & \text{si } i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ d\varphi = \psi\omega_n & \text{si } i = n; \end{cases}$$

ψ est évidemment une fonction de f. On a donc

$$\Delta_2 f = f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{nn} = \psi - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})\varphi.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que Δ_2f *soit une fonction de* f, *en supposant que* Δ_1f *soit déjà une fonction de* f, *est que les hypersurfaces de niveau de la fonction* f *soient toutes à courbure moyenne constante.*

2. **Les courbures principales des hypersurfaces de niveau.** — La dérivation extérieure de l'équation (4) donne, en tenant compte de (1),

$$(5) \qquad (a_k - a_i)[\omega_k \omega_{ki}] + [\omega_i(da_i - C + a_i^2\omega_n)] = 0,$$

l'indice de sommation k variant seulement de 1 à $n-1$, comme du reste dans toutes les formules qui suivront. Comme la première somme du premier membre ne contient aucun terme en $[\omega_i \omega_n]$ puisque la forme ω_{ii} est identiquement nulle, on a

$$(6) \qquad da_i = (C + a_i^2)\omega_n + \dots,$$

les termes non indiqués dépendant linéairement de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$. Mais comme $da_1 + da_2 + \dots + da_{n-1}$ ne dépend que de ω_n, nous en déduisons

$$d(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = [(n-1)C + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2]\omega_n;$$

par suite $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2$ est aussi une fonction de f. La considération de sa différentielle montre, en tenant compte de (6) et par un calcul analogue au précédent, que $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3$ est également une fonction de f, et ainsi de suite. D'où résulte le théorème:

Les hypersurfaces de niveau de la fonction f *ont toutes leurs courbures principales constantes.* On a de plus

$$(7) \qquad da_i = (C + a_i^2)\omega_n = (C + a_i^2)dt.$$

Réciproquement soit Σ une hypersurface particulière à courbures principales constantes; les hypersurfaces parallèles forment une famille isoparamétrique. Il suffira de faire la démonstration dans un espace de courbure constante égale à 1. Si l'on pose $a_i = \operatorname{tg}\theta_i$, la courbure principale correspondante de l'hypersurface parallèle à Σ à la distance t est $\operatorname{tg}(\theta_i + t)$; elle est donc constante sur cette hypersurface.

3. **Une formule fondamentale.** — Revenons à l'équation (5) et annulons l'ensemble des termes en $[\omega_k \omega_h]$; nous obtenons

$$(a_h - a_i)\gamma_{kih} = (a_h - a_i)\gamma_{hik} \qquad \text{(ne pas sommer)},$$

formule d'où nous tirons deux conclusions:

1° le coefficient γ_{kih} est nul si $a_i = a_h \neq a_k$:

$$(8) \qquad \gamma_{kih} = 0 \quad \text{si} \quad a_i = a_h \neq a_k \quad \text{ou} \quad a_k = a_h \neq a_i.$$

2° On a, pour a_i, a_k, a_h distincts,

$$(9) \qquad (a_k - a_i)\gamma_{kih} = (a_i - a_h)\gamma_{ihk} = (a_h - a_k)\gamma_{hki} \qquad (a_i, a_k, a_h \text{ distincts}),$$

ce qui permet de poser

$$\gamma_{ikh} = \frac{\lambda_{ikh}}{a_i - a_k}, \tag{10}$$

la quantité λ_{ikh} étant symétrique par rapport à ses trois indices [1].

Cela posé dérivons extérieurement l'équation (2)

$$\omega_{ij} = \gamma_{ijk}\omega_k, \tag{2}$$

où nous supposerons essentiellement $a_i \neq a_j$, et égalons dans les deux membres l'ensemble des termes en $[\omega_i \omega_j]$. En tenant compte des équations (1), dans lesquelles l'indice de sommation peut prendre la valeur n, nous obtenons

$$\sum_r (\gamma_{iri}\gamma_{rjj} - \gamma_{irj}\gamma_{rji}) - (C + a_i a_j) = \sum_r \gamma_{ijr}(\gamma_{irj} - \gamma_{jri}),$$

ou encore

$$C + a_i a_j = \sum_r (\gamma_{iri}\gamma_{rjj} + \gamma_{ijr}\gamma_{jri} + \gamma_{rij}\gamma_{ijr} + \gamma_{irj}\gamma_{jri}),$$

formule dans laquelle l'indice de sommation r varie de 1 à $n-1$.

Si dans le second membre on donne à r une valeur fixe telle que $a_r = a_i$, les coefficients γ_{rjj}, γ_{ijr}, γ_{jri} s'annulent en tenant compte de (8); il en est de même si $a_r = a_j$; il suffit donc de donner à r les valeurs pour lesquelles a_r est différent de a_i et de a_j. En tenant compte de (10), on trouve alors la *formule fondamentale*

$$C + a_i a_j = 2 \sum_r \frac{\lambda_{ijr}^2}{(a_i - a_r)(a_j - a_r)}, \tag{11}$$

la sommation étant effectuée par rapport aux indices r pour lesquels $a_r \neq a_i$, a_j.

4. Cas où l'hypersurface n'admet que deux courbures principales distinctes. — Dans ce cas, le second membre de l'équation (11) est nul et l'on voit que *le produit des deux courbures principales de l'hypersurface est égal à la courbure riemannienne changée de signe de l'espace ambiant.*

Changeons de notations et désignons par des lettres latines $i, j, \ldots$, les indices correspondant à $a_i = a$ et par des lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots$, les indices correspondant à $a_\alpha = b$ $(ab = -C)$. D'après (8), tous les coefficients $\gamma_{i\alpha k}$, $\gamma_{i\alpha\beta}$ et $\gamma_{i\alpha n}$ sont nuls; on a donc

$$\omega_{i\alpha} = 0.$$

---

[1] On a aussi $\gamma_{kin} = 0$ si $a_k \neq a_i$. Cette relation sera utilisée au n° 4.

Les formules (1) donnent d'abord

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega_i' = [\omega_k \omega_{ki}] + a[\omega_i \omega_n], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik} \omega_{kj}] - (C + a^2)[\omega_i \omega_j], \end{cases}$$

puis

$$(13) \qquad \begin{cases} \omega_\alpha' = [\omega_\beta \omega_{\beta\alpha}] + b[\omega_\alpha \omega_n], \\ \omega_{\alpha\beta}' = [\omega_{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta}] - (C + b^2)[\omega_\alpha \omega_\beta]. \end{cases}$$

Supposons d'abord la courbure de l'espace positive et égale à 1; on peut supposer, d'après (7),

$$a = \operatorname{tg} t, \quad b = -\cot t.$$

Posons

$$\omega_i = \cos t\, \tilde{\omega}_i, \quad \omega_\alpha = \sin t\, \tilde{\omega}_\alpha,$$

d'où

$$\omega_{in} = \sin t\, \tilde{\omega}_i, \quad \omega_{\alpha n} = -\cos t\, \tilde{\omega}_\alpha,$$

En remplaçant dans (12) et (13), on obtient

$$(12') \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_i' = [\tilde{\omega}_k \omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik} \omega_{kj}] - [\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j], \end{cases}$$

et

$$(13') \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_\alpha' = [\tilde{\omega}_\beta \omega_{\beta\alpha}] \\ \omega_{\alpha\beta}' = [\omega_{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta}] - [\tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}_\beta]. \end{cases}$$

Ces formules montrent que les deux formes différentielles $\Sigma \tilde{\omega}_i^2$ et $\Sigma \tilde{\omega}_\alpha^2$ sont de courbure constante égale à 1. Supposons la première forme à p variables et la seconde à q variables $(p + q = n - 1)$. On pourra réaliser la première au moyen de $p + 1$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{l+1}$ dont la somme des carrés est égale à 1, et la seconde au moyen de $q + 1$ nouvelles variables $u_{p+2}, u_{p+3}, \ldots, u_{n+1}$ dont la somme des carrés est aussi égale à 1. On aura alors

$$\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \ldots + \tilde{\omega}_p^2 = du_1^2 + du_2^2 + \ldots + du_{p+1}^2,$$
$$\tilde{\omega}_{p+1}^2 + \tilde{\omega}_{p+2}^2 + \ldots + \tilde{\omega}_{n-1}^2 = du_{p+2}^2 + du_{p+3}^2 + \ldots + du_{n+1}^2.$$

et par suite, pour le ds^2 de l'espace,

$$ds^2 = \cos^2 t\,(du_1^2 + \ldots + du_{p+1}^2) + \sin^2 t\,(du_{p+2}^2 + \ldots + du_{n+1}^2) + dt^2.$$

Posons enfin

$$x_i = \cos t\, u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p+1), \qquad x_\alpha = \sin t\, u_\alpha \quad (\alpha = p+2, \ldots, n+1):$$

on constate immédiatement que l'on a

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_{n+1}^2,$$

la somme des carrés des $n+1$ variables étant égale à 1. On retrouve le ds^2 de l'hypersphère de rayon 1 de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, c'est-à-dire le ds^2 de l'espace sphérique à n dimensions, et l'on voit que les hypersurfaces isoparamétriques sont données par l'équation

$$x_{p+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \operatorname{tg}^2 t(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2), \tag{14}$$

ou encore

$$\cos 2t = x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2 - (x_{p+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2). \tag{14'}$$

Parmi ces hypersurfaces deux sont singulières, c'est celles qui correspondent à $t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$; la première donne

$$x_{p+2} = \dots = x_{n+1} = 0;$$

la seconde donne

$$x_1 = \dots = x_{p+1} = 0:$$

ce sont deux variétés totalement géodésiques complèment orthogonales et complémentaires.

Supposons maintenant la courbure de l'espace négative et égale à -1. On peut poser

$$a = -\operatorname{th} t, \quad b = -\operatorname{cth} t,$$

de manière à respecter la relation (7). Nous poserons encore

$$\begin{aligned} \omega_i &= \operatorname{ch} t\, \tilde{\omega}_i, & \omega_\alpha &= \operatorname{sh} t\, \tilde{\omega}_\alpha, \\ \omega_{in} &= -\operatorname{sh} t\, \tilde{\omega}_i, & \omega_{\alpha n} &= -\operatorname{ch} t\, \tilde{\omega}_\gamma. \end{aligned}$$

Les formules (12) et (13) prennent maintenant la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_i' &= [\tilde{\omega}_k \omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' &= [\omega_{ik} \omega_{kj}] + [\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j]; \end{aligned} \right. \tag{12''}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_\alpha' &= [\tilde{\omega}_\beta \omega_{\beta\alpha}], \\ \omega_{\alpha\beta}' &= [\omega_{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta}] - [\tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}_\beta]. \end{aligned} \right. \tag{13''}$$

Les deux formes différentielles $\Sigma\, \tilde{\omega}_i^2$ et $\Sigma\, \tilde{\omega}_\alpha^2$ sont la première à courbure constante -1, et la seconde à courbure constante $+1$. On les réalisera en posant

$$\Sigma\, \tilde{\omega}_i^2 = du_1^2 + \dots + du_p^2 - du_{n+1}^2, \quad \Sigma\, \tilde{\omega}_\alpha^2 = du_{p+1}^2 + \dots + du_n^2,$$

avec $n+1$ variables liées par les relations

$$u_{n+1}^2 - u_1^2 - \dots - u_p^2 = 1, \quad u_{p+1}^2 + \dots + u_n^2 = 1.$$

On aura alors pour le ds^2 de l'espace

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2 t(du_1^2 + \dots + du_p^2 - du_{n+1}^2) + \mathrm{sh}^2 t(du_{p+1}^2 + \dots + du_n^2) + dt^2.$$

Il suffira de poser

$$x_i = \mathrm{ch}\, t\, u_i \quad (i = 1, \dots, p, n+1), \qquad x_\alpha = \mathrm{sh}\, t\, u_\alpha \quad (\alpha = p+1, \dots, n),$$

et l'on aura

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2,$$

avec

$$x_{n+1}^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = 1.$$

On a retrouvé la représentation de CAYLEY-KLEIN avec l'*absolu*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0.$$

Les hypersurfaces de niveau sont données par l'équation

$$(15) \qquad x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 = \mathrm{th}^2 t (x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_p^2),$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(15') \qquad \mathrm{ch}\, 2t = x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

le second membre étant une fonction f dont les deux premiers paramètres différentiels sont des fonctions de f.

Pour $t = 0$ on a une hypersurface singulière d'équations

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0;$$

c'est une variété linéaire totalement géodésique à p dimensions.

5. **Cas où les courbures principales sont toutes égales entre elles.** Si $C = 1$, on peut poser la courbure principale $a = \mathrm{tg}\, t$ et on retombe sur les formules (14) en supposant $p = n - 1$: on obtient les hypersphères de centre fixe

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \cot^2 t\, x_{n+1}^2;$$

pour $t = \frac{\pi}{2}$, on trouve le point $x_1 = \dots = x_n = 0$, centre commun des hypersphères.

Si $C = -1$, on trouve en posant soit $a = -\mathrm{th}\, t$, soit $a = \mathrm{cth}\, t$, les hypersurfaces obtenues en donnant dans (15) à p la valeur $n - 1$ et la valeur 0, à savoir

$$(16) \qquad x_n^2 = \mathrm{th}^2 t (x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2),$$

et

(17) $$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \mathrm{th}^2\, t\, x_{n+1}^2.$$

Les hypersurfaces (17) sont des hyperspères de centre $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; les hypersurfaces (16) sont les *équidistantes* de l'hyperplan $x_n = 0$.

Mais il y a encore une solution qui ne se déduit pas des résultats du n° 4, c'est celle qui correspond à $a = 1$ (le cas $a = -1$ n'en est pas distinct). En posant

$$\omega_i = e^{-t}\tilde{\omega}_i, \quad \omega_{in} = e^{-t}\tilde{\omega}_i,$$

les équations (1) deviennent

(18) $$\begin{cases} \tilde{\omega}_i' = [\omega_{ik}\tilde{\omega}_k], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik}\omega_{kj}]\,; \end{cases}$$

elles prouvent que la forme $\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \dots + \tilde{\omega}_{n-1}^2$ est de courbure nulle; on peut donc poser

$$ds^2 = e^{-2t}(du_1^2 + du_2^2 + \dots + du_{n-1}^2) + dt^2,$$

ou encore, en posant $e^t = u_n$,

$$ds^2 = \frac{du_1^2 + du_2^2 + \dots + du_n^2}{u_n^2}.$$

Les hypersurfaces $u_n = C^{te}$ sont des *horisphères.* Dans la représentation de CAYLEY-KLEIN, l'absolu étant la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0,$$

la famille d'hypersurfaces isoparamétriques correspondante peut s'écrire

(19) $$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 + e^{2t}(x_{n+1} - x_n)^2 = 0.$$

6. Généralités sur le cas où il existe plus de deux courbures principales distinctes. — Reprenons la formule fondamentale (11)

(11) $$C + a_i a_j = 2\sum_r \frac{\lambda_{ijr}^2}{(a_i - a_r)(a_j - a_r)}.$$

Nous allons en déduire que *le cas où les hypersurfaces admettent plus de deux courbures principales distinctes ne peut se présenter que dans un espace à courbure positive.*

Supposons qu'il y ait p courbures principales distinctes, par exemple $a_1, a_2, \dots, a_p$ et soient $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ leurs degrés de multiplicité respectifs

$(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p = n - 1)$. Posons

$$\rho_{ijk} = \frac{2 \Sigma \lambda^2_{\alpha\beta\gamma}}{(a_i - a_k)(a_j - a_k)(a_i - a_j)} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, p;\ i \neq j \neq k), \tag{20}$$

la somme étant étendue à tous les indices $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\alpha = a_i$, à tous les indices $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\beta = a_j$, à tous les indices $\gamma = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\gamma = a_k$. Les ρ_{ijk} sont évidemment antisymétriques par rapport à leurs trois indices. Nous poserons en outre

$$\rho_{ij} = -\rho_{ji} = \sum_k^{k \neq i, j} \rho_{ijk};$$

on a évidemment

$$\sum_j^{i \neq j} \rho_{ij} = 0. \tag{21}$$

Cela posé l'équation (11) peut s'écrire

$$\nu_i \nu_j (C + a_i a_j) = \rho_{ij}(a_i - a_j). \tag{22}$$

Si l'on y regarde ρ_{ij} comme donnée, on obtient une relation homographique entre a_i et a_j, et toutes ces relations homographiques ont les mêmes points unis $\pm \sqrt{-C}$. Il en résulte a priori l'existence d'une relation entre ρ_{ij}, ρ_{jk}, ρ_{ki}. En éliminant en effet a_k entre les équations (ik) et (jk) et comparant à l'équation (ij), on trouve

$$\nu_i^2 \nu_j^2 \nu_k^2 C = \nu_j \nu_k \rho_{ki} \rho_{ij} + \nu_k \nu_i \rho_{ij} \rho_{jk} + \nu_i \nu_j \rho_{jk} \rho_{ki}. \tag{23}$$

C'est cette relation qui va nous fournir le théorème annoncé.

Remarquons d'abord que les quantités ρ_{ij} ne peuvent être toutes nulles, sinon en effet on aurait $a_i a_j = -C$; il existe au moins une courbure a_i non nulle, et on aurait alors $a_i(a_j - a_k) = 0$, d'où $a_j = a_k$, cas exclu. Supposons donc $\rho_{12} > 0$. La relation (21) pour $i = 2$, combinée avec l'inégalité $\rho_{21} < 0$, montre que l'une des quantités $\rho_{23}, \ldots, \rho_{2p}$ est positive, soit $\rho_{23} > 0$. De même *si nous supposons* $\rho_{31} < 0$, on peut supposer $\rho_{34} > 0$ et ainsi de suite. Il arrivera nécessairement un moment où l'on aura la suite d'inégalités $\rho_{12} > 0$, $\rho_{23} > 0, \ldots, \rho_{q-1,q} > 0$, avec $\rho_{qi} > 0$ pour un indice $i < q - 1$, aucune des quantités $\rho_{q-1,k}$ n'étant positive pour $k < q - 1$. Mais alors la formule (23) pour les indices $i, q-1, q$ montre immédiatement que C est positif. C. Q. F. D.

Nous avons donc résolu complètement le problème pour C négatif et les solutions sont données par les formules (15) et (19). Mais il n'est pas résolu complètement pour C positif.

7. On peut cependant donner le moyen de trouver la loi qui fournit en fonction de t les courbures principales des hypersurfaces isoparamétriques, connaissant le nombre p des courbures distinctes et leurs degrés de multiplicité $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$. Supposons $C=1$; nous posons, d'après (7),

$$a_i = \operatorname{tg} t_i,$$

où t_i ne diffère de t que par une constante. L'équation (22) s'écrit alors

$$\rho_{ij} = \nu_i \nu_j \cot(t_i - t_j), \tag{22'}$$

et les relations (21) deviennent

$$\sum_j^{j \neq i} \nu_i \nu_j \cot(t_i - t_j) = 0. \tag{21'}$$

Le problème consiste à résoudre ces p équations, qui se réduisent du reste à $p-1$, aux $p-1$ inconnues $t_i - t_j$.

Figurons dans un plan les p droites Δ_i de coefficients angulaires a_i passant par un point fixe O, et donnons-nous l'ordre dans lequel elles se succèdent quand on tourne autour de O dans un sens déterminé. Supposons qu'on rencontre successivement les droites $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$: on aura les inégalités

$$0 < t_2 - t_1 < t_3 - t_1 < \dots < t_p - t_1 < \pi. \tag{24}$$

Considérons p variables réelles $u_1, u_2, \dots, u_p$ assujetties à satisfaire aux mêmes inégalités

$$0 < u_2 - u_1 < u_3 - u_1 < \dots < u_p - u_1 < \pi,$$

et formons la fonction essentiellement positive

$$F(u) = \prod_{i<j}^{1,2,\dots,p} [\sin(u_j - u_i)]^{\nu_i \nu_j};$$

les équations (21') expriment que toutes les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction s'annulent pour $u_i = t_i$. Il est facile de voir que la fonction F atteint son maximum absolu pour ces valeurs (supposées exister). En effet la formule de TAYLOR donne

$$F(u) - F(t) = \frac{1}{2}(u_i - t_i)(u_j - t_j)\frac{\partial^2 F(v)}{\partial v_i \partial v_j}, \quad \text{avec} \quad v_i = t_i + \theta(u_i - t_i) \quad (0 < \theta < 1).$$

Mais le calcul des dérivées partielles de F conduit pour le second membre à la valeur

$$-\frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\nu_i \nu_j [(u_i - t_i) - (u_j - t_j)]^2}{\sin^2(v_i - v_j)}.$$

On a donc $F(u) < F(t)$, sauf si $u_i - t_i = u_j - t_j$, c'est-à-dire sauf si on augmente les t_i d'une même constante arbitraire.

Il résulte de là que le système (18') ne peut admettre qu'une solution pour les différences $t_i - t_j$, si l'on suppose les t_i assujetties aux inégalités (21). Mais la fonction $F(u)$ admet évidemment un maximum absolu lorsqu'on assujettit les u_i à ces inégalités; *il y a donc une loi et une seule qui donne les courbures principales des hypersurfaces isoparamétriques lorsqu'on se donne l'ordre dans lequel se succèdent les droites* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$. Il est clair que si toutes les courbures principales sont simples, les angles t_i consécutifs diffèrent entre eux de $\frac{\pi}{n-1}$, et on peut supposer

$$a_i = \operatorname{tg}\left(t + \frac{i\pi}{n-1}\right) . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on se donne simplement les ν_i, il y aura autant de solutions qu'il existe d'ordres différents pour les droites Δ_i, deux ordres n'étant pas regardés comme différents si, en inscrivant à côté de chaque droite Δ_i l'entier ν_i correspondant, les deux figures considérées présentent la même suite d'entiers et dans le même ordre, soit qu'on suive les droites les deux fois dans le même sens de rotation, soit qu'on les suive la première fois dans un sens la seconde fois dans le sens contraire. Si tous les entiers ν_i sont égaux, il n'y a évidemment qu'une solution, celle qui a été indiquée plus haut; pour $p = 4$, il y a 3 solutions si les 4 indices de multiplicité ν_i sont distincts, deux solutions s'ils sont au nombre de 3 ou de 2 distincts, une solution s'ils sont égaux entre eux.

8. **Le cas de l'espace sphérique à quatre dimensions.** — Il n'est pas évident à priori qu'à une des lois qui viennent d'être indiquées il corresponde toujours une famille d'hypersurfaces isoparamétriques. On peut montrer facilement qu'il en est ainsi pour $n = 4$; cela résoudra en même temps complètement le problème des familles d'hypersurfaces isoparamétriques dans l'espace sphérique à 4 dimensions.

Nous avons ici $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ et on peut supposer

$$a_1 = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \quad a_2 = \operatorname{tg} t, \quad a_3 = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Les formules (22') donnent

$$\rho_{23} = \rho_{31} = \rho_{12} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \rho_{123},$$

d'où, d'après (20),

$$\lambda_{123}^2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sin(t_1 - t_2)\sin(t_2 - t_3)\sin(t_3 - t_1)}{\cos^2 t_1 \cos^2 t_2 \cos^2 t_3} = \frac{3}{16\cos^2 t_1 \cos^2 t_2 \cos^2 t_3}.$$

Nous pourrons prendre

$$\lambda_{123} \cos t_1 \cos t_2 \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

On a alors, d'après (2) et (10),

$$\omega_{23} = \frac{\lambda_{123}}{a_2 - a_3}\omega_1 = \frac{\lambda_{123}\cos t_2 \cos t_3}{\sin(t_2 - t_3)}\omega_1 = -\frac{1}{2}\frac{\omega_1}{\cos t_1},$$

$$\omega_{31} = \frac{\lambda_{123}}{a_3 - a_1}\omega_2 = \frac{\lambda_{123}\cos t_3 \cos t_1}{\sin(t_3 - t_1)}\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\cos t_2},$$

$$\omega_{12} = \frac{\lambda_{123}}{a_1 - a_2}\omega_3 = \frac{\lambda_{123}\cos t_1 \cos t_2}{\sin(t_1 - t_2)}\omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega_3}{\cos t_3}.$$

Il est donc naturel de poser

(25) $$\omega_1 = 2\tilde{\omega}_1 \cos t_1, \quad \omega_2 = 2\tilde{\omega}_2 \cos t_2, \quad \omega_3 = 2\tilde{\omega}_3 \cos t_3,$$

d'où

(26) $$\omega_{14} = 2\tilde{\omega}_1 \sin t_1, \quad \omega_{24} = 2\tilde{\omega}_2 \sin t_2, \quad \omega_{34} = 2\tilde{\omega}_3 \sin t_3,$$

avec

(27) $$\omega_{23} = -\tilde{\omega}_1, \quad \omega_{31} = \tilde{\omega}_2, \quad \omega_{12} = -\tilde{\omega}_3.$$

Les formules de structure (1) donnent, après simplifications,

(28) $$\tilde{\omega}_1' = [\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3], \quad \tilde{\omega}_2' = [\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_1], \quad \tilde{\omega}_3' = [\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2];$$

la forme différentielle quadratique $\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2$ est de courbure 1.

On peut arriver aux hypersurfaces cherchées en cherchant celle pour laquelle l'un des $\cos t_i$ est nul, par exemple $\cos t_3$, car alors le ds^2

$$ds^2 = 4\cos^2 t_1 \tilde{\omega}_1^2 + 4\cos^2 t_2 \tilde{\omega}_2^2 + 4\cos^2 t_3 \tilde{\omega}_3^2$$

se réduira à une somme de deux carrés, à savoir

$$ds^2 = 3(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2).$$

On aura du reste pour la surface ainsi considérée

(29) $$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1 = \sqrt{3}\,\tilde{\omega}_1, & \omega_2 = \sqrt{3}\,\tilde{\omega}_2, \\ \omega_3 = 0, & \omega_4 = 0, \\ \omega_{13} = -\tilde{\omega}_2, & \omega_{23} = -\tilde{\omega}_1, \\ \omega_{14} = \tilde{\omega}_1, & \omega_{24} = \tilde{\omega}_2. \end{array}\right.$$

Les deux formes asymptotiques de cette surface sont

$$\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = -2\sqrt{3}\,\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2,$$
$$\omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_{24} = \sqrt{3}\,(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2),$$

de sorte que la courbure normale d'une courbe quelconque tracée sur la surface est

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^2}}{3(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

elle est constante. Or M. BORŮVKA a demontré (¹) que toutes les surfaces de l'espace elliptique à 4 dimensions dont toutes les courbes ont la même courbure normale constante sont les surfaces représentatives des polynomes harmoniques du second degré à trois variables et sont applicables sur la sphère, ou plutôt sur le plan elliptique. Nous pourrons prendre dans l'espace sphérique à 4 dimensions rapporté aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dont la somme des carrés est égale à 1, pour représenter la surface considérée, les formules

$$x_1 = \sqrt{3}\,vw, \quad x_2 = \sqrt{3}\,wu, \quad x_3 = \sqrt{3}\,uv,$$
$$x_4 = \sqrt{3}\,\frac{u^2 - v^2}{2}, \quad x_5 = w^2 - \frac{u^2 + v^2}{2}. \tag{30}$$

où u, v, w sont trois paramètres liés par la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1. \tag{31}$$

Les hypersurfaces parallèles s'obtiendront en cherchant l'enveloppe, dans l'espace sphérique à 4 dimensions, des hypersphères de rayon t ayant leurs centres aux différents points de la surface. Ces hypersphères ont pour équation générale

$$\sqrt{3}\,vwx_1 + \sqrt{3}\,wux_2 + \sqrt{3}\,uvx_3 + \sqrt{3}\,\frac{u^2 - v^2}{2}\,x_4 + \left(w^2 - \frac{u^2 + v^2}{2}\right)x_5 = \cos t. \tag{32}$$

Leur enveloppe est fournie par les relations

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\,wx_2 + \sqrt{3}\,vx_3 + \sqrt{3}\,ux_4 - ux_5 &= \lambda u,\\
\sqrt{3}\,wx_1 + \sqrt{3}\,ux_3 - \sqrt{3}\,vx_4 - vx_5 &= \lambda v,\\
\sqrt{3}\,vx_1 + \sqrt{3}\,ux_2 + 2wx_5 \qquad &= \lambda w;
\end{aligned}$$

en tenant compte de (32), on trouve $\lambda = 2\cos t$. Par suite l'enveloppe a pour

(¹) « Comptes rendus », 187, pp. 334-336, 1928.

équation

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3}\,x_4 - x_5 - 2\cos t & \sqrt{3}\,x_3 & \sqrt{3}\,x_2 \\ \sqrt{3}\,x_3 & -\sqrt{3}\,x_4 - x_5 - 2\cos t & \sqrt{3}\,x_1 \\ \sqrt{3}\,x_2 & \sqrt{3}\,x_1 & 2x_5 - 2\cos t \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en développant,

$$(33) \qquad \cos 3t = x_5^3 + \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2)x_5 - 3(x_3^2 + x_4^2)x_5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1^2 - x_2^2)x_4 + 3\sqrt{3}\,x_1x_2x_3\,.$$

Telle est l'équation des hypersurfaces isoparamétriques cherchées. On voit que si l'on est dans l'espace *sphérique*, on retrouve la même hypersurface quand on augmente t de $\frac{2\pi}{3}$; si l'on est dans l'espace *elliptique*, il suffit d'augmenter t de $\frac{\pi}{3}$. Dans ce dernier cas il n'y a qu'une hypersurface singulière, c'est la surface (31). Dans le premier cas, il y en a deux, à savoir la surface (31) et son antipode. Les équations de ces surfaces peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} \mp 3x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

en désignant par P le polynome qui est au second membre de (33).

On peut vérifier à posteriori d'une manière simple l'isoparamétrisme des hypersurfaces (33). Pour que le polynome P jouisse, dans l'espace sphérique à quatre dimensions, de la propriété que $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$ sont des fonctions de P, il suffit que les deux paramètres différentiels $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$, *calculés dans l'espace euclidien à 5 dimensions*, deviennent, sur l'hypersphère de rayon 1, des fonctions de P. Or on trouve facilement

$$\sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = 9(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2)^2 = 9,$$

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = 0;$$

la vérification est ainsi faite. Cette remarque suggère le problème de trouver, dans l'espace euclidien à n dimensions, tous les polynomes homogènes P tels que $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$ soient, à des facteurs constants près, des puissances de $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$; si n est impair, cela exige du reste que $\Delta_2 P$ soit nul. Les polynomes qui se sont présentés au N° 4 (formule 14'), jouissent évidemment des deux propriétés en question.

J'ajouterai enfin que les hypersurfaces (33) admettent un groupe de déplacements transitif à trois paramètres de l'espace ambiant. Il serait intéressant de savoir si toute hypersurface à courbures principales constantes d'un espace à courbure constante positive admet un groupe de déplacements rigides transitif; il en est ainsi si les courbures principales sont au nombre de deux au plus distinctes, mais cela n'est pas évident dans le cas contraire [1].

[1] Pendant l'impression, j'ai pu déterminer toutes les familles isoparamétriques à trois courbures principales distinctes; elles n'existent que dans les espaces à 4, 7, 13 et 25 dimensions. Elles feront l'objet d'un prochain article.

Risoluzione di due problemi classici per mezzo di una equazione di Volterra.

Memoria di Pia Nalli (a Catania).

Sunto. - I due problemi dei quali intendiamo occuparci sono i seguenti: *integrazione delle equazioni differenziali di un moto rigido; costruzione di una curva, della quale siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco.*

1. Cominciamo col ricordare le formule di Frenet e la dimostrazione che di esse viene data col metodo vettoriale.

Se C è una curva nello spazio, s l'arco su di essa, u il vettore unitario, funzione di s, tangente alla curva e diretto nel verso degli archi crescenti, $\dot{u}$ il suo derivato rispetto ad s, questo risulta ortogonale ad u.

Infatti, essendo $u \times u = 1$, si ottiene, derivando, $u \times \dot{u} = 0$.

Se C non si riduce ad una retta, $\dot{u}$ non sarà nullo identicamente, e denotando con $\frac{1}{\rho}$ $(\rho > 0)$ il suo modulo, con v il suo versore, avremo

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} v, \tag{1}$$

ed è noto che $\frac{1}{\rho}$ è la curvatura di C e che v è diretto come il raggio della normale principale situato dalla stessa parte della curva rispetto al piano rettificante.

Il derivato di v, $\dot{v}$, risulta ortogonale a v, perchè $v \times v = 1$, e quindi si potrà scrivere

$$\dot{v} = \alpha u + \beta w, \tag{2}$$

dove

$$w = u \wedge v. \tag{3}$$

Dalla (2) si trae

$$\alpha = \dot{v} \times u,$$

ma essendo $v \times u = 0$ e quindi, per derivazione,

$$\dot{v} \times u + v \times \dot{u} = 0$$

e, per la (1), $\dot{u} \times v = \frac{1}{\rho}$, risulta $\alpha = -\frac{1}{\rho}$ e, posto $\beta = -\frac{1}{\tau}$, sarà

$$\dot{v} = -\frac{1}{\rho} u - \frac{1}{\tau} w.$$

Di qui risulta

$$\dot{v} \times w = -\frac{1}{\tau},$$

ed essendo $\dot{v} \times w = -v \times \dot{w}$ (perchè $v \times w = 0$), $\dot{w}$ ortogonale a w (perchè $w \times w = 1$), risulterà

$$\dot{w} = \gamma u + \frac{1}{\tau} v.$$

Ma è $\gamma = 0$, perchè $w \times u = 0$, quindi

$$\gamma = \dot{w} \times u = -w \times \dot{u} = 0$$

per la (1),

Si arriva così alle formule di FRENET:

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\rho} v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\rho} u - \frac{1}{\tau} w \\ \dot{w} &= \frac{1}{\tau} v \end{aligned} \right.$$

dove $\frac{1}{\rho}$ ed $\frac{1}{\tau}$ sono rispettivamente la curvatura e la torsione della linea.

Ma osserviamo che il modo come le (4) sono state ottenute è essenzialmente legato non alla curva, ma al vettore unimodulare u, funzione di un parametro s.

Possiamo quindi asserire che se u è un vettore unimodulare funzione di un parametro, purchè non costante, esiste un vettore v unimodulare, definito per mezzo della prima delle (4), con la condizione $\rho > 0$, e, posto $w = u \wedge v$, sussistono le (4), per mezzo delle quali viene definita anche la funzione τ. Continueremo a chiamare le (4): *formule di* FRENET.

Del resto, assegnato u funzione di una variabile s, esistono infinite curve, che si ottengono da una di esse per traslazione, per le quali s è l'arco ed u il versore tangenziale, quindi le (4) sono in ogni caso le formule di FRENET relative ad una curva. Ma a noi interessa di far notare che ce ne possiamo servire per un vettore unimodulare u qualunque.

2. Si presenta immediatamente il problema: *assegnate le due funzioni di s,* $\frac{1}{\rho}$ *ed* $\frac{1}{\tau}$, *trovare* u. A meno di tre integrazioni si tratta del problema classico, di geometria intrinseca, di trovare la curva della quale siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco. Perchè le tre componenti di u, rispetto a tre assi cartesiani ortogonali, sono le derivate delle coordinate di un punto della curva rispetto all'arco.

È noto che tale problema si riduce alla integrazione delle equazioni differenziali di un particolare tipo di moto rigido ([1]). Ma ciò che a me non risulta sia stato osservato è che, inversamente, le equazioni differenziali di un moto rigido qualunque si possono ridurre alle (4), cioè alla ricerca di u, note che siano $\frac{1}{\rho}$ ed $\frac{1}{\tau}$.

Ciò mostrerò nel presente lavoro, riducendo il problema ad una equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie.

Ora è noto che il problema della integrazione delle equazioni differenziali di un moto rigido si riduce alla integrazione di una equazione di RICCATI ([2]). Ma in essa figurano delle quantità complesse. Per la forma particolare di essa accade che la conoscenza di un integrale porta alla conoscenza di un altro integrale (e cioè l'opposto dell'inverso del complesso coniugato del primo). Cosichè, per una nota proprietà dell'equazione di RICCATI, la conoscenza di un integrale porta alla conoscenza dell'integrale generale per mezzo di una quadratura. Ma in fondo, per arrivare a ciò, bisogna conoscere due funzioni reali.

Invece, nella equazione di VOLTERRA alla quale perverremo, figurano solo quantità reali ed essa si presta per la risoluzione approssimata dei problemi che ad essa vengono ricondotti (osculazione di una curva, di un moto rigido....).

Volendo operare solo su quantità reali, servendosi di equazioni differenziali, ritengo che non dovrebbe essere difficile ridurre il problema non ad una equazione del prim'ordine, come quella di RICCATI, ma ad una del second'ordine che avesse qualche analogia con quella di RICCATI, e cioè tale che la conoscenza di un integrale particolare portasse alla conoscenza dell'integrale generale per mezzo di una quadratura. Ignoro se ciò sia stato già ottenuto.

([1]) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 2ème édition. [Paris, Gauthier-Villars, 1914], (pp. 13-14).

([2]) l. c. (1), (pp. 27-41). Cfr. anche: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale,* vol. I, 2ª edizione [Bologna, Zanichelli, 1929], (pp. 223-229).

3. Passiamo alla trattazione del problema.

È noto che le equazioni differenziali di un moto rigido si compendiano nell'unica equazione vettoriale

$$\dot{P} - \dot{O} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O), \tag{5}$$

O e P essendo due punti del sistema ed $\boldsymbol{\omega}$ il vettore che rappresenta la rotazione istantanea. Le derivazioni, indicate con un punto, sono fatte rispetto al tempo.

I due vettori caratteristici del moto: $\dot{O}$ ed $\boldsymbol{\omega}$, possono essere assegnati, in funzione del tempo t, sia rispetto al sistema mobile, sia rispetto al sistema fisso.

Occupiamoci dapprima del vettore $\boldsymbol{\omega}$ e denotiamo con l il suo modulo e con $\boldsymbol{u}$ il suo versore. l ed $\boldsymbol{u}$ sono funzioni di t; $\dot{l}$ è una quantità scalare e quindi ammette la stessa derivata rispetto a t, sia che ci riferiamo al sistema fisso, sia che ci riferiamo al sistema mobile. In quanto ad $\boldsymbol{u}$, se denotiamo con $\dot{\boldsymbol{u}}$ il suo derivato rispetto a t con referenza al sistema fisso, e con $\boldsymbol{u}'$ il derivato con referenza al sistema mobile, è noto che

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u},$$

ed essendo $\boldsymbol{\omega} = l\boldsymbol{u}$ sarà $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}'$, cioè varranno le due uguaglianze

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{v};$$

in altri termini: lo scalare $\frac{1}{\rho}$ ed il vettore $\boldsymbol{v}$ sono identici per i due sistemi, il mobile ed il fisso. Avremo perciò

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{\tau}\,\boldsymbol{w} - \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{v}' = -\frac{1}{T}\,\boldsymbol{W} - \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{u}.$$

Ma

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

ed essendo $\boldsymbol{\omega} = l\boldsymbol{u}$ ed $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, risulterà

$$-\frac{1}{\tau}\,\boldsymbol{w} = -\frac{1}{T}\,\boldsymbol{W} + l\boldsymbol{w}$$

e quindi $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}$ (il che è evidente, perchè anche $\boldsymbol{W}$ coincide con $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$) ed $\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} + l.$

Da ciò concludiamo che quando sia assegnato ω rispetto ad uno dei due sistemi (il mobile o il fisso) per avere ω rispetto all'altro siamo condotti al problema di trovare il vettore u soddisfacente alle (4) dove al posto di $\frac{1}{\tau}$ bisogna mettere $\frac{1}{\tau}+l$, se ω è assegnato rispetto al sistema fisso, ed $\frac{1}{T}-l$ se ω è assegnato rispetto al sistema mobile.

Quando poi ω sia noto rispetto ai due sistemi, sarà noto $\dot{O}$ rispetto ad entrambi i sistemi, perchè allora sarà noto $\dot{O}$ rispetto alla terna u, v, w.

Resta così dimostrato che i due problemi: *costruire una curva, assegnata la curvatura e la torsione in funzione dell'arco: integrare le equazioni differenziali del moto rigido* sono equivalenti, a meno di quadrature.

Entrambi si riducono a risolvere un sistema del tipo (4) e ad eseguire quadrature,

L'equivalenza dei due problemi risulterà immediatamente dalla riduzione di entrambi ed una medesima equazione di VOLTERRA (da sostituire al sistema (4)). Abbiamo voluto mostrarlo, indipendentemente da tale riduzione, per notare che l'equazione di RICCATI [1]

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{q-ip}{2}-ir\lambda+\frac{q+ip}{2}\lambda^2$$

alla quale si riduce il sistema di equazioni differenziali di un moto rigido (dove p, q, r sono le componenti di ω secondo tre assi ortogonali legati al sistema mobile, e che, secondo quanto abbiamo esposto, può essere sostituita dalle (4) e, secondo quanto esporremo, da una equazione di VOLTERRA) si può pensare sempre ridotta alla forma più semplice in cui $q=0$, come nella equazione

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{i}{2\tau}-\frac{i}{\rho}\lambda+\frac{i}{2\tau}\lambda^2$$

che si ha per il particolare moto rigido che porta su se stesso il triedro fondamentale legato ad una curva.

4. Ora mostreremo come la (5) si riduce ad una equazione di VOLTERRA di seconda specie.

Supporremo che i vettori caratteristici, $\dot{O}$ e ω, siano assegnati rispetto al sistema fisso. (Quando siano assegnati rispetto al sistema mobile, trovarli

[1] l. c. (1), (p. 31).

rispetto al sistema fisso riconduce allo stesso problema, e quindi allo stesso tipo di equazione integrale. A ciò abbiamo già accennato e risulterà anche da quanto esporremo).

Posto

$$P - O = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} + \gamma \boldsymbol{w}, \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il versore di $\boldsymbol{\omega}$, e $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono definiti per mezzo delle (4) (dove le derivazioni si intendano riferite al sistema fisso) siamo ridotti a ricercare le tre funzioni α, β, γ in modo che $P - O$, dato dalla (6), soddisfi alla (5). Trovate α, β e γ, occorrono ancora tre quadrature per fissare il moto di O, e quindi quello di P.

Derivando la (6) e tenendo conto delle (4) (cioè delle formule di FRENET), troviamo

$$\dot{P} - \dot{O} = \left(\alpha' - \frac{\beta}{\rho}\right)\boldsymbol{u} + \left(\beta' + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{\tau}\right)\boldsymbol{v} + \left(\gamma' - \frac{\beta}{\tau}\right)\boldsymbol{w}.$$

Si ha poi. per la (3) e le analoghe: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) = l\boldsymbol{u} \wedge (P - O) = - l\gamma \boldsymbol{v} + l\beta \boldsymbol{w}.$$

L'equazione vettoriale (5) si riduce perciò alle tre seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' - \frac{\beta}{\rho} = 0 \\ &\beta' + \frac{\alpha}{\rho} + \left(\frac{1}{\tau} + l\right)\gamma = 0 \\ &\gamma' - \left(\frac{1}{\tau} + l\right)\beta = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Moltiplicando queste rispettivamente per α, β, γ e sommando, si ottiene

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \tag{8}$$

cioè

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{cost.} \tag{9}$$

che esprime l'invariabilità della distanza fra P ed O. Al sistema (7) sostituiremo perciò quello formato dalla (9) e dalle due equazioni

$$\alpha' = \frac{\beta}{\rho}, \quad \gamma' = \left(\frac{1}{\tau} + l\right)\beta. \tag{10}$$

Sarà dunque

$$\alpha = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{\rho}\, dt \quad \gamma = \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\tau} + l\right)\beta dt. \tag{11}$$

Di qui ricaviamo

$$\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = \alpha'\left[\alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{\rho}\, dt\right] + \gamma'\left[\gamma_0 + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\tau} + l\right)\beta dt,\right.$$

e, per la (8) e le (10),

$$-\beta\beta' = \frac{\beta}{\rho}\left[\alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{\rho}\, dt\right] + \beta\left(\frac{1}{\tau} + l\right)\left[\gamma_0 + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\tau} + l\right)\beta dt.\right.$$

Dividendo per β ed integrando:

$$-\beta(t) + \beta_0 = \alpha_0\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho(s)} + \gamma_0\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\tau(s)} + l(s)\right]ds + \int_{t_0}^{t}dx\int_{t_0}^{x}\left[\frac{1}{\rho(s)\rho(x)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\tau(s)} + l(s)\right)\left(\frac{1}{\tau(x)} + l(x)\right)\right]\beta(s)ds.$$

Applicando all' ultimo integrale la formula di inversione di DIRICHLET, troviamo:

$$\beta(t) = k(t) - \int_{t_0}^{t} N(t, s)\beta(s)ds, \tag{12}$$

dove si è posto

$$N(t, s) = \frac{1}{\rho(s)}\int_{s}^{t}\frac{1}{\rho(x)}dx + \left(\frac{1}{\tau(s)} + l(s)\right)\int_{s}^{t}\left[\frac{1}{\tau(x)} + l(x)\right]dx$$

e

$$k(t) = \beta_0 - \alpha_0\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho(s)} - \gamma_0\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\tau(s)} + l(s)\right]ds.$$

Concludiamo così che $\beta(t)$ è la soluzione della (12), equazione di VOLTERRA di seconda specie, caratteristica per il problema.

Trovata β, occorre ancora una quadratura e tenere conto della (9) per avere α e γ.

L' equazione (12) ha il nucleo $N(t, s)$ di una forma particolare

$$N(t, s) = g'(s)[g(t) - g(s)] + f'(s)[f(t) - f(s)], \tag{13}$$

dove si è posto

$$g'(s) = \frac{1}{\rho(s)}, \quad f'(s) = \frac{1}{\tau(s)} + l(s),$$

ed anche la funzione nota $k(t)$ è formata per mezzo delle funzioni $g(t)$ ed $f(t)$:

$$k(t) = \beta_0 - \alpha_0[g(t) - g(t_0)] - \gamma_0[f(t) - f(t_0)]. \tag{14}$$

Le due funzioni $g(s)$ ed $f(s)$ possono essere del tutto arbitrarie.

Risolvendo la (12), si ha

$$\beta(t) = k(t) + \int_{t_0}^{t} Q(t, s)k(s)ds, \tag{15}$$

dove, come è noto, $Q(t, s)$ è il nucleo risolvente della (12), e precisamente

$$Q(t, s) = \sum_{1}^{\infty}{}_r N_r(t, s). \tag{16}$$

con $N_1(t, s) = - N(t, s)$ ed

$$N_r(t, s) = \int_{s}^{t} N_p(t, x) N_{r-p}(x, s)dx,$$

p essendo un numero naturale qualunque minore di r.

Diamo anche le espressioni di $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$. Si trova facilmente, tenendo conto delle (11)

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \left[g'(s) + \int_{s}^{t} Q(x, s)\, g'(x)dx\right] k(s)ds, \tag{15'}$$

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f'(s) + \int_{s}^{t} Q(x, s) f'(x)dx\right] k(s)ds. \tag{15''}$$

5. Possiamo quindi asserire che il sistema (7) o l'equazione (12) [1] sono caratteristici per i moti rigidi in uno spazio a tre dimensioni [2]. Ma ciò accade perchè tale sistema o tale equazione sono caratteristici per l'altro problema: trovare una curva della quale siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco.

E qui dobbiamo notare che se si pone lo stesso problema per una curva

---

(1) L'equazione (12) mantiene la sua forma quando si fa un cambiamento di variabile. Di ciò si può approfittare perchè $g(s)$ si riduca ad una funzione assegnata. Ciò porta ad una quadratura. Così, per lo studio dell'equazione integrale, si potrebbe supporre $g(s) = s$, o altra funzione semplice.

(2) Più in generale: per il trasporto rigido della stella di vettori lungo una linea, in una varietà metrica a tre dimensioni.

in uno spazio ad n dimensioni, nel qual caso si hanno $n-1$ curvature, si arriva ad una equazione di VOLTERRA, ovvia generalizzazione della (12), con

$$N(t, s) = \sum_{1}^{n-1}{}_i\, g_i'(s)[g_i(t) - g_i(s)],$$

e

$$k(t) = \beta_0 - \sum_{1}^{n\ 1}{}_i\, \alpha_{i0}[g_i(t) - g_i(t_0)].$$

Ma relativamente ai trasporti rigidi non si ha l'estensione agli spazî che non abbiano tre dimensioni. Ciò dipende dal fatto che in uno spazio a tre dimensioni un trasporto rigido è caratterizzato da due vettori, $\dot{O}$ ed $\boldsymbol{\omega}$, mentre in generale la caratterizzazione si ha per mezzo di un vettore, $\dot{O}$, e di un tensore doppio emisimmetrico.

Siano dunque $\dfrac{1}{\rho(t)}$ ed $\dfrac{1}{\tau(t)}$ la curvatnra e la torsione di una curva in funzione dell'arco t. Varranno allora le (4), u essendo il vettore unimodulare tangente alla curva.

Se $\boldsymbol{J}$ è un vettore unimodulare costante, posto

$$\boldsymbol{J} = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

sarà $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ e, derivando rispetto a t, poichè $\dot{J} = 0$, sarà

$$\left(\alpha' - \frac{\beta}{\rho}\right) u + \left(\beta' + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{\tau}\right) v + \left(\gamma' - \frac{\beta}{\tau}\right) w = 0$$

e quindi

$$\alpha' - \frac{\beta}{\rho} = 0, \quad \beta' + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{\tau} = 0, \quad \gamma' - \frac{\beta}{\tau} = 0$$

e si ritrova così il sistema (7), dove $\dfrac{1}{\tau} + l$ viene sostituito da $\dfrac{1}{\tau}$.

Per conseguenza, definito $N(t, s)$ per mezzo della (13), dove

$$g'(s) = \frac{1}{\rho(s)}, \quad f'(s) = \frac{1}{\tau(s)}$$

si ha la corrispondente funzione $Q(t, s)$, per mezzo della (16). Ed allora, la curva che soddisfa al problema e che in un punto iniziale ammette come triedro fondamentale quello degli assi $0x$, $0y$, $0z$, è rappresentata dalle equazioni

$$x = \int_{t_0}^{t} \alpha^{(1)}(s)ds, \quad y = \int_{t_0}^{t} \alpha^{(2)}(s)ds, \quad z = \int_{t_0}^{t} \alpha^{(3)}(s)ds,$$

$\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ essendo le α che figurano nel vettore $\boldsymbol{J}$, quando questo si trova rispettivamente su Ox, Oy, Oz. Esse si hanno dalla (15') facendo coincidere la terna α_0, β_0, γ_0 successivamente con le terne 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Si trova così:

$$\alpha^{(1)}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} [g'(s) + \int_{s}^{t} Q(x, s) g'(x) dx]\,[g(s) \quad g(t_0)] ds$$

$$\alpha^{(2)}(t) = \int_{t_0}^{t} [g'(s) + \int_{s}^{t} Q(x, s) g'(x) dx] ds$$

$$\alpha^{(3)}(t) = - \int_{t_0}^{t} [g'(s) + \int_{s}^{t} Q(x, s) g'(x) dx]\,[f(s) - f(t_0)] ds.$$

5. Queste, come le (15), (15'), (15''), si prestano ai calcoli approssimati.

Per esempio, volendo calcolare con approssimazione $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, si possono anzitutto approssimare $g(s)$ ed $f(s)$ con funzioni di forma semplice, $g(s)$, $\bar{f}(s)$ (polinomi, somme trigonometriche, ecc.).

In questo modo, ad $N(t, s)$ si viene a sostituire una funzione approssimota $\bar{N}(t, s)$. Per questa avremo una funzione $\bar{Q}(t, s)$, ma ad essa sostituiremo una approssimata $\bar{Q}^*$, come suggerisce la (16), ponendo

$$\bar{Q}^*(t, s) = \sum_{1}^{m}{}_{r} \bar{N}_r(t, s).$$

Così formeremo le funzioni $\bar{\beta}^{(1)}(t)$, $\beta^{(2)}(t)$, $\bar{\beta}^{(3)}(t)$, mettendo nei secondi membri delle espressioni delle $\alpha^{(i)}(t)$ (date alla fine del n.º precedènte) al posto di $g(s)$ ed $f(s)$, $\bar{g}(s)$ ed $\bar{f}(s)$, ed al posto di $Q(t, s)$, $\bar{Q}^*(t, s)$. Finalmente porremo

$$\bar{\alpha}^{(i)}(t) = \frac{\bar{\beta}^{(i)}}{\sqrt{(\bar{\beta}^{(1)})^2 + (\bar{\beta}^{(2)})^2 + (\bar{\beta}^{(3)})^2}}$$

ed assumeremo le $\bar{\alpha}^{(i)}(t)$ come coseni direttori della tangente ad una linea di arco t. Avremo così una linea approssimata a quella di curvatura $g'(s)$ e torsione $f'(s)$. E sia che le approssimazioni di partenza si facciano nell'infinitesimo o nel finito, avremo un'approssimazione finale nell'infinitesimo o nel finito [1].

[1] Per ricerche su approssimazione di curve, cfr. T. LEVI-CIVITA e G. FUBINI, *Sulle curve analoghe al cerchio osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini*, « Annali di matematica pura ed applicata », Bologna, Serie IV, T. VII, 1929-1930, pp. 193-211.

Ueber die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null.

Von P. J. Myrberg (Helsinki, Suomi - Finnland).

Einleitung.

Poincaré hat seine Theorie der automorphen Funktionen auf die Anwendung unendlicher Reihen begründet, mit deren Hilfe es möglich ist, die Existenz der automorphen Funktionen bei diskontinuierlichen Gruppen sehr allgemeiner Art nachzuweisen. Die betreffenden, später mit dem Namen Poincarés benannten Reihen haben die Form

$$\theta(z) = \sum H(S)\left(\frac{dS}{dz}\right)^m, \tag{1}$$

wo S die Substitutionen

$$S = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

der zugehörigen Gruppe Γ durchläuft und H eine rationale Funktion und schliesslich m eine ganze Zahl $\geqq 2$ bezeichnet [2]. Bei Ausführung einer beliebigen, zur Gruppe Γ gehörigen Substitution transformiert sich die durch (1) definierte Funktion $\theta(z)$ multiplikativ gemäss der Gleichung

$$\theta(S) = \theta(z)\left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m},$$

woraus folgt, dass der Quotient zweier, zu einem und demselben Wert des Exponenten m gehörigen θ-Funktionen in bezug auf Γ invariant, d. h. eine automorphe Funktion von Γ ist.

Leider sind die Poincaréschen Reihen zur expliziten Darstellung einer bestimmten automorphen Funktion weniger geeignet, nämlich wegen der komplizierten Relationen. welche zwischen den Bestandteilen der zu bestimmenden Funktion und der zugehörigen Poincaréschen Reihe herrscht. Man hat sich somit die Frage aufgestellt, ob es nicht wie bei den elliptischen Funktionen möglich sei, für die automorphen Funktionen analytische Ausdrücke zu finden, welche die wichtigsten Eigenschaften der Funktion, z. B. ihre Nullstellen und Pole oder die Pole mit den zugehörigen Residuen sowie die formale Invarianz den Substitutionen der zugehörigen Gruppe gegenüber unmittelbar zeigen könnten. Dass dies wenigstens bei gewissen fuchsschen Gruppen allgemeiner Art mit Grenzkreis möglich ist, haben wir in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, wo wir u. A. analytische Ausdrücke aufgestellt haben, welche automorphe Funktionen direkt darstellen. Auch sind wir dabei zu einer neuen Darstellung der automorphen Funktionen als Quotient ganzer Funktionen gelangt, welche ihr Analogon in den elliptischen Thetafunktionen besitzen [5], [6].

Zweck der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, dass unsere Methode bei allen fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null anwendbar ist.

Sie führt zur expliziten Darstellung der Uniformisierung einer ausgedehnten Klasse algebraischer Riemannscher Flächen, u. A. sämtlicher Flächen, welche durch eine binomische Gleichung

$$y^n = R(x), \qquad R \text{ rational}$$

gegeben sind.

Wir wollen im Folgenden unsere Methode in ihren Hauptzügen darstellen.

Es sei Γ_0 eine fuchssche Gruppe mit dem Hauptkreis

$$\text{H:} \qquad |z| = 1,$$

welcher zugleich Grenzkreis ist und es sei B_0 ein Fundamentalbereich von Γ_0, für welchen wir in bekannter Weise ein innerhalb H liegendes Kreisbogenpolygon wählen, dessen Seiten zu H orthogonal sind. Ist das Geschlecht von Γ_0, wie wir annehmen, gleich Null, so gibt es nach der allgemeinen Theorie eine bis auf eine lineare Transformation bestimmte *Hauptfunktion*

$$x = f(z), \tag{2}$$

d. h. eine automorphe Funktion, welche in B_0 jeden komplexen Wert genau einmal annimmt. Durch $f(z)$ wird B_0 auf die schlichte x-Ebene konform abgebildet, wobei den Eckpunkten von B_0 gewisse Punkte

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \tag{3}$$

entsprechen, die Windungspunkte der zu (2) inversen, polymorphen Funktion

$$z = z(x)$$

sind. Es seien

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m \tag{3'}$$

die Ordnungszahlen der genannten Windungspunkte. Sie sind alle endlich, wenn wir annehmen, dass Γ_0 keine parabolischen Substitutionen besitzt, in welchem Fall sämtliche Eckpunkte von B_0 innerhalb H liegen ([1]).

Es sei nun

$$u = \bar{u}(x) \tag{4}$$

eine beliebige Funktion, welche Windungspunkte nur über den Punkten (3) besitzt und zwar derart, dass allgemein die Ordnung jedes über ρ_i liegenden Windungspunktes ein Teiler der zugeordneten Zahl ν_i ist. Ist (4) ausserhalb der Punkte (3) meromorph, so ist sie als Funktion von z betrachtet

$$u = u(z)$$

eine innerhalb H meromorphe Funktion. Eine für das Folgende fundamentale Funktion dieser Art wird erhalten, wenn wir über die x–Ebene eine algebraische Riemannsche Fläche W vom Geschlecht 1

$$P(x, y) = 0 \tag{5}$$

konstruieren, deren Windungspunkte der obigen Bedingung genügen. Dann sind nicht nur

$$x(z) \quad \text{und} \quad y(z) \tag{6}$$

meromorphe Funktionen von z, sondern dies gilt auch für das zu (5) gehörige, bis auf eine ganze lineare Transformation bestimmte elliptische Integral erster Gattung, das wir als Funktion von z mit

$$u = u(z) \tag{7}$$

bezeichnen. Es lässt sich leicht zeigen, dass $u(z)$ automorph in bezug auf eine Untergruppe Γ_u von Γ_0 vom Index ∞ ist. Die Gruppe Γ_u ist eine *fuchsoide Gruppe,* d. h. eine Gruppe, die ein unendliches System von Erzeugenden besitzt und deren Fundamentalbereich ein unendlich vielseitiges Kreisbogenpolygon B_u ist, welches aus unendlich vielen Bildpolygonen von B_0 zusammengesetzt ist. Die Gruppe Γ_u hat das Geschlecht Null und sie besitzt in $u(z)$ eine Hauptfunktion, welche jeden endlichen komplexen Wert in B_u genau einmal annimmt.

Man kann nun für die Gruppe Γ_u eine unendliche Folge von einander umschliessenden und gegen H konvergierenden geschlossenen Linien

$$L_1,\ L_2,\ L_3, \ldots \tag{8}$$

konstruieren, welche im hyperbolischen Sinne konvexe, gebrochene Linien sind, mit der fundamentalen Eigenschaft, dass für sie die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{L_n} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta) - u(z)|} = 0 \tag{9}$$

---

(1) Den einfachsten hier ausgeschlossenen Fall haben wir in unserer Arbeit [5] behandelt.

gleichmässig in jedem innerhalb H gelegenen Bereich gilt. Durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel bekommt man hieraus Reihen und Produktausdrücke einfachster kanonischer Form für die automorphen Funktionen der fuchsoiden Gruppe Γ_u.

Nun gelangt man aber durch Inversion des elliptischen Integrals (4) zu einer elliptischen Funktion

$$x = \varphi(u),$$

für welche wir bekannte Ausdrücke aus der Theorie der elliptischen Funktionen einführen. Durch Zusammensetzung der Funktionen

$$x = \varphi(u), \quad u = u(z)$$

gewinnt man schliesslich analytische Ausdrücke verschiedener Art für die automorphen Funktionen der gegebenen Gruppe Γ_0. Unsere Arbeit zerfällt in drei Teile.

Im ersten Kapitel, welches für das Verständnis des übrigen Teiles der Arbeit nicht nötig ist, handelt es sich um die Konstruktion der zu den elliptischen Integralen führenden Riemannschen Flächen W bei beliebig gegebenen Punkten (3) und beliebigen Verzeigungszahlen ν, — ein Problem, dessen vollständige Lösung wegen gewisser Spezialfalle ziemlich umständlich ist. Im zweiten Kapitel werden die geometrisch-gruppentheoretischen Grundlagen für unsere Arbeit entwickelt. Das Hauptziel der betreffenden Untersuchungen ist, die oben erwähnten Linien (8) zu konstruieren, wodurch wir zu einer Darstellung der Substitutionen von Γ_u und Γ_0 gelangen, die bei unseren funktionentheoretischen Betrachtungen eine fundamentale Rolle spielt.

Das dritte Kapitel ist der Aufstellung verschiedener analytischer Darstellungen von automorphen Funktionen gewidmet. Eine zentrale Stellung nehmen hier die von uns eingeführten h-Funktionen

$$h(z;\, z_0,\, a) = h(z), \tag{10}$$

welche ganze, d. h. für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktionen sind, die durch Zusammensetzung gewisser Sigmaprodukte und der fuchsoiden Funktion $u(z)$ entstehen. Unsere Funktion ist eine Primfunktion der Gruppe Γ_0, indem sie nur in einem System bezüglich Γ_0 äquivalenter Punkte einfach verschwindet. Mit Hilfe derselben kann eine willkürlich gewählte automorphe Funktion $f(z)$ von Γ_0, deren Null-, Eins- und ∞ Stellen bzw. mit a_i, z_0, b_i äquivalent sind, in der Form

$$f(z) = \frac{\Pi h(z;\, z_0,\, a_i)}{\Pi h(z;\, z_0,\, b_i)}$$

als Quotient der Produkte von h–Funktionen dargestellt werden. Unsere Funktionen (10) verhalten sich den Substitutionen von Γ_0 gegenüber multiplikativ gemäss der Gleichung

$$h(S) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{N} a_S^{(\nu)} u_\nu(z) + bs} h(z),$$

wo die Funktionen $u_\nu(z)$ ganze Funktionen sind, welche aus $u(z)$ durch lineare Transformation von z entstehen. Für die h–Funktionen gelten gewisse Produktausdrücke einfacher Struktur, welche aus bekannten Sigmaprodukten und den Ausdrücken von $u(z)$ durch Zusammensetzung entstehen.

Durch Division solcher Ausdrücke bekommt man bezüglich Γ_0 formal invariante, bedingt konvergente Produktausdrücke der einfachsten kanonischen Form

$$f(z) = \prod_{\Gamma_0} \left[\frac{z - S(a)}{z - S(b)} : \frac{z_0 - S(a)}{z_0 - S(b)}\right],$$

welche die automorphen Funktionen von Γ_0 direkt darstellen. Durch Aufstellung dieser Ausdrücke, welche den von SCHOTTKY bei gewissen Gruppen ohne Grenzkreis eingeführten Produkten analog sind, ist ein von F. KLEIN aufgestelltes Problem für die fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null vollständig gelöst [1], [3].

Zum Abschluss werden die h–Funktionen von ihrer Funktionalgleichung ausgehend untersucht und schliesslich unsere Methode zur analytischen Ausführung der Uniformisierung der binomischen Riemannschen Flächen angewandt.

KAPITEL I. Konstruktion der Riemannschen Flächen W.

§ 1. Flächen mit drei ρ–Punkten.

1. Es seien wie oben

(1) $$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

die Windungspunkte der polymorphen Funktion $z(x)$ und

(2) $$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$$

die zugehörigen endlichen Ordnungszahlen. Bekanntlich genügen diese Zahlen der Ungleichung

(3) $$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \ldots + \frac{1}{\nu_m} < m - 2.$$

Wir stellen uns in dem vorliegenden Kapitel die Aufgabe, eine algebraische

Riemannsche Fläche W vom Geschlecht Eins zu konstruieren, die Windungspunkte nur über die Punkte (1) besitzt und zwar so, dass allgemein die Ordnung jedes über ρ_i gelegenen Windungspunktes ein Teiler der zugeordneten Zahl ν_i ist. Wir beginnen mit dem Fall $m = 3$.

2. Die Ungleichung (3) lautet im vorliegenden Falle

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} < 1. \tag{4}$$

Es sei allgemein k_i die Anzahl der über ρ_i liegenden Windungspunkte von W, und q_i ihre gemeinsame Ordnung. Aus der Riemannschen Relation

$$p = -N + 1 + \Sigma \frac{q_i - 1}{2}$$

zwischen dem Geschlecht p, der Anzahl N der Blätter und den Ordnungszahlen q_i der Windungspunkte ergibt sich im vorliegenden Falle die Gleichung

$$k_1(q_1 - 1) + k_2(q_2 - 1) + k_3(q_3 - 1) = 2N. \tag{5}$$

Wegen

$$k_i q_i \leqq N \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

folgt aus (5) die Ungleichung

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} < 1 \tag{7}$$

als notwendige Bedingung für die Zahlen q_1, q_2, q_3.

Wir nennen

$$(q_1^{k_1}, q_2^{k_2}, q_3^{k_3}; N)$$

die *Signatur* der Fläche W und

$$(q_1, q_2, q_3)$$

ihr *Typus*. Sind die Zahlen q_i bzw. Teiler der Zahlen q_i', so sagen wir, der Typus von W sei ein *Untertypus* von (q_1', q_2', q_3').

3. Wir werden unsere Fläche W aus N Exemplaren von geschnittenen x-Ebenen zusammensetzen, welche sämtlich längs zwei Schnitte $\rho_\alpha \rho_\beta$, z. B. längs

$$\rho_1\rho_3 \quad \text{und} \quad \rho_2\rho_3$$

mit einander zusammengeheftet sind. Wir numerieren die Blätter in der von oben aus gerechneten Reihenfolge und wir können die Zusammensetzung der

Fläche W eindeutig durch das Schema

	1	2	...	N
$\rho_1\rho_3$	α_1	α_2	...	α_N
$\rho_2\rho_3$	β_1	β_2	...	β_N

ausdrücken, welches allgemein angibt, dass das negative Ufer des Schnittes $\rho_1\rho_3$ bzw. $\rho_2\rho_3$ im i:ten Blatte mit dem positiven Ufer des α_i:ten bzw. β_i:ten Blattes zusammengeheftet wird.

Wir wollen hier noch eine Hilfskonstruktion einführen, von der wir im Folgenden oft Gebrauch machen werden, um aus Flächen gewissen einfachen Typus neue Flächen eines komplizierteren Typus herzuleiten.

Es sei T ein Blatt von W und $\overset{-}{A}$ das negative Ufer des zugehörigen Schnittes $\rho_1\rho_3$. Sei ferner $\overset{+}{B}$ das positive Ufer desjenigen über $\rho_1\rho_3$ liegenden Schnittes, welches bei der Konstruktion von W mit $\overset{-}{A}$ zusammengeheftet wird. Wir führen jetzt die Riemannsche Fläche

	1	2	3	...	q
$\rho_1\rho_2$	1	2	3	...	q
$\rho_1\rho_3$	2	3	4	...	1

vom Geschlecht Null der Funktion

$$\left(\frac{x-\rho_1}{x-\rho_3}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ein. Indem wir von dieser Fläche W_0 die Zusammenheftung der Ufer $\overset{-}{q}$ und $\overset{+}{1}$ über $\rho_1\rho_3$ aufheben und dann die so erhaltenen freien Ufer resp. mit den Ufern $\overset{+}{B}$ und $\overset{-}{A}$ der Fläche W zusammenheften, entsteht eine neue Fläche W', wo die Ordnungszahlen der zu T gehörigen Windungspunkte um q grösser als bei W sind. Weil dabei die Blätterzahl zugleich um q vermehrt wird, während die Ordnungszahlen der übrigen Windungspunkte ungeändert bleiben, muss auch die neue Fläche das Geschlecht Eins haben. Die Operation, welche W in W' verwandelt, soll im Folgenden mit O_{13}^q bezeichnet werden.

Wir werden nach diesen Vorbereitungen zur Konstruktion der Flächen W übergehen.

A) Allgemeiner Fall:

4. Wir betrachten zuerst den Fall, wo keine der Zahlen ν_i eine Potenz von zwei ist. Es seien bzw.

$$q_1, q_2, q_3$$

ungerade Primfaktoren von ν_1, ν_2, ν_3, also

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3} \leqq 1. \tag{7}$$

Wir wählen die Bezeichnung so, dass

$$3 \leqq q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \tag{8}$$

und wir beginnen mit der Konstruktion der Flächen W in demjenigen Falle, wo die Bedingung

$$q_3 \leqq q_1 + q_2 - 3 \tag{9}$$

erfüllt ist. Wir werden sehen, dass in diesem Falle

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

gewählt werden kann, d. h. es gibt Flächen W, die über jeden Punkt ρ_i einen einzigen Windungspunkt besitzen.

Die Relation (5) lautet jetzt

$$q_1 + q_2 + q_3 = 2N + 3. \tag{10}$$

Wir bestimmen zuerst die Zahlen a, b und c aus

$$2a+3 = q_1 - q_2 + q_3, \quad 2b-3 = q_1 + q_2 - q_3, \quad 2c+3 = -q_1 + q_2 + q_3. \tag{11}$$

Sie sind offenbar ganz. Wegen (8) und (9) folgt

$$\begin{aligned} 2a &= q_1 - q_2 + q_3 - 3 \geqq q_1 - 3 \geqq 0, \\ 2b &= q_1 + q_2 - q_3 + 3 \geqq 6, \\ 2c &= -q_1 + q_2 + q_3 \geqq q_3 - 3 \geqq 0 \end{aligned}$$

und somit $a \geqq 0$, $b \geqq 3$, $c \geqq 0$. Aus (10) und (11) ergibt sich ferner

$$a + b = q_1, \quad b + c = q_2, \quad a + c + 3 = q_3, \quad a + b + c = N.$$

Wir konstruieren nun eine Riemannsche Fläche, deren a oberste Blätter längs $\rho_1\rho_3$, die b darauf folgenden längs $\rho_1\rho_3$ und $\rho_2\rho_3$ und die c untersten längs $\rho_2\rho_3$ geschnitten sind und deren Schema die folgenden Zahlen enthält:

$\alpha_\mu = \mu + 1$	$1 \leqq \mu \leqq a + b - 1$	$\beta_\mu = \mu + 2$	$\mu = a + b - 2$
$\alpha_\mu = \mu$	$a + b + 1 \leqq \mu \leqq N$	$\beta_\mu = N$	$\mu = a + b - 1$
$\alpha_\mu = 1$	$\mu = a + b$	$\beta_\mu = \mu - 1$	$\mu = a + b$
$\beta_\mu = \mu$	$1 \leqq \mu \leqq a$	$\beta_\mu = a + 1$	$\mu = a + b + 1$
$\beta_\mu = \mu + 1$	$a + 1 \leqq \mu \leqq a + b - 3$	$\beta_\mu = \mu - 1$	$a + b + 2 \leqq \mu \leqq N.$

Man bestätigt leicht, dass unsere N-blättrige Fläche das Geschlecht Eins hat und über die Punkte ρ_1, ρ_2, ρ_3 je einen Windungspunkt der Ordnung q_1, q_2 bzw. q_3 besitzt. Sie ist nach unserer Terminologie eine Fläche des Typus (q_1, q_2, q_3) und der Signatur $(q_1^1, q_2^1, q_3^1; N)$.

Nachdem wir unsere Aufgabe unter der Bedingung (9) gelöst haben, wollen wir die anderen Fälle, — von endlich vielen speziellen Fällen abgesehen, welche eine besondere Behandlung fordern —, erledigen, indem wir die fraglichen Flächen aus den obigen Flächen durch Ausführung der in N.° 3 besprochenen Operationen O herleiten.

5. Wir nehmen zuerst an, es sei

$$q_3 > 3. \tag{12}$$

Wegen (8) ist dann

$$q_2 + q_3 > q_1 + 3$$

und somit $c > 0$.

Es sei nun T ein beliebiges unter den c untersten Blättern. Durch Anwendung der Operation $O_{13}^{q_1-1}$ auf T wächst q_3 um den Betrag $q_1 - 1$ und dazu entsteht in ρ_1 ein neuer Windungspunkt der Ordnung q_1. Wird nun $O_{13}^{q_1-1}$ auf $\varepsilon \leqq c$ verschiedene Blätter angewandt, so wächst q_3 um den Betrag $(q_1 - 1)\varepsilon$ und dazu entstehen in ρ_1 insgesamt ε neue Windungspunkte der Ordnung q_1. Nun ist nach (11)

$$c = \frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + q_3 - 3)$$

und mithin, wegen $q_3 \geqq q_2$,

$$c \geqq \frac{1}{2}(2q_2 - q_1 - 3) = c_0.$$

Man kann also in der obigen Weise bei ungeändert bleibenden Werten von q_1 und q_2 für q_3 alle ungeraden Werte der Form

$$q_3 + (q_1 - 1)\varepsilon \qquad (0 \leqq c \leqq c_0)$$

erreichen, wo q_3 eine beliebige ungerade Zahl des Intervalles

(13) $$q_2 \leqq q_3 \leqq q_1 + q_2 - 3$$

ist.

Wir lassen nun q_3 alle ungeraden Zahlen des Intervalles (13) durchlaufen und wir gelangen in der obigen Weise zu allen ungeraden Zahlen des Intervalles

$$q_1 + q_2 - 1 \leqq q_3 \leqq q_1 + q_2 - 3 + (q_1 - 1)\frac{2q_2 - q_1 - 3}{2}.$$

6. Wir werden jetzt eine neue Operation ausführen, indem wir zuerst auf ein in ρ_1 unverzweigtes Blatt die Operation $O_{13}^{q_1-1}$ anwenden und nachher bei irgend einem der so erhaltenen neuen $q_1 - 1$ Blätter die Operation $O_{23}^{q_2-1}$ ausführen. Weil der Wert von q_3 beim ersten Schritte um $q_1 - 1$, beim zweiten um $q_2 - 1$ vermehrt wird, so bewirkt die Resultante $\overline{O}$ der beiden Operationen das Wachsen von q_3 um den Betrag $q_1 + q_2 - 2$, während q_1 und q_2 ungeändert bleiben. Durch m-malige Wiederholung der Operation $\overline{O}$ kann man den Wert von q_3 um einen beliebigen Betrag der Form

$$(q_1 + q_2 - 2)k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

vermehren. Wenn man zuerst $\overline{O}$ m-mal, dann $O_{13}^{q_1-1}$ auf ε' unter den in ρ_1 unverzweigten Blättern anwendet, kann man den Wert von q_3 um einen beliebigen Betrag der Form

(14) $$(q_1 + q_2 - 2)k' + (q_1 - 1)\varepsilon'$$

vermehren. Hier ist k' eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$ und ferner kann ε' beliebig aus $0 \leqq \varepsilon' \leqq c_0$ und (für $k' > 0$ sogar $> c_0$) gewählt werden.

Wir behaupten, dass der Ausdruck (14) im Allgemeinen alle ungeraden Zahlen darstellt, wenn q_3 alle ungeraden Zahlen des Intervalles (13) durchläuft. Dies ist offenbar der Fall, wenn

$$q_1 + q_2 - 3 + (q_1 - 1)c_0 \geqq q_2 + (q_1 + q_2 - 2) - 2.$$

In der Tat führt die entgegengesetzte Annahme zur Ungleichung

$$q_1 + q_2 - 3 + (q_1 - 1)\frac{2q_2 - q_1 - 3}{2} \leqq q_1 + 2q_2 - 6,$$

welche unter den Bedingungen (9) nur für

$$q_1 = q_2 = 3$$

gelten kann.

7. Mithin bleiben noch die Flächen des Typus

$$(3,\ 3,\ q) \qquad (q \geqq 3)$$

übrig.

Wir konstruieren zu diesem Zweck die folgende Fläche des Typus (3, 3, 7):

Sign. $(3^2, 3^2, 7^1; 7)$

	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_1\rho_3$	3	1	2	6	4	5	7
$\rho_2\rho_3$	5	7	3	2	6	1	4

Diese Fläche hat ein in ρ_1 unverzweigtes Blatt. Indem man auf dasselbe die Operation O_{13}^2, dann auf ein so erhaltenes neues Blatt die Operation O_{23}^2 anwendet und die Resultante der beiden Operationen wiederholt, kann man den Wert von q um eine beliebige gerade Zahl vermehren. Man gelangt so zu Flächen jedes Typus der Form

$$(3,\ 3,\ q). \qquad (q \geqq 7)$$

Es bleiben somit nur noch die Flächen des Typus

$$(3,\ 3,\ 5) \quad \text{und} \quad (3,\ 3,\ 3)$$

übrig. Die Konstruktion der betreffenden Flächen wird direkt durch die folgenden Schemata gegeben:

Sign. $(3^2, 3^2, 5^1; 6)$

	1	2	3	4	5	6
$\rho_1\rho_3$	3	1	2	6	4	5
$\rho_2\rho_3$	4	6	1	3	2	5

Sign. $(3^1, 3^1, 3^1; 3)$

	1	2	3
$\rho_1\rho_3$	3	1	2
$\rho_2\rho_3$	2	3	1.

***B*) Spezielle Fälle:**

8. Wir fassen hier alle diejenigen Fälle zusammen, wo wenigstens eine unter den Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 eine Potenz von 2 ist.

Wir beginnen mit dem Fall, dass nur eine der Zahlen ν_i gleich 2^λ ist und dass die beiden anderen Zahlen je einen ungeraden Primfaktor q_2 bzw. q_3 enthalten, für welche die Bedingung (7), also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leqq 1 \tag{7'}$$

erfüllt ist. Unter diesen Voraussetzungen soll eine Fläche W des zugehörigen Typus

$$(2,\ q_2,\ q_3)$$

konstruiert werden.

Es sei zuerst

$$q_2 \geqq 5.$$

Wir konstruieren zum Anfang die folgende Fläche des Typus (2, 5, 5):

$$\text{Sign.}\,(2^2,\ 5^1,\ 5^1;\ 5)\quad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \rho_1\rho_3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ \hline \rho_2\rho_3 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1. \end{array}$$

Vermittels der Operation O_{23}^{q-5} geht die obige Fläche in eine neue Fläche des Typus

$$(2,\ q,\ q)$$

über. Diese Fläche besitzt insgesamt $q - 4$ in ρ_1 unverzweigte Blätter. Indem man auf ε unter ihnen die Operation O_{13}^1 anwendet, gelangt man zu sämtlichen Flächentypen der Form

(15) $$(2,\ q,\ q + \varepsilon). \qquad (q \geqq 5,\ 0 \leqq \varepsilon \leqq q - 4)$$

Indem man anderseits auf ein in ρ_1 unverzweigtes Blatt die Operation O_{13}^1 und dann bei einem entstandenen neuen Blatt die Operation O_{23}^q anwendet, gelangt durch Zusammensetzung beider Operationen zu einer Operation $\overline{O}$, welche q_3 um q vermehrt, während q_1 und q_2 ungeändert bleiben. Durch Wiederholung von $\overline{O}$ kann man den Wert von q_3 um einen beliebigen Betrag der Form kq vermehren und somit zu Flächen jedes Typus der Form

$$(2,\ q,\ kq + q) \qquad k \geqq 0$$

gelangen. Die zuletzt erhaltenen $q - 1$ Blätter sind in ρ_1 unverzweigt und wenn man auf ε' unter ihnen die Operation O_{13}^1 anwendet, bekommt man Flächen jedes Typus der Form

(16) $$(2,\ q,\ (k + 1)q + \varepsilon'). \qquad (k \geqq 0,\ 0 \leqq \varepsilon' \leqq q - 1)$$

In (15) und (16) sind nun Flächen jedes Typus der Form

$$(2,\ q_2,\ q_3)$$

mit ungeraden Zahlen q_2 und q_3 enthalten, von den Flächen des Typus

$$(2,\ q,\ 2q - 3), \quad (2,\ q,\ 2q - 1)$$

abgesehen, welche eine besondere Behandlung fordern.

TYPUS $(2,\ q,\ 2q-3)$.

9. Wir gehen von der oben konstruierten Fläche des Typus

$$(2,\ q-3,\ q-3) \qquad (q \geqq 11)$$

aus. Sie besitzt insgesamt $q-7 \geqq 4$ in ρ_1 unverzweigte Blätter. Indem wir auf drei unter denselben die Operation O_{12}^1 anwenden, gelangen wir zu einer Fläche des Typus $(2,\ q,\ q-3)$. Wenn man nun auf ein viertes ursprünglich in ρ_1 unverzweigtes Blatt die Operation O_{23}^{q-1} anwendet, bekommt man eine Fläche des gesuchten Typus $(2,\ q,\ 2q-3)$.

Die beiden niedrigsten, ausgeschlossenen Fälle $q=5$ und $q=7$:

$$(2,\ 5,\ 7), \quad (2,\ 7,\ 11)$$

werden durch die folgenden Schemata gelöst:

Sign. $(2^6, 7^2, 11^1; 14)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$\rho_1\rho_3$	8	4	7	2	6	5	3	1	10	9	12	11	13	14
	$\rho_2\rho_3$	7	1	2	3	4	5	6	14	8	9	10	11	12	13

Sign. $(2^6, 5^3, 7^2; 15)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	$\rho_1\rho_3$	1	7	5	9	3	6	2	12	4	13	11	8	10	15	14
	$\rho_2\rho_3$	5	1	2	3	4	10	6	7	8	9	15	11	12	13	14.

TYPUS $(1,\ q,\ 2q-1)$.

10. Wir gehen wieder von der oben konstruierten Fläche des Typus

$$(2,\ q-1,\ q-1) \qquad (q \geqq 7)$$

aus, die insgesamt $q-5 \geqq 2$ in ρ_1 unverzweigte Blätter besitzt. Durch Anwendung der Operation O_{12}^1 auf ein in ρ_1 unverzweigtes Blatt gelangt man zu einer Fläche des Typus $(2,\ q,\ q-1)$. Wird nun noch auf ein zweites ursprünglich in ρ_1 unverzweigtes Blatt die Operation O_{13}^1 und dann O_{23}^{q-1} angewandt, gelangt man schliesslich zu einer Fläche des gesuchten Typus.

Wir wollen hier den Ausnahmefall $q=5$ nicht behandeln, weil dann $2q-1=9$ keine Primzahl ist.

Wir haben noch den Fall

$$q = 3$$

übrig, der im Vorhergehenden ausgeschlossen wurde. Es handelt sich hier also um die Konstruktion von Flächen des Typus

$$(2,\ 3.\ q).$$

Wir unterscheiden folgende Unterfälle.

Erster Unterfall: $q = 3m + 1$.

Wir konstruieren zuerst eine Fläche des Typus (2, 3, 10) mit dem Schema

Sign. $(2^5, 3^3, 10^1; 10)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\rho_1\rho_3$	4	5	7	1	2	8	3	6	10	9
	$\rho_2\rho_3$	3	1	2	6	4	5	9	7	8	10

Indem wir auf das unterste, in ρ_1 unverzweigte Blatt die Operation O^2_{23} und auf das neue dabei entstandene Blatt die Operation O^1_{13} anwenden, wächst q_3 um drei Einheiten und dazu entstehen in ρ_1 und ρ_2 neue Windungspunkte der Ordnung 2 und 3. Durch Wiederholung der zusammengesetzten Operation kann man den Wert von q_3 um einen beliebigen Betrag der Form $3m$ vermehren. Man gelangt so zu Flächen jedes Typus der fraglichen Form, vom Typus

$$(2, 3, 7)$$

abgesehen, welches von dem folgenden Schema gelöst wird (¹):

Sign. $(2^{14}, 3^9, 7^2; 28)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$\rho_1\rho_3$	7	1	2	3	4	5	6	14	8	9	10	11	12	13
	$\rho_2\rho_3$	20	5	11	12	2	19	24	26	17	13	3	4	10	16
		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	$\rho_1\rho_3$	21	15	16	17	18	19	20	28	22	23	24	25	26	27
	$\rho_2\rho_3$	27	14	9	25	6	1	23	28	21	7	18	8	15	22

Zweiter Unterfall: $q = 3m + 2$.

Wir konstruieren zuerst aine Fläche des Typus (2, 3, 14) nach dem Schema:

Sign. $(2^7, 3^4, 14^1; 14)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$\rho_1\rho_2$	13	8	14	5	4	9	11	2	6	12	7	10	1	3
	$\rho_2\rho_3$	1	4	2	3	7	5	6	10	8	9	12	13	11	14

Man kann wie oben den Wert von q_3 um einen beliebigen Betrag der Form $3k$ vermehren. Man gelangt so zu Flächen jedes Typus der Form

$$(2,\ 3,\ 3k + 2) \qquad (k > 3).$$

(¹) Für die Aufstellung des Schemas verdanke ich Herrn Risto Niini.

Der Ausnahmefall $k=3$, also (2, 3, 11), wird durch das folgende Schema erledigt:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sign. $(2^6, 3^4, 11^1; 12)$	$\rho_1\rho_2$	4	6	7	1	8	2	3	5	11	12	9	10
	$\rho_2\rho_3$	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.

C) **Singuläre Fälle:**

11. Wir haben noch diejenigen Fälle übrig, wo die grössten Primfaktoren q_1, q_2, q_3 der Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 der Ungleichung

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}>1$$

genügen. Dann ist wenigstens eine der Zahlen ν_i gleich einer Potenz von 2 und somit eine der Zahlen q_i gleich 2. Man hat die folgenden drei Möglichkeiten.

Erster Fall

$$q_1=2,\ q_2=2,\ q_3=q.$$

Jetzt ist

$$\nu_1=2^{\lambda_1},\ \nu_2=2^{\lambda_2},\ \nu_3=kq.$$

Wegen (4) ist $\lambda_2 \geqq 2$. Wenn nun $q \geqq 4$, so kann man zum Untertypus $(2, 4, n)$ übergehen. Wir konstruieren hier zuerst eine Fläche des Typus (2, 4, 8) durch das Schema

		1	2	3	4	5	6	7	8
Sign. $(2^3, 4^2, 8^1; 8)$	$\rho_2\rho_2$	1	2	5	7	3	8	4	6
	$\rho_2\rho_3$	8	1	2	3	4	5	6	7

Wird nun auf ein in ρ_1 unverzweigtes Blatt die Operation O^1_{13} und auf das erhaltene neue Blatt die Operation O^1_{23} angewandt, so wächst q beidemal um eine Einheit und dazu entstehen in ρ_1 und ρ_2 neue Windungspunkte der Ordnung zwei. Durch Wiederholung der genannten Operationen kann man den Wert von q um eine beliebige ganze Zahl vermehren.

Die Ausnahmefälle

$$q=4,\ 5,\ 6,\ 7$$

werden durch die folgenden Schemata gelöst:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Sign. $(2^7, 4^3, 7^2; 14)$	$\rho_1\rho_2$	8	9	5	11	3	7	6	1	2	12	4	10	14	13
	$\rho_2\rho_3$	7	1	2	3	4	5	6	14	8	9	10	11	12	13

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sign. $(2^5, 4^3, 6^2; 12)$	$\rho_1\rho_2$	7	8	5	10	3	6	1	2	11	4	9	12
	$\rho_2\rho_3$	6	1	2	3	4	5	12	7	8	9	10	11

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sign. $(2^5, 4^2, 5^2; 10)$	$\rho_1\rho_2$	7	6	5	9	3	2	1	10	4	8
	$\rho_2\rho_3$	5	1	2	3	4	10	6	7	8	9

		1	2	3	4
Sign. $(2^2, 4^1, 4^1; 4)$	$\rho_1\rho_2$	3	4	1	2
	$\rho_1\rho_3$	4	1	2	3

Es bleibt noch der Fall $\nu_3 = 3$ übrig, wo die Bedingung (4) für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 \leqq 2$ nicht mehr erfüllt ist. Für $\lambda_1 = 1$ muss jetzt $\lambda_2 \geqq 3$ sein, dagegen für $\lambda_1 = 2$ kann $\lambda_2 = 2$ gewählt werden. Man gelangt so zu den Typen

$$(3,\ 4,\ 4), \quad (2.\ 3,\ 8),$$

welche durch die folgenden Schemata gelöst werden:

		1	2	3	4
Sign. $(3^1, 4^1, 4^1; 4)$	$\rho_1\rho_3$	3	1	2	4
	$\rho_2\rho_3$	2	4	1	3

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sign. $(2^{10}, 3^6, 8^2; 18)$	$\rho_1\rho_3$	18	10	4	3	9	7	6	17	5
	$\rho_2\rho_3$	3	1	2	6	4	5	9	7	8
		10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
	$\rho_1\rho_3$	2	14	13	12	11	16	15	8	1
	$\rho_2\rho_3$	12	10	11	15	13	14	18	16	17

Zweiter Fall:

$$q_1 = 2,\ q_2 = 3,\ q_3 = 3.$$

Der allgemeine Ausdruck der betreffenden Typen ist

$$(2^{\lambda_1},\ 2^{\lambda_2}\, 3^{\mu_2},\ 2^{\lambda_3}\, 3^{\mu_3}).$$

Für $\lambda_1 \geqq 2$ kann man zum Untertypus (3, 3, 4) mit dem Schema

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sign. $(3^3, 3^3, 4^2; 9)$	$\rho_1\rho_2$	9	5	6	2	4	7	3	1	8
	$\rho_2\rho_3$	4	1	2	3	8	5	6	7	9

übergehen. Für $\lambda_1 = 1$ muss wegen (4) wenigstens eine unter den Zahlen λ_2, $\lambda_3 > 0$, oder eine der Zahlen μ_2, $\mu_3 > 1$ sein. Man hat somit die Untertypen

$$(2, 3, 6) \quad \text{und} \quad (2, 3, 9),$$

welche durch folgende Schemata gelöst werden:

		1	2	3	4	5	6
Sign. $(2^3, 3^2, 6^1; 6)$	$\rho_1\rho_3$	5	6	4	3	1	2
	$\rho_2\rho_3$	3	1	2	6	4	5

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sign. $(2^3, 3^3, 9^1; 9)$	$\rho_1\rho_3$	4	2	9	1	7	8	5	6	3
	$\rho_2\rho_3$	3	1	2	6	4	5	9	7	8

Dritter Fall:

$$q_1 = 2, \; q_2 = 3, \; q_3 = 5.$$

Der allgemeine Ausdruck der Typen ist

$$(2^{\lambda_1}, \; 2^{\lambda_2}\, 3^{\mu_2}, \; 2^{\lambda_3}\, 5^{\mu_3}).$$

Für $\lambda_1 \geqq 2$ hat man den Untertypus (3, 4, 5) und das Schema

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sign. $(3^3, 4^2, 5^2; 10)$	$\rho_1\rho_2$	1	3	2	7	10	6	4	9	8	5
	$\rho_2\rho_3$	5	1	2	3	4	10	6	7	8	9

für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 0$ den Untertypus (2, 5, 6) und das Schema

		1	2	3	4	5	6
Sign. $(2^3, 5^1, 6^1; 6)$	$\rho_1\rho_2$	2	1	4	3	6	5
	$\rho_2\rho_3$	3	5	2	1	4	6

Für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 > 0$ hat man den Untertypus (2, 3, 10). welcher früher erledigt worden ist. Auch für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ muss wegen (4) entweder $\mu_1 > 1$ oder $\mu_2 > 1$ sein. Im letzten Fälle hat man den Untertypus (2, 3, 25), welcher schon früher behandelt worden ist. Es bleibt also nur der erste Fall übrig, welcher durch das folgende Schema erledigt wird:

Sign. $(2^4, 5^2, 9^1; 10)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\rho_1\rho_3$	6	4	5	2	3	1	8	7	9	10
	$\rho_2\rho_3$	5	1	2	3	4	10	6	7	8	9.

Die Konstruktion der Fläche W ist hiermit für drei ρ-Punkte vollständig ausgeführt.

§ 2. Flächen mit beliebig vielen ρ-Punkten.

12. Es seien

$$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \dots \leqq \nu_m$$

die den Punkten (1) zugeordneten Zahlen (2) mit der Bedingung (3). Ist nun

$$\frac{1}{\nu_{m-2}} + \frac{1}{\nu_{m-1}} + \frac{1}{\nu_m} \leqq 1,$$

so kann W schlicht über die Punkte

$$\rho_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m-3)$$

gewählt werden und man kann in der oben angegebenen Weise eine Fläche konstruieren, die nur in ρ_{m-1}, ρ_{m-2} und ρ_m Windungspunkte hat.

Es sei nachher

$$\frac{1}{\nu_{m-2}} + \frac{1}{\nu_{m-1}} + \frac{1}{\nu_m} > 1.$$

Die einzigen dieser Ungleichung genügenden Zahlengruppen $(\nu_{m-2}, \nu_{m-1}, \nu_m)$ sind

$$(2,\ 2,\ q), \quad (2,\ 3,\ 3), \quad (2,\ 3,\ 5).$$

Es sind also alle $\nu_i = 2$ für $i < m-1$. Indem wir zu Untertypen übergehen, wo $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{m-3} = 1$, also W schlicht über den Punkten $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m-3}$ wählen, haben wir mit den folgenden vier Fällen zu tun:

ERSTER FALL: Flächen des Typus $(2, 2, 2, q)$.

Wir konstruieren zuerst eine Fläche des Typus (2, 2, 2, 5) durch das Schema

Sign. $(2^2, 2^2, 2^2, 5^1; 5)$

	1	2	3	4	5
$\rho_1\rho_2$	5	1	2	3	4
$\rho_2\rho_3$	4	3	2	1	5
$\rho_3\rho_4$	3	4	1	2	5

Indem wir von dem im ρ_3 unverzweigten Blatt ausgehend die Operationen O^1_{13} und O^1_{14} nacheinander ausführen und wiederholen, können wir q um eine beliebige ganze Zahl vermehren, während die anderen Ordnungszahlen ungeändert bleiben. Wir gelangen so zu Flächen jedes Typus der Form $(2, 2, 2, q)$, wo $q \geqq 5$.

Der ausgeschlossene Typus (2, 2, 2, 3) wird durch das Schema

Sign. $(2^2, 2^3, 2^3, 3^2; 6)$

	1	2	3	4	5	6
$\rho_1\rho_2$	3	1	2	6	4	5
$\rho_2\rho_3$	6	5	4	3	2	1
$\rho_3\rho_4$	1	3	2	5	4	6

der Typus (2, 2, 2, 2) durch das Schema

Sign. $(2^1, 2^1, 2^1, 2^1; 2)$

	1	2
$\rho_1\rho_2$	2	1
$\rho_2\rho_3$	1	2
$\rho_3\rho_4$	2	1

welches eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Windungspunkten definiert, erledigt.

ZWEITER FALL: Flächen des Typus (2, 2, 3, 3).

Eine Fläche des betreffenden Typus wird durch das folgende Schema gegeben:

Sign. $(2^1, 2^1, 3^1, 3^1; 3)$

	1	2	3
$\rho_1\rho_2$	3	1	2
$\rho_2\rho_3$	2	1	3
$\rho_3\rho_4$	3	1	2.

Dritter Fall: Flächen des Typus (2, 2, 3, 5).

Eine Fläche des betreffenden Typus wird durch das folgende Schema gegeben:

Sign. $(2^2, 2^2, 3^1, 5^1; 5)$

	1	2	3	4	5
$\rho_1\rho_2$	5	1	2	3	4
$\rho_2\rho_3$	1	3	2	5	4
$\rho_3\rho_4$	1	4	5	2	3

Das anfangs aufgestellte Problem ist damit vollständig erledigt.

Kapitel II. **Geometrisch-gruppentheoretische Entwicklungen.**

§ 3. Konstruktion des Fundamentalbereichs der fuchsoiden Gruppe Γ_u.

13. Wir kehren zu der ursprünglich gegebenen fuchsschen Gruppe Γ_0 vom Geschlecht Null zurück, deren Fundamentalbereich aus einem ganz innerhalb des Hauptkreises H liegenden Kreisbogenpolygon B_0 besteht. Durch die Hauptfunktion

$$x = f(z) \tag{1}$$

wird B_0 auf die schlichte, geschnittene x-Ebene abgebildet. Den Eckpunkten von B_0 entsprechen hier gewisse Punkte

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

der x-Ebene, welche Windungspunkte der inversen, polymorphen Funktion

$$z = z(x)$$

sind. Es seien

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$$

die endlichen Ordnungszahlen der genannten Windungspunkte.

Wir konstruieren jetzt über die x-Ebene eine Riemannsche Fläche W vom Geschlecht Eins, deren Typus ein Untertypus von

$$(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$$

ist, also eine Fläche, die Windungspunkte nur über die Punkte ρ_i besitzt und zwar so, dass allgemein die Ordnung jedes über den Punkt ρ_i liegenden Windungspunktes ein Teiler von ν_i ist. Den verschiedenen Blättern von W entsprechen in der z-Ebene (nach Fixierung des Zweiges von z) wohlbestimmte

Bildpolygone von B_0, welche zusammen ein Polygon B bilden, welches ein Fundamentalbereich für eine Untergruppe Γ von Γ_0 ist. Die Gruppe Γ hat das Geschlecht Eins und sie besitzt als automorphe Funktionen die Gesamtheit der rationalen Funktionen von W.

Es sei nun u ein zu W gehöriges elliptisches Integral erster Gattung und U die zugehörige unendlich vielblättrige, einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche. Jedem zu U gehörigen Exemplar von W entspricht in der z-Ebene ein Bildpolygon von B, und diese Bildpolygone bilden zusammen ein unendlich vielseitiges Polygon B_u, welches ein Fundamentalbereich für eine fuchsoide, d. h. unendlich vielen Substitutionen von Γ_0 erzeugte Gruppe Γ_u ist. Diese Gruppe hat das Geschlecht Null und sie besitzt in

$$u = u(z)$$

eine Hauptfunktion, welche jeden endlichen komplexen Wert in B_u genau einmal annimmt.

14. Jedem zu B_u gehörigen Bildpolygon von B entspricht in der u-Ebene ein (im allgemeinen krummliniges) Parallelogramm, welches mit gewissen Schnitten versehen ist, die von Teilen des Randes des Polygones herrühren. Die verschiedenen Parallelogramme, welche die u-Ebene einfach und lückenlos bedecken, werden aus einander durch die Substitutionen

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \qquad (m_1, m_2 \text{ ganz rational}) \tag{2}$$

der zu u gehörigen doppeltperiodischen Gruppe G erhalten.

Als Funktion von u betrachtet

$$z = \bar{z}(u)$$

ist z eine polymorphe Funktion, die Windungspunkte offenbar nur in den Punkten

$$u(\rho_i) \tag{3}$$

haben kann und zwar so, dass die Gesamtheit der aus einem Punkt (3) durch die Substitutionen (2) erhaltenen Punkte eine und dieselbe Ordnung besitzen. Dem Rand von B_u entspricht in der u-Ebene eine Kurve, welche alle Windungspunkte (3) enthält und die u-Ebene in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt. Man kann auch umgekehrt von einem geeigneten Schnittsystem der u-Ebene ausgehen und Fundamentalbereiche verschiedener Form für die Gruppe Γ_u finden. Als besonders zweckmässig hat sich folgendes Schnittsystem erwiesen.

Es sei π ein beliebiges u–Parallelogramm und

(4) $$u_1, u_2, \ldots, u_l$$

die endlich vielen dort liegenden Windungspunkte der Funktion $\bar{z}(u)$. Wir

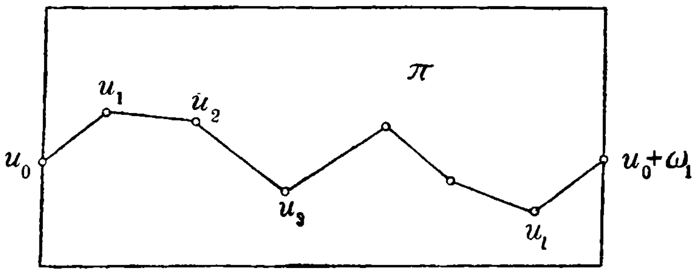


Fig. 1

ziehen in π eine einfache Linie, welche durch die Sunkte (4) geht und zwei äquivalente, d. h. durch die Substitution

(5) $$u' = u + \omega_1$$

konjugierte Punkte auf den vertikalen Randkurven von π verbindet. Indem wir nun in jedem Parallelogramm die entsprechenden Linien ziehen, erhalten wir ein unendliches System aus den obigen Linien zusammengesetzter unbegrenzter Linien

$$l_\nu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

welche in bezug auf (5) invariant sind und aus einander durch die vertikalen Verschiebungen

(5') $$u' = u + \omega_2$$

erhalten werden. Durch die neuen Linien wird die u–Ebene in unendlich viele kongruente Streifengebiete geteilt.

15. Wir wollen jetzt die Streifengebiete mit einander in Verbindung setzen, indem wir von jeder Linie l_ν einen zwischen zwei Windungspunkten liegenden Bogen ausschneiden, z. B. denjenigen, welcher von der imaginaren Achse getroffen wird. Jede Linie l_ν zerfällt in zwei Teile

(6) $$l_\nu^- \text{ und } l_\nu^+,$$

welche resp. in den Halbebenen

$$Re\ u < 0 \quad \text{bzw.} \quad Re\ u > 0$$

verlaufen. Indem wir nun die Linien (6) als Schnitte der u–Ebene auffassen, haben wir diese Ebene in einen Bereich verwandelt, dem in der z-Ebene (nach Fixierung des Anfangspunktes) ein unendlich vielseitiges Polygon B_u entspricht, welches ein Fundamentalbereich von Γ_u ist. Wir können die Linie l_0 stets so wählen, dass die Bilder ihrer Bogen in der z-Ebene

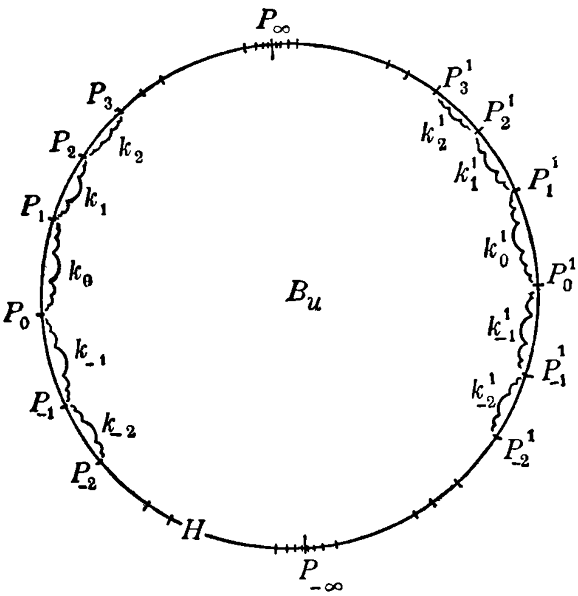


Fig. 2

zu H orthogonale Kreisbogen sind. Jeder Linie (6) entspricht dann eine Linie, die aus unendlich vielen Kreisbogen zusammengesetzt ist und deren beide Endpunkte auf H liegen. Die genannten Linien

$$k_\nu^- \quad \text{und} \quad k_\nu^+ \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{7}$$

die wir *Randzüge* von B_u nennen, sind offenbar im hyperbolischen Sinne konvex, d. h. sie liegen ausserhalb jedes Kreises, der durch einen beliebigen ihrer Teilbogen definiert wird [1].

Wir bemerken ferner, dass zwei benachbarte Randzüge

$$k_\nu^\varepsilon \quad \text{und} \quad k_{\nu+1}^\varepsilon \qquad (\varepsilon = +, -)$$

einen gemeinsamen Eckpunkt P_ν^ε besitzen. In der Tat können die einander gegenüberliegenden Ufer der entsprechenden u-Linien durch ein unendliches System von äquidistanten und vertikalen Linien mit derselben, endlichen Länge verbunden werden. Diesen Linien entsprechen aber im Bereich B_u gewisse die fraglichen Züge verbindende zu H orthogonale Kreisbogen, deren

[1] In der Fig 2 sind k_ν^- und k_ν^+ bzw. durch k_ν und k_ν^1 ersetzt.

hyperbolische Länge beschränkt ist, woraus folgt, dass ihre euklidische Länge den Grenzwert Null hat. In gleicher Weise ist einzusehen, dass der gegenseitige Abstand der Randzüge k_ν^+ und k_ν^- für $\nu \to \pm\infty$ gegen Null konvergiert, woraus folgt, dass die Punkte P_ν^ε für $\nu \to \infty$ und $\nu \to -\infty$ resp. gegen zwei Punkte P_∞ und $P_{-\infty}$ von H konvergieren. Es sind diese Punkte Bildpunkte der beiden Endpunkte der imaginären Achse der u-Ebene.

Sämtliche Seiten von B_u liegen nach dem Obigen innerhalb des Hauptkreises H. Die Eckpunkte von B_u sind dreierlei Art: 1) Die unendlich vielen innerhalb H liegenden Eckpunkte der Züge (7), welche Fixpunkte elliptischer Substitutionen sind und denen die Punkte $u(\rho_i)$ entsprechen; 2) die unendlich vielen auf H liegenden Endpunkte der Züge (7), welche zugleich Häufungspunkte für die Eckpunkte erster Art sind und 3) die zwei Häufungspunkte $P_{\pm\infty}$ der Eckpunkte zweiter Art. In den Eckpunkten zweiter und dritter Art hat die Funktion $u(z)$ den Grenzwert ∞.

Wir bemerken noch, dass B_u keinen Bogen von H enthält, woraus folgt, dass H zugleich ein Grenzkreis von Γ_u ist.

16. Aus der Konstruktion von B_u geht hervor, dass die mit einander konjugierten Seiten von B_u stets einem und demselben Randzüg angehören.

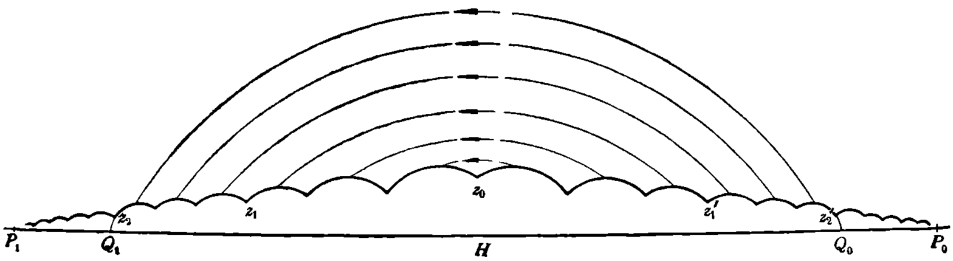


Fig. 3

Betrachten wir nun näher einen bestimmten Randzug, z. B. k_0^-. Die Verteilung der konjugierten Seiten ist in bezug auf den Mittelpunkt z_0, den Bildpunkt des Endpunktes O von l_0^-, symmetrisch in der Weise, dass Seiten, die in der einen oder anderen Richtung gleiche Ordnungsnummer haben, mit einander konjugiert sind.

Um die zugehörigen Substitutionen zu bestimmen, markieren wir auf den beiden Hälften von k_0^- diejenigen Punkte

$$(8) \qquad z_m, \quad z_m' \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \; (z_0 = z_0'),$$

deren Bildpunkte in der u-Ebene mit den Punkten

$$-m\omega_1$$

zusammenfallen. Die beiden Teile von k_0^- werden durch die genannten Punkte in unendlich viele Teile

(9) $$\beta_m = \widehat{z_m z_{m+1}} \quad \text{bzw.} \quad \beta'_m = \widehat{z'_m z'_{m+1}}$$

zerlegt, wobei β_m und β_m' aus β_0 bzw. β_0' durch die Potenzen

(10) $$V_0^m, \quad V_0'^m$$

gewisser hyperbolischer Substitutionen V_0 und V_0' erhalten werden, welche beide der Parallelverschiebung

$$u' = u - \omega_1$$

entsprechen. Sind nun

(11) $$T_1, \; T_2, \ldots, \; T_l$$

diejenigen Substitutionen, welche die endlich vielen Bogen von β_0 und β_0' einander paarweise zuordnen, so gibt

(12) $$V_0^{-\rho} T_\mu V_0^\rho = T_{\mu,\rho} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, l \\ \rho = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

die Gesamtheit derjenigen Substitutionen, welche die zu k_0^- gehörigen konjugierten Bogen in einander überführen.

Es seien

(12') $$T'_{\mu,\rho} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, l \\ \rho = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

die entsprechenden, zu k_0^+ gehörigen Substitutionen. Offenbar können die Züge k_ν^- aus k_0^- und die Züge k_ν^+ aus k_0^+ durch die Potenzen

(13) $$V^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

einer hyperbolischen Substitution V erhalten werden, die der Parallelverschiebung

$$u' = u + \omega_2$$

entspricht und deren Fixpunkte mit den Punkten P_∞ und $P_{-\infty}$ zusammenfallen. Hieraus folgt, dass die zu k_ν^ε gehörigen Erzeugenden von Γ_u aus (12) und (12') durch Transformation mit (13) erhalten werden können. Man kann somit die Gesamtheit der Erzeugenden von $\Gamma_{u'}$ in der Form

(14) $$S^\varepsilon_{\mu,\rho,\nu} = V^{-\nu} T^\varepsilon_{\mu,\rho} V^\nu \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \rho = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, 2, \ldots, l \\ \varepsilon = \pm \end{pmatrix}$$

schreiben.

Die zu einem und demselben Zug gehörigen Substitutionen (14) erzeugen eine Gruppe G_ν^ε, deren Fundamentalbereich den betreffenden Randzug und den ausserhalb desselben liegenden Bogen von H als Begrenzung hat. Die Gruppe Γ_u selbst kann aus den unendlich vielen Gruppen

$$G_\nu^\varepsilon \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \varepsilon = \pm \end{pmatrix}$$

durch Komposition, der Bereich B_u durch Ineinanderschiebung der Fundamentalbereiche der genannten Gruppen erhalten werden.

§ 4. Darstellung von Γ_u durch Grenzübergang aus fuchsschen Gruppen.

17. Wir beginnen, indem wir die Randzüge von B_u einer Reduktion unterwerfen, wodurch sie in neue Züge mit endlich vielen Bogen übergehen. Dies geschieht einfach so, dass wir von einem Zug k_ν^ε nur die n mittleren je aus nl Kreisbogen zusammengesetzten Teile

$$(15) \qquad \beta_\nu, \ \beta_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

behalten und die beiden extremen Bogen über ihre Endpunkte z_n bzw. z_n' hinaus bis zum Hauptkreis H geradlinig fortsetzen. Der so erhaltene Zug $k_{\nu,n}^\varepsilon$ soll *modulo* n *reduzierter Zug* genannt werden. Offenbar liegen die verschiedenen reduzierten Züge voneinander getrennt.

Aus der Definition von $k_{\nu,n}^\varepsilon$ geht hervor, dass ihre Seiten vermittels der Substitutionen

$$(16) \qquad S_{\mu,\rho,\nu}^\varepsilon \qquad \begin{pmatrix} \rho = 0, 1, 2, \dots, n \\ \mu = 1, 2, \dots, l \end{pmatrix}$$

einander bezogen sind, welche Substitutionen eine Untergruppe $G_{\nu,n}^\varepsilon$ von G_ν^ε erzeugen. Die Gruppe $G_{\nu,n}^\varepsilon$ ist eine fuchssche Gruppe, deren Fundamentalbereich von $k_{\nu,n}^\varepsilon$ und dem ausserhalb desselben liegenden Teil von H begrenzt wird. Wir wollen nun die $4m+2$ ersten Randzüge von B_u modulo n reduzieren und die übrigen Randzüge fortlassen. Der von den genannten reduzierten Zügen

$$(17) \qquad k_{\nu,n}^\varepsilon \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m; \ \varepsilon = \pm)$$

und den zwischen denselben liegenden Bogen von H begrenzte Bereich $B_{n,m}$ ist ein Fundamentalbereich für diejenige fuchssche Gruppe $\Gamma_{n,m}$, die aus den Gruppen

$$(18) \qquad G_{\nu,n}^\varepsilon \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m; \ \varepsilon = \pm)$$

durch Komposition erhalten wird. Aus der Gruppe $\Gamma_{n,m}$, welche eine Untergruppe von Γ_u ist, kann Γ_u selbst durch den doppelten Grenzübergang

$$\Gamma_u = \lim_{m,n\to\infty} \Gamma_{n,m}$$

gewonnen werden.

Wir wollen im Folgenden etwas näher in die Zusammensetzung des Polygonnetzes von $\Gamma_{n,m}$ eingehen.

Wir bezeichnen mit

$$(E)_1$$

die endliche Menge derjenigen Polygone, welche mit $B_{n,m}$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben bzw. der zugehörigen Substitutionen. Die Menge $(E)_1$ besteht offenbar aus der Gesamtheit der Substitutionen

(19) $$S^{\varepsilon}_{\mu,\rho,\nu} \qquad (|\nu| \leqq m,\ |\rho| \leqq n,\ |\mu| \leqq l,\ \varepsilon = \pm),$$

welche die konjugierten Seiten von $B_{n,m}$ einander paarweise zuordnen und ferner aus den Potenzen der elliptischen Substitutionen

(19) $$(S^{\varepsilon}_{\mu,\rho,\nu})^{-1} S^{\varepsilon}_{\mu+1,\rho,\nu} \qquad (S^{\varepsilon}_{l+1,\rho,\nu} = S^{\varepsilon}_{1,\rho+1,\nu}),$$

welche die Eckpunkte von $B_{n,m}$ als Fixpunkte haben. Sei ferner $(E)_2$ die endliche Menge derjenigen neuen Polygone, welche mit einem zu $(E)_1$ gehörigen Polygon wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben usw.

Allgemein sei $(E)_q$ die endliche Menge derjenigen Polygone von $\Gamma_{n,m}$, welche mit $B_{n,m}$ vermittels einer Linie verbunden werden können, für welche das Minimum der Anzahl der Schnittpunkte mit den Seiten des Polygonnetzes von $\Gamma_{n,m}$ gleich q ist. Die zu $(E)_q$ gehörigen Substitutionen sind offenbar identisch mit denjenigen, welche als Produkt von genau q zu $(E)_1$ gehörigen Substitutionen darstellbar sind. Wir werden diesen Substitutionen und den zugehörigen Polygonen die Stufenzahl q beilegen.

Es sei nun

$$A^q_{n,m}$$

der von der Gesamtheit der Polygone

(20) $$(E)_1,\ (E)_2, \dots,\ (E)_q,$$

also der Polygone der Stufen $\leqq q$ gebildete Bereich. Der Rand von $A^q_{n,m}$ besteht teils aus Bogen von H, teils aus gewissen im hyperbolischen Sinne gebrochenen Linien, nämlich den inneren Randzügen $\delta^{(q)}_{n,m}$ der innersten Polygone $(E)_q$. Durch Betrachtungen, die wir in unserer Arbeit [5] ausführlich entwickelt haben und die hier im Wesentlichen ungeändert gelten, findet man für die Gesamtlänge des Randes der leztgenannten Art von $A^q_{n,m}$ die Ungleichung

(21) $$\Sigma\, \delta^{(q)}_{n,m} < c(1 - e^{-\lambda(m+n)})^q,$$

wo c und λ gewisse endliche, von m und n unabhängige Konstanten bezeichnen. Die aus (21) durch Grenzübergang erhaltene Gleichung

$$\lim_{q\to\infty} \Sigma\, \delta^{(q)}_{n,m} = 0$$

zeigt, dass die Menge der singulären Punkte der Gruppe $\Gamma_{n\,m}$ das lineare Mass Null hat–ein Satz, der für alle fuchsschen Gruppen ohne Grenzkreis gültig ist [4].

§ 5. Konstruktion der Linien L_n.

19. Wir werden im Folgenden die Existenz einer unendlichen Folge von einander umschliessenden und gegen H konvergierenden, im hyperbolischen Sinne konvexen, gebrochenen Linien

$$L_1,\ L_2,\ L_3, \dots$$

nachweisen, für welche die Gleichung

(22) $$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} \frac{|\,d\zeta\,|}{|\,u(\zeta) - u(z)\,|} = 0$$

gleichmässig in jedem innerhalb H liegenden Bereich gilt.

Indem wir der Kürze halber $m = n$ wählen, gehen wir von dem oben konstruierten Bereich $A^{q_n}_n$ aus, welcher aus der Gesamtheit der Polygone der Stufen $\leqq q_n$ von

$$\Gamma_n = \Gamma_{n,n}$$

besteht. Wenn wir jeden zum Rand von $A^{q_n}_n$ gehörigen reduzierten Zug durch den entsprechenden nichtreduzierten Zug ersetzen und ferner in jedem zu $A^{q_n}_n$ gehörigen Polygon auch die oben fortgelassenen Züge

(23) $$k^\varepsilon_\nu \qquad\qquad |\,\nu\,| > n$$

wieder einführen, geht $A^{q_n}_n$ in einen Bereich $\bar{A}^{q_n}_n$ über, der von B_u und denjenigen Bildpolygonen von B_u besteht, die aus B_u vermittels der Substitutionen (20) erhalten werden. In der u-Ebene entspricht dem Bereich $\bar{A}^{q_n}_n$ eine endlich vielblättrige Riemannsche Fläche R_n, deren Blätter den verschiedenen Bildpolygonen von B_u zugeordnet sind.

Um die Fläche $\bar{R}_n$ einfach zu charakterisieren, führen wir in der u-Ebene dasjenige von $4n^2$ Bildbereichen von π zusammengesetzte Parallelogramm Π_n ein, die ihre Eckpunkte in den Punkten

$$\pm n\omega_1 \pm n\omega_2 \tag{24}$$

hat [1]. Die Verzweigungsschnitte von $\bar{R}_n$ fallen mit denjenigen Teilen der Linien

$$l_\nu^\varepsilon \qquad |\nu| \leq n \tag{25}$$

zusammen, welche dem Innern oder Rand von Π_n angehören. Die Fläche $\bar{R}_n$ selbst besteht aus der Gesamtheit derjenigen u-Blätter, die im Innern

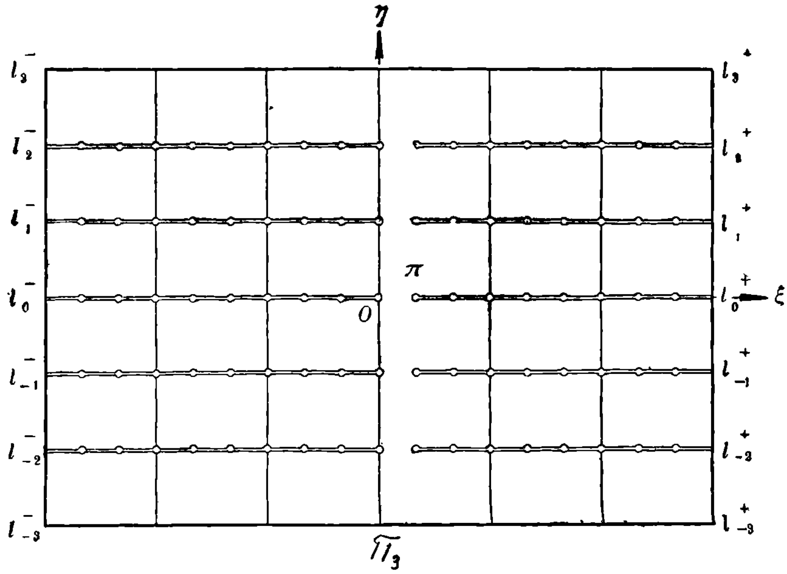


Fig. 4

von Π_n durch Uebersteigen von höchstens q_n verschiedenen Verzweigungsschnitten erreicht werden können.

Der Rand von $\bar{R}_n$ besteht aus dreierlei Linien:

1) Die Schnitte

$$l_\nu^\varepsilon \qquad |\nu| > n \tag{26}$$

gehören in jedem Blatt von $\bar{R}_n$ zum Rand. Ihnen entsprechen die Züge (23) und ihre Transformierten vermittels der Substitutionen (20) für $q = q_n$.

(1) In der Fig. 4 sind die Linien l_ν schematisch durch Geraden ersetzt worden.

2) Die Ufer der zu Π_n nichtgehörigen Schnitte (25) bilden je zwei eine in zwei Blättern verlaufende Linie. Diesen Linien entsprechen in der z-Ebene konvexe, in zwei benachbarten Polygonen von B_u verlaufende Linien.

3) Die freien Ufer der ganzen Schnitte (25) in den am tiefsten liegenden Blättern der Fläche $\overline{R}_n$ gehören als Ganzes zum Rand von $\overline{R}_n$. Ihnen entsprechen diejenigen nichtreduzierten Züge q:ter Stufe, welche den unteren Rand der zu $A_n^{q_n}$ gehörigen Polygone, der Polygone q:ter Stufe, ausmachen.

Die obigen drei Linien bilden zusammen eine konvexe, geschlossene im hyperbolischen Sinne gebrochene Linie $\overline{L}_n$, deren Länge ersichtlich beschränkt ist.

Wir bemerken ferner, dass nur die Linien der dritten Art solche Seiten des Polygonnetzes son Γ_0 enthalten, deren Bild in der u-Ebene innerhalb Π_n liegt. Die betreffenden endlich vielen Seiten gehören offenbar schon zum Rand von $A_n^{q_n}$, nämlich zu den modulo n reduzierten Zügen q_n:ter Stufe, deren Gesamtlänge $\overline{L}_n''$ nach (21) der Ungleichung

$$\overline{L}_n'' < c\,(1 - e^{-2\lambda n})^{q_n} \tag{27}$$

genügt. Der komplementare Teil, der Hauptteil $\overline{L}_n'$ von $\overline{L}_n$ besteht also aus Seiten, deren u-Bild zu Π_n nicht gehört.

20. Der Bereich $\overline{A}_n^{q_n}$ besteht aus unendlich vielen Polygonen von Γ_0. Wir wollen jetzt $\overline{A}_n^{q_n}$ durch einen Teilbereich $D_n^{q_n}$ ersetzen, der aus endlich vielen Γ_0-Polygonen zusammengesetzt ist und dessen Rand alle obigen Eigenschaften hat. Dies geschieht einfach so, dass wir aus jedem Blatt von $\overline{R}_n$ das ganze Aeussere von Π_n ausschneiden, wodurch $\overline{R}_n$ in eine berandete Riemannsche Fläche R_n übergeht, die aus einer endlichen Anzahl über einander gelagerter Π_n-Parallelogramme ausgebaut ist. Man kann den Uebergang von $A_n^{q_n}$ zu $D_n^{q_n}$ durch Ausführung gewisser Schnitte bewerkstelligen, welche die Häufungsecken von $\overline{A}_n^{q_n}$ ausschneiden. Die fraglichen Schnitte sind zweierlei Art. Die Schnitte erster Art sind solche, die aus $A_n^{q_n}$ die gewöhnlichen Häufungsecken, nämlich die Punkte $P_{\pm\nu}$, eliminieren und ihnen entsprechen in der u-Ebene von zwei aufeinander folgenden l-Linien begrenzte Teile der vertikalen Seiten des Parallelogrammes Π_n. Die Schnitte zweiter Art schneiden aus $\overline{A}_n^{q_n}$ die Häufungsecken höherer Art, also Bildpunkte von $P_{\pm\infty}$ mit ihren Umgebungen und ihnen entsprechen in der u-Ebene diejenigen Teile der horizontalen Seiten von Π_n, welche zwischen den Endpunkten der Linien l_n^+ und l_n^- oder l_{-n}^+ und l_{-n}^- liogen. Die Schnitte der beiden Arten, deren Gesamtheit wir mit L_n' bezeichnen, bilden mit den zu $\bar{L}_n'' = L_n''$ gehörigen Seiten zusammen eine konvexe, geschlossene, hyperbolisch gebrochene Linie L_n. Der von L_n begrenzte, aus endlich vielen Γ_0-Polygonen zusammengesetzte Bereich $D_n^{q_n}$ ist dann wirklich identisch mit dem z-Bild unserer berandeten Fläche R_n.

Aus der Konstruktion von L_n geht hervor, dass allgemein L_n von L_{n+1} umschlossen wird, wenn die zugeordneten ganzen Zahlen q_n monoton wachsen und ferner, dass L_n für $n \to \infty$ gegen H konvergiert. Die zugehörigen Riemannschen Flächen

$$R_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden eine unendliche Folge mit den folgenden Eigenschaften:

1) Allgemein ist R_n ein Teil von R_{n+1} und zwar derart, dass jeder Randpunkt von R_n ein innerer Punkt von R_{n+1} ist.

2) Die Fläche R_n geht durch Grenzübergang $n \to \infty$ zur Ueberlagerungsfläche U von $z(u)$ über, d. h. jeder Punkt von U gehört von einer gewissen Stelle n ab zur Fläche R_n.

21. Es erübrigt noch, für die ganzen Zahlen n und $q = q_n$ eine Bedingung aufzustellen, wodurch die obigen Resultate zu funktionentheoretischen Zwecke verwertet werden können. Wir schreiben zu diesem Zweck für die Zahlen q_n die Ungleichung

$$(27') \qquad (1 - e^{-2\lambda n})^{q_n} < \frac{1}{n},$$

welche z. B. unter der Annahme

$$(27'') \qquad q_n > k e^{2\lambda n} \log n$$

sicher erfüllt ist. Dann ist nach (27) und (27')

$$(27''') \qquad L_n'' < \frac{c}{n}.$$

Wir bilden jetzt das Integral

$$(28) \qquad \int\limits_{L_n} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta) - u(z)|} = \int\limits_{L_n'} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta) - u(z)|} + \int\limits_{L_n''} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta) - u(z)|},$$

wo z ein beliebiger Punkt innerhalb H ist. Liegt das u-Bild von z z. B. in Π_m, so möge $n > m$ in (28) gewählt werden. Weil das u-Bild von L_n' zum Rand von Π_n gehört, so gilt auf L_n' die Ungleichung

$$|u(\zeta) \quad u(z)| > \rho(n - m), \quad \text{wo} \quad \rho > 0.$$

Mithin ist

$$(29) \qquad \int\limits_{L_n'} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta)-u(z)|} < \frac{c_1}{n-m}.$$

Wir können durch eine erlaubte Abänderung von B_0 stets erreichen, dass der Ausdruck $|u(\zeta)-u(z)|$ auf den Polygonseiten ein von Null verschiedenes Minimum hat. Nach (27‴) ist dann

$$(30) \qquad \int\limits_{L_n''} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta)-u(z)|} < \frac{c_2}{n}.$$

Nun folgt aus (28), (29) und (30)

$$(31) \qquad \int\limits_{L_n} \frac{|d\zeta|}{|u(\zeta)-u(z)|} < \frac{c_1}{n-m} + \frac{c_2}{n} < \frac{c_3}{n-m}$$

und hieraus, durch Grenzübergang $n \to \infty$, die zu beweisende Grenzgleichung (22).

22. Die Riemannsche Fläche R_n besteht nach der Definition aus einer endlichen Anzahl über einander gelagerter Π_n-Parallelogramme, nämlich aus denjenigen, die vom Fundamentalparallelogramm Π_n^0 ausgehend durch Ueberschreiten von höchstens q_n Verzweigungschnitten innerhalb Π_n erreicht werden können. Wir wollen die Zahl q_n vorläufig die *Tiefe* von R_n nennen. Der Fläche R_n entspricht in der z-Ebene (nach Fixierung des Zweiges der Funktion $z(u)$) der oben mit $D_n^{q_n}$ bezeichnete Bereich, welcher die Linie L_n zur Randkurve hat. Nach N. 21 gilt die Limesgleichung (22) sicher, wenn die Tiefe q_n von R_n der Bedingung (27′), z. B. (27″), genügt.

Es ist leicht die Gesamtheit derjenigen Substitutionen von Γ_u aufzustellen, die den zu $D_n^{q_n}$ gehörigen Γ_u-Polygonen entsprechen, Substitutionen, welche die Funktion $z(u)$ beim Uebergung von Π_n^0 zu den übrigen Blättern von R_n erleidet. Sie sind nämlich nach N. 18 identisch mit denjenigen Substitutionen, welche in der Form

$$(32) \qquad E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_{q_n}}$$

als Produkt von höchstens q_n unter den zu $(E)_1$ gehörigen Substitutionen darstellbar sind. Wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit $(S)_n$.

Wir führen ferner die Differenzen

$$[S] = (S)_n - (S)_{n-1}$$

ein und wir können die Gesamtheit der Substitutionen von Γ_u in der unendlichen Folge

$$[S]_0 = 1, \quad [S]_1, \quad [S]_2, \dots \tag{33}$$

zusammenfassen. Diese Folge, die wir kurz eine *L-Folge* nennen werden, ist in hohem Grade willkürlich, weil die Zahlen q_n nur der einzigen Bedingung (27') unterworfen sind. Die fundamentale Bedeutung der L-Folgen besteht darin, dass sie die Reihenfolge der Glieder in den analytischen Darstellungen verschiedener Art der automorphen Funktionen angeben.

Um eine entsprechende Darstellung der Substitutionen der fuchsschen Gruppe Γ_0 zu gewinnen, haben wir zuerst die Gesamtheit der Substitutionen der Faktorgruppe

$$g_u{}^0 = \Gamma_0/\Gamma_u$$

aufzustellen. Sie bestehen offenbar aus den Substitutionen

$$\Sigma_i\, T_\omega, \tag{34}$$

wo

$$\Sigma_i \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{35}$$

die Substitutionen der Faktorgruppe

$$g^0 = \Gamma_0/\Gamma_u$$

und

$$T_\omega \qquad \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \tag{36}$$

die Substitutionen der mit G isomorphen Faktorgruppe

$$g_u = \Gamma/\Gamma_u$$

zu durchlaufen hat. Nach N. 16 hat T_ω den allgemeinen Ausdruck

$$T_\omega = V_0^{m_1} V^{m_2}.$$

Nun besteht derjenige Teilbereich von $D_n^{q_n}$, welcher dem Parallelogramm $\Pi_m{}^0$ entspricht, aus der Gesamtheit derjenigen Polygone von Γ_0, die den Substitutionen

$$\Sigma_i\, T_\omega \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ |m_1|,\ |m_2| \leqq m \end{array}$$

zugeordnet sind. Es sei $(T)_m$ die endliche Menge der genannten Substitutionen. Indem wir die Differenzen

$$[T]_m = (T)_m - (T)_{m-1}, \quad [T]_0 = (T)_0$$

einführen, können wir die Substitutionen von $g_n{}^0$ in die unendliche Folge

$$]T]_0, \quad [T]_1, \quad [T]_2, \ldots$$

ordnen. Hieraus und aus (33) bekommt man für die Substitutionen von Γ_0 die Darstellung

$$[\mathrm{M}]: \quad \begin{array}{llll} [T]_0[S]_0 & [T]_0[S]_1 & [T]_0[S]_2 & \ldots \\ [T]_1[S]_0 & [T]_1[S]_1 & [T]_1[S]_2 & \ldots \\ [T]_2[S]_0 & [T]_2[S]_1 & [T]_2[S]_2 & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

Wir wollen diese Tabelle durch eine unendliche Folge ersetzen, indem wir zwischen den Ordnungsnummern m und n der horizontalen und vertikalen Reihen von [M] eine Relation

$$m = m(n)$$

aufstellen, wo $m(n)$ eine ganzwertige, monoton wachsende Funktion bezeichnet, die der Bedingung

(37) $$\mathrm{E}: \quad \lim_{n \to \infty} \frac{m^2}{n} = 0$$

genügt. Es sei dann $(TS)_n$ die endliche Menge derjenigen Substitutionen von Γ_0, die den m ersten horizontalen und n ersten vertikalen Reihen angehören. Indem wir die Differenzen

$$[TS]_m = (TS)_m - [TS]_{m-1}, \quad [TS]_0 = (TS)_0$$

einführen, können wir die Gesamtheit der Substitutionen von Γ_0 in die unendliche Folge

(38) $$[TS]_0, \quad [TS]_1, \quad [TS]_2, \ldots$$

ordnen, wo sie in unseren funktionentheoretischen Betrachtungen angewandt wird.

Kapitel III.

Analytische Darstellung der automorphen Funktionen.

§ 6. Darstellung von $u(z)$.

24. Wir gehen von der Funktion

(1) $$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}$$

aus, welche eine Hauptfunktion von Γ_u ist, die in dem in B_u gewählten Punkt $z = a$ einen Pol mit dem Residuum 1 hat. Die übrigen Pole von (1) werden aus

$$z = S(a)$$

erhalten, wo S die Substitutionen von Γ_u durchläuft. Man findet leicht, dass allgemein das Residuum im Pole $S(a)$ gleich $S'(a)$ ist.

Durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel in dem von L_n begrenzten Bereich $D_n^{q_n}$ bekommt man für (1) die Darstellung

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{D_n^{q_n}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{u'(a)}{u(\zeta) - u(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{2}$$

für jeden innerhalb $D_n^{q_n}$ liegenden Punkt z. Liegt ferner a im Parallelogramme Π_m, so gilt die Ungleichung (31) in N. 21 und somit

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{u'(a)}{u(\zeta) - u(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| < \frac{c}{d} \frac{|u'(a)|}{n - m}, \tag{3}$$

wo d den kürzesten Abstand des Punktes z von L_n bezeichnet.

Mithin gilt gleichmässig in jedem innerhalb H liegenden Bereich der Ausdruck

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{D_n^{q_n}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} \tag{4}$$

für unsere Funktion (1). Wir wollen dies kurz

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{\Gamma_u} \frac{S'(a)}{z - S(a)} \tag{5}$$

schreiben, wo S die Substitutionen von Γ_u in einer beliebigen L-folge durchlaufen kann.

Durch Integration von (5) in bezug auf den Parameter a zwischen den beliebig innerhalb H gewählten Punkten a und b und durch Uebergang zur Exponentialfunktion gelangt man zur Produktdarstellung

$$\frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} = \prod_{\Gamma_u} \frac{z - S(a)}{z - S(b)}, \tag{6}$$

wo wir links eine Hauptfunktion von Γ_u mit den Nullstellen und Polen

$$z = S(a), \quad z = S(b)$$

haben. Wir vertauschen hier nun z, a und schreiben ferner z_0 statt b, wodurch wir zur Gleichung

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z_0)-u(a)}=\prod_{\Gamma_u}\frac{S(z)-a}{S(z_0)-a} \tag{7}$$

gelangen. Wir haben links diejenige eindeutig bestimmte Hauptfunktion von Γ_u, die ganz ist und deren Nullstellen und Einsstellen in den mit $z=a$ bzw. $z=z_0$ äquivalenten Punkten

$$z=S(a), \quad z=S(z_0)$$

liegen. Der Ausdruck (7) kann auch in der Form

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z_0)-u(a)}=\prod_{\Gamma_u}\left[\frac{z-S^{-1}(a)}{z_0-S^{-1}(a)}:\frac{z-S^{-1}(\infty)}{z_0-S^{-1}(\infty)}\right] \tag{7'}$$

geschrieben werden.

25. Man kann die Sonderstellung des Punktes $z=\infty$ im letzten Ausdruck in folgender Weise umgehen.

Wir führen statt z die neue Variable z' durch

$$z'=k\frac{z-a}{z-\bar{a}}=\Sigma(z)$$

ein, wo die Punkte a und $\bar{a}$ Spiegelbilder von einander in bezug auf H sind und k so gewählt ist, dass $\Sigma(z)$ den Hauptkreis invariant lässt. Dadurch geht (1) in eine Funktion über, welche Pole in den mit $z'=0$ bezüglich der transformierten Gruppe $\Sigma^{-1}\Gamma_u\Sigma=\Gamma_u'$ äquivalenten Punkten besitzt. Indem man nun auf die neue Funktion $\bar{u}(z')$ den Ausdruck (7) anwendet, bekommt man

$$\frac{\bar{u}(z')-\bar{u}(a)}{\bar{u}(z_0')-\bar{u}(a)}=\prod_{\Gamma_u}\frac{\bar{S}(z')}{\bar{S}(z_0')}, \quad \bar{S}=\Sigma^{-1}S\,\Sigma.$$

Durch Ausführung der inversen Transformation folgt hieraus für die Funktion (7) der neue Ausdruck

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z_0)-u(a)}=\prod_{\Gamma_u}\left[\frac{S(z)-a}{S(z_0)-a}:\frac{S(z)-\bar{a}}{S(z_0)-\bar{a}}\right], \tag{8}$$

wo der Punkt $z=\infty$ durch $z=\bar{a}$ ersetzt worden ist. Wegen der für unabhängige Grössen z, z_0, a, $\bar{a}$ geltenden Identität

$$\frac{S(z)-a}{S(z_0)-a}:\frac{S(z)-\bar{a}}{S(z_0)-\bar{a}}=\frac{z-S^{-1}(a)}{z_0-S^{-1}(a)}:\frac{z-S^{-1}(\bar{a})}{z_0-S^{-1}(a)} \tag{9}$$

kann (8) auch in der Form

$$(8') \qquad \frac{u(z)-u(a)}{u(z_0)-u(a)} = \prod_{\Gamma_u}\left[\frac{z-S^{-1}(a)}{z_0-S^{-1}(a)} : \frac{z-S^{-1}(\bar{a})}{z_0-S^{-1}(a)}\right]$$

geschrieben werden.

Wir haben in (8) und (8') für unsere Funktion (8) analytische Ausdrücke einfachster kanonischer Form, aus denen die Nullpunkte und Pole derselben unmittelbar hervorgehen. Der erste Ausdruck ist ausserdem in bezug auf die Gruppe Γ_u formal invariant, weil bei Ausführung einer beliebigen zu Γ_u gehörigen Substitutionen die Glieder nur mit einander permutiert werden.

Zu bemerken ist, dass die Reihen (5) und Produkte (8) nicht absolut, sondern bedingt konvergent sind, mithin sind die betreffenden Ausdrücke nicht von der Reihenfolge der Glieder unabhängig gültig. Anderseits ist die für die Reihenfolge aufgestellte Bedingung sehr allgemein und, was besonders zu bemerken ist, *die Reihenfolge ist durch die Gruppe selbst bestimmt und von der speziellen Wahl der Funktion unabhängig.*

§ 7. Darstellung der automorphen Funktionen von Γ_0 als Quotient von h-Funktionen.

26. Wir gehen nun von der Funktion

$$(10) \qquad f(z, z_0;\ a, b) = \frac{x(z)-x(a)}{x(z)-x(b)} : \frac{x(z_0)-x(a)}{x(z_0)-x(b)}$$

aus, welche diejenige Hauptfunktion von Γ_0 ist, welche die mit

$$(11) \qquad z = a, \quad z_0, \ b$$

in bezug auf Γ_0 äquivalenten Punkte als Null-, Eins-bzw. ∞ Stellen hat. Die Funktion (10) ist symmetrisch in bezug auf die Grössenpaare

$$(12) \qquad (z;\ z_0), \quad (a,\ b).$$

Wir betrachten nun die Funktion (10) als Funktion des elliptischen Integrals erster Gattung u

$$(13) \qquad f(z, z_0;\ a, b) = \bar{f}(u).$$

Wir wissen, dass $\bar{f}(u)$ eine elliptische Funktion ist, deren Ordnung gleich der Anzahl N der Blätter der Riemannschen Fläche W ist.

Es seien

$$(14) \qquad u = \alpha_i,\ u_i,\ \beta_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

vollständige Systeme nichtäquivalenter Null-, Eins-bzw. ∞ Stellen von $\bar{f}(u)$. Man kann bekanntlich durch eine geeignete Wall von (14) stets erreichen, dass $\bar{f}(u)$ durch Sigmafunktionen in der Form

$$\bar{f}(u)=\prod_{i=0}^{N-1}\left[\frac{\sigma(u-\alpha_i)}{\sigma(u-\beta_i)}:\frac{\sigma(u_i-\alpha_i)}{\sigma(u_i-\beta_i)}\right] \tag{15}$$

dargestellt wird.

Es seien nun

$$a_0=a, \quad a_1, \; a_2, \dots, \; a_{N-1}$$

die Bildpunkte von $z=a$ im Fundamentalbereiche $\mathfrak{B}$ der zu W gehörigen Gruppe Γ. Wir können

$$a_i=\Sigma_i(a) \tag{16}$$

schreiben, wo

$$\Sigma_0, \; \Sigma_1, \; \Sigma_2, \dots, \; \Sigma_{N-1}$$

die Substitutionen der Faktorgruppe g^0 durchläuft. Weil gleiches für die b-und z_0-Punkte gilt, können wir (15) als Funktion von z in der Form

$$f(z, z_0;\; a, b)=\prod_{i=0}^{N-1}\left[\frac{\sigma(u(z))-u(\Sigma_i(a))}{\sigma(u(z))-u(\Sigma_i(b))}:\frac{\sigma(u(z_0))-u(\Sigma_i(a))}{\sigma(u(z_0))-u(\Sigma_i(b))}\right] \tag{17}$$

schreiben. Durch Vertauschung der Grössenpaare (12) ergibt sich aus (17) der neue Ausdruck

$$f(z, z_0;\; a, b)=\prod_{i=0}^{N-1}\left[\frac{\sigma(u(\Sigma_i(z))-u(a))}{\sigma(u(\Sigma_i(z_0))-u(a))}:\frac{\sigma(u(\Sigma_i(z))-u(b))}{\sigma(u(\Sigma_i(z_0))-u(b))}\right] \tag{18}$$

für unsere automorphe Funktion (10). Wir haben damit die Fuuktion (10) als Quotient

$$f(z, z_0;\; a, b)=\frac{h(z;\, z_0,\, a)}{h(z;\, z_0,\, b)} \tag{19}$$

der Funktionen

$$h(z;\, z_0,\, t)=\prod_{i=0}^{N-1}\frac{\sigma(u(\Sigma_i(z))-u(t))}{\sigma(u(\Sigma_i(z_0))-u(t))} \qquad (t=a, b) \tag{20}$$

dargestellt, welche offenbar ganze, also für $|z|<1$ reguläre Funktionen sind. Die Funktion (20) kann ihrerseits in der Form

$$h(z;\, z_0,\, t)=\frac{g(z, t)}{g(z_0, t)} \tag{21}$$

geschrieben werden, wo

$$g(z, t)=\prod_{i=0}^{N-1}\sigma(u(\Sigma_i(z))-u(t)) \tag{22}$$

eine ganze Funktion von z bezeichnet, die nur von dem einzigen Parameter t abhängt.

27. Es soll im Folgenden das Verhalten der Funktion (22) den Substitutionen von Γ_0 gegenüber untersucht werden.

Es sei S_0 eine beliebige solche Substitution. Wir können sie in der Form

$$S_0 = S'\Sigma$$

schreiben, wo S' zu Γ und Σ zu g^0 gehört. Dann ist

$$S_0\Sigma_i = S'\Sigma\,\Sigma_i = S'\Sigma_j = \Sigma_k S,$$

wo S zu Γ und Σ_k zu g^0 gehört und Σ_k mit Σ_i gleichzeitig die Gruppe g^0 durchläuft. Nun ist

$$u(S_0\Sigma_i) = u(\Sigma_k S) = u(\Sigma_k) + \omega_S, \tag{23}$$

wo ω_S die zu S gehörige Periode von u bezeichnet. Ferner ist

$$\sigma(u + \omega_S) = e^{A_S u + B_S}\sigma(u), \tag{24}$$

wo A_S und B_S gewisse von S abhängige Konstanten bezeichnen. Aus (23) und (24) folgt für einen einzelnen Faktor

$$g_i(z, t) = \sigma(u(\Sigma_i(z)) - u(t))$$

von (22) die Transformationsgleichung

$$g_i(S_0(z), t) = e^{A_S(u(\Sigma_k(z)) - u(t)) + B_S} g_k(z, t). \tag{25}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen bekommt man für die Funktionen (20) und (22) die Gleichung

$$g(S_0(z), t) = e^{\sum\limits_{\nu=0}^{N-1} A_S^{(\nu)} u_\nu(z) + B_S} g(z, t), \tag{26}$$

wo die Exponenten lineare Funktionen der ganzen Funktionen

$$u_\nu(z) = u(\Sigma_\nu(z)) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1) \tag{27}$$

sind, die ihrerseits bei Ausführung einer beliebigen zu Γ_0 gehörigen Substitution S eine Transformation der Form

$$u_\nu(S) = u_\nu(z) + \omega_S \tag{28}$$

erleiden. Als eindeutige Funktionen von u sind (20) und (22) automorphe Funktionen der fuchsoiden Gruppe Γ_u.

Die Funktion (22) ist eine Primfunktion unserer Gruppe Γ_0, d. h. sie verschwindet einfach in einem System bezüglich Γ_0 äquivalenter Punkte.

Ist $F(z)$ eine beliebige automorphe Funktion von Γ_0 mit den Null-, Eins-bzw. ∞ Punkten

$$a_i, \quad b_i, \quad z_0 \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

und somit

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} f(z, z_0; a_i, b_i) \tag{29}$$

ihr Ausdruck als eine rationale Funktion von x, so kann dieselbe nach (19) und (21) durch die g-Funktionen in der Form

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{g(z, a_i)}{g(z, b_i)} : \frac{g(z_0, a_i)}{g(z_0, b_i)}\right] \tag{30}$$

dargestellt werden. Unsere g-Funktionen können als Analogon der Sigmafunktionen angesehen werden.

Wenn man in (26) und (30) g durch h ersetzt, bekommt man

$$h(S(z)) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_S^{(\nu)} u_\nu(z) + B_S} \cdot h(z) \tag{26'}$$

und

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{h(z; z_0, a_i)}{h(z; z_0, b_i)}. \tag{30'}$$

§ 8. Analytische Darstellung der Funktion $h(z; z_0, t)$.

28. Wir gehen von der bekannten Produktentwicklung

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\omega^2}} \tag{31}$$

der elliptischen Sigmafunktion $\sigma(u)$ aus. Hieraus ergibt sich für die Funktion

$$h_0(z) = \frac{\sigma(u(z) - u(a))}{\sigma(u(z_0) - u(a))} \tag{32}$$

zunächst der Ausdruck

$$h_0(z) = \frac{u(z) - u(a)}{u(z_0) - u(a)} \prod{}' \frac{u(z) + \omega - u(a)}{u(z_0) + \omega - u(a)} e^{\tau_\omega(z; z_0, a)}, \tag{33}$$

wo die Exponenten

$$\tau_\omega(z; z_0, a) = \frac{u(z) - u(z_0)}{\omega} + \frac{u^2(z) - u^2(z_0) - 2u(a)(u(z) - u(z_0))}{2\omega^2} \tag{34}$$

ganze Funktionen von z sind. Indem man hier für die einzelnen Glieder die Produktausdrücke (8) einführt, gelangt man zur gesuchten Darstellung von (32) als Funktion von z.

Um dies genauer auszuführen, gehen wir von einem beliebigen, innerhalb H gelegenen Bereich D aus. Wir wählen die ganze Zahl m so gross, dass das u-Bild von D im Innern von Π_m liegen wird, dann wählen wir $n > m$ und ersetzen das unendliche Produkt (33) durch ein endliches, indem wir in (33) nur diejenigen Glieder berücksichtigen, für welche π durch

$$u' = u + \omega$$

auf ein innerhalb Π_m liegendes Parallelogramm abgebildet wird.

Wir definieren nun $\tau_\omega \equiv 0$ für $\omega = 0$ und bekommen, unter Anwendung einer leicht verständlichen Schreibweise,

$$h_0(z) = (1 + \varepsilon'_m) \prod_{\omega < \Pi_m} \frac{u(z) + \omega - u(a)}{u(z_0) + \omega - u(a)} e^{\tau_\omega(z;\, z_0,\, a)}, \tag{35}$$

wo ε_m' eine für $m \to \infty$ gegen Null konvergierende Grösse bezeichnet, für welche bekanntlich die Abschätzung

$$|\varepsilon'_m| < \frac{c'}{m}$$

gilt (¹).

Wir führen jetzt für die Substitutionen der Faktorgruppe g_u die Bezeichnung

$$z_\omega = T_\omega(z)$$

ein und wir können schreiben

$$u(z) + \omega = u(z_\omega), \quad u(z_0) + \omega = u(z_\omega^0), \tag{36}$$

wo

$$z_\omega^0 = T_\omega(z_0).$$

Nun gilt nach (7) für die transformierten Faktoren von (35) die Darstellung

$$\frac{u(z_\omega) - u(a)}{u(z_\omega^0) - u(a)} = (1 + \varepsilon_n'') \prod_{D_n^{q_n}} \left[\frac{S(z_\omega) - a}{S(z_\omega^0) - a} : \frac{S(z_\omega) - a}{S(z_\omega^0) - a}\right], \tag{37}$$

wo ε_n'' eine für $n \to \infty$ gegen Null konvergierende Grösse bezeichnet, für

(¹) Hier und im Folgenden bezeichnen die in verschiedenen Weisen indizierten Buchstaben c endliche, von der Gruppe Γ_0 allein abhängige Konstanten.

welche aus (29) N. 21 die Abschätzung

$$|\varepsilon_n''| < \frac{c''}{n-m}$$

erhalten wird. Durch Einsetzung der Ausdrücke (37) in (35) ergibt sich hieraus

$$(38) \qquad h_0(z) = (1+\varepsilon_n) \prod_{\omega < \Pi_m} e^{\tau_\omega(z;z_0,a)} \prod_{D_n^{q_n}} \left[\frac{S(z_\omega)-a}{S(z_\omega^0)-a} : \frac{S(z_\omega)-\bar{a}}{S(z_\omega^0)-\bar{a}}\right],$$

wo

$$|\varepsilon_n| < \frac{c_1'}{m} + \frac{c_2'}{n-m} m^2.$$

29. Wir wählen nun die Abhängigkeit der Zahlen m und n so, dass die Bedingung E, d. h. (37) in N. 23 erfüllt ist. Dann ergibt sich aus (38) durch Grenzübergang

$$(39) \qquad h_0(z) = \lim_{m \to \infty} \prod_{\omega < \Pi_m} e^{\tau_\omega(z;z_0,a)} \prod_{D_n^{q_n}} \left[\frac{S(z_\omega)-a}{S(z_\omega^0)-a} : \frac{S(z_\omega)-\bar{a}}{S(z_\omega^0)-\bar{a}}\right].$$

Indem man hier z und z_0 bzw. durch $\Sigma_i(z)$, $\Sigma_i(z_0)$ ersetzt, bekommt man eine analoge Darstellung für einen willkürlichen Faktor

$$\frac{\sigma(u(\Sigma_i(z)) - u(a))}{\sigma(u(\Sigma_i(z_0)) - u(a))}$$

von $h(z;\, z_0,\, a)$. Durch Multiplikation der verschiedenen Gleichungen gewinnt man schliesslich für die Funktion (20) den Ausdruck

$$(40) \qquad h(z;\, z_0,\, a) = \lim_{m \to \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \prod_{\omega < \Pi_m} e^{\tau_\omega(\Sigma_i(z);\Sigma_i(z_0),a)} \prod_{D_n^{q_n}} \left[\frac{S(z_{i,\omega})-a}{S(\overset{0}{z}_{i,\omega})-a} : \frac{S(z_{i,\omega})-\bar{a}}{S(\overset{0}{z}_{i,\omega})-\bar{a}}\right]$$

wo

$$z_{i,\omega} = T_\omega(\Sigma_i(z)), \quad \overset{0}{z}_{i,\omega} = T_\omega(\Sigma_i(z_0)).$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, bemerken wir, dass

$$S(z_{i,\omega}) = \bar{S}(z),$$

wo

$$\bar{S} = \Sigma_i T_\omega S$$

die Substitutionen von Γ_0 zu durchlaufen hat. Wir definieren ferner die ganze Funktion $\tau_S(z) = \tau_S(z;\, z_0,\, a)$ für jede Substitution von Γ_0 gemäss der folgenden Regel:

Es ist

$$\tau_S(z) = \tau_\omega(\Sigma_i(z)\,;\ \Sigma_i(z_0),\ a)$$

für die Substitutionen für die Substitutionen der Faktorgruppe $g_u{}^0$, also der ersten Zeile von [M] und sonst ist

$$\tau_S(z) \equiv 0.$$

Wir können dann unseren Ausdruck (40) in der verkürzten Form

$$(41)\qquad h(z\,;\ z_0,\ a) = \prod_{\Gamma_0} \left[\frac{S(z)-a}{S(z_0)-a} : \frac{S(z)-\bar{a}}{S(z_0)-\bar{a}}\right] e^{\tau_S(z)}$$

schreiben, wo S die Substitutionen von Γ_0 in einer der Bedingung E genügenden Reihenfolge aus [M] zu wählen sind. Wegen (9) kann man (41) durch

$$(41')\qquad h(z\,;\ z_0,\ a) = \prod_{\Gamma_0} \left[\frac{z - S(a)}{z_0 - S(a)} : \frac{z - S(\bar{a})}{z_0 - S(\bar{a})}\right] e^{\tau_S(z)}$$

ersetzen.

In der Form (41) geschrieben genügt unser Ausdruck formal der Funktionalgleichung (26). In (41′) haben wir aber einen kanonischen Ausdruck, woraus die Null-und Einsstellen der Funktion unmittelbar hervorgehen.

§ 9. Direkte Darstellung der automorphen Funktionen von Γ_0.

30. Man gelangt zu einer direkten Produktdarstellung der Hauptfunktion (10) und damit auch jeder automorphen Funktion von Γ_0, indem man im Ausdruck (19) für die h-Funktionen ihre Ausdrücke (41) einführt. Wegen der bekannten Relation

$$\sum_{i=1}^{N} u(a_i) = \sum_{i=1}^{N} u(b_i),$$

welche bei passender Wahl der Punkte a_i, b_i gilt, ist

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_S(z\,;\ z_0,\ a_i) = \sum_{i=1}^{N} \tau_S(z\,;\ z_0,\ b_i)$$

und die transzendenten Faktoren fallen somit weg. Wir bekommen in dieser Weise für unsere Funktion (10) den Ausdruck

$$(42)\qquad f(z,\ z_0\,;\ a,\ b) = \prod_{\Gamma_0} \left[\frac{S(z)-a}{S(z_0)-a} : \frac{S(z)-b}{S(z_0)-b}\right],$$

wo die Substitutionen S aus [M] wieder in einer der Bedingung E genügenden Reihenfolge zu wählen sind. Wegen (9) kann (42) durch

$$f(z, z_0; a, b) = \prod_{\Gamma_0} \left[\frac{z - S(a)}{z_0 - S(a)} : \frac{z - S(b)}{z_0 - S(b)}\right] \tag{42'}$$

ersetzt werden.

Der Ausdruck (42) verhält sich den Substitutionen von Γ_0 gegenüber formal invariant, weil dabei die Glieder nur miteinander permutiert werden. In (42') wir besitzen einen kanonischen Ausdruck der einfachsten Art, woraus die Null-, Eins-und ∞ Stellen der Funktion unmittelbar hervorgehen.

Durch Multiplikation von Ausdrücken der Form (42) oder (42') gewinnt man Produktausdrücke für willkürlich gewählte automorphe Funktionen von Γ_0, deren Null-, Eins-und ∞ Punkte gegeben sind. Durch logarithmische Differentiation oder auch direkt aus den Entwicklungen von § 6 könnte man Reihenausdrücke für beliebige automorphe Funktionen von Γ_0 aufstellen, wenn die Pole mit den zugehörigen Residuen oder allgemein mit den zugehörigen unendlichen Bestandteilen gegeben sind. Wie in N. 25 haben wir auch hier und in N. 29 mit bedingt konvergenten Reihen und Produkten zu tun. Die für die Reihenfolge der Glieder aufgestellte Bedingung ist von der Gruppe Γ_0 allein, nicht aber von der betreffenden Funktion abhängig.

§ 10. Charakterisierung der h-Funktionen.

31. Es soll im Folgenden untersucht werden, in welchem Masse die oben eingeführten h-Funktionen durch ihre Eigenschaften charakterisiert werden können.

Es ist auf unendlich vielen verschiedenen Weisen möglich, eine meromorphe Funktion wie (10) als Quotient zweier ganzer Funktionen

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \tag{43}$$

darzustellen, wo φ_1 in den Nullpunkten und φ_2 in den Polen von f Nullstellen entsprechender Ordnung hat. Die Funktion

$$\varphi(S) : \varphi(z)$$

wo φ den Zähler oder Nenner von (43) bezeichnet und S eine willkürliche Substitution von Γ_0 bezeichnet, ist dann eine nichtverschwindende ganze Funktion, also von der Form

$$e^{u_S(z)}$$

wo $u_S(z)$ ebenfalls ganz ist und die Funktion $\varphi(z)$ genügt somit für jede Substitution von Γ_0 einer Gleichung der Form

$$\varphi(S) = e^{u_S(z)}\varphi(z). \tag{44}$$

Die obigen Funktionen φ sind offenbar zu allgemein. Eine natürliche Einschränkung bildet die Annahme, dass die Exponenten u_S einer linearen Schar mit endlicher Basis gehören, also

$$u_S(z) = \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu u_\nu(z) + \alpha_{q+1} \tag{45}$$

für jede S von Γ_0 gilt. Wir wollen diese Annahme machen und hieraus eine fundamentale Eigenschaft der u-Funktionen herleiten.

32. Es seien S und S' zwei beliebige Substitutionen von Γ_0 und u_S, $u_{S'}$ die zugehörigen Exponenten. Aus

$$\varphi(S) = e^{u_S(z)}\varphi(z), \quad \varphi(S') = e^{u_{S'}(z)}\varphi(z)$$

folgt für die zusammengesetzte Substitution SS' die Gleichung

$$\varphi(SS') = e^{u_{S'}(S)}\varphi(S) = e^{u_{S'}(S) + u_S(z)}\varphi(z). \tag{46}$$

Weil anderseits

$$\varphi(SS') = e^{u_{SS'}(z)}\varphi(z), \tag{46'}$$

wo $u_{SS'}$ den zu SS' gehörigen Exponenten bezeichnet, so gilt die Gleichung

$$u_{SS'}(z) = u_{S'}(S) + u_S(z) + k_S \cdot 2\pi i, \tag{47}$$

wo k_S eine ganze Zahl bezeichnet.

Wir nehmen der Kürze halber, es sei $q = 2$ und also

$$\begin{aligned} u_S(z) &= a_S u_1(z) + b_S u_2(z) + c_S, \\ u_{S'}(z) &= a_{S'} u_1(z) + b_{S'} u_2(z) + c_{S'}, \\ u_{SS'}(z) &= a_{SS'} u_1(z) + b_{SS'} u_2(z) + c_{SS'}. \end{aligned} \tag{48}$$

Indem man diese Ausdrücke in (47) einsetzt, gelangt man zur Gleichung

$$\begin{aligned} &a_{SS'} u_1(z) + b_{SS'} u_2(z) + c_{SS'} = \\ &= a_{S'} u_1(S) + b_{S'} u_2(S) + c_{S'} + a_S u_1(z) + b_S u_2(z) + c_S + k_S 2\pi i, \end{aligned}$$

welche die Form

$$a_{S'} u_1(S) + b_{S'} u_2(S) = A u_1(z) + B u_2(z) + C \tag{49}$$

hat. Wird S' durch eine willkürliche andere Substitution S'' von Γ_0 ersetzt, so hat man statt (49) die Gleichung

$$a_{S''} u_1(S) + b_{S''} u_2(S) = A' u_1(z) + B' u_2(z) + C'. \tag{49'}$$

Man kann nun S' und S'' stets so wählen, dass

$$\begin{vmatrix} a_{S'} & b_{S'} \\ a_{S''} & b_{S''} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Denn andernfalls hätte man nach (48) für jede Substitution S' von Γ_0

$$u_S(z) = a_S(u_1(z) + pu_2(z)) + C_S,$$

wo p von S unabhängig ist, d. h. die Anzahl q wäre $=1$, gegen unsere Annahme. Man kann somit das Gleichungspaar (49), (49') in bezug auf $u_1(S)$, $u_2(S)$ auflösen und bekommt die Gleichungen

$$u_\nu(S) = \alpha_S^{(\nu)} u_1(z) + \beta_S^{(\nu)} u_2(z) + \gamma_S^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2)$$

für die willkürlich gewählte Substitution S von Γ_0.

Allgemein folgt aus (45) für jede S aus Γ_0 eine Gleichung der Form

$$u_\nu(S) = \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_S^{(\nu)} u_\nu(z) + \alpha_S^{(q+1)}. \tag{50}$$

Die Funktionen

$$u_1(z),\ u_2(z), \dots,\ u_q(z),\ u_{q+1}(z) = 1$$

bilden somit ein System zetafuchsscher Funktionen und sie genügen einer linearen Differentialgleichung

$$\sum_{\mu=1}^{q+1} R_\mu(x) \frac{d^\mu u}{dx^\mu} = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $R_\mu(x)$.

33. Man gelangt zu unseren h-Funktionen, wenn man das Gleichungssystem (50) in der spezialisierten Form

$$u_\nu(S) = u_\mu(z) + \omega_S^{(\nu)} \tag{51}$$

wählt, wo die $u_\nu(z)$ eine Permutation der Funktionen $u_\mu(z)$ bezeichnen, welche im Allgemeinen linear abhängig sind. Wir betrachten jetzt die Funktionen u_ν als Funktionen von x:

$$u_\nu = \bar{u}_\nu(x)$$

und wir führen die in bezug auf x genommenen Ableitungen

$$v_\nu = \frac{d\bar{u}_\nu}{dx}$$

ein. Den Gleichungen (51) entsprechen hier die Gleichungen

$$v_\nu(x') = v_\mu(x). \tag{52}$$

wo x' den Wert von x nach einem geschlossenen Umlauf in der x–Ebene bezeichnet. Diese Gleichungen gelten insbesondere für die Umläufe um die Windungspunkte ρ_i von $z(x)$, welche offenbar die einzigen Windungspunkte von $v(x)$ sein können, damit die Funktionen $u_\nu(x)$ eindeutig in z wären. Weil die Funktionen v_ν nach (52) dabei miteinander permutiert werden, können sie als Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$v^k + \gamma_1(x)v^{k-1} + \dots + \gamma_k(x) = 0 \tag{53}$$

angesehen werden, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Es sind somit $u_\nu(x)$ zu (53) gehörige Abelsche Integrale und offenbar Integrale erster Gattung, weil sie überall endlich bleiben.

Als einfachsten Fall hat man denjenigen, wo (53) das Geschlecht Eins hat und die genannten Integrale sich somit auf elliptische reduzieren. Die zugehörigen Funktionen φ sind dann identisch mit unseren h–Funktionen.

34. Wir wollen zum Abschluss noch untersuchen, wann $q = 1$ in (45) gewählt werden, also wann die Funktionen (21) und (22) für jede Substitution von Γ_0 einer Gleichung der Form

$$h(S(z)) = e^{\alpha_S u(z) + \beta_S} h(z) \tag{54}$$

genügen, wo $u(z)$ eine ganze Funktion ist.

Nach dem Obigen gilt jetzt für jede Substitution S von Γ_0 eine Gleichung der Form

$$u(S) = a_S u(z) + b_S. \tag{55}$$

Es sei nun insbesondere S eine elliptische Substitution ν:ter Ordnung von Γ_0. Weil aus (55) durch ν–fache Wiederholung die identische Gleichung

$$u(S^\nu) = u(z) \tag{56}$$

folgen muss, gilt die Gleichung

$$a_S^\nu = 1. \tag{57}$$

Nun ist aber ν gleich einer unter den Zahlen (2), S. 207. Wird also mit n der kleinste gemeinsame Dividend jener Zahlen bezeichnet, so gilt

$$a_S^n = 1 \tag{58}$$

und zwar für jede Substitution von Γ_0. Wir betrachten nun $u(z)$ als Funktion von x

$$u = \bar{u}(x).$$

Der Gleichung (55) entspricht die Gleichung

$$\bar{u}(x') = a_S u(x) + b_S, \tag{59}$$

wo x' den Wert von x nach demjenigen geschlossenen Umlauf in der x-Ebene bezeichnet, welcher der willkürlichen Substitution S von Γ_0 entspricht. Aus (58) und (59) folgt aber, dass

$$v(x) = \left(\frac{d\bar{u}(x)}{dx}\right)^n \tag{60}$$

bei solchen Umläufen ungeändert bleibt. Es ist somit $v(x)$ eine eindeutige Funktion von x und zwar offenbar eine rationale Funktion $r(x)$. Aus (60) folgt nun

$$\bar{u}(x) = \int \sqrt[n]{r(x)}\, dx, \tag{61}$$

dh. $u(x)$ ist ein zu einer binomischen Fläche der Form

$$y^n = \prod_{i=1}^{l} (x - \rho_i) \tag{62}$$

gehöriges Abelsches Integral erster Gattung.

Damit nun $\bar{u}$ ein elliptisches Integral wäre, muss das Geschlecht von (62) gleich Eins sein, was unter folgenden Bedingung stattfinden kann:

1) Wenn $n = 2$ und $l = 4$. In diesem Falle müssen wenigstens vier unter den Zahlen ν_i gerade sein. Umgekehrt kann man im Falle, wo die Anzahl der Punkte ρ_i wenigstens gleich vier ist und wenn wenigstens vier unter denselben gerade Zahlen sind, als W die elliptische Riemannsche Fläche

$$y^2 = \prod_{i=1}^{4} (x - \rho_i)$$

und als u ein zugehöriges elliptisches Integral erster Gattung wählen. Dadurch gelangt man zu Funktionen u, für welche wirklich $q = 1$ ist.

2) Wenn $n = l = 3$. In diesem Falle müssen wenigstens drei unter den Zahlen ν_i durch drei teilbar sein. Umgekehrt folgt daraus, dass drei unter den Zahlen ν_i durch drei teilbar sind, dass man als Fläche W die Riemannsche Fläche

$$y^3 = \prod_{i=1}^{3} (x - \rho_i)$$

vom Geschlecht Eins und als u ein zugehöriges elliptisches Integral erster Gattung wählen kann.

Wir haben somit zu dem Schlussresultat gelangt, dass die Schar der u-Funktionen im elliptischen Falle dann und nur dann eingliedrig ist, wenn wenigstens vier unter den Zahlen ν_i durch zwei oder wenigstens drei unter denselben durch drei teilbar sind.

§ 11. Uniformisierung der binomischen Riemannschen Flächen.

35. Wir schreiben die Gleichung unserer Riemannschen Fläche R in der Form

$$y^n = \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{x - \rho_i}{x - \rho_i'} : \frac{x_0 - \rho_i}{x_0 - \rho_i'} \right]. \tag{63}$$

Wir markieren in der x-Ebene die Punkte

$$\rho_i, \; \rho_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

und wir ordnen denselben die Zahlen

$$\nu_i = \nu_i' = n$$

zu. Die zugehörige polymorphe Funktion $z(x)$ ist dann offenbar identisch mit der Hauptuniformisierenden der Riemannschen Fläche R.

Die Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ und mit ihnen die rationalen Funktionen von R sind automorphe Funktionen einer fuchsschen Gruppe Γ', welche in Γ_0 als Untergruppe des Index n enthalten ist.

Wir betrachten jetzt allgemein die Wurzelfunktion

$$f_i(z) = \left[\frac{x(z) - \rho_i}{x(z) - \rho_i'} : \frac{x(z_0) - \rho_i}{x(z_0) - \rho_i'} \right]^{\frac{1}{n}} \tag{64}$$

als Funktion von z. Sie ist eine eindeutige Funktion, welche bei Ausführung einer willkürlichen Substitution S von Γ_0 die Transformation

$$f_i(S) = \varepsilon_n^{\mu_S} f_i(z) \tag{65}$$

erleidet, wo ε_n die n: te Einheitswurzel und μ_S eine von S abhängige positive ganze Zahl $\leqq n$ bezeichnet. Diejenigen Substitutionen von Γ_0, für welche (64) invariant bleibt, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma^{(i)}$ von Γ_0, deren Index $= n$ ist. Als Faktorgruppe $\Gamma_0/\Gamma^{(i)}$ kann die zyklische Gruppe

$$1, \; \Sigma, \; \Sigma^2, \ldots, \; \Sigma^{n-1}$$

gewählt werden, wo Σ eine elliptische Substitution n:ter Ordnung bezeichnet, welche den Bildpunkt von ρ_i oder ρ_i' als Fixpunkt hat.

Wir drücken nun $f_i^n(z)$ in der Form (19) als Quotient zweier h-Funktionen aus, welche resp. in den Nullstellen und Polen von $f_i^n(z)$ n-fach verschwinden. Offenbar sind die Funktionen

$$h_1(z; z_0, t) = \sqrt[n]{h(z; z_0, t)} \qquad (t = a_i, b_i \tag{66}$$

eindeutige Funktionen von z und man hat in

$$f_i(z) = \frac{h_1(z\,;\,z_0\,,\,a_i)}{h_1(z\,;\,z_0\,.\,b_i)}$$

eine Darstellung von (64) als Quotient von ganzen Funktionen, die bei Ausführung einer willkürlichen Substitution von Γ_0 eine Transformation der Form

$$h_1(S) = \varepsilon_n^{\mu_S} e^{\frac{1}{n}\left[\sum\limits_{\nu=1}^{N} A_S^{(\nu)} u_\nu(z) + B_S^{(\nu)}\right]} h_1(z) \tag{67}$$

erleiden. Für die Funktionen (66) ergibt sich aus (41) der Ausdruck

$$h_1(z\,;\,z_0\,,\,a_i) = \prod_{\Gamma^{(i)}} \left[\frac{S(z) - a_i}{S(z_0) - a_i} : \frac{S(z) - \bar{a}_i}{S(z_0) - \bar{a}_i}\right] e^{\frac{\tau_S(z)}{n}}, \tag{68}$$

wo S die Substitutionen von $\Gamma^{(i)}$ zu durchlaufen hat. Um den Ausdruck (68) streng herzuleiten, muss man von (38) ausgehen und nachweisen, dass die dort auftretenden Faktoren je n mit einander gleich werden. Dies ist wirklich der Fall nach einer Modifikation der Tabelle (37), S. 236, die einer erlaubten Abänderung entspricht, wie leicht zu zeigen ist.

Durch Multiplikation der zu den verschiedenen Faktoren der rechten Seiten von (63) gehörigen Funktionen gelangt man zu den ganzen Funktionen

$$\prod_{i=1}^{k} h_1(z\,;\,z_0\,,\,t_i) = \bar{h}(z\,;\,z_0\,,\,t), \qquad (t = a,\, b) \tag{69}$$

durch welche die Funktion $y(z)$ als Quotient

$$y(z) = \frac{\bar{h}(z\,;\,z_0\,,\,a)}{\bar{h}(z\,;\,z_0\,,\,b)} \tag{70}$$

dargestellt werden kann. Die Funktionen (69) verhalten sich den Substitutionen von Γ_0 gegenüber multiplikativ gemäss der Formel (67).

36. In Analogie mit (42) kann man schliesslich die Funktion $y(z)$ auch direkt in der Form

$$y(z) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{\Gamma'} \left[\frac{S(z) - a_i}{S(z) - b_i} : \frac{S(z_0) - a_i}{S(z_0) - b_i}\right] \tag{71}$$

darstellen, wo keine transzendenten Faktoren mehr vorhanden sind. Wir haben durch Aufstellung der Ausdrücke (42) und (71) die Uniformisierung der binomischen Riemannschen Fläche R durch kanonische Ausdrücke einfachster Art geleistet, aus denen die Bestandteile der Funktionen unmittelbar hervorgehen und welche bezuglich der zugehörigen Gruppe gegenüber formal invariant sind.

Man bekommt auch für die anderen automorphen Funktionen von Γ' einen Ausdruck, wenn man von der Darstellung

$$F(z) = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)y + \gamma_2(x)y^2 + \dots + \gamma_{n-1}(x)y^{n-1}$$

der genannten Funktionen als rationale Funktionen der Fläche R ausgeht. Indem man hier für die Koeffizienten $\gamma_i(x)$, welche rationale Funktionen von x sind, die aus (19) folgenden Ausdrücke als Quotienten von h–Produkten und für $y(z)$ die Darstellung (70) einführt, bekommt man schliesslich für $F(z)$ einen Ausdruck der Form

$$F(z) = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}$$

als Quotient von Funktionen der Form

$$H(z) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda h_\lambda(z) \bar{h}_\lambda(z),$$

wo die Faktoren $h_\lambda(z)$ Produkte von gleich vielen Funktionen (20) und die Faktoren $\bar{h}_\lambda(z)$ die Funktionen $h^\lambda(z;\, z_0,\, a) \cdot h^{n-1-\lambda}(z;\, z_0,\, b)$ bezeichnen. Die Funktionen $H(z)$ sind ganze Funktionen, die bei Ausführung einer beliebigen Substitution S von Γ' eine Transformation der Form

$$H(S) = e^{\sum\limits_{\nu-1}^{N} a_S^{(\nu)} u_\nu(z) + b_S} H(z)$$

erleiden.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Klein F.: *Zu den Verhandlungen betreffend automorphe Funktionen* « Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung », Bd. 21, 6/7 Heft, 1911.
2. Poincaré H.: *Memoire sur les fonctions fuchsiennes*, « Acta Mathematica », Bd. 1, 1882.
3. Schottky F.: *Ueber eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes ungeändert bleibt*, « Journal für Mathematik », Bd. 101, 1887.
4. Myrberg P. J.: *Ein Approximationssatz für die fuchsschen Gruppen*, « Acta Mathematica », Bd. 57, 1931.
5. — — *Ueber die analytische Darstellung der automorphen Funktionen durch bedingt konvergente Reihen und Produkte*, « Acta Mathematica », Bd. 59, 1932.
6. — — *Ueber die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei hyperelliptischen Riemannschen Flächen*, « Acta Mathematica », Bd. 65, 1935.

Sulla propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse.

Memoria di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino).

Sunto. - *Si studia il problema della propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse e in un mezzo nel quale le proprietà dielettriche e magnetiche siano espresse da elementi costanti, riconducendo la questione all'integrazione di tre equazioni differenziali del 2º ordine. Dopo aver caratterizzate le superficie d'onda, si assegnano di quelle equazioni differenziali le formule generali di integrazione. Si esaminano quindi, col sussidio delle funzioni di* BESSEL, *diversi casi notevoli di propagazione simmetrica e infine si considera il caso dell'emissione, in un intervallo di tempo* (0, T), *da una sorgente situata sull'asse di simmetria.*

Mentre la teoria delle *funzioni potenziali simmetriche* è stata, come è noto, già oggetto di classiche ricerche, specialmente da parte del nostro BELTRAMI, non mi sembra che uno studio organico sia stato ancora dedicato all'analogo problema della propagazione ondosa simmetrica rispetto a un asse, nonchè a quello della propagazione simmetrica del campo elettromagnetico, che in parte si riconduce al precedente. Del primo problema mi sono occupato in una Nota recente, dal punto di vista della risoluzione del problema di CAUCHY per la corrispondente equazione differenziale.

In questo lavoro mi occupo invece dell'integrazione delle equazioni di MAXWELL-HERTZ, nel caso della propagazione simmetrica e nell'ipotesi che le proprietà dielettriche e magnetiche del mezzo siano caratterizzate da due omografie vettoriali (*dilatazioni*), costanti.

Introducendo un vettore U, analogo al vettore di HERTZ nel caso della propagazione in un mezzo omogeneo ed isotropo, il problema viene ricondotto alla risoluzione di tre equazioni differenziali del 2º ordine, a ciascuna delle quali devono rispettivamente soddisfare le tre componenti del vettore U prese, secondo l'asse di simmetria, in direzione radiale, e nel senso in cui cresce l'anomalia θ.

Una di quelle equazioni differenziali, e più precisamente quella relativa alla componente assiale del vettore U, non è altro che l'equazione delle onde simmetriche e della sua integrazione, come ho detto, mi sono già occupato.

Le altre due appartengono a uno stesso tipo di equazione differenziale della cui integrazione mi sono anche occupato in una seconda Nota.

Dopo avere caratterizzato nel problema in esame, utilizzando un procedimento del prof. LEVI-CIVITA, le superficie di onda, le quali, nel caso della propagazione epicentrale, sono costituite da due ellissoidi di rotazione bitangenti in due punti dell'asse di simmetria, stabilisco le condizioni a cui devono soddisfare, sulla superficie d'onda, le componenti della forza elettrica e magnetica, condizioni che, nel caso dei mezzi omogenei ed isotropi, furono assegnate per la prima volta dal LOVE, recentemente ritrovate dal prof. LAURA, e utilizzate dal SONA in alcune sue ricerche.

Successivamente vengono richiamate, per le equazioni differenziali a cui soddisfano le componenti del vettore hertziano U, le formule generali di rappresentazione degli integrali.

Riprendendo quindi l'integrazione delle suddette equazioni differenziali per mezzo delle funzioni di BESSEL, e utilizzando un elegante teorema di SONINE, ritrovo, per altra via, quelle soluzioni elementari che mi hanno consentito di risolvere per quelle equazioni il problema di CAUCHY.

Ulteriori e nuovi risultati ho ottenuto ancora coll'ausilio di una formula di trasformazione di HANKEL, determinando le componenti del vettore U quando di quelle componenti siano assegnati i valori all'istante iniziale nell'interno di un cerchio col centro sull'asse di simmetria e perpendicolare a quell'asse, ovvero su una superficie chiusa di rotazione intorno a quell'asse.

Altri risultati degni di rilievo ottengo poi per mezzo di due formule di trasformazione, che credo nuove, e che stabilisco nella Nota riportata alla fine di questo lavoro, le quali formule mi hanno permesso di determinare, per le componenti del vettore di HERTZ, dei valori in cui non compaiono più le funzioni di BESSEL, ma che dipendono invece, in forma elementare, da opportune funzioni arbitrarie delle coordinate e del tempo, le quali caratterizzano il fenomeno di propagazione.

Infine vengono assegnati, mediante sviluppi in serie, le componenti del vettore di HERTZ corrispondenti a una propagazione elettromagnetica simmetrica, che viene emessa, in un intervallo di tempo $(0, T)$, da una sorgente puntiforme situata sull'asse di simmetria.

§ 1. Equazioni differenziali del campo elettromagnetico.

1. Le equazioni differenziali di MAXWELL-HERTZ, che caratterizzano la propagazione elettromagnetica, in un mezzo nel quale non vi siano cariche elettriche, correnti, forze elettromotrici ecc., sono notoriamente [1]

(1) $$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu \boldsymbol{H}), \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E});$$

(2) $$\mathrm{div}\,(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0, \quad \mathrm{div}\,(\mu \boldsymbol{H}) = 0,$$

ove $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono rispettivamente i vettori rappresentativi della forza elettrica e della forza magnetica, la costante c è la velocità della luce, e, nel caso di un mezzo qualsiasi, ε e μ sono, in generale,, due omografie vettoriali, dipendenti dalle proprietà dielettriche e dalla permeabilità magnetica del mezzo.

Per risolvere il sistema differenziale (1), (2), osserviamo intanto che le (2) esprimono notoriamente che i vettori $\varepsilon \boldsymbol{E}$, $\mu \boldsymbol{H}$ devono essere i rotazionali di due vettori, e perciò poniamo

(3) $$\varepsilon \boldsymbol{E} = \mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{U}), \quad \mu \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\, \mathrm{rot}\, \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t},$$

ove $\boldsymbol{U}$ è l'analogo del vettore di HERTZ, nel caso dei mezzi omogenei ed isotropi, e che perciò chiameremo *vettore hertziano*.

In tal modo, oltre ad essere identicamente soddisfatte le equazioni (2), è pure soddisfatta la seconda delle equazioni (1), mentre, in virtù delle (3), la prima delle equazioni (1) porge

(4) $$\mathrm{rot}\left[\varepsilon^{-1}\, \mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{U}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}\right] = 0.$$

Questa è la condizione a cui deve soddisfare il vettore ausiliario $\boldsymbol{U}$, e da essa, integrando, si ottiene subito:

(5) $$\varepsilon^{-1}\, \mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{U}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \mathrm{grad}\, V,$$

ove V è una funzione arbitraria delle coordinate e del tempo.

Nel caso di cui qui ci vogliamo occupare riterremo le omografie ε, μ due *dilatazioni costanti*. Inoltre, trattandosi di simmetria rispetto a un asse z (nel senso che le componenti del campo elettromagnetico si suppongono variabili solo col tempo su ogni circonferenza col centro sull'asse z e perpendicolare a quell'asse), se si indica con $\boldsymbol{K}$ un vettore unitario parallelo all'asse z, e

---

[1] Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale: Applications à la mécanique et à la physique*, p. 94 (Mattei e C., Pavia, 1913).

Vedi anche: T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, p. 73 (Zanichelli, Bologna, 1931-XI).

con I, J, altri due vettori unitari ortogonali fra di loro e a K, possiamo porre

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon I = \varepsilon_1 I, & \varepsilon J = \varepsilon_1 J, & \varepsilon K = \varepsilon_3 K; \\ \mu I = \mu_1 I, & \mu J = \mu_1 J, & \mu K = \mu_3 K, \end{cases}$$

i numeri ε_3 ed ε_1 essendo le *costanti dielettriche* in direzione assiale e in direzione radiale, e i numeri μ_3, μ_1 le analoghe costanti della *permeabilità magnetica.*

2. Per scrivere ora le equazioni differenziali scalari corrispondenti alla (5), introduciamo un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z, ponendo

$$P - O = re^{i\theta} I + zK,$$

ove O è un punto dell'asse di simmetria z, scelto come origine, P un punto generico del campo, ed i è il rotore di un retto in un piano perpendicolare a K.

Si ottiene pertanto

$$\frac{\partial P}{\partial r} = e^{i\theta} I; \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = re^{i\theta} i\, I; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = K;$$

e sussistono le relazioni

$$(7)\qquad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = r\frac{\partial P}{\partial z} \wedge \frac{\partial P}{\partial r}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial r} \wedge \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

Risulta inoltre, nel caso che qui consideriamo, in virtù delle (6), e notando che $J = i I$:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial P}{\partial r} = \varepsilon_1\frac{\partial P}{\partial r}; \quad \varepsilon\frac{\partial P}{\partial \theta} = \varepsilon_1\frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad \varepsilon\frac{\partial P}{\partial z} = \varepsilon_3\frac{\partial P}{\partial z}; \\ &\mu\frac{\partial P}{\partial r} = \mu_1\frac{\partial P}{\partial r}; \quad \mu\frac{\partial P}{\partial \theta} = \mu_1\frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad \mu\frac{\partial P}{\partial z} = \mu_3\frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned}$$

Indichiamo poi con

$$U_1 = U \times \frac{\partial P}{\partial r}; \quad U_2 = U \times \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad U_3 = U \times \frac{\partial P}{\partial z},$$

le componenti del vettore U, le quali. in virtù della simmetria del campo intorno all'asse z, le riterremo indipendenti dall'anomalia θ, e quindi funzioni soltanto delle coordinate r, z e del tempo. Così pure sarà indipendente da θ, nella relazione (5), la funzione arbitraria V, e quindi grad $V \times \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$.

Moltiplicando allora ambo i membri della (5) scalarmente per $\frac{\partial P}{\partial r}$ e avendo riguardo alle relazioni (7) ed (8), si ottiene

$$\varepsilon_1^{-1} \operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} U) \times \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial r},$$

cioè, per definizione dell' operatore rot, e ricordando che le componenti del vettore U sono indipendenti da θ, si ha

$$(9) \qquad - \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{rot} U \times \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial r},$$

ma tenendo conto della seconda delle (7):

$$\operatorname{rot} U \times \frac{\partial P}{\partial \theta} = r \operatorname{rot} U \times \frac{\partial P}{\partial z} \wedge \frac{\partial P}{\partial r} = r\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial r}\right),$$

perciò la (9) diviene:

$$(9') \qquad - \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

In modo perfettamente analogo, moltiplicando ambo i membri della (5) scalarmente per $\frac{\partial P}{\partial z}$ e per $\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$, si ottiene

$$(10) \qquad \varepsilon_3^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$(11) \qquad \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{\partial^2 (r U_2)}{\partial z^2} + \varepsilon_1^{-1}\mu_3^{-1} \cdot r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r U_2)}{\partial r}\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r U_2)}{\partial t^2} = 0.$$

Essendo la V funzione arbitraria di r, z, t, possiamo porre

$$V = \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \frac{\partial U_3}{\partial z} + \varepsilon_3^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r U_1) + \frac{1}{c^2} W,$$

ove W è ancora funzione arbitraria di r, z, t, e allora le equazioni (9') e (10) diventano

$$(9'_1) \qquad \varepsilon_3^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r U_1)\right] + \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = - \frac{1}{c^2}\frac{\partial W}{\partial r},$$

$$(10') \qquad \varepsilon_3^{-1}\mu_1^{-1} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U_3}{\partial r}\right) + \varepsilon_1^{-1}\mu_1^{-1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = - \frac{1}{c^2}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Ponendo infine nelle $(9'_1)$, (10') e (11):

$$(12) \qquad V_1^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_3 \mu_1}; \quad V_3^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1}; \quad V_1^{*2} = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_3},$$

si hanno le equazioni differenziali del 2° ordine

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& V_1^2\cdot r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_1)\right]+V_3^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}(rU_1)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rU_1)=-r\frac{\partial W}{\partial r},\\
& V_1^2\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_3}{\partial r}\right)+V_3^2\cdot\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}=-\frac{\partial W}{\partial z},\\
& V_1^{*2}\cdot r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_2)\right]+V_3^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}(rU_2)\quad\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rU_2)=0,
\end{aligned}
\right.
$$

alle quali devono rispettivamente soddisfare le componenti U_1, U_3, U_2 del vettore U. La 1ª e la 3ª di esse sono evidentemente dello stesso tipo, ed è manifesto il significato delle costanti V_1, V_1^*, V_3, delle quali le prime due rappresentano le velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica in direzione radiale, mentre V_3 è la velocità di propagazione in direzione assiale.

Dalle stesse equazioni (13) risulta ancora che le prime due di esse ammettono, all'istante t, la medesima *superficie caratteristica*, la quale, nel caso di un'onda che emana dall'epicentro O, si dimostra ([1]) che è l'ellissoide di rotazione

$$
\frac{r^2}{V_1^2t^2}+\frac{z^2}{V_3^2t^2}=1,
$$

mentre la superficie caratteristica della terza equazione è l'ellissoide di rotazione

$$
\frac{r^2}{V_1^{*2}t^2}+\frac{z^2}{V_3^2t^2}=1.
$$

In altri termini, la superficie d'onda di FRESNEL che, com'è noto, è una superficie algebrica del 4° ordine ([2]), degenera, nel caso in esame, in due ellissoidi di rotazione bitangenti nei punti $z=\pm V_3t$.

Determinate mediante l'integrazione delle equazioni (13), le componenti U_1, U_2, U_3 del vettore di HERTZ, si ha

$$
\boldsymbol{U}=U_1\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial r}+\frac{U_2}{r}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \theta}+U_3\boldsymbol{K},
$$

e quindi dalle (3) si ricavano subito i vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ della forza elettrica e magnetica.

([1]) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loco citato, § 2.

([2]) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loco citato, p. 88; vedi anche: T. BOGGIO, *Sulla superficie d'onda di Fresnel* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XIV, serie 6ª, 2° sem., a. 1931-X).

§ 2. Superficie di discontinuità delle derivate della forza elettrica e magnetica.

3. Delle equazioni differenziali del tipo (13) ho già dato, in due Note precedenti [1], e per mezzo di integrali definiti, le formule generali di risoluzione. Ma prima di richiamare queste formule e dedurre dalle (13) ulteriori notevoli risultati, è opportuno caratterizzare più dettagliatamente, nel caso che qui ci interessa, le superficie di onda, ovvero le superficie caratteristiche su cui, com'è noto, sono discontinue le derivate prime della forza elettrica e magnetica, e ciò faremo utilizzando il criterio con cui il LEVI-CIVITA (*loco citato*), pervenne alla determinazione della superficie di FRESNEL.

Essendo in generale $\zeta(x_1, x_2, x_3, t) = \text{cost.}$. una eventuale superficie caratteristica σ, riferita a un sistema di coordinate ortogonali x_1, x_2, x_3, se si pone

$$(14) \qquad p_0 = \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad p_i = \frac{\partial\zeta}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

e si indicano con $\boldsymbol{e}$; $\boldsymbol{h}$ i vettori caratteristici della discontinuttà delle derivate prime dei vettori della forza elettrica e magnetica, e con $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie σ, sussistono le relazioni (T. LEVI-CIVITA, *loco citato*, p. 77),

$$(15) \qquad \frac{p_0}{c}\varepsilon\boldsymbol{e} - p\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{h} = 0; \quad \frac{p_0}{c}\mu\boldsymbol{h} + p\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e} = 0; \quad (p\boldsymbol{n} = \text{grad}_P\zeta),$$

ove il vettore $p\boldsymbol{n}$ ha per componenti p_1, p_2, p_3.

Per ricavare dalle (15) l'equazione differenziale delle superficie caratteristiche, eliminiamo intanto da esse il vettore $\boldsymbol{h}$.

Dalla seconda si ricava

$$\boldsymbol{h} = -\frac{cp}{p_0}\mu^{-1}(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}),$$

e sostituendo nella prima si ottiene

$$(16) \qquad \frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon\boldsymbol{e} + p^2\boldsymbol{n} \wedge \mu^{-1}(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}) = 0.$$

---

[1] C. AGOSTINELLI, *Sul problema di Cauchy per l'equazione delle onde simmetriche rispetto a un asse* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 73, 1937-38-XVI).

C. AGOSTINELLI, *Sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale che interessa la propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse* (« Rendiconti del Reale Istituto Lombardo », vol LXXI, fasc. I, 1938-XVI).

Poichè l'omografia μ è dilatazione, indicando con $R\mu$ la sua *reciproca*, risulta [1]

$$\mu^{-1}(n \wedge e) = \frac{R\mu}{I_3\mu}(n \wedge e) = \frac{1}{I_3\mu} \cdot \mu n \wedge \mu e,$$

e quindi, per le proprietà del doppio prodotto vettoriale, si ha

$$n \wedge \mu^{-1}(n \wedge e) = \frac{1}{I_3\mu}[n \times \mu e \cdot \mu n - n \times \mu n \cdot \mu e] =$$

$$= \frac{1}{I_3\mu}[\mu H(n, n) - n \times \mu n] \cdot \mu e.$$

La (16) diventa allora

$$\left\{\frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon + \frac{p^2}{I_3\mu}[\mu H(n, n) - n \times \mu n]\mu\right\} e = 0, \tag{17}$$

dalla quale risulta che l'espressione chiusa fra le parentesi { }, è una omografia *degenere*, e pertanto deve essere nullo il suo invariante terzo, cioè

$$I_3\left\{\frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon + \frac{p^2}{I_3\mu}[\mu H(n, n) - n \times \mu n]\mu\right\} = 0. \tag{18}$$

Questa è, nel caso più generale, l'equazione alle derivate parziali nella funzione incognita ζ che definisce le superficie di onda.

4. Nel caso della propagazione simmetrica rispetto a un asse z, facendo coincidere le coordinate x_1, x_2, x_3, rispettivamente colle coordinate cilindriche r, θ, z, è da osservare che deve essere ζ indipendente da θ, e quindi

$$p_2 = \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = pn \times \frac{\partial P}{\partial\theta} = 0.$$

Indichiamo ora con e_1, e_2, e_3 le componenti del vettore e, ponendo cioè

$$e_1 = e \times \frac{\partial P}{\partial r}, \quad e_2 = e \times \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}, \quad e_3 = e \times \frac{\partial P}{\partial z},$$

e moltiplichiamo quindi scalarmente ambo i membri delta (17) per $\frac{\partial P}{\partial r}$.

Poichè, ricordando le relazioni (8), risulta:

$$I_3\mu = \mu_1^2 \cdot \mu_3; \quad p^2 \cdot \mu H(n, n)\mu e \times \frac{\partial P}{\partial r} = \mu e \times pn \cdot pn \times \mu\frac{\partial P}{\partial r} =$$

$$= (\mu_1 p_1 e_1 + \mu_3 p_3 e_3) \cdot \mu_1 p_1,$$

[1] Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*, vol. 1°, p. 95 (Zanichelli, Bologna, a. 1929).

ed inoltre

$$p^2 n \times \mu n \cdot \mu e \times \frac{\partial P}{\partial r} = (\mu_1 p_1^2 + \mu_3 p_3^2)\mu_1 e_1,$$

si ottiene

(19) $$\left(\frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon_1 - \frac{p_3^2}{\mu_1}\right)e_1 + \frac{p_1 p_3}{\mu_1}e_3 = 0.$$

In modo perfettamente analogo, moltiplicando scalarmente ambo i membri della (17) per $\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$ e per $\frac{\partial P}{\partial z}$, si hanno le altre due relazioni

(20) $$\left[\frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon_1 - \frac{1}{\mu_1 \mu_3}(\mu_1 p_1^2 + \mu_3 p_3^2)\right]e_2 = 0,$$

(21) $$\frac{p_1 p_3}{\mu_1}e_1 + \left(\frac{p_0^2}{c^2}\varepsilon_3 - \frac{p_1^2}{\mu_1}\right)e_3 = 0.$$

Escludendo che sia $e_2 = 0$, tenendo conto delle posizioni (12), la (20) porge senz' altro la relazione

(22) $$p_0^2 - V_1^2 p_1^2 - V_3^2 p_3^2 = 0.$$

Eliminando poi e_1 ed e_3 dalle (19) e (21), in virtù delle stesse posizioni (12), si ottiene

$$p_0^2(p_0^2 - V_1^{*2} p_1^2 - V_3^2 p_3^2) = 0,$$

dalla quale, escludendo il caso di $p_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, (superficie d' onda fissa), segue l' altra relazione

(22') $$p_0^2 - V_1^{*2} p_1^2 - V_3^2 p_3^2 = 0.$$

Se poniamo ora

(23) $$H = \pm \sqrt{V_1^2 p_1^2 + V_3^2 p_3^2}; \quad H^* = \sqrt{V_1^{*2} p_1^2 + V_3^2 p_3^2},$$

le equazioni parametriche delle superficie di onda epicentrali risultano (T. LEVI-CIVITA, *loco citato,* pp. 54 e 88):

$$\left\{\begin{aligned} r &= t\frac{\partial H}{\partial p_1} = t\frac{V_1^2 p_1}{H}, \\ z &= t\frac{\partial H}{\partial p_3} = t\frac{V_3^2 p_3}{H}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} r &= t\frac{\partial H^*}{\partial p_1} = t\frac{V_1^{*2} p_1}{H^*}, \\ z &= t\frac{\partial H^*}{\partial p_3} = t\frac{V_3^2 p_3}{H^*}. \end{aligned}\right.$$

Cioè, avendo riguardo alle relazioni (23), si deduce, conformemente a quanto si è affermato alla fine del n° 2, § 1, che le superficie di onda σ sono composti di due ellissoidi di rotazione σ_1, σ_2, rispettivamente di semiassi $V_1 t$, $V_3 t$, e $V_1^* t$, $V_3 t$, bitangenti nei punti $z = \pm V_3 t$.

Se la propagazione ha origine dai punti $P_0(r_0 z_0)$, di una superficie σ_0, le due superficie in cui si spezza la superficie di onda saranno invece gli inviluppi degli ellissoidi

$$\frac{(r - r_0)^2}{(V_1 t)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(V_3 t)^2} = 1,$$

$$\frac{(r - r_0)^2}{(V_1^* t)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(V_3 t)^2} = 1,$$

coi centri nei punti $P_0(r_0 z_0)$ della superficie σ_0.

5. Indicando ancora con α_1, α_3 i coseni degli angoli che la direzione n della normale esterna alla superficie d'onda forma colle direzioni radiale e assiale, risulta

$$\alpha_1 = p_1/p; \quad \alpha_3 = p_3\, p.$$

Dividendo allora ambo i membri delle relazioni (22) e (22'), per p^2, e osservando che (T. LEVI-CIVITA, *loco citato*, p. 34),

$$\frac{p_0}{p} = \pm\frac{dn}{dt} = \pm V,$$

ove dn è l'elemento di normale compreso fra due superficie d'onda infinitamente vicine, e V è la *velocità di avanzamento* della superficie d'onda, si ottiene

(24) $\qquad V^2 = \alpha_1^2 V_1^2 + \alpha_3^2 V_3^2$, sulla superficie σ_1,

(24') $\qquad V^2 = \alpha_1^2 V_1^{*2} + \alpha_3 V_3^2$, » » σ_2,

le quali confermano che le due superficie di onda, di prora e di poppa avanzano in direzione radiale con due velocità distinte V_1 e V_1^*, e in direzione assiale con una sola velocità V_3.

§ 3. Condizioni a cui devono soddisfare le componenti del campo elettromagnetico sulla superficie d'onda.

6. Dalle equazioni (1) di MAXWELL-HERTZ, essendo per ipotesi ε, μ dilatazioni costanti, si deduce

$$\operatorname{div}(H \wedge E) = E \times \operatorname{rot} H - H \times \operatorname{rot} E =$$
$$= E \times \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + H \times \frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E \times E + \mu H \times H).$$

Se supponiamo ora che l'emissione abbia origine da una superficie chiusa σ_0, e indichiamo con σ la superficie di onda all'istante t, e con S lo spazio (finito), compreso fra σ_0 e σ, dalla relazione precedente si ricava

$$\frac{1}{2}\int_S \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{H}) dS = c\int_S \operatorname{div}(\boldsymbol{H}\wedge \boldsymbol{E}) dS,$$

cioè, per il teorema della divergenza,

$$(25)\qquad \frac{1}{2}\int_S \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{H}) dS = -c\int_{\sigma_0} \boldsymbol{H}\wedge \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{n}_0 \cdot d\sigma_0 + {}$$
$$+ c\int_{\sigma} \boldsymbol{H}\wedge \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{n}\cdot d\sigma,$$

ove $\boldsymbol{n}_0$ ed $\boldsymbol{n}$ sono vettori unitari normali rispettivamente a σ_0 e a σ, e diretti verso l'esterno del campo S.

7. Per trasformare opportunamente la relazione (25) dimostriamo intanto che se $\varphi(P, t)$ è una funzione del punto P di un campo finito S, limitato da una superficie σ, ed è inoltre funzione di t, si ha la formula

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \varphi(P, t)\cdot dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot dS + \int_\sigma \varphi \frac{dn}{dt}\, d\sigma,$$

ove $\boldsymbol{n}$ indica al solito la direzione della normale esterna alla superficie σ.

Infatti, pel teorema di HERTZ sulla variazione del flusso si ha la nota relazione (¹)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \boldsymbol{u}\times \boldsymbol{n}\cdot dS = \int_\sigma \frac{\partial(\boldsymbol{u}\times \boldsymbol{n})}{\partial t}\cdot d\sigma + \int_\sigma \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{n}\cdot \operatorname{div}\boldsymbol{u}\cdot d\sigma,$$

nella quale $\boldsymbol{u}$ è un vettore funzione dei punti del campo S e del tempo, $\boldsymbol{n}$ è vettore unitario normale alla superficie σ che limita il campo S, diretto verso l'esterno, e $\boldsymbol{v}$ è il vettore che rappresenta la velocità di avanzamento dei punti di σ. Da essa, pel teorema della divergenza, segue

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \operatorname{div}\boldsymbol{u}\cdot dS = \int_S \frac{\partial \operatorname{div}\boldsymbol{u}}{\partial t}\cdot dS + \int_\sigma \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{n}\cdot \operatorname{div}\boldsymbol{u}\cdot d\sigma.$$

(¹) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale*, p. 171, (12), (Zanichelli, Bologna, 2ª edizione 1920). Vedi anche: T. BOGGIO, *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'Idrodinamica* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIII, a. 1914).

Ponendo div $u = \varphi$, e osservando che $v \times n = \frac{dn}{dt}$, si ha proprio la relazione (26) (¹).

8. Trasformando per mezzo della (26) il 1° membro della (25), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \frac{1}{2}(\varepsilon E \times E + \mu H \times H) \cdot dS + c\int_{\sigma_0} H \wedge E \times n_0 \cdot d\sigma_0 =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\sigma \left[2cH \wedge E \times n + (\varepsilon E \times E + \mu H \times H) \cdot \frac{dn}{dt}\right] d\sigma,$$

che si può scrivere anche così

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \frac{1}{2}(\varepsilon E \times E + \mu H \times H) \cdot dS + c\int_{\sigma_0} H \wedge E \times n_0 \cdot d\sigma_0 =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\sigma \left[E \times \left(\frac{dn}{dt} \cdot \varepsilon E - cH \wedge n\right) + H \times \left(\frac{dn}{dt} \cdot \mu H + cE \wedge n\right)\right] d\sigma.$$

Questa equazione si semplifica molto se sulla superficie d'onda σ poniamo (ciò che sarà giustificato subito),

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt}\,\varepsilon E - cH \wedge n = 0, \\ \frac{dn}{dt}\,\mu H + cE \wedge n = 0, \end{cases} \tag{27}$$

perchè allora la relazione precedente, dopo aver integrato rispetto a t porge:

$$\int_S \frac{1}{2}(\varepsilon E \times E + \mu H \times H) dS + c\int_0^t dt \int_{\sigma_0} H \wedge E \times n_0 \cdot d\sigma_0 = 0,$$

la quale esprime il principio della conservazione dell'energia per la propagazione elettromagnetica in un mezzo nel quale le proprietà dielettriche e magnetiche sono caratterizzate dalle dilatazioni costanti ε, μ.

Le condizioni (27) a cui devono soddisfare i vettori della forza elettrica e magnetica sulla superficie d'onda σ, sono quelle che, nel caso dei mezzi

(¹) Nel caso dei mezzi omogenei ed isotropi cfr.: E. LAURA, *Sopra il problema esterno della dinamica dei mezzi elastici isotropi* (« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino », serie II, vol. 64, a. 1911). IDEM, *Sopra una classe di soluzioni delle equazioni di Maxwell-Hertz* (Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, a. 1936-XIV).

omogenei ed isotropi portano il nome di *condizioni di Love* [1]. Ricordando che $\frac{dn}{dt} = \pm\frac{p_0}{p}$, risulta evidente l'analogia fra le condizioni (27) e le relazioni (15) di LEVI-CIVITA, le quali, pur esprimendo una proprietà del tutto diversa, hanno struttura perfettamente identica alle precedenti.

In altri termini si ha il risultato notevole che *nel caso della propagazione elettromagnetica in un mezzo nel quale le proprietà dielettriche e magnetiche sono caratterizzate da due dilatazioni costanti* ε, μ, *sulla superficie d'onda* σ *all'istante* t, *tanto i vettori* **E**, **H** *della forza elettrica e magnetica, quanto i vettori* **e**, **h** *che caratterizzano la discontinuità attraverso* σ *delle derivate prime di* **E** *ed* **H**, *soddisfano alle medesime condizioni.*

9. È chiaro che operando sulle condizioni (27), nello stesso modo con cui si è operato sulle condizioni (15), si perviene a stabilire ancora l'equazione alle derivate parziali che definisce le superficie d'onda. Qui non ripeteremo quel calcolo, ma riterremo acquisiti i risultati del § 2.

Piuttosto è opportuno dimostrare come sulla superficie d'onda σ, quando siano soddisfatte le equazioni (1) e le condizioni (27), i vettori $\varepsilon \boldsymbol{E}$, $\mu \boldsymbol{H}$, verificano anche, come è necessario, le equazioni (2), cioè risulta

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \quad \text{sopra } \sigma.$$

Infatti, dalle equazioni (1) si deduce

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \tag{28}$$

le quali sussistono in tutto il campo S, mentre per la formula fondamentale (26), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \cdot dS = \int_S \frac{\partial}{\partial t}[\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E})] \cdot dS + \int_\sigma \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \cdot \frac{dn}{dt}\, d\sigma,$$

cioè, per la 1ª delle (28), e osservando che pel teorema della divergenza è

$$\int_S \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \cdot dS = \int_\sigma \varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma,$$

risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma = \int_\sigma \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \cdot \frac{dn}{dt}\, d\sigma. \tag{29}$$

---

[1] LOVE. *Wave-motions with discontinuities at wave-fronts* (« Proceedings of the London Math. Society », serie II, vol. I, 1903-1904). Cfr. anche E. LAURA, secondo loco citato.

Ma dalle condizioni (27) si deduce

$$\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{sopra } \sigma,$$

perciò dalla (29) segue

$$\int_\sigma \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \cdot \frac{dn}{dt} \cdot d\sigma = 0.$$

Questa condizione, essendo soddisfatta in ogni istante $t > 0$, dice, giusta quanto si era affermato, che in ogni punto della superficie σ è $\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0$. In modo perfettamente analogo si vede che sopra σ è $\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0$.

10. Perchè nella propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse z la superficie d'onda all'istante t è composta di due parti σ_1, σ_2, bitangenti in due punti dell'asse z, possiamo applicare la formula (25) allo spazio S compreso fra σ_1 e σ_2.

Supponendo che σ_1 sia la superficie interna si ha

$$\frac{1}{2} \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) \cdot dS = -c \int_{\sigma_1} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}_1 \cdot d\sigma_1 + \\ + c \int_{\sigma_2} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}_2 \cdot d\sigma_2 .$$

Ma la (26) porge in questo caso:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) dS = \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) \cdot dS + \\ + \int_{\sigma_2} (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) \frac{dn_2}{dt} \cdot dS_2 - \int_{\sigma_1} (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) \frac{dn_1}{dt} \cdot d\sigma_1 ,$$

perciò si deduce

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{2} (\varepsilon \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) dS = \frac{1}{2} \int_{\sigma_2} \left[\boldsymbol{E} \times \left(\frac{dn_2}{dt} \cdot \varepsilon \boldsymbol{E} - c \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{n}_2 \right) + \right. \\ \left. + \boldsymbol{H} \times \left(\frac{dn_2}{dt} \cdot \mu \boldsymbol{H} + c \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n}_2 \right) \right] d\sigma_2 - \frac{1}{2} \int_{\sigma_1} \left[\boldsymbol{E} \times \left(\frac{dn_1}{dt} \varepsilon \boldsymbol{E} - c \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{n}_1 \right) + \right. \\ \left. + \boldsymbol{H} \times \left(\frac{dn_1}{dt} \mu \boldsymbol{H} + c \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n}_1 \right) \right] d\sigma_1 ,$$

cioè, per le condizioni (27),

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \frac{1}{2}(\varepsilon \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{E}+\mu \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{H})dS=0,$$

da cui segue che l'integrale

$$\int_S \frac{1}{2}(\varepsilon \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{E}+\mu \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{H})dS,$$

è costante rispetto al tempo, cioè, *nella propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse, l'energia del campo compreso fra le due superficie* σ_1 *e* σ_2 *di cui è composta la superficie d'onda, si mantiene costante.*

11. In questa nostra ricerca abbiamo ricondotto la risoluzione delle equazioni differenziali del campo elettromagnetico alla determinazione del vettore hertziano $\boldsymbol{U}$, le cui componenti sono soluzioni delle equazioni (13). È manifesto pertanto che le proprietà che involgono i vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ della forza elettrica e magnetica si tradurranno in altrettante proprietà del vettore $\boldsymbol{U}$ o delle sue componenti. Viene spontaneo perciò di domandarsi che cosa diventano le condizioni (27), quando ai vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ si attribuisce la determinazione espressa dalle relazioni (3).

Facendo la sostituzione. e ricordando che $\dfrac{dn}{dt}$ è la velocità V di avanzamento dell'onda, si ottiene

$$(27')\qquad \left\{\begin{array}{l} V\,\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}) - \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)\wedge \boldsymbol{n}=0,\\ V\,\mathrm{rot}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + c^2[\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}\,(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U})]\wedge \boldsymbol{n}=0, \quad \text{sopra } \sigma. \end{array}\right.$$

Dalla prima di queste, moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ e per $\dfrac{\partial P}{\partial z}$, ricordando che le componenti del vettore $\boldsymbol{U}$ sono indipendenti dall'anomalia θ, che inoltre la superficie d'onda σ è composta di due superficie di rotazione bitangenti, una delle quali, che indichiamo con σ_1, è superficie caratteristica per le componenti U_1 e U_3, mentre l'altra, che indichiamo con σ_2, è superficie caratteristica per la componente U_2, e osservando infine che nel nostro caso è

$$\boldsymbol{n}=\alpha_1\frac{\partial P}{\partial r}+\alpha_3\frac{\partial P}{\partial z},$$

si deducono le due condizioni scalari

$$(28)\qquad \begin{cases} V\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial z}-\dfrac{\partial U_3}{\partial r}\right)+\alpha_3\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial z}-\dfrac{\partial U_3}{\partial r}\right)=0, \\ V\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial z}-\dfrac{\partial U_3}{\partial r}\right)\right]+\alpha_1\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial z}-\dfrac{\partial U_3}{\partial r}\right)=0, \quad \text{sopra } \sigma_1, \end{cases}$$

nelle quali la velocità V è espressa dalla relazione (24).

Analogamente dalla seconda delle (27'), moltiplicando scalarmente per $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial P}{\partial z}$, si hanno le altre due condizioni

$$(28')\qquad \begin{cases} V\cdot\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial z\partial t}+\alpha_3\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=0, \\ V\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rU_2)}{\partial r\partial t}+\alpha_1\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=0, \quad \text{sopra } \sigma_2, \end{cases}$$

ove la velocità V è ora espressa dalla (24').

Non abbiamo considerato le relazioni che si ottengono dalle (27') moltiplicandone ambo i membri scalarmente per $\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$, poichè, come è facile verificare, quella che si ottiene dalla prima di esse, avuto riguardo alla terza delle equazioni differenziali (13) ed alla (24'), risulta combinazione lineare delle equazioni (28'). Analogamente, quella che deriva dalla seconda delle condizioni (27') è conseguenza delle equazioni (28) e delle (24).

§ 4. Integrazione delle equazioni differenziali a cui soddisfano le componenti del vettore di Hertz.

12. Ho già detto che delle equazioni differenziali del tipo (13) ho già dato, in due Note precedenti, le formule generali di rappresentazione degli integrali, risolvendo per esse il problema di CAUCHY.

Per applicarle nel nostro caso consideriamo nello spazio cartesiano rappresentativo (r_0, z_0, t_0) i due *coni caratteristici* Γ e Γ^*, rispettivamente di equazioni

$$(t_0-t)^2-\left(\frac{r_0-r}{V_1}\right)^2-\left(\frac{z_0-z}{V_3}\right)^2=0,$$

$$(t_0-t)^2-\left(\frac{r_0-r}{V_1^*}\right)^2-\left(\frac{z_0-z}{V_3}\right)^2=0,$$

entrambi col vertice nel punto $P(r, z, t)$, e supponiamo che essi taglino su una superficie $G(r_0, z_0, t_0)=0$, due porzioni finite S_0 ed S_0^*, situate dalla parte per cui è $0 \leq t_0 \leq t$.

Indicando inoltre con T e T^* le due porzioni di spazio limitate rispettivamente da detti coni e dalle superficie S ed S^* si hanno, per le equazioni differenziali (13), le soluzioni:

$$\pi U_3(r, z, t) = \frac{1}{V_1}\iint\limits_{S_0}\left[\frac{r_0}{\lambda\mu}\frac{dU_3}{dN_0} + \frac{2r_0(r+r_0)}{V_1 V_3 \lambda^3 \mu} U_3 \cos\alpha\right] dS_0 +$$

$$+\frac{1}{V_3}\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_0}\frac{r_0}{\lambda\mu} U_3 \cos\alpha dS_0 + \frac{V_3}{V_1^2}\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{S_0}\frac{r_0}{\lambda\mu} U_3\cos\beta\cdot dS_0 -$$

$$-\frac{1}{V_1^2 V_3}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_0}\frac{r_0}{\lambda\mu} U_3 \cos\gamma\cdot dS_0 + \frac{1}{V_1^2 V_3}\iiint\limits_{T}\frac{r_0}{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial z_0} W(r_0, z_0, t_0)\cdot dr_0 dz_0 dt_0,$$

$$4\pi r U_1(r, z, t) = \iint\limits_{S_0}\left\{\frac{V_1}{r_0}\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda}\right)\cdot\frac{d(r_0 U_1)}{dN_0} - \frac{8r(r+r_0)}{V_1^2 V_3 \lambda^3\mu} r_0 U_1 \cos\alpha\right\} dS_0 +$$

$$+\frac{V_1^2}{V_3}\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_0}\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda}\right) U_1\cos\alpha\cdot dS_0 + V_3\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{S_0}\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda}\right) U_1\cos\beta\cdot dS_0 -$$

$$-\frac{1}{V_3}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_0}\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda}\right) U_1\cos\gamma\cdot dS_0 + \frac{1}{V_3}\iiint\limits_{T}\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial W}{\partial r_0} dr_0 dz_0 dt_0,$$

$$4\pi r U_2(r, z, t) = \iint\limits_{S_0^*}\left\{\frac{V_1^*}{r_0}\left(\frac{\lambda^*}{\mu^*}-\frac{\mu^*}{\lambda^*}\right)\frac{d(r_0 U_2)}{dN_0^*} - \frac{8r(r+r_0)}{V_1^{*2} V_3 \lambda^{*3}\mu^*} r_0 U_2 \cos\alpha\right\} dS_0^* +$$

$$+\frac{V_1^{*2}}{V_3}\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_0^*}\left(\frac{\lambda^*}{\mu^*}-\frac{\mu^*}{\lambda^*}\right) U_2\cos\alpha\cdot dS_0^* + V_3\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{S_0}\left(\frac{\lambda^*}{\mu^*}-\frac{\mu^*}{\lambda^*}\right) U_2\cos\beta\cdot dS_0 -$$

$$-\frac{1}{V_3}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_0^*}\left(\frac{\lambda^*}{\mu^*}-\frac{\mu^*}{\lambda^*}\right) U_2\cos\gamma\cdot dS_0^*,$$

nelle quali α, β, γ sono gli angoli che la normale ad S_0, ovvero ad S_0^*, (diretta esternamente al campo T, ovvero T^*), forma cogli assi r_0, z_0, t_0, ed è inoltre

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{r+r_0}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - (t-t_0)^2}, \quad \mu = \sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{r-r_0}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2};$$

mentre

$$\frac{d}{dN_0} = \frac{V_1}{V_3}\cos\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{V_3}{V_1}\cos\beta\cdot\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{1}{V_1 V_3}\cos\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial t_0},$$

è il simbolo di *derivazione conormale* nel senso di D'ADHÉMAR. Gli analoghi elementi contrassegnati con asterisco si ottengono dai precedenti sostituendo V_1^* in luogo di V_1.

Le formule precedenti forniscono, nella forma più generale, gli integrali delle equazioni differenziali (13), quando siano assegnati i valori delle funzioni U_3, U_1 ed U_2, nonchè i valori delle *derivate conormali* sulla superficie S_0, ovvero S_0^*.

13. Volendo ora dedurre per il problema che qui ci siamo proposto degli ulteriori risultati, che in parte lumeggiano, sotto una forma nuova e non priva di eleganza, quelle soluzioni elementari, ottenute nelle Note citate, riprendiamo le equazioni differenziali (13), ponendo in esse la funzione arbitraria W uguale a costante, con che esse diventano:

$$(13') \qquad \left\{ \begin{aligned} & V_1^2 \cdot r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_1)\right] + V_3^2 \cdot \frac{\partial^2 (rU_1)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 (rU_1)}{\partial t^2} = 0, \\ & V_1^2 \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_3}{\partial r}\right) + V_3^2 \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = 0, \\ & V_1^{*2} \cdot r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_2)\right] + V_3^2 \cdot \frac{\partial^2 (rU_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 (rU_2)}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Incominciando dalla 2ª delle (13'), se cerchiamo di soddisfare ad essa ponendo

$$U_3 = J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right) \cdot F(s, z, t),$$

ove J_0 è la funzione di BESSEL di ordine zero e di prima specie, ed s è parametro arbitrario, ricordando che $J_0(x)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 J_0}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_0}{dx} + J_0 = 0,$$

si ottiene, per la funzione $F(s, z, t)$, l'equazione

$$(29) \qquad V_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - s^2 F = 0$$

la quale, come è facile verificare, ammette la soluzione

$$F = J_0\left[s\sqrt{(t - t_0)^2 - \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2}\right].$$

Dimodochè si ha la soluzione

$$U_3 = J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right) \cdot J_0\left[s\sqrt{(t - t_0)^2 - \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2}\right],$$

ed è anche soluzione della suddetta equazione

$$(30) \qquad U_3 = \int_0^\infty J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot f_3(s)\cdot ds,$$

ove $f_3(s)$ è funzione arbitraria del parametro s.

Analogamente, posto

$$U_1 = J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot\Phi(s, z, t),$$

ove $J_1(x)$ è la funzione di BESSEL di 1° ordine e di 1ª specie, la cui equazione differenziale è notoriamente

$$\frac{d^2J_1}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_1}{dx}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)J_1=0,$$

si trova che la funzione $\Phi(s, z, t)$ deve soddisfare alla stessa equazione (29). Pertanto risulta

$$U_1 = J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]$$

soluzione della prima delle equazioni (13'), e quindi si ha la soluzione più generale

$$(31) \qquad U_1 = \int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot f_1(s)\cdot ds,$$

ove $f_1(s)$ è un'altra funzione arbitraria del parametro s.

Infine, dal confronto della 1ª delle equazioni (13'), colla 3ª delle medesime, si deduce che è soluzione di quest'ultima la

$$(32) \qquad U_2 = \int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1^*}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot f_2(s)\cdot ds,$$

con $f_2(s)$ al solito funzione arbitraria del parametro s.

14. Se in particolare poniamo nella (30): $f_3(s)=J_0\left(s\frac{r_0}{V_1}\right)\cdot s$, essendo r_0 costante arbitraria, si ha

$$(30') \qquad U_3 = \int_0^\infty J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot J_0\left(s\frac{r_0}{V_1}\right)\cdot sds.$$

Ora, per un noto teorema di SONINE (1), risulta

$$I=\int_0^\infty J_m(as)\cdot J_m(bs)\cdot J_m(cs)\cdot\frac{ds}{s^{m-1}}=$$

$$=\frac{[(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{3m-1}\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot a^m b^m c^m},\quad\left(m>-\frac{1}{2}\right),$$

ove Γ è il noto integrale euleriano di 2^a specie, oppure $I=0$, secondochè si possa formare o no un triangolo avente per lati a, b, c. Perciò nel caso di $m=0$, ponendo $a=\frac{r}{V_1}$, $b=\frac{r_0}{V_1}$, $c=\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}$, e ricordando che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ si ottiene dalla (30′)

$$(30'_1)\qquad U_3=\int_0^\infty J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot J_0\left(s\frac{r_0}{V_3}\right)\cdot s\,ds=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r+r_0}{V_1}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2-(t-t_0)^2}\cdot\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{r-r_0}{V_1}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}},$$

risultato notevolissimo, in quantochè si ritrova, per la 2^a delle equazioni differenziali (13′), la soluzione elementare che già ho trovato direttamente, con tutt'altro metodo, nella prima delle mie due Note citate, soluzione che mi ha reso possibile, per quell'equazione, la risoluzione del problema di CAUCHY.

Non è privo di interesse dare ancora alla soluzione ($30'_1$) un'altra forma, osservando che

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{a-b\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}},\quad\text{per } a>b.$$

Ponendo in questa:

$$a=2\frac{r_0 r}{V_1^2},\quad b=(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2\quad\frac{r^2+r_0^2}{V_1^2},$$

(1) N. SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques etc.* (« Mathematische Annalen », Band XVI, 1880, p. 46).

a meno di un fattore costante, si ottiene

$$(30'_2)\qquad U_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\frac{2r_0r}{V_1^2}-\left[(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2-\frac{r^2+r_0^2}{V_1^2}\right]\cos\theta}.$$

15. Scriviamo ora nella (30'), σ in luogo di r_0/V_1, moltiplichiamo quindi il 2° membro di essa per $\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma$, e integriamo rispetto a σ da zero ad r_0/V_1. Si deduce allora l'altra soluzione

$$(30'')\qquad U_3=\int_0^{\infty}J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot sds\int_0^{r_0/V_1}J_0(s\sigma)\cdot\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma,$$

la quale del resto si ottiene dalla (30) ponendo

$$f_3(s)=s\int_0^{r_0/V_1}J_0(s\sigma)\cdot\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma.$$

In virtù della $(30'_1)$, la (30'') equivale anche alla soluzione

$$(30''_1)\quad U_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{r_0/V_1}\frac{\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{r}{V_1}+\sigma\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2-(t-t_0)^2}\cdot\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{r}{V_1}-\sigma\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}}.$$

Per vedere il significato della funzione $\varphi_3(\sigma)$, osserviamo che per $t=t_0$ e $z=z_0$, o più in generale $z=z_0\pm V_3(t-t_0)$, la (30'') porge:

$$(33)\qquad U_3\left(\frac{r}{V_1}\right)=\int_0^{\infty}J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot sds\int_0^{r_0/V_1}J_0(s\sigma)\cdot\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma.$$

Ora, la nota formula di trasformazione di HANKEL [1]

$$(34)\qquad \int_0^{\infty}J_m(sx)\cdot sds\int_0^{c}J_m(s\sigma)\cdot\varphi(\sigma)\cdot\sigma d\sigma=\begin{cases}\varphi(x), & \text{per } x<c,\\ 0, & \text{»}\ \ x>c;\ (m>-1),\end{cases}$$

nel caso di $m=0$, e per $x=r/V_1$; $c=r_0/V_1$, dimostra che

$$(33')\qquad \int_0^{\infty}J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot sds\int_0^{r_0/V_1}J_0(s\sigma)\cdot\varphi_3(\sigma)\cdot\sigma d\sigma=\varphi_3\left(\frac{r}{V_1}\right),\quad \text{per } r<r_0.$$

---

[1] H. HANKEL, *Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen* (« Math. Annalen », Band VIII, a. 1872, p. 471). Vedi anche SONINE, loco citato.

Confrontando perciò le relazioni (33) e (33'), si deduce che la funzione φ_3 non è altro che il valore che acquista la funzione U_3, definita dalla (30''), all'istante $t = t_0$, nei punti interni al cerchio di raggio r_0, col centro sull'asse z, e situato nel piano $z = z_0$ [ovvero nei punti interni al cerchio di raggio r_0 del piano $z = z_0 \pm V_3(t - t_0)$].

In conclusione la soluzione (30''), ovvero la (30''$_1$), è quella che determina l'integrale della 2ª delle equazioni (13'), quando siano assegnati i valori della funzione U_3 all'istante iniziale $t = t_0$ nei punti interni al cerchio anzidetto.

Se z_0 si fa variare su una superficie chiusa di rotazione intorno all'asse z, di equazione $r_0 = r_v(z_0)$, e nella (30'') si esprime r_0 in funzione di z_0, allora essa dà l'integrale della 2ª delle equazioni (13'), essendo assegnati su quella superficie i valori della funzione U_3 all'istante $t = t_0$.

Osserviamo ancora che se nella (30'') l'integrazione rispetto al parametro σ si eseguisce da zero ad infinito, cioè si pone

$$(35) \qquad U_3 = \int_0^\infty J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right) \cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right] sds \int_0^\infty J_0(s\sigma) \cdot \varphi_3(\sigma)\sigma d\sigma,$$

in questo caso si ha la funzione U_3, per valori assegnati φ_3 di essa, all'istante $t = t_0$, in tutto il piano $z = z_0$.

È notevole il fatto che, in virtù della formula di trasformazione

$$(36) \qquad \int_0^\infty J_0(sx) \cdot J_0(sy) \cdot sds \int_0^\infty J_0(s\sigma) \cdot f(\sigma)\sigma d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta})d\theta,$$

stabilita nella Nota posta in fine, la relazione (35) porge

$$U_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_3\left[\sqrt{\frac{r^2}{V_1^2} + (t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - 2\frac{r}{V_1}\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2} \cdot \cos\theta}\right] d\theta,$$

la quale esprime appunto l'integrale della 2ª delle equazioni (13') per valori arbitrari $\varphi_3\left(\frac{r}{V_1}\right)$, assegnati alla funzione U_3, all'istante $t = t_0$, in tutto il piano $z = z_0$.

16. Vogliamo infine far vedere come dalla relazione (30) si possa dedurre un valore della funzione U_3 che per $t = t_0$ sia singolare in un punto generico $z = z_0$ dell'asse z, e che ha molta analogia con una espressione che il BELTRAMI ha data della funzione potenziale in un anello circolare omogeneo (¹).

(¹) E. BELTRAMI, *Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico* (« Opere Matematiche », vol. III). IDEM, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (idem).

A tal fine poniamo nella (30) $f_3(s) = 1$, e ricordiamo il noto valore della funzione $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\cdot d\theta.$$

Si ha allora dalla (30)

$$U_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot \cos\left(s\frac{r}{V_1}\operatorname{sen}\theta\right)\cdot ds.$$

Ma per note formule [1] è

$$\int_0^{\infty} J_0(sa)\cdot\cos(sb)\cdot ds = 1/\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{per } a > b.$$

perciò, in forma molto semplice ed espressiva, si deduce

$$U_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - \frac{r}{V_1^2}\operatorname{sen}^2\theta}}, \quad \text{per } \sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2} > \frac{r}{V_1},$$

la quale fornisce la funzione U_3, colla singolarità richiesta, mediante un integrale ellittico completo di 1ª specie, corrispondente ad una perturbazione simmetrica che ha origine all'istante $t = t_0$ da un punto $z = z_0$ dell'asse z.

17. Le considerazioni che abbiamo svolte nei numeri precedenti per la funzione U_3, si possono ora estendere alle funzioni U_1 ed U_2.

Osserviamo intanto che derivando il 2° e 3° membro della $(30'_1)$ rispetto ad r, e moltiplicando per $r_0 r$, si ottiene

$$(37) \quad \int_0^{\infty} r_0 r \frac{\partial}{\partial r}\left[J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\right]\cdot J_0\left(s\frac{r_0}{V_2}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot s ds = \frac{2}{\pi} r_0 r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\lambda\mu}\right),$$

ove per semplicità si è posto

$$(38) \quad \lambda = \sqrt{\left(\frac{r+r_0}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - (t-t_0)^2}; \quad \mu = \sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{r-r_0}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}.$$

[1] Cfr. Beltrami, secondo loco citato.

Ma si verifica facilmente che

$$r_0 r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\lambda\mu}\right) = -\frac{V_1^2}{4}\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{\lambda}\right),$$

ed è noto d'altra parte che

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \tag{39}$$

sostituendo perciò nella (37), e integrando rispetto ad r_0, si ricava

$$r\int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot ds\int\left(\frac{sr_0}{V_1}\right)J_0\left(\frac{sr_0}{V_1}\right)\cdot d\left(\frac{sr_0}{V_1}\right) = \frac{V_1}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{\lambda}\right). \tag{40}$$

Ma tenendo conto dell'equazione differenziale a cui soddisfa la funzione $J_0(x)$, nonchè della (39), si ha

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)], \quad \text{e quindi:} \quad \int xJ_0(x)\cdot dx = xJ_1(x);$$

segue perciò dalla (40):

$$r_0 r\int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot J_1\left(s\frac{r_0}{V_1}\right)\cdot s ds = \frac{V_1^2}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Se ora nella (31) poniamo $f_1(s) = sJ_1\left(s\frac{r_0}{V_1}\right)$, in virtù della relazione precedente si ha l'altro risultato notevole

$$U_1 = \int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_1}\right)^2}\right]\cdot J_1\left(s\frac{r_0}{V_1}\right) s ds = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{V_1^2}{r_0 r}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{\lambda}\right), \tag{41}$$

e si ritrova così, per altra via, la soluzione elementare della 1ª delle equazioni differenziali (13'), già considerata nella seconda delle mie Note citate.

Analogamente, dalla (32), per $f_2 = sJ_1\left(s\frac{r_0}{V_1^*}\right)$, si ricava

$$U_2 = \int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1^*}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot J_1\left(s\frac{r_0}{V_1^*}\right)\cdot s ds = \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{V_1^{*2}}{r_0 r}\left(\frac{\lambda^*}{\mu^*} - \frac{\mu^*}{\lambda^*}\right),$$

ove λ^* e μ^* hanno i valori che si ottengono dalle (38), ponendo V_1^* in luogo di V_1.

18. Nello stesso modo con cui dalla (30′) si è dedotta la relazione (30″), così ora dalla (41) si ricava ancora, per la funzione U_1, il valore

$$(43)\qquad U_1=\int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot sds\int_0^{r_0/V_1}J_0(s\sigma)\cdot\varphi_1(\sigma)\cdot\sigma d\sigma.$$

Da questa, per $t=t_0$ e $z=z_0$, [ovvero più in generale per $z=z_0\pm V_3(t-t_0)$], segue

$$U_1\left(\frac{r}{V_1}\right)=\int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot sds\int_0^{r_0/V_1}J_1(s\sigma)\cdot\varphi_1(\sigma)\cdot\sigma d\sigma,$$

la quale, per la trasformazione (34) di HANKEL, mostra che la funzione φ_1 rappresenta i valori arbitrariamente assegnati per la funzione U_1 all'istante $t=t_0$, nell'interno del cerchio di raggio r_0; situato nel piano $z=z_0$, e col centro sull'asse z, i quali sono anche i valori che la funzione U_1 assume nell'interno del cerchio di raggio r_0 appartenente al piano $z=z_0\pm V_3(t-t_0)$.

La (43) dà perciò l'integrale della 1ª delle equazioni (13′) per valori assegnati alla funzione U_1, all'istante $t=t_0$, nell'interno del cerchio di raggio r_0 appartenente al piano $z=z_0$.

Analogamente se alla funzione U_2 si assegnano all'istante $t=t_0$, e nell'interno dello stesso cerchio, i valori $\varphi_2\left(\frac{r}{V_1*}\right)$, si ottiene

$$(44)\qquad U_2=\int_0^\infty J_1\left(s\frac{r}{V_1*}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]sds\int_0^{r_0/V_1*}J_1(s\sigma)\cdot\varphi_2(\sigma)\cdot\sigma d\sigma.$$

Vale anche qui l'osservazione che se z_0 si fa variare su una superficie chiusa di rotazione di equazione $r_0=r_0(z_0)$; e nelle relazioni (43) e (44) si esprime r_0 in funzione di z_0, allora esse forniscono gli integrali della 1ª e 3ª delle equazioni (13′), quando siano assegnati su detta superficie, all'istante $t=t_0$, rispettivamente i valori delle funzioni U_1 ed U_2.

Si vede inoltre che in virtù delle relazioni (41) e (42) le soluzioni (43) e (44) equivalgono rispettivamente alle seguenti:

$$U_1=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{V_1}{r}\int_0^{r_0/V_1}\left\{\sqrt{\frac{\left(\frac{r}{V_1}+\sigma\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2-(t-t_0)^2}{(t-t_0)^2-\left(\frac{r}{V_1}-\sigma\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{(t-t_0)^2-\left(\frac{r}{V_1}-\sigma\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}{\left(\frac{r}{V_1}+\sigma\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2-(t-t_0)^2}}\right\}\cdot\varphi_1(\sigma)\cdot d\sigma,$$

$$U_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{V_1^*}{r} \int_0^{r_0 V_1^*} \left\{ \sqrt{\frac{\left(\frac{r}{V_1^*} + \sigma\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2 - (t - t_0)^2}{(t - t_0)^2 - \left(\frac{r}{V_1^*} - \sigma\right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{(t - t_0)^2 - \left(\frac{r}{V_1^*} - \sigma\right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2}{\left(\frac{r}{V_1^*} + \sigma\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2 - (t - t_0)^2}} \right\} \varphi_2(\sigma) \cdot d\sigma,$$

col significato già noto delle funzioni φ_1 e φ_2.

Se ora facciamo tendere r_0 ad infinito, in virtù della formula di trasformazione

$$(45) \qquad \int_0^\infty J_1(sx) \cdot J_0(sy) \cdot s ds \int_0^\infty J_1(s\sigma) f(\sigma) \cdot \sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) \cdot f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) \cdot d\theta,$$

anch' essa stabilita nella Nota finale, le (43) e (44) porgono

$$(43') \qquad U_1 = \frac{V_1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{r^2}{V_1^2} + R^2 - 2 \frac{r}{V_1} R \cos \theta} \right) \cdot \varphi_1 \left(\sqrt{\frac{r^2}{V_1^2} + R^2 - 2 \frac{r}{V_1} R \cos \theta} \right) \cdot d\theta,$$

$$(44') \qquad U_2 = \frac{V_1^*}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{r^2}{V_1^{*2}} + R^2 - 2 \frac{r}{V_1^*} R \cos \theta} \right) \cdot \varphi_2 \left(\sqrt{\frac{r^2}{V_1^{*2}} + R^2 - 2 \frac{r}{V_1^*} R \cos \theta} \right) \cdot d\theta$$

ove, per semplicità, si è posto

$$R = \sqrt{(t - t_0)^2 - \left(\frac{z - z_0}{V_3}\right)^2}.$$

Le relazioni (43′) e (44′) esprimono rispettivamente gli integrali della 1ª e 3ª delle equazioni (13′), quando delle funzioni U_1 ed U_2 siano assegnati i valori $\varphi_1\left(\frac{r}{V_1}\right)$, e $\varphi_2\left(\frac{r}{V_1^*}\right)$, all' istante $t = t_0$, su tutto il piano $z = z_0$.

Poniamo infine nella (31) $f_1(s) = -\frac{s}{V_1}$, e ricordiamo che

$$J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx}.$$

Si deduce allora

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty J_0\left(s\frac{r}{V_1}\right)\cdot J_0\left[s\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2}\right]\cdot ds,$$

e quindi, per le considerazioni svolte alla fine del n. 16, si ha

$$(43'') \qquad U_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - \frac{r^2}{V_1^2}\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Analogamente dalla (32) si ottiene:

$$(44'') \qquad U_2 = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{(t-t_0)^2 - \left(\frac{z-z_0}{V_3}\right)^2 - \frac{r^2}{V_1^{*2}}\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Le relazioni (43″) e (44″) costituiscono evidentemente due valori delle funzioni U_1 e U_2, singolari all'istante $t = t_0$ nel punto $z = z_0$ dell'asse z, e corrispondono ad una propagazione che ha origine in quel punto all'istante $t = t_0$.

§ 5. Campo elettromagnetico emesso da una sorgente puntiforme.

19. Proponiamoci ora di determinare, sotto forma di serie, i valori delle componenti del vettore di Hertz, soddisfacenti alle equazioni differenziali (13′), nel caso di una propagazione elettromagnetica simmetrica avente origine da un punto dell'asse di simmetria, supponendo per semplicità che la sorgente sia nell'origine $O(r = 0,\ z = 0)$, degli assi, che l'emissione avvenga nell'intervallo di tempo $(0, T)$, e nelle ipotesi seguenti: *a)* Le componenti della forza elettrica e magnetica siano continue, e colle derivate prime limitate, in ogni punto del campo diverso da O; *b)* Le componenti E_1, E_3, H_2, siano identicamente nulle all'esterno dell'ellissoide di rotazione $\rho = t$, ed internamente all'ellissoide $\rho = t - T$, essendo $\rho = \sqrt{\frac{r^2}{V_1^2} + \frac{z^2}{V_3^2}}$; *c)* Le componenti E_2, H_1, H_3, si annullino identicamente all'esterno dell'ellissoide di rotazione $\rho^* = t$, e all'interno dell'ellissoide $\rho^* = t - T$, ove $\rho^* = \sqrt{\frac{r^2}{V_1^{*2}} + \frac{z^2}{V_3^2}}$ [1].

---

[1] Nel caso della propagazione in un mezzo dielettrico omogeneo ed isotropo, nel quale le superficie d'onda epicentrali sono sferiche, l'analoga questione è già stata risolta, com'è noto, in generale, dal prof. R. Einaudi nel suo lavoro: *Sul campo elettromagnetico emesso*

Trasformiamo intanto le equazioni differenziali (13′), ponendo nella 1ª e 2ª di esse

$$\frac{r}{V_1} = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{z}{V_3} = \rho \cos \theta, \quad \left(\rho = \sqrt{\frac{r^2}{V_1^2} + \frac{z^2}{V_3^2}}\right); \tag{46}$$

e nell'ultima

$$\frac{r}{V_1^*} = \rho^* \operatorname{sen} \theta^*, \quad \frac{z}{V_3} = \rho^* \cos \theta^*, \quad \left(\rho^* = \sqrt{\frac{r^2}{V_1^{*2}} + \frac{z^2}{V_3^2}}\right). \tag{46'}$$

Si ottiene così

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(rU_1)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(rU_1)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(rU_1)}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial^2(rU_1)}{\partial t^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 U_3}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U_3}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U_3}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2(rU_2)}{\partial \rho^{*2}} + \frac{1}{\rho^{*2}}\frac{\partial^2(rU_2)}{\partial \theta^{*2}} - \frac{1}{\rho^{*2}}\frac{\partial(rU_2)}{\partial \theta^*}\operatorname{ctg}\theta^* - \frac{\partial^2(rU_2)}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

20. Per determinare nelle ipotesi ammesse le componenti U_1, U_2, U_3 del vettore U, per mezzo delle equazioni differenziali (47), incominciamo da U_3, ponendo

$$U_3 = \sum_0^\infty {}_n F_n^{(3)}(\rho, t) \cdot P_n(\theta). \tag{48}$$

Sostituendo nella seconda delle (47) essa si scinde nelle seguenti equazioni

$$\frac{\partial^2 F_n^{(3)}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F_n^{(3)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 F_n^{(3)}}{\partial t^2} = k_n \frac{F_n^{(3)}}{\rho^2}, \tag{49}$$

$$\frac{d^2 P_n}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{dP_n}{d\theta} + k_n P_n = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{50}$$

ove le k_n possono essere costanti arbitrarie.

Posto ancora

$$\xi = \cos \theta$$

la (50) diventa

$$(1 - \xi^2)\frac{d^2 P_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_n(\xi)}{d\xi} + k_n P_n(\xi) = 0. \tag{50'}$$

---

da una sorgente puntiforme (« Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. 71, a. 1935-1936-XIV). Cfr. anche dello stesso Autore, *Sulle singolarità isolate delle soluzioni della equazione delle onde* (« Memorie della R. Accademia dei Lincei », vol. VI, anno CCCXXXIII-1936-XIV).

È noto che gli autovalori di questa equazione, per ξ variabile da -1 a $+1$, sono dati da $k_n = n(n+1)$. In tal caso essa risulta l'equazione differenziale dei polinomi di LEGENDRE di ordine n [1], definiti dalla

$$P_n(\xi) = \frac{d^n}{d\xi^n}(1-\xi^2)^n, \tag{51}$$

mentre la (49) si trasforma facilmente nella seguente

$$\frac{\partial^2(\rho F_n^{(3)})}{\partial\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2}(\rho F_n^{(3)}) - \frac{\partial^2(\rho F_n^{(3)})}{\partial t^2} = 0. \tag{49'}$$

Cerchiamo ora la soluzione dell'equazione (49') che sia somma di prodotti di una funzione della sola ρ per una funzione *arbitraria* del parametro $s = t - \rho$, ponendo cioè

$$\rho F_n^{(3)} = \sum_0 {}_i \varphi_{ni}(\rho) \cdot \psi_{ni}^{(3)}(s). \tag{52}$$

Sostituendo nella (49') si ottiene

$$\sum_0 {}_i \left\{ \left[\frac{d^2\varphi_{ni}}{d\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\varphi_{ni} \right] \psi_{ni}^{(3)} - 2\frac{d\varphi_{ni}}{d\rho} \cdot \frac{d\psi_{ni}^{(3)}}{ds} \right\} = 0,$$

e ponendo ancora

$$\psi_{ni}^{(3)} = \frac{d^i \psi_n^{(3)}(s)}{ds^i}, \tag{53}$$

con $\psi_n^{(3)}(s)$ funzione arbitraria del parametro s, derivabile quante voolte occorrerà, si ha

$$\sum_0 {}_i \left\{ \left[\frac{d^2\varphi_{ni}}{d\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\varphi_{ni} \right] \psi_{ni}^{(3)} - 2\frac{d\varphi_{ni}}{d\rho} \psi_{n,i+1}^{(3)} \right\} = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà delle funzioni $\psi_{ni}^{(3)}$, si deduce che deve essere

$$\frac{d^2\varphi_{n0}}{d\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\varphi_{n0} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_{ni}}{d\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\varphi_{ni} - 2\frac{d\varphi_{n,i-1}}{d\rho} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

---

[1] L'equazione differenziale dei polinomi di LEGENDRE di ordine n è notoriamente

$$(1-\xi^2)\frac{d^2 P_n^{(m)}}{d\xi^2} + 2(m-1)\cdot\xi\frac{dP_n^{(m)}}{d\xi} + [n(n+1) - m(m-1)]P_n^{(m)} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

e risulta

$$P_n^{(m)} = \frac{d^{n-m}}{d\xi^{n-m}}(1-\xi^2)^n.$$

Per $m = 0$, si ha il polinomio espresso dalla (51).

Queste sono soddisfatte per

$$\varphi_{ni} = \frac{a_{ni}}{\rho^{n-i}}, \qquad (i = 0, 1, 2, ...), \tag{54}$$

ove i coefficienti a_{ni} sono espressi dalla relazione ricorrente

$$a_{ni} = \frac{2(n-i+1)}{i(2n-i+1)} a_{n,\, i-1}, \qquad (i = 1, 2, ...).$$

Da questa risulta che i coefficienti successivi ad a_{nn} sono tutti nulli, e posto $a_{n0} = 1$, si ricava

$$a_{ni} = \frac{2^i n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!\, 2n(2n-1)\ldots(2n-i+1)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{55}$$

In virtù delle relazioni (51), (52), (53), (54) e (55), la (48) porge quindi per la funzione U_3 il valore

$$U_3 = \sum_0^\infty{}_n \frac{d^n}{d\xi^n}(1-\xi^2)^n \cdot \sum_0^n{}_i \frac{a_{ni}}{\rho^{n-i+1}} \cdot \frac{d^i \psi_n^{(3)}}{ds^i}. \tag{56}$$

21 In modo perfettamente analogo, ponendo

$$rU_1 = \sum_0^\infty{}_n F_n^{(1)}(\rho, t) \cdot \Pi_n(\xi), \qquad (\xi = \cos\theta),$$

si deduce dalla 1ª delle equazioni (47) che le funzioni $\Pi_n(\xi)$ e $F_n^{(1)}(\rho, t)$, devono soddisfare alle equazioni differenziali

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Pi_n}{d\xi^2} + n(n+1)\Pi_n = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_n^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{n(n+1)}{\rho^2} F_n^{(1)} - \frac{\partial^2 F_n^{(1)}}{\partial t^2} = 0.$$

La prima è l'equazione differenziale dei polinomi di LEGENDRE $P_n^{(1)}$ (vedi nota numero precedente), e si ha quindi ([1])

$$\Pi_n(\xi) = P_n^{(1)}(\xi) = \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(1-\xi^2)^n,$$

mentre la seconda, analogamente a quanto si è visto per la (49'), porge

$$F_n^{(1)} = \sum_0^n{}_i \frac{a_{ni}}{\rho^{n-i}} \frac{d^i \psi_n^{(1)}}{ds^i}, \qquad (s = t - \rho),$$

([1]) Si osservi che per $n = 0$ l'espressione di $\Pi_0(\xi)$ perde significato. In tal caso risulta, come è evidente, $\Pi_0(\xi) = a\xi + b$, con a, b costanti arbitrarie.

ove i coefficienti a_{ni} sono ancora espressi dalla (55), e le $\psi_n^{(1)}(s)$ sono funzioni arbitrarie del parametro $s = t - \rho$.

Dimodochè risulta

$$U_1 = \frac{1}{r}\sum_0^\infty {}_n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(1-\xi^2)^n \cdot \sum_0^n {}_i \frac{a_{ni}}{\rho^{n-i}} \frac{d^i\psi_n^{(1)}}{ds^i}, \tag{57}$$

e analogamente, dall'ultima delle (47), si ottiene

$$U_2 = \frac{1}{r}\sum_0^\infty {}_n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{*n-1}}(1-\xi^{*2})^n \cdot \sum_0^n {}_i \frac{a_{ni}}{\rho^{*n-i}} \frac{d^i\psi_n^{(2)}}{ds^{*i}}, \tag{58}$$

essendo $\xi^* = \cos\theta^*$, $s^* = t - \rho^*$, . ed ove le $\psi_n^{(2)}(s^*)$ sono al solito funzioni arbitrarie del parametro s^*.

Se ora ricordiamo le espressioni delle componenti della forza elettrica e magnetica in funzione delle componenti U_1, U_2, U_3 del vettore di Hertz (n° 3, § 1), nonchè le condizioni *a*), *b*), *c*) poste nel n° 19, si vede dalle relazioni (56), (57) e (58), che le funzioni $\psi_n^{(3)}(s)$, $\psi_n^{(1)}(s)$, e $\psi_n^{(2)}(s)$, devono essere derivabili $n+3$ volte rispetto ad s (ovvero s^*) ed annullarsi identicamente per $s < 0$ ed $s > T$, (ovvero per $s^* < 0$, ed $s^* > T$), ed essere nulle colle derivate, fino a quelle di ordine $n+2$, per $s = 0$ ed $s = T$, (ovvero per $s^* = 0$, ed $s^* = T$).

NOTA

Dalla serie di Neumann [1]

$$J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}) = J_0(x)\cdot J_0(y) + 2\sum_1^\infty {}_n J_n(x)\cdot J_n(y)\cos n\theta, \tag{I}$$

moltiplicando ambo i membri per $\cos m\theta$, con m un numero intero, e integrando da zero a 2π, si deduce

$$\int_0^{2\pi} J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot\cos m\theta\cdot d\theta = 2\pi J_m(x)\cdot J_m(y),$$

da cui

$$J_m(x)\cdot J_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot\cos m\theta\cdot d\theta. \tag{II}$$

Poniamo ora nella (II), in luogo di x ed y rispettivamente sx ed sy, moltiplichiamo quindi ambo i membri per $s\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma$, ove $f(\sigma)$ è una fun-

[1] C. Neumann, *Theorie der Bessel'schen Functionen* (Leipzig, 1867).

zione arbitraria del parametro σ, e integriamo rispetto al parametro s da zero ad infinito. Si ottiene così

$$\text{(III)} \qquad \int_0^\infty J_m(sx)\cdot J_m(sy)\cdot sds\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot \sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\theta\cdot d\theta\int_0^\infty J_0\left(s\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right)\cdot sds\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma.$$

Ma per la formula (34) di HANKEL, ricordata nel n° 15, risulta

$$\int_0^\infty J_0\left(s\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right)\cdot sds\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma = f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right),$$

perciò la (III) porge la relazione notevole [1]

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty J_m(sx)\cdot J_m(sy)\cdot sds\int_0^\infty J_0(s\sigma)f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right)\cos m\theta\cdot d\theta.$$

In particolare, per $m=0$, si ha la formula (36)

$$\int_0^\infty J_0(sx)\cdot J_0(sy)sds\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right)\cdot d\theta$$

adoperata nel n° 15.

Poichè

$$s\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma J_1(s\sigma)]\cdot f(\sigma)d\sigma,$$

con una integrazione per parti si ricava

$$s\int_0^\infty J_0(s\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot\sigma d\sigma = -\int_0^\infty J_1(s\sigma)\frac{df(\sigma)}{d\sigma}\cdot\sigma d\sigma.$$

[1] La formula (IV), che è una nuova generalizzazione della formula di HANKEL, ha una certa analogia con alcune generalizzazioni che della trasformazione di HANKEL ha dato A. ERDÉLYI nella sua Nota: *Sulla trasformazione di Hankel pluridimensionale* (« Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. 62, 1936-1937). Essa però non rientra nelle formule stabilite da ERDÉLYI.

Derivando allora ambo i membri della (IV) rispetto ad x e ponendo $J'_m(\tau) = \frac{dJ_m(\tau)}{d\tau}$, si deduce

$$-\int_0^\infty J'_m(sx)J_m(sy)\cdot sds\int_0^\infty J_1(s\sigma)\frac{df(\sigma)}{d\sigma}\sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot\cos m\theta\cdot d\theta$$

ovvero, ponendo

$$F(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma},$$

si ha

$$-\int_0^\infty J'_m(sx)\cdot J_m(sy)\cdot sds\int_0^\infty J_1(s\sigma)\cdot F(\sigma)\sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot F(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot\cos m\theta\cdot d\theta.$$

In particolare, per $m = 0$, e ricordando che $J'_0(\tau) = -J_1(\tau)$, si ha la relazione (45)

$$\int_0^\infty J_1(sx)\cdot J_0(sy)\cdot sds\int_0^\infty J_1(s\sigma)\cdot F(\sigma)\cdot\sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot F(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\cdot d\theta,$$

di cui ci siamo serviti nel n° 18.

Ueber Punkte $(n+1)$-ter Ordnung auf Bögen im R_n.

« Ueber differenzierbare Kurven und Bögen III ».

Von PETER SCHERK (Vycapky, C. S. R.).

Dem Andenken meines verehrten Lehrers EDMUND LANDAU.

Einleitung.

Die vorliegenden Bemerkungen wurden angeregt durch eine Arbeit Fräulein SAUTERS [1], in der sie einen differenzierbaren Punkt s auf einem Bogen im n-dimensionalen projektiven Raum R_n betrachtete und die Fälle angab, in denen sich die Differenzierbarkeit von s in dem Sinne automatisch verschärft, dass jede Folge von k-dimensionalen Unterräumen, die den Bogen in wenigstens je $k+1$ gegen s konvergenten Punkten treffen, gegen den k-dimensionalen Schmiegraum von s konvergieren. Dabei setzt sie voraus, dass der Punkt s den Bogen in zwei Teilbögen n-ter Ordnung zerlegt [Definitionen weiter unten].

In dieser Arbeit werden in einem charakteristischen Spezialfall die Häufungsunterräume solcher Folgen angegeben. Wir setzen einerseits voraus, dass der Punkt s die Ordnung $n+1$ hat, — dann ist nach einem Satze von Herrn HAUPT [2] die Zusatzvoraussetzung Fräulein SAUTERS von allein erfüllt —, andererseits fordern wir, um die Punkte, in denen der Bogen von einem Unterraum getroffen wird, mit einer gewissen Vielfachheit zählen zu können, dass nicht nur der Punkt s sondern der ganze Bogen differenzierbar sei. Die Ergebnisse lassen sich unter der SAUTER'schen Zusatzvoraussetzung unschwer auf den Allgemeinfall ausdehnen.

Von den Resultaten sei erwähnt: Geht keiner der k-dimensionalen Unterräume durch s, so enthält jeder Häufungsunterraum den $(k-1)$ — dimensionalen Schmiegraum von s und liegt im $(k+1)$ — dimensionalen. Eine Folge von Unterräumen treffe den Bogen in mindestens je m [verschiedenen oder

(1) SAUTER: *Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven* R_n, Zweite Mitteilung: « Math. Ztschr. », 42 (1937), S. 580 ff.

(2) HAUPT: *Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung,* « Math. Ann. », 108 (1933), S. 126 ff.

zusammenfallenden] gegen s konvergenten Punkten; dann trifft jeder Häufungsunterraum den Bogen mindestens m-fach in s.

Bei den Beweisen wird nicht so sehr benutzt, dass der Punkt s die Ordnung $n+1$ hat, als dass die Hyperebenen durch s dort den Bogen nach bestimmten, — durch ein im wesentlichen von Herrn DENK (3) herrührendes Schema, die Charakteristik von s, festgelegten —, Regeln stützen oder durchsetzen, je nachdem welches die Höchstdimension der in ihnen gelegenen Schmiegräume von s ist. Den Uebergang zwischen Charakteristik und Ordnung vermittelt ein ebenfalls von Herrn DENK stammender Satz.

1. Definitionen und Hilfssätze (4).

1.1. Unter einem Bogen verstehen wir ein eindeutiges und stetiges Bild der Strecke im $R_n [n \geq 1]$. Wir fassen die Bilder verschiedener Punkte der Strecke als verschiedene Punkte des Bogens auf. Dann kann er eineindeutig und stetig auf einen die Strecke durchlaufenden Parameter s bezogen werden. Den zum Parameter s gehörigen Punkt bezeichnen wir gleichfalls mit s.

Eine Umgebung des Parameters s auf der Parameterstrecke hat zum Bild eine Umgebung des Punktes s auf dem Bogen. Konvergiert eine Folge von Parameterwerten gegen den Parameter s, so nennen wir auch die zugehörige Folge von Punkten des Bogens konvergent gegen den Punkt s.

1 2. Die Ordnung eines Bogens ist die obere Grenze der Anzahl seiner Treffpunkte mit einer Hyperebene. Offensichtlich ist die Ordnung eines Bogens im R_n mindestens gleich n. Einen Bogen n-ter Ordnung im R_n nennt man auch einen Elementarbogen.

Die Ordnung eines Punktes s des Bogens ist die einer hinreichend kleinen Umgebung von s.

1.3. Jeder Bogen $(n+1)$-ter Ordnung im R_n setzt sich nach einem Satze von Herrn HAUPT (2) aus einer [bei festem n] beschränkten Anzahl von Elementarbögen zusammen. Die Anzahl der Punkte $(n+1)$-ter Ordnung ist also beschränkt; denn als solche kommen höchstens die Endpunkte der Elementarbögen in Betracht. Ferner ist in dem HAUPT'schen Satze enthalten: Trifft

(3) DENK: *Ueber die elementaren Punkte höherer Ordnung auf Kurven im* R_n, « S.-B. Phys.-med. Soz. Erlangen », **67** (1935), S. 1 ff.

(4) Dieser Abschnitt ist zum Teil der folgenden Arbeit entnommen. SCHERK: *Ueber differenzierbare Kurven und Bögen I. Zum Begriff der Charakteristik.* « Cas. mat. a phys. », **66** (1937), S. 165 ff.

eine Hyperebene eine hinreichend kleine Umgebung eines Punktes $(n+1)$-ter Ordnung in $n+1$ Punkten, so liegen diese nicht alle auf derselben Seite des Punktes.

1.4. Der Punkt s heisst Stütz- bezw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, wenn eine passende Umgebung von s keinen weiteren Punkt mit der Hyperebene gemein hat und die beiden Teilbögen, in die die Umgebung durch s zerlegt wird, auf derselben bezw. auf verschiedenen Seiten der Hyperebene liegen. Entsprechend werde die Hyperebene selbst als Stütz- oder Schnitthyperebene des Bogens in s bezeichnet [5].

1.5. Wir nennen den Punkt s differenzierbar, wenn sämtliche Schmiegräume $L_k^n = L_k^n(s)$ existieren $[k = -1, 0, 1, ... n]$: L_{-1}^n sei der leere Raum. $L_{k-1}^n [0 \leq k < n]$ sei bereits definiert und seine Existenz gefordert. Dann soll jeder k-dimensionale Unterraum durch L_{k-1}^n und einen gegen s rückenden Punkt des Bogens stets konvergieren. Seine Grenzlage bezeichnen wir als den k-dimensionalen Schmiegraum L_k^n. Es ist also L_0^n der Punkt s selbst, L_{n-1}^n seine Schmieghyperebene und L_n^n der volle R_n.

Wir nennen einen Bogen differenzierbar, wenn jeder seiner Punkte differenzierbar ist.

1.6. Die folgenden Bemerkungen gelten für einen differenzierbaren Punkt s auf einem beliebigen Bogen, der die Schmieghyperebene von s nur endlich oft trifft [6].

Jede Hyperebene ist Stütz- oder Schnitthyperebene in s; ist s Stützpunkt bezw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält [7], so bezüglich einer jeden solchen Hyperebene. Daher kann man dem Punkte s eine Charakteristik auf folgende Weise zuordnen: Es sei $0 \leq k < n$; ist s Stütz- bezw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, die genau $L_{k-1}^n(s)$ enthält, so werde $L_k^n(s)$ die Zahl 1 oder 2 zugeordnet, je nachdem eine Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, Schnitt- bezw. Stützhyperebene in s ist oder nicht. Hiermit ist der Folge

$$L_0^n, \; L_1^n, \dots, \; L_{n-1}^n$$

eine Zahlenfolge

$$(a_0, \; a_1, \dots, \; a_{n-1})$$

zugeordnet, eben die Charakteristik von s.

---

[5] Eine nicht durch s gehende Hyperebene ist mithin Stützhyperebene.

[6] SCHERK: a. a. O.

[7] D. h.: $L_k^n(s)$ aber nicht $L_{k+1}^n(s)$.

Aus der Definition der Charakteristik folgt unmittelbar: Hat s die Charakteristik $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, so ist eine Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem $a_0 + \dots + a_k$ gerade oder ungerade ist.

1.7. Der Punkt s sei differenzierbar und zerlege eine passende Umgebung in zwei Elementarbögen; er habe die Charakteristik $(a_0, \dots, a_{n-1})$. Dann hat er nach einem Satze von Herrn DENK [3] genau die Ordnung $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$. Nach dem in 1.3 angeführten Satz von Herrn HAUPT folgt hieraus, dass alle Ziffern der Charakteristik eines differenzierbaren Punktes s der Ordnung n oder $n+1$ im R_n bis auf höchstens eine gleich eins sind. Die Ordnung von s ist dann und nur dann gleich n, wenn alle Ziffern gleich eins sind, sonst gleich $n+1$. Im ersten Falle nennen wir s regulär, im zweiten singulär und zwar $(n-k)$-fach singulär, wenn $a_k = 2$.

1.8. Schliesslich noch zwei Bemerkungen über die Projektion differenzierbarer Punkte [6].

Auf einem Bogen im R_n liege der differenzierbare Punkt s. Wir projizieren den Bogen aus einem Punkt, der auf $L_{m+1}^n(s)$ aber nicht auf $L_m^n(s)$ gelegen ist $[-1 \leq m < n]$. Die Projektion von s ist gleichfalls differenzierbar. Sie habe die Schmiegräume $L_k^{n-1} = L_k^{n-1}(s)$ $[k = -1, 0, 1, \dots, n-1]$. Dann ist L_k^{n-1} die Projektion von L_k^n bezw. L_{k+1}^n für $-1 \leq k < m$ bzw. $m \leq k \leq n$.

Hat s die Charakteristik $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, so hat die Projektion die Charakteristik

$$(a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{für} \quad m = -1,$$
$$(a_0, \dots, a_{n-2}) \quad \text{für} \quad m = n-1$$

und

$$(a_0, \dots, a_{m-1}, a'_m, a_{m+2}, \dots, a_{n-1})$$

mit

$$a'_m \equiv a_m + a_{m+1} \pmod 2$$

sonst.

2. Weitere Hilfssätze.

Wir betrachten in dieser Nummer differenzierbare offene Bögen B^n der Ordnung $n+1$ im R_n [8]. Zunächst zwei allgemeinere Bemerkungen.

2.1. Ein Bogen sei von endlicher Ordnung. Es gebe eine Zahl k derart, dass jede Hyperebene, die endlich viele feste Punkte des Bogens nicht trifft,

[8] Man kann diesen Paragraphen und den grösseren Teil des folgenden überschlagen, wenn man sich in 4 auf solche Punkte $(n+1)$-ter Ordnung beschränkt, deren Ordnung durch die Vielfachheitszählung 3.1 nicht erhöht wird, die also eine Umgebung besitzen, welche von jeder Hyperebene höchstens $(n+1)$-fach getroffen wird. Vgl. Fussnote 12.

höchstens k Punkte mit dem Bogen gemein hat. Dann ist seine Ordnung höchstens gleich k.

Die Behauptung ergibt sich für den R_1 aus dem Satz, dass eine stetige reelle Funktion, die jeden Wert bis auf endlich viele höchstens k-mal, diese aber nur endlich oft annimmt, sie gleichfalls höchstens k-mal annimmt (9). Ist die Behauptung für Bögen im R_{n-1} bewiesen, so ergibt sich durch Projektion aus einem beliebigen nicht auf dem Bogen gelegenen Punkt des R_n, dass jede Hyperebene durch diesen Punkt den Bogen in höchstens k Punkten trifft. Dies gilt für jeden solchen Punkt, woraus die Behauptung folgt.

2.2. Ein Bogen endlicher Ordnung gehe durch den Punkt P. Für alle nach P fallenden Punkte s des Bogens existiere die Tangente $L_1^n(s)$ im Sinne von 1.5; m. a. W., die Gerade durch s und einen irgendwie gegen s rückenden Punkt des Bogens sei stets konvergent. Dann ist die Projektion des Bogens aus P ein Bogen, dessen Ordnung höchstens gleich der um eins verminderten Ordnung des Ausgangsbogens ist.

Beweis: Der Bogen habe die Ordnung m. Offensichtlich ist die Projektion ein Bogen endlicher Ordnung. Weiter folgt aus der Definition der Ordnung [oder aus der Existenz der Tangenten], dass nur endlich viele im Sinne von 1.1 verschiedene Punkte des Bogens im Projektionszentrum inzidieren. Jede Hyperebene durch das [auf dem Bogen gelegene] Projektionszentrum, die seine endlich vielen Tangenten nicht enthält, projiziert sich in eine Hyperebene, die die Projektion höchstens $(m-1)$-fach trifft. Die Voraussetzungen von 2.1 sind mit $n-1$ statt n und $k=m-1$ erfüllt.

Genauer ergibt sich so, dass, wenn j verschiedene Punkte des Bogens in

---

(9) Dieser Satz kann etwa so eingesehen werden. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall (a, b) definiert und stetig. Sie nehme dort alle Werte bis auf endlich viele höchstens je k-mal an. Es sei $f(x_i)=y$ [$i=1,\dots, r$; die x_i paarweise voneinander verschieden] und $f(x)\neq y$ sonst. Wir haben zu zeigen $r\leq k$.

Um y grenzen wir ein Intervall V ab und um die x_i zu einander fremde in (a, b) gelegene Umgebungen U_i, die durch f in das Innere von V abgebildet werden. x_i zerlegt U_i in zwei Intervalle U_i' und U_i'' [$i=1,\dots, r$]. Die Funktion f bildet U_i' bezw. U_i'' auf ein Intervall $f(U_i')$ bezw. $f(U_i'')$ ab, dessen einer Endpunkt y ist, und das ganz dem einen der beiden Teilintervalle angehört, in die V durch y zerlegt wird. Wir bezeichnen den Durchschnitt aller $f(U_i')$ und $f(U_i'')$, die im einen bezw. andern dieser Teilintervalle liegen, mit V_1 bezw. V_2 [Hat V_1 oder V_2 die Länge o, so ist das Folgende passend abzuändern].

Ist etwa ein U_i' gegeben, so hat also entweder jeder Punkt von V_1 oder jeder von V_2 mindestens je ein Urbild in U_i'. Wir wählen je einen Punkt aus V_1 und V_2, der höchstens k Urbilder besitzt. Diese beiden Punkte haben zusammen einerseits höchstens $2k$, andererseits mindestens $2r$ Urbilder; denn in jedem U_i' und U_i'' liegt mindestens je ein Urbild. Hieraus folgt die Behauptung.

das Projektionszentrum fallen, die Ordnung der Projektion höchstens gleich $m-j$ ist.

In der obigen Bemerkung ist insbesondere enthalten, dass die Projektion eines Elementarbogens aus einem differenzierbaren Punkte von ihm wieder ein Elementarbogen und die eines Bogens B^n aus einem seiner Punkte entweder ein Elementarbogen oder ein Bogen B^{n-1} ist.

2.3. Unter einem Doppelpunkt bezw. k-fachen Punkt werde ein Punkt verstanden, in dem zwei bezw. k im Sinne von 1.1 verschiedene Punkte eines Bogens inzidieren. Aus der Definition 1.1 folgt unmittelbar, dass ein Elementarbogen keine mehrfachen Punkte, ein Bogen B^n höchstens einen Doppelpunkt und keinen mehr-als-zweifachen Punkt hat. Die Projektion von B^n aus einem Doppelpunkt ist nach 2.2 ein Elementarbogen $[n \geq 2]$.

Inzidieren die Punkte s_1 *und* s_2 *des Bogens* B^n *in einem Doppelpunkt, so sind sie regulär* $[n \geq 2]$.

Beweis: Der Punkt s_1 habe die Charakteristik $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Die Projektion von B^n aus s_1 ist als Elementarbogen nach 1.7 überall, insbesondere in s_1 regulär. Nach 1.8 hat sie in s_1 die Charakteristik $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Somit ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$. Durch Diskussion der möglichen Lageverhältnisse ergibt sich leicht $a_0 \neq 2$ für $n = 2$ [10]. Ist $a_0 = 1$ schon für B^{n-1} nachgewiesen, so folgt dies für B^n mittels Projektion aus einem Punkte des Bogens, der nicht in die Schmieghyperebene von s_1 fällt [vgl. 1.8].

2.4. Unter einer Spitze werde ein n-fach singulärer Punkt verstanden, also ein Punkt mit der Charakteristik $(2, 1, \ldots, 1)$ [vgl. 1.7].

Jede Gerade durch eine Spitze eines Bogens B^2 trifft ihn, wie leicht zu bestätigen, in höchstens einem weiteren Punkte; ihre Tangente trifft ihn nicht mehr. Da ein differenzierbarer Elementarbogen keine singulären Punkte hat, projiziert sich ein Bogen B^n mit Spitze aus einem nicht in der Schmieghyperebene der Spitze gelegenen Punkte des Bogens nach 2.2 in einen Bogen B^{n-1}.

---

[10] Wir nehmen an, es sei $a_0 = 2$, s_1 habe also die Charakteristik (2,1) [Spitze]. Der Punkt s liege auf dem Bogen B^2 aber nicht auf den Tangenten von s_1 und s_2. Die Verbindungsgerade von s mit dem Doppelpunkt stützt den Bogen in s_1. Stützte sie ihn in s_2 nicht, so träfe eine passende Nachbargerade durch s den Bogen dritter Ordnung B^2 ausser in s noch in mindestens drei Punkten. Somit ist auch s_2 eine Spitze [vgl. 1.7]. Hätten s_1 und s_2 nicht die Tangente gemeinsam, so stützte eine passende Gerade durch den Doppelpunkt den Bogen in s_1 und in s_2; eine passende Nachbargerade träfe ihn in mindestens vier Punkten. Hätten sie schliesslich dieselbe Tangente, so träfe jede ihr hinreichend benachbarte Gerade durch den Doppelpunkt den Bogen ausserhalb von ihm noch zweifach, was gleichfalls unmöglich ist.

Somit ergibt sich durch Induktion: Jede Hyperebene durch eine Spitze des Bogens B^n trifft ihn in höchstens $n-1$ weiteren Punkten; die Tangente der Spitze trifft ihn sonst nicht mehr $[n \geq 2]$.

Aus der ersten Bemerkung folgt, dass die Projektion von B^n aus einer Spitze ein Elementarbogen ist; denn die Projektion erfüllt die Voraussetzungen von 2.1 mit $n-1$ statt n und $k=n-1$. Weiter ergibt sich, dass B^n höchstens eine Spitze und nicht gleichzeitig eine Spitze und einen Doppelpunkt hat. Denn eine Spitze projiziert sich nur aus einem auf ihrer Tangente gelegenen Punkt in einen regulären [1.8], während die Projektion von B^n aus einer zweiten Spitze oder einem Doppelpunkt ein Elementarbogen wäre.

Die Schmieghyperebene einer Spitze trifft den Bogen B^n sonst nicht mehr $[n \geq 2]$. Denn da ein solcher Treffpunkt jedenfalls nicht auf der Tangente der Spitze gelegen wäre, projizierte sich aus ihm einerseits B^n nach 2.2 in einen Bogen höchstens n-ter Ordnung, andererseits die Spitze in einen Punkt, dessen Charakteristik nach 1.8 zwei Zweien enthielte, der also nach 1.7 mindestens die Ordnung $n+1$ hätte.

2.5. Unter einem Wendepunkt werde ein einfach singulärer Punkt von B^n verstanden; er hat die Charakteristik $(1, 1, \ldots, 1, 2)$.

Die Schmieghyperebene bezw. die Hypertangente eines mindestens zweifach singulären bezw. eines Wendepunktes trifft den Bogen B^n sonst nicht mehr. Die Schmieghyperebene eines Wendepunktes trifft B^n in höchstens einem weiteren Punkt, der — wenn vorhanden, — *Stützpunkt bezüglich der Schmieghyperebene ist* $[n \geq 1]$.

Zum Beweis führe man die Behauptungen durch wiederholte Projektion aus dem singulären Punkt auf 2.3, 2.4 und den trivialen eindimensionalen Fall zurück.

3. Vielfachheitszählung.

3.1. Wir benutzen weiterhin folgende Vielfachheitszählung: Der Punkt s habe die Charakteristik $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Ein Unterraum des R_n enthalte genau $L_k^n(s)$ (7) $[0 \leq k < n]$. Dann zählen wir s als $(a_0 + \ldots + a_k)$-fachen Treffpunkt mit dem Unterraum. Ist der Punkt s insbesondere regulär, so wird er mithin $(k+1)$-fach gezählt.

Es kann natürlich vorkommen, dass die Ordnung eines differenzierbaren Bogens durch die Vielfachheitszählung erhöht wird, dass also die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte des Bogens mit einer passenden Hyperebene grösser ist als die Maximalanzahl der Punkte, in denen er von einer Hyperebene getroffen wird ([11]).

3.2. Auf einem beliebigen Bogen liege der differenzierbare Punkt s mit der Charakteristik $(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Wir projizieren den Bogen aus einem Punkte P, der auf $L^n_{m+1}(s)$ aber nicht auf $L^n_m(s)$ gelegen ist $[-1 \leq m < n]$. Die Projektion habe in s die Schmiegräume $L^{n-1}_k(s)$ [vgl. 1.8].

Der Unterraum E durch s und P enthalte genau $L^n_k(s)$; dann ist jedenfalls $k \neq m$. Wir fragen, wie sich die Vielfachheit. mit der der Bogen den Unterraum E in s trifft, von der Vielfachheit unterscheidet, mit der die Projektion E' von E aus P von der Projektion des Bogens in [der Projektion von] s getroffen wird.

Ist $m = -1$, fällt also P mit s_0 zusammen, so wird die Vielfachheit durch die Projektion um a_0 vermindert. Es sei weiterhin $m \geq 0$.

a) Falls $k < m$, so enthält E' genau den Schmiegraum $L^{n-1}_k(s)$; s wird auf E und auf E' gleich oft, nämlich je $(a_0 + \ldots + a_k)$-fach gezählt [vgl. 1.8].

b) Es sei $k > m$; dann liegt genau $L^{n-1}_{k-1}(s)$ in E'; s wird auf E $(a_0 + \ldots + a_k)$-fach, auf E' 1.8 zufolge $(a_0 + \ldots + a_{m-1} + a'_m + a_{m+2} + \ldots + a_k)$-fach gezählt $[a'_m \equiv a_m + a_{m+1} \pmod{2}$; für $k = m+1$ bricht der Ausdruck hinter a'_m ab]. Die Vielfachheit, mit welcher der Treffpunkt s gezählt wird, vermindert sich somit infolge der Projektion um $a_m + a_{m+1} - a'_m$. Diese Zahl ist gleich 0 für $a_m = a_{m+1} = 1$, sonst gleich 2.

In allen Fällen wird die Vielfachheit durch die Projektion nicht erhöht. Einige Folgerungen aus 3.2 ([12]).

3.3. Für jeden differenzierbaren offenen Elementarbogen gilt die Vielfachheitszählung; anders ausgedrückt, die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte eines Elementarbogens im R_n mit einer Hyperebene ist höchstens gleich n $[n \geq 1]$. Denn da die Charakteristik eines jeden Punktes eines solchen Bogens nach 1.7 lauter Einsen enthält und der Bogen sich aus einem seiner Punkte wieder in einen offenen differenzierbaren Elementarbogen projiziert, ergibt sich die Behauptung mittels 3.2 durch Induktion.

([11]) Ob die Ordnung eines Punktes auf einem differenzierbaren Bogen durch die Vielfachheitszählung erhöht wird, ist unbekannt.

([12]) Aus 3.2 ergibt sich sofort: *Die Projektion eines differenzierbaren offenen Bogens, der von jeder Hyperebene höchstens* m-*fach getroffen wird, aus einem seiner Punkte ist ein differenzierbarer offener Bogen, der von jeder Hyperebene höchstens* $(m-1)$-*fach getroffen wird.* Vgl. Fussnote ([8]).

Die Schlussbemerkung von 1.3 gilt somit auch bei Zählung der Treffpunkte gemäss 3.1.

Mit B^n sei hier wie in 2 ein differenzierbarer offener Bogen $(n+1)$-ter Ordnung im R_n bezeichnet.

3.4. Eine Hyperebene habe [mindestens] zwei nicht inzidente Punkte s und s' mit B^n gemein [$n \geq 2$]. Die Vielfachheit, mit der s gezählt wird, möge sich bei Projektion von B^n aus s' verkleinern. Dann muss nach 3.2 s singulär und s' auf der Schmieghyperebene von s gelegen sein. Aus 2.5 entnimmt man, dass s Wendepunkt und die betrachtete Hyperebene die Schmieghyperebene von s ist; sie trifft B^n nur noch in s'.

3.5. *Die Vielfachheit, mit der eine Hyperebene B^n trifft, ist, wenn überhaupt, so um eine gerade Anzahl grösser als $n+1$.*

Beweis: Die Behauptung, richtig für $n=1$, sei bis $n-1$ bewiesen. Eine Hyperebene treffe B^n mehr als $(n+1)$-fach. Es ist nicht möglich, dass die Hyperebene B^n in einem Doppelpunkte und sonst nirgends trifft. Denn Projektion aus dem Doppelpunkt führte B^n in einen Elementarbogen über und verminderte die Vielfachheitszählung der Treffpunkte wegen 2.3 nur um 2; Widerspruch zu 3.3. Es gibt also einen Treffpunkt der Hyperebene, der weder Spitze ist noch in einen Doppelpunkt fällt [vgl. 2.4]. Wir projizieren den Bogen und die Hyperebene aus diesem Punkt. Die Vielfachheit, mit der er gezählt wird, verkleinert sich infolge der Projektion um genau eins. Werden die Vielfachheiten der übrigen Treffpunkte durch die Projektion nicht verkleinert, so ergibt sich die Behauptung aus der Induktionsannahme. Wird aber die Vielfachheit eines andern Treffpunktes durch die Projektion erniedrigt, so folgt die Behauptung aus 3.4 und 2.5.

Wir schliessen noch zwei einfache später nicht benützte Bemerkungen über die Vielfachheitszählung an.

3.6. *Die Vielfachheitszählung gilt für alle Hyperebenen, die B^n nicht in genau zwei verschiedenen Punkten treffen.*

Dies gilt für $n=1$ und sei bis $n-1$ schon bewiesen [$n \geq 2$]. Eine Hyperebene treffe B^n in mindestens drei verschiedenen Punkten insgesamt mehr als $(n+1)$-fach. Läge auf ihr eine Spitze oder ein Doppelpunkt, so projizierte sich B^n aus einem solchen Punkt in einen Bogen $(n-1)$-ter Ordnung im R_{n-1}, der entgegen 3.3 von der Projektion der Hyperebene mehr als $(n-1)$-fach getroffen würde. Wegen 3.4 projizierte sich demnach die Hyperebene aus jedem Treffpunkt in eine Hyperebene, die die Projektion von B^n

mindestens n–fach träfe. Aus der Induktionsannahme folgte, dass die Hyperebene nur in drei Punkten getroffen werden würde, und dass das Projektionszentrum einfacher Treffpunkt wäre. Da jeder der Treffpunkte zum Projektionszentrum gewählt werden kann, wäre die Gesamtvielfachheit der Treffpunkte gleich $3 \leq n+1$.

3.7. Keine Hypergerade trifft den Bogen B^n mehr als n–fach. Diese Behauptung ergibt sich mittels Induktion auf Grund der Bemerkung, dass wegen 3.2 und 2.5 die Vielfachheit eines Treffpunktes des Bogens mit einer Hypergeraden nur dann durch Projektion verkleinert wird, wenn er in das Projektionszentrum fällt.

4. Differenzierbarkeit.

Wir betrachten im Folgenden einen Punkt s der Ordnung n oder $n+1$ auf einem differenzierbaren Bogen im R_n und beweisen, dass sich die gemäss 1.5 definierte Differenzierbarkeit, wie in der Einleitung angedeutet, automatisch verschärft [13].

4.1. Der Punkt P liege nicht in der Schmieghyperebene von s. Dann gibt es einen offenen Teilbogen B^n des ursprünglichen Bogens, der s enthält, nicht durch P geht, höchstens die Ordnung $n+1$ hat, dessen Projektion aus P höchstens von der Ordnung n ist, und der ebenso wie seine Projektion durch s in zwei Elementarbögen zerlegt wird. Denn da s auf dem Bogen bezw. seiner Projektion nach 1.7 und 1.8 höchstens die Ordnung $n+1$ bezw. n hat, gibt es eine Umgebung $(n+1)$-ter bezw. n-ter Ordnung von s; beide Umgebungen setzen sich nach 1.3 aus endlich vielen Elementarbögen zusammen.

Die Vielfachheit, mit der ein Unterraum durch P den Bogen B^n trifft, bleibt bei Projektion aus P erhalten; denn nach 3.2 gilt dies für jeden einzelnen Treffpunkt. Die Vielfachheit, mit der ein nicht durch P gehender Unterraum einer Dimension $< n-1$ den Bogen B^n trifft, wird daher durch die Projektion nicht verkleinert.

Keine Hyperebene durch P trifft B^n mehr als n–fach; die Projektion von B^n aus P wird daher von jeder Hyperebene höchstens n–fach getroffen.

Wäre die gemäss 3.1 gezählte Anzahl der Treffpunkte einer Hyperebene durch P mit B^n nämlich grösser als n, so wäre sie nach 3.5 einerseits $\equiv n+1$

([13]) Ein Teil der Ergebnisse dieser Nummer ist der Arbeit Fräulein SAUTERS entnommen. Vgl. Fussnote ([4]).

(mod 2), andererseits gleich der Anzahl der Treffpunkte der Projektion der Hyperebene mit der Projektion von B'', also $\equiv n$ (mod 2).

4.2 *Ist der Punkt s $(n-k)$-fach singulär, so wird ein passender Bogen um s von jeder Hypergeraden, die $L_k^n(s)$ nicht enthält, höchstens $(n-1)$-fach getroffen* $[0 \leq k \leq n]$.

Beweis: Ein Bogen n-ter Ordnung um einen regulären Punkt wird von jeder Hyperebene höchstens n-fach, erst recht von jeder Hypergeraden höchstens $(n-1)$-fach getroffen. Es sei $0 \leq k \leq n$. Der Punkt Q liege auf $L_{k+1}^n(s)$ aber nicht auf $L_k^n(s)$. Nach 1.8 projiziert sich s aus Q in einen regulären Punkt. Deswegen und nach 1.3 gibt es einen zu Q fremden Bogen $(n+1)$-ter Ordnung um s, der ausserhalb von s regulär ist und sich aus Q in einen Elementarbogen projiziert. Dieser Bogen leistet das Verlangte. Die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte eines Unterraumes durch Q mit dem Bogen vermindert sich nämlich 3.2 zufolge durch Projektion aus Q um 2 oder 0, je nachdem der Unterraum $L_k^n(s)$ enthält oder nicht. Geht der von Q und einer Hypergeraden aufgespannte Unterraum nicht durch $L_k^n(s)$, so trifft er, also auch die Hypergerade, den Bogen höchstens $(n-1)$-fach. Geht er aber durch $L_k^n(s)$, die Hypergerade selbst aber nicht, so wird s auf ihm mindestens zweimal mehr gezählt als auf der Hypergeraden. Da der Unterraum den Bogen höchstens $(n+1)$-fach trifft, trifft die Hypergerade selbst ihn höchstens $(n-1)$-fach [vgl. 3.3].

4.3. Eine Folge von Hyperebenen E_{n-1}^n konvergiere gegen $\overline{E_{n-1}^n}$ und treffe den Bogen in genau je n bezw. $n+1$ [verschiedenen oder zusammenfallenden] gegen s konvergenten Punkten. Jede hinreichend kleine Umgebung wird also von fast allen E_{n-1}^n in genau je n bezw $n+1$ Punkten getroffen. Ihre Endpunkte liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden E_{n-1}^n, somit auch von $\overline{E_{n-1}^n}$, je nachdem n bezw $n+1$ gerade oder ungerade ist. Da dies für jede hinreichend kleine Umgebung gilt, ist $\overline{E_{n-1}^n}$ Stütz- oder Schnitthyperebene in s, je nachdem n bezw $n+1$ gerade oder ungerade ist.

4.4. *Auf einem differenzierbaren Bogen im R_n liege der Punkt s von höchstens $(n+1)$-ter Ordnung. Eine jede einer Folge von Hyperebenen E_{n-1}^n treffe den Bogen in genau n bezw $n+1$* [zusammenfallenden oder verschiedenen] *gegen s konvergenten Punkten. Dann häufen sich die E_{n-1}^n gegen Hyperebenen durch die Hypertangente von s und konvergieren genau dann gegen die Schmieghyperebene von s, wenn s regulär ist, bezw. konvergieren gegen die Schmieghyperebene von s. Ist s Wendepunkt, so kann der erste Fall nicht eintreten* [vgl. 2.5].

Beweis: Die Behauptung, richtig für $n=1$, sei bis $n-1$ bewiesen. Eine Folge von Hypergeraden, die den Bogen in je $n-1$ gegen s rückenden Punkten treffen, konvergiere gegen $\overline{E^n_{n-2}}$. Der Punkt P liege weder auf $\overline{E^n_{n-2}}$ noch in der Schmieghyperebene von s. Dann projiziert sich s aus P in einen Punkt höchstens n-ter Ordnung, und die Hypergeraden werden in Hyperebenen projiziert, die die Projektion des Bogens in mindestens $n-1$ gegen s konvergenten Punkten treffen [vgl. 4.1]. Nach Induktionsannahme geht daher die Projektion von $\overline{E^n_{n-2}}$ aus P durch die Hypertangente der Projektion des Bogens in s; falls der Punkt s höchstens zweifach singulär, seine Projektion also höchstens einfach singulär ist, ist die Projektion von $\overline{E^n_{n-2}}$ sogar gleich der Schmieghyperebene der Projektion von s. Daher geht die Hyperebene durch P und $\overline{E^n_{n-2}}$ durch $L^n_{n-3}(s)$ und für höchstens zweifach singuläres s sogar durch $L^n_{n-2}(s)$. Da P, abgesehen von den obigen Einschränkungen, beliebig gewählt werden kann, haben wir: Ist s höchstens zweifach singulär, so ist $\overline{E^n_{n-2}}$ gleich der Hypertangente, sonst eine Hypergerade durch $L^n_{n-3}(s)$ (14).

Eine Folge von Hyperebenen E^n_{n-1} treffe den Bogen in genau je n bezw. $n+1$ gegen s konvergenten Punkten und strebe gegen $\overline{E^n_{n-1}}$. Da durch irgend $n-1$ auf einer E^n_{n-1} gelegene Punkte des Bogens eine Hypergerade gelegt werden kann, enthält $\overline{E^n_{n-1}}$ den Schmiegraum $L^n_{n-3}(s)$ und, wenn s höchstens zweifach singulär ist, sogar die Hypertangente.

I. Jede E^n_{n-1} treffe den Bogen in genau n nach s strebenden Punkten. Ist s singulär, so ist nach 1.6 die Schmieghyperebene, ist s mindestens dreifach singulär, so jede genau $L^n_{n-3}(s)$ enthaltende Hyperebene Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem $n-1$ gerade oder ungerade ist. Aus dem Obigen und aus 4.3 ergibt sich daher: Ist s mindestens dreifach singulär, so geht $\overline{E^n_{n-1}}$ durch die Hypertangente von s, ist aber nicht die Schmieghyperebene. Das Gleiche gilt dem Obigen und 4.3 zufolge, wenn s zweifach singulär ist. Ist s Wendepunkt, so müsste $\overline{E^n_{n-1}}$ einerseits durch die Hypertangente von s gehen; andererseits wäre jede Hyperebene durch die Hypertangente, auch die Schmieghyperebene, Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem $n-1$ gerade oder ungerade ist; dieser Fall kann daher nicht eintreten. Ist s schliesslich regulär, so geht $\overline{E^n_{n-1}}$ durch die Hypertangente; wegen 1.6 und 4.3 muss $\overline{E^n_{n-1}}$ dann die Schmieghyperebene sein.

(14) Dieser Schluss findet sich bei SAUTER a. a. O.

II. Die E^n_{n-1} treffen den Bogen in je $n+1$ gegen s konvergenten Punkten. Wegen 1.3 und 3.3 können wir voraussetzen, dass nicht alle $n+1$ Treffpunkte auf derselben Seite von s liegen. Wir wählen auf jeder E^n_{n-1} zwei auf verschiedenen Seiten von s gelegene Treffpunkte und legen durch die übrigen $n-1$ eine Hypergerade E^n_{n-2}. Eine Teilfolge der E^n_{n-2} konvergiere gegen die Hypergerade $\overline{E^n_{n-2}}$. Wir beschränken uns auf diese Teilfolge und die zugehörigen E^n_{n-1}.

Wir nehmen an, $\overline{E^n_{n-1}}$ sei nicht die Schmieghyperebene von s. Dann gibt es einen Punkt P, der auf $\overline{E^n_{n-1}}$ aber weder auf $\overline{E^n_{n-2}}$ noch in der Schmieg-hyperebene gelegen ist. Der Punkt s projiziert sich aus P in einen Punkt höchstens n-ter Ordnung. Wir beschränken uns weiterhin auf einen Bogen B^n um s gemäss 4.1 und 4.2 und eine Teilfolge der E^n_{n-1} mit der Eigenschaft, dass B^n von ihnen je $(n+1)$-fach, von den zugehörigen E^n_{n-2} je $(n-1)$-fach getroffen wird. Wie oben bewiesen, geht $\overline{E^n_{n-2}}$ durch $L^n_{n-3}(s)$. Wir können voraussetzen, dass kein E^n_{n-2} durch P geht.

Die Hyperebenen F^n_{n-1} durch P und die E^n_{n-2} konvergieren gegen die Hyperebene durch P und $\overline{E^n_{n-2}}$, also gegen $\overline{E^n_{n-1}}$. Nach 4.1 treffen sie B^n höchstens n-fach. Um die beiden von E^n_{n-1} und F^n_{n-1} eingeschlossenen Winkelräume unterscheiden zu können, zeichnen wir irgend eine s und P nicht treffende Hyperebene als uneigentlich aus und führen eine euklidische Metrik ein. Unter « dem Winkelraum » zwischen E^n_{n-1} und F^n_{n-1} werde der mit dem kleineren Öffnungswinkel verstanden. Mit E^n_{n-1} und F^n_{n-1} konvergiert auch der Winkelraum zwischen ihnen gegen $\overline{E^n_{n-1}}$.

Die Projektion von B^n aus E^n_{n-2} ist ein Bogen zweiter Ordnung auf der Geraden, der von der Projektion von E^n_{n-1} in zwei Punkten getroffen wird. Drehen wir eine Hyperebene um E^n_{n-2} aus E^n_{n-1} in den Winkelraum zwischen E^n_{n-1} und F^n_{n-1} hinein bis nach F^n_{n-1}, so nimmt die Anzahl ihrer Treffpunkte mit B^n um mindestens eins ab. Durch Projektion aus E^n_{n-2} ergibt sich, dass diese Anzahl sich höchstens dann ändert, wenn einer der beiden Treffpunkte durch einen der Endpunkte von B^n hindurchgeht, oder wenn beide Treffpunkte zusammenfallen. Da sie in der Anfangslage auf verschiedenen Seiten von s liegen, folgt hieraus: Es gibt eine Hyperebene G^n_{n-1} durch E^n_{n-2} im Winkelraum zwischen E^n_{n-1} und F^n_{n-1}, die durch s oder einen der beiden Endpunkte von B^n geht und B^n $(n+1)$-fach trifft ([15]). Die G^n_{n-1} konvergieren gegen E^n_{n-1}. Wählen

([15]) Die Endpunkte von B^n je einfach gezählt.

wir den Bogen B^n von vornherein so klein, dass er $\overline{E^n_{n-1}}$ nur in s selbst trifft, so gehen nur endlich viele G^n_{n-1} durch einen der Endpunkte von B^n. Lässt man diese Hyperebenen weg, so erhält man eine Folge von Hyperebenen G^n_{n-1} durch s, die gegen $\overline{E^n_{n-1}}$ konvergieren und B^n in noch n Punkten treffen, von denen mindestens $n-1$ gegen s konvergieren.

Wir projizieren den Raum aus s. Dann geht s selbst in einen Punkt höchstens n-ter Ordnung und jede G^n_{n-1} in eine Hyperebene über, die die Projektion von B^n in mindestens $n-1$ gegen s konvergenten Punkten trifft. Ist s Wendepunkt, so ist die Projektion von $\overline{E^n_{n-1}}$ nach Induktionsannahme Schmieghyperebene, also auch $\overline{E^n_{n-1}}$ selbst. Ist s mindestens zweifach singulär, so geht die Projektion von $\overline{E^n_{n-1}}$ aus s nach Induktionsannahme durch die Hypertangente der Projektion, $\overline{E^n_{n-1}}$ daher durch $L^n_{n-2}(s)$. Wäre die Hyperebene $\overline{E^n_{n-1}}$ nicht die Schmieghyperebene des mindestens zweifach singulären Punktes s, so wäre sie nach 1.6 Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem n gerade oder ungerade ist, im Widerspruch zu 4.3.

4.5. *Auf einem differenzierbaren Bogen im R_n liege der Punkt s von höchstens $(n+1)$-ter Ordnung. Ein jeder einer Folge von m-dimensionalen Unterräumen E^n_m, von denen keiner durch s gehe, treffe den Bogen in mindestens $m+1$* [verschiedenen oder zusammenfallenden] *gegen s konvergenten Punkten* [vgl. 4.2; $0 \leq m \leq n-1$]. *Ist s höchstens $(n-m)$-fach singulär, so konvergieren die E^n_m gegen $L^n_m(s)$. Ist s mindestens $(n-m)$-fach singulär, so häufen sich die E^n_m gegen Unterräume von $L^n_{m+1}(s)$ durch $L^n_{m-1}(s)$ und konvergieren dann und nur dann gegen $L^n_m(s)$, wenn die Hyperebenen durch die E^n_m und irgend einen $(n-m-2)$-dimensionalen Unterraum, der mit den $L^n_{m+2+j}(s)$ nur j-dimensionale Unterräume gemein hat $[j=-1, 0, 1, \ldots, n-m-2]$ sonst aber beliebig gewählt ist, den Bogen schliesslich in $m+2$ gegen s konvergenten Punkten treffen.*

Beweis: Die Behauptung, richtig für $n=1$, sei bis $n-1$ bewiesen. Der Fall $m=n-1$ ist in 4.4 behandelt worden. Es sei $m<n-1$ und der Punkt s genau $(n-k)$-fach singulär $[0 \leq k \leq n]$. Eine Folge von m-dimensionalen Unterräumen E^n_m der angegebenen Art sei konvergent gegen den Unterraum $\overline{E^n_m}$. Der Punkt P liege nicht in der Schmieghyperebene von s. Wir beschränken uns auf einen Bogen B^n um s gemäss 4.1 und 4.2 und eine Teilfolge der E^n_m, die nicht durch P geht und B^n je $(m+1)$-fach trifft ([16]). Sie projiziert sich

([16]) Gingen unendlich viele E^n_m durch P, so projizierten sie sich aus P in $(m-1)$-dimensionale Unterräume, die die Projektion von B^n in mindestens je $m+1$ gegen s konvergenten Punkten träfen; Widerspruch zu 4.2.

aus P in eine Folge von Unterräumen, die die Projektion von B^n aus P mindestens je $(m+1)$-fach treffen. Die Schmiegräume der Projektion von s seien mit $L_j^{n-1}(s)$ bezeichnet.

Ist $m \leq k$, so konvergieren die Projektionen der E_m^n nach Induktionsannahme gegen den Schmiegraum $L_m^{n-1}(s)$. Daher liegt $\overline{E_m^n}$ in dem von P und $L_m^n(s)$ aufgespannten Unterraum. Da P ausserhalb der Schmieghyperebene beliebig gewählt werden kann, muss $\overline{E_m^n}$ gleich $L_m^n(s)$ sein ([14]).

Ist $m \geq k$, so häufen sich die Projektionen der E_m^n nach Induktionsannahme gegen Unterräume von $L_{m+1}^{n-1}(s)$ durch $L_{m-1}^{n-1}(s)$; folglich liegt $\overline{E_m^n}$ in dem von $L_{m+1}^n(s)$ und P aufgespannten Unterraum und $L_{m-1}^n(s)$, falls P nicht auf $\overline{E_m^n}$, in dem von $\overline{E_m^n}$ und P aufgespannten. Dies gilt wieder, von den obigen Einschränkungen abgesehen, bei beliebiger Wahl von P. Daher geht $\overline{E_m^n}$ durch $L_{m-1}^n(s)$ und liegt, falls $m < n-2$, in $L_{m+1}^n(s)$.

Ist $m = n-2$, so wählen wir einen auf $L_{k+1}^n(s)$ aber nicht auf $L_k^n(s)$ gelegenen Punkt Q; s projiziert sich aus Q in einen regulären Punkt, eine passende Teilumgebung mithin in einen Elementarbogen. Die E_{n-2}^n, die nicht durch Q gehen ([17]), projizieren sich aus Q in Hyperebenen, die den Elementarbogen schliesslich in $n-1$ gegen s konvergenten Punkten treffen, also nach 4.4 gegen die Schmieghyperebene des Elementarbogens in s konvergieren, d. h. gegen die Projektion von $L_{n-1}^n(s)$ [vgl. 1.8]. Somit liegt $\overline{E_{n-2}^n}$ in der Schmieghyperebene von s, wie behauptet.

Für $m \geq k$ gilt ferner nach Induktionsannahme: Die von den E_m^n und P aufgespannten Unterräume konvergieren genau dann gegen Unterräume des von P und $L_m^n(s)$ aufgespannten, wenn die Hyperebenen durch die E_m^n und einen $(n-m-2)$-dimensionalen Unterraum durch P, der mit den von den $L_{m+2+j}^n(s)$ und P aufgespannten Unterräumen nur $(j+1)$-dimensionale Unterräume gemein hat, den Bogen schliesslich in $m+2$ gegen s strebenden Punkten treffen. Hieraus folgt, mag P auf $\overline{E_m^n}$ liegen oder nicht: $\overline{E_m^n}$ liegt genau dann in dem von P und $L_m^n(s)$ aufgespannten Unterraum, wenn die Hyperebenen durch die E_m^n und einen $(n-m-2)$-dimensionalen Unterraum durch P, dessen Durchschnitte mit den $L_{m+2+j}^n(s)$ nur j-dimensional sind, den Bogen schliesslich in $m+2$ gegen s konvergenten Punkten treffen. Da auf jedem solchen $(n-m-2)$-dimensionalen Unterraum ein Punkt P ausserhalb der Schmieg-

([17]) Vgl. Fussnote ([16]).

hyperebene von s gewählt werden kann, folgt hieraus das « nur dann » der Behauptung. Das « dann » ergibt sich einfach so: $\overline{E^n_m}$ liegt im Durchschnitt von $L^n_{m+1}(s)$ mit dem von P und $L^n_m(s)$ aufgespannten Unterraum, also in $L^n_m(s)$.

4.6. Die Einschränkung, dass keiner der Unterräume E^n_m durch s geht, ist leicht zu beseitigen. Wir begnügen uns mit der folgenden Bemerkung.

Es sei s ein Punkt höchstens $(n+1)$-ter Ordnung auf einem differenzierbaren Bogen im R_n. Eine Folge von Unterräumen treffe den Bogen in mindestens je m [verschiedenen oder zusammenfallenden] *gegen s konvergenten Punkten. Dann häufen sie sich gegen Unterräume, die den Bogen mindestens je m-fach in s treffen.*

Beweis: Es sei $-1 \leq j \leq m-1$. Es genügt, die Behauptung für die Teilfolge der Unterräume zu beweisen, die den Bogen je m-fach treffen und $L^n_j(s)$ aber nicht $L^n_{j+1}(s)$ enthalten. Der Punkt s sei höchstens $(n-j-1)$-fach bezw. mindestens $(n-j)$-fach singulär. Dann trifft $L^n_j(s)$ den Bogen $(j+1)$-fach bezw. $(j+2)$-fach in s. Das Gleiche gilt für jeden Unterraum der Teilfolge. Der $(m-1)$- bezw. $(m-2)$-dimensionale Unterraum E durch seine m Treffpunkte ist in ihm enthalten. Der Fall, dass die E den Bogen nur in s treffen, ist trivial; wir setzen $m > j+1$ bezw. $m > j+2$ voraus.

Falls $j \geq 0$, projizieren wir den Raum aus $L^n_j(s)$. Dem Punkte s entspricht ein Punkt höchstens $(n-j)$-ter Ordnung im R_{n-j-1}, den wir wieder mit s, und dessen Schmiegräume wir mit $L^{n-j-1}_k(s)$ bezeichnen [$k = -1, 0, \ldots, n-j-1$]. Fast alle E projizieren sich in $(m-j-2)$- bezw. $(m-j-3)$-dimensionale nicht durch s gehende Unterräume, die die ausserhalb von s reguläre Projektion eines Teilbogens in mindestens je $m-j-1$ bezw. $m-j-2$ gegen s konvergenten Punkten treffen, sich 4.5 zufolge daher gegen Unterräume durch $L^{n-j-1}_{m-j-2}(s)$ bezw. $L^{n-j-1}_{m-j-3}(s)$ häufen. Daher häufen sich die E selbst gegen Unterräume durch $L^n_{m-1}(s)$ bezw. $L^n_{m-2}(s)$. Für $j = -1$ folgt unmittelbar aus 4.5, dass sich die E gegen Unterräume durch $L^n_{m-1}(s)$ häufen. Die Häufungsunterräume der E treffen den gegebenen Bogen in s also stets mindestens m-fach, woraus die Behauptung folgt.

4.7. Für die Punkte s der Ordnung n folgt aus 4.6: Konvergieren irgend m Punkte des Bogens gegen s, so strebt der von ihnen aufgespannte $(m-1)$-dimensionale Unterraum gegen $L^n_{m-1}(s)$. Dass dies nicht nur für die inneren sondern auch für die Randpunkte s eines Elementarbogens gilt, ergibt sich daraus, dass er selbst oder ein s enthaltender Teil von ihm über s hinaus zu einem neuen Elementarbogen fortgesetzt werden kann [18]. Da jeder Punkt $(n+1)$-ter Ordnung Randpunkt eines Elementarbogens ist, haben wir:

Der Punkt s *der Ordnung* $\leq n+1$ *liege auf einem differenzierbaren Bogen im* R_n. *Eine Folge von* m*-dimensionalen Unterräumen treffe den Bogen in* $m+1$ *gegen* s *konvergenten Punkten. Die nicht nach* s *fallenden Treffpunkte eines jeden Unterraumes seien sämtlich auf derselben Seite von* s *gelegen. Dann konvergieren die Unterräume gegen* $L_m^n(s)$.

Das Kriterium in 4.5 ist hier automatisch erfüllt. Lässt man alle $m+1$ Punkte zusammenfallen, so ergibt sich die Stetigkeit der Schmiegräume der differenzierbaren Bögen $(n+1)$-ter Ordnung [19].

---

(18) Vgl. SCHERK: *Ueber differenzierbare Kurven und Bögen II: Elementarbogen und Kurve* n*-ter Ordnung im* R_n, « Cas. mat. a phys. », **66** (1937), S. 172 ff.

(19) Folgerungen aus 4 für differenzierbare geschlossene Kurven K^{n+1} der Ordnung $n+1$ im R_n:

Aus 4.7: *Die Schmiegräume der* K^{n+1} *sind stetig.*

Aus 4.6: *Trifft eine Folge von Unterräumen eine* K^{n+1} *mindestens je* m*-fach, so auch jeder Häufungsunterraum von ihnen.*

Le condizioni ai limiti per le lastre elastiche piane.

Memoria di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *L'A. studia le condizioni ai limiti per le lastre piane caricate soltanto sul contorno e completa i risultati del* KIRCHHOFF *e quelli più recenti di* ALMANSI.

1. Si consideri una lastra elastica caricata soltanto sul contorno. Per determinare esattamente la sollecitazione sarebbe necessario assegnare su ogni generatrice del contorno e per ogni punto di questa la forza esterna agente (o lo spostamento impresso). Ma nei solidi che hanno una dimensione piccola rispetto alle altre due, non ha interesse la distribuzione precisa delle forze al contorno bastando conoscere, su ogni generatrice, i valori delle risultanti e ritenendo (in applicazione al principio del DE SAINT VENANT) che due distribuzioni diverse di forze esterne, corrispondenti, su ogni generatrice, alle stesse risultanti, diano luogo, a piccola distanza dal contorno, a differenze di tensione trascurabili.

In queste condizioni, assunto come piano x, y il piano medio della lastra, basta assegnare su ogni generatrice del contorno

a) le risultanti P_x e P_y agenti sul piano medio;

b) la risultante P_z;

c) i momenti M_n e M_t che hanno per asse la normale n al contorno s della lastra in corrispondenza del suo piano medio e la tangente t allo stesso contorno.

Queste cinque condizioni sono state ammesse dal POISSON.

Il KIRCHHOFF invece assegna quattro sole condizioni ai limiti e cioè, oltre alle due indicate in *a)* e che per la sovrapposizione degli effetti possono essere considerate separatamente, anche

$$d) \qquad M_t \quad \text{e} \quad P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s}.$$

Una spiegazione, a carattere intuitivo, di questa discordanza si deve a THOMSON e TAIT (nel « Treatise on Natural Phylosophy ») e al BOUSSINESQ; gli Autori successivi la riproducono tutti senza modificazioni. In una Nota del 1932 [1] (alla quale rimando per le citazioni precedenti) osservavo su un esempio che la spiegazione del THOMSON e TAIT non è sempre esatta perchè, mentre essa afferma che in una lastra caricata soltanto sul contorno da forze corrispondenti a

$$(1) \qquad P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s} = 0, \quad M_t = 0, \quad (P_x = P_y = 0),$$

le sollecitazioni sono trascurabili a piccola distanza dal contorno stesso, si osserva invece che la deformazione del piano medio è nulla in ogni punto del campo (per le lastre sottili) ma non si può affermare che le tensioni tangenziali divengano presto trascurabili.

Successivamente l'ALMANSI, in una serie di Note pubblicate nel 1933 [2] impostava di nuovo la teoria delle lastre grosse e dimostrava che una sollecitazione corrispondente alle (1) si può costruire con una combinazione lineare di tre funzioni u (soddisfacenti alla equazione $\Delta' u = \lambda u$ [3] con λ costante ma diverso da una funzione all'altra) e affermava che le funzioni stesse davano luogo a componenti di tensione trascurabili a piccola distanza dal contorno (soluzioni « evanescenti »).

In questa Memoria io riprendo la questione e, seguendo in parte il procedimento dell'ALMANSI, dimostro che non solo le soluzioni corrispondenti alle (1) dànno luogo a deformazioni nulle del piano medio ma anche tutte quelle altre che corrispondono a una delle seguenti condizioni:

$$(2) \qquad M_t = 0, \quad M_n = 0, \quad P_z \neq 0,$$

$$(3) \qquad M_t = 0, \quad M_n \neq 0, \quad P_z = 0,$$

$$(4) \qquad M_t \neq 0, \quad M_n = 0, \quad P_z = 0.$$

Dimostro pure che non sempre queste soluzioni dànno luogo a componenti di tensione rapidamente « evanescenti » confermando in ciò quanto avevo affermato nella mia Nota del 1932.

Per chiarezza riprenderò dall'inizio il problema delle lastre grosse inflesse riferendo anche la soluzione di LOVE-MICHELL; esporrò poi le soluzioni di

---

(1) G. SUPINO, *Le equazioni ai limiti nella teoria delle lastre sottili.* « Bollettino della Unione Matematica Italiana », Giugno 1932.

(2) *Sulle deformazioni delle piastre elastiche.* Note I e II, « Rend. Lincei », 2° sem. 1932; Note III a VII, ibid., 1° sem. 1933; Note VIII e IX, ibid., 2° sem. 1933.

(3) Scrivo $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Quando si sappia già che una funzione è indipendente da z scrivo Δ in luogo di Δ'.

Almansi e tratterò delle loro caratteristiche. Infine estenderò il risultato alle lastre sottili. È da rilevare che un nuovo problema analitico (riducibile ad una equazione integro-differenziale) risulta dalle condizioni ai limiti studiate al § 3.

§ 1. Notazioni. Equazioni generali.

2. Assumiamo come piano (x, y) il piano medio della lastra; l'asse z sia normale a questo piano e positivo verso l'alto; il triedro x, y, z sia orientato in modo che un osservatore diretto secondo z e rivolto al verso positivo dell'asse y abbia x alla sua destra (triedro destrorso, usuale della meccanica).

Sia a la distanza delle due basi della lastra del piano x, y e s la linea che il contorno sega sullo stesso piano. In un punto di s sia t la tangente ed n la normale nel piano x, y. Il contorno sarà destrorso, t si assume positiva nel verso di percorrenza del contorno e n positiva verso l'esterno; così il triedro n, t, z è orientato come il triedro x, y, z [1].

3. Su ogni generatrice del contorno la risultante delle forze esterne si può decomporre:

a) nelle componenti secondo gli assi x e y giacenti nel piano medio della lastra;

b) nella componente P_z e nei momenti M_y e M_x: la P_z è positiva verso l'alto, i momenti banno per asse rispettivamente y e x e sono positivi se un osservatore orientato come l'asse li vede ruotare come le lancette dell'orologio.

Invece di M_y e M_x si possono considerare i momenti M_n e M_t (per i quali valgono le stesse convenzioni).

Per la sovrapposizione degli effetti si può tener conto separatamente delle condizioni ai limiti *a)* e *b)*. Nel seguito ci occuperemo solo delle condizioni *b)* perchè il caso *a)* è già completameute risolto (con la soluzione del problema di Clebsch) [2].

4. Scriviamo ora le equazioni generali dell'equilibrio elastico (in assenza di forze di massa).

---

[1] Sarebbe ovviamente lo stesso riferirsi alla normale interna e assumere s sinistrorso.

[2] A proposito del quale si può confrontare la mia Nota: *Sul problema di Clebsch*, « Rendic. Lincei », 1° sem. 1932.

Le equazioni indefinite sono:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Le condizioni ai limiti hanno la forma:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sigma_x \cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)+\tau_{zx}\cos(n,z)&=p_x, \\ \tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{yz}\cos(n,z)&=p_y, \\ \tau_{zx}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,z)&=p_z. \end{aligned}$$

Ma, come si sa, le (5) e (6) non determinano ancora la soluzione. Occorre tener conto delle condizioni di congruenza del De Saint-Venant. Esprimendo queste in funzione delle tensioni si ricavano (dopo qualche trasformazione) le equazioni di Beltrami. Posto $H=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$, m coefficiente di Poisson si ha:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Delta\sigma_x+\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0, & \Delta\tau_{zx}+\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\partial z}=0, \\ \Delta\sigma_y+\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0, & \Delta\tau_{yz}=\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial y\partial z}=0, \\ \Delta\sigma_z+\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0, & \Delta\tau_{xy}+\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=0. \end{cases}$$

Cercheremo di determinare le soluzioni possibili in una lastra partendo da posizioni particolari e fondandosi sulle (5), (6) e (7).

§ 2. **Soluzione Love-Michell** (1).

5. Supponiamo che sia nulla in ogni punto della lastra la σ_z, essendo diverse da zero le altre cinque componenti.

Se $\sigma_z=0$ si ricava dalla terza delle equazioni di Beltrami che $\sigma_x+\sigma_y=H$ deve essere lineare in z:

$$H=K_0(x,y)+zK_1(x,y),\quad (\Delta K_0=\Delta K_1=0).$$

(1) J. H. Michell, « London Math. Soc. Proc. », vol. 31 (1900), p. 100. A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Londra 1906, (2ª ed.) e ediz. successive.

Lo stato di sollecitazione corrispondente a K_0 è già stato studiato a proposito del problema di CLEBSCH e non ha interesse per le condizioni ai limiti *b)*; resta da determinare la sollecitazione più generale corrispondente a K_1.

Per le equazioni di BELTRAMI è

$$\Delta\tau_{zx} = -\frac{m}{m+1}\frac{\partial K_1}{\partial x}, \quad \Delta\tau_{yz} = -\frac{m}{m+1}\frac{\partial K_1}{\partial y},$$

e da queste (ricordando che $\Delta K_1 = 0$ e che τ_{zx}, τ_{yz} sono nulle sulle basi) segue come soluzione possibile [1]

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \tau_{zx} = -\dfrac{m}{2(m+1)}(z^2 - a^2)\dfrac{\partial K_1}{\partial x}, \\ \tau_{yz} = -\dfrac{m}{2(m+1)}(z^2 - a^2)\dfrac{\partial K_1}{\partial y}. \end{cases}$$

Le prime due equazioni indefinite divengono allora

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{m}{m+1} z \frac{\partial K_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{m}{m+1} z \frac{\partial K_1}{\partial y},$$

mentre la terza è automaticamente soddisfatta.

Segue di qui (tenendo conto che la soluzione del sistema precedente quando i secondi membri siano eguali a zero è una funzione di AIRY):

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \sigma_x = z\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\psi + \dfrac{2m-1}{6(m+1)} z^2 K_1\right) + \dfrac{mz}{m+1} K_1, \\ \sigma_y = z\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\psi + \dfrac{2m-1}{6(m+1)} z^2 K_1\right) + \dfrac{mz}{m+1} K_1, \\ \tau_{xy} = -z\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\psi + \dfrac{2m-1}{6(m+1)} z^2 K_1\right). \end{cases}$$

Deve essere $\Delta\Delta\psi = 0$ ed inoltre $\Delta\psi = -\dfrac{m-1}{m+1} K_1$.

---

(1) Volendo la soluzione più generale dovremmo aggiungere alla prima della (8) una funzione *armonica* arbitraria ψ_1, alla seconda una funzione armonica ψ_2. Dalle equazioni indefinite si ricaverebbe poi $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}$; e successivamente si otterebbero le espressioni per σ_x, σ_y, τ_{xy}. In definitiva si potrebbe verificare che tali espressioni coincidono con le soluzioni di ALMANSI che saranno esposte al § 3. Concludiamo perciò affermando che la soluzione LOVE-MICHELL più la soluzione ALMANSI danno la soluzione elastica più generale corrispondente a $\sigma_z = 0$.

6. Le condizioni ai limiti si esprimono facilmente. È chiaro che è $P_x = P_y = 0$. Ricerchiamo P_z, M_x e M_y. Su ogni generatrice del contorno si ha (in base alle (6) essendo $\cos(n, z) = 0$)

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = p_x \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = p_y, \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = p_z, \end{array}\right. \tag{10}$$

ed inoltre (dato l'orientamento scelto per gli assi coordinati e per i momenti)

$$\int_{-a}^{+a} p_z dz = P_z, \quad \int_{-a}^{+a} z p_x dz = -M_y, \quad \int_{-a}^{+a} z p_y dz = M_x. \tag{11}$$

Analogamente è

$$\int_{-a}^{+a} z p_n dz = -M_t, \quad \int_{-a}^{+a} z p_t dz = M_n.$$

Dalle (8), (9), (10), (11) si deduce, tenendo presente che nel nostro caso è

$$\cos(n, x) = \cos(t, y), \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x),$$

$$M_x = -\frac{a^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(2\psi + \frac{2m-1}{5(m+1)} a^2 K_1\right) - \frac{2a^3}{3}\frac{m}{m+1} K_1 \frac{dx}{dt},$$

$$M_y = -\frac{a^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial y \partial t}\left(2\psi + \frac{2m-1}{5(m+1)} a^2 K_1\right) - \frac{2a^3}{3}\frac{m}{m+1} K_1 \frac{dy}{dt},$$

$$P_z = \frac{2a^3}{3}\frac{m}{m+1}\frac{\partial K_1}{\partial n},$$

od anche, tenendo conto che

$$M_t = M_y \cos(t, y) + M_x \cos(t, x),$$

$$M_n = M_y \cos(n, y) + M_x \cos(n, x),$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_t = -\dfrac{a^3}{3}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(2\psi + \dfrac{2m-1}{5(m+1)} a^2 K_1\right) - \dfrac{2a^3}{3}\dfrac{m}{m+1} K_1, \\ M_n = -\dfrac{a^3}{3}\dfrac{\partial^2}{\partial t \partial n}\left(2\psi + \dfrac{2m-1}{5(m+1)} a^2 K_1\right), \\ P_z = \dfrac{2a^3}{3}\dfrac{m}{m+1}\dfrac{\partial K_1}{\partial n}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Essendo $K_1 = -\dfrac{m+1}{m-1}\Delta\psi$ e ψ armonica del 2° ordine non è possibile, in generale, soddisfare a tutte e tre le condizioni poste, ma si può soddisfare a due di esse, ottenendo una soluzione che differisca dalla effettiva per condizioni al contorno tipo (1) o (2) o (3) o (4). Usualmente si assegnano M_t e $\frac{\partial M_n}{\partial s} - P_z$; cioè $\left(\text{posto}\ \ \chi = \frac{2a^3}{3}\psi + \frac{2m-1}{15(m+1)} a^5 K_1,\ \ \Delta\chi = \frac{2a^3}{3}\Delta\psi = -\frac{2a^3}{3}\frac{m-1}{m+1}K_1\right)$ si soddisfa alle condizioni

$$M_t = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi + \frac{m}{m-1}\Delta\chi, \qquad \frac{\partial M_n}{\partial s} - P_z = -\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial n}\chi + \frac{m}{m-1}\frac{\partial \Delta\chi}{\partial n},$$

ma si possono assegnare, indifferentemente, anche condizioni diverse come abbiamo già accennato e come mostreremo in seguito.

§ 3. Le soluzioni di Almansi.

7. Se si vogliono soddisfare, per una lastra inflessa, tutte e tre le condizioni imposte su una generatrice (e cioè P_z, M_t, M_n essendo $P_x = P_y = 0$) occorre considerare oltre alla soluzione ora esposta anche un'altra soluzione dovuta ad ALMANSI.

Si ponga:

$$(13)\qquad \begin{cases} \sigma_x = 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, & \sigma_y = -2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \qquad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, & \tau_{zx} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}, \qquad \tau_{yz} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}, \end{cases}$$

essendo φ una funzione armonica di x, y, z. La derivata $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ deve annullarsi per $z = \pm a$ se si vuole che le basi siano scariche.

Tenendo conto che si ha identicamente

$$\tau_{xy} = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \Delta'\varphi = -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \Delta'\varphi,$$

si può verificare che sono soddisfatte le equazioni indefinite dell'equilibrio e le equazioni di BELTRAMI (2).

Gli spostamenti sono dati dalle formule (nelle quali E indica il modulo di elasticità):

$$(14)\qquad u = \frac{2(m+1)}{Em}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{2(m+1)}{Em}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = 0.$$

Se φ è dispari in z si ha sul piano medio $u = v = w = 0$.

8. Un tipo di funzione φ che utilizzeremo in seguito è il seguente:

$$\varphi = u_k(x, y) \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{2a},$$

con k intero e dispari $\left(\text{perchè sia } \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=\pm a} = 0\right)$.

Dalla condizione $\Delta\varphi = 0$ risulta

$$\Delta' u_k = \lambda_k u_k, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2.$$

Poniamo ora

$$M_{11} = \int_{-a}^{+a} z\sigma_x dz, \quad M_{12} = \int_{-a}^{+a} z\tau_{xy} dz, \quad M_{22} = \int_{-a}^{+a} z\sigma_y dz.$$

Data la scelta di φ si ha

$$M_{11} = 2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} z \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{2a} dz.$$

Ma

$$\int_{-a}^{+a} z \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{2a} dz = \pm 2 \left(\frac{2a}{k\pi}\right)^2 = \pm \frac{2}{\lambda_k}$$

(segno + se $k = 4m + 1$, $-$ se $k = 4m + 3$)

e quindi possiamo scrivere

$$M_{11} = \pm \frac{4}{\lambda_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}, \quad M_{22} = \pm \frac{4}{\lambda_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}, \quad M_{12} = \pm \frac{2}{\lambda_n}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right).$$

È poi

$$P_1 = \int_{-a}^{+a} \tau_{zx} dz = \pm 2 \frac{\partial u_k}{\partial y}, \quad P_2 = \int_{-a}^{+a} \tau_{yz} dz = \pm 2 \frac{\partial u_k}{\partial x}$$

perchè

$$\left[\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{2a}\right]_{-a}^{+a} = \pm 2$$

(+ se $k = 4m + 1$, $-$ se $k = 4m + 3$).

Conviene scrivere le condizioni ai limiti riferendosi alla funzione $\bar{u}_n = \pm \frac{2u_k}{\lambda_k}$.
Si ha allora

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} & -2 \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial t^2} + \lambda_k \bar{u}_k = M_n \\ & 2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} = M_t \\ & \frac{\partial \lambda_k u_k}{\partial t} = P_z . \end{aligned}\right.$$

9. Consideriamo ora tre numeri positivi λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1)$ e tre funzioni u_1, u_2, u_3 soddisfacenti alle condizioni

(16) $$\Delta u_1 = \lambda_1 u_1, \quad \Delta u_2 = \lambda_2 u_2, \quad \Delta u_3 = \lambda_3 u_3.$$

Vediamo se è possibile soddisfare con esse a condizioni del tipo seguente (valide sul contorno del campo):

(17) $$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = A \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(u_1 + u_2 + u_3) = B \\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = C. \end{cases}$$

Consideriamo perciò l'integrale esteso al contorno s:

$$L = \int_s \left\{ \frac{d\alpha}{dn}(u_1 + u_2 + u_3) + \beta \frac{\partial(u_1 + u_2 + u_3)}{\partial n} + \frac{d\gamma}{dn}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) \right\} ds$$

nel quale α, β, γ sono funzioni per ora indeterminate e trasformiamolo in in integrale esteso al campo σ (per mezzo del lemma di GREEN). Scriviamo per brevità

$$U = u_1 + u_2 + u_3 \quad (\text{onde } \Delta U = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3)$$

$$L = \int_\sigma \left\{ \Delta\alpha \cdot U + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \beta \cdot \Delta U + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \Delta\gamma \cdot \Delta U + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial \Delta U}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial \Delta U}{\partial y} \right\} d\sigma.$$

Poniamo ora

$$\alpha = \Delta\Delta U - k_1 \Delta U + k_2 U$$
$$\beta = -(\Delta\Delta u - k_1 \Delta u)$$
$$\gamma = \Delta U$$

essendo

$$\Delta\Delta U = \lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2 + \lambda_3^2 u_3$$
$$k_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad k_2 = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2$$

ed osserviamo che

$$\Delta\Delta\Delta U - k_1 \Delta\Delta U + k_2 \Delta U = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 U.$$

Allora l'integrale L si riduce a

$$L = \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial y}\right)^2 + k_1(\Delta U)^2 + k_2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 U^2 \right\} d\sigma$$

cioè a una somma di soli quadrati. Ora quando L si esprime come integrale di contorno esso è nullo se sono nulli $u_1 + u_2 + u_3$, $\dfrac{\partial}{\partial n}(u_1 + u_2 + u_3)$,

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, se L si esprime come integrale di campo allora si annulla soltanto se è zero $u_1 + u_2 + u_3 = U$. Concludiamo che se esiste una soluzione per le (17) tale soluzione è unica in quanto se nelle (17) stesse si pongono i secondi membri uguali a zero, allora è L uguale a zero e quindi (per l'integrale di campo) $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ in tutto il campo.

Per dimostrare l'esistenza della soluzione cominciamo col ricordare che dati i valori che una funzione u assume sul contorno, la soluzione per u esiste ed è unica.

Se dunque non fosse possibile soddisfare alle (17) con A, B, C arbitrari ciò significherebbe soltanto che con i valori scelti di λ_1, λ_2. λ_3 si trovano tre funzioni (del tipo (16)) che non sono tra loro completamente indipendenti sicchè fissati, per esempio, A e C resta determinato il valore di B sul contorno o, se ciò non è, resta comunque circoscritto il campo di variabilità di B (cioè può essere assegnato un insieme di valori di B che renda impossibile la soluzione).

Ora nella prima ipotesi (B determinato dai valori assunti da A e C) con le tre funzioni u_1, u_2, u_3 possiamo soddisfare in infiniti modi alle due condizioni relative ad A e C sicchè se il valore di B fosse quello compatibile con i valori assegnati da A e C avremmo non una soluzione sola, ma infinite soluzioni del problema contrariamente a quanto si è dimostrato precedentemente. Non posso invece escludere che i valori B (per A e C assegnati) possano essere in qualche modo condizionati in dipendenza di A e di C; solo osservo che nel cerchio e nel rettangolo si verifica, costruendo la soluzione, che questa esiste pur assegnando arbitrariamente i valori di A, B e C (1).

§ 4. Le condizioni ai limiti per le lastre.

10. Sin qui, ci siamo riferiti a risultati in gran parte noti. Ammettiamo ora l'esistenza di tre funzioni u_1, u_2, u_3 con le quali possiamo soddisfare alle condizioni ai limiti (17) quando A, B, C sono dati sul contorno come funzioni a un sol valore dei punti del contorno stesso.

Ciò vuol dire che è possibile soddisfare con tre funzioni u alle condizioni ai limiti date sul contorno di una lastra elastica piana quando dalle (15) si possa risalire alle (17) ottenendo valori di A, B, C continui.

(1) Osserviamo che il problema di determinare tre funzioni u_1, u_2, u_3 (con λ_1, λ_2, λ_3 prefissati) in funzione di A, B, C non si riconduce ad un'equazione di FREDHOLM ma ad una equazione integro-differenziale, che non so se si sappia finora risolvere.

Consideriamo ora alcuni casi particolari notevoli. Scriviamo le (15) nella forma equivalente

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} -2\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = M_n - C \\ 2\dfrac{\partial B}{\partial t} = M_t \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} = P_z\,. \end{cases}$$

Segue

$$\text{(19)} \qquad C = \int_0^s P_z ds + q_0 \qquad (q_0 \text{ cost. arbitraria})$$

e C è continuo su s perchè $\int_s P_z ds = 0$ per l'equilibrio secondo la z.

Supponiamo ora che sia $M_t = 0$, $\dfrac{\partial M_n}{\partial s} = P_z$. Allora per la seconda delle (18) si può porre $B = 0$ mentre risulta dalla prima che $\dfrac{\partial^3 A}{\partial t^3} = 0$ e quindi anche A può essere posto uguale a zero. Si conclude che se $\dfrac{\partial M_n}{\partial s} = P_z$. $M_t = 0$ la soluzione è esprimibile con tre funzioni u. Si può quindi risolvere completamente il problema al contorno per la lastra servendosi di una soluzione LOVE-MICHELL per soddisfare alle due condizioni $\dfrac{\partial M_n}{\partial s} - P_z$ ed M_t; servendosi di tre soluzioni u tipo ALMANSI per soddisfare alla sollecitazione residua. Questa ultima sollecitazione dà luogo a spostamenti nulli del piano medio mentre le caratteristiche delle componenti di tensione saranno studiate più particolarmente in seguito (v. n.º 12). Comunque resta rigorosamente dimostrato, che per la deformazione del piano medio di una lastra grossa sono equivalenti due sollecitazioni che differiscono tra loro per valori di M_n e P_z tali che sia $\dfrac{\partial M_n}{\partial s} - P_z = 0$ (come aveva affermato il KIRCHHOFF riferendosi alle lastre sottili).

11. Resta ancora da chiarire un dubbio notevole. È proprio necessario soddisfare al contorno alle due condizioni

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} - P_z \quad \text{e} \quad M_t$$

oppure è sufficiente soddisfare a due qualunque delle tre condizioni ai limiti M_n, M_t e P_z, rimanendo la terza soddisfatta con tre funzioni u cioè con una soluzione a deformazione nulla del piano medio?

Per rispondere a questa domanda non vi è che provare a costruire tre funzioni A, B, C continue sul contorno e corrispondenti a due (qualunque) condizioni ai limiti nulle e alla terza arbitraria (purchè equilibrata).

Partiamo dunque dalle (18) e supponiamo dapprima $M_n = M_t = 0$, $P_z \neq 0$. Dalla (19) risulta che C è continuo su s, mentre dalla seconda delle (18) si ricava $B =$ cost. e dalla prima risulta

$$2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = C = \text{funzione continua.}$$

Sia ora

$$\int_0^s P_z ds = \varphi.$$

Segue

$$2\frac{\partial A}{\partial t} = \int_0^s \varphi ds + q_0 s + q_1$$

e possiamo disporre della costante q_0 in modo che sia $\int_0^s \varphi ds + q_0 s = \psi(s)$ essendo $\psi(s)$ continua su s. Inoltre segue

$$2A = \int_0^s \psi ds + q_1 s$$

e possiamo ancora disporre di q_1 in modo che A risulti continuo su s. Abbiamo dunque, in questo caso che A, B, C sono continui su s sicchè il problema posto ammette una soluzione $U (= u_1 + u_2 + u_3)$.

Supponiamo ora $M_t = P_z = 0$, $M_n \neq 0$. Si può porre $C = q_1$ e $B = q_0$ e quindi dalla prima delle (18) segue

$$2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = - M_n + q_1$$

$$2\frac{\partial A}{\partial t} = -\int_0^s M_n ds + q_1 s + q_2$$

e possiamo disporre di q_1 in modo che sia

$$-\int_0^s M_n ds + q_1 s = \psi_1(s) \text{ con } \psi_1(s) \text{ continua su } s.$$

Si ha allora

$$2A = \int_0^s \varphi_1(s)ds + q_2 s + q_3$$

e si può disporre di q_2 in modo che A sia continuo su s. Anche in questo caso il problema posto ammette una soluzione tipo ALMANSI.

Un poco diverso è il caso in cui sia $M_n = P_z = 0$, $M_t \neq 0$.

Dalla prima e dalla terza delle (18) si ricava al solito, che si può porre $C = 0$, $A = 0$ ma per poter scrivere, in base alla seconda delle (18) stesse,

$$B = \int_0^s M_t ds + q \quad \text{occorre che sia} \quad \int_s M_t ds = 0.$$

Senonchè una soluzione tipo LOVE-MICHELL che soddisfi a condizioni P_z e M_n assegnate consente di soddisfare anche a un $\int_s M_t ds = K$ essendo K fissata *a priori*.

Infatti in una soluzione LOVE-MICHELL si ha nel contorno

$$\frac{2a^3}{3} \frac{m}{m+1} \frac{\partial K_1}{\partial n} = P_z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial n}\left(\frac{2a^3}{3}\psi + \frac{2m-1}{15(m+1)} a^5 K_1\right) = M_n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{3a^2}{3}\psi + \frac{2m-1}{5(m+1)} a^5 K_1\right) + \frac{2a^3}{3} \frac{m}{m+1} K_1 = M_t$$

$$\left(K_1 = -\frac{m+1}{m-1}\Delta\psi;\ \Delta\Delta\psi = 0\right).$$

Dalla prima di queste equazioni si ottiene K_1 *a meno di una costante*; questa costante si può determinare ponendo

$$\int_s M_t ds = \frac{2a^3}{3} \frac{m}{m+1} \int_s K_1 ds,$$

dopo di che si ottiene la ψ in base ai valori dati di M_n. La soluzione LOVE-MICHELL così trovata corrisponde esattamente ai valori assegnati sul contorno per P_z e M_n, non soddisfa ai valori di M_t, ma la differenza tra i valori assegnati per M_t e quelli di M_t' risultanti dalla soluzione LOVE è tale che $\int_s (M_t - M_t')ds = 0$. Si può dunque completare la soluzione con una funzione U.

Queste considerazioni mostrano che le condizioni al contorno possono essere soddisfatte oltre che nel modo indicato al n.° precedente, anche in altri modi bastando sempre assegnare *due* sole condizioni perchè la terza sia soddisfatta con tre funzioni u cioè con una sollecitazione che *lascia invariato il piano medio.*

È appena necessario osservare che questi varî modi sono sostanzialmente equivalenti in quanto due soluzioni LOVE–MICHELL corrispondenti alle stesse *tre* condizioni al contorno M_n, M_t e P_z, ma ottenute soddisfacendo a due diverse di esse, differiscono tra loro soltanto per delle soluzioni U e quindi dànno luogo a deformazioni che nei limiti di approssimazione ammessi sono praticamente eguali.

Precisando meglio, supponiamo di aver ottenuto la soluzione L_1 soddisfacendo alle condizioni ai limiti M_t, $P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s}$ e la soluzione L_2 con le condizioni M_t e M_n. Si osserva subito che con una soluzione $L_1 + U$ si soddisfa alle tre condizioni M_t, M_n, P_z; alle stesse condizioni si soddisfa con una soluzione $L_2 + \overline{U}$. Dunque L_1 e L_2 differiscono tra loro per le deformazioni provocate da U e U (che lasciano invariato il piano medio); inoltre esse possono differire per il fatto che $L_1 + U$ e $L_2 + U$ soddisfano sul contorno alle stesse *risultanti* su ogni generatrice (e non alle stesse forze): ma questa differenza è trascurabile per il principio del DE SAINT–VENANT.

§ 5. Caratteristiche delle funzioni u.

12. Si è già osservato in base alle (14) che una soluzione dipendente da una funzione u dà sempre luogo ad una deformazione nulla del piano medio. Ma per poter precisare il comportamento delle componenti di tensione (espresse in funzione delle u per mezzo delle (13)) occorre considerare più da vicino l'andamento delle u stesse. In proposito notevoli limitazioni sono state rilevate da ALMANSI.

Indicando con U il massimo modulo di una u sul contorno si ha in un punto interno alla minima distanza r dal contorno stesso

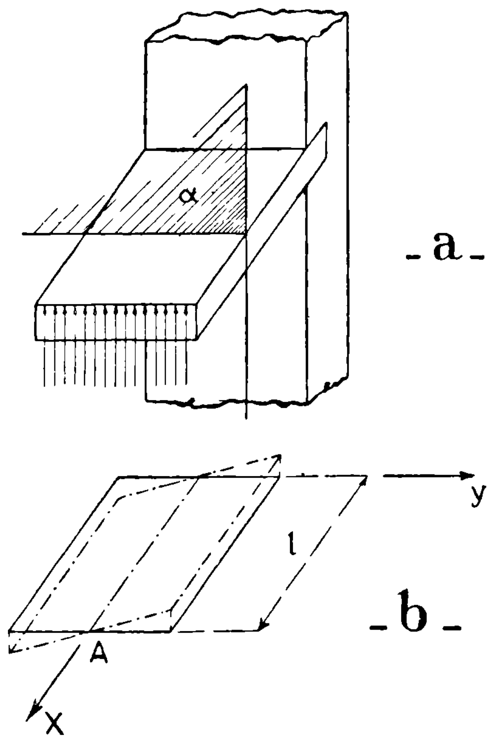
$$|u| < 6Ue^{-1,36\frac{r}{a}}$$

mentre per la derivata normale si ha (secondo ALMANSI e sulla maggior parte del contorno)

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < 2,2\frac{U}{a}.$$

Quest'ultima associata ai valori noti di $\frac{\partial u}{\partial s}$ permette di ricavare dalla precedente una limitazione per $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, valida nell'interno del campo.

Queste limitazioni mostrano che i massimi della sollecitazione sono certo sul contorno (ciò che del resto è immediato da proprietà elementari della



funzione u) e, dal punto di vista delle applicazioni tecniche tale nozione può essere sufficiente per far conoscere un limite massimo per la sollecitazione [1].

Ma sarebbe errato il ritenere che a piccola distanza dal contorno la sollecitazione fosse trascurabile. Che ciò non sempre accada si dimostra in più modi. Un primo esempio di carattere intuitivo ho già indicato altra volta [2].

[1] Infatti, determinata una sollecitazione tipo LOVE-MICHELL, si considerino le differenze massime tra le sollecitazioni ad essa dovute e quelle assegnate sul contorno. La sollecitazione in un punto interno non potrà superare il valore che si ottiene aggiungendo alla sollecitazione LOVE, in quel punto, il valore massimo della differenza rilevata sul contorno.

[2] « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1932, loc. cit..

Si consideri una lastra rettangolare incastrata da un lato e soggetta sul lato opporto a forze normali al suo piano medio e distribuite uniformemente con intensità p per unità di lunghezza del contorno (v. fig. *a*). Posto $p = \dfrac{d\varphi}{ds}$ e assunta l'origine del contorno nel punto A (v. fig. *b*), (la scelta è evidentemente opportuna per ragioni di simmetria) la φ può essere rappresentata (scegliendo convenientemente la scala) dalla linea a tratto e punto della figura: la distribuzione di forze può dunque essere sostituita con la distribuzione di momenti M_n rappresentata dalla φ ora descritta o con una distribuzione intermedia di forze e di momenti [1]. Ma ora seghiamo la lastra con un piano α perpendicolare al piano medio della lastra: se si ha la distribuzione $p = P_z$ fissata nel primo caso allora su α si hanno tensioni tangenziali la cui risultante vale $T = \int p d\alpha$; se invece si ha la distribuzione di soli momenti allora è $T = 0$. Dunque per quanto riguarda le tensioni tangenziali le due distribuzioni di forze esterne non sono affatto equivalenti. E la differenza tra i tagli provocati dalle due distribuzioni resta costante quando si sposti il piano α parallelamente a sè stesso.

Lo stesso fatto potrebbe essere precisato per via analitica e, del resto, non è affatto in contraddizione con le limitazioni ricordate precedentemente.

13. Completiamo ora i risultati ottenuti indicando la soluzione generale per la u nel caso del cerchio.

Riferiamoci perciò a coordinate polari. Si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta^2} = \lambda u.$$

Poniamo

$$u = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} v(r).$$

Segue

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \left(\lambda + \frac{m^2}{r^2}\right) v = 0$$

[1] La soluzione elastica effettiva (unica) nel campo delle lastre sottili è appunto una distribuzione intermedia tra le due. Assunti gli assi come in fig. *b* e indicando con w lo spostamento verticale si trova

$$w = \frac{pM^2}{N(m-1)^2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{pm}{2N(m-1)^2}y^2(l-x) - N = \frac{2Em^2a^3}{3(m^2-1)},$$

essendo $2a$ lo spessore della lastra. Con le notazioni del Love si ha poi

$$G_1 = \frac{pM^2}{(m-1)^2}(l-x) + \frac{p}{(m-1)^2}(l-x); \quad G_2 = 0: \quad H_1 = \frac{p}{m-1}y; \quad N_1 = \frac{pm}{m-1}; \quad N_2 = 0.$$

e questa equazione è soddisfatta ponendo

$$v = \frac{1}{i^m} \mathfrak{J}_m(ir \sqrt{\lambda}) = I_m(r \sqrt{\lambda}) \ (^1).$$

Si ha dunque in generale

$$u = a_0 I_0(r \sqrt{\lambda}) + a_1 \cos \theta I_1(r \sqrt{\lambda}) + b_1 \operatorname{sen} \theta I_1(r \sqrt{\lambda}) + \ldots$$

e ciò consente di determinare la u in base ai valori assunti da essa sul contorno. Infatti si sviluppano i valori assegnati per la u sul contorno in serie di FOURIER; se il cerchio ha raggio R la u vale allora

$$u = a_0 \frac{I_0(r \sqrt{\lambda})}{I_0(R \sqrt{\lambda})} + a_1 \cos \theta \frac{I_1(r \sqrt{\lambda})}{I_1(R \sqrt{\lambda})} + \ldots .$$

Se la serie di FOURIER converge, converge anche la espressione data per u perchè

$$\frac{I_m(r \sqrt{\lambda})}{I_m(R \sqrt{\lambda})}$$

è certo minore di *uno*, per $r < R$, in quanto i termini della serie di I_m sono tutti dello stesso segno per r positivo e di modulo crescente con il crescere di r.

Combinando tre valori diversi di λ si ha la soluzione completa nella lastra circolare, in quanto si verifica che sviluppando in serie di FOURIER i valori di A, B, C (condizione 17)) si ha per ogni m due sistemi di tre equazioni con tre incognite (uno relativo a $\operatorname{sen} m\theta$, l'altro a $\cos m\theta$) con determinante diverso da zero.

§ 6. **Passaggio alle lastre sottili.**

14. Le considerazioni finora esposte riguardano le lastre grosse. Ma esse possono essere estese alle lastre sottili ricordando che in una Nota pubblicata ai « Lincei » nel 1° semestre 1932 ho dimostrato come a una soluzione tipo LOVE-MICHELL nella lastra grossa corrisponda una soluzione tipo KIRCHHOFF nella lastra sottile. Pertanto a soluzioni, valide nella lastra grossa e approssimatamente equivalenti, corrispondono nella lastra sottile soluzioni pure approssimatamente equivalenti.

---

(1) Importa appena di osservare che v è *reale*. Infatti è

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2n}}{n!\, \pi(m+n)}.$$

Se x è immaginario $= iy$ allora I_m è puramente immaginaria se m è dispari (e quindi nella v deve essere introdotta dopo averla divisa per i) è reale senz'altro se m è pari.

Ma perchè il KIRCHHOFF indica come condizioni al contorno soltanto M_t e $P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s}$ e non accenna alle altre condizioni che abbiamo visto essere sostanzialmente equivalenti alle precedenti?

Si ha la risposta a questa domanda riferendosi alla dimostrazione del KIRCHHOFF che qui riassumo brevemente [1]. Egli, premesse le ipotesi:

che ogni segmento perpendicolare al piano medio della lastra sia, a deformazione avvenuta ancora rettilineo e perpendicolare alla superficie deformata del piano medio;

e che tutti gli elementi del piano medio subiscano dilatazioni trascurabili in confronto alle inflessioni w;

osserva come, in conseguenza della prima di queste, una dilatazione principale risulta perpendicolare al piano medio; le altre due giacciono quindi nel piano medio stesso. Se z indica la distanza primitiva di un elemento dal piano medio, z_1 la distanza dopo la deformazione dalla superficie elastica allora, posto

$$z_1 - z = \mu$$

è $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ una dilatazione principale. Poichè questa deve essere infinitesima e μ si annulla insieme con z così μ è infinitesimo in confronto a z. Le altre due dilatazioni principali valgono (come si vede facilmente) $\frac{z_1}{\rho_1}$ e $\frac{z_2}{\rho_2}$, ρ_1, ρ_2, raggi principali di curvatura.

Scriviamo ora il principio dei lavori virtuali. Deve essere

$$\delta L = \int_\sigma (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) d\sigma + \int (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) ds =$$

$$= \frac{Em}{2(m+1)} \delta \int_\sigma \left\{ (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 \right\} d\sigma$$

ed in questa espressione si possono sostituire i valori ora ottenuti per le dilatazioni principali (indicate qui genericamente con ε_x, ε_y, ε_z). Ma si osservi che $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ si può esprimere in funzione delle altre due $\left(\frac{z_1}{\rho_1}, \frac{z_2}{\rho_2}\right)$ senza che sia necessaria la conoscenza delle forze esterne. Si può infatti scrivere in base alle ipotesi fatte

$$\delta u = \delta u_0 + z \delta \cos (z_1, x)$$
$$\delta v = \delta v_0 + z \delta \cos (z_1, y)$$
$$\delta w = \delta w_0 + z \delta \cos (z_1, z)$$

[1] KIRCHHOFF, « Journal für die reine und angewandte Math. (crelle) », Bd 40, pagg. 51-88.

dove u_0, v_0, w_0 sono quantità relative al piano medio. Sostituendo queste nella espressione di δL relativa alle forze esterne si osserva che essa risulta indipendente da $\delta\mu$, perciò lo stesso δL espresso per mezzo delle deformazioni deve essere indipendente, deve pure essere indipendente da μ. Ciò implica la condizione

$$\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{1}{m-2}\left(\frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right) = 0. \tag{20}$$

Questa relazione permette al KIRCHHOFF di assumere il lavoro interno in funzione delle sole $\frac{z}{\rho_1}$, $\frac{z}{\rho_2}$; trascurando poi δu_0, δv_0 (in base alla seconda ipotesi fatta) e ponendo

$$\cos(z_1, x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x_0}, \quad \cos(z_1\ y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y_0}, \quad \cos(z_1, z) = 1$$

(l'indice zero indica quantità relative al piano medio) egli giunge a trasformare l'integrale relativo al lavoro interno nel modo seguente

$$\delta L = \frac{2}{3}a^2\frac{Em}{2(m+1)}\left(\delta Q + \frac{1}{m-1}\delta R\right)$$

essendo

$$R = \int\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2 dxdy, \quad Q = \int\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right)dxdy$$

ed

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2$$

(si omettono per brevità gli indici zero).

Di qui tenendo conto della espressione di δL relativa alle forze esterne e trasformando secondo i principî del calcolo delle variazioni si ottengono tre equazioni; una valida in tutto il campo ($\Delta\Delta w = 0$ se $X = Y = Z = 0$) le altre, valide sul contorno, equivalgono ad assegnare su di esso M_t e $P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s}$.

15. Fin qui la dimostrazione del KIRCHHOFF. Ma risulta chiaramente da essa che le tre condizioni ai limiti sono ridotte a due in virtù della relazione (20) che è soddisfatta in base alle ipotesi iniziali: e se la stessa relazione fosse sfruttata invece che per eliminare $\frac{\partial\mu}{\partial z}$, per eliminare una delle altre due dilatazioni principali si otterrebbe una nuova espressione del lavoro di deformazione che, per le ipotesi iniziali sarebbe eguale alla precedente, ma in realtà sarebbe solo approssimativamente eguale perchè le ipotesi stesse sono solo approssimativamente soddisfatte. Si otterrebbe allora una combinazione diversa delle condizioni ai limiti, combinazione che per altro è difficile scrivere materialmente perchè non sappiamo scrivere $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ in funzione di w.

Ma, si può obiettare, non si è dimostrato che le funzioni u lasciano invariato il piano medio? In tale condizione non basta osservare che nelle lastre sottili si studia soltanto la deformazione del piano medio e quindi non si può tener conto di quelle sollecitazioni che lasciano invariato il piano stesso? Una tale spiegazione non giustifica il risultato del KIRCHHOFF (perchè non spiega la ragione della particolare scelta delle condizioni ai limiti) ma rappresenta certo la spiegazione più spontanea del risultato ottenuto, quando si voglia svolgere la teoria delle lastre sottili dopo aver riferito sui fondamenti della teoria della lastra grossa.

Bologna, Giugno 1938.

Sur les surfaces du $4^{ème}$ ordre à conique double.

Par FR. FABRICIUS-BJERRE (à Copenhague).

La question des différentes formes réelles d'une surface du $4^{ème}$ ordre à conique double a été étudiée par H. G. ZEUTHEN, qui a donné une classification complète de ces surfaces ([1]). Outre que les méthodes de ZEUTHEN, dont nous nous occuperons plus loin, on peut se servir de la méthode de projection de C. SEGRE, c'est-à-dire s'imaginer la surface S comme projection centrale de la surface d'intersection Γ de deux hyperquadriques V et W, situées dans un espace à 4 dimensions ([2]); et, en étudiant les formes réelles de Γ et les positions différentes du centre de projection O par rapport à Γ, on peut obtenir une nouvelle classification des surfaces S.

Après quelques remarques préliminaires sur la conique double, les cônes de KUMMER etc., nous allons faire voir — par un exemple — comment cette classification peut se réaliser. Finalement nous ferons une comparaison entre cette méthode de classification et celles de ZEUTHEN.

Soit U l'hyperquadrique du faisceau $W - \lambda V$ qui passe par le centre de projection O. L'espace tangent de U au point O coupe U dans un cône quadrique, et la conique double C est la courbe d'intersection de ce cône avec l'espace R_3, sur lequel nous projetons. Par suite C sera réelle ou imaginaire selon que l'hyperquadrique U est hyperbolique ou elliptique. En employant la construction de C. SEGRE pour obtenir les cônes de KUMMER, on voit immédiatement que le cône de KUMMER, dérivé d'un hypercône hyperbolique (non-convexe), est réel. Ses plans tangents coupent S suivant deux coniques réelles, et S est située à l'extérieur du cône. Si l'hypercône est elliptique (convexe), les génératrices du cône correspondant sont réelles ou imaginaires selon que O est situé à l'extérieur ou à l'intérieur de l'hypercône. S est située à l'intérieur du cône de KUMMER. Les points-pinces

([1]) H. G. ZEUTHEN, *Su la superficie di 4° ordine con conica doppia*, « Ann. di Mat. », (2), t. 14, 1886, pp. 31-70.

([2]) C. SEGRE, *Étude sur les différentes surfaces du $4^{ème}$ ordre à conique double...*, « Math. Ann. », t. 24, 1884, pp. 313-444.

de S sont les points d'intersection de C et des cônes de Kummer; ils séparent les parties isolées de C des parties dans lesquelles S se coupe elle-même. Enfin, la projection des droites et des coniques de Γ sont en général des droites et des coniques de S.

Dans l'espace réel R_4 il existe 6 (7) types différents de surfaces Γ [3]. Chaque type donne par projection un type principal de S, dont la forme dépend de la position du point O.

La surface Γ de 1e espèce est définie par les équations:

$$(1) \qquad \begin{aligned} V &\equiv x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0 \\ W &\equiv x_1^2 + \alpha x_3^2 - \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 = 0, \end{aligned}$$

sous les conditions

$$(2) \qquad \alpha > \beta > 0 > \gamma.$$

Le faisceau $W - \lambda V$ contient dans ce cas quatre hypercônes elliptiques et un hypercône hyperbolique. Par les propriétés de Γ on peut déduire que chaque surface S de 1e espèce possède un système double de coniques réelles, 16 droites imaginaires avec un point réel, et qu'elle est composée de deux nappes d'ordre pair.

Les hypercônes convexes divisent l'espace R_4 en 3 domaines contenant:

1) Les points situés à l'extérieur ou à l'intérieur de tous les hypercônes ($\lambda > \alpha$ ou $\lambda < \gamma$). Une hyperquadrique du faisceau qui passe par un point de ce domaine est hyperbolique, et chaque génératrice de l'hyperquadrique coupe une des nappes de Γ en 0 ou 2 points réels.

2) Les points situés à l'extérieur ou à l'intérieur de trois hypercônes convexes ($\alpha > \lambda > \beta$ ou $0 > \lambda > \gamma$). Les hyperquadriques du faisceau dans ce domaine sont elliptiques.

3) Les points à l'intérieur de deux et à l'extérieur de deux hypercônes convexes ($\beta > \lambda > 0$). Les hyperquadriques du faisceau possèdent de nouveau des génératrices réelles, dont chacune coupe l'une et l'autre des nappes de Γ en un seul point.

Nous supposons d'abord que le centre de projection O est situé dans le sommet $P(1, 0, 0, 0, 0)$ de l'hypercône $V = 0$. Si nous projectons sur l'espace $x_1 = 0$, la projection de Γ sera les domaines de l'hyperboloïde double

$$(3) \qquad x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0$$

---

[3] E. Togliatti, *Questioni di forma et di realità relative a fasci di quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni*, « Ann. di Mat. », (3), t. 30, 1921, pp. 75-117, et Fr. Fabricius-Bjerre, *Ueber algebraische Flächen vierter Ordnung im projektiven* R_4, « Math. Zeitschr. », t. 41, 1936, pp. 686-707.

dont les coordonnées satisfont à la condition:

$$\alpha x_3^2 - \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 \leq 0.$$

Il en résulte que S remplit deux domaines simples sur l'hyperboloïde, chacun d'eux limité par une branche d'une courbe du 4ème ordre. Le point P est à l'extérieur de tous les hypercônes convexes. Si O est un autre point de ce domaine, la surface S sera composée de deux nappes sans points communs. Quant à la conique double réelle C, un examen detaillé montre que C peut être courbe d'intersection d'une nappe avec elle-même, de sorte que la conique contient 0, 1 ou 2 parties isolées, correspondant à 0, 2 ou 4 points-pinces réels; ou bien chaque nappe peut se couper elle-même, de façon qu'il y a deux points-pinces sur chaque nappe; ou bien C peut être courbe isolée. Si le point O est situé à l'intérieur des quatre hypercônes, la conique double sera courbe d'intersection sans points-pinces, et l'une des nappes jouit de la propriété d'être coupée par un plan quelconque de l'espace R_3.

Soit O situé à l'extérieur (à l'intérieur) de 3 hypercônes convexes. La conique C est imaginaire, et la forme de S est celle d'une *cyclide* ([4]). L'une des nappes est située à l'extérieur (à l'intérieur) de l'autre. On obtient facilement une idée de la forme de S en choisissant le centre de projection près d'un des sommets des hypercônes du faisceau.

Si le point O est situé à l'extérieur de deux et à l'intérieur de deux hypercônes convexes, la conique double réelle doit être courbe d'intersection des deux nappes de S.

Le point O peut encore être situé *sur* un hypercône. Dans ce cas la conique double est décomposée en deux droites. Si O est sur la surface Γ, la surface S sera une *cubique*, ayant 3 droites réelles et 13 plans tangents triples.

Si l'on emploie cette méthode de projection dans tous les cas de Γ, on obtiendra sans difficulté toutes les formes différentes d'une surface générale du 4ème ordre à conique double (ou d'une surface cubique).

Dans son mémoire ZEUTHEN classifie les surfaces S par deux méthodes différentes. Premièrement il examine la réalité des surfaces par la méthode du contour apparent de GEISER, le centre de projection étant choisi sur la conique double. La seconde méthode est fondée sur la construction suivante des points d'une surface S:

([4]) Voir G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, Paris 1873, pp. 128-131.

Soit T un point, σ et δ deux quadriques, situées dans l'espace ordinaire à trois dimensions, et T' un point de σ. La droite TT' coupe δ en deux points D et D'. Les points M et M' qui divisent les couples TT' et DD' harmoniquement décrivent la surface S, lorsque T' parcourt la quadrique σ.

Cette construction peut s'obtenir facilement de notre point de vue [5]. Projectons d'un point O sur l'espace $x_1 = 0$. Le point T sera la projection du sommet $P(1, 0, 0, 0, 0)$ et la quadrique σ sera l'hyperboloïde (3). La quadrique δ est la projection de la surface dans laquelle l'hyperquadrique U est coupée par l'espace polaire du point P par rapport à cette hyperquadrique.

ZEUTHEN classifie les surfaces en faisant varier la quadrique σ et la courbe d'intersection de σ et δ. Notre classification — par contre — est faite selon le caractère des hypercônes du faisceau et la position du centre de projection, et il ne semble pas qu'il y ait une relation simple entre les deux classifications.

---

(5) C. SEGRE, loc. cit., p. 338.

INDICE DEL TOMO XVII DELLA SERIE 4ª

INDIRIZZI
dei collaboratori del Tomo XVII

U. AMALDI - ROMA, via Emilio del Cavaliere 7-A.

A. TERRACINI - TORINO, corso Francia 19 bis.

G. BOL - HAMBURG (Germania), Mathematisches Seminar, Rotenbaumchaussee 21.

W. J. TRJITZINSKY - URBANA, ILL. (Stati Uniti), University of Illinois, Math. Building 361.

B. SEGRE - BOLOGNA, via Alamandini 10^3.

C. CHABAUTY - PARIS, VI (Francia), rue Séguier 2.

L. ONOFRI - BOLOGNA, via Indipendenza 39.

É. CARTAN - PARIS, XIV (Francia), 95 B^d Jourdan.

P. NALLI - CATANIA, via Francesco Crispi 234.

P. J. MYRBERG - HELSINKI SUOMI (Finlandia), Temppelikatu, 21.

C. AGOSTINELLI - TORINO, via Cernaia 38.

P. SCHERK - PRAG XIX (Cecoslovacchia), Hermelinska, 1.

G. SUPINO - BOLOGNA, via Dante 20.

FR. FABRICIUS-BJERRE - COPENAGHEN (Danimarca), Pilealle 19^A.