

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*

Luigi Cremona *in Roma*



Ulisse Dini *in Pisa*

Giuseppe Jung *in Milano*

SERIE III.^a - TOMO VIII.^o

MILANO,

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1903.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VII.^o (SERIE III.^a)

	PAG.
Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari. — <i>Edgardo Ciani</i>	1
Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti. — <i>Guido Fubini</i>	39
Sulla formola di Taylor. — <i>Onorato Niccoletti</i>	83
Studio geometrico della quartica gobba razionale. — <i>G. Marletta</i>	97
Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo. — <i>Orazio Tedone</i>	129
Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali. — <i>Tommaso Boggio</i>	181
Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche. — <i>Matteo Bottasso</i>	233
Sul limite del quoziente di due funzioni. — <i>Ettore Bortolotti</i>	245
Alcuni teoremi sui determinanti. — <i>Onorato Niccoletti</i>	287
De la détermination de certaines fonctions d'après des conditions données. <i>I. H. Graf</i>	299

Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari.

(Di EDGARDO CIANI, a Milano)

Il problema di determinare tutti i gruppi di collineazioni quaternarie che sono oloedricamente isomorfi con i gruppi di rotazione dei poliedri regolari, rientra in quello più generale di determinare i gruppi finiti, lineari, isomorfi, oloedrici con i gruppi totali, od alterni sopra n elementi. Il problema è stato risolto dal MASCHKE, nel campo ternario e quaternario, in un notevole lavoro (*) mediante una trattazione esclusivamente analitica con la quale l'autore stabilisce, caso per caso, le sostituzioni generatrici dei gruppi cercati, senza però prendere in particolare considerazione alcuno di essi. Il desiderio di ritrovare le formole di MASCHKE, con semplici considerazioni geometriche, per ciò che riguarda quelli fra i suddetti gruppi che sono oloedricamente isomorfi con i gruppi di rotazioni dei poliedri regolari, fu il primo avviamento a questo lavoro e a ciò è dedicata la 1.^a parte. Si giunge così per una via che mi sembra più facile e più spedita di quella di MASCHKE alla determinazione dei dodici tipi possibili, enunciati al n.° 11. Tre di essi sono tetraedrici, cinque ottaedrici e cinque icosaedrici. Dieci fra tutti sono reali e quindi rientrano nella classificazione che fa il BAGNERA dei gruppi quaternari reali nel suo recente lavoro (**). I due gruppi rimanenti non si possono mettere sotto forma reale e quindi escono dalla classificazione del BAGNERA.

(*) MASCHKE, *Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind.* Math. Annal., Bd. LI.

(**) BAGNERA, *I gruppi finiti reali di sostituzioni quaternarie lineari.* (Circolo Matematico di Palermo, anno 1901.)

Essi sono il G_{60}^{IV} e il G_{60}^V , di cui l'ultimo è in particolar modo interessante. Allo studio sistematico del G_{60}^V è dedicata la seconda parte di questo lavoro più ampia e più sviluppata della prima. La lettura di entrambe è indipendente dalle Memorie suindicate di MASCHKE e BAGNERA. Anche in questa indipendenza sta un altro dei motivi per i quali ho scritto la prima parte, la quale a rigor di termini io avrei potuto tralasciare rimandando il lettore alle citate Memorie. In ogni modo, chi di queste Memorie avrà conoscenza, anche superficiale, troverà ad ogni punto di contatto il richiamo esatto dell'una e dell'altra con la indicazione della pagina relativa.

Quanto alla seconda parte, debbo dire qui le ragioni che mi hanno indotto ad approfondire lo studio del gruppo icosaedrico G_{60}^V a preferenza di tutti gli altri. Esse sono le seguenti. Anzitutto la distribuzione dei gruppi trovati nelle cinque categorie descritte al n.º 11 mostra già che il gruppo icosaedrico G_{60}^V è quello che fra gli altri presenta qualche maggiore difficoltà di studio. In ogni modo, poi, è quello che offre anche l'interesse maggiore. Ho cominciato dalla considerazione della figura costituita dagli elementi uniti delle sue collineazioni. Essa ha, per così dire, come nucleo invariante, da cui si può partire per descriverla, un notevole sistema di cinque rette sghembe a due, a due, e costituite in guisa che a quattro, a quattro ammettono una sola trasversale comune. Se dunque si aggruppano a quattro, a quattro nei cinque modi possibili si trovano cinque di queste trasversali: ebbene esse compongono un secondo sistema affatto simile al primo; e nel medesimo modo con cui il secondo è dedotto dal primo, si deduce il primo dal secondo. Il legame geometrico fra i due sistemi è mutuo: entrambi sono invarianti e sopra entrambi il gruppo G_{60}^V funziona da gruppo alterno (n.º 17). Ora, se è ovvio immaginare un gruppo icosaedrico quaternario funzionante da gruppo alterno sopra cinque punti, o sopra cinque piani, non sembra altrettanto ovvio pensarne uno che funzioni come tale sopra cinque rette dello spazio.

Un altro motivo che rende interessante il gruppo G_{60}^V è che fra i cinque gruppi icosaedrici trovati esso è l'unico che sia dotato di cubiche gobbe invarianti. Ne possiede due (n.º 26) e per questo lato la sua teoria si riannoderebbe felicemente a quella così ampia e feconda della cubica gobba.

Relativamente alle superficie invarianti è a notarsi come tutti i gruppi trovati, all'infuori di G_{60}^{IV} e G_{60}^V , potendosi mettere sotto forma reale posseggono almeno una quadrica invariante. Rimangono fuori il G_{60}^{IV} e G_{60}^V i quali non ammettono nè superficie quadriche, nè superficie cubiche invarianti e

soltanto il secondo ammette superficie quartiche invarianti. Cosicchè il G_{60}^V può anche caratterizzarsi, fra tutti i gruppi trovati, come quello per il quale l'ordine minimo delle superficie invarianti è proprio il 4.^o onde l'interesse che il G_{60}^V assume rispetto a tali superficie (n.^o 19). Esse compongono un fascio notevole di superficie irriduttibili (n.^o 22). Fra esse, quelle singolari sono soltanto quattro: Due sono fornite naturalmente dalle sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe invarianti; le altre due posseggono dieci punti doppi ciascuna, vertici di due notevoli decagoni invarianti, costituiti dai 20 punti uniti dei sottogruppi di sesto ordine (n.^o 23).

Fra le superficie non singolari del fascio citeremo quella di cui è oggetto l'ultimo capitolo. Essa possiede 60 rette e non altre. Tali 60 rette si dividono in tre gruppi di dieci, di venti, di trenta, ciascuno invariante e fra le configurazioni formate da tali gruppi è notevole quella del secondo composta da venti rette che passano a tre, a tre per venti punti della superficie ed esistono a tre, a tre in venti piani tangenti alla superficie medesima in guisa che quelle che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa.

PRIMA PARTE.

Le collineazioni generatrici dei gruppi cercati.

§ I. GRUPPI DEL TETRAEDRO.

1. Un gruppo tetraedrico G_{12} contiene come sottogruppo invariante un gruppo quadrimomio G_4 . Quindi noi cominceremo dall'esaminare le possibili specie proiettive di un gruppo quadrimomio nello spazio a tre dimensioni. Ora, un tal gruppo deve comporsi dell'identità e di tre sostituzioni a periodo due, così che ciascuna equivalga al prodotto delle altre due. Ma nello spazio suddetto una collineazione a periodo due è necessariamente una omologia armonica, o una involuzione gobba e quindi si è condotti alle seguenti tre specie proiettive di G_4 .

(a). Il gruppo è costituito dall'identità e dalle tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono le coppie di spigoli opposti di un medesimo tetraedro. As-

sumendolo come tetraedro di riferimento; per sostituzioni generatrici possono prendersi evidentemente le seguenti

$$\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Indicheremo questo gruppo con G_4^I .

(b). Il gruppo è costituito dalla identità e da tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono tre coppie armoniche a due, a due di una stessa serie rigata. Questa serie è invariante rispetto al gruppo, la coniugata è composta di rette invarianti ed è anche invariante, naturalmente, la quadrica sostegno. Assumendo per tetraedro di riferimento uno che sia autoconiugato rispetto alla quadrica e disponendo opportunamente dal punto unità le sostituzioni generatrici del gruppo possono essere le seguenti:

$$\begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La quadrica in parola è $\Sigma x_i^2 = 0$. Indicheremo questo gruppo con G_4^{II} .

(c) Il gruppo è costituito dall'identità, da due omologie armoniche così che il centro di una è sul piano fondamentale dell'altra e dalla involuzione gobba che ne è il prodotto. Il gruppo può essere generato dalle due:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dove la posizione del tetraedro di riferimento è manifesta.

Indicheremo quest'ultimo con G_4^{III} .

2. Tornando adesso al G_{12} da costruire osserviamo anzitutto che le sostituzioni del suo sottogruppo quadrinomio debbono essere simili: si esclude dunque che tale sottogruppo sia il G_4^{III} . Cominciamo dal caso in cui il sottogruppo in parola sia G_4^I . Per costruire il G_{12} che si cerca dovesi aggiungere una collineazione C_3 a periodo 3 la quale permuti circolarmente le involuzioni gobbe di G_4^I . Segue che tre facce del tetraedro fondamentale di G_4^I saranno pure permutate circolarmente da C_3 mentre la quarta faccia rimarrà immutata. Assumendo questa per $x_4 = 0$ e disponendo opportunamente del punto unità si trova

$$C_3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La C_3 aggiunta a G_4^I genera il G_{12} cercato e che indichiamo con G_{12}^I . Esso è proiettivamente identico col gruppo delle rotazioni del tetraedro regolare e coincide col « tetraeder I » di MASCHKE (pag. 274) e col G_{12} di BAGNERA (pag. 59). Le collineazioni a periodo 3 del gruppo sono assiali. Esiste un punto invariante (0 0 0 1) e un piano invariante ($x_4 = 0$).

3. Assumiamo invece come sottogruppo quadrinomio il G_4^{II} . Poichè G_4^{II} è invariante rispetto al G_{12} da costruirsi, ne viene che rispetto a quest'ultimo saranno pure invarianti la quadrica Q e le due serie rigate che essa sostiene. Ad una di queste serie appartengono gli assi delle tre involuzioni gobbe del G_4^{II} . Indichiamo con le coppie (m, m') , (n, n') , (p, p') tali assi. La serie coniugata a quella cui appartengono questi assi può essere composta di rette invarianti ciascuna rispetto al G_{12} incognito, o no. Consideriamo separatamente i due casi. Nel 1.º, le collineazioni a periodo 3 che si debbono aggiungere sono necessariamente biassiali e possono caratterizzarsi nel seguente modo. Si osservi anzitutto che le terne $(m n p)$, $(m' n' p')$ posseggono la stessa coppia di rette hessiane. Altrettanto accade per le terne simili $(m n p', m' n' p)$; $(m n' p', m' n p)$; $(m n' p, m' n p')$. Ebbene, si vede subito che le 4 coppie di rette, che così si hanno, costituiscono le 4 coppie di assi delle collineazioni cercate. Sopra ogni generatrice della serie coniugata a quella cui appartengono $m m'$, $n n'$, $p p'$ si viene quindi a stabilire un g_{12} di proiettività binarie subordinate. Il G_{12} ora trovato lo indicheremo con G_{12}^{II} e poichè è costituito da collineazioni tutte biassiali, lo chiameremo « il G_{12} biassiale ». Nel 2.º dei casi sopra accennati si vede facilmente che le collineazioni a periodo 3 da aggiungere non sono più biassiali, ma soltanto assiali. Basta determinarne una. Siano perciò h e k le rette hessiane del gruppo $m n p$, o di $m' n' p'$ (che è lo stesso), e su tali rette h e k assumiamo a piacere i punti $M M'$, $N N'$ in guisa però che le rette $M M'$, $N N'$ siano generatrici della quadrica Q . Allora la collineazione cercata avrà $M N'$ per asse di punti uniti, $M' N$ per assi di piani uniti (o viceversa) con la condizione ulteriore che i piani $M N' N$, $M N' M'$ sieno i due piani uniti per l'asse di punti uniti e che M' ed N sieno i due punti uniti sull'asse di piani uniti. Indicheremo con G_{12}^{III} il G_{12} che così si ottiene.

4. Per rappresentare analiticamente i due G_{12} trovati nel numero precedente è utile per il momento, e indispensabile per il seguito, mettere sotto altra forma il G_4^{II} del n.º 1. Con apposita ed evidente scelta del tetraedro di riferimento è facile vedere che le involuzioni gobbe di G_4^{II} possono scri-

versi (MASCHKE, pag. 275)

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \sqrt{2} & -x_2 + x_3 \sqrt{2} & x_2 \sqrt{2} + x_3 & x_1 \sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = C_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \varepsilon \sqrt{2} & -x_2 + x_3 \varepsilon^2 \sqrt{2} & x_2 \varepsilon \sqrt{2} + x_3 & x_1 \varepsilon^2 \sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = C'_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \varepsilon^2 \sqrt{2} & -x_2 + x_3 \varepsilon \sqrt{2} & x_2 \varepsilon^2 \sqrt{2} + x_3 & x_1 \varepsilon \sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = C''_2$$

dove ε , ε^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.

Ebbene, si ottiene il G_{12}^{II} , o il G_{12}^{III} , a seconda che si aggiunge al precedente G_4^I la prima o la seconda delle seguenti collineazioni a periodo 3:

$$C'_3 \equiv \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & x_3 & \varepsilon x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad C_3 \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La quadrica invariante è in entrambi i casi la:

$$Q \equiv x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Nel 1.^o caso sono invarianti tutte le rette di una serie rigata di questa quadrica (quella cui appartiene la $x_1 = 0$, $x_4 = 0$). Nel 2.^o caso esistono due sole rette invarianti che sono le $(x_1 = 0, x_4 = 0)$, $(x_2 = 0, x_3 = 0)$. Il G_{12}^{II} e il G_{12}^{III} attuali sono rispettivamente i « tetraeder III e II » di MASCHKE (pagina 275-77) e l' R_{12} e il G_{12}^* di BAGNERA (pag. 59).

§ II. GRUPPI DELL'OTTAEDRO (O DEL CUBO).

5. La discussione relativa ai possibili gruppi ottaedrici dipende in modo semplice dalla specie dei relativi sottogruppi tetraedrici.

Cominciamo dal caso in cui il sottogruppo G_{12} del G_{24} cercato sia il G_{12}^I (n.^o 2). Per raggiungere lo scopo basta aggiungere una collineazione a periodo 2 rispetto alla quale il G_{12}^I sia invariante e siano invarianti il punto (0001) e il piano $x_4 = 0$. Se dunque questa collineazione è una involuzione gobba, una dei suoi assi passerà per (0001) ed esisterà in una faccia del

tetraedro fondamentale e l'altro esisterà in $x_4 = 0$ e passerà per un vertice del tetraedro medesimo in guisa che questo rimanga inalterato per effetto di tale collineazione. Essa è quindi $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Questa col G_{12}^I genera il G_{24} cercato e che indicheremo con G_{24}^I . Esso è proiettivamente identico col gruppo delle rotazioni dell'ottaedro regolare e coincide con « l'Octaeder » I di MASCHKE (pag. 293) e con il G_{24} di BAGNERA (pag. 125).

Se invece la collineazione che si aggiunge al G_{12}^I è omologia armonica, essa avrà per centro un punto di uno spigolo del tetraedro fondamentale in $x_4 = 0$, e per piano fondamentale un piano per lo spigolo opposto in guisa da trasformare in se il tetraedro medesimo. Per essa si può dunque prendere: $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Questa col G_{12}^I genera un G_{24} che indicheremo con G_{24}^{II} e che è manifestamente diverso, proiettivamente parlando, da G_{24}^I . Il G_{24}^{II} coincide col \overline{G}_{24} di BAGNERA (pag. 125) e con « l'octaeder II » di MASCHKE (pagina 293). Per caratterizzare proiettivamente il G_{24}^{II} basta osservare che esso permuta in tutti modi possibili i 4 piani:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

e tiene fisso $x_4 = 0$. Dunque il G_{24}^{II} può considerarsi come sottogruppo di un G_{120} . Cioè del G_{120} costituito da tutte le collineazioni che scambiano in tutti i modi possibili le facce di un pentaedro, o i vertici di un pentagono gobbo. Precisamente è uno dei cinque sottogruppi che tengono fissa una faccia del pentaedro, o un vertice del pentagono.

6. Se assumiamo per gruppo alterno del G_{24} cercato il G_{12}^{II} , o il G_{12}^{III} è evidente che le collineazioni a periodo 2 da aggiungere non possono essere omologie armoniche dovendo esse trasformare in se il sottogruppo alterno. Una tale collineazione sarà dunque una involuzione gobba. Supponiamo dapprima che il sottogruppo alterno sia G_{12}^{II} (n.º 3). Ne viene che gli assi della collineazione suddetta saranno rette reciproche rispetto alla quadrica invariante Q , ovvero apparterranno alla serie rigata di m, m', \dots . Ecco quindi una suddivisione che conduce a due gruppi diversi. Per caratterizzarli prendiamo una generatrice r di Q di sistema diverso da m, m', \dots . Sopra questa esiste un g_{12} di proiettività binarie subordinate del G_{12}^{II} e tale g_{12} individua un g_{24} pure di proiettività binarie del quale g_{12} è gruppo alterno. Sieno M, N i punti doppi di una delle sei involuzioni sopra r che bisogna aggiungere

al g_{12} per trovare il g_{24} . Prendiamo adesso un'altra generatrice r' di Q di ugual sistema di r , e sieno $M'N'$ i punti di r' analoghi ad M, N in guisa che le rette MM', NN' appartengano a Q . Ebbene, tanto la involuzione gobba che ha per assi MM', NN' , quanto quella che ha per assi $MN', M'N$ trasformano G_{12}^{II} in se stesso e con questo generano i due G_{24} cercati rispondenti ai due punti della sottodistinzione dianzi fatta. Per ottenerne le formole relative si prendano per rette r ed r' rispettivamente $(x_2 = 0, x_3 = 0)$; $(x_1 = 0, x_4 = 0)$ e su queste:

$$M \equiv (1, 0, 0, i), \quad N \equiv (1, 0, 0, -i), \quad M' \equiv (0, 1, -i, 0), \quad N' \equiv (0, 1, i, 0).$$

Allora le due involuzioni gobbe che hanno per assi (MM', NN') ; $(MN', M'N)$ sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

è aggiunte al G_{12}^{II} generano i due G_{24} cercati che noi indicheremo con G_{24}^{III} e con G_{24}^{IV} . Entrambi posseggono 18 omografie biassiali: le sei rimanenti sono pure biassiali per il 1.°, ma non per il 2.° Ecco perchè chiameremo G_{24}^{III} gruppo biassiale. Sono rette invarianti per esso tutte le generatrici di Q del sistema $rr'...$ Invece il G_{24}^{IV} possiede due sole rette invarianti che sono r ed r' . G_{24}^{III} e G_{24}^{IV} coincidono con gli « octaeder IV e V » di MASCHKE (pag. 294-95) e con R_{24}^* , R_{24} di BAGNERA (pag. 125).

7. Ammettiamo finalmente che il G_{24} da costruirsi abbia per gruppo alterno il G_{12}^{III} (n.° 3 e 4). Le due rette invarianti del G_{12}^{III} compongono una coppia invariante per il G_{24} cercato. Ma è facile vedere che niuna di esse potrà essere separatamente invariante rispetto alle involuzioni gobbe da aggiungersi. Perchè, se ciò fosse, applicando a tali rette le considerazioni fatte nel numero precedente per rr' , si verrebbe alla conclusione che la involuzione gobba che ha per assi MM', NN' , ovvero quella che ha per assi le $MN', M'N$ dovrebbe cambiare una delle collineazioni a periodo 3 di G_{12}^{III} nel suo quadrato il che è impossibile perchè tanto l'una quanto l'altra delle suindicate involuzioni scambia fra loro l'asse di punti uniti e l'asse di piani uniti della collineazione a periodo 3 in parola. Dunque la involuzione gobba cercata permuta fra loro le due rette $(x_1 = 0, x_4 = 0)$; $(x_2 = 0, x_3 = 0)$ e quindi sarà della forma:

$$T \equiv \begin{pmatrix} ax_2 + bx_3, & cx_1 + dx_4, & mx_1 + nx_4, & px_2 + qx_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}.$$

Ora si esiga che sia $T C_3 T = C_3^2$, e dopo che si abbia $T C_2 T = C_2$ (n.º 4) e si è condotti alla

$$T \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Questa, aggiunta al G_{12}^{III} ci fornisce l'ultimo G_{24} della nostra discussione che noi indicheremo con G_{24}^V . È identico con « l'octaeder III » di MASCHKE (pag. 294) e col G_{24}^* di BAGNERA (pag. 125).

§ III. GRUPPI DELL'ICOSAEDRO (O DEL DODECAEDRO).

8. Un gruppo icosaedrico contiene cinque sottogruppi tetraedrici simili fra loro. Segue che i 5 G_{12} di un G_{60} quaternario sono proiettivamente identici. Cerchiamo di costruire un G_{60} partendo da una delle tre specie proiettive di G_{12} trovati al § I. Ma anzitutto osserviamo che dato un G_{12} quaternario per trovare un G_{60} di cui G_{12} sia sottogruppo basta determinare una collineazione T che soddisfi alle seguenti condizioni

$$T^2 = 1, \quad T C_3 T = C_3^2, \quad (T C_2)^3 = 1$$

dove C_2, C_3 sono due collineazioni del G_{12} con i periodi 2 e 3.

Determinata la T , essa col G_{12} individua il G_{60} richiesto. Ciò premesso cominciamo dal considerare il caso in cui i sottogruppi G_{12} del G_{60} cercato sieno della specie G_{12}^I (n.º 2). Avremo dunque in G_{60} cinque G_{12}^I . Ciascuno possiede un punto e un piano invarianti. Può darsi che i cinque punti (e quindi anche i cinque piani) coincidano oppure che sieno distinti e quindi che esista un pentagono gobbo (e quindi anche un pentaedro) invariante. Ecco dunque una suddistinzione da farsi. Se i cinque punti coincidono, ciò significa che (0001) è invariante rispetto al G_{60} cercato e che è anche invariante $x_4 = 0$. Le collineazioni a periodo due di un G_{60} sono proiettivamente identiche, dunque la T è una involuzione gobba, ha un asse passante per (0001) , l'altro in $x_4 = 0$ e quindi è della forma:

$$\left(\begin{array}{cccc} a x_1 + b x_2 + c x_3, & d x_1 + e x_2 + f x_3, & g x_1 + h x_2 + k x_3, & m x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right) = T.$$

Assumiamo per C_2 e per C_3 (n.º 1, 2)

$$C_2 = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

ed esigiamo che la T soddisfi alle condizioni anzidette

$$T^2 = 1, \quad T C_3 T = C_3^2, \quad (T C_2)^3 = 1.$$

Si è condotti allora alla

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -ax_1 - bx_2 + cx_3, & -bx_1 - cx_2 + ax_3, & -cx_1 - ax_2 + bx_3, & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\} = T.$$

dove

$$b = -\frac{1}{2}, \quad a, c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Il G_{60} così individuato è identico proiettivamente col G_{60} delle rotazioni dell'icosaedro e lo indicheremo con G_{60}^I . Esso coincide con « l'ikosaeder I » di MASCHKE (pag. 279) e col G_{60}^* di BAGNERA (pag. 79).

Se invece i cinque punti invarianti dei cinque G_{12} sono distinti, esiste un pentagono gobbo invariante. Il G_{60} cercato non è altro che il sottogruppo alterno di un G_{120} . Cioè del G_{120} totale che permuta in tutti i modi possibili i vertici del pentagono (o le facce di un pentaedro). Indicheremo con G_{60}^{II} un tal gruppo. Le sue collineazioni possono rappresentarsi sotto la forma:

$$C = \begin{pmatrix} x_i & x_h & x_k & x_l & x_m \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}; \quad (i, h, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$$

dove C rappresenta una sostituzione pari e si ha $\sum x_i = 0$. Il G_{60}^{II} coincide con « l'ikosaeder II » di MASCHKE (pag. 280) e col G_{60} di BAGNERA (pag. 79).

9. Assumiamo ora per sottogruppi tetraedrici la specie G_{12}^{II} . Si presenta anche qui una suddivisione a seconda che si esige che esista una sola quadrica invariante per tutti i 5 G_{12} , ovvero che le cinque quadriche sieno tutte distinte componendo un'insieme invariante rispetto al G_{60} cercato. Cominciamo dal primo caso: esiste una quadrica Q invariante per tutti i cinque G_{12}^{II} . Ne viene che gli assi delle collineazioni a periodi 2 e 3 dei cinque G_{12} appartengono a una stessa serie rigata sopra Q onde la serie rigata coniugata è costituita da rette invarianti rispetto all'intero G_{60} . Fra queste sa-

ranno anche le $(x_1 = 0, x_4 = 0)$, $(x_2 = 0, x_3 = 0)$ per cui T sarà della forma:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} hx_1 + kx_4, & mx_2 + nx_3, & px_2 + qx_3, & rx_1 + sx_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\} = T \dots \quad (1)$$

prendiamo per la C_2 e C'_3 quelle del n.º 4. La condizione $TC'_3T = C'_3$ reca anzitutto

$$h = m = q = s = 0$$

e dalla $T^2 = 1$ risulta $kr = np$, per cui si può prendere intanto:

$$T = \begin{pmatrix} ax_4, & bx_3, & ax_2, & bx_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \dots \quad (2)$$

La invarianza della Q del n.º 4 reca poi $\alpha^2 = 1$. Dopo, esigendo l'ultima condizione $(TC_2)^3 = 1$ secondo il n.º 8 si trova, necessariamente $\alpha = 1$ e

$$2(a^2 + b^2) + ab = 0$$

soddisfatta la quale, T è individuata e il gruppo costruito.

Esso è evidentemente composto di collineazioni tutte biassiali e perciò lo chiameremo il gruppo icosaedrico biassiale indicandolo con G_{60}^{III} . È « l'ikosaeder IV » di MASCHKE (pag. 284) e l' R_{60} di BAGNERA (pag. 79).

Passiamo adesso al secondo punto della suddistinzione dianzi fatta. Le quadriche invarianti dei 5 sottogruppi G_{12}^{II} sono tutte distinte. Una collineazione a periodo 3 appartiene, insieme al suo quadrato, a due sottogruppi G_{12}^{II} : dunque nel caso attuale i suoi due assi esisteranno contemporaneamente sulle due quadriche invarianti di due tali G_{12}^{II} per cui esse si taglieranno secondo altre due rette sghembe fra loro e appoggiate agli assi di tutte le collineazioni dei due G_{12}^{II} in questione. Quindi ciascuna di queste due ultime rette, essendo invariante rispetto a due G_{12} , sarà invariante rispetto all'intero G_{60} da costruirsi. Assumendo tali rette per $(x_1 = 0, x_4 = 0)$, $(x_2 = 0, x_3 = 0)$ la T incognita avrà la forma (1) precedente; dalla quale si passa in ugual modo alla (2). Soltanto non può dirsi che sia $\alpha^2 = 1$ perchè Q non è invariante rispetto al G_{60} da costruirsi. Dopo, la condizione $(TC_2)^3 = 1$, reca $a = b$ e per α la equazione $2\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$. Con ciò le condizioni richieste per la T sono soddisfatte e il nuovo G_{60} è individuato. Noi lo indicheremo con G_{60}^{IV} . Esso è « l'ikosaeder V » di MASCHKE (pag. 284). Non figura fra i gruppi di BAGNERA perchè non può mettersi sotto forma completamente reale. Le sue collineazioni a periodi 2 e 3 sono biassiali, ma non le rimanenti.

10. Non rimane a discutere altro caso che quello in cui la specie dei G_{12} sia la G_{12}^{III} (n.º 3 e 4). Assumiamo per C_2 e C_3 quelle del n.º 4. Gli assi di C_3 sono $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ come luogo di punti uniti; e $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ come involuppo di piani uniti. A causa della condizione $T C_3 T = C_3^2$ ne viene anzitutto che le rette suddette sono unite per T e quindi quest'ultima avrà la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc} a x_1 + b x_2, & c x_1 + d x_2, & m x_3 + n x_4, & p x_3 + q x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{array} \right) = T.$$

Se, su questa, si completa la esigenza della condizione $T C_3 T = C_3$ si trova $m = q = 0$ e dopo, osservando che $T^2 = 1$ e che T non può essere omologia armonica, si ottiene necessariamente $a + d = 0$, $a^2 + b c = n p$. Poi, per esigere la condizione $(T C_2)^3 = 1$, non importa svolgere completamente il calcolo intero di $(T C_2)^3$. Si calcoli anzitutto $(T C_2)^2$ tenendo conto delle condizioni già trovate per i coefficienti. E per la $(T C_2)^3$ si calcoli solo la prima sostituzione in x , che è la seguente:

$$\begin{aligned} x_1 \equiv & (a^3 - 3 a b c + 6 a b n + 2 a p c + 2 a p n) x_1 + \\ & + (-3 a^2 b + b^2 c + 4 a^2 p - 2 b^2 n - 2 p b c - 2 p b n) x_2 + \\ & + (3 a^2 b - b^2 c + 2 b^2 n - a^2 p - p b c - p b n) \sqrt{2} x_3 + \\ & + (a^3 - 3 a b c + 2 a p c - a p n) \sqrt{2} x_4. \end{aligned}$$

Perchè sia $(T C_2)^3 = 1$ è condizione necessaria anzitutto che nella precedente siano nulli i coefficienti di x_2 , x_3 , x_4 . Cominciando dall'annullare il coefficiente di x_4 e tenendo conto che si ha $a^2 + b c = n p$ si trova necessariamente $p = 2 b$; poi annullando il coefficiente di x_3 si ottiene $a^2 = 3 b c$ e finalmente con l'annullare il coefficiente di x_2 si ha $n = 2 c$.

Per cui si ricavano, come necessarie, le relazioni:

$$a^2 = 3 b c, \quad n = 2 c, \quad p = 2 b, \quad a + d = 0.$$

Ma si constata facilmente che esse sono anche sufficienti. Prendendo $b = c = 1$, la T diviene

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 \sqrt{3} + x_2 & x_1 - x_2 \sqrt{3} & 2 x_4 & 2 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right) = T.$$

Questa, col G_{12}^{III} , individua il G_{60} cercato che rappresenterebbero con G_{60}^{V} . Esso è identico con « l'ikosaeder » III di MASCHKE (pag. 281). Non figura fra i gruppi di BAGNERA perchè, come il precedente, non può mettersi sotto forma reale.

11. Riassumendo i gruppi trovati, essi possono distribuirsi nelle seguenti divisioni:

I.^a I tre gruppi di rotazioni dei poliedri regolari: (G_{12}^{I} , G_{24}^{I} , G_{60}^{I}).

II.^a I tre gruppi biassiali: (G_{12}^{II} , G_{24}^{II} , G_{60}^{II}).

III.^a Tre sottogruppi del $G_{5!}$ totale sul pentagono gobbo (o sul pentaedro): (G_{12}^{III} , G_{24}^{III} , G_{60}^{III}).

IV.^a Quattro gruppi dotati ciascuno di una e una sola coppia invariante di rette: (G_{12}^{IV} , G_{24}^{IV} , G_{24}^{V} , G_{60}^{IV}).

V.^a Il G_{60}^{V} che non può farsi rientrare in alcuna delle divisioni precedenti.

I gruppi trovati sono dunque in tutto 13 (perchè il G_{12}^{I} appartiene a due divisioni: I.^a e III.^a). Di essi, tre sono tetraedrici, cinque ottaedrici e cinque icosaedrici. I soli G_{60}^{IV} , G_{60}^{V} non si possono mettere sotto forma reale. (BAGNERA, pag. 79 e 125.)

PARTE SECONDA.

Studio del gruppo icosaedrico G_{60}^{V} .

§ I. LA CONFIGURAZIONE COSTITUITA DAGLI ELEMENTI UNITI DELLE SUE COLLINEAZIONI.

12. Nelle poche linee che hanno servito di introduzione abbiamo già parlato delle ragioni di preferenza che lo studio del G_{60}^{V} presenta sugli altri gruppi trovati (*). Ci proponiamo adesso di svolgere questo studio incomin-

(*) Forse non sarebbe privo d'interesse anche lo studio dei tre sottogruppi del G_{120} totale di collineazioni che operano sul pentagono gobbo, o sul pentaedro, trasformandolo in se stesso e meglio ancora lo studio sistematico di tutto un tale G_{120} . In esso troverebbero il loro posto naturale le molte proposizioni d'indole proiettiva, già conosciute, e che

ciando dal considerare gli elementi uniti delle collineazioni del gruppo e i loro legami geometrici.

Anzitutto caratterizziamo con le lettere a, b, c, d, e i cinque sottogruppi tetraedrici del G_{60}^V e con la lettera e in particolare il $G_{12,e}^{III}$ generato dalle C_2, C_3 del n.° 4, cioè dalle

$$C_2 = (a b)(c d) = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \sqrt{2}, & -x_2 + x_3 \sqrt{2}, & x_2 \sqrt{2} + x_3, & x_1 \sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = (a b c) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \varepsilon x_3, & \varepsilon^2 x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}.$$

Allora, n.° 10, il G_{60}^V è generato da $G_{12,e}^{III}$ e dalla

$$T = (a b)(d e) = \begin{pmatrix} x_1 \sqrt{3} + x_2, & x_1 - x_2 \sqrt{3}, & 2x_3, & 2x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La sostituzione $T C_2 C_3$ è rappresentabile con $(a b c d e)$ e quindi ha il periodo 5. Calcolandola si trova:

$$(a b c d e) = \begin{cases} x_1 \equiv x_1 \sqrt{3} - x_2 + x_3 \varepsilon \sqrt{2} + x_4 \varepsilon^2 \sqrt{6} \\ x_2 \equiv x_1 + x_2 \sqrt{3} - x_3 \varepsilon \sqrt{6} + x_4 \varepsilon^2 \sqrt{2} \\ x_3 \equiv x_1 \cdot 2 \sqrt{2} - x_4 \cdot 2 \varepsilon^2 \\ x_4 \equiv x_2 \cdot 2 \sqrt{2} + x_3 \cdot 2 \varepsilon. \end{cases}$$

La equazione in ρ che serve a trovarne i punti uniti possiede le 4 radici

riguardano il pentagono gobbo, o il pentaedro, e sarebbe facile trovarne altre in guisa da interpretare geometricamente tutto ciò che riguarda il G_{120} totale su cinque oggetti. Si presenterebbe spontanea la estensione in un iperspazio qualunque. Cioè lo studio della geometria dell' $(n+2)$ -gono o dell' $(n+2)$ -edro in un S_n lineare mediante il $G_{(n+2)}$ totale di collineazioni che permutano in tutti i modi possibili i vertici dell' $(n+2)$ -gono, o gli iperpiani dell' $(n+2)$ -edro. In questo rientrerebbero come casi particolari la geometria proiettiva del quadrilatero in S_2 e del pentaedro in S_3 e quindi anche, come casi ancora più particolari, la metrica del triangolo (la cosiddetta geometria del triangolo) e la metrica del tetraedro. Le molte proposizioni metriche riguardanti il triangolo o il tetraedro (casi particolari di proprietà preiettive riguardanti il quadrilatero e il pentaedro) e la facilità con cui si ottengono tali proposizioni, dipendono forse in gran parte dalla esistenza del gruppo in questione.

immaginarie di

$$\rho^5 + (\sqrt{12})^5 = 0$$

e quindi esistono 4 soli punti uniti distinti.

13. Ciò premesso osserveremo che i sottogruppi di un gruppo icosaedrico si possono distribuire, insieme ai loro relativi sottogruppi, nelle tre specie seguenti:

- 1.^a Dieci gruppi di 6.^o ordine.
- 2.^a Sei gruppi di decimo ordine.
- 3.^a Cinque gruppi di dodicesimo ordine (gruppi tetraedrici).

In totale si hanno, in G_{60}^V , quindici involuzioni gobbe, venti collineazioni assiali a periodo 3; ventiquattro collineazioni a periodo 5 con 4 punti uniti ciascuna e l'identità.

Cominciamo dai dieci sottogruppi di 6.^o ordine. Essi sono del tipo

$$(abc)^r, (ac)(de), (ab)(de), (bc)(de), \text{ con } r = 1, 2, 3.$$

Ogni collineazione a periodo 3 insieme al suo quadrato individua uno di questi G_6 . Ora il G_{60}^V opera transitivamente sulle sue collineazioni a periodo 3, quindi altrettanto farà sopra i suoi 10 G_6 . Cioè:

I dieci gruppi di 6.^o ordine sono proiettivamente identici. Quindi basta considerare la configurazione di uno di essi, ad es. del precedente. Esso contiene un gruppo del 3.^o ordine G_3 che è invariante e generato dalle potenze di (abc) . Segue che i 6 assi delle involuzioni gobbe di G_6 si appoggiano agli assi del G_3 . Ma, per esempio, con (abc) e con $(ac)(de)$ si può generare l'intero G_6 dunque il punto dove un asse di $(ac)(de)$ incontra l'asse di punti uniti di (abc) è invariante rispetto all'intero G_6 e quindi esso appartiene anche a un asse di $(ab)(de)$ e a uno di $(bc)(de)$. Valgono le considerazioni duali. Dunque i sei assi delle involuzioni gobbe del G_6 s'incontrano a tre, a tre in due punti sull'asse di punti uniti del G_3 ed esistono a tre, a tre in due piani passanti per l'asse di piani uniti del G_3 medesimo. I punti in cui tali 6 assi si appoggiano all'asse di piani uniti suddetto, compongono due terne binarie di cui una è la forma Q dell'altra: i due punti del comune hessiano sono i due punti uniti di G_3 che si trovano sull'asse di piani uniti. Dualmente ecc. Dunque un G_6 possiede due punti invarianti e due piani invarianti. Vogliamo adesso dimostrare che non esiste alcuna collineazione di G_{60}^V che trasformi uno dei due punti nell'altro, ovvero uno dei due piani nell'altro. Infatti, notiamo anzitutto che due G_6 diversi non possono

avere un punto invariante comune perchè un tal punto sarebbe invariante rispetto a G_{60}^V . Ne viene che se esiste in G_{60}^V una collineazione capace di effettuare il transito suindicato, essa deve trasformare il G_6 in se stesso e quindi gli assi di punti uniti e di piani uniti del sottogruppo G_3 . Questi assi sarebbero dunque invarianti rispetto al G_6 e rispetto a una collineazione esterna al G_6 , e quindi anche rispetto all'intero G_{60}^V ciò che è impossibile perchè il G_{60}^V non possiede coppie di rette invarianti. Possiamo dunque enunciare i seguenti risultati:

I 30 assi delle 15 involuzioni gobbe s'incontrano a 3, a 3 in 20 punti ed esistono a 3, a 3 in 20 piani in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano. Questi 20 punti si dividono in due decagoni invarianti ciascuno rispetto all'intero G_{60}^V e dualmente i 20 piani si dividono in due decaedri invarianti pure ciascuno, rispetto al medesimo G_{60}^V .

Ciascun decagono è iscritto in uno dei due decaedri. Vedremo nel numero seguente che i vertici dei due decagoni esauriscono tutti i possibili incontri degli assi delle involuzioni gobbe. E vedremo anche che:

I due decagoni precedenti costituiscono i poligoni invarianti che hanno il minor numero possibile di vertici.

Ogni asse di una involuzione gobba contiene un vertice dell'uno e un vertice dell'altro decagono. Indicheremo con le lettere D, D' questi decagoni. Tenendo presenti le collineazioni a periodo 3 si può anche dire che:

I dieci vertici del decagono D , o D' esistono a tre, a tre in dieci piani passanti a tre, a tre per dieci rette che sono gli assi dei piani uniti delle collineazioni a periodo 3 ecc. Dualmente ecc....

14. Passiamo ai sei sottogruppi di decimo ordine. Uno di essi G_{10} è del tipo:

$$(a b c d e)^r, (a b)(c e), (b c)(d a), (c d)(e b), (d e)(a c), (e a)(b d)$$

dove $r = 1, 2, 3, 4, 5$. Un tal G_{10} possiede dunque un G_5 invariante che è quello generato da $(a b c d e)^r$. E siccome un gruppo icosaedrico opera transitivamente sui propri G_5 ne viene che altrettanto fa sopra i G_{10} . Quindi: *I sei gruppi di 10.° ordine sono proiettivamente identici.* Si vede subito che i 24 punti uniti dei G_5 (n.° 12) sono tutti distinti. Perchè, non possono coincidere due appartenenti a un medesimo G_5 altrimenti le sue collineazioni non avrebbero il periodo *finito* 5; non possono coincidere due appartenenti a G_5 diversi, perchè se coincidessero, un tal punto sarebbe invariante rispetto a due G_5 e quindi rispetto all'intero G_{60}^V .

Consideriamo un G_{10} : ad es. quello che contiene le sostituzioni sopra descritte. Ogni involuzione gobba del gruppo cambia G_5 in se stesso e quindi trasforma in se stesso il tetraedro degli elementi uniti. Vogliamo escludere che ciò avvenga per il fatto che gli assi di tali involuzioni passino per i vertici. Intanto siccome il G_5 opera transitivamente sulle involuzioni gobbe del G_{10} ne viene che niuna di esse potrà avere per assi due spigoli opposti del tetraedro in questione. Diciamo di più che nemmeno può essere che l'asse di una passi per un vertice. Infatti un tal vertice, essendo unito per il G_5 e per una sostituzione di G_{10} esterna al G_5 , è unito per tutto il G_{10} e quindi per quel punto passa un asse di ciascuna delle rimanenti involuzioni gobbe del G_{10} medesimo. Inoltre, siccome tutti i G_{10} sono identici, dal punto di vista proiettivo, ne viene che altrettanto accade per i rimanenti G_{10} . Ciò premesso, si osservi che una involuzione gobba: ad es.: $(ab)(ce)$, appartiene a due G_{10} e precisamente ai due G_{10} individuati da $(abcde)^r$, $(abedc)^r$. Dunque un asse s di $(ab)(ce)$ incontra un asse di ciascuna delle involuzioni gobbe seguenti:

$$(bc)(da), \quad (cd)(eb), \quad (de)(ac), \quad (ea)(bd)$$

$$(be)(ad), \quad (cd)(ae), \quad (de)(bc), \quad (ca)(bd).$$

Inoltre, a causa dei due G_5 cui appartiene $(ab)(ce)$ segue che s si appoggia anche a un asse di ciascuna delle

$$(ab)(de), \quad (ab)(cd), \quad (ce)(bd), \quad (ce)(ad).$$

Dunque s incontrando un asse di ciascuna delle

$$(bc)(da), \quad (ca)(bd), \quad (ab)(cd)$$

appartiene alla quadrica invariante di $G_{12,e}^{III}$ (n.° 4). Analogamente si vede che s appartiene alla quadrica invariante di $G_{12,u}^{III}$; a quella di $G_{12,b}^{III}$; di $G_{12,c}^{III}$; e finalmente, come asse di $(ab)(ce)$, s appartiene anche alla quadrica invariante di $G_{12,d}^{III}$. Ma ciò è impossibile perchè le cinque quadriche suddette non hanno certo rette comuni. Quindi: I dieci assi delle cinque involuzioni gobbe di un G_{10} si appoggiano tutti ai medesimi due spigoli opposti del tetraedro unito del gruppo senza però contenerne alcun vertice. Siamo adesso in grado di giustificare due affermazioni contenute nel numero precedente. La prima si è che i decagoni D e D' assorbono tutti i possibili punti d'incontro degli assi delle involuzioni gobbe. Infatti se due tali assi s'incontrano, il punto d'incontro è unito per il sottogruppo generato da quelle due involu-

zioni il quale è necessariamente o un G_4 , o un G_6 , o un G_{10} . Un G_4 non possiede punti uniti perchè è della specie G_4^{II} (n.º 1), e ora abbiamo dimostrato che nemmeno un G_{10} possiede punti uniti; dunque il punto d'incontro in questione è unito per un G_6 e quindi è un vertice di D , o D' .

La seconda affermazione era che D , o D' rappresentavano i poligoni invarianti di minor numero possibile di vertici. Anche questo risulta immediatamente. Infatti se esistesse un poligono invariante con meno di 10 vertici esso ne avrebbe necessariamente uno, o due, o tre, o quattro, o cinque, o sei. Ma non può averne nè uno, nè due, nè tre perchè G_{60}^{V} non possiede nè punti, nè rette, nè piani invarianti. Non può averne quattro perchè a causa dei G_5 quei quattro sarebbero ciascuno uniti per tutti i G_5 , il che abbiamo già notato al principio di questo numero essere impossibile. Non può averne nè cinque, nè sei perchè ciascuno sarebbe unito per un G_{12} , o per un G_{10} mentre tanto i G_{12} , quanto i G_{10} non hanno punti uniti.

15. Indichiamo con $G_5^{(i)}$ i gruppi di 5.º ordine ponendo:

$$G_5^{(1)} = (a b c d e)r, \quad G_5^{(2)} = (a b c e d)r, \quad G_5^{(3)} = (a b d c e)r, \quad G_5^{(4)} = (a b e d c)r, \\ G_5^{(5)} = (a b d e c)r, \quad G_5^{(6)} = (a b e e d)r$$

con

$$r = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Consideriamo un punto P_1 unito per $G_5^{(1)}$. Tal punto non può essere unito per alcun altro G_5 come abbiamo già osservato; non può essere unito per una collineazione a periodo 3 perchè sarebbe unito per l'intero gruppo generato da quella collineazione e da $G_5^{(1)}$ e quindi per il G_{60}^{V} ; e finalmente non può P_1 essere unito per alcuna involuzione gobba perchè essa con $G_5^{(1)}$ dà origine o a un G_{10} che è privo di punti uniti (numero precedente), o al G_{60}^{V} che ne è privo ugualmente. Dunque se a P_1 applichiamo le 12 sostituzioni di un gruppo tetraedrico troviamo 12 punti tutti distinti. Indichiamoli nel seguente modo:

La	$(a b)(c d)$	effettua i cicli	$(P_1 P_2)$	e	$(G_5^{(1)} G_5^{(6)})$
"	$(a c)(b d)$	"	"	"	$(G_5^{(1)} G_5^{(6)})$
"	$(a d)(b c)$	"	"	"	$(G_5^{(1)})$
"	$(a b c)$	"	"	"	$(G_5^{(1)} G_5^{(3)} G_5^{(5)})$
"	$(a b d)$	"	"	"	$(G_5^{(1)} G_5^{(2)} G_5^{(3)})$
"	$(a c d)$	"	"	"	$(G_5^{(1)} G_5^{(4)} G_5^{(5)})$
"	$(b c d)$	"	"	"	$(G_5^{(1)} G_5^{(2)} G_5^{(4)})$

Cioè $P_1 P_4$ sono uniti per $G_5^{(1)}$; $P_2 P_3$ per $G_5^{(6)}$; $P_5 P_8$ per G_5^3 ; $P_6 P_{10}$ per G_5^5 ; $P_7 P_{11}$ per $G_5^{(2)}$; $P_9 P_{12}$ per $G_5^{(4)}$. Sieno $P'_1 P'_4$; $P'_2 P'_3$; $P'_5 P'_8$; $P'_6 P'_{10}$; $P'_7 P'_{11}$; $P'_9 P'_{12}$ le coppie di punti uniti rimanenti dei G_5 suddetti nell'ordine suddetto. Le involuzioni gobbe del $G_5^{(1)}$ ad es.: trasportano tutte P_i in P_4 e P'_i in P'_4 ecc. (n.° 14). Dico che non esiste alcuna collineazione in G_{60}^V che trasporti P_i in P'_i ovvero in P'_4 . Infatti se una tale collineazione esiste deve necessariamente trasformare in se stesso il $G_5^{(1)}$ perchè due G_5 non possono avere alcun punto unito comune (n.° 14), quindi essa deve appartenere al G_{10} di cui $G_5^{(1)}$ è invariante e per conseguenza tale collineazione non può essere altro che una delle involuzioni gobbe del G_{10} : ma niuna di esse trasporta P in P'_1 , ovvero in P'_4 .

Dunque i 24 punti uniti delle collineazioni a periodo cinque si dividono in due dodecagoni invarianti ciascuno (e quindi intransitivi) rispetto al G_{60}^V . Manifestamente essi sono i soli dodecagoni invarianti possibili.

16. Andiamo finalmente ai cinque sottogruppi di dodicesimo ordine (sottogruppi tetraedrici). Ciascuno contiene un G_4^I invariante e quattro G_3 costituiti ognuno dalle potenze di una stessa collineazione a periodo 3. Un G_3 appartiene a due sottogruppi tetraedrici: così ad es. $(abc)^r$ appartiene a $G_{12,d}^{III}$, $G_{12,e}^{III}$. Gli assi di due G_3 non hanno alcun punto comune: se essi infatti appartengono a uno stesso G_{12}^{III} ciò risulta immediatamente dalla costruzione del G_{12}^{III} medesimo (n.° 3); se essi non appartengono a uno stesso G_{12}^{III} non esistono in alcun sottogruppo di G_{60}^V e quindi non possono avere un punto o un piano unito comune altrimenti quel punto, o quel piano, sarebbe invariante rispetto a G_{60}^V .

Ogni G_{12}^{III} ammette due rette invarianti (n.° 4). Si hanno così dieci rette le quali compongono una figura assai interessante che ci proponiamo ora di considerare. Intanto rappresenteremo con $(a' a'')$ le rette invarianti di $G_{12,a}^{III}$; con $(b' b'')$ le rette invarianti di $G_{12,b}^{III}$; con $(c' c'')$ quelle di $G_{12,c}^{III}$; con $(d' d'')$ quelle di $G_{12,d}^{III}$ e con $(e' e'')$ quelle di $G_{12,e}^{III}$. Ogni tale coppia è costituita da rette sghembe. Osserviamo poi, che il G_{60}^V opera transitivamente sui G_3 . Quindi, ricorrendo alla rappresentazione analitica del $G_{12,e}^{III}$ si vede (n.° 12, 4) che l'asse di piani uniti della collineazione (abc) incontra le rette e' , e'' nei due punti uniti che quell'asse contiene. Ma (abc) appartiene anche a $G_{12,d}^{III}$ dunque quei due punti apparterranno anche a d' , d'' . In conclusione; prese due qualunque coppie come $(d' d'')$, $(e' e'')$; una qualsiasi retta dell'una incontra una retta dell'altra. Esistano dunque i punti $e' . d''$, $e'' . d'$; dico che allora non possono esistere invece i punti $e' . d'$; $e'' . d''$. Infatti si noti che la $(ab)(de)$

porta d'' in e' , ovvero in e'' . Se esistesse il punto $e' . d'$ esso, come $e' d''$, sarebbe unito per la collineazione (abc) : in ogni modo uno dei due punti $e' d'$, $e' d''$ sarebbe anche unito per la $(ab)(de)$ e quindi invariante per il G_6 cui appartiene (abc) . Ma nessuno dei due punti invarianti del G_6 in questione può esistere sopra e' ovvero sopra e'' (n.° 23). Si conclude quindi che ciascuna delle dieci rette in discorso si appoggia ad altre quattro e non più.

17. Sieno a'' , b'' , c'' , d'' appoggiate alla e' e le $a' b' c' d'$ quelle appoggiate ad e'' . Ci proponiamo di dimostrare che i due gruppi $a' b' c' d' e'$, $a'' b'' c'' d'' e''$ sono, ciascuno, invarianti rispetto a G_{60}^V . Infatti la (abc) tiene fisse le e' , e'' , d' , d'' e quindi produce i cicli $(a' b' c')$, $(a'' b'' c'')$. Dopo, si consideri la $(ae)(bd)$. Essa deve portare e' in a'' , ovvero in a' . Ma è impossibile che e' sia, da essa, portato in a'' perchè il punto $e' . a''$ sarebbe unito per $(ae)(bd)$ e per (bcd) e quindi invariante rispetto al G_6 generato da $(ae)(bd)$ e da (bcd) il che è assurdo poichè un tal punto esiste sull'asse di punti uniti di (bcd) (n.° 13), mentre invece il punto $e' . a''$ esiste sull'asse di piani uniti di (bcd) (n.° 16). Dunque la $(ae)(bd)$ trasforma e' in a' e quindi e'' in a'' . La stessa collineazione deve trasportare b' in d' , ovvero in d'' . Ma se b' fosse trasformato in d'' , il punto $e'' . b'$ che esiste per ipotesi, sarebbe trasformato nel punto $a'' . d''$ il quale invece non può esistere altrimenti applicando la (bcd) si vedrebbe che $a'' b'' c'' d''$ esisterebbero in un medesimo piano manifestamente invariante rispetto a G_{12}^{III} . Quindi $(ae)(bd)$ trasforma b' in d' e per conseguenza b'' in d'' . Siccome poi la $(ae)(bd)$ medesima appartiene al $G_{12,c}^{III}$ i suoi assi si appoggiano a c' , c'' e quindi tanto c' , quanto c'' sono sue rette unite. In conclusione i sistemi $a' b' c' d' e'$; $a'' b'' c'' d'' e''$ sono invarianti, ognuno, rispetto ad (abc) e $(ae)(bd)$. Ma con queste due collineazioni si può generare l'intero G_{60}^V (poichè esse non appartengono insieme a un G_6 , nè a un G_{12}) e quindi l'affermazione è dimostrata.

Viceversa se $mnpqr$ è un sistema invariante di cinque rette, il G_{60}^V funzionerà sopra di esso come gruppo alterno e quindi ad es. la m deve essere invariante rispetto al G_{12} che permuta $n p q r$; per cui m è una delle dieci rette in questione, ecc.

Possiamo dunque enunciare i seguenti risultati:

Il G_{60}^V possiede due e due soli sistemi invarianti che siano costituiti ciascuno da cinque rette e sopra ognuno di questi esso funziona da gruppo alterno.

Queste 10 rette si distribuiscono anche in 5 coppie invarianti ciascuna rispetto a uno dei 5 sottogruppi tetraedrici.

Le rette di ogni sistema sono sghembe a due, a due ma ognuna di esse si appoggia a 4 dell'altro sistema.

La e'' si appoggia ad $a'b'c'd'$. Se oltre e'' esistesse un'altra retta r appoggiata ad $a'b'c'd'$, la quadrica individuata da e'', e', r sarebbe invariante rispetto a $G_{12,e}^{III}$ il che è impossibile (n.° 3, 4). Segue: *I due sistemi invarianti suddetti sono costituiti in guisa che le cinque rette di uno di essi si appoggiano a quattro, a quattro a una delle cinque rette dell'altro e viceversa. In altre parole si può anche dire che le rette dell'un sistema prese a quattro, a quattro in tutti i modi possibili ammettono sempre una sola trasversale comune (invece che due). Queste cinque trasversali che così si ottengono compongono l'altro sistema. Complessivamente, le 10 rette in parola si incontrano a due, a due in 20 punti, vertici di un icosugono invariante rispetto al G_{60}^V .*

18. Viceversa: fra i cinque gruppi icosaedrici trovati quali di essi ammettono sistemi invarianti di cinque rette? ovvero: quali di essi possono funzionare da gruppi alterni sopra cinque rette? Sieno m, n, p, q, r le rette in questione. Il G_{12} che tiene fissa una di esse non può essere il G_{12}^I (n.° 2) perchè esso non possiede rette invarianti. Ciò esclude che il G_{60} cercato sia il G_{60}^I o il G_{60}^{II} (n.° 8). Anche il G_{60}^{III} lo si esclude subito. Infatti: sia il $G_{12,r}$ quello che tiene fissa, ad esempio, la r . Ne viene che la r appartiene alla serie rigata costituita da rette invarianti rispetto a $G_{12,r}$. Ma tale serie rigata è la stessa per tutti i cinque: $G_{12,m}; G_{12,n}; G_{12,p}; G_{12,q}; G_{12,r}$. Quindi $mnpqr$ sono generatrici di questa serie e quindi ognuna è invariante rispetto a G_{12}^{III} . Rimangono G_{60}^{IV} e G_{60}^V . Di quest'ultimo abbiamo già trattato nel numero precedente. Quanto a G_{60}^{IV} ricorderemo che esso possiede cinque serie rigate costituite da rette invarianti rispetto ai cinque G_{12} . Se dunque si parte da una generatrice di una di queste e le si applica un G_5 si troverà un sistema di 5 rette sulle quali il G_{60}^{IV} funzionerà da gruppo alterno e dunque in questo caso i sistemi invarianti cercati sono ∞^4 . Ma niuno di questi gode la proprietà caratteristica di cui godono i due sistemi trovati nel numero precedente. Infatti sia $a'b'c'd'e'$ uno dei sistemi sopra i quali il G_{60}^{IV} funziona da gruppo alterno. Intanto è manifesto che due di tali rette non s'incontrano. Perchè se ciò accadesse tutte s'incontrerebbero a due, a due e quindi o esisterebbero in un piano, o passerebbero per un punto invarianti rispetto al G_{60}^{IV} , mentre tale G_{60}^{IV} non ammette nè punti, nè piani invarianti. Ciò premesso, vogliamo adesso dimostrare che non esiste una sola retta appoggiata a 4 delle rette $a'b'c'd'e'$. Sia infatti a'' la sola retta ap-

poggiata a $b'c'd'e'$. Essa appartiene alla quadrica invariante di $G_{12,a}^{IV}$. La retta b' appartiene invece alla quadrica invariante di $G_{1,b}^{IV}$. D'altra parte, siccome a'' è la sola retta appoggiata a $b'c'd'e'$ ne segue che queste 4 rette sono, ciascuna, tangenti alla quadrica invariante di $G_{12,a}^{IV}$. Allora, ricordiamo che nel caso attuale le collineazioni a periodo 3 sono biassiali e che due qualsiasi delle cinque quadriche in questione si tagliano secondo gli assi di una tale collineazione e secondo le due rette invarianti rispetto al G_{60}^{IV} (n.° 9). Per il punto $a'' . b'$ passa un asse s della collineazione (cde) , il quale esiste anche nel piano $a''b'$. Esso è diverso da a'' (per il n.° 9) e anche da b' perchè altrimenti anche le rimanenti $c'd'e'a'$ sarebbero assi di collineazioni a periodo 3 (mentre il G_{60}^{IV} è transitivo su queste collineazioni che sono dieci e non hanno assi comuni). Si trovano così delle condizioni irrealizzabili. Perchè se s' è l'altro asse di (cde) , s' si appoggia a b' ed appartiene alla quadrica invariante di $G_{12,a}^{IV}$: per cui b' è tangente a tale quadrica nel punto $b' . a''$ e la incontra altrove, cioè b' le appartiene per intero insieme a s e a'' . La quadrica invariante suddetta si spezza il che è impossibile (n.° 4).

§ II. IL FASCIO DI SUPERFICIE DI 4.° ORDINE INVARIANTI RISPETTO AL GRUPPO G_{60}^V .

19. Fra tutti i gruppi trovati (n.° 11), i soli G_{60}^{IV} e G_{60}^V non si possono mettere sotto forma analitica completamente reale (BAGNERA: pag. 79 e 125). Ne segue che tutti gli altri posseggono almeno una quadrica invariante (BAGNERA: pag. 3). Il G_{60}^{IV} e il G_{60}^V non la posseggono. Le cinque quadriche invarianti dei loro cinque G_{12} sono tutte distinte e soltanto prese insieme compongono una superficie invariante. Essi non posseggono nemmeno superficie cubiche invarianti. Basta perciò osservare che una superficie cubica *non* può essere invariante rispetto a un G_4^{II} (n.° 1). Infatti gli assi di una delle involuzioni gobbe del G_4^{II} vengono scambiati fra di loro per opera di una qualunque delle altre due involuzioni del gruppo, quindi una retta appoggiata agli assi suddetti deve assorbire nei punti di appoggio un numero pari delle sue intersezioni con la superficie: esternamente ne rimane quindi un numero dispari il che è impossibile. Dunque una tal retta appartiene alla superficie per intero. Cioè le appartengono le ∞^2 rette unite per le involuzioni gobbe del G_4^{II} , il che è ugualmente impossibile.

Passando alle superficie di 4.^o ordine si vede facilmente che niuna di esse può essere invariante rispetto al G_{60}^{IV} . Infatti le collineazioni a periodo 3 del G_{60}^{IV} sono biassiali. Se una superficie quartica è invariante rispetto a una tale collineazione almeno un asse di questa esiste sulla superficie. D'altra parte esistono in G_{60}^{IV} involuzioni gobbe che trasformano uno nell'altro gli assi di una data collineazione a periodo 3 (ad esempio la T del n.º 9 opera in tal modo sulla C'_3 del n.º 4). Dunque tutti gli assi delle 10 collineazioni di periodo 3 esistono sulla superficie supposta. Nessuno di questi assi può esser retta doppia per la superficie perchè se lo è uno, lo sono tutti e si cadrebbe in una quadrica doppia. Ne segue che ogni retta generica appoggiata agli assi di una medesima delle collineazioni in discorso incontra fuori degli assi la superficie in due punti (il che è impossibile a causa del valore 3 del periodo), ovvero le appartiene per intero il che è anche assurdo perchè appartenerebbero alla superficie le ∞^2 rette di 10 congruenze lineari.

Dimostreremo invece nel numero seguente che il G_{60}^V possiede un fascio di superficie quartiche invarianti. E sarà quindi giustificata la seguente affermazione:

Il G_{60}^V è l'unico fra tutti i gruppi trovati che goda la proprietà che l'ordine minimo delle sue superficie invarianti sia il quarto.

20. Ci proponiamo di trovare il fascio cui sopra abbiamo accennato. Basta perciò esigere la invarianza rispetto alle tre collineazioni C_2 , C_3 , T del n.º 12. Accenneremo qui rapidamente al modo più sollecito di condurre i calcoli relativi. Indichiamo con Σ la superficie generica cercata. Semplici osservazioni sullo scambio prodotto fra x_3 e x_4 dalla T e le esigenze cui conducono il possesso della C_3 ci danno per Σ la forma seguente:

$$\Sigma \equiv \alpha + \beta x_3^2 + \gamma x_4^2 + \delta x_3 x_4 + p x_3^2 x_4^2 = 0$$

dove α , β , γ , δ sono binarie in x_1 , x_2 delle forme seguenti:

$$\alpha = a x_1^4 + b x_2^4 + c x_1^2 x_2^2 + d x_1 x_2^3 + n x_1^3 x_2$$

$$\beta = e x_1 + g x_2; \quad \gamma = f x_1 + h x_2$$

$$\delta = l x_1^2 + m x_2^2 + q x_1 x_2.$$

Si noti che la Σ non può essere riduttibile perchè non esistono sistemi di uno, o due, o tre, o 4 piani che siano invarianti rispetto a G_{60}^V . Ciò esclude che α sia nullo identicamente: perchè con $\alpha = 0$ identicamente esistono 2 e quindi venti punti doppi di Σ situati a 4, a 4 sulle $a' b' c' d' e'$, $a'' b'' c'' d'' e''$

onde queste rette sarebbero doppie, ecc., ecc. Ciò premesso, esigiamo la invarianza rispetto a T . Per effetto della T la Σ si cambia nella Σ' seguente:

$$\Sigma' \equiv \alpha' + 8 \beta' x_1^4 + 8 \gamma' x_2^4 + 4 \delta' x_3 x_4 + 16 p x_3^2 x_4^2 = 0$$

dove $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ indicano ciò che divengono le binarie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per effetto della sostituzione binaria

$$\left\{ \begin{array}{cc} x_1 \sqrt{3} + x_2 & x_1 - x_2 \sqrt{3} \\ x_1 & x_2 \end{array} \right\}.$$

Se Σ deve coincidere con Σ' si deve avere anzitutto

$$\alpha' = \rho \alpha$$

dove ρ è un fattore di proporzionalità. Ciò dà luogo alle condizioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} 9a + b + 3\sqrt{3}c + \sqrt{3}d + 3n = \rho a \\ a + 9b - \sqrt{3}c - 3\sqrt{3}d + 3n = \rho b \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 12\sqrt{3}a - 4\sqrt{3}b - 8d - 4\sqrt{3}n = \rho c \\ 4\sqrt{3}a - 12\sqrt{3}b - 8c + 4\sqrt{3}n = \rho d \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\dots 18(a + b) - 6\sqrt{3}(c - d) - 2n = \rho n \dots \dots \dots (3)$$

Da cui

$$\left. \begin{array}{l} (a - b)(8 - \rho) + (c + d) 4\sqrt{3} = 0 \\ (a - b) 16\sqrt{3} - (c + d)(8 + \rho) = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} (a + b)(10 - \rho) + (c - d) 2\sqrt{3} + 6n = 0 \\ (a + b) 8\sqrt{3} + (c - d)(8 - \rho) - 8\sqrt{3}n = 0 \\ (a + b) 18 - (c - d) \cdot 6\sqrt{3} - (2 + \rho)n = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

annullando i determinanti dei coefficienti si trovano le due equazioni in ρ seguenti:

$$\begin{aligned} (\rho + 16)(\rho - 16) &= 0 \\ (\rho + 16)(\rho - 16)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque, necessariamente, deve essere $\rho = \pm 16$ altrimenti la α si annulla identicamente.

21. Prima di proseguire nella ricerca delle condizioni che provengono dall'esigere che Σ possenga la T distinguiamo i due casi: $\rho = 16$, $\rho = -16$.

Sia dapprima $\rho = 16$. Le (4) si riducono a una sola; così pure le (5) e si è condotti necessariamente alle due:

$$a = \frac{5c + d + 2n\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, \quad b = \frac{-c - 5d + 2n\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad (6)$$

e si vede allora che anche le (1), (2), (3) sono soddisfatte.

Poi dovremo avere:

$$\beta' = 2\gamma, \quad \gamma' = 2\beta, \quad \delta' = 4\delta$$

da cui:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{e\sqrt{3} + g}{2}, & h &= \frac{e - g\sqrt{3}}{2} \\ l &= m + q\sqrt{3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Invece con $\rho = -16$ si trova:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{5n + 3\sqrt{3}d}{18}, & b &= \frac{-n + 3\sqrt{3}d}{18}, & c &= \frac{4n + 3\sqrt{3}d}{3\sqrt{3}} \\ f &= -\frac{e\sqrt{3} + g}{2}, & h &= \frac{g\sqrt{3} - e}{2} \\ l &= -\frac{q}{2\sqrt{3}}, & m &= \frac{q}{2\sqrt{3}}, & p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

22. Esigendo finalmente la invarianza della superficie Σ rispetto alla C_2 del n.º 12 si trovano le seguenti nuove condizioni che si riscontrano necessarie e sufficienti:

$$\begin{aligned} f &= 2\sqrt{2}a; & g &= -2\sqrt{2}b; & h &= -c\sqrt{2}; & l &= 3c \\ e &= d\sqrt{2}; & m &= 3d; & p &= n; & q &= -2n. \end{aligned}$$

Queste non sono conciliabili con le (8) a meno che tutti i coefficienti non siano nulli. Si associno allora con le (6), (7), si riduca a forma intera e si vedrà che i coefficienti possono esprimersi tutti in funzione di un sol parametro λ indipendente. Si è quindi condotti alla equazione seguente la quale rappresenta il fascio cercato.

$$\begin{aligned} (2\lambda + 1)x_1(x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1^2) + (\lambda + 2)x_2(-x_2^2 + 2\sqrt{2}x_2^2) + \\ + 2\sqrt{3}(x_1^2 + \lambda x_2^2)(x_1x_2 + 3x_3x_4) + \\ + 2\sqrt{6}(\lambda x_1x_3 - x_2x_4) + 3(\lambda - 1)(x_1x_2 - x_3x_4)^2 = 0. \end{aligned}$$

§ III. LE SUPERFICIE SINGOLARI DEL FASCIO.

23. Per cercare le superficie del fascio dotate di punti singolari è assai utile effettuare una trasformazione di coordinate la quale lasci fissi i punti $(0\ 0\ 0\ 1)$, $(0\ 0\ 1\ 0)$ e trasporti gli altri due punti fondamentali nei due punti invarianti di quel G_6 cui appartiene $(a\ b\ c)$. Questi punti sono:

$$A \equiv (2 + \sqrt{3}, 1, 0, 0); \quad A' \equiv (-2 + \sqrt{3}, 1, 0, 0)$$

e la trasformazione suddetta è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1(2 + \sqrt{3}) + x_2(-2 + \sqrt{3}), & x_1 + x_2, & x_3, & x_4 \\ & x_1 & x_2 & x_3 \quad x_4 \end{array} \right\}.$$

Mediante questa, la equazione del nostro fascio diviene:

$$\begin{aligned} F \equiv & x_1^4 \{ (55 + 32\sqrt{3})\lambda + 41 + 24\sqrt{3} \} + x_2^4 \{ (55 - 32\sqrt{3})\lambda + (41 - 24\sqrt{3}) \} + \\ & + x_1(x_3^3 + x_4^3) \{ \lambda(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} \} + x_2(x_3^3 - x_4^3) \{ \lambda(-\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} \} + \\ & + x_1^2 x_3 x_4 \{ -3\lambda + 21 + 12\sqrt{3} \} + x_2^2 x_3 x_4 \{ 3\lambda - 21 + 12\sqrt{3} \} + \\ & + 18(\lambda - 1)x_1^2 x_2^2 + \frac{3}{4}(\lambda - 1)x_3^2 x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Il valore di λ che annulla il coefficiente di x_1^4 individua una superficie del fascio che ha un punto doppio conico in $(1\ 0\ 0\ 0)$ cioè in un vertice del decagono D . Ma il G_{60}^V opera transitivamente sui vertici di D (n.° 13); dunque tale superficie ha 10 punti conici nei vertici suddetti. Analogamente, il valore di λ che annulla il coefficiente di x_2^4 individua una superficie del fascio che ha 10 punti doppi nei vertici del decagono D' . Niuna di queste due superficie ha altri punti doppi oltre i 10 suddetti. Infatti niuna di esse potrebbe possederne un altro P senza possederne in conseguenza più di altri 6 (a causa dei trasformati di P per mezzo del G_{60}^V). Avremmo quindi una superficie di 4.° ordine con più di 16 punti doppi e quindi con infiniti punti doppi costituenti una curva che non può comporsi di rette, o di coniche a causa della sua invarianza rispetto al G_{60}^V . Sarà quindi una cubica gobba. Ma le cubiche gobbe invarianti del G_{60}^V sono solamente due e le superficie del fascio che le contengono sono certamente diverse dalle attuali (n.° 25).

La esistenza di queste due superficie ci fornisce dunque una nuova proprietà dei decagoni D e D' (n.º 13). Essa può esprimersi così:

I vertici dei due decagoni D , D' (formati dai punti uniti dei sottogruppi di 6.º ordine) si possono riguardare come punti doppi di due superficie di 4.º ordine invarianti ciascuna rispetto al G_{60}^V , l'una circoscritta a D e l'altra a D' .

Esse appartengono al fascio precedente e sono individuati dai valori di λ dati da

$$(55 \pm 32\sqrt{3})\lambda + 41 \pm 24\sqrt{3} = 0.$$

I punti doppi di ciascuna sono conici.

24. Nessuna delle due superficie, ora trovate, è un simmetroide.

Sia φ una di esse. Per escludere la possibilità che essa sia un simmetroide osserviamo anzitutto che per un punto doppio P di φ non passano rette esistenti sopra φ . Infatti, anzitutto l'equazione di φ ci dice che la retta $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; asse di punti uniti per (abc) ; non appartiene a φ . Sia s questo asse ed r una retta supposta esistente sopra φ e passante per P . Allora il piano $r.s$ taglia la (abc) secondo una omologia piana a periodo 3 che ha s per asse e per centro il punto Q dove il piano $r.s$ taglia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Se Q non esiste sopra r , poichè r è diverso da s , ne viene che applicando a r la omologia piana suddetta troveremo altre due rette r' , r'' appartenenti a φ e passanti per P . Esse dunque appartengono al cono osculatore in P e poichè sono tre rette in un piano segue che il cono in questione si spezza e P è biplanare mentre osservammo già che deve essere conico (n.º 23). Se poi Q esiste sopra r , cioè appartiene a φ , esso coinciderà necessariamente con (0010) , o con (0001) e in tal caso si verifica direttamente sulla equazione di φ che r non esiste. Segue adesso che φ non può essere un simmetroide, perchè se lo fosse il cono circoscritto a φ da un suo punto doppio si spezzerebbe in due coni cubici di cui le 9 generatrici comuni sarebbero le rette che uniscono quel punto doppio agli altri 9 (*). Ora nel caso attuale queste rette non possono appartenere a φ , quindi le due cubiche di contatto dei due coni suddetti hanno comuni i nove punti doppi rimanenti e quindi coincidono in una sola invariante rispetto al G_6 cui appartiene (abc) . Ma in tal caso essa deve appoggiarsi in due punti diversi all'asse di punti uniti

(*) Cf. p. es. ROHN, *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung*, Math. Annal. 29.

di (abc) che è $x_3 = 0, x_4 = 0$ (n.º 25) e non può essere più curva di contatto con φ di un cono cubico col vertice in P .

25. Per completare la ricerca delle superficie singolari del nostro fascio cerchiamo le intersezioni di $x_3 = 0, x_4 = 0$ con le equazioni che si ottengono annullando le derivate prime della F' del n.º 23, il che equivale a cercare i punti doppi del fascio che esistono eventualmente sopra l'asse di punti uniti di (abc) . Otterremo così le due equazioni semplicissime seguenti:

$$x_1 \left\{ x_1^2 \left((55 + 32\sqrt{3})\lambda + 41 + 24\sqrt{3} \right) + 9(\lambda - 1)x_2^2 \right\} = 0$$

$$x_2 \left\{ x_2^2 \left((55 - 32\sqrt{3})\lambda + 41 - 24\sqrt{3} \right) + 9(\lambda - 1)x_1^2 \right\} = 0.$$

Le soluzioni $(1000), (0100)$ con $(55 \pm 32\sqrt{3})\lambda + 41 \pm 24\sqrt{3} = 0$ sono già state considerate al n.º 23. Escludendole, rimangono le due condizioni

$$x_1^2 \left\{ (55 + 32\sqrt{3})\lambda + 41 + 24\sqrt{3} \right\} + 9(\lambda - 1)x_2^2 = 0$$

$$x_2^2 \left\{ (55 - 32\sqrt{3})\lambda + 41 - 24\sqrt{3} \right\} + 9(\lambda - 1)x_1^2 = 0.$$

che debbono esser soddisfatte insieme. Annullandone la resultante si trova:

$$2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

I due valori di λ che questa equazione individua determinano due superficie del fascio dotate ciascuna di due punti doppi distinti sopra l'asse di punti uniti di (abc) . Per esaminarne la specie si osservi che la quadrica polare di un punto $(y_1, y_2, 0, 0)$ generico sopra $x_3 = 0, x_4 = 0$ rispetto a una superficie generica del fascio è:

$$x_1^2 \{ m y_1^2 + 3(\lambda - 1)y_2^2 \} + 12(\lambda - 1)x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 \{ n y_2^2 + 3(\lambda - 1)y_1^2 \} = 0$$

dove per brevità si è posto:

$$m = (55 + 32\sqrt{3})\lambda + 41 + 24\sqrt{3}, \quad n = (55 - 32\sqrt{3})\lambda + 41 - 24\sqrt{3}.$$

La quadrica precedente si compone di due piani. Essi coincideranno quando sia:

$$3(\lambda - 1)m y_1^4 + 3(\lambda - 1)n y_2^4 + (m n - 27(\lambda - 1)^2) y_1 y_2 = 0.$$

D'altra parte i punti d'incontro di $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ con una superficie generica del fascio sono dati da

$$m y_1^4 + n y_2^4 + 18(\lambda - 1) y_1^2 y_2^2 = 0.$$

Ebbene la condizione, in λ , perchè le ultime due equazioni coincidano è ancora

$$2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Ciò dimostra che i due punti doppi in questione sono uniplanari. Ma il G_{60}^V opera transitivamente sopra tutti i sottogruppi di 6.º ordine, quindi ciascuna delle due superficie ora trovate possiede 20 punti uniplanari e quindi ne ha infiniti. D'altra parte nè la superficie, nè il luogo dei suoi punti doppi uniplanari possono spezzarsi (n.º 20, 23), quindi non rimane altra ipotesi ammissibile che la superficie sia la sviluppabile osculatrice di una curva gobba. È così stabilita la esistenza delle due cubiche gobbe invarianti del G_{60}^V (*). Le due soluzioni ora trovate costituiscono le sviluppabili osculatrici delle due cubiche suddette.

26. Dimostriamo adesso che le due sviluppabili precedenti e le due superficie con 10 punti doppi ciascuna, trovate al n.º 23, costituiscono tutte le possibili superficie singolari del nostro fascio. Perciò osserveremo, avanti, che le due cubiche gobbe ora trovate sono le sole invarianti rispetto al G_{60}^V . Infatti sia C una cubica gobba invariante rispetto a G_{60}^V . Essa sarà invariante anche rispetto a uno qualunque dei sottogruppi G_5 , e quindi le facce del tetraedro degli elementi uniti di tali G_5 debbono tagliare, ciascuna, la C in un gruppo di 3 punti invariante rispetto a G_5 . Dunque la C passerà per due vertici MM' del tetraedro suddetto: se t e t' sono le tangenti a C in M , M' e π , π' i piani osculatori; saranno facce del tetraedro i piani π , π' e i piani $M.t'$, $M'.t$. I punti MM' si corrisponderanno nelle cinque involuzioni gobbe che col G_5 formano un G_{10} (n.º 14) e quindi la curva C sarà necessariamente circoscritta a uno dei dodecagoni invarianti formati con i 24 punti uniti dei sei G_5 (n.º 15). Ma tali dodecagoni sono due. Dunque le cubiche C non possono essere altro che due, cioè quelle già trovate nel numero precedente. Ciò premesso ammettiamo che la superficie Φ sia una delle superficie singolari del fascio. Essa non può esser degenera (n.º 20). I suoi punti doppi saranno in numero finito o infinito. Nel 1.º caso non pos-

(*) KOHN, *Ueber die Oktaedérlage und die Ikosaedérlage von zwei cubischen Raumcurven*. Wien, Ber. 108, 58-68.

sono essere più di 16 e debbono costituire un poligono invariante. Esso dunque sarà necessariamente, o uno dei due decagoni del n.º 13, o uno dei due dodecagoni del n.º 15. Se è uno dei decagoni si hanno le soluzioni del n.º 23. Se è uno dei dodecagoni si osservi che essi appartengono effettivamente a tutte le superfici del fascio, ma soltanto le due sviluppabili osculatrici del n.º 25 li ammettono come punti doppi perchè se fossero doppi per tutte le superfici del fascio, tutte dovrebbero contenere le due cubiche gobbe invarianti (incontrandole in 24 punti). Ciò non è evidentemente. È dunque impossibile che la Φ abbia un numero finito di punti doppi nei vertici dell'uno, o dell'altro dei dodecagoni in parola. Nel 2.º caso poi in cui la Φ possieda infiniti punti doppi essi debbono costituire una curva non degenera (n.º 23) che non può essere nè una retta, nè una conica perchè il G_{60}^V non ammette nè una retta, nè una conica invariante. Tale curva sarà dunque una cubica e poichè abbiamo già osservato che tali cubiche invarianti sono soltanto due si ricade nelle due sviluppabili già considerate. Possiamo dunque enunciare i seguenti teoremi:

Il G_{60}^V possiede due e due sole cubiche gobbe invarianti. Ciascuna è circoscritta a uno dei due dodecagoni invarianti costituiti dai 24 punti uniti dei sottogruppi di 5.º ordine. Sono secanti comuni delle due cubiche i 10 assi di punti uniti dei sottogruppi di 3.º ordine ().*

Il medesimo G_{60}^V possiede quattro sole superficie singolari invarianti di 4.º ordine. Due sono, naturalmente, le sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe precedenti; le altre due hanno 10 punti doppi conici ciascuna nei vertici dei decagoni D e D' e sono quelle già descritte al n.º 23.

27. Fra i cinque gruppi icosaedrici trovati (n.º 8, 9, 10) il G_{60}^V sarà l'unico dotato di cubiche gobbe invarianti? La risposta è affermativa. Infatti, osserviamo che una collineazione a periodo 3 che ammette una cubica gobba invariante non può essere biassiale perchè una tal curva non possiede trisecanti. Ciò esclude il G_{60}^{III} e il G_{60}^{IV} (n.º 9).

Poi, osserveremo che se un G_4 ammette una cubica gobba invariante esso non può essere un G_4^I (n.º 1) costituito cioè dalle tre involuzioni gobbe che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti di uno stesso tetraedro. Ciò esclude il G_{60}^I e G_{60}^{II} (n.º 8).

(*) STURM, *Combien y a-t-il de secantes communes à deux cubiques gauches?* Annali di Matematica, serie II, Tomo III.

Il G_{60}^V è l'unico fra i cinque gruppi icosaedrici trovati il quale sia dotato di cubiche gobbe invarianti (non degeneri) (*).

28. Viceversa data una cubica gobba come si può costruire un G_{60}^V rispetto al quale essa sia invariante? La costruzione può condursi nel modo seguente.

Anzitutto se una cubica gobba è trasformata in se da una involuzione gobba si vede subito che gli assi devono appoggiarsi alla cubica. V'ha di più: sieno A, A' i punti di appoggio; t, t' le relative tangenti; π, π' i piani osculatori. Allora i piani π e $A.t'$ sono uniti; così i piani π' e $A'.t$. Segue che gli assi della involuzione in parola sono precisamente le rette $\pi.(A.t')$; $\pi'.(A'.t)$: se cioè si immagina il tetraedro $\pi, \pi', A.t', A'.t$ gli assi suddetti sono quei due spigoli del tetraedro che incontrano ciascuno la curva in un sol punto. E si può dire che fissati due punti della curva restano anche fissate due rette per quei punti che possono riguardarsi come assi di una involuzione gobba che trasforma la cubica in se stessa. Allora per costruire un G_4^I rispetto al quale la curva sia invariante basterà prendere su di essa tre coppie, di punti, armoniche a due, a due e ripetere per ciascuna la costruzione precedente. Otterremo così le tre involuzioni gobbe del G_4^I cercate. Passiamo adesso a costruire un G_{12}^{III} di cui il precedente G_4^I è gruppo quadrimio. Se una collineazione a periodo 3 trasforma la cubica gobba in se stessa, abbiamo già osservato che la collineazione deve essere soltanto assiale (non biassiale). Adesso si può aggiungere che l'asse di punti uniti della collineazione deve essere una corda della curva, che le tangenti nei punti di appoggio debbono incontrare l'asse di piani uniti nei due punti uniti che l'asse medesimo contiene, che finalmente quest'ultimo deve essere la intersezione dei piani osculatori alla curva nei due punti suddetti. Viceversa si vede subito che se una collineazione a periodo 3 soddisfa a tali condizioni, la curva è mutata in se stessa. Ciò premesso sieno sulla cubica, AA', BB', CC' le tre coppie di punti che hanno servito a individuarne G_4^I . Esse individuano anche sulla curva un G_4 di proiettività binarie appartenente a un G_{12} pure di proiettività binarie perchè la curva è razionale. Sia Ω una delle proiettività binarie a periodo tre del G_{12} suddetto ed M, M' i punti uniti di Ω . Allora la collineazione spaziale a periodo 3 che ha la retta MM' per asse

(*) Analogamente si vede che il solo G_{12}^{III} , fra i gruppi tetraedrici, e il G_{24}^V , fra gli ottaedrici, ammettono cubiche gobbe invarianti.

di punti uniti, che ha per asse di piani uniti la intersezione dei piani osculatori alla curva in M, M' e su questa intersezione per punti uniti quelli situati sulle tangenti in M, M' è la collineazione che aggiunta al G_4^{II} genera il G_{12}^{III} cercato.

Finalmente per trovare il G_{60}^{V} indichiamo con C_2, C_3 due proiettività del G_{12} binario a periodo 2 e 3 rispettivamente e osserviamo che sulla curva, a causa della sua razionalità, esiste un G_{60} binario di cui una proiettività I a periodo 2 soddisfa le condizioni $IC_3I = C_3^2, (IC_2)^3 = 1$. La proiettività binaria I insieme al G_{12} binario individua il G_{60} binario sulla curva. Ebbene i punti doppi di I individuano, al modo indicato sopra, una involuzione gobba che trasforma la cubica in se stessa e che col G_{12}^{III} genera il gruppo cercato G_{60}^{V} .

§ IV. STUDIO DI UN'ALTRA PARTICOLARE SUPERFICIE INVARIANTE.

29. Oltre le superficie singolari del fascio (trovato al n.° 22) studiate nel paragrafo precedente, esiste nel fascio medesimo un'altra superficie notevole che possiede 60 rette senza essere rigata e di cui ora vogliamo esporre le proprietà principali.

Riprendiamo perciò l'equazione del fascio suddetto:

$$\begin{aligned} (2\lambda + 1)x_1(x_1^3 + 2\sqrt{2}x_1^3) + (\lambda + 2)x_2(-x_2^3 + 2\sqrt{2}x_2^3) + \\ + 2\sqrt{3}(x_1^2 + \lambda x_2^2)(x_1x_2 + x_3x_4) + \\ + 2\sqrt{6}(\lambda x_1x_3^2 - x_2x_4^2) + 3(\lambda - 1)(x_1x_2 - x_3x_4)^2 = 0. \end{aligned}$$

Da questa risulta che la retta $x_1 = 0, x_2 = 0$, cioè l'asse di piani uniti di (abc) tocca tutte le superficie del fascio in $(0010), (0001)$, cioè nei due punti uniti di (abc) che esistono su quell'asse. Siccome G_{60}^{V} opera transitivamente sopra le sue collineazioni a periodo 3, così ne viene che tutti gli assi di piani uniti delle collineazioni in parola toccano tutte le superficie del fascio nei due punti uniti che ciascuno contiene. Se dunque si considera quella superficie del fascio che passa per un punto di uno di tali assi esterno ai due punti di contatto in discorso, ne segue che tale superficie conterrà per intero quell'asse e quindi anche i nove rimanenti.

La superficie cercata è dunque caratterizzata dal contenere, per intero, i dieci assi di piani uniti dei sottogruppi di 3.^o ordine. Ecco dunque trovato un primo gruppo di 10 rette esistenti per intero sulla superficie e sghembe a due, a due. (Infatti se due s'incontrassero, il loro piano sarebbe unito per il gruppo generato dai due G_3 relativi, cioè o per un G_{12}^{III} , o per l'intero G_{60}^V : ma nè G_{12}^{III} , nè G_{60}^V hanno piani invarianti.)

L'equazione della superficie si ottiene da quella del fascio per $\lambda = 1$ ed è la seguente :

$$F = \sqrt{3}(x_1^4 - x_2^4) + 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + 2\sqrt{2}(x_1x_3^3 - x_2x_4^3) + \\ + 2\sqrt{6}(x_1x_4^3 + x_2x_3^3) + 6x_3x_4(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

30. Cerchiamo le altre rette della superficie. Perciò osserviamo che tagliando F col piano $x_1 = \mu x_2$ la sezione si spezza in $x_2 = 0$ e

$$x_2^2(\mu + \sqrt{3})(\mu\sqrt{3} - 1)(\mu^2 + 1) + 2\sqrt{2}x_3^2(\mu + \sqrt{3}) + 2\sqrt{2}x_4^2(\mu\sqrt{3} - 1) + \\ + 6x_2x_3x_4(\mu^2 + 1) = 0. \quad (1)$$

Le condizioni perchè la (1) abbia almeno un punto doppio sono una qualunque delle seguenti :

$$\mu + \sqrt{3} = 0, \quad \mu\sqrt{3} - 1 = 0, \quad \mu^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$(\mu + \sqrt{3})^2(\mu\sqrt{3} - 1)^2 + (\mu^2 + 1)^2 = 0 \quad (3)$$

discutiamo separatamente le (2) dalla (3).

31. Una qualsiasi delle (2) ci fornisce una seconda specie di rette esistenti sulla F e che chiameremo rette di seconda specie. Per stabilirne l'esistenza si osservi che ciascuno dei piani $x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0$, $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$ taglia la F oltre che nella $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ in un'altra retta e in una conica *non* degenerare. Ciò accade se ci serviamo dei valori di μ che annullano le prime due delle (2). Se ci serviamo della 3.^a si hanno i due piani $x_1 \pm i x_2 = 0$ ognuno dei quali taglia la F oltre che nella $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ in tre rette che si incontrano in uno stesso punto di $(x_3 = 0, x_4 = 0)$, cioè dall'asse di punti uniti di $(a b c)$ e che sono rappresentate da :

$$x_3^2(\pm i + \sqrt{3}) + x_4^2(\pm i\sqrt{3} - 1) = 0.$$

Sembrerebbe dunque che le rette che provengono dal soddisfare la 3.^a delle (2) fossero di specie diversa da quelle che provengono dal soddisfare

le prime due delle (2) medesime. Ciò non è. Infatti, si consideri la $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0, x_4 = 0)$ proveniente dal valore di μ che soddisfa la prima (2). Essa è unita per la (abc) . Invece per effetto della (ced) seguente:

$$C_2 \cdot T = (ab) \cdot (cd) \cdot (ab)(de) = (ced) = \begin{cases} x_1 \equiv x_1\sqrt{3} + x_2 + 2\sqrt{2}x_3 \\ x_2 \equiv -x_1 + x_2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}x_4 \\ x_3 \equiv x_1\sqrt{2} - x_2\sqrt{6} + 2x_4 \\ x_4 \equiv x_1\sqrt{6} + x_2\sqrt{2} - 2x_3 \end{cases}$$

si osservi che la stessa retta $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0, x_4 = 0)$ dà luogo al ciclo delle tre rette

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2\sqrt{3} = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x_2\sqrt{2} + x_3 + \sqrt{3}x_4 = 0 \\ x_1\sqrt{3} + x_2 - x_3\sqrt{2} = 0 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x_1\sqrt{3} + x_2 - x_3\sqrt{2} + x_4\sqrt{6} = 0 \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

le quali si appoggiano tutte e tre alla retta:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2\sqrt{3} + x_4\sqrt{2} = 0 \\ x_1\sqrt{3} - x_2 + x_3\sqrt{2} = 0 \end{array} \right\}$$

che è asse di piani uniti per la (ced) e passano per il punto $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ che è situato sull'asse di punti uniti della (ced) medesima. Si vede anche che la quadrica polare di $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ si compone dei due piani:

$$x_1 + x_2\sqrt{3} + x_4\sqrt{2} = 0, \quad x_1\sqrt{3} - x_2 + x_3\sqrt{2} = 0$$

dei quali il primo è piano tangente a F in $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ e contiene le tre rette (4). Ciò prova l'affermazione fatta.

Le rette che si trovano considerando le soluzioni (2) saranno chiamate le rette di 2.^a specie della superficie F . Quante sono esse? Per rispondere a tale domanda osserviamo che le considerazioni precedenti fatte per la $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0, x_4 = 0)$, unita per (abc) , possono ripetersi per la (acb) . $(ced)abc = (aed)$, e per la $(acb)(aed)abc = (bed)$, nelle quali trasformazioni la retta in questione rimane inalterata. Dunque le rette di 2.^a specie sono $\frac{10 \cdot 6}{3} = 20$. Abbiamo quindi il seguente teorema:

La superficie F possiede altre 20 rette. Esse s'incontrano a tre, a tre in 20 punti di F ed esistono a tre, a tre in 20 piani tangenti a F in guisa

che quelle che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa. Si ha così un nuovo icosagono invariante, rispetto al G_{60}^V , di cui i vertici sono analoghi ai noti punti di ECKARDT sulle superficie cubiche particolari che portano un tal nome. Per ogni vertice passano tre rette di 2.^a specie; sopra ogni retta di 2.^a specie esistono tre vertici dell'icosagono suddetto. La sezione del piano tangente in uno di tali vertici si compone delle tre rette di 2.^a specie che vi passano e dell'asse di piani uniti della collineazione a periodo 3 che permuta quelle tre rette.

È questo il secondo gruppo di rette esistenti per intero sulla F .

Tanto sulle 10 rette di 1.^a specie, quanto su quelle di 2.^a il G_{60}^V agisce transitivamente.

32 Finalmente, l'equazione (3) del n.° 30 ci fornisce la 3.^a specie di rette sopra F . Sia la (3) soddisfatta. Ognuna delle sue radici individua un piano passante per $x_1 = 0, x_2 = 0$ il quale taglia la superficie F ulteriormente in un trilatero. E poichè le radici suddette sono tutte distinte esistono 4 di questi piani per la retta in discorso e si hanno 12 nuove rette di F appoggiate a $x_1 = 0, x_2 = 0$. Ma anzitutto occorre dimostrare che le rette ora trovate sono *nuove soluzioni* effettivamente. Infatti: nessuna di esse può esser retta di prima specie poichè appoggiandosi già a una retta di 1.^a specie (nel caso precedente alla $x_1 = 0, x_2 = 0$) avremmo due rette di 1.^a specie con un punto e un piano comune il che è impossibile (n.° 29). Prendiamo poi a considerare una retta di 2.^a specie e dimostriamo che essa non può figurare fra le rette trovate dianzi. Siccome il G_{60}^V opera transitivamente sulle rette di 2.^a specie basterà considerare una qualunque di esse: ad es. quella del numero precedente. Essa incontra gli assi di piani uniti di (ced) , (aed) , (bed) ed è unita per (abc) . Con ciascuno degli assi suddetti di (ced) , (aed) , (bed) individua un piano che taglia F secondo 4 rette di cui 3 passano per un punto, con l'asse di piani uniti di (abc) individua un piano secante la F secondo due rette e una conica non degenerare. Cioè con nessuno dei 4 suddetti assi dà luogo a un piano che tagli F ulteriormente secondo un vero e proprio trilatero. Se dunque dimostreremo che la retta di 2.^a specie, sopra nominata, non incontra assi di piani uniti di altre collineazioni a periodo 3, sarà dimostrato che niuna retta di 2.^a specie figura fra le nuove soluzioni trovate al principio di questo numero. Perciò osserviamo che se la retta r suddetta si appoggiasse all'asse di piani uniti di (bcd) si appoggerebbe anche a quello di (adc) e di (abd) che sono le trasformate di (bcd) mediante il $G_3 = (abc)$, poichè giova ricordare che la r è unita

per un tale G_3 . Dunque la r appoggiandosi agli assi dei piani uniti di (abc) , (bcd) , (adc) , (abd) è necessariamente una delle rette invarianti di $G_{12,e}^{III}$ (n.º 3 e 4). Analoga considerazione esclude che la r possa incontrare l'asse di piani uniti di (bce) , o di (aec) , o di (abe) . Dunque le rette di F forniteci dalla (3) del n.º 30 sono sicuramente nuove soluzioni.

33. Quante sono queste nuove soluzioni fra tutte? Per rispondere a tale domanda osserviamo anzitutto che qualunque sia il numero di queste rette di F , che chiameremo di 3.^a specie, il G_{60}^V opererà transitivamente su di esse. Ne segue che il loro numero sarà un divisore di 60. Ma non può essere 60 altrimenti il numero totale delle rette di F sarebbe 94 cioè superiore a 64, limite massimo delle rette che una superficie del 4.º ordine può contenere senza essere rigata (*). E d'altra parte è certo che F non è rigata perchè sarebbe anche singolare e le superficie singolari del fascio furono già considerate, nè fra esse figura la F (§ III). Deve dunque essere questo numero un divisore di 60 inferiore a 60. Ma non può essere nè uno, nè due, nè tre, nè quattro perchè non esistono sistemi invarianti costituiti da un tal numero di rette. Non può esser cinque, perchè niuna delle rette invarianti, rispetto a un G_{12} appartiene a F . Non può esser sei, perchè ciascuna dovrebbe essere invariante rispetto a un G_{10} e niun G_{10} possiede di tali rette. Non può esser 10, perchè le sole rette invarianti che un G_6 possiede sono gli assi del G_3 che il G_6 contiene. Non può esser 12, perchè un G_5 non possiede rette invarianti. Non può esser 15 perchè ciascuna sarebbe invariante rispetto a un G_4 . Ora è facile verificare direttamente che nessuna delle rette invarianti rispetto a un G_4 (le quali costituiscono una serie rigata) appartiene a F . E in ultimo non può esser 20, perchè essendo ciascuna unita per un G_3 o sarebbe un asse di G_3 , o una retta di 2.^a specie. Non rimane dunque altra ipotesi che il numero cercato sia 30 e ciascuna sia quindi unita per una sola involuzione gobba. Ne segue che ciascuna di queste rette di 3.^a specie si appoggia agli assi di una involuzione gobba e agli assi di piani uniti di 4 G_3 . Dunque: *Esistono sulla superficie F , oltre quelle già trovate, altre 30 rette le quali a tre, a tre e insieme a una retta di 1.^a specie compongono 40 quadrilateri piani giacenti per intero sulla superficie e ciascuno con i vertici tutti distinti.*

(*) SCHUR, *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung*. Math. Annal., p. 20.

La superficie non possiede altre rette. Perchè non potrebbe possederne più di 4 per il già citato teorema di SCHUR e queste 4 dovrebbero costituire un sistema invariante.

La superficie F possiede in tutto 60 rette divise in tre sistemi, invarianti ciascuno, costituiti di 10, di 20, di 30 rette sopra ognuno dei quali il G_{60}^V opera transitivamente.

Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

(Di GUIDO FUBINI, a Pisa.)

MEMORIA I.

Questo lavoro e un altro che mi riservo di pubblicare fra breve trattano della teoria generale degli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti, delle proprietà di questi gruppi, dei loro sottogruppi finiti discontinui, e della determinazione degli spazii a quattro dimensioni che ammettono un tale gruppo di movimenti. I metodi di cui il prof. BIANCHI si servì (*) per determinare tutti gli spazii a tre dimensioni con un gruppo continuo di movimenti non illuminano abbastanza sul problema generale: uno dei risultati del presente lavoro è appunto quello di dare un metodo generale per risolvere con sole quadrature il problema, e che, applicato al caso particolare di spazii a tre dimensioni, permetterebbe di trovare rapidamente i risultati del prof. BIANCHI. Ma nè il metodo generale, nè il metodo del prof. BIANCHI generalizzato possono poi condurre senza una interminabile serie di calcoli all'effettiva determinazione di tali spazii quando il numero delle loro dimensioni è maggiore di tre: la Memoria seguente svolgerà per il caso di quattro dimensioni un metodo assai più rapido, e comodo.

Lo studio infine dei sottogruppi finiti discontinui di movimenti ammessi da tali spazii condurrà, fra l'altro, a notevoli rappresentazioni degli spazii dei tipi (VIII) e (IX) del prof. BIANCHI sulla sfera e sulla pseudosfera.

(*) Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1897: *Sugli spazii a tre dimensioni, che ammettono*, ecc. Questa Memoria sarà in seguito indicata con (A). Avverto pure che la classica *Theorie der Transformationsgruppen* del LIE-ENGEL sarà indicata in seguito soltanto col nome di LIE.

Un altro risultato del presente lavoro che spero possa presentare qualche interesse, è di dare le condizioni necessarie e sufficienti affinché un gruppo si possa considerare come gruppo di movimenti: condizioni, da cui si può trarre qualche proprietà degna di nota per taluni di tali gruppi.

Mi sia permesso infine di ringraziare qui vivamente l'illustre prof. LEVI-CIVITA, che acconsentì a leggere questo lavoro, prima che fosse pubblicato.

§ 1. Noi vogliamo trovare anzitutto dei teoremi generali relativi alla ricerca degli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti: principio della nostra ricerca sarà di distinguere il problema in due parti: la prima relativa alla ricerca dei gruppi, che si possono considerare come gruppi di movimenti di uno spazio, la seconda relativa alla determinazione di uno spazio, di cui sia noto il gruppo corrispondente.

Il teorema fondamentale della prima parte delle nostre ricerche è il seguente:

Se un gruppo G_m trasforma in sè uno spazio S_n , e se le varietà minime invarianti sono delle V_{n-k} , ognuna di queste V_{n-k} è pure trasformata in sè da un gruppo proprio ad m parametri, e il gruppo G_m si può, con un opportuno cangiamento di variabili, ridurre a un gruppo transitivo su $n - k$ variabili ().*

Per dimostrare il nostro teorema, prendiamo una varietà $V_{n-1}^{(1)}$ composta di V_{n-k} invarianti, tale cioè che per ogni punto di $V_{n-1}^{(1)}$ passi almeno una V_{n-k} invariante contenuta nella $V_{n-1}^{(1)}$ e scegliamo come coordinata $(n - k + 1)^{\text{esima}}$ di un punto A di S_n la distanza geodetica y_{n-k+1} dal punto stesso alla $V_{n-1}^{(1)}$ in discorso. Le $y_{n-k+1} = \text{cost.}$ sono delle varietà V_{n-1} geodeticamente parallele alla $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi sono come la $V_{n-1}^{(1)}$ invarianti, ossia composte di varietà minime invarianti. Immaginiamo ora nella $V_{n-1}^{(1)}$ scelta una $V_{n-2}^{(1)}$ composta pure di V_{n-k} invarianti e consideriamo la varietà $V_{n-1}^{(2)}$ generata dalle geodetiche dello spazio ambiente normali a $V_{n-1}^{(1)}$ nei punti di $V_{n-2}^{(1)}$. Le trasformazioni di G_m mutando la $V_{n-1}^{(1)}$ e la $V_{n-2}^{(1)}$ in sè stesse, e le geodetiche normali a $V_{n-1}^{(1)}$ pure

(*) Come seppi, dopo che questo lavoro era già terminato, in una Memoria, che io non conoscevo, del BISCONCINI, inserita nel *Nuovo Cimento* (Aprile 1901): *Su una classificazione dei problemi dinamici*, questo teorema era già stato enunciato: però la dimostrazione del BISCONCINI in realtà vorrebbe invece provare che «ogni gruppo continuo con ρ trasformazioni infinitesime indipendenti si può ridurre a un gruppo su ρ variabili» ed è perciò completamente sbagliata (cfr. LIE; vol. I, § 109), perchè questa proposizione non è vera in generale. Le mie considerazioni rendono rigorosi gli altri bei risultati del BISCONCINI.

in geodetiche normali a $V_{n-1}^{(1)}$, è ben certo che la $V_{n-1}^{(2)}$ è una varietà invariante, ossia che una V_{n-k} invariante che passa per un suo punto giace tutta in essa. La $V_{n-1}^{(1)}$ dovrà quindi tagliare ogni varietà $y_{n-k+1} = \text{cost.}$ pure in varietà invarianti. Posto questo, osserviamo che per determinare la posizione di un punto di S_n , basterà conoscerne la proiezione geodetica $A^{(1)}$ su $V_{n-1}^{(1)}$ e la coordinata y_{n-k+1} .

E noi siamo così ricondotti per determinare un sistema di coordinate in S_n , a cercare un sistema di coordinate per la $V_{n-1}^{(1)}$, la quale varietà è, come lo spazio ambiente, trasformata in sè dal gruppo G_m . E noi perciò opereremo sulla $V_{n-1}^{(1)}$, come abbiamo operato in S_n . Noi determineremo cioè la posizione di un punto $A^{(1)}$ di $V_{n-1}^{(1)}$ nel seguente modo: Prenderemo una varietà $V_{n-2}^{(1)}$, tutta contenuta in $V_{n-1}^{(1)}$ e composta di varietà minime invarianti e individueremo un punto $A^{(1)}$ di $V_{n-1}^{(1)}$ dando la sua distanza geodetica y_{n-k+2} dalla $V_{n-2}^{(1)}$ (cioè la distanza misurata sulla geodetica di $V_{n-1}^{(1)}$ tirata dal punto in discorso normalmente alla $V_{n-2}^{(1)}$) e la posizione della sua proiezione $A^{(2)}$ sulla $V_{n-2}^{(1)}$ stessa. E come coordinata $(n-k+2)^{\text{esima}}$ di un punto qualunque A di S_n prenderemo appunto la y_{n-k+2} testè definita, relativa alla sua proiezione $A^{(1)}$ sulla $V_{n-1}^{(1)}$. Ora, per un ragionamento già usato, è ben chiaro che le $y_{n-k+2} = \text{cost.}$ sono nella $V_{n-1}^{(1)}$ varietà invarianti, perchè geodeticamente parallele alla $V_{n-2}^{(1)}$ entro $V_{n-1}^{(1)}$; e per quanto abbiamo notato saranno pure invarianti quelle varietà di S_n generate dalle geodetiche di S_n normali a $V_{n-1}^{(1)}$ nei punti di una di queste varietà $y_{n-k+2} = \text{cost.}$, ossia anche *in tutto lo spazio ambiente* S_n le $y_{n-k+2} = \text{cost.}$ sono varietà (a $n-1$ dimensioni) invarianti.

Ci siamo dunque ridotti a determinare la posizione di un punto $A^{(2)}$ di $V_{n-2}^{(1)}$. E anche qui, procedendo con lo stesso metodo, prenderemo una $V_{n-3}^{(1)}$, contenuta nella $V_{n-2}^{(1)}$, e invariante; e definiremo la posizione di un punto $A^{(2)}$ di $V_{n-2}^{(1)}$ dandone la distanza geodetica y_{n-k+3} (cioè misurata lungo una geodetica di $V_{n-2}^{(1)}$ normale alla $V_{n-3}^{(1)}$) dalla $V_{n-3}^{(1)}$ stessa e la posizione della sua proiezione $A^{(3)}$ sulla $V_{n-3}^{(1)}$. E definiremo poi come coordinata $(n-k+3)^{\text{esima}}$ di un punto qualunque A di S_n la y_{n-k+3} , testè definita, relativa alla proiezione $A^{(2)}$ su $V_{n-2}^{(1)}$ della proiezione $A^{(1)}$ del punto A sulla $V_{n-1}^{(1)}$. Per una osservazione già usata, le $y_{n-k+3} = \text{cost.}$ (che nella $V_{n-2}^{(1)}$ sono varietà invarianti, perchè geodeticamente parallele alla $V_{n-3}^{(1)}$) sono varietà pure invarianti in $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi anche nello spazio ambiente S_n .

Così si prosegue fino ad arrivare a una $V_{n-k+1}^{(1)}$ invariante, in cui la posizione di un suo punto qualunque $A^{(k-1)}$ si definisce dandone la distanza

geodetica y_n da una $V_{n-k}^{(1)}$ invariante della $V_{n-k+1}^{(1)}$ e la posizione della sua proiezione $A^{(k)}$ sulla $V_{n-k}^{(1)}$ stessa. E si definisce come coordinata *n*esima di un punto A di S_n la y_n , testè definita, relativa a quel punto $A^{(k-1)}$ di $V_{n-k+1}^{(1)}$, a cui si perviene mediante le successive proiezioni considerate. Nella $V_{n-k}^{(1)}$ si assume poi un sistema qualsiasi di coordinate y_1, y_2, \dots, y_{n-k} ; e per le prime $n-k$ coordinate di un punto A di S_n si scelgono appunto le $y_1 \dots y_{n-k}$ relative al corrispondente punto $A^{(k)}$ di $V_{n-k}^{(1)}$ a cui si arriva mediante successive proiezioni.

Le osservazioni da noi fatte ci dicono senz'altro che le

$$y_{n-k+i} = \text{cost.} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

sono in S_n varietà invarianti, e che quindi le

$$y_{n-k+i} = \text{cost.}, \dots, y_n = \text{cost.}$$

sono precisamente le varietà minime invarianti.

Quale aspetto assume ora il nostro gruppo con questo sistema di variabili? Intanto, siccome le $y_{n-k+i} = \text{cost.}$ sono, come si disse, varietà invarianti è certo che il nostro gruppo non trasforma le $y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n$ ossia che se le trasformazioni di G_m sono date dalle:

$$y'_t = f_t(y_1 \dots y_{n-k} y_{n-k+1} \dots y_n) \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

(dove le f_t conterranno m parametri arbitrarii, sarà certamente:

$$f_{n-k+i} = y_{n-k+i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Ma noi diciamo di più che le $f_1 \dots f_{n-k}$ non contengono $y_{n-k+1} \dots y_n$ e dipendono cioè soltanto (oltre che dai parametri del gruppo) dalle variabili $y_1 \dots y_{n-k}$.

In altre parole: noi dimostreremo che le prime $n-k$ coordinate $y'_1 \dots y'_{n-k}$ di quel punto A_0 , dove un punto A di coordinate $y_1 \dots y_{n-k} y_{n-k+1} \dots y_n$ è condotto da una trasformazione Γ qualsiasi di G_m non dipendono dai valori di $y_{n-k+1} \dots y_n$, ossia che Γ conduce il punto che ha per prime coordinate proprio $y_1 \dots y_{n-k}$, e che ha tutte le altre coordinate uguali a zero, nel punto, le cui prime coordinate sono $y'_1 \dots y'_{n-k}$ e di cui tutte le altre coordinate sono nulle.

O in altre parole io dimostrerò che se $A^{(1)}$ è la proiezione di un punto A di S_n sulla $V_{n-1}^{(1)}$, $A^{(2)}$ la proiezione di $A^{(1)}$ sulla $V_{n-2}^{(1)}$, ..., $A^{(k)}$ quella di

(*) Dove indichiamo con y'_t i valori trasformati delle y_t .

$A^{(k-1)}$ sulla $V_{n-k}^{(1)}$, e se una trasformazione Γ di G_m conduce i punti A ed $A^{(k)}$ rispettivamente in B e in B' , il punto B' coincide con quel punto $B^{(k)}$ di $V_{n-k}^{(1)}$ che si dedurrebbe da B con le accennate successive proiezioni. E infatti, essendo $V_{n-1}^{(1)}$ invariante, la geodetica per A normale a $V_{n-1}^{(1)}$ sarà portata nella geodetica per B normale a $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi anche $A^{(1)}$ sarà portato nella proiezione $B^{(1)}$ di B su $V_{n-1}^{(1)}$; così $A^{(2)}$ sarà portato nella proiezione $B^{(2)}$ di $B^{(1)}$ su $V_{n-2}^{(1)}$ ecc.; e così continuando arriveremo alla dimostrazione dell'asserto, cioè che Γ conduce $A^{(k)}$ in $B^{(k)}$ e che quindi i punti $B', B^{(k)}$ coincidono.

§ 2. Posto questo, noi ora procederemo a dare alcune proprietà di un gruppo, che sono condizioni necessarie e sufficienti, affinché esso si possa considerare come un gruppo di movimenti. E cominceremo anzitutto dalla considerazione dei gruppi a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti; e rammenteremo che il Prof. BIANCHI dimostrò (e più sotto io ne darò una dimostrazione intuitiva, che ne spiega l'intima ragione di essere) che ogni gruppo G_n transitivo su n variabili è ammesso da qualche spazio a n dimensioni; noi dimostreremo anzi che ciò è vero per qualsiasi gruppo a n variabili con trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti. Noi per ora, a proposito di questi gruppi, non possiamo che dare il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo G_m a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti su $n + m$ variabili si possa considerare come gruppo di movimenti di uno spazio ad $n + m$ dimensioni è che il gruppo sia simile a un gruppo semplicemente transitivo su m lettere; ciò che si può anche esprimere dicendo che G_m deve essere un sottogruppo di un gruppo semplicemente transitivo con $n + m$ lettere ed $n + m$ parametri ().*

La condizione è evidentemente necessaria; infatti il gruppo G_m ha come varietà minime invarianti delle V_m : e, se S_{n+m} è uno spazio che ammette G_m , si vede tosto prendendo in esso quel sistema di coordinate, che fu definito al paragrafo precedente che il gruppo G_m sarà trasformato in un gruppo simile che opera transitivamente su m lettere. Che questa condizione sia anche sufficiente, si dimostra facilmente così: Se G_m è simile a un gruppo che opera transitivamente su m variabili y_1, y_2, \dots, y_m , si introducano come coordinate appunto le y_1, y_2, \dots, y_m insieme ad altre n funzioni qualsiasi delle coordinate iniziali y_{m+1}, \dots, y_{m+n} tali che $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$ siano indipendenti tra

(*) Ricordiamo però *esplicitamente* (a scanso di ogni equivoco) che, come faremo vedere più tardi, queste condizioni sono sempre soddisfatte da un tale gruppo.

loro. Le trasformazioni infinitesime di G_m insieme alle trasformazioni $\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{m+n}}$ genereranno un gruppo Γ_{m+n} , semplicemente transitivo, e di cui G_m è un sottogruppo. Per il citato teorema del prof. BIANCHI Γ_{m+n} è ammesso da qualche S_{m+n} , che ammetterà perciò anche G_m .

Nella seconda parte di questa dimostrazione abbiamo visto incidentalmente che se un G_m è simile a un gruppo transitivo su m lettere, esso è anche sottogruppo di un Γ_{m+n} transitivo in S_{m+n} . Viceversa se G_m è sottogruppo di un Γ_{m+n} transitivo in S_{m+n} , esso sarà certo un gruppo di movimento di ciascuno degli spazii, che ammettono Γ_{m+n} e quindi, per quanto abbiamo dimostrato, sarà simile a un gruppo semplicemente transitivo su m lettere.

Noi più tardi dimostreremo che ogni gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti può essere considerato come gruppo di movimenti: il presente teorema ci darà perciò alcune interessanti proprietà generali di gruppi siffatti; ciò che permette di agevolare di molto la ricerca.

§ 3. Abbiamo così studiato i gruppi a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti, che possono essere considerati (tutti) come gruppi di movimenti e abbiamo visto che in fin dei conti essi si riducono tutti ai gruppi transitivi, in cui il numero dei parametri eguaglia quello delle variabili. Ora ci proporremo la questione di riconoscere quando un gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti può essere considerato come gruppo di movimenti. Noi ora daremo una prima risoluzione di questo problema, avvertendo però che noi vi ritorneremo più oltre, con altri metodi, e ottenendo una risoluzione più elegante ed intuitiva.

Anzitutto osserveremo che per il teorema fondamentale del § 1, se il nostro gruppo è un gruppo G_{n+m} a « $n + m$ » parametri con sole n trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti, esso (avendo delle V_n per varietà minime invarianti) sarà certo simile a un gruppo transitivo su n variabili, e si potrà considerare come gruppo di movimenti di una varietà ad n dimensioni. Noi supporremo senz'altro che il gruppo sia già stato ridotto sotto questa forma, che diremo forma *normale* del gruppo, con un opportuno cangiamento di variabili. Siano dunque

$$X_t = \sum_{r=1}^n \xi_r^{(t)}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (t = 1, 2, \dots, n + m)$$

le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo G_{n+m} e sia

$$d s^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} d x_i d x_k$$

l'elemento lineare di uno spazio S_n che ammetta G_{n+m} . Le formule di KILLING danno che

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + \sum_r \left(a_{ir} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (l, r = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

E noi le scriveremo, ponendo

$$a_{ik}^{(l)} = \sum_r \left(a_{ir} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right)$$

sotto la forma

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ik}^{(l)} = 0, \quad \text{ossia} \quad X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)} = 0. \quad (1)$$

Il prof. BIANCHI osservò che in virtù delle (1)' si ha che

$$X_l [X_t(a_{ik}) + a_{ik}^{(t)}] - X_t [X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}] \quad (l, t = 1, 2, \dots, n+m) \quad (2)$$

è identicamente nullo: ciò che del resto è intuitivo perchè se un S_n ammette due trasformazioni infinitesime X_l, X_t esso deve ammettere anche la (X_l, X_t) . Per ipotesi m delle trasformazioni infinitesime del gruppo sono combinazione lineare delle altre n , le quali sono poi linearmente indipendenti. Noi ammetteremo che queste ultime sieno le X_1, X_2, \dots, X_n e porremo, indicando con $\varphi_i^{(t)}$ delle funzioni di x_1, x_2, \dots, x_n

$$X_{n+i} = \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(i)} X_l \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

E il sistema delle equazioni di KILLING sarà da noi scritto nella forma:

$$X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$X_{n+t}(a_{ik}) - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Ciò è chiaramente lecito perchè se alla (4) aggiungiamo

$$\sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} [X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}]$$

somma evidentemente nulla in causa delle (3), otteniamo appunto l'equazione di KILLING relativa a X_{n+t} ed a a_{ik} , come è scritta nella (1)'. E ora poichè è identicamente

$$X_{n+t}(a_{ik}) - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} X_l(a_{ik}) = 0$$

le (4) diventano

$$a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (4)'$$

ossia

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{r=1}^n a_{ir} \left[\sum_{l=1}^n \frac{\partial (\varphi_l^{(t)} \xi_r^{(l)})}{\partial x_k} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} \right] + \\ & + \sum_{r=1}^n a_{kr} \left[\sum_{l=1}^n \frac{\partial (\varphi_l^{(t)} \xi_r^{(l)})}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)''$$

ossia

$$\sum_{r=1}^n \left(a_{ir} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_k} + a_{kr} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} (l, i, k, r = 1, 2, \dots, n) \\ (t = 1, 2, \dots, m). \end{array} \quad (4)'''$$

Il nostro sistema di equazioni resta così mutato nel sistema di equazioni formato dalle (3) e dalle (4)'''. Ora dalle (3), essendo il determinante delle $\xi_r^{(l)}$ ($r, l = 1, 2, \dots, n$) differente da zero si possono trarre le derivate delle a_{ik} in funzione delle a_{ik} stesse; e, per l'osservazione testè citata del professore BIANCHI si vede che affinchè il sistema delle (3), (4)''' sia integrabile basta che

1.° Le (4)''' considerate come equazioni lineari algebriche per le a_{ik} ammettono in un punto almeno una soluzione (che ci darà i valori iniziali delle a_{ik}). Si dovrà poi solo esaminare (volendoci restringere a spazii reali) se le solite disuguaglianze sono soddisfatte.

2.° I primi membri delle (4)''' derivate rispetto a x_1, x_2, \dots, x_n successivamente diono per le (3) e le (4)''' stesse risultati identicamente nulli. Questa seconda condizione equivale anche (essendo il determinante delle $\xi_r^{(l)}$ diverso da zero) all'altra condizione che applicando ai primi membri delle (4)''' le $X_1 \dots X_n$ si ottenga in virtù delle (3) e delle (4)''' stesse un risultato identicamente nullo.

Noi ora vogliamo far vedere che questa seconda condizione è sempre soddisfatta.

Infatti per l'osservazione del prof. BIANCHI è sempre per le (3) e le (4)''' identicamente :

$$\begin{aligned} X_l [X_{n+t} (a_{ik}) + a_{ik}^{(n+t)}] - X_{n+t} [X_l (a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}] &= 0 \\ [t = 1, 2, \dots, m] \quad [i, k, l = 1, 2, \dots, n] \end{aligned}$$

ossia

$$X_l [X_{n+t} (a_{ik})] - X_{n+t} [X_l (a_{ik})] + X_i (a_{ik}^{(n+t)}) - X_{n+t} (a_{ik}^{(l)}) = 0. \quad (5)$$

Si ha pure identicamente :

$$X_l [X_r (a_{ik})] - X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [a_{ik}^{(r)}] - X_r [a_{ik}^{(l)}] = 0$$

(l, r, i, k = 1, 2, ..., n)

ossia

$$\varphi_r^{(l)} X_l [X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + \varphi_r^{(l)} X_l (a_{ik}^{(r)}) - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0$$

ossia :

$$X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - X_l (\varphi_r^{(l)}) X_r (a_{ik}) - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] +$$

$$+ X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - X_l [\varphi_r^{(l)}] a_{ik}^{(r)} - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0.$$

E, poichè per le (3)

$$X_r (a_{ik}) + a_{ik}^{(r)} = 0$$

sarà pure identicamente (in virtù delle (3) e delle (4)''')

$$X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0$$

e quindi anche identicamente :

$$\sum_{r=1}^n \left\{ X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) \right\} = 0 \dots \quad (6)$$

Sottraendo dalla (5) la (6) troviamo l'identità :

$$X_l \left[X_{n+t} (a_{ik}) - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}) \right] - \left[X_{n+t} - \sum_{r=1}^{r=n} \varphi_r^{(l)} X_r \right] (X_l (a_{ik})) +$$

$$+ X_l \left[a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)} \right] - \left[X_{n+t} - \sum_{r=1}^{r=n} \varphi_r^{(l)} X_r \right] (a_{ik}^{(l)}) = 0.$$

E poichè è identicamente :

$$X_{n+t} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r = 0$$

troveremo senz'altro identicamente :

$$X_l \left(a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)} \right) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. (Si ricordi che i primi membri delle (4)' e delle (4)''' sono identici.)

Prima ora di venire a parlare della 1.^a condizione vogliamo fare un'osservazione generale.

Se un gruppo Γ qualsiasi si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a n dimensioni, esso può essere anche considerato come gruppo di movimenti di uno qualche spazio a un numero $n + t$ di dimensioni (t intero qualsiasi).

Supposto infatti il gruppo ridotto a forma normale in n o meno variabili, e se

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

è l'elemento di uno spazio a n dimensioni che ammette il nostro gruppo, allora, come tosto si verifica

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k + \sum_{lm} a_{lm} dx_l dx_m \\ (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (l, m = n + 1, \dots, n + t)$$

dove le a_{lm} non dipendono dalle x_1, x_2, \dots, x_n è l'elemento lineare di uno spazio a $n + t$ dimensioni che ammette il nostro gruppo.

Dunque:

Affinchè un dato gruppo, già ridotto a forma normale in n variabili, possa essere ammesso come gruppo di movimenti da uno spazio (che naturalmente non potrà avere meno di n dimensioni) è condizione necessaria e sufficiente che le (4)''' considerate come equazioni lineari algebriche nelle a_{ik} sieno in un punto risolubili rispetto alle a_{ik} . Dunque questa condizione si esprime semplicemente con l'annullarsi di una matrice.

Ora osserviamo il primo membro delle (4)''' e vediamo tosto che il termine $\sum_{l,r} a_{lr} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_i^{(l)}}{\partial x_k}$ è un termine del determinante che si ottiene moltiplicando con le note regole, in modo opportuno il determinante delle a_{ik} per il determinante delle $\xi_r^{(l)}$ e per l'Iacobiano delle $\varphi^{(l)}$. Quindi abbiamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il nostro gruppo già ridotto a forma normale possa essere considerato come gruppo di movimenti è che si possa trovare un determinante non nullo simmetrico $|a_{ik}|$, il prodotto del quale per il determinante $|\xi_r^{(l)}|$ ($r, l = 1, 2, \dots, n$) e per l'Iacobiano delle $\varphi_r^{(l)}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ottenuto in modo opportuno con le note regole sia, almeno in un punto, semisimmetrico. E ciò per ciascun valore particolare di t .

Se ora n è dispari, il determinante semisimmetrico così ottenuto è nullo; e poichè $|a_{ik}| \neq 0$ $|\xi_r^{(l)}| \neq 0$, sarà $\frac{\partial (\varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(2)} \dots \varphi_n^{(n)})}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)} = 0$ ossia le $\varphi_1^t \dots \varphi_n^{(t)}$ non sono funzioni indipendenti.

Quindi in particolare :

Se un S_n ammette un G_{n+1} transitivo, esiste certamente nel caso che n sia dispari, qualche trasformazione infinitesima permutabile con G_{n+1} .

§ 4. Sia ora dato un gruppo, già ridotto sotto forma normale, cioè con tante trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti quante sono le variabili su cui opera il gruppo. Noi vogliamo esaminare come si semplificano in questo caso le equazioni di KILLING. Siano

$$X_l = \sum_{r=1}^n \xi_r^{(l)} (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (l = 1, 2, \dots, n + m)$$

le trasformazioni infinitesime del gruppo e sia

$$d s^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n + t)$$

l'elemento lineare di uno spazio a « $n + t$ » dimensioni che ammetta il nostro gruppo.

Se noi scriviamo le equazioni di KILLING noi riconosciamo facilmente:

1.° Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) queste equazioni assumono proprio la stessa forma, come se noi volessimo cercare gli spazii ad n dimensioni ammessi dal gruppo.

2.° Per le a_{ik} ($i, k = n + 1, n + 2, \dots, n + t$) le equazioni di KILLING diventano semplicemente :

$$\sum_{r=1}^n \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = 0.$$

E poichè delle X_l proprio n sono linearmente indipendenti, si ha semplicemente :

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

e le equazioni di KILLING dicono soltanto che le a_{ik} in discorso sono funzioni soltanto di x_{n+1}, \dots, x_{n+t} .

3.° Per le a_{ik} ($i \leq n, k > n$) le equazioni di KILLING diventano :

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + \sum_r a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} = 0$$

che è un sistema di equazioni che non contiene nessuna a_{ik} del primo o del secondo tipo. Anzi questo sistema di equazioni si scinde per ciascun valore di k in t sistemi di equazioni distinti, l'uno relativo alle $a_{i,n+1}$, il secondo alle $a_{i,n+2}$, ecc. ($i = 1, 2, \dots, n$).

Le equazioni relative alle a_{ik} ($i, k \leq n$) si semplificano, ossia si possono ridurre a un numero minore di incognite mediante le equazioni lineari (4)''', mentre nello stesso tempo per ciascuna delle a_{ik} da determinarsi si ottengono soltanto n equazioni. Queste osservazioni riescono utili specialmente per il calcolo effettivo degli elementi lineari da determinarsi.

§ 5. Ora noi vogliamo dimostrare, servendoci dei risultati finora ottenuti, il seguente teorema fondamentale :

Con la sola risoluzione di equazioni algebriche si possono determinare tutti i gruppi, che si possono considerare come gruppi di movimenti, trovando le loro trasformazioni infinitesime; con sole quadrature si possono determinare le trasformazioni finite di tali gruppi, e gli elementi lineari degli spazii loro corrispondenti.

La dimostrazione di questo teorema è semplicissima: basta a tale scopo la semplice osservazione che ogni gruppo continuo, che si possa considerare come gruppo di movimenti, si può, con un cangiamento di variabili ridurre sotto forma normale, cioè si può far sì che posseda tante trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti quante sono le variabili su cui opera effettivamente: in altre parole si può ridurre a essere transitivo sulle variabili che esso effettivamente trasforma. Ora noi sappiamo che con la risoluzione di sole equazioni algebriche si possono trovare tutte le possibili composizioni realmente distinte dei gruppi a un numero qualsiasi di parametri. Di più (LIE, Kap. 27, 29) con la sola risoluzione di equazioni algebriche si possono trovare tutti i gruppi continui transitivi, appena se ne conosca la composizione, e non si considerino distinti due gruppi simili. È così dimostrata senz'altro la prima parte del nostro teorema. Esaminando la forma delle trasformazioni infinitesime dei nostri gruppi si potrebbe dimostrare anche la terza parte del nostro teorema; ma il procedimento più breve a tale scopo è il seguente: Si ricordi anzitutto che con sole quadrature si possono trovare le equazioni finite del nostro gruppo, perchè il gruppo è transitivo (LIE, l. c.), ciò che intanto dimostra la seconda parte del nostro teorema. Allora distinguiamo due casi: secondoche le dimensioni dello spazio da determinarsi sono in numero uguale o maggiore del numero delle variabili, su cui il nostro gruppo, che col procedimento precedente è stato evidentemente ottenuto sotto forma normale, opera effettivamente. Cominciamo a trattare il primo caso: sia cioè uguale il numero n delle dimensioni dello spazio da determinarsi e delle variabili su cui opera (transitivamente) il gruppo. Sia A un punto generico dello spazio e siano a_{ik}^0 valori qualsiasi che soddisfano alle equa-

zioni lineari (4)''' (supposte naturalmente risolubili) (dove alle x_i si sostituiscano le coordinate (x_i^0) del punto A) e, se vogliamo restringerci a spazi reali, anche alle solite disuguaglianze, se questo è possibile. Sia ora B un punto qualunque dello spazio, in cui si vogliono trovare i valori delle a_{ik} . Siccome il gruppo opera transitivamente nello spazio ambiente esiste almeno una trasformazione T del gruppo che trasporta il punto B nel punto A ; essa porterà anche un intorno qualunque di B in un intorno di A ; di più essa si potrà ottenere con la sola risoluzione di equazioni finite. Sieno x_i^1 le coordinate di B , e siano a_{ik}^1 i valori finora incogniti delle a_{ik} nel punto B . La T , stabilendo una corrispondenza biunivoca tra gli intorni di B o di A , stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti $x_i^1 + dx_i^1$ e i punti $x_i^0 + dx_i^0$, corrispondenza determinabile con differenziazioni; le dx_i^0 vengono date come espressioni lineari omogenee nelle dx_i^1 , a coefficienti costanti. Sostituiamo nella $a_{ik}^{(0)} dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}$ alle $dx_i^{(0)}$ i loro valori così determinati, otterremo una forma quadratica nelle $dx_i^{(1)}$, che deve essere identica con $\sum a_{ik}^{(1)} dx_i^{(1)} dx_k^{(1)}$; esprimendo questa identità, si hanno senz'altro i valori delle $a_{ik}^{(1)}$ nel punto qualunque $x_i^{(1)}$ dello spazio ambiente, espressi in funzione delle costanti iniziali $a_{ik}^{(0)}$.

Passiamo ora al caso che il numero $n + m$ delle dimensioni dello spazio sia maggiore del numero n delle variabili (x_1, x_2, \dots, x_n) , su cui opera effettivamente il gruppo, cosicchè nello spazio in discorso il gruppo non opera più transitivamente. E sia

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n + m)$$

l'elemento lineare dello spazio. Per le a_{ik} ($i, k = n + 1, \dots, n + m$) nulla vi sarebbe da dire, poichè noi sappiamo già che esse sono funzioni (del resto arbitrarie) delle $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ (§ 4). In ogni modo si osservi che affinchè il nostro spazio ammetta effettivamente il gruppo in discorso, è condizione necessaria e sufficiente che una trasformazione T del gruppo che porta un punto $B \equiv x_i^{(1)}$ di una varietà V_n invariante in un altro punto $A \equiv x_i^{(0)}$ della stessa V_n e quindi stabilisce anche una corrispondenza biunivoca tra gli intorni dei due punti, porti anche la forma

$$\sum_{i,k} a_{ik} (x_i^{(1)}) dx_i^{(1)} dx_k^{(1)}$$

nella forma

$$\sum_{i,k} a_{ik} (x_i^{(0)}) dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}.$$

Allora prendiamo una varietà qualsiasi V_m a m dimensioni che abbia uno e un sol punto comune con ciascuna delle varietà V_n minime invarianti e fissiamo in ciascun punto della V_m dei valori arbitrari per le a_{ik} ancora da determinarsi, purchè naturalmente essi soddisfino alle solite equazioni lineari: ciò che corrisponde all'introduzione di funzioni arbitrarie. Per poi determinare i valori $a_{ik}^{(1)}$ delle a_{ik} in un altro punto B qualsiasi di S_{n+m} basta trovare quel punto A , in cui la varietà invariante V_n passante per B incontra la V_m , e in cui le a_{ik} ricevono dei valori noti $a_{ik}^{(0)}$ e applicare quindi ai punti A, B il precedente procedimento. Il nostro teorema è così dimostrato in generale.

Naturalmente non con ogni speciale scelta delle funzioni e costanti arbitrarie su descritte si otterrà un tipo di spazio realmente distinto: anzi per le considerazioni generali del § 1, noi possiamo supporre, senza diminuire la generalità

$$\begin{aligned}
 a_{n+1,k} &= 0 & (k = 1, 2, \dots, n, n+2, \dots, n+m) \\
 & & a_{n+1,n+1} &= 1 \\
 (a_{n+2,k} = 0)_{x_{n+1}=0} & & (k \neq n+2) & \\
 & & (a_{n+2,n+2})_{x_{n+1}=0} &= 1 \\
 (a_{n+3,k} = 0)_{x_{n+1}=x_{n+2}=0} & & (k \neq n+3) & \\
 & & (a_{n+3,n+3})_{x_{n+1}=x_{n+2}=0} &= 1, \text{ ecc.}
 \end{aligned}$$

dove le uguaglianze scritte in basso fuori delle parentesi indicano su quali varietà si possono supporre senz'altro verificate le equazioni stesse.

§ 6. Ora noi ci vogliamo chiedere qual'è il significato delle relazioni lineari (4)''', a cui i valori iniziali delle a_{ik} devono sempre soddisfare. A questa domanda risponde subito la seguente considerazione. Se noi ci riferiamo p. es. al primo dei casi testè trattati e ricordiamo il metodo di cui noi ci siamo serviti, notiamo tosto che per trovare i valori delle a_{ik} in un punto B in funzione dei valori delle a_{ik} in un punto A , ci siamo serviti di una trasformazione T che conducesse il punto B nel punto A . Ora nel caso di trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti osserviamo che i punti A, B non individuano la trasformazione T , ma che anzi di tali trasformazioni ve ne sarà, in generale più di una: chè se S è la trasformazione più generale che lascia fisso A , tutte le trasformazioni TS (o ST a seconda della notazione che si usa) conducono il punto B nel punto A . E poichè le (4)''' ci danno le uniche condizioni a cui devono soddisfare i valori iniziali delle a_{ik} , è ben chiaro che il loro significato è questo, che cioè, qual-

siasi trasformazione TS venga usata, i valori delle a_{ik} nel punto B siano sempre quelli che si otterrebbero considerando la T . In altre parole esse significano, che ogni trasformazione S del gruppo che lascia fisso il punto A deve trasformare in sè la forma $\Sigma a_{ik}^0 dx_i^0 dx_k^0$. Del resto risulta senz'altro chiaro dal procedimento usato testè che se questa condizione è soddisfatta, allora i valori che si ottengono in un punto B sono perfettamente determinati, e il gruppo è ammesso da uno spazio, il cui elemento lineare ha dei coefficienti, che nel punto A assumono il valore a_{ik}^0 . Possiamo dunque esprimere sotto forma più elegante e concisa le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un gruppo possa essere considerato come gruppo di movimenti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G ridotto o no sotto forma normale si possa considerare come gruppo di movimenti è che quel suo sottogruppo Γ che lascia fisso un punto A determinato, in cui il gruppo sia regolare, sia tale che esista almeno un sistema di quadriche omotetiche in guisa che un punto infinitamente vicino ad A non esca mai per le trasformazioni di Γ da quella di queste quadriche, che passa per esso, o, in altre parole Γ trasformi in sè ciascuna quadrica di un sistema di quadriche omotetiche infinitamente vicine ad A ().*

Se il gruppo è transitivo basterà chiaramente che questo avvenga in un solo punto (perchè allora avviene in tutti); se è intransitivo ciò dovrà accadere in un punto di ciascuna varietà minima invariante. Questa distinzione è evidentemente superflua, se il gruppo è già ridotto a forma normale.

Se queste condizioni sono soddisfatte, esiste infatti una forma $\Sigma a_{ik}^0 dx_i^0 dx_k^0$, che Γ trasforma in sè.

Osservazione 1.^a *Se uno di questi cosiffatti sistemi di quadriche è formato di elissoidi, lo spazio corrispondente si può supporre reale.*

Osservazione 2.^a *Le condizioni analitiche, che traducono queste condizioni geometriche sono date dall'annullarsi di quella matrice, che esprime essere le (4)'' compatibili.*

§ 7. È ben evidente ora che i gruppi G_n transitivi su n variabili possono essere considerati come gruppi di movimenti (teorema del prof. BIANCHI) perchè in tal caso il sottogruppo Γ si riduce all'identità; o in altre parole, è compiutamente determinata la trasformazione che porta un punto B in un punto A ; e quindi, dati arbitrariamente i valori delle a_{ik} in A riescono senz'altro, coi nostri metodi, determinati i valori delle a_{ik} nel punto B . Quest'osservazione rende evidente *a priori* il bel teorema del prof. BIANCHI.

(*) Si noti che così immaginiamo il gruppo operante in uno spazio euclideo.

Ma questa stessa osservazione si può senz'altro applicare a ogni gruppo con trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti e ne traggiamo il teorema :

Ogni gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti si può considerare come gruppo di movimenti.

Confrontando questo risultato, che è immediato corollario del precedente teorema generale, con quello del § 2 otteniamo il seguente teorema :

Ogni gruppo G_n generato da n trasformazioni linearmente indipendenti su un numero qualsiasi $n + m$ di variabili è simile a un gruppo G'_n semplicemente transitivo in uno spazio ad n dimensioni, e, ciò ch'è lo stesso, si può pensare sottogruppo di un gruppo transitivo su $n + m + k$ lettere e con $n + m + k$ parametri (dove k è un intero qualsiasi nullo o positivo).

Nei precedenti paragrafi noi abbiamo risoluto due questioni: la prima, di riconoscere se un gruppo continuo si può considerare come gruppo di movimenti, la seconda di indicare un mezzo, col quale si possa determinare con sole quadrature, differenziazioni e risoluzione di equazioni finite tutti questi gruppi, e gli spazii che loro corrispondono.

§ 8. Noi aggiungeremo ora una facile osservazione, che ci condurrà a un notevole risultato :

Nessun gruppo, che si possa considerare come gruppo di movimenti, è più di una volta transitivo.

Infatti se G è un tale gruppo ed S lo spazio corrispondente, due punti di S hanno almeno un invariante: la loro distanza geodetica.

Per la stessa ragione :

Se un gruppo G , si può considerare come gruppo di movimenti, quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto generico è certo intransitivo.

Ne deduciamo :

Nessun spazio S_n a un numero $n > 2$ di dimensioni può ammettere un gruppo reale a $\frac{n^2 + n - 2}{2}$ parametri nè come gruppo di movimenti, nè come sottogruppo del gruppo totale di movimenti.

Questo teorema per $n = 3$ fu dimostrato dal prof. BIANCHI; noi lo ammetteremo vero per $n = m - 1$ lo dimostreremo per $n = m$. Sia, se è possibile, S_m uno spazio che ammetta un $G_{\frac{m^2+m-2}{2}}$ di movimenti. Questo gruppo è certamente transitivo, perchè se non lo fosse, esso sarebbe per il teorema del § 1 simile a un gruppo di movimenti di uno spazio a meno di m di-

mensioni: ciò che è assurdo, perchè $\frac{m^2 + m - 2}{2} > \frac{m(m-1)}{2}$. Quindi quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto generico è proprio un gruppo a

$$\frac{m^2 + m - 2}{2} - m$$

parametri, cioè è proprio un $G_{\frac{(m-1)^2 + (m-1) - 2}{2}}$. Questo gruppo per l'osservazione precedente è intransitivo in G_m e per il teorema del § 1 è simile a un gruppo di movimenti di uno spazio a « $m - 1$ » dimensioni. Ciò che è pure assurdo, perchè noi abbiamo supposto dimostrato il nostro teorema per $n = m - 1$.

La nostra asserzione resta così dimostrata in generale. Così pure si dimostra: *Se un S_n ammette un $G_{\frac{n^2+n-2}{2}}$ (certo immaginario se $n > 2$), esso è a curvatura costante, ossia ammette anche un $G_{\frac{n^2+n}{2}}$.* Anche questo teorema

si dimostra col metodo di induzione completa. Ecco p. es. come si dimostra per un S_4 . Quel sottogruppo G_5 di G_9 che lascia fisso un punto generico di S_4 sarà intransitivo e avrà delle V_3 per varietà minime invarianti, p. es. le $x_4 = \text{cost.}$, geodeticamente parallele. Esso si potrà immaginare operante (transitivamente) sulle x_1, x_2, x_3 (§ 1). Questo G_5 può chiaramente portare ogni segmento T di una di queste varietà in ogni altro segmento della varietà stessa uguale a T . Quindi dovendo esso ricondurre tutto lo S_4 in sè senza mutare le distanze, a due segmenti uguali di una delle $x_4 = \text{cost.}$ corrispondono (per mezzo delle geodetiche normali alle $x_4 = \text{cost.}$) due segmenti tra di loro uguali su ogni $x_4 = \text{cost.}$ Ma una $x_4 = \text{cost.}$ ammettendo un G_5 , ammetterà un G_6 . Quel gruppo G'_6 che opera sulle x_1, x_2, x_3 come questo G_6 e lascia invariato x_4 trasformerà dunque in sè ogni $x_4 = \text{cost.}$, senza mutar l'elemento lineare e perciò sarà un gruppo di movimenti dello S_4 , che quindi ammetterà un G_{10} .

§ 9. Ritorniamo ora alle condizioni necessarie e sufficienti date al § 6 affinchè un dato gruppo continuo si possa considerare come un gruppo di movimenti. Queste condizioni si possono anche enunciare così: *Quel sottogruppo che lascia fisso un punto A deve essere un sottogruppo di uno spazio a curvatura costante, quando lo si pensi operante sulle rette uscenti da A , considerate come elementi, o, in altre parole, deve lasciare fisso un cono quadratico col vertice in A ; di più egli deve lasciare invariate le quadriche in-*

finitamente vicine ad A aventi questo cono per cono assintotico. La prima parte di queste condizioni non sarebbe evidentemente sufficiente, perchè p. es. anche il G_7 delle similitudini dello spazio euclideo soddisfa ad esse. Esistono dunque altri gruppi che soddisfano soltanto a quella prima condizione e che non sono altro che i gruppi di trasformazioni conformi. Osserverò che la condizione affinchè una trasformazione infinitesima generi un gruppo di trasformazioni conformi per lo spazio

$$d s^2 = \sum a_{ik} d x_i d x_k$$

è che esista una funzione k delle x_i tale che

$$X(\sum a_{ik} d x_i d x_k) = k \sum a_{ik} d x_i d x_k.$$

Se k è costante essa si può chiamare una trasformazione simile.

Un'altra osservazione è la seguente: Almeno per gruppi transitivi valgono ancora i teoremi seguenti, che si dimostrano come gli analoghi dei paragrafi precedenti per le forme quadratiche:

Si possono costruire per quadrature tutte le forme differenziali di ordine qualunque che ammettono un gruppo continuo transitivo di operazioni, e i gruppi corrispondenti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo transitivo possa trasformare in sè una forma differenziale di ordine qualunque n , è che quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto A trasformi i punti infinitamente vicini ad A in modo che esista un sistema di superficie omotetiche di n^{esimo} ordine infinitamente vicine ad A , ciascuna delle quali venga dal detto sottogruppo trasformata in sè.

Così si possono pure generalizzare molti altri dei precedenti risultati.

§ 10. Ricerchiamo ora effettivamente i gruppi a 1, 2, 3, 4 parametri che possono essere realmente considerati come gruppi di movimenti. Osserviamo che se il numero delle loro trasformazioni dipendenti è minore o uguale a 3, essi devono (§ 1) potersi considerare come gruppi di movimenti di uno spazio a non più di tre dimensioni, e quindi si possono prendere senz'altro dalla Memoria del prof. BIANCHI; si potrebbe però anche, poichè il LIE diede tutti i gruppi su due variabili e insegnò un metodo per trovare tutti quelli su tre variabili, esaminare l'un dopo l'altro tutti quelli dei tipi enunciati da LIE che non posseggono più di quattro parametri, e di questi ritenere soltanto quelli che soddisfano alle condizioni del § 6. Questo metodo sarebbe assai rapido, e servirebbe a trovare senz'altro direttamente i ri-

sultati della più volte citata Memoria del prof. BIANCHI. Si potrebbe anche infine costruire questi gruppi secondo il mio metodo del § 5; ma questa via sarebbe un po' più lunga della precedente. Noi naturalmente prenderemo questi gruppi addirittura dalla Memoria del prof. BIANCHI, perchè il lettore può facilmente da sè vedere che questi altri metodi condurrebbero appunto ai risultati del prof. BIANCHI.

Gruppi G_1 :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Gruppi G_2 a trasformazioni infinitesime naturalmente linearmente indipendenti.

$$I^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$II^0) \quad X_1 = e^{-x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Gruppi G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti.

$$I^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$II^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_2 = \operatorname{sen} x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{cotg} x_2 \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = (X_1, X_2)$$

$$III^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (e^{-2x_1} - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Gruppi G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti.

$$I^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_2}{2} + x_3\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$II^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$III^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 + h x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$IV^0) \quad X_1 = e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} - 2 x_2 e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$V^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \operatorname{cotg} x_2 \operatorname{sen} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\operatorname{sen} x_2}{\operatorname{sen} x_1} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_3 = (X_1, X_2)$$

$$\text{VI}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\text{VII}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Gruppi G_4 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti.

$$\text{I}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (x_1^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{II}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x_1}}{1-n^2} - x_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{n e^{-x_1}}{1-n^2} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{III}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_3 = \cos x_2 - \cotg x_1 \operatorname{sen} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n \operatorname{sen} x_2}{\operatorname{sen} x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_4 = (X_1 X_3).$$

Il tipo II^o è III^o si potrebbero da un punto di vista generale considerare come identici.

§ 11. Troviamo ora i gruppi G_4 a trasformazioni infinitesime indipendenti. Questo gruppo (§ 1) si deve poter ridurre a un gruppo transitivo su 4 lettere. Per determinare questi gruppi potremmo, seguendo il procedimento generale del § 5, ricorrere senz'altro ai metodi di LIE. Ma però noi possiamo usare di metodi più rapidi, in quanto che noi conosciamo tutti i G_3 transitivi. Potremo dunque prendere un sottogruppo G_3 di G_4 , di cui cercheremo la composizione. Da questa potremo subito dedurre (per mezzo della penultima tabella) una forma, a cui possiamo immaginare ridotte le sue trasformazioni infinitesime; la quarta trasformazione infinitesima di G_4 si determina poi in guisa che non sia combinazione lineare delle precedenti, e che il G_4 abbia la composizione voluta.

Sia ora il G_4 non integrabile (cfr. LIE: Vol. III, § 137); il gruppo derivato (X_1, X_2, X_3) dovrà avere una delle seguenti composizioni:

$$(X_1 X_2) = X_1 \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 \quad (X_2 X_3) = X_3$$

oppure

$$(X_1 X_2) = X_3 \quad (X_2 X_3) = X_1 \quad (X_3 X_1) = X_2.$$

E in ambi i casi si può poi scegliere X_4 in modo che sia permutabile con le precedenti trasformazioni.

Il $G_3(X_1, X_2, X_3)$ è certo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti e (§ 1) si può immaginare semplicemente transitivo su tre lettere.

Nel primo di questi casi avremo :

$$X_1 = e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} - 2 x_2 e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = e^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Posto :

$$X_4 = \sum_1^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, x_4))$$

avremo, essendo $(X_i, X_4) = 0$ ($i = 1, 2, 3$)

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \xi_3 e^{-x_3} = 0; \quad e^{-x_3} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + 2 x_2 \xi_2 e^{-x_3} - \xi_3 e^{-(x_1+x_3)} = x_2^2 e^{-x_3} \xi_3,$$

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + 2 \xi_2 e^{-x_3} - 2 \xi_3 x_2 e^{-x_3} = 0$$

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_3 = 0 \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde, integrando,

$$\xi_1 = \alpha x_1^2 + 2 \beta x_1 + \gamma \quad \xi_2 = -2 x_2 (\alpha x_1 + \beta) + \alpha$$

$$\xi_3 = -2 (\alpha x_1 + \beta) \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, l_4$ sono funzioni qualunque di x_4 .

Con procedimento analogo troviamo nel secondo caso :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cotg x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad X_3 = (X_1, X_2).$$

E, posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

si ottiene

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad X_4 = \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} + \psi \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4 .

Del resto questi due casi, quando non si distingue reale da immaginario, sono da riputarsi identici.

Sia ora il G_4 integrabile e sia un G_3 a trasformazioni non permutabili il gruppo derivato. Indicando con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasformazioni generatrici di G_4 potremo porre (LIE, loc. cit.) o

$$\text{I}^\circ) \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 \\ (X_1 X_4) = c X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = (c - 1) X_3$$

oppure

$$\text{II}^\circ) \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 \\ (X_1 X_4) = 2 X_1; \quad (X_2 X_4) = X_2; \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3.$$

In ambi i casi potremo fare

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

E posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avremo, nel primo caso,

$$\xi_1 = (c - 1) x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = -x_1 \varphi_3 + c x_2 + \varphi_2 \\ \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

e nel secondo

$$\xi_1 = x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = -\frac{x_1^2}{2} - x_1 \varphi_3 + 2 x_2 + \varphi_2 \\ \xi_3 = x_3 - x_1 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

Sia ora il gruppo derivato di G_4 un G_2 e non contenga il G_4 un G_3 a trasformazioni permutabili. Allora o il G_4 ha la penultima composizione, dove si ponga $c = 1$, oppure avrà la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_4) = (X_3 X_4) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2.$$

Potremo fare:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

e, posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

avremo :

$$\xi_1 = \varphi_1 \quad \xi_2 = e^{-x_1} \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

Contenga ora il G_4 un $G_3 \equiv (X_1, X_2, X_3)$ a trasformazioni a due a due permutabili. Potremo fare

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si potrà poi scegliere X_4 in guisa che o

$$I^{\circ}) \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = a X_2 \quad (X_3 X_4) = c X_3$$

e quindi

$$\xi_1 = x_1 + \varphi_1, \quad \xi_2 = a x_2 + \varphi_2, \quad \xi_3 = c x_3 + \varphi_3, \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$II^{\circ}) \quad (X_1 X_4) = c X_1 \quad (X_2 X_4) = (1+c) X_2 \quad (X_3 X_4) = X_3 + c X_3$$

e quindi :

$$\xi_1 = c x_1 + x_3 + \varphi_1; \quad \xi_2 = (1+c) x_2 + \varphi_2; \quad \xi_3 = c x_3 + \varphi_3; \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$III^{\circ}) \quad (X_1 X_4) = X_2 \quad (X_2 X_4) = 0 \quad (X_3 X_4) = X_1$$

e quindi :

$$\xi_1 = x_3 + \varphi_1 \quad \xi_2 = x_1 + \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$IV^{\circ}) \quad (X_1 X_4) = X_1 + X_2 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_1 + X_3$$

e quindi :

$$\xi_1 = \varphi_1 \quad \xi_2 = x_3 + \varphi_2 \quad \xi_3 = \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure :

$$V^{\circ}) \quad (X_1 X_4) = (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = X_2$$

e quindi:

$$\xi_1 = \varphi_1; \quad \xi_2 = x_3 + \varphi_2; \quad \xi_3 = \varphi_3; \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure:

$$\text{VI}^\circ) \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3$$

e quindi:

$$\xi_1 = x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = x_2 + x_3 + \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$\text{VII}^\circ) \quad (X_i X_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$X_4 = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

§ 12. Veniamo ora a un'altra parte del presente lavoro, dove io voglio esporre un metodo per la ricerca dei sottogruppi finiti discontinui dei gruppi continui e, in modo speciale, dei gruppi che si possono considerare come gruppi di movimenti. Io svolgerò questi metodi, applicandoli dapprima effettivamente a due esempi, agli spazii cioè del tipo VIII^o) e IX^o) del prof. BIANCHI, ciò che ci permetterà anche di trovare delle notevolissime rappresentazioni geometriche di tali spazii sulla sfera e sulla pseudosfera.

Cominceremo dagli spazii del tipo IX^o), che ammettono, con le notazioni del prof. BIANCHI un gruppo generato dalle

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cotg x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = (X_1 X_2)$$

con la composizione:

$$(X_1 X_2) = X_3; \quad (X_2 X_3) = X_1; \quad (X_3 X_1) = X_2.$$

Costruiamo il gruppo aggiunto di questo gruppo. Con le usuali notazioni di LIE, esso si ottiene dall'integrazione del sistema:

$$\frac{de'_1}{dt} = \lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2 \quad (1)$$

$$\frac{de'_2}{dt} = \lambda_3 e'_1 - \lambda_1 e'_3 \quad (2)$$

$$\frac{de'_3}{dt} = \lambda_1 e'_2 - \lambda_2 e'_1. \quad (3)$$

Donde

$$e'_1 \frac{de'_1}{dt} + e'_2 \frac{de'_2}{dt} + e'_3 \frac{de'_3}{dt} = 0$$

ossia

$$e'^2_1 + e'^2_2 + e'^2_3 = \text{cost.} \quad (4)$$

Questo gruppo aggiunto non è perciò altro che il gruppo delle rotazioni di una sfera in sè stessa; e poichè se T è una trasformazione qualunque del gruppo iniziale

$$T^{-1} T T = T,$$

ne traggiamo che alla trasformazione $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t$ del gruppo iniziale corrisponde una rotazione della sfera attorno al diametro che ha i coseni di direzioni proporzionali a $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t$; ciò che si conferma col calcolo seguente. Derivando la (1) rispetto a t , otteniamo per le (2) e (3):

$$\frac{d^2 e'_1}{dt^2} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) e'_1 - \lambda_1 (\lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3) = 0$$

donde:

$$\frac{d^3 e'_1}{dt^3} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{de'_1}{dt} - \lambda_1 \left(\lambda_2 \frac{de'_2}{dt} + \lambda_3 \frac{de'_3}{dt} \right) = 0$$

e poichè per le (1), (2), (3) si ha

$$\sum_1^3 \lambda_i \frac{de'_i}{dt} = 0$$

si avrà

$$\frac{d^3 e'_1}{dt^3} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{de'_1}{dt} = 0.$$

Identica equazione si trova per e'_2, e'_3 . Indicando con A_i, B_i, C_i delle costanti avremo dunque

$$e'_i = A_i + B_i \text{sen } Ht + C_i \text{cos } Ht \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

dove

$$H^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Servendoci delle (1), (2), (3) e del fatto che per $t = 0$

$$e'_i = e_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

potremo determinare le A_i, B_i, C_i e otterremo infine, scrivendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, H$

in luogo di $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t, H t$

$$e'_1 = e_1 \left(\frac{\lambda_1^2}{H^2} + \cos H \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{H^2} \right) \right) + e_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{H^2} + \frac{\lambda_3}{H} \operatorname{sen} H - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{H^2} \cos H \right) + e_3 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_3}{H^2} - \frac{\lambda_2}{H} \operatorname{sen} H - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{H^2} \cos H \right) \quad (6)$$

e le eguaglianze che se ne ottengono rotando. Queste eguaglianze rappresentano appunto una rotazione attorno alla retta, i cui coseni di direzione sono proporzionali a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Per trovarne l'ampiezza θ , si osservi che per note formole di Geometria analitica

$$\left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \right\| = \cos \theta \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \right\|^2$$

donde sostituendo e sviluppando otteniamo:

$$\theta = H.$$

Abbiamo così trovato, con metodo evidentemente applicabile a casi più generali, un gruppo di sostituzioni lineari isomorfo al gruppo dato. E il nostro risultato si può esporre così:

Il gruppo in discorso è oloedricamente isomorfo al gruppo dei movimenti di una sfera in sè: l'isomorfismo si stabilisce, facendo corrispondere alla trasformazione

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$

una rotazione di ampiezza $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ attorno a quel punto di una sfera (col centro nell'origine) le cui coordinate sono proporzionali a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

I gruppi non sono però simili, perchè mentre uno opera su tre variabili, l'altro opera in realtà soltanto su due.

Ma ora osserviamo che dati due gruppi oloedricamente isomorfi, non sempre dall'esistenza di sottogruppi finiti discontinui per l'uno si può concludere l'esistenza di sottogruppi finiti discontinui per l'altro. Così p. es. il gruppo delle rotazioni attorno a un asse e il gruppo delle traslazioni in una direzione sono oloedricamente isomorfi, mentre però per l'uno esistono sottogruppi discontinui finiti e per l'altro non ne esistono affatto.

Ciò che si deve alle polidromie, ecc., che si possono presentare ampliando il campo in cui opera un dato gruppo. È ben chiaro però che a un sottogruppo finito discontinuo di un gruppo, corrisponderà un sottogruppo

isomorfo nel gruppo aggiunto, in generale. E quindi dovremo prima ricercare i sottogruppi discontinui finiti del gruppo aggiunto. Questo problema è senz'altro risoluto nel nostro caso: i sottogruppi cercati nel gruppo aggiunto non sono che i gruppi dei poliedri regolari. E il nostro calcolo precedente definisce senza ambiguità i sottogruppi corrispondenti del gruppo iniziale, perchè dà nel modo più perspicuo quale trasformazione del nostro gruppo si deve far corrispondere a una trasformazione del gruppo aggiunto. Ma per poter affermare che le trasformazioni del gruppo iniziale, corrispondenti alle trasformazioni del gruppo di un poliedro regolare contenuto nel gruppo aggiunto, formino effettivamente un gruppo, bisogna, come risulta chiaramente dalle considerazioni precedenti, fissare bene il significato delle coordinate. A tal fine serve l'importante osservazione che *due gruppi oloedricamente isomorfi non simili si possono spesso rendere simili, mutando le variabili su cui essi operano*. Nel caso nostro il gruppo aggiunto, invece di essere considerato come un gruppo operante sui punti della sfera, sarà pensato come gruppo operante sugli elementi della sfera, cioè sulla sfera immaginata come luogo degli infiniti enti che si definiscono dando un punto della sfera stessa e una direzione uscente da esso tangente alla sfera. I due gruppi risultano allora senz'altro simili, e con opportuna scelta delle coordinate di un elemento della sfera, essi riescono identici. Si prendano come coordinate di un elemento della sfera la colatitudine e la longitudine θ , φ del punto corrispondente e la derivata $\epsilon^{(1)} = \frac{d\theta}{ds}$, dove ds è la lunghezza dell'elemento, $d\theta$ l'incremento di θ muovendoci lungo di esso. Le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto sono

$$e_3 \frac{\partial}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial e_3}; \quad e_1 \frac{\partial}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial}{\partial e_1}; \quad e_2 \frac{\partial}{\partial e_1} - e_1 \frac{\partial}{\partial e_2}.$$

Posto

$$e_3 = \cos \theta, \quad e_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad e_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

avremo che l'ultima, rappresentando una rotazione attorno all'asse delle « e_3 » sarà eguale a

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

La seconda, essendo una rotazione attorno all'asse e_2 , lascia invariato $\sin \theta \sin \varphi$ e quindi sarà della forma

$$e_1 \frac{\partial}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial}{\partial e_1} = k \left(-\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

dove k è una funzione da determinarsi. Ma, poichè

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial e_1} + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial e_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial e_3} + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial e_2} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial e_1}\end{aligned}$$

si trova senz'altro

$$k = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

e quindi

$$X_2 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Analogamente:

$$X_1 = \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ampliamo ora il gruppo X_1, X_2, X_3 immaginandolo operante anche su $\varphi^{(1)} = \frac{d\theta}{ds}$, $\varphi^{(1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Avremo:

$$\begin{aligned}X_3 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad X_2 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi^{(1)} \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}} + \\ &\quad + \left[\varphi^{(1)} \cos \varphi \operatorname{cotg} \theta - \varphi^{(1)} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}} \\ X_1 &= (X_3, X_2).\end{aligned}$$

Lasciando ora il termine in $\frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}}$, perchè noi vogliamo soltanto occuparci di come il gruppo trasforma $\varphi^{(1)}$, e osservando che $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$, donde $\varphi^{(1)} = \frac{\sqrt{1 - \theta'^2}}{\operatorname{sen} \theta}$, sostituendo alla $\varphi^{(1)}$ la nuova variabile $\psi = \int \frac{d\theta^{(1)}}{\sqrt{1 - \theta'^2}}$ il gruppo assume l'aspetto

$$\begin{aligned}X_3 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad X_2 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ X_1 &= (X_3, X_2).\end{aligned}$$

Ponendo dunque

$$\begin{aligned}x_2 &= \varphi \\ x_1 &= \theta \\ x_3 &= \psi\end{aligned}$$

questo gruppo assume proprio la forma data dal prof. BIANCHI.

Abbiamo dunque :

Le formole precedenti stabiliscono una rappresentazione del nostro spazio sulla sfera euclidea pensata come luogo di elementi, tale che ai movimenti dello spazio in sè corrispondono movimenti della sfera in sè stessa.

Se noi vogliamo che la rappresentazione sia biunivoca su tutta la sfera senza eccezione, resta senz'altro fissata la corrispondenza tra i punti dello spazio e le loro coordinate. E possiamo dire :

I gruppi finiti discontinui degli spazii in discorso sono quelli, che, nella corrispondenza precedentemente fissata, corrispondono ai gruppi dei poliedri regolari.

Il fatto che qui vediamo, cioè che *i gruppi finiti discontinui dei nostri spazii sono oloedricamente isomorfi a gruppi finiti discontinui di movimenti di uno spazio ellittico è un fatto generale, che si ripete sempre appena il gruppo totale dei movimenti non contenga trasformazioni infinitesime eccezionali.* Infatti a un gruppo finito discontinuo di movimenti corrisponde un gruppo finito discontinuo nel gruppo aggiunto, che è in tal caso oloedricamente isomorfo al gruppo primitivo. E questo gruppo, essendo un gruppo finito di operazioni lineari lascia sempre invariata una forma quadratica definita che è p. es. la somma della forma $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ e delle sue trasformate. Nel caso precedente questa forma è proprio « $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ ».

Da queste osservazioni scaturisce senz'altro un metodo per ricercare in ogni caso cosiffatto se esistono nel gruppo considerato sottogruppi finiti discontinui. Il nostro metodo *consiste nel formare il gruppo aggiunto, e di determinare quali delle sue trasformazioni lascino fissa una forma quadratica definita, ciò che si compie con operazioni algebriche: considerata poi questa forma quadratica posta uguale a zero come assoluto di uno spazio ellittico, vedere quali sottogruppi discontinui finiti di questo spazio appartengono pure al gruppo aggiunto.* In conclusione anche nel caso più generale la ricerca si riduce alla determinazione dei gruppi finiti discontinui di uno spazio ellittico. Applicheremo ora questo procedimento, un po' modificato, al tipo VIII^o del prof. BIANCHI. Cominceremo dal costruirne il gruppo aggiunto. Esso viene definito dalle

$$\frac{d e'_1}{d t} + \lambda_1 e'_2 - \lambda_2 e'_1 = 0$$

$$\frac{d e'_2}{d t} + 2 \lambda_1 e'_3 - 2 \lambda_3 e'_1 = 0$$

$$\frac{d e'_3}{d t} + \lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2 = 0.$$

Vediamo se qualche sua trasformazione lascia fissa una conica. E, poichè per le precedenti equazioni,

$$e'_1 \frac{de'_3}{dt} + e'_3 \frac{de'_1}{dt} - \frac{1}{2} e'_2 \frac{de'_2}{dt} = 0$$

ossia

$$4 e'_1 e'_3 - e'^2_2 = \text{cost.},$$

tutte le trasformazioni del gruppo lasciano fissa la conica reale

$$4 e'_1 e'_3 - e'^2_2 = 0.$$

Allora senz'altro deduciamo che il nostro gruppo è oloedricamente isomorfo ai movimenti di una pseudosfera in sè perchè questa conica è reale, e, analogamente a quanto s'è fatto prima noi avremmo:

Il nostro spazio si può riferire biunivocamente alla pseudosfera pensata come luogo dei suoi ∞^3 elementi in modo che ai movimenti della pseudosfera in sè stessa corrispondano movimenti dello spazio in sè. Questa corrispondenza definisce per noi senz'altro la corrispondenza tra un punto di S_3 e le sue coordinate. E allora senz'altro poichè eccetto casi banali, la pseudosfera non ammette gruppi finiti di movimenti in sè, ma ammette bensì gruppi infiniti discontinui, avremo:

Gli spazii in discorso non ammettono (tranne qualche caso banale) gruppi finiti discontinui di movimenti: essi ammettono però infiniti gruppi infiniti discontinui di movimenti, isomorfi oloedricamente ai gruppi di POINCARÉ.

Per gli altri tipi di S_3 , che ammettono un G_3 transitivo di movimenti è ben facile riconoscere l'impossibilità di gruppi discontinui finiti. Basta infatti riconoscere l'aperiodicità di una trasformazione qualsiasi del gruppo aggiunto. P. es. nel tipo VI° il gruppo aggiunto è definito da

$$\frac{de'_1}{dt} + \lambda_1 e'_3 - \lambda_3 e'_1 = 0$$

$$\frac{de'_2}{dt} + h (\lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2) = 0$$

$$\frac{de'_3}{dt} = 0.$$

donde, se $\lambda_3 \neq 0$,

$$e'_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} (e_3 - e_3 e^{\lambda_3 t}) + e_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$e'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} e_3 (1 - e^{h\lambda_3 t}) + e_2 e^{h\lambda_2 t}$$

$$e'_3 = e_3$$

che non può essere periodica nel campo reale, poichè, essendo $\lambda_3 = 0$, è $e^{\lambda_3 t} = 1$.

Se invece $\lambda_3 = 0$, si avrà :

$$e'_1 = -\lambda_1 e_3 t + e_1$$

$$e'_2 = -h \lambda_2 e_3 t + e_2$$

$$e'_3 = e_3$$

pure aperiodica se

$$\lambda_2 = 0, \text{ o } \lambda_1 = 0.$$

La discussione è analoga per gli altri tipi.

Invece ora di studiare quegli S_3 che ammettono un G_4 , noi osserveremo che questi G_4 contengono una trasformazione infinitesima eccezionale e diremo poche parole sui gruppi G_r che contengono k trasformazioni $Y_1 \dots Y_k$ infinitesime eccezionali. Per trovarne i sottogruppi finiti discontinui si trovino prima tutti i cosiffatti sottogruppi eventuali del gruppo aggiunto. Si determinano in un modo qualunque le trasformazioni corrispondenti del gruppo iniziale, cercando poi, se è possibile, di aggiungervi delle trasformazioni di quel sottogruppo di G_r che viene generato dalle $Y_1 \dots Y_k$, che siano periodiche e che insieme alle precedenti generino effettivamente un gruppo della specie voluta.

§ 13. Daremo ora un'applicazione dei nostri metodi alla determinazione degli spazii che ammettono un G_1 oppure un G_2 o un G_3 o un G_4 , oppure un gruppo a più di 4 parametri con sole 4 trasformazioni infinite-sime indipendenti.

Per i primi quattro casi il problema si risolve facilmente: per il quinto caso invece si vedrà che occorrono nuovi e particolari artifici, senza i quali i calcoli diverrebbero estremamente lunghi e ben difficilmente condurrebbero in fondo.

A questo caso, è riservata una prossima Memoria.

Per trovare gli spazii che ammettono un G_1 basta (cfr. BIANCHI (A) pag. 8) supporre i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1 .

Per trovare gli spazii che ammettono un G_2 , basta, nel primo caso, ammettere i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1, x_2 .

Nel secondo caso posto

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le formule di KILLING ci danno subito che

$$a_{2k} = x_1 a_{1k} + c_{2k} \quad (k = 1, 2)$$

$$a_{22} = x_1^2 a_{11} + 2 c_{12} x_1 + c_{22},$$

dove le c_{ik} sono arbitrarie, purchè non dipendano da x_1, x_2 .

Spazii che ammettono un G_3 a trasformazioni infinitesime indipendenti.

Qui ricorderemo i risultati generali del § 4. Per trovare gli spazii corrispondenti a uno di questi tipi noi dovremo scindere il calcolo in due parti: uno relativo alle a_{ik} per $i, k = 1, 2, 3$ e l'altro relativo alle a_{ik} per $i > 3, k \leq 3$. Quanto alle a_{ik} dove $i > 3, k > 3$ noi sappiamo già che esse possono essere funzioni arbitrarie indipendenti dalle x_1, x_2, x_3 . Esamineremo ora uno dopo l'altro i vari tipi di G_3 , transitivi nelle x_1, x_2, x_3 già trovati.

1.º tipo). Per le a_{ik} dove $i, k = 1, 2, 3$ otteniamo, integrando le equazioni di KILLING,

$$a_{11} = c_{11}; \quad a_{22} = c_{22}; \quad a_{12} = c_{12} e^{\frac{x_1}{2}}; \quad a_{23} = e^{x_1} (x_1 c_{23} + c_{23})$$

$$a_{33} = e^{x_1} (x_1^2 c_{33} + 2 x_1 c_{23} + c_{33}) \quad a_{13} = e^{\frac{x_1}{2}} (x_1 c_{13} + c_{13})$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 . Se lo spazio in discorso è un S_4 , potremo supporre $a_{44} = 1, a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ e le c_{ik} funzioni di x_4 . In generale avremo per le a_{ik} , dove $i > 3, k \leq 3$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} a_{i2} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} - a_{i2} - \frac{1}{2} a_{i3} = 0$$

equazioni, che si integrano senz'altro.

2.º tipo). Per le a_{ik} dove $i, k = 1, 2, 3$ avremo per le equazioni di KILLING, che subito si integrano,

$$a_{11} = c_{11} \quad a_{12} = c_{12} e^{x_1} \quad a_{13} = c_{13} e^{hx_1} \quad a_{22} = c_{22} e^{2x_1}; \quad a_{23} = c_{23} e^{(1+h)x_1}$$

$$a_{33} = c_{33} e^{2hx_1}$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

Se lo spazio è un S_4 si può fare $a_{44} = 1, a_{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

In generale per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) avremo:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0 \quad - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + a_{i3} h \frac{\partial x_3}{\partial x_k} = 0$$

che subito si integrano.

3.º tipo). Avremo per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0;$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + a_{13} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} - a_{12} + h a_{13} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + 2 a_{23} = \\ &= \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} - a_{22} + h a_{23} + a_{33} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} - 2 a_{23} + 2 h a_{33}. \end{aligned}$$

Derivando la seconda di queste ultime equazioni rispetto a x_1 e portandovi il valore di $\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}$ dato dalla terza e tra la seconda e la terza formula così ottenuta eliminando a_{13} , si ottiene:

$$\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial x_1^2} + h \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + a_{12} = 0.$$

E, se $\alpha \pm i\beta$ sono le radici di $z^2 + hz + 1 = 0$ si avrà:

$$a_{12} = \psi e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 + \chi e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1$$

dove ψ, χ non dipendono da x_1, x_2, x_3 .

Si ha quindi:

$$a_{13} = -\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + h \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} = 0.$$

Sostituendo nell'ultima per le $\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}$ i loro valori, si ha:

$$\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} + 4 a_{23} + h \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} = 2 h a_{33}$$

Derivando ed eliminando tra l'equazione così ottenuta e la precedente la a_{33} si trova:

$$\frac{\partial^3 a_{23}}{\partial x_1^3} + 3 h \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} + (4 + 2 h^2) \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + 4 h a_{23} = 0.$$

Un'analogha equazione si troverebbe per a_{22} e si avrebbe:

$$a_{22} = \varphi e^{h x_1} + \psi e^{-h x_1} \cos 2 \beta x_1 + \chi e^{-h x_1} \sin 2 \beta x_1$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} \quad a_{33} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} \left(1 + \frac{h}{2}\right).$$

Si ha poi $a_{11} = \chi$, dove φ, ψ, χ sono funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 .
Se lo spazio è un S_4 , potremo fare $a_{44} = 1, a_{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

In generale per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) otteniamo:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} - a_{i2} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + a_{i3} \frac{\partial (x_2 + h x_3)}{\partial x_k} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} + a_{i3} = 0 \quad \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} + h a_{i3} = 0$$

che si integrano senza difficoltà.

4.^o tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) le equazioni e la loro integrazione si trova già nelle pag. 67-68 di (A). Basterà immaginarvi le a, b, c, d funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

Per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) troviamo le:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_2} + a_{i2} = 0$$

$$e^{-x_3} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i1} \frac{\partial (e^{-x_3})}{\partial x_k} - a_{i2} \frac{\partial (x_2^2 e^{-x_3})}{\partial x_k} - a_{i3} \frac{\partial (2 x_2 e^{-x_3})}{\partial x_k} = 0$$

che si integrano senz'altro.

5.^o tipo). Valgono per questo considerazioni perfettamente analoghe a quelle del tipo precedente.

6.^o tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) si trova, integrando le equazioni di KILLING, e indicando con χ_{ik} delle funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 che:

$$a_{11} = \chi_{11}; \quad a_{12} = \chi_{12}; \quad a_{13} = \chi_{13}; \quad a_{23} = x_1 \chi_{12} + \chi_{13}; \quad a_{22} = x_1 \chi_{22} + \chi_{23}$$

$$a_{33} = x_1^2 \chi_{22} + 2 x_1 \chi_{23} + \chi_{33}.$$

Per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) si ha:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} - \chi_2$$

che tosto si integrano.

7.^o tipo). Basta supporre le a_{ik} indipendenti da x_1, x_2, x_3, x_4 .

Spazii che ammettono un G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti. In questo caso si dovrà scindere lo studio per le a_{ik} in due altri casi, uno relativo alle a_{ik} ($i, k = 2$), l'altro per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$).

1.º tipo). Tutte le a_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2 . Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2$) si trova dalle formole di KILLING che:

$$a_{22} = a_{11} = c_{11} \quad a_{12} = 0$$

dove c_{11} è indipendente da x_1, x_2 .

Per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$) si ha:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = 0 \quad a_{i1} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} - a_{i2} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} = 0$$

che si integrano senz'altro.

2.º tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2$) si hanno le:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad a_{12} = 0 \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 2 a_{22} \cotg x_1 \quad a_{22} = a_{11} \operatorname{sen}^2 x_1$$

che si integrano tosto.

Per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$) le formole di KILLING danno, poichè le a_{ik} sono indipendenti da x_2 , che:

$$a_{i2} = a_{i3} = 0.$$

3.º tipo). La discussione è perfettamente analoga alla precedente.

Spazii che ammettono un gruppo G_4 a trasformazioni infinitesime dipendenti. La ricerca di questi spazii in generale si fa come precedentemente: noi, col solo fine di una maggiore brevità, studieremo soltanto gli S_4 , accontentandoci di aver fatto rilevare dagli esempi precedenti il metodo generale.

1.º tipo). Potremo chiaramente porre, quando ci si restringa agli S_4 ,

$$d s^2 = d x_i^2 + \sum_{i,k} a_{ik} d x_i d x_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Integrando le equazioni di KILLING, si trova

$$a_{11} = c_{11}; \quad a_{22} = c_{22}; \quad a_{23} = x_1 c_{22}; \quad a_{33} = x_1^2 c_{22} + c_{11}; \quad a_{12} + a_{13} = 0$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

2.º tipo). Posto, come sopra

$$d s^2 = d x_i^2 + \sum_{i,k} a_{ik} d x_i d x_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

otteniamo dalle equazioni di KILLING,

$$a_{11} = c_{11}, \quad a_{33} = c_{33}, \quad a_{23} = n e^{x_1} c_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \\ a_{22} = e^{2x_1} [(1 - n^2) c_{11} + n^2 c_{33}]$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

3.º tipo). Posto

$$d s^2 = d x_1^2 + \sum_{i,k} a_{ik} d x_i d x_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

si trova, con il solito procedimento, che :

$$a_{11} = c_{11}; \quad a_{33} = c_{33}; \quad a_{12} = a_{13} = 0; \quad a_{23} = n c_{33} \cos x_1 \\ a_{22} = n^2 c_{33} \cos^2 x_1 + c_{11} \sin^2 x_1.$$

Spazii che ammettono un gruppo G_4 non integrabile transitivo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti.

Prima di trattare questo caso particolare, faremo alcune considerazioni generali sugli spazii che ammettono un G_4 , a trasformazioni infinitesime indipendenti. Osserveremo cioè che in ognuno dei gruppi G_4 , cosiffatti, precedentemente determinati, entrano degli elementi arbitrarii. E noi potremmo valercene per condurre in due maniere i calcoli. Il primo modo consiste nel dare a questi elementi arbitrarii valori opportuni della massima semplicità, ricordando il teorema di LIE che due gruppi semplicemente transitivi sullo stesso numero di variabili e isomorfi sono anche simili. Il secondo metodo consisterebbe nel prefissare all'elemento lineare da determinarsi una forma saputa « a priori » possibile, lasciando quindi agli elementi arbitrarii che entrano nel gruppo tutta l'arbitrarietà compatibile con questa forma. Il primo metodo è più opportuno per lo studio degli spazii a un numero qualunque di dimensioni, il secondo per lo studio degli S_4 . Diamo ora un esempio del primo metodo.

Prendiamo p. es. il gruppo G_4 generato dalle

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}; \\ X_4 = [(c-1)x_1 + \varphi_1] \frac{\partial}{\partial x_1} + [-x_1 \varphi_3 + c x_2 + \varphi_2] \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + [x_3 + \varphi_3] \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Secondo i principii testè esposti potremo porre

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad l_4 = 1$$

$$\text{col che si ha } X_4 = (c-1)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + cx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Per le a_{ik} ($i > 4, k > 4$) basta supporre le funzioni indipendenti dalle x_1, x_2, x_3, x_4 . Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) troviamo per le formule di KILLING,

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{44}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{14}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{24}}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} = 2a_{23}; \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} = a_{i2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_4} = 2(c-1)a_{11}; \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x_4} = 2c; \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x_4} = 2a_{33}; \quad \frac{\partial a_{44}}{\partial x_4} = 0;$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x_4} = (c-1)a_{12} + ca_{12}, \text{ ecc., ecc.,}$$

che si integrano senz'altro. Per le a_{ik} ($i > 4, k \leq 4$) si hanno le :

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0; \quad -\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i2} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} = 0$$

$$(c-1)x_1 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_4} + (c-1)a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + ca_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + a_{i3} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} = 0$$

che pure si integrano senza difficoltà. Con questo stesso metodo si possono chiaramente studiare tutti gli altri tipi di G_4 . Noi, col solo scopo di non allungare questa Memoria con formule, che poi non utilizzeremmo, ci restringeremo agli S_4 e useremo naturalmente del secondo metodo. Cominciamo ora a trovare gli S_4 con un G_4 transitivo non integrabile del primo tipo, avvertendo che la prima parte dello studio ci servirà anche per i casi ulteriori. Siccome il sottogruppo formato dalle X_1, X_2, X_3 ha le $x_4 = \text{cost.}$ come varietà invarianti potremo porre :

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Se $Xf = \sum_{i=1}^4 \xi_i(x_h) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è una trasformazione infinitesima che quello spa-

zio ammette allora, scrivendo le condizioni di KILLING relative ad $a_{ik} = a_{i1}$, a_{42} , a_{43} , a_{44} otteniamo :

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\beta)$$

Indicando al solito con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} diviso per il valore certamente non nullo del determinante $|a_{ik}|$ otterremo dalle (β)

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_4} = - \sum_{k=1}^3 A_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (I)$$

Nei casi in cui, come nel nostro, ξ_4 può essere soltanto funzione di x_4 , esso è quindi per la (α) costante, e perciò per le (I) abbiamo che: $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = 0$. Dunque le ξ_i non possono contenere x_4 ; cosicchè la nostra scelta dell'elemento lineare fa sì che tutte le funzioni arbitrarie (della x_i) che compariscono in X_4 sono semplici costanti. Queste considerazioni valgono anche per molti dei casi seguenti e noi non le ripeteremo.

Intanto avremo che le α, β, γ sono effettive costanti. E se noi scriviamo le formole di KILLING per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) relative a X_1, X_2, X_3 otteniamo le formole pag. 67 di B. E ci basterà dall'esame di X_4 ricavare le a, b, c, d, e, f che nel nostro caso sono funzioni di x_4 . Osserviamo intanto che nella X_4 potremo (dividendo le α, β, γ per una costante certo non nulla) supporre $l_4 = 1$. Scrivendo le equazioni di KILLING, otteniamo dei polinomii in x_1, x_2 da uguagliarsi a zero. Annullando i coefficienti dei singoli termini (che saranno soltanto funzioni di x_4) raggiungeremo il nostro scopo. L'equazione di KILLING relativa ad a_{11} ci dà così:

$$\frac{d(a^2)}{dx_4} = 4(a^2\beta - \alpha b).$$

L'equazione di KILLING per a_{33} ci dà, indicando con un apice la derivazione rispetto x_4 :

$$b' = a^2\gamma + 2b\beta - \alpha(c + 2d)$$

$$c' + 2d' = 6(b\gamma - e\alpha)$$

$$d' = 2(b\gamma - e\alpha)$$

$$e' = (c + 2d)\gamma - 2e\beta - \alpha f.$$

L'equazione di KULLING relativa ad a_{22} ci dà infine :

$$f' = 4(e\gamma - f\beta).$$

Le a, b, c, d, e, f si ottengono dunque integrando un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine.

2.º tipo). Prefisso come sopra all'elemento lineare la forma

$$dx_4^2 + \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} dx_i dx_k$$

si trova che $\xi_3 = \varphi$, $\xi_1 = \psi$ sono costanti. Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) troviamo, poichè lo spazio deve ammettere il $G_3 \equiv (X_1, X_2, X_3)$ le equazioni di pag. 69 (A) dove soltanto le costanti di integrazione saranno funzioni opportune di x_4 . Se $\xi_3 = 0$, queste funzioni saranno proprio costanti effettive; se $\xi_3 \neq 0$, notiamo che mutando x_4 in Kx_4 , dove K è una costante opportuna, potremo fare $\xi_3 = \xi_4$, mentre, sostituendo al nostro spazio uno spazio simile, potremo ancora porre $a_{44} = 1$. Si ha così

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$

e le a_{ik} ($i = 1, 2, 3$) si troveranno ancora date dalle formule a pag. 69 di (A), dove le a, b, c, \dots si intendano ancora effettive costanti, ma al posto di x_3 si sostituisca $x_3 - x_4$.

Spazii che ammettono un G_4 a trasformazioni linearmente indipendenti, integrabile e il cui gruppo derivato è un G_3 a trasformazioni infinitesime non permutabili.

1.º tipo). Anche qui potremo porre

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Avremo per l'osservazione fatta che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono costanti effettive che indicheremo con l_1, l_2, l_3, l_4 cosicchè si potrà porre :

$$\xi_1 = (c - 1)x_1 + l_1 \quad \xi_2 = \varphi - x_1 l_3 + c x_2 \quad \xi_3 = x_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}.$$

Essendovi le X_1, X_2, X_3 il nostro spazio sarà del tipo:

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi dx_1^2 + 2\psi dx_1 dx_2 + \chi dx_2^2 + 2(x_1 \psi + \delta) dx_1 dx_3 + \\ + 2(x_1 \chi + \lambda) dx_2 dx_3 + (x_1^2 \chi + 2x_1 \lambda + \mu) dx_3^2,$$

dove le $\varphi, \psi, \chi, \delta, \lambda, \mu$ sono funzioni di x_4 .

Scrivendo le formole di KILLING relative a X_4 abbiamo:

$$\begin{aligned} & [(c-1)x_1 + l_1] \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i1}(c-1) \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + a_{k1}(c-1) \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \\ & + a_{i2} \frac{\partial (cx_2 - l_3 x_1)}{\partial x_k} + a_{k2} \frac{\partial (cx_2 - l_3 x_1)}{\partial x_i} + a_{3i} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + a_{3k} \frac{\partial x_3}{\partial x_i} = \frac{1}{l_4} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Sostituendovi i valori trovati delle a_{ik} , e integrando otteniamo:

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{2cl, x_1} \\ \psi &= e^{l(c-1)l, x_1} \{ -l_3 p_{22} e^{l, x_1} + p_{12} \} \\ \varphi &= e^{2l(c-1)x_1} \{ -2 p_{12} l_3 e^{l, x_1} + p_{11} + l_3^2 p_{22} e^{2l, x_1} \} \\ \lambda &= e^{l(c+1)x_1} \left\{ \frac{l_1}{c-1} p_{22} e^{l(c-1)x_1} + p_{23} \right\} \quad (\text{si noti che } c \neq 1) \\ \mu &= e^{2l, x_1} \left\{ \frac{2l_1}{c-1} p_{23} e^{l(c-1)x_1} + \frac{l_1^2}{(c-1)^2} p_{22} e^{2l(c-1)x_1} + p_{33} \right\} \\ \delta &= e^{cl, x_1} \left\{ \frac{l_1 p_{12}}{c-1} e^{(c-1)l, x_1} - l_3 p_{23} e^{l, x_1} - \frac{l_1 l_3}{c-1} p_{22} e^{cl, x_1} + p_{13} \right\} \end{aligned}$$

dove le p_{ik} sono costanti effettive.

2.º tipo). Anche qui si pone

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k.$$

E se ne deduce che le l_i sono effettive costanti. Per l'esistenza di X_1 , X_2 , X_3 si ha che ds^2 è del tipo già citato al 1.º caso.

Scrivendo le equazioni di KILLING relative alla $X_4 - l_2 X_1 - l_3 X_2$ e integrando, troviamo:

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{4l, x_1} \\ \lambda &= e^{3l, x_1} (p_{23} + l_1 p_{22} e^{l, x_1}) \\ \mu &= e^{2l, x_1} (l_1^2 p_{22} e^{2l, x_1} + 2l_1 p_{23} e^{l, x_1} + p_{33}) \\ \psi &= e^{3l, x_1} \{ -(l_1 + l_3) p_{22} e^{l, x_1} - l_4 p_{23} x_4 + p_{12} \} \\ \delta &= e^{2l, x_1} \{ p_{13} - l_1 (l_1 + l_3) p_{22} e^{2l, x_1} - (l_1 + l_3) p_{23} e^{l, x_1} + l_1 p_{12} e^{l, x_1} - \\ & \quad - l_4 p_{33} x_4 - l_1 l_4 p_{23} x_4 e^{l, x_1} \} \\ \varphi &= e^{l, x_1} \{ (l_1 + l_3)^2 p_{22} e^{2l, x_1} - 2(l_1 + l_3) p_{12} e^{l, x_1} + 2p_{23} l_4 x_4 (l_1 + l_3) e^{l, x_1} + \\ & \quad + l_4^2 p_{33} x_4^2 - 2l_4 p_{13} x_4 + p_{11} \} \end{aligned}$$

dove le p_{ik} sono costanti.

Spazii che ammettono un G_4 integrabile a trasformazioni infinitesime indipendenti, di cui il gruppo derivato è un G_2 .

Per il primo dei due casi di questo tipo, troviamo col solito procedimento delle pagine precedenti e con notazioni analoghe :

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi d x_1 d x_2 + \chi d x_2^2 + 2 (x_1 \psi + \varrho) d x_1 d x_3 + \\ + 2 (x_1 \chi + \lambda) d x_2 d x_3 + (x_1^2 \chi + 2 x_1 \lambda + \mu) d x_3^2$$

dove

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{2l, x_1} \\ \psi &= e^{l, x_1} (-l_3 p_{22} e^{l, x_1} + p_{12}) \\ \varphi &= -2 p_{12} l_3 e^{l, x_1} + l_3^2 p_{22} e^{2l, x_1} + p_{11} \\ \lambda &= e^{2l, x_1} (l_1 l_4 p_{22} x_4 + p_{23}) \\ \mu &= e^{2l, x_1} \{ 2 l_1 l_4 p_{23} x_4 + l_1^2 l_4^2 x_4^2 p_{22} + p_{33} \} \\ \varrho &= e^{l, x_1} \{ p_{13} + l_1 l_4 p_{12} x_4 - l_1 l_3 p_{22} e^{l, x_1} - l_3 p_{23} e^{l, x_1} + l_1 l_3 p_{22} e^{l, x_1} - \\ &\quad - l_1 l_3 l_4 p_{22} x_4 e^{l, x_1} \}. \end{aligned}$$

Studiamo il secondo tipo di tali gruppi.

Esso contiene un G_3 a trasformazioni infinitesime indipendenti del tipo 2.°, dove si faccia $h = 0$.

Sarà perciò :

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi e^{\alpha x_1} d x_1 d x_2 + \varrho e^{2\alpha x_1} d x_2^2 + \mu d x_3^2 + \\ + 2 \chi d x_1 d x_3 + 2 \lambda e^{\alpha x_1} d x_2 d x_3,$$

dove le φ, ψ, \dots sono funzioni di x_4 .

Nell'espressione trovata per la $X_4 f$ saranno al solito le φ_i vere costanti, e, come si vede perciò tosto, potremo porre, indicando con α, β, l_4 costanti,

$$X_4 = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta e^{-\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Integrando le relative equazioni di KILLING, e indicando con p_{ik} delle costanti, abbiamo :

$$\begin{aligned} \lambda &= p_{23} e^{(\alpha+1)l, x_4} \\ \mu &= p_{33} e^{2l, x_4} \\ \varrho &= p_{22} e^{2\alpha l, x_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi &= e^{l, x_1} \left(-\frac{\beta}{\alpha} p_{23} e^{\alpha l, x_1} + p_{13} \right) \\ \psi &= e^{\alpha l, x_1} \left(-\frac{\beta}{\alpha} p_{22} e^{\alpha l, x_1} + p_{12} \right) \\ \varphi &= -2\beta \left(p_{12} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha l, x_1} - \frac{\beta}{2} p_{22} \left[\frac{e^{\alpha l, x_1}}{\alpha} \right]^2 + p_{11} \right).\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, valgono le stesse formule, dove però al termine $\frac{e^{\alpha l, x_1}}{\alpha}$ (che compare in φ , ψ , χ) si deve sostituire il termine

$$l_4 x_4.$$

Spazii che ammettono un G_4 che contengono un G_3 a trasformazioni infinitesime permutabili e le cui trasformazioni infinitesime sono linearmente indipendenti.

In tutti i tipi già enumerati al § 11 i coefficienti dell'elemento lineare corrispondente saranno funzioni della sola x_4 . E noi potremo porre:

$$d s^2 = d x_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} d x_i d x_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Se ne ha che la φ_1 , φ_2 , φ_3 , l_4 sono costanti.

Le equazioni di KILLING diventano:

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \xi_4 \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_4} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 a_{lk} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \xi_4 \frac{\partial a_{il}}{\partial x_4} &= 0 \quad (i, l = 1, 2, 3).\end{aligned}$$

Sostituendovi per le ξ_i i loro valori, integrando, indicando con h_{ik} delle costanti, troviamo:

$$\begin{aligned}\text{I}^0) \quad a_{11} &= h_{11} e^{2l, x_1} & a_{22} &= h_{22} e^{2l, \alpha x_1} & a_{33} &= h_{33} e^{2l, c x_1} \\ a_{12} &= h_{12} e^{l, (1+\alpha) x_1} & a_{23} &= h_{23} e^{l, (\alpha+c) x_1} & a_{13} &= h_{13} e^{l, (1+c) x_1} \\ \text{II}^0) \quad a_{12} &= h_{12} e^{(1+2c)l, x_1} & a_{11} &= h_{11} e^{2l, c x_1} & a_{22} &= h_{22} e^{2l, (1+c) x_1} \\ a_{23} &= (l_4 h_{12} x_4 + h_{23}) e^{l, (1+2c) x_1} & a_{13} &= e^{2l, c x_1} (l_4 h_{11} x_4 + h_{13}) \\ a_{33} &= e^{2l, c x_1} (l_4^2 h_{11} x_4^2 + 2 h_{13} l_4 x_4 + h_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III}^0) \quad a_{22} &= h_{22} & a_{12} &= l_4 h_{22} x_4 + h_{12} & a_{23} &= \frac{1}{2} l_4^2 h_{22} x_4^2 + h_{12} l_4 x_4 + h_{23} \\ a_{13} &= \frac{1}{2} l_4^3 h_{22} x_4^2 + \frac{3}{2} l_4 h_{12} x_4^2 + (h_{11} + h_{23}) l_4 x_4 + h_{13} \\ a_{11} &= l_4 h_{22} x_4^2 + 2 h_{12} l_4 x_4 + h_{11}; \\ a_{33} &= \frac{l_4^4}{4} h_{22} x_4^4 + l_4^3 h_{12} x_4^3 + l_4 (h_{11} + h_{23}) x_4^2 + 2 l_4 h_{13} x_4 + h_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV}^0) \quad a_{22} &= h_{22} e^{2l_4 x_4}; & a_{12} &= e^{2l_4 x_4} \{ h_{22} l_4 x_4 + h_{12} \}; \\ a_{11} &= e^{2l_4 x_4} (l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{12} x_4 + h_{11}) \\ a_{23} &= e^{2l_4 x_4} \left(l_4^2 h_{22} \frac{x_4^2}{2} + l_4 h_{12} x_4 + h_{23} \right); \\ a_{13} &= e^{2l_4 x_4} \left\{ h_{13} + \frac{l_4^2 h_{22}}{2} x_4^2 + \frac{3}{2} l_4 h_{12} x_4^2 + (h_{11} + h_{23}) l_4 x_4 \right\} \\ a_{33} &= e^{2l_4 x_4} \left\{ h_{22} l_4^4 \frac{x_4^4}{4} + l_4^3 h_{12} x_4^3 + (h_{11} + h_{23}) l_4^2 x_4^2 + 2 l_4 x_4 h_{13} + h_{33} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V}^0) \quad a_{11} &= h_{11}; & a_{22} &= h_{22}; & a_{12} &= h_{12}; & a_{23} &= l_4 h_{22} x_4 + h_{23}; \\ a_{13} &= l_4 h_{12} x_4 + h_{13} \end{aligned}$$

$$a_{33} = l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{23} x_4 + h_{33}$$

$$\begin{aligned} \text{VI}^0) \quad a_{11} &= h_{11} e^{2l_4 x_4} & a_{22} &= h_{22} e^{2l_4 x_4} & a_{12} &= h_{12} e^{2l_4 x_4} \\ a_{13} &= e^{2l_4 x_4} \{ l_4 h_{12} x_4 + h_{13} \} & a_{23} &= e^{2l_4 x_4} \{ l_4 h_{22} x_4 + h_{23} \} \\ a_{33} &= e^{2l_4 x_4} \{ l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{23} x_4 + h_{33} \}. \end{aligned}$$

ERRATA-CORRIGE DELLA MEMORIA:

Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici.

(Di MICHELE GEBBIA, a Palermo.)

<i>Pagina</i>	<i>Linea</i>	<i>Errori</i>	<i>Correzioni</i>
164	11	$\bar{U} \alpha_0 + \bar{V} \beta_0 + \bar{W} \gamma_0$	$\bar{U} \alpha'_0 + \bar{V} \beta'_0 + \bar{W} \gamma'_0$
165	12	$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$	$\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0$
182	24	$\frac{c^2}{r^2_1}$	$\frac{c^2}{r_1}$
191		Nella figura sostituire σ_p al posto di σ_a e viceversa.	
201	12	V_1	U_1
209	27	$\Delta^2 U_1 = v, \Delta^2 V_1 = v$	$\Delta^2 U_1 = 0, \Delta^2 V_1 = 0$
210	15	$\Gamma(x, y, z) \equiv \Gamma'(\varphi)$	$\Gamma_\varphi(x, y, z) \equiv \Gamma'_\varphi$
»	17	$\Gamma'(\varphi)$	Γ'_φ
»	19	$\alpha \Gamma(x) + \beta \Gamma(y) + \gamma \Gamma(z)$	$\alpha \Gamma_x + \beta \Gamma_y + \gamma \Gamma_z$
212	9	(10)	(11)
218	2	$\int_\sigma \frac{\Gamma_y + K \beta}{R} d\sigma$	$\int_\sigma \frac{\Gamma_y - K \beta}{R} d\sigma$
220	10	$h_3 c_1 - h_1 c_1$	$h_3 c_1 - h_1 c_3$
»	18	$-\int_{\omega'} \frac{\Theta'}{r} \cos(t' z) d\omega'$	$-\frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega'} \frac{\Theta'}{r} \cos(t' z) d\omega'$
221	2	$\cos(t' y)$	$\cos(t' x)$
227	14	$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \beta$	$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \alpha - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \beta$
228	15	(I)' del n.° 64	(I)'' del n.° 64.

CORRECTIONS AU MÉMOIRE (*):

INTEGRALE, LONGUEUR, AIRE

par H. LEBESGUE, à Nancy.

Dans un mémoire: *Intégrale, Longueur, Aire* paru récemment dans les *Annali di Matematica* j'ai laissé passer quelques erreurs assez graves pour que le sens de certains paragraphes en soit obscurci.

Dans le paragraphe 95 il faut corriger ce qui se trouve entre « M.^r HILBERT remarque que... » et « Nous prenons pour A un ensemble partout dense dans P ;... » de la manière suivante:

M.^r HILBERT remarque que si l'on a certains renseignements sur la variation de la fonction E_i il suffit de choisir parmi les E_i une suite d'éléments e_j tels que, à tout point d'un ensemble A , partout dense dans D , corresponde une valeur de e_j qui a une limite quand j augmente indéfiniment, pour que les e_j aient une limite. Pour préciser, nous supposons que l'ensemble des nombres dérivés des E_i considérées comme fonctions d'une seule, quelconque, des variables x_1, x_2, \dots, x_n soit borné.

Nous supposons donc que l'on ait, quels que soient $i, x_1, x_2, \dots, x_n, h, p$

$$\left| \frac{E_i(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) - E_i(x_1, x_2, \dots, x_p + h, x_{p+1}, \dots, x_n)}{h} \right| < M,$$

M étant fixe. Nous prenons pour A un ensemble dénombrable partout dense dans D ;...

Il faut aussi remarquer que, dans le paragraphe 95, la lettre M a deux significations distinctes. Tantôt elle représente un nombre fixe, tantôt elle désigne un point variable. La fonction $e(M)$ est une fonction du point M .

Au paragraphe 43 j'indique un moyen de définir des fonctions à variation totale égale à celle de la fonction x et ayant dans tout intervalle des maxima et des minima. La formation de ces fonctions dépend du choix d'une suite de nombres ε_p satisfaisant à certaines conditions. Le procédé que j'ai donné pour choisir les nombres ε_p est inexact; au lieu de « Prenons pour ε_i le plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_{i-1}}{1}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{3}, \dots$ tels que... »

j'aurais dû dire « Prenons pour ε_i le plus grand des nombres $\frac{\varepsilon_{i-1}}{i!1}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{i!2}, \frac{\varepsilon_{i-1}}{i!3}, \dots$ tels que... »

Au paragraphe 16 l'inégalité $0 \leq y \leq f(y)$ doit être remplacée par $0 \leq y \leq f(x)$; au paragraphe 25 Σ doit être remplacé par ε .

Je profite de cette occasion pour dire qu'au sujet du problème des aires dans le plan, j'aurais dû citer les travaux de M.^r GÉRARD; voir à ce sujet soit la thèse de M.^r GÉRARD, soit le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, soit la *Géométrie élémentaire* de GÉRARD et NIEWENGLOWSKI.

(*) V. 4.^{me} Cahier du tome VII

Sulla formula di Taylor.

(Di ONORATO NICCOLETTI, a Pisa.)

In una Nota, inserita nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*) ho dato per le serie doppie di TAYLOR una formula, che esprime la differenza tra il valore di una funzione $f(x_0 + h, y_0 + k)$ finita e continua insieme con tutte le sue derivate nel campo definito dalle disuguaglianze $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$, e la somma dei primi $(m + 1)(n + 1)$ termini della corrispondente serie doppia di TAYLOR:

$$\sum_{\mu, \nu}^{\infty} \frac{1}{\mu! \nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}} \right)_{(x_0, y_0)} h^{\mu} \cdot k^{\nu}$$

(pei quali si ha cioè $0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$); questa differenza vien data come somma di tre integrali, uno doppio, gli altri due semplici.

Questa formula, che, come nella Nota ricordata è detto esplicitamente, può estendersi alle funzioni di un numero qualunque di variabili, è ivi dedotta da una formula generale d'integrazione per parti, relativa a funzioni di n variabili indipendenti. Comunico, in quel che segue, un'altra dimostrazione, di carattere affatto elementare, della formula stessa, che do per il caso generale di una funzione di n variabili indipendenti; ne deduco quindi una formula analoga, più generale, donde segue una proprietà interessante delle serie multiple (reali) di TAYLOR.

1. È noto (e si dimostra molto semplicemente) che sotto ipotesi conoscitissime, che è inutile ricordare, la formula di TAYLOR per una funzione

(*) *Sulle serie doppie di Taylor.* (Rendiconti Lincei, 16 Giugno 1901.)

Annali di Matematica. Serie III, tomo VIII.

$f(x)$ di una variabile reale x può scriversi al modo seguente :

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \\ &\quad + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx = \\ &= \sum_0^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(x_0) + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nella quale il *resto* R_m è dato dall'integral definito :

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) f^{(m+1)}(x) dx. \quad (2)$$

Ove poi all'integrale precedente si applichi convenientemente il teorema del valor medio, la (2) conduce immediatamente alle note forme del resto di SCLÖMICH e ROCHE, di LAGRANGE, di CAUCHY (*).

2. Sia ora $\varphi(xy)$ una funzione delle due variabili reali x ed y , finita e continua con quelle derivate che dovremo considerare per $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$; e poniamo nella (1) (**):

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x y_0) + \frac{(y_1 - y_0)}{1} \left\{ \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \right\}_{xy_0} + \dots + \frac{(y_1 - y_0)^n}{n!} \left\{ \frac{\partial^n \varphi(xy)}{\partial y^n} \right\}_{xy_0} + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1} \varphi(xy)}{\partial y^{n+1}} dy = \\ &= \sum_0^n \frac{(y_1 - y_0)^\nu}{\nu!} \left\{ \frac{\partial^\nu \varphi(xy)}{\partial y^\nu} \right\}_{xy_0} + \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1} \varphi(xy)}{\partial y^{n+1}} dy, \end{aligned}$$

cioè, per la (1) stessa, nella quale sia cambiato f in φ , m in n , x in y , poniamo :

$$f(x) = \varphi(x y_1).$$

(*) Cf. ad es.: GENOCCHI e PEANO, *Calcolo infinitesimale*, pag. 332.

(**) Col simbolo $\{f\}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ indichiamo il valore di una funzione $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ nel punto $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$; più oltre, se $i_1 i_2 \dots i_n$ è una certa permutazione degli indici $1, 2, \dots, n$, col simbolo $\{f\}_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_n}}$ indichiamo il valore che la f prende per $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$, $x_{i_2} = \alpha_{i_2}, \dots, x_{i_n} = \alpha_{i_n}$.

Avremo :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, y_1) &= \sum_0^m \sum_0^n \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right)_{x_0, y_0} \frac{(x_1 - x_0)^\mu (y_1 - y_0)^\nu}{\mu! \nu!} + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \left\{ \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} \right\}_{x, y_1} dx + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} \left\{ \sum_0^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} \left(\frac{\partial^\mu \varphi(x, y)}{\partial x^\mu} \right)_{x, y} \right\} dy. \end{aligned}$$

Ma per la (1) stessa, fattovi $f(x) = \varphi(x, y)$, si ha :

$$\sum_0^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} \left(\frac{\partial^\mu \varphi(x, y)}{\partial x^\mu} \right)_{x, y} = \varphi(x_1, y) - \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} dx ;$$

ne segue, sostituendo sopra, la formula :

$$\varphi(x_1, y_1) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{(x_1 - x_0)^\mu (y_1 - y_0)^\nu}{\mu! \nu!} \left\{ \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right\}_{x_0, y_0} + R_{mn}, \quad (3)$$

dove :

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \left\{ \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} \right\}_{x, y_1} dx + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \left\{ \frac{\partial^{n+1} \varphi(x, y)}{\partial y^{n+1}} \right\}_{x, y} dy - \\ &- \frac{1}{m! n!} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x_1 - x)^m (y_1 - y)^n \frac{\partial^{m+n+2} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

cioè appunto la formula (B) della Nota sopra ricordata.

3. Per vedere nel modo più semplice come questa formula possa estendersi alle funzioni di un numero qualunque di variabili, è utile, portandovi alcuni evidenti cambiamenti di notazione, scrivere le formole (1) e (3) al

modo seguente :

$$f(b_1) = \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1)}{b_1 - a_1} \right\} + \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx; \quad (1^*)$$

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2) = & \frac{(b_1 - a_1)^{m+1} (b_2 - a_2)^{n+1}}{m! n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \left\{ \frac{f(a_1, a_2)}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \right\} + \\ & + \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} f(x, b_2)}{\partial x^{m+1}} dx + \frac{1}{n!} \int_{a_2}^{b_2} (b_2 - y)^n \frac{\partial^{n+1} f(b_1, y)}{\partial y^{n+1}} dy - \\ & - \frac{1}{m! n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - x)^m (b_2 - y)^n \frac{\partial^{m+n+2} f(x, y)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} dx dy. \end{aligned} \quad (3^*)$$

Introduciamo ora i simboli di operazioni :

$$\left. \begin{aligned} D_1 f(a_1) &= \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1)}{b_1 - a_1} \right\}; \\ E_1 f(b_1) &= \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e nel caso di due variabili indipendenti, poniamo :

$$\left. \begin{aligned} D_1 f(a_1, y) &= \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1, y)}{b_1 - a_1} \right\}; \\ D_2 f(x, a_2) &= \frac{(b_2 - a_2)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a_2^n} \left\{ \frac{f(x, a_2)}{b_2 - a_2} \right\}; \\ E_1 f(b_1, y) &= \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial x^{m+1}} dx; \\ E_2 f(x, b_2) &= \frac{1}{n!} \int_{a_2}^{b_2} (b_2 - y)^n \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial y^{n+1}} dy; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

con questi simboli le formule (1*) e (3*) si scriveranno rispettivamente :

$$D_1 f(a_1) = (1 - E_1) f(b_1) \quad (1^{**})$$

$$D_1 D_2 f(a_1, a_2) = (1 - E_1)(1 - E_2) f(b_1, b_2) \quad (3^{**})$$

e in queste formule i secondi membri hanno rispettivamente il significato :

$$\begin{aligned} (1 - E_1) f(b_1) &= f(b_1) - E_1 f(b_1) \\ (1 - E_1)(1 - E_2) f(b_1 b_2) &= \\ &= f(b_1 b_2) - E_1 f(b_1 b_2) - E_2 f(b_1 b_2) + E_1 E_2 f(b_1 b_2). \end{aligned}$$

Dalle formule (1**) e (3**) si ha subito, per induzione, la formula generale. Sia $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ una funzione delle n variabili reali $x_1 x_2 \dots x_n$, la quale nel campo definito dalle disuguaglianze :

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sia finita e continua con quelle derivate che dovremo considerare. Poniamo allora :

$$\left. \begin{aligned} 1. f(x_1 x_2 \dots x_n) &= f(x_1 x_2 \dots x_n) \\ D_i f(x_1 \dots x_{i-1} a_i x_{i+1} \dots x_n) &= \\ &= \frac{(b_i - a_i)^{m_i+1}}{m_i!} \cdot \frac{\partial^{m_i}}{\partial a_i^{m_i}} \left\{ \frac{f(x_1 \dots x_{i-1} a_i x_{i+1} \dots x_n)}{b_i - a_i} \right\}; \\ E_i f(x_1 \dots x_{i-1} b_i x_{i+1} \dots x_n) &= \\ &= \frac{1}{m_i!} \int_{a_i}^{b_i} (b_i - x_i)^{m_i} \frac{\partial^{m_i+1} f(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i^{m_i+1}} dx_i; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

per i teoremi d'inversione delle derivazioni e della derivazione ed integrazione sotto il segno integrale, sono le D_i , E_k simboli operatori a due a due permutabili per $i \neq k$. Con queste notazioni, noi diciamo che *varrà la formula* :

$$D_1 D_2 \dots D_n f(a_1 a_2 \dots a_n) = (1 - E_1)(1 - E_2) \dots (1 - E_n) f(b_1 b_2 \dots b_n), \quad (8)$$

nella quale i due prodotti simbolici hanno il senso già sopra dichiarato.

Poichè la (8) è vera per $n = 1$, $n = 2$, essa sarà dimostrata in generale, quando, suppostala vera fino ad un valore n , si dimostri per il successivo $n + 1$. In questa ipotesi, in luogo di $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ sostituiamo nei due membri della (8) rispettivamente :

$$D_{n+1} f(x_1 x_2 \dots x_n, a_{n+1}) = (1 - E_{n+1}) f(x_1 x_2 \dots x_n, b_{n+1})$$

(uguaglianza vera a causa della (1**)); per la permutabilità dei simboli D

ed E con indici diversi, avremo:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \dots D_n D_{n+1} f(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) = \\ = (1 - E_1)(1 - E_2) \dots (1 - E_n)(1 - E_{n+1}) f(b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}), \end{aligned}$$

cioè la (8) stessa, cambiavovi n in $n + 1$. Essa è dunque vera in generale.

Abbandonando i simboli operatori così utili per la dimostrazione, scriviamo esplicitamente la (8). Avremo la formola generale cui volevamo arrivare:

$$\left. \begin{aligned} f(b_1 b_2 \dots b_n) = \sum_0^{m_1} \dots \sum_0^{m_n} \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_{(a)} (b_1 - a_1)^{\mu_1} (b_2 - a_2)^{\mu_2} \dots (b_n - a_n)^{\mu_n} + \\ + R_{m_1 m_2 \dots m_n}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

dove:

$$\left. \begin{aligned} R_{m_1 m_2 \dots m_n} = \sum_{a_{i_1}} \frac{1}{m_{i_1}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+1} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1}} \right\}_{(x_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n})} dx_{i_1} - \\ - \sum_{(i_1, i_2)} \frac{1}{m_{i_1}! m_{i_2}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} (b_{i_2} - x_{i_2})^{m_{i_2}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+m_{i_2}+2} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \partial x_{i_2}^{m_{i_2}+1}} \right\}_{(x_{i_1}, x_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_n})} dx_{i_1} dx_{i_2} + \dots + \\ + (-1)^{k-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}; b_{i_{k+1}}, \dots, b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k} + \dots + \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^n (b_i - x_i)^{m_i} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\partial^{\sum_i m_i + n} f}{\partial x_1^{m_1+1} \dots \partial x_n^{m_n+1}} \right)_{(x_1, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

e nella (10) il simbolo $\sum_{(i_1, \dots, i_k)}$ sta ad indicare che la somma relativa è estesa a tutte le combinazioni della classe k degli indici $1, 2, \dots, n$, e in ciascuno

dei termini della somma la $(i_{k+1} \dots i_n)$ indica la combinazione *complementare* (della classe $n - k$) della $(i_1 i_2 \dots i_k)$.

4. Per le (9) e (10) la differenza tra il valore della $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ nel punto $(b_1 b_2 \dots b_n)$ e la somma dei *primi* $(m_1 + 1) (m_2 + 1) \dots (m_n + 1)$ termini della corrispondente serie di TAYLOR

$$\sum_0^{\infty} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \cdot \left\{ \frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_{(a)} (b_1 - a_1)^{\mu_1} (b_2 - a_2)^{\mu_2} \dots (b_n - a_n)^{\mu_n} \quad (11)$$

(pei quali cioè si ha $\mu_i \leq m_i$) è espressa come somma di $2^n - 1$ integrali (di cui $\binom{n}{r}$ sono r -pli), i quali portano su opportune funzioni, che si hanno in guisa determinata dalla funzione data.

Ci si forma una chiara idea della forma del *resto* $R_{m_1 \dots m_n}$, ricorrendo al linguaggio della geometria ad n dimensioni. Riguardiamo infatti le $x_1 x_2 \dots x_n$ quali coordinate cartesiane dei punti di un S_n e in questo consideriamo il parallelepipedo ad n dimensioni colle faccie parallele agli iperpiani coordinati, di cui due vertici opposti sono nei punti $(a_1 a_2 \dots a_n)$, $(b_1 b_2 \dots b_n)$. Dalla (10) segue allora immediatamente che il resto $R_{m_1 m_2 \dots m_n}$ è uguale alla somma di tanti integrali definiti estesi a tutti gli S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) di questo parallelepipedo che contengono il vertice $(b_1 b_2 \dots b_n)$, presi positivamente o negativamente secondochè k è dispari o pari; per ciascuno di questi integrali la funzione sotto il segno è determinata completamente dai valori della $f(x_1 \dots x_n)$ sull' S_k cui l'integrale è esteso. Questo fa intendere anche come la formula (9) possa ancora dedursi direttamente da una formula più generale d'integrazione per parti, nella quale è fondamentale la considerazione del parallelepipedo sopra indicato (*).

5. Dalle (9), (10) si deducono dei risultati degni di nota. Poniamo nella (10):

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}, b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k}, \quad (12)$$

(*) Cf. nota citata, p. 468.

con che la (10) diventa

$$R_{m_1 \dots m_n} = \sum_1^n k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} A_{i_1 i_2 \dots i_k}; \tag{13}$$

decomponendo ogni esponente m_{i_ρ} nella somma di due

$$m_{i_\rho} = \mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} + \nu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)},$$

(di cui $\mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} > 0$), l'integrale k -plo $A_{i_1 \dots i_k}$ può scriversi anche al modo seguente:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{\mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} - 1} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{\mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} - 1} \cdot (b_{i_1} - x_{i_1})^{\nu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} + 1} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{\nu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} + 1} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}; b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k};$$

ed anche applicando ripetutamente il teorema del valor medio:

$$A_{i_1 \dots i_k} = \left. \begin{aligned} & \frac{\{ 1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} \}^{m_{i_1} - \mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} + 1} \dots \{ 1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} \}^{m_{i_k} - \mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} + 1}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}! \cdot \mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} \dots \mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}} \cdot \\ & \cdot (b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1} + 1} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k} + 1} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \end{aligned} \right\} \tag{12*}$$

($\rho = 1, 2, \dots, k$)

che, sostituita nella (13) porta alla *forma del resto di SCLÖMICH e ROCHE*. In questa formula (12*) le $\theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)}$ sono opportune quantità comprese tra zero ed uno; $0 < \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} < 1$. Facendo nelle (12*), (13) $\mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} = m_{i_\rho} + 1$ si ottiene la *forma del resto di LAGRANGE*:

$$R_{m_1 \dots m_n} = \left. \begin{aligned} & \sum_1^n k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1} + 1} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k} + 1}}{(m_{i_1} + 1)! \dots (m_{i_k} + 1)!} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

($\rho = 1, 2, \dots, k$)

ponendo invece tutte le $\mu_{i\rho}$ uguali ad uno, si ha la forma di CAUCHY:

$$\begin{aligned}
 R_{m_1 \dots m_n} &= \\
 &= \sum_1^n k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\
 &\quad \cdot (b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \\
 &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Se in questa poniamo:

$$b_{i\rho} = a_{i\rho} + h_{i\rho},$$

essa assume la forma:

$$\begin{aligned}
 R_{m_1 \dots m_n} &= \sum_1^n k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\
 &\quad \cdot h_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots h_{i_k}^{m_{i_k} + 1} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} h_{i_\rho}; a_{i_{k+1}} + h_{i_{k+1}} \dots a_{i_n} + h_{i_n})} \\
 &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k)
 \end{aligned} \tag{15^*}$$

Questa forma del resto è particolarmente importante. Ripetendo su essa (con lievi modificazioni) il ragionamento tenuto nella nota ricordata (p. 470 e ss.) per le funzioni di due variabili indipendenti, si ottengono le condizioni *necessarie* e *sufficienti* perchè la serie di TAYLOR per la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ relativa al punto iniziale (a_1, \dots, a_n) convenga *assolutamente* nel campo definito delle disuguaglianze $|x_i - a_i| < R_i$ e in questo campo abbia per somma la funzione stessa. È perciò necessario e sufficiente che le $2^n - 1$ espressioni che compariscono nella (15*):

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\
 &\left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} h_{i_\rho}; a_{i_{k+1}} + h_{i_{k+1}} \dots a_{i_n} + h_{i_n})} \\
 &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k) \\
 &\quad \quad \quad (k = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} \tag{16}
 \end{aligned}$$

tendano *uniformemente* allo zero, ove in esse le $h_{i\rho}$ e le $\theta_{i\rho}^{(i_1 \dots i_k)}$ si riguardino come variabili *indipendenti*, assoggettate solo alle disuguaglianze

$$|h_i| < R_i, \quad 0 \leq \theta_{i\rho}^{(i_1 \dots i_k)} \leq 1,$$

ed il resto $\bar{R}_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ ha la forma:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{p_1, p_2, \dots, p_k} = & \sum_1^k \frac{1}{p_{i_1}!} \int_0^1 (1 - t_{i_1})^{p_{i_1}} \frac{\partial^{p_{i_1}+1} F(1 \dots 1, t_{i_1}, 1 \dots 1)}{\partial t_{i_1}^{p_{i_1}+1}} d t_{i_1} - \\ & - \sum_{(i_1 i_2)} \frac{1}{p_{i_1}! p_{i_2}!} \int_0^1 \int_0^1 (1 - t_{i_1})^{p_{i_1}} (1 - t_{i_2})^{p_{i_2}} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial^{p_{i_1}+p_{i_2}+2} F(1 \dots 1, t_{i_1}, \dots, t_{i_2}, 1 \dots 1)}{\partial t_{i_1}^{p_{i_1}+1} \partial t_{i_2}^{p_{i_2}+1}} d t_{i_1} d t_{i_2} + \dots + \\ & + (-1)^{k-1} \frac{1}{p_1! \dots p_k!} \int_0^1 \dots \int_0^1 (1 - t_1)^{p_1} \dots (1 - t_k)^{p_k} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial^{p_1+\dots+p_k+k} F(t_1, t_2, \dots, t_k)}{\partial t_1^{p_1+1} \dots \partial t_k^{p_k+1}} d t_1 d t_2 \dots d t_k. \end{aligned} \right\} (20)$$

Questa è appunto la formula che volevamo ottenere. Facendo in essa $k = n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = 1$, si ha di nuovo la (9) (con un semplice cambiamento di variabili): ponendovi invece $k = 1$, $\nu = n$, si ha la formula:

$$\left. \begin{aligned} f(b_1 b_2 \dots b_n) = & f(a_1 a_2 \dots a_n) + U_1 + U_2 + \dots + U_m + \\ & + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1 - t)^m \frac{d^{m+1} F(t)}{d t^{m+1}} d t, \end{aligned} \right\} (21)$$

nella quale con U_i abbiamo indicato il complesso dei termini della serie (11) che hanno la dimensione i , e la quale perciò coincide colla ordinaria forma della formula di TAYLOR per le funzioni di n variabili, quando il resto si esprima mediante un integrale definito.

È chiaro poi come sulla (18) possa eseguirsi una trasformazione analoga a quella che dalla (9) ha condotto alle forme del resto di SCLÖMICH e ROCHE, di LAGRANGE e di CAUCHY.

7. Le considerazioni che seguono, relative alle serie multiple, servono a porre in più chiara luce il significato e la portata della formula (18).

Come è noto, una serie n -pla, (i cui termini dipendono cioè da n indici):

$$\Sigma U_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} (\mu_i = 1, 2 \dots) \quad (22)$$

dicesi *convergente* quando la somma S_{m_1, m_2, \dots, m_n} dei primi m_1, m_2, \dots, m_n ter-

mini della serie stessa (pei quali cioè si ha $\mu_i \leq m_i$) tende ad un limite determinato e finito S , *somma* della serie, quando *tutti* gli indici m_i si facciano tendere *insieme* all'infinito, affatto indipendentemente l'uno dall'altro.

Ma sulla serie (22) può procedersi ancora altrimenti. Se ne può ad es. cercare la somma per *linee*, facendo nella somma S_{m_1, m_2, \dots, m_n} tendere ciascun indice m_i *separatamente* e *successivamente* all'infinito; o, più generalmente, distribuiti gli indici m_1, m_2, \dots, m_n in gruppi, si può in S_{m_1, \dots, m_n} far tendere *separatamente* e *successivamente* all'infinito gli indici di ogni singolo gruppo, sostituendo in tal guisa alla ricerca di un limite n -plo la ricerca successiva di n limiti semplici, o, più generalmente, di più limiti, ciascuno dei quali abbia una molteplicità inferiore ad n .

Sulla serie multipla (22) si può ancora operare al modo seguente:

Distribuiamo gli n indici m_1, m_2, \dots, m_n in k gruppi ($k \leq n$) rispettivamente di $\nu_1 + \nu_2 \dots \nu_k$ elementi (con $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$) e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu_1}$ gli elementi del primo gruppo, $\beta_1 \dots \beta_{\nu_2}$ quelli del secondo, \dots $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_k}$ quelli dell'ultimo gruppo. Riunendo allora in un solo tutti quei termini della serie, per i quali ciascuna delle somme:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\nu_1}; \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu_2}, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\nu_k}$$

ha un valore determinato, dalla serie n -pla data otteniamo una serie k -pla, della quale potremo cercare la somma o direttamente o con uno qualunque dei processi sopra descritti.

È senz'altro evidente come dalla convergenza della serie data non segua affatto, in generale, l'esistenza di uno qualunque dei limiti sopra indicati e, quando anche esistano, tanto meno la loro uguaglianza colla somma S della serie. Vi è però una classe importantissima di serie, per cui una tale proprietà ha luogo, ed è quella delle serie *assolutamente convergenti*, le quali cioè restano convergenti quando ad ogni termine si sostituisca il suo valore assoluto; queste serie convergono infatti *incondizionatamente*, cioè *indipendentemente dall'ordine dei termini*, e per esse uno qualunque dei processi di addizione sopra descritti conduce sempre allo stesso limite S , somma della serie (*).

(*) Cf. A. PRINGSHEIM, *Zur Theorie der Doppelreihen* (Münchener Berichte, 1897, H. 1, s. 101 u. ff).

Ora la formula (18), come è chiaro senz'altro, esprime la somma dei primi $(p_1 + 1) \dots (p_k + 1)$ termini della serie k -pla, che si ottiene dalla serie (11) di TAYLOR per la funzione $f(x_1 \dots x_n)$, quando gli n indici $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ si distribuiscano nei k gruppi (19) del n.º 6, e si riuniscano in uno solo quei termini, per i quali gli indici di ciascun gruppo hanno una somma costante. In ciò appunto sta, secondo noi, il significato e l'importanza di essa formula, in quanto essa permette di assegnare in forma finita per un'intiera classe di serie (a parte la loro convergenza o meno) la somma dei primi termini di una qualunque delle serie dedotte dalla data al modo indicato. Se questo accada ancora per altre classi di serie, a me non è noto, nè credo sia stato mai finora studiato.

Contigliano, li 13 Febbraio 1902.

Studio geometrico della quartica gobba razionale.

(Di G. MARLETTA, a Catania.)

Nel presente scritto mi propongo di fare uno studio puramente geometrico della quartica gobba razionale, considerandola come proiezione della quartica normale dello spazio da quattro dimensioni (CLIFFORD).

Ho raggiunto in tal modo una notevole semplicità di ragionamenti ed unità di metodo. La più gran parte dei fatti proiettivi già noti intorno alle quartiche sghembe di 2.^a specie, trovati per vie molto diverse (ma per lo più con strumenti analitici) da parecchi Autori, saranno qui raccolti in breve spazio, e considerati da un unico punto di vista.

Si tratterà, naturalmente, anche dei casi speciali più notevoli, come la quartica equianarmonica, la quartica dotata di punto doppio, e quella con una o due tangenti stazionarie. L'ultimo capitolo sarà dedicato ad alcune involuzioni notevoli inerenti alla curva, involuzioni che sono state considerate, geometricamente e analiticamente, dal chiarissimo prof. BERZOLARI, per una curva razionale qualunque di un S_n . Non è scopo di questo lavoro il portar contributo di nuove proposizioni alla teoria delle quartiche sghembe razionali. Ma l'Autore si lusinga, che l'interesse per la semplicità e novità della trattazione supplisca, presso i Lettori, alla scarsa novità dei risultati.

I.

QUARTICA GENERALE.

1. Il cono quadrico dei piani trisecanti una quartica normale c di S_4 , e passanti per un punto generico O di questo, e il cono cubico che da O proietta una qualunque δ delle superficie normali del terzo ordine che con-

tengono la c , si secano, a prescindere dal cono a due dimensioni che proietta la curva da O , in una superficie φ del secondo ordine.

Se il piano che passa per O e seca la superficie δ in una conica è un piano trisecante c , la superficie φ si comporrà di questo piano contato due volte; in contrario, sia M un punto qualunque di φ : il piano trisecante c e che contiene la retta OM seca la δ in quattro punti, e quindi conterrà una generatrice di essa. Adunque in questo secondo caso, la φ si compone di due piani (trisecanti).

Proiettando da O in uno spazio ordinario S_3 , l'immagine di c è una curva del quarto ordine e di seconda specie che indicheremo con c_1 , e per quanto abbiamo detto inferiamo:

La quartica gobba razionale è la parziale intersezione dell'iperboloide costituito dalle sue trisecanti, e di una rigata cubica aventi in comune o la direttrice doppia di quest'ultima, o due generatrici sghembe ().*

2. Dal fatto che le tangenti e i piani osculatori alla quartica normale c costituiscono rispettivamente una superficie ed una varietà entrambe del sesto ordine, segue immediatamente che

*la sviluppabile osculatrice della quartica gobba razionale è del sesto ordine e della sesta classe (**).*

Si osservi inoltre che il contorno apparente della varietà cubica delle corde di c fatto da O su S_3 ,

*è la sviluppabile bitangente di c_1 ; essa è quindi del sesto ordine e della quarta classe (***)*.

3. Giacchè un iperpiano qualunque seca la sviluppabile osculatrice di c in una sestica razionale con quattro cuspidi e dotata quindi di sei punti doppi apparenti, segue che

*la curva doppia della sviluppabile osculatrice di c_1 è una sestica (****).*

Indicheremo con σ e Σ la superficie delle tangenti e la varietà dei piani osculatori della c .

4. È noto (CLIFFORD) che la quartica normale c determina in S_4 una ordinaria polarità rispetto ad una quadrica a tre dimensioni Θ , essendo polo

(*) CREMONA, *Memoria intorno alla curva gobba del 1.º ordine per la quale passa una sola superficie di 2.º grado*, §§ 2, 5. (Ann. di Matem., serie I, tomo IV.)

(**) CREMONA, l. c., § 11.

(***) CREMONA, l. c., § 20.

(****) CREMONA, l. c., § 13.

e polare un punto qualunque di S_4 e lo spazio ordinario che unisce i quattro punti di contatto degl'iperpiani iperosculatori di c uscenti da quel punto.

La c giace su Θ , e l'iperpiano tangente a questa varietà in un punto arbitrario di c , è l'iperpiano iperoscuttore a questa curva in detto punto.

La sestica secondo cui un iperpiano qualunque seca σ , giace in una superficie quadrica: correlativamente abbiamo che gl'iperpiani che proiettano da O i piani osculatori di c involuppano un cono quadrico a tre dimensioni.

Proiettando in S_3 abbiamo:

I piani osculatori di c , toccano una stessa quadrica che è iscritta nella sviluppabile osculatrice della curva ().*

Come corollario ne segue:

I sei piani osculatori condotti da un punto alla curva, toccano uno stesso cono quadrico ().*

5. Le tracce in S_3 degl'iperpiani iperosculatori alla c e passanti per O , sono quattro piani stazionari della quartica c .

Proiettando la c da una retta arbitraria di S_4 per O , in un piano, si ottiene una quartica con tre nodi, (se la retta si sceglie in modo da non incontrare σ), che ha quattro tangenti doppie, di cui gli otto punti di contatto stanno su di una stessa conica. Segue che gli otto piani che dall'asse di proiezione vanno ai punti di contatto delle otto tangenti a c che giacciono nei quattro iperpiani bitangenti che passano per essa, fanno parte di un cono quadrico (di seconda specie).

Proiettando in S_3 abbiamo:

*Le otto rette condotte da un punto dello spazio (ordinario) ai punti di contatto dei quattro piani bitangenti condotti per tale punto sono generatrici di uno stesso cono quadrico (**).*

6. Analogamente proiettando la c sopra un piano (come sopra), si ottiene una quartica trinodale, ed è noto che i suoi sei flessi sono sopra una stessa conica. Adunque possiamo concludere, che i sei piani che dall'asse di proiezione vanno ai punti di contatto dei sei piani osculatori che essa incontra, giacciono in uno stesso cono quadrico (di 2.^a specie).

Secando poi con S_3 si ha:

Le sei rette che da un punto di S_3 vanno ai punti di contatto dei sei piani osculatori uscenti dal punto, stanno in un cono quadrico.

(*) CREMONA, l. c., § 12.

(**) CREMONA, l. c., § 16.

Se inoltre rammentiamo (*) un notevole teorema sulle quartiche trino-dali, possiamo concludere che

il cono quadrico delle otto rette che da un punto qualunque P di S_3 proiettano i punti di contatto dei piani bitangenti c , e uscenti da P ; quello toccato dai sei piani osculatori di c , per P , e l'altro cono quadrico delle sei rette che da questo punto proiettano i punti di contatto dei detti sei piani osculatori, appartengono ad uno stesso fascio.

7. Se M è un punto di c , questa è proiettata dalla retta OM in un piano generico, in una cubica con un nodo, che ha quindi tre flessi in una stessa retta. Segue che la OM incontra fuori da M , tre piani osculatori della c (come del resto doveva essere, giacchè questa è tripla per la varietà planare Σ), e che i tre punti di contatto giacciono in uno stesso iperpiano con la retta OM .

Proiettando in S_3 abbiamo:

*Da un punto arbitrario della quartica c , possono condursi tre piani osculatori alla medesima, e i tre punti di contatto di questi stanno in un piano che passa per il punto considerato della curva (**).*

Allo stesso risultato si perviene osservando che in una involuzione d'ordine n e di specie $n - 1$, quando n è dispari, gli n punti n -pli costituiscono un gruppo dell'involuzione.

8. Un iperpiano Ω secca σ in una sestica razionale con quattro cuspidi: ne segue che per un punto qualunque di Ω passano sei corde di essa. Correlativamente abbiamo che in un iperpiano qualunque passante per O esistono sei piani intersezioni degli iperpiani che si ottengono proiettando da O due piani osculatori arbitrari di c .

Ne segue immediatamente che:

In un piano qualunque di S_3 esistono sei rette intersezioni di due piani osculatori della quartica c .

9. La proiezione di c da una retta generica r di S_4 uscente dal punto O , in un piano è una quartica con tre nodi, ed è noto che in una curva siffatta le sei tangenti ad essa nei tre punti doppi involuppano una conica. Ne segue che i sei iperpiani determinati da r e dalle sei tangenti a c negli estremi delle tre corde di questa che si appoggiano ad r , sono tangenti ad uno stesso cono quadrico (di seconda specie).

(*) GROSS, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind.*, III, § 2. (Math. Annalen, Bd. 32.)

(**) CREMONA, l. c., § 19.

In allora proiettando in S_3 si ha:

I sei piani che passano per un punto qualunque dello spazio (ordinario) e per le sei tangenti alla quartica c_1 negli estremi delle tre corde per esso, toccano uno stesso cono quadrico ().*

È noto inoltre che in una quartica piana con tre nodi, le sei tangenti che si possono condurre dai punti doppi a toccare altrove la curva, involuppano una stessa conica. Segue, proiettando dalla retta r , che gl'iperpiani determinati da r e dalle sei tangenti a c che incontrano i piani individuati dalla r e dalle tre corde che si appoggiano a questa retta (diverse dalle tangenti negli estremi), involuppano uno stesso cono quadrico (di seconda specie).

Proiettando in S_3 abbiamo:

I sei piani che passano per un punto qualunque dello spazio (ordinario) e per le sei tangenti alla quartica c_1 che si appoggiano (fuori da questa curva) alle tre corde per il dato punto, involuppano un cono quadrico ().*

10. Rammentiamo (**), che la quartica normale c è trasformata in sè stessa da ogni omografia involutoria avente per asse un'asse della varietà cubica Γ costituita dalle corde di c , e per piano direttore il piano polare di quell'asse rispetto alla varietà quadratica Θ . E si sa, inoltre, che i piani direttori sono i piani in numero doppiamente infinito, di coniche della superficie del quarto ordine luogo dei punti d'incontro dei piani osculatori di c .

Ne segue che un piano direttore contiene due punti della quartica.

11. Sia π un piano direttore e p l'asse relativo: un iperpiano per π seca ulteriormente c in due punti X, Y , tali che la corda $d \equiv XY$ si appoggia a p , e che il gruppo $XYMN$ è armonico, dove è $M \equiv pd$, ed $N \equiv \pi d$.

Se è X , p. es., infinitamente vicino ad N (nel qual caso questo è uno dei due punti di c in π), anche Y è infinitamente vicino ad N , cioè: Il piano osculatore alla quartica normale c in uno qualunque dei due punti che questa curva ha in un piano direttore, seca questo stesso piano lungo una retta. Se quindi ora rammentiamo (***) che i tre piani direttori per un punto concorrono in una retta, proiettando in S_3 abbiamo:

(*) CREMONA, l. c., § 16.

(**) SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi...* n. 43. (Mem. della R. Acc. di Scienze di Torino. Serie II, tomo XXXIX.)

(***) SEGRE, l. c., n.º 43.

Esistono tre corde di c_1 , che chiameremo corde principali, concorrenti in uno stesso punto, e tali che ciascuna di esse è l'intersezione dei due piani osculatori a c_1 nei due punti in cui essa si appoggia a questa curva (*).

Viceversa, osserviamo che il piano di due punti di c_1 , e del punto comune ai due piani osculatori a questa curva nei due punti ora detti, è un piano direttore, giacchè la direttrice semplice della rigata che Γ ha nell'iperpiano delle due tangenti a c_1 nei due punti considerati, è un asse, e inoltre è la polare del piano in parola, giacendo anche nei due iperpiani iperosculatori nei soliti due punti della curva c_1 .

12. Siano π, ρ, σ i tre piani direttori passanti per il centro di proiezione O , e p, r, s i tre assi rispettivi.

La corda della quartica c_1 che giace in π , p. es., dovendo incontrare entrambe le rette r ed s , passa per il punto rs . Le due rette che da O proiettano gli estremi della corda di π , p. es., sono separate armonicamente dalla retta $h \equiv \pi \rho \sigma$ e dall'altra che si ottiene proiettando da O il punto rs . Ora siccome le due prime rette costituiscono l'intersezione di π col cono quadrico a tre dimensioni costituito dai piani trisecanti la c_1 e passanti per O , deduciamo che la retta congiungente questo punto con l'altro rs è reciproca della h rispetto al cono quadrico in parola.

Ne segue immediatamente che l'iperpiano proiettante da O il piano $\chi \equiv p r s$ è polare della retta L rispetto al cono quadrico medesimo.

Chiameremo *tetraedro principale* in S_3 quello costituito dal triedro delle corde principali della quartica c_1 , e del piano polare del vertice H_1 di questo rispetto alla quadrica delle trisecanti.

Da quanto sopra si è detto, si vedè che la traccia del piano π , p. es., e la proiezione della retta p , sono spigoli opposti del tetraedro principale, giacchè la corda di c_1 che giace in π , passa per il punto rs . In allora possiamo concludere (10):

*La quartica (generale) c_1 , corrisponde a se stessa in tre involuzioni assiali. Gli assi di ciascuna involuzione sono due spigoli opposti del tetraedro principale (**).*

(*) BERTINI, *Sulla curva gobba di 1.º ordine e 2.ª specie*, n.º 1 e 11. (Rend. Ist. Lombardo, serie II, Vol. V, 1872.)

(**) SEGRE, l. c., 44 e BRAMBILLA, *Le omografie che mutano in se stessa una curva gobba razionale del quarto ordine*, § I. (Rend. del R. Ist. Lombardo, serie II, Vol. XX, 1887.)

13. Il cono circoscritto dal punto O alla varietà quadratica Θ , è secato dallo spazio ordinario S_3 lungo una superficie di secondo grado ε_1 , che tocca i piani stazionari della quartica c_1 nei loro punti d'iperosculazione.

Osserviamo che se il punto O fosse sulla varietà quadratica Θ , il cono sestico delle corde della sviluppabile osculatrice di c , passanti per esso, si ridurrebbe al cono quadrico di Θ nell'iperpiano a questa varietà tangente nel punto O , contato tre volte.

Segue che ogni retta di Θ è trisecante della sviluppabile osculatrice di c , e viceversa.

Prendendo le forme polari abbiamo che un piano che tocca Θ lungo una retta, è incidente tre piani osculatori della curva c .

Sia Ξ un iperpiano tangente a Θ in un certo punto T , e passante per O : esso seca questa varietà in un cono quadrico ξ avente il vertice in T .

Conducendo da O i due piani tangenti a ξ , otteniamo nelle due rette di contatto due generatrici della quadrica di contatto del cono circoscritto da O a Θ , e nelle loro immagini in S_3 , due generatrici della quadrica ε_1 , e queste rette sono tali che per ciascuna di esse passano tre piani osculatori della c_1 . Viceversa è chiaro che ogni retta siffatta è una generatrice della quadrica ε_1 .

Adunque:

Il luogo delle rette da cui si possono condurre tre piani osculatori alla quartica c_1 , è una quadrica ε_1 che tocca i piani stazionari nei punti in cui essi toccano questa curva ().*

Osservando ancora che il piano che proietta da O una retta qualsivoglia di Θ è tangente a questa, deduciamo senz'altro che

la quadrica ε_1 è inscritta nella sviluppabile osculatrice della quartica c_1 ().*

14. Il cono del sesto ordine proiettante da O la sviluppabile osculatrice della curva c , e il cono quadrico dei piani trisecanti per lo stesso punto, si secano in una superficie del dodicesimo ordine, della quale facendo astrazione del cono quartico che da O proietta la quartica c , contato due volte, resta un luogo del quarto ordine che è costituito da quattro piani. Infatti se è M un punto di esso, per la retta OM passano un piano trisecante ed un altro contenente una tangente della curva c .

Affinchè il loro iperpiano non sechi questa curva in più di quattro punti, il punto di contatto della tangente in discorso deve essere uno dei punti di secamento del piano trisecante, e giacchè il punto M non è nel cono che

(*) CREMONA, I. c., § 12.

da O proietta c , detto punto di contatto non è nella retta OM , e quindi due piani in discorso coincidono.

Proiettando in S_3 , si ha:

Esistono quattro punti della quartica gobba razionale c_1 , nei quali la tangente alla curva seca ancora la curva stessa ()*.

15. Evidentemente il cono quadrico di seconda specie circoscritto alla varietà quadratica Θ da una retta arbitraria uscente da O , ha per traccia in S_3 il cono quadrico circoscritto alla quadrica ε_1 dalla traccia della detta retta.

Sia P_1 un punto qualunque dello spazio ordinario S_3 : gli otto punti comuni alla quartica c_1 ed al cono quadrico circoscritto da P_1 alla ε_1 , sono le immagini delle due quaterne di punti che la quartica c ha nei due coni quadrici della varietà Θ , aventi per vertici i due punti in cui questa è secata dalla retta OP_1 .

In allora se in particolare P_1 è un punto della c_1 , immediatamente se ne deduce che

Il cono circoscritto alla quadrica ε_1 da un punto arbitrario della quartica c_1 , ha un contatto quadripunto con questa curva nel suo vertice.

Al variare del punto P_1 sulla curva, si ottiene un sistema semplicemente infinito di coni quadrici d'indice otto.

Questa seconda parte segue dall'osservare che la retta OP_1 seca la varietà Θ in due punti, per ciascuno dei quali passano quattro rette di questa che si appoggiano alla quartica c ; od anche, direttamente, notando che il cono quadrico circoscritto ad ε_1 da un punto arbitrario dello spazio ordinario S_3 , seca la quartica c_1 in otto punti.

16. Chiameremo *iperboloide corrispondente* ad un dato punto A_1 della quartica c_1 , quello che è determinato dalle tangenti a questa curva nei tre punti i cui piani osculatori passano per A_1 .

Si ottiene in tal modo un sistema semplicemente infinito d'iperboloidi, di cui vogliamo trovare l'indice.

Osserviamo primieramente che esso è necessariamente un multiplo di 4, giacchè ciascun iperboloide passante per il punto di concorso delle tre corde principali, viene trasformato da ognuna delle tre involuzioni assiali che mutano in sè stessa la quartica c_1 , in un altro iperboloide del sistema e passante anch'esso per il punto di concorso delle tre corde principali.

(*) CREMONA, l. c., § 11.

Sia ora F_1 il punto di secamento di una tangente-secante di c_1 , e proiettiamo la sviluppabile osculatrice σ , di questa, sopra un piano ω_1 , in un involuppo che chiameremo σ'_1 . In questo avremo un'involuzione di prima specie e di terz'ordine, essendo coniugate le immagini di tre tangenti di c_1 , i cui punti di contatto siano tali che in essi i piani osculatori concorrono in uno stesso punto di questa curva. Tre rette coniugate di σ'_1 determinano tre punti come loro intersezioni a due a due, il luogo dei quali è una curva q'_1 , razionale, giacchè i suoi punti si possono far corrispondere biunivocamente alle tangenti di σ'_1 .

Stabiliamo sopra una retta arbitraria r' di ω_1 , una corrispondenza di CHASLES, chiamando corrispondenti due punti qualora stiano in due tangenti coniugate. Se si nota che la curva immagine di c_1 è una cubica dotata di cuspidi, e che quindi è della terza classe, si vede subito che gl'indici della corrispondenza in esame, sono entrambi eguali a 6. Però è facile vedere che le dodici coincidenze si riducono a sei (distinte). Ne segue che la curva q'_1 (che è il luogo di queste coincidenze), è del sesto ordine. Ora se indichiamo con $4x$ l'indice che si vuol trovare, evidentemente per un punto arbitrario di c_1 passano $4x - 2$ iperboloidi del sistema (prescindendo dai due infinitamente vicini). Anzi quelli passanti per F_1 e che danno tre tangenti coniugate della σ'_1 , saranno precisamente $4x - 3$ (perchè l'iperboloide corrispondente ad F_1 , passa per F_1). Quindi siccome per ciascuno di questi $4x - 3$ iperboloidi, si ottiene un punto triplo della q'_1 , segue che deve essere necessariamente $x = 1$.

Concludiamo adunque che

Gl'iperboloidi corrispondenti ai diversi punti della curva c_1 , formano un sistema semplicemente infinito d'indice quattro ().*

17. Dato un punto A_1 di c_1 facciamo ad esso corrispondere i due punti B_1 in cui questa curva è secata ulteriormente dall'iperboloide corrispondente ad esso.

Siccome per ogni punto della curva passano due degli iperboloidi in esame, così possiamo dire che ad un punto B_1 corrispondono due punti A_1 . Indichiamo con Δ questa corrispondenza (2, 2).

(*) BERZOLARI, *Sulla curva gobba razionale del quarto ordine*, 2. (Rend. Ist. Lomb., serie II, Vol. XXIII, fasc. II.) e *Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quart'ordine*, 9 (id., vol. XXV, fasc. XIV).

I quattro elementi uniti di essa sono, evidentemente, i punti di secamento delle quattro tangenti-secanti ()*.

Sia p_1 una delle tre corde principali: nel fascio di piani avente p_1 per asse, stabiliamo una corrispondenza di CHASLES, chiamando corrispondenti due piani ogni qualvolta proiettano due punti come A_1 e B_1 . Gl'indici della corrispondenza sono entrambi eguali a due, giacchè se A_1 ed A_1' sono due punti di c_1 in uno stesso piano per p_1 , i punti che ad essi corrispondono in forza di Δ , sono divisi in due coppie, ciascuna giacente in un piano per p_1 ; ciò è dovuto all'involuzione assiale, di cui p_1 è un asse, che trasforma la curva c_1 in se stessa.

Osserviamo inoltre che delle quattro coincidenze, due si ottengono proiettando da p_1 due coppie di punti di secamento delle tangenti-secanti, e che le altre due ci danno due coppie involutorie della corrispondenza Δ .

Infatti se A_1 e B_1 sono in uno stesso piano per p_1 , e se nessuno di essi è punto di secamento per qualcuna delle quattro tangenti-secanti, indicando con α_1 e β_1 gl'iperboloidi corrispondenti ad essi rispettivamente, dal fatto che α_1 passa per B_1 , segue che β_1 passerà per A_1 , giacchè l'involuzione assiale di cui p_1 è un asse, e che trasforma c_1 in se stessa, deve trasformare B_1 in A_1 , ed α_1 in β_1 . Adunque la coppia A_1, B_1 è una coppia involutoria di Δ .

Di coppie siffatte ne abbiamo 2. 3, tenendo conto delle altre due corde principali. Ma una corrispondenza asimmetrica (2, 2) non può avere più di due coppie involutorie, quindi deduciamo senz'altro che la corrispondenza Δ è *simmetrica*.

Adunque:

L'iperboloide corrispondente ad un punto qualunque della curva c_1 , taglia la curva stessa in due punti, e gli iperboloidi corrispondenti a questi, passano entrambi per il punto primitivo ()*.

18. Dal fatto che il cono dei piani trisecanti c e che passano per O , è di secondo grado, segue che il rapporto anarmonico degl'iperpiani che proiettano da un piano trisecante c , quattro punti arbitrari di questa, è costante al variare del piano trisecante.

Correlativamente abbiamo che i punti in cui quattro iperpiani iperosculatori di c sono secati da una retta a cui appartengono tre iperpiani iperosculatori della medesima curva, è costante al variare di questa retta.

(*) BERZOLARI, l. c., 3 e 9 risp.

Se ora quindi noi osserviamo che una tangente di c , può considerarsi come comune a tre iperpiani iperosculatori (successivi) di questa, proiettando in S_3 , deduciamo:

Le tangenti della quartica gobba razionale c , secano i quattro piani stazionari in gruppi di punti aventi un rapporto anarmonico costante ()*.

Od anche:

Le tangenti della quartica c , appartengono ad un complesso tetraedrale (o di REYE), il cui tetraedro fondamentale è costituito dai piani stazionari della curva ()*.

19. Osserviamo che se μ_1 e ν_1 sono due quadriche coniugate nell'involuzione di secondo grado esistente nel fascio determinato dalla quadrica ε_1 e da quella χ_1 delle trisecanti c_1 , involuzione che ha queste due quadriche come elementi doppi, il complesso di BATTAGLINI determinato (**) da esse contiene (***) le tangenti comuni ad ε_1 e χ_1 , giacchè queste sono coniugate nell'involuzione che μ_1 e ν_1 determinano come elementi doppi nel fascio in parola. Ma le tangenti alla quartica c_1 toccano (13) entrambe le quadriche ε_1 e χ_1 , quindi esse appartengono al complesso di BATTAGLINI determinato da μ_1 e ν_1 .

Concludendo abbiamo:

*Le tangenti della quartica c_1 , appartengono a tutti i complessi quadratici di BATTAGLINI, che vengono determinati da due quadriche qualunque fra loro coniugate nell'involuzione di secondo grado che le ε_1 e χ_1 determinano assunte come elementi doppi, nel fascio di quadriche che esse medesime individuano (****)*.

20. Si noti ora, che le tangenti di c_1 non possono toccare alcun'altra quadrica del fascio in quistione, e quindi se λ_1 e μ_1 sono due quadriche del fascio non coniugate nell'involuzione i cui elementi doppi sono ε_1 e χ_1 , esse determinano un complesso di BATTAGLINI che non contiene le tangenti di c_1 , giacchè queste toccano solamente queste due ultime quadriche, che, d'altra

(*) STUDY, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung*, zweiter Art. (Leipzig. Berichte, 1886.)

(**) ASCHIERI, *Sopra un complesso di 2.^o grado*. (Giorn. di Matem., Vol. VIII, 1870.)

(***) STURM, *Die Gebilde I. u. II. Grades der Liniengeometrie, ecc.*, III. (Leipzig, 1892-93-96.)

(****) BERZOLARI, *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine*, § 7, 37. (Ann. di Matem., serie II, tomo XX, 1892.)

parte, non sono coniugate nell'involuzione i cui elementi doppi sono λ_1 e μ_1 , contrariamente a come dovrebbe essere se le tangenti di c_1 facessero parte del complesso di BATTAGLINI determinato dalle medesime quadriche λ_1 , μ_1 .

Adunque possiamo enunciare il seguente teorema :

Le coppie di quadriche del fascio individuato dalle ε_1 , χ_1 , tali da determinare complessi di BATTAGLINI a cui appartengono tutte le tangenti della quartica c_1 , sono solamente quelle costituite da due quadriche coniugate nell'involuzione di secondo grado che nel fascio in parola vien determinata, dalle due ε_1 , χ_1 assunte come elementi doppi ().*

21. Termino questo primo capitolo osservando che per brevità tralascio di esporre alcuni teoremi dovuti al chiar. prof. CREMONA; teoremi che il lettore può trovare nella Memoria più volte citata, giacchè le dimostrazioni di essi, si possono agevolmente condurre, pur servendosi sempre della quartica razionale normale c , ad imitazione di quelle che nella detta Memoria si trovano.

Non parlo nemmeno della (unica) superficie di STEINER della quale c_1 è una curva assintotica, rimandando il lettore al dotto lavoro citato del chiarissimo prof. SEGRE.

II.

QUARTICA EQUIANARMONICA.

1. Sia il centro di proiezione O , un punto generico della varietà quadratica Θ (I, 4).

Il cono sestico delle corde della sviluppabile σ (I, 3) passanti per esso, si riduce al cono quadrico secondo cui l'iperpiano tangente in O a Θ , seca questa stessa varietà, cono quadrico che è da contarsi *tre* volte.

Quindi ogni retta di Θ è trisecante della sviluppabile σ , e viceversa. Segue che questa varietà è il luogo dei punti O da ciascuno dei quali la quartica normale c è proiettata nello spazio ordinario S_3 secondo una quartica gobba razionale c_1 , la cui sviluppabile osculatrice possiede una *conica tripla* invece di una sestica doppia.

(*) BERZOLARI, *Sui combinanti...*, l. c., § 7, 38.

Una quartica siffatta sarà chiamata *quartica equianarmonica*.

In questo capitolo supporremo sempre che il punto O sia un punto generico di Θ .

2. I quattro punti di contatto degl'iperpiani iperosculatori di c che passano per O , giacciono nell'iperpiano tangente in questo stesso punto alla varietà quadratica Θ , ossia sul cono quadrico di questa avente O per vertice; inoltre i quattro iperpiani iperosculatori in discorso, toccano questo cono quadrico. E viceversa. Proiettando in S_3 si ha:

I punti di contatto dei quattro piani stazionari di una quartica equianarmonica, stanno sulla conica tripla della sua sviluppabile osculatrice, e questa conica è toccata in questi punti dai quattro piani stazionari.

Viceversa:

Se i quattro punti di contatto dei piani stazionari di una quartica gobba razionale sono in uno stesso piano, la quartica è equianarmonica ().*

3. Dal fatto che per un punto qualunque O di S_1 , e in particolare di Θ , passano quattro iperpiani iperosculatori alla quartica normale c , segue che esistono quattro rette della varietà quadratica passanti per O e che incontrano questa curva.

Si è visto inoltre che le rette di Θ sono trisecanti della sviluppabile σ , la quale, evidentemente, ha la curva c come cuspidale; ne segue che ciascuna delle sopradette quattro rette incontra ulteriormente in un sol punto σ , cioè si appoggia fuori dalla c , ad una sola tangente di questa curva. Ora il piano che proietta da O questa tangente seca lo spazio ordinario S_3 in una retta *tangente-secante* della quartica c_1 , ed il punto di secamento è la traccia della retta di Θ uscente da O , e che incontra la c e la tangente di questa di cui si parla, retta che ha per traccia in S_3 uno dei quattro punti in cui la c_1 è toccata dai quattro piani stazionari.

Adunque:

*Nella quartica gobba equianarmonica i quattro punti di contatto dei piani stazionari, cadono nei quattro di secamento delle tangenti-secanti (**).*

Viceversa è facile vedere che

questa proprietà è caratteristica per la quartica equianarmonica.

(*) ARMENANTE, *Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine*. (Giorn. di Battaglini, Vol. XI, n.º 7.) — BRAMBILLA, *Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del quarto ordine*. (Atti del R. Ist. Veneto, tomo 3.º, serie 6.ª, 1885.)

(**) BERTINI, l. c., 21.

4. Si è visto (I, 10) che se si proietta da O il piano polare della retta per cui passano i tre piani direttori uscenti da questo stesso punto, si ottiene l'iperpiano polare di detta retta rispetto al cono quadrico dei piani trisecanti che passano per O .

Nel caso in esame, il piano polare della retta di concorso dei piani direttori per O , giace nell'iperpiano polare di questo punto, che non è altro se non l'iperpiano tangente alla varietà quadratica Θ nello stesso punto O .

Proiettando in S_3 abbiamo:

Il piano della conica tripla della sviluppabile osculatrice della quartica equianarmonica, è il piano polare del punto di concorso delle corde principali, rispetto alla quadrica delle trisecanti la curva ().*

5. Una tangente alla quartica normale c tocca il cono quadrico dei piani trisecanti questa curva e che passano per O , nello stesso punto in cui tocca la c . Ne segue che le rette proiettanti da O i punti di contatto delle tre tangenti a c che sono appoggiate ad una qualunque della semplice infinità di rette della varietà Θ per O , sono reciproche di questa retta rispetto al cono quadrico dei piani trisecanti la quartica normale. Adunque al variare della retta di Θ per O , l'iperpiano che unisce questo punto ai tre punti di contatto, involuppa un cono quadrico di seconda specie il cui asse è la polare dell'iperpiano tangente alla varietà Θ in O , rispetto al cono dei piani trisecanti che passano per quest'ultimo punto.

Proiettando in S_3 si ha:

*Le tangenti di una quartica gobba equianarmonica sono distribuite in terne, ognuna delle quali è costituita da tangenti concorrenti in uno stesso punto. Questo ed il piano dei loro punti di contatto sono polo e piano polare rispetto alla quadrica delle trisecanti; e i piani dei punti di contatto delle terne di tangenti che concorrono in un punto involuppano un cono quadrico, il cui vertice è il punto di concorso delle tre corde principali (**).*

6. Da quanto si disse (I, 11) segue che il trilatero prs è autoconiugato rispetto alla conica traccia di Θ nel suo piano. Proiettando da O si ottiene un triedro autoconiugato rispetto al cono delle rette di Θ uscenti da O , e facendone la forma polare rispetto al cono dei piani trisecanti per questo stesso punto, e poi proiettando nello spazio ordinario S_3 , possiamo senz'altro inferire che:

(*) BRAMBILLA, *Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del 4.º ordine*, III, 8. (Rendiconto della Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli. Anno XXIV, 1885.)

(**) BRAMBILLA, l. c., III, 11.

Il trispigolo delle corde principali è autoconiugato rispetto al cono involupato dai piani dei punti di contatto delle tangenti a c_1 , condotte da un punto della conica tripla della sviluppabile osculatrice ().*

7. Per l'ipotesi fatta sul punto O , i piani che passano per esso e che toccano la varietà Θ lungo una retta, sono quelli tangenti al cono quadrico che questa varietà ha nell'iperpiano che la tocca nello stesso punto O . Segue:

Il luogo delle rette dalle quali si possono condurre tre piani ad osculare una quartica gobba equianarmonica, è costituito dalle tangenti della conica tripla della sviluppabile osculatrice della curva medesima.

8. Ragionando analogamente a come si fece al n.º 14 del capitolo precedente, e tenendo conto dell'ipotesi fatta sul centro di proiezione O , deduciamo senz'altro che:

Il cono quadrico proiettante la conica tripla della sviluppabile osculatrice della quartica gobba equianarmonica c_1 , da un punto qualunque di questa, ha un contatto quadripunto nel suo vertice con questa stessa curva.

III.

QUARTICA CON PUNTO DOPPIO.

1. È noto (**), che per un punto generico della varietà cubica Γ costituita dalle corde della curva c , passano due rette, chiamate *assi*, che incontrano una semplice infinità di corde.

Ne segue supponendo il centro di proiezione O sopra una corda MN della c , che esistono in S_3 due punti A_1 e B_1 , dai quali la quartica c_1 , che per l'ipotesi fatta è dotata di un nodo, viene proiettata mediante due coni quadrici (***)).

Ciò si rende anche evidente osservando che ciascuno di questi coni quadrici è la proiezione in S_3 della superficie cubica normale costituita dalle corde di c , che si appoggiano ad uno dei due assi uscenti dal punto O , proiezione che vien fatta da questo punto medesimo (**).

(*) BRAMBILLA, l. c.

(**) SEGRE, l. c., n.º 43.

(***) BRAMBILLA, *Sulla curva gobba del 4.º ordine dotata di punto doppio*, § 3. (Rend. dell'Ist. Lombardo, serie II, Vol. XVII).

2. L'iperpiano Ξ iperosculatore a c in Q , passi per O : esso seca la varietà cubica Γ in una rigata del terzo ordine avente per direttrice doppia la tangente q alla curva c in Q , e per generatrici le coppie di assi uscenti dai vari punti della q . Ora, dal fatto che O giace in Ξ , segue che per esso passa una generatrice di questa rigata cubica, la quale dovendo essere un asse, sarà uno dei due assi OA_1 , OB_1 , uscenti dal punto O .

Proiettando in S_3 abbiamo:

La tangente in un punto d'iperosculazione della c , passa per uno dei due punti A_1 , B_1 ().*

Inoltre, siccome l'iperpiano Ξ seca la superficie cubica normale, la cui direttrice è, p. es., OA_1 , lungo questa retta e nella tangente q contata due volte, vale a dire è tangente lungo questa retta, segue che:

*I piani stazionari di c , pei quali la tangente nel punto di contatto concorre in A_1 , ovvero in B_1 , toccano lungo le tangenti rispettive i coni quadratici che proiettano doppiamente la c , dal punto A_1 , ovvero dal punto B_1 (**).*

3. Sia invece Ξ un iperpiano qualunque pei due assi OA_1 , OB_1 : i quattro punti in cui esso seca la quartica c sono i vertici di un quadrangolo gobbo tale che due lati opposti si appoggiano ad uno, ed altri due lati opposti si appoggiano all'altro dei due assi; e ciò perchè le corde della quartica normale c appoggiate ad un asse costituiscono una superficie cubica normale. Sia XY una delle due corde in Ξ che si appoggiano ad OA_1 , p. es. L'iperpiano Ω determinato dalle tangenti alla c nei punti X , Y , è (***) tangente alla varietà Γ , e secherà questa in una rigata cubica che ha la corda XY per direttrice doppia, e per generatrici le coppie di assi uscenti dai vari punti di essa. Quindi Ω contiene la retta OA_1 .

Proiettando da O in S_3 si ha che le tangenti negli estremi di una corda di c , passante per A_1 , o per B_1 , giacciono in un piano che contiene il punto A_1 o B_1 , la qualcosa, del resto, è evidente da per se stessa. Da questa osservazione segue senz'altro:

*Un piano qualunque passante per la retta A_1B_1 , seca la quartica c , in quattro punti tali che in essi le tangenti alla curva costituiscono un quadrilatero gobbo (****).*

(*) BRAMBILLA, l. c., § 3.

(**) BRAMBILLA, l. c., § 4.

(***) SEGRE, l. c.

(****) BRAMBILLA, l. c., n.º 5-8.

Od anche :

Ogni tangente di c , individua un quadrilatero gobbo circoscritto a questa curva ()*.

4. Per la quartica in esame oltre delle tre involuzioni assiali come nel caso generale (I, 11), abbiamo due omologie armoniche che trasformano in se stessa la curva, giacchè (**), com'è noto, la quartica c corrisponde a se stessa nelle due omografie involutorie di assi OA_1 , OB_1 , e i cui piani direttori sono rispettivamente i piani polari di queste rette rispetto alla varietà quadratica Θ .

Adunque :

*La quartica con un nodo c , corrisponde a se stessa nelle due omologie armoniche i cui centri sono A_1 e B_1 , e i cui piani d'omologia sono rispettivamente il piano polare di A_1 rispetto al cono quadrico (B_1) , e il piano polare di B_1 rispetto ad (A_1) (***)*.

5. Il luogo del punto comune alle due tangenti a c , negli estremi di una corda uscente da A_1 , p. es., è una curva giacente nel piano polare di A_1 rispetto al cono quadrico (B_1) , la quale è incontrata in *tre* punti da una retta qualunque di questo piano (essendo del sesto ordine la sviluppabile osculatrice della c_1).

Segue :

*La curva doppia della sviluppabile osculatrice di una quartica gobba con nodo, è composta di due cubiche piane situate nei piani polari del vertice di ciascun cono biproiettante la curva rispetto all'altro cono (****)*.

Evidentemente poi

*la sviluppabile bitangente di c , è costituita dai piani tangenti ai coni quadrici (A_1) e (B_1) (*****)*.

6. Posto $l \equiv MN$, indichiamo con f e g i due assi uscenti dal punto O .

Le tangenti in M ed N alla quartica normale c determinano un iperpiano che seca la varietà Γ in una rigata cubica la cui direttrice doppia è la corda l , e quindi a questa superficie appartengono f e g .

(*) BRAMBILLA, l. c., n.¹ 5-8.

(**) SEGRE, l. c., § 43.

(***) BRAMBILLA, *Le omografie che mutano in se stessa...*, l. c., § III, 11.

(****) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, II, Abth., § 111.

(*****) BRAMBILLA, l. c. dei Rend. Acc. di Napoli, n.¹ 15 e 16.

Proiettando in S_3 concludiamo:

Le tangenti nel nodo della c , sono situate in un piano passante per la retta $A_1 B_1$ ().*

Si osservi che i due iperpiani che da l proiettano i piani osculatori a c in M ed N , si secano in un piano ω per la stessa l , il cui iperpiano polare rispetto al cono quadrico di seconda specie di vertice l e proiettante c , è quello determinato dalle tangenti a questa curva in M ed N . Ora un iperpiano ad arbitrio che contiene il piano fg , seca il sopradetto cono quadrico di seconda specie, in un cono quadrico ordinario rispetto al quale la retta secondo cui è secato il piano ω è la polare del piano fg . E siccome i quattro punti in cui è secata la c costituiscono un quadrangolo gobbo di cui due lati opposti si appoggiano ad f , ed altri due lati opposti a g , segue che la rimanente coppia di lati opposti si deve appoggiare alla polare di fg , cioè alla traccia di ω .

Proiettando ne segue:

*Il terzo punto diagonale del quadrangolo piano completo costituito dalle tracce di c , in un piano qualunque passante per la retta $A_1 B_1$, di cui due punti diagonali sono A_1 e B_1 , è la traccia della retta intersezione dei due piani osculatori alla c , nel suo nodo (**).*

7. La quartica gobba c_1 dotata di un nodo possiede, a simiglianza di quella generale, tre corde principali, una delle quali è evidentemente *la retta comune ai due piani osculatori nel nodo di essa*. Inoltre è noto (***) che queste tre corde passano per uno stesso punto che è il vertice del cono quadrico involupato dai piani θ_1 dei tre punti di contatto dei tre piani osculatori di c , e passanti per uno stesso punto di questa. Sia C_1 questo vertice, e siano X_1, Y_1, Z_1, T_1 i quattro punti in cui la quartica c_1 è secata dal piano $\xi_1 \equiv A_1 B_1 C_1$, supponendo inoltre che le rette $X_1 Y_1, T_1 Z_1$ passino per A_1 , e che le $T_1 X_1, Z_1 Y_1$ passino per B_1 . I due piani θ_1 relativi ad X_1, Y_1 si secano lungo una retta la cui traccia in ξ_1 è nella retta che congiunge B_1 al punto comune alle rette $X_1 Z_1, Y_1 T_1$. Analogamente di-

(*) BRAMBILLA, l. c., *Sulla curva gobba del quarto ordine...*, n.º 4.

(**) BRAMBILLA, l. c., n.º 6.

(***) Dopo aver dimostrato (I, 21), seguendo l'illustre prof. CREMONA, che i piani θ_1 involupano un cono quadrico; affinché si possa concludere che il vertice di questo è il punto di concorso delle tre corde principali, basta osservare che il piano θ_1 relativo ad uno degli estremi di una corda principale, deve contenere questa stessa corda.

casi pei due piani θ_i relativi ad X_i e T_i , cioè essi passeranno per un punto della retta che unisce A_i al punto comune alle rette $X_i Z_i$ ed $Y_i T_i$. Ma i due piani θ_i considerati devono passare per il punto C_i , quindi è precisamente $C_i \equiv X_i Z_i . Y_i T_i$, cioè:

Gli estremi delle due corde principali (a prescindere da quella uscente dal nodo), costituiscono un quadrangolo (piano) completo di cui due punti diagonali sono i punti A_i e B_i ().*

8. Si è visto che la curva doppia della sviluppabile osculatrice di c_i , è composta di due cubiche piane che indicheremo con g'_i e g''_i .

Il cono quadrico (A_i) , p. es., ha due generatrici che sono le tangenti alla quartica c_i in due punti d'iperosculatione; e siccome questa curva corrisponde a se stessa nelle due omologie armoniche sopra studiate, segue che queste due generatrici del cono (A_i) , tangenti a c_i , sono situate in uno stesso piano col punto B_i .

Siano M_i ed N_i i punti d'iperosculatione in discorso.

Le tangenti a c_i nei due punti in cui è incontrata dalla generatrice di (B_i) successiva alla $M_i N_i$, si secano in un punto P_i infinitamente vicino ad A_i . Analogamente le tangenti alla quartica nei due punti in cui ad essa si appoggia la generatrice del cono quadrico (B_i) a cui è successiva la $M_i N_i$, determinano un altro punto Q_i anch'esso infinitamente vicino ad A_i . E siccome i punti della curva c_i successivo e precedente ad M_i giacciono nel piano tangente del cono quadrico (A_i) lungo la generatrice $A_i M_i$, e similmente i punti della c_i successivo e precedente ad N_i giacciono nel piano tangente ad (A_i) lungo la $A_i N_i$, segue che i punti P_i e Q_i sono nella retta (uscendo da A_i) comune ai due piani tangenti ora detti. Adunque se indichiamo con g''_i precisamente la cubica il cui piano passa per A_i , vediamo che essa in questo punto ha un flesso.

Concludendo si ha:

Ciascuna delle cubiche piane g' e g'' ha un flesso rispettivamente in B_i e in A_i ; la tangente d'inflexione di g'_i è la polare del piano delle due tangenti della quartica c_i le quali appartengono al cono (B_i) rispetto al cono stesso, od in altri termini è la retta d'intersezione dei due piani stazionari che toccano il cono (B_i) .

*Analogamente dicasi per la cubica g''_i (**).*

(*) BRAMBILLA, *Sulla curva gobba del...*, § 3, l. c.

(**) BRAMBILLA, *Sopra alcuni casi particolari...*, IV, 17, l. c.

9. Notiamo che le due omologie armoniche nelle quali la quartica c_1 corrisponde a se stessa, mutano l'uno nell'altro i due rami per il nodo di c_1 , giacchè l'omografia involutoria in S_4 di asse OA_1 , p. es., trasforma il ramo della quartica normale c passante per M in quello, della stessa curva, che contiene il punto N , dove, come si disse in principio di questo capitolo, i punti M ed N sono gli estremi della corda di c che esce dal centro di proiezione O .

È poi evidente che il nodo D_1 della c_1 , è doppio per entrambe le cubiche g'_1 e g''_1 ; anzi si può aggiungere che per esse è una *cuspidè*, giacchè esso è intersezione di due coppie (*successive*) di tangenti alla c_1 , corrispondenti in una determinata delle due omologie armoniche. Il punto, poi, della cubica g'_1 p. es., successivo a D_1 è intersezione delle tangenti a c_1 nei due punti successivi a D_1 (l'uno in un ramo e l'altro nell'altro ramo) e allineati con A_1 ; ne segue che questo punto è comune ai due piani osculatori alla c_1 in D_1 ai due rami di questa curva.

Concludendo abbiamo:

Le due cubiche (piane) nelle quali si decompone la curva doppia della sviluppabile osculatrice di una quartica gobba dotata di nodo, hanno ciascuna una cuspidè nel punto doppio della quartica; ed hanno ivi per tangente cuspidale comune l'intersezione dei due piani osculatori ().*

10. Se il centro di proiezione O è, in particolare, sopra la tangente t di c in un punto M di questa, la quartica c_1 ha una *cuspidè* nella traccia M_1 in S_3 della retta t .

Dei quattro piani stazionari, tre sono infinitamente vicini costituendo un unico piano che chiameremo *piano osculatore cuspidale*, riservando al rimanente il nome di *piano stazionario*.

Per le ipotesi fatte circa il punto O , la sviluppabile osculatrice della quartica c_1 è del *quinto ordine*, e della *quarta classe* (**).

Inoltre notiamo che dei tre punti in cui la sviluppabile osculatrice della quartica c è secata da una qualunque della semplice infinità di rette della varietà quadratica Θ passanti per O , uno è costantemente questo medesimo punto.

Ne segue che

la sviluppabile osculatrice della quartica gobba c_1 dotata di cuspidè ha

(*) BRAMBILLA, l. c., IV, 17.

(**) BRAMBILLA, l. c., V, 19.

una conica doppia. Questa giace nel piano che dal punto di contatto del piano stazionario proietta la tangente cuspidale. Inoltre questa conica tocca il piano stazionario nel punto in cui questo è toccato dalla quartica, ed è tangente nella cuspidale alla tangente cuspidale (*).

11. Osserviamo che nel caso in esame della quartica gobba razionale c_1 , cioè per l'ipotesi fatta sul centro di proiezione O , abbiamo:

Il luogo delle rette dello spazio (ordinario) S_3 , per ciascuna delle quali passano tre piani osculatori alla curva stessa, è costituito dalle tangenti alla conica doppia della sviluppabile osculatrice della quartica medesima c_1 .

Inoltre notisi che analogamente a quanto si disse al n.º 8 del capitolo precedente circa la quartica equianarmonica, concludiamo che

il cono quadratico proiettante la conica doppia della sviluppabile osculatrice della quartica gobba con cuspidale c_1 , da un punto ad arbitrio di questa, ha un contatto quadrupunto nel suo vertice con questa curva medesima.

IV.

QUARTICA CON UNA O DUE TANGENTI STAZIONARIE.

1. Sia il centro di proiezione O un punto generico della varietà planare Σ , cioè per esso passi un piano osculatore della quartica normale c , ed uno solo.

La quartica c_1 acquista una tangente stazionaria nella traccia di questo unico piano osculatore μ passante per il punto O , il punto di contatto essendo l'immagine in S_3 del punto di contatto con c di questo piano μ .

La classe della sviluppabile osculatrice a questa nuova quartica c_1 è cinque (**), giacchè una retta ad arbitrio per O incontra altri cinque piani osculatori della curva c .

Siccome, poi, ogni retta uscente da O e nel piano μ incontra le due tangenti (successive) di c in questo stesso piano, cioè dal fatto che ogni retta siffatta può considerarsi come corda della sviluppabile σ , segue che

(*) BRAMBILLA, l. c., V, 19.

(**) BRAMBILLA, Nota citata dell'Ist. Veneto, n.º 5.

l'ordine della curva nodale della sviluppabile osculatrice della quartica c_1 in esame, è cinque.

È chiaro inoltre che questa curva *ha solamente due piani stazionari*, giacchè dei quattro iperpiani iperosculatori della c_1 passanti per il punto O , due (successivi) sono quelli che contengono il piano μ .

Osserviamo, infine, che siccome questo piano tocca la varietà quadratica Θ lungo la tangente di c_1 in esso contenuta,

la quadrica ϵ_1 ha come generatrice la tangente stazionaria della quartica c_1 ().*

2. Dei tre piani osculatori distinti incontrati dalla retta che da O proietta un punto arbitrario della quartica c_1 , uno è fisso ed è μ ; segue che *per un punto qualunque di c_1 , passano due soli piani osculatori altrove.*

Si ha così sulla quartica c_1 un'involuzione quadratica i cui punti doppi sono i punti di contatto dei due piani stazionari (**).

Osserviamo inoltre che siccome l'omografia involutoria determinata da un asse e dal relativo piano direttore, deve trasformare in se stessa la quartica normale c_1 , abbiamo che un piano direttore che passi per il punto O , deve necessariamente contenere il punto in cui la c_1 è osculata dal piano μ .

In allora giacchè un piano ad arbitrio condotto per una tangente alla quartica e nell'iperpiano iperoscuttore nel punto di contatto di questa, contiene un sol asse, così correlativamente, per il punto O passa un sol piano direttore, cioè il piano osculatore μ conta per due piani direttori.

Proiettando in S_3 abbiamo:

*Delle tre corde principali della quartica gobba c_1 , due sono assorbite dalla tangente stazionaria (**).*

3. Sia ora O un punto doppio della varietà planare Σ , ed indichiamo con μ e ν i due piani osculatori di c_1 che passano per esso. Per questa ipotesi la quartica c_1 è dotata di *due tangenti stazionarie.*

Giacchè una retta arbitraria uscente dal punto O incontra altri quattro piani osculatori della curva c_1 , avremo che

*la sviluppabile osculatrice della quartica c_1 è della quarta classe (**).*

(*) BRAMBILLA, l. c., n.° 6.

(**) BRAMBILLA, l. c., n.° 5.

(***) CREMONA, *Sopra una certa curva gobba di quart'ordine.* (Rend. del R. Ist. Lomb., serie II, Vol. I, 1868.)

Analogamente a come si ragionò nel n.º 1 di questo capitolo, deduciamo che

è quattro l'ordine della curva nodale di questa superficie sviluppabile.
e che inoltre

questa curva nodale è dotata di due tangenti stazionarie nelle tangenti stazionarie di c_1 , con gli stessi punti di contatto ().*

Per dimostrare quest'ultima parte basta considerare la sezione di σ fatta con un iperpiano ad arbitrio per μ , p. es.

Notisi inoltre che i due flessi di c_1 assorbono completamente i punti di contatto dei quattro piani stazionari di questa curva, giacchè dei quattro iperpiani iperosculatori che passano per il punto O , due (successivi) contengono il piano μ , ed altri due (successivi) contengono l'altro piano osculatore ν .

Osserviamo ancora che ragionando analogamente a come si fece nel n.º 12 del cap. I, deduciamo che, nel caso in esame,

la quadrica ε_1 ha come generatrici le due tangenti stazionarie della curva c_1 .

4. L'iperpiano polare di O rispetto alla varietà quadratica Θ , seca la sviluppabile osculatrice σ , nelle due tangenti di c nei punti di contatto con questa dei piani osculatori μ e ν , e in una quartica gobba razionale.

Applichiamo a questa il teorema (I, 5), che dice appartenere ad uno stesso cono quadrico le otto rette che, da un punto qualunque dello spazio in cui è immersa la detta quartica, proiettano i punti di contatto delle otto tangenti della curva medesima, nei quattro piani bitangenti passanti per quel punto. Prendiamo, indi, le forme polari rispetto a Θ , e proiettiamo in S_3 . Avremo:

I piani osculatori di c_1 nei punti di contatto delle otto tangenti che a coppie si secano nei quattro punti dove un piano arbitrario di S_3 seca la curva nodale della sviluppabile osculatrice di c_1 , secano questo piano medesimo in otto rette che toccano una stessa conica.

5. Sia A un punto della quartica normale c : proiettando questa curva dalla retta OA sopra un piano qualunque, si ottiene una cubica di cui due flessi sono le tracce dei piani μ e ν ; l'altro punto d'inflessione, poi, sia dovuto ad un certo punto B di c , che è tale, quindi, che il piano osculatore in esso alla curva incontra la retta OA .

(*) BRAMBILLA, *Sopra alcuni casi particolari...*, I. c., I, 4.

Giacchè i tre flessi sono, com'è noto, in una stessa retta, le quattro rette OA , OB , OM , ON (dove M ed N sono i punti in cui i piani μ e ν osculano la c), sono in uno stesso iperpiano.

Adunque dato un punto A di c , l'unico piano osculatore di questa curva che seca la retta OA (a prescindere dai piani μ e ν), ha per punto di osculazione l'ulteriore intersezione della quartica c con l'iperpiano dei quattro punti O , A , M , N . Ne segue, senz'altro, che viceversa la retta OB è secata dal piano osculatore in A alla c .

Proiettando da O in S_3 abbiamo:

I punti della quartica gobba con due tangenti stazionarie, possono accoppiarsi secondo un'involuzione razionale di secondo grado, tale che il piano osculatore alla curva in un suo punto, passa pel coniugato di questo in detta involuzione ().*

È poi evidente che

i punti doppi di questa involuzione sono i punti d'inflessione della curva.

6. Il luogo della retta, che unisce due punti coniugati, è la rigata gobba del terzo ordine proiezione da O della corrispondente superficie cubica normale in S_4 , costituita dalle corde di c congiungenti due punti coniugati nell'involuzione quadratica secata sulla stessa c degl'iperpiani che passano per il piano OMN .

La rigata gobba in S_3 , di cui si parla, ha evidentemente come *asintotica* la curva c_1 , e la congiungente i due punti di flesso come direttrice doppia, giacchè essa (del resto) è traccia in S_3 di un piano che seca secondo una conica la superficie cubica normale di sopra.

7. Dal fatto che ciascuno dei due piani osculatori μ e ν contiene due tangenti (successive) della curva c , segue che

*le tangenti stazionarie della quartica c_1 , sono generatrici di regresso della sviluppabile osculatrice di questa (**).*

Siano A , B , M , D , E cinque punti successivi di c , e B , M , D siano precisamente nel piano osculatore μ . L'iperpiano delle rette AB , MD , che sono le tangenti (non successive) nei punti A ed M alla curva c , contiene il piano $BM D$, e quindi passa per O . Analogamente dicasi per l'iperpiano delle BM , DE .

(*) CREMONA, l. c.

(**) BRAMBILLA, l. c., I.

Concludendo si ha :

Le due tangenti stazionarie della quartica c , sono generatrici di regresso per la sviluppabile bitangente di questa ()*.

8. Sia δ un piano direttore uscente dal punto O . Se è d l'asse relativo a questo piano, cioè la polare di esso rispetto alla varietà quadratica Θ , l'omografia involutoria (d, δ) trasforma, evidentemente, l'uno nell'altro i piani osculatori μ e ν ; segue che la retta MN incontra δ , e che quindi i due piani OMN e δ sono incidenti.

Notiamo che (I, 10) il piano OMN è un piano direttore.

È noto (**) che il luogo del punto comune a due piani osculatori qualunque della curva c , è una superficie omaloide del quarto ordine, rispetto alla quale i piani direttori sono quelli delle sue coniche (in numero doppiamente infinito).

Da ciò (ovvero osservando che come nell'iperpiano determinato da due tangenti a c sono infiniti assi, così correlativamente) segue che per il punto O passa una semplice infinità di piani direttori.

Proiettando in S_3 si ha :

*Esiste una semplice infinità di involuzioni assiali che trasformano in se stessa la quartica gobba con due tangenti stazionarie (***)*.

Di queste involuzioni assiali, una è, evidentemente, quella di cui si parlò nel n.º 4 di questo capitolo, ed ha per assi la retta $l_1 \equiv M_1 N_1$, e l'altra $l'_1 \equiv \mu_1 \nu_1$, dove con μ_1 e ν_1 indichiamo i piani stazionari rispettivamente in M_1 ed N_1 .

Questa particolare involuzione assiale ha i punti M_1 ed N_1 come *doppi*, e questi punti, poi, sono *coniugati*, per quanto si è detto nel principio di questo numero, in una qualunque delle altre involuzioni assiali, che chiameremo involuzioni i .

9. Se indichiamo con t_i e t'_i gli assi di una qualunque delle involuzioni i , e precisamente con t_i la traccia in S_3 del piano direttore, per quanto si disse nel n.º 6 di questo capitolo, od anche osservando che il centro di proiezione O giace nella superficie omaloide del quarto ordine immersa in S_4 di cui nel numero precedente si è parlato, deduciamo che

(*) BRAMBILLA, l. c., I.

(**) SEGRE, l. c., 43.

(***) DEL RE, *Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba del 4.º ordine e 2.ª specie, e correlazioni . . .*, I, 1; II, 4. (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. 22, 1886-87.)

il luogo della retta t_1 è una rigata gobba del terzo ordine, avente la retta l_1 per direttrice doppia, e la retta l'_1 per direttrice semplice.

Chiameremo β_1 questa superficie.

Osserviamo che se prendiamo sulla quartica c_1 una coppia di punti ad arbitrio, determiniamo un'unica delle sopradette involuzioni i , di cui un asse è la generatrice di β_1 che passa per l'ulteriore punto in cui questa superficie è secata dalla retta congiungente i due punti considerati sulla curva.

Evidentemente

il prodotto di due delle involuzioni i , è un'omografia (non involutoria), che indicheremo con O , la quale trasforma la quartica c_1 in se stessa, e in cui i punti M_1 ed N_1 sono uniti.

Viceversa

ogni omografia non involutoria O cosiffatta, è, in infiniti modi, prodotto di due involuzioni assiali i ().*

Infatti un'omografia O dovendo avere i punti M_1 ed N_1 come elementi uniti, resta perfettamente determinata se si assegna una sua coppia qualunque di punti corrispondenti $P_1 Q_1$. Ma scelto un altro punto arbitrario R_1 di c_1 , i due punti P_1, R_1 sono corrispondenti in una determinata i , delle involuzioni i , e così anche Q_1 ed R_1 sono coniugati in un'altra determinata involuzione i_2 . In allora la data omografia O è, evidentemente, il prodotto delle due involuzioni i_1, i_2 (**).

10. Gli assi relativi ai piani direttori uscenti dal centro di proiezione O , costituiscono la rigata cubica sezione della varietà $\Gamma(I, 9)$ fatta con l'iperpiano polare del punto O rispetto all'altra varietà Θ .

Questa rigata cubica ha quindi per direttrice doppia la retta MN .

Ne segue che

il luogo della retta t'_1 è una rigata cubica β'_1 avente la l_1 come direttrice doppia, e la l'_1 come direttrice semplice.

Osserviamo che i punti di appoggio sulla l'_1 delle coppie di generatrici di β_1 , uscenti da uno stesso punto della direttrice doppia l_1 , determinano sulla detta retta l'_1 un'involuzione quadratica i cui punti doppi sono i punti in cui la l'_1 è secata dalle due tangenti stazionarie, e ciò perchè il piano osculatore μ , p. es., conta per due dei tre piani direttori uscenti dalla retta OM ,

(*) DEL RE, l. c., § III, 7.

(**) Per le correlazioni (involutorie o no) che mutano la curva c_1 nella sviluppabile dei piani osculatori, veggasi l'elegante studio del prof. DEL RE (loc. cit.).

(come si disse nel n.° 2 di questo capitolo, mentre d'altra parte si può notare che il piano OMN è già un piano direttore).

In altri termini possiamo dire che l'involuzione sulla l_1 di cui si parla, non è altro che l'involuzione determinata su questa retta dalla quadrica ε_1 .

Si osservi ancora che siccome le due rette t_1 e t'_1 provengono da un piano (direttore) per O e dalla relativa retta polare, esse sono polari rispetto alla medesima quadrica ε_1 . Segue immediatamente che la congiungente il punto t'_1, l'_1 con l'altro t_1, l_1 , e quella che unisce i punti t_1, l'_1 e t'_1, l_1 sono due generatrici rispettivamente delle due rigate β_1 e β'_1 . Adunque se infine rammentiamo che i due punti in cui le rette t_1, t'_1 si appoggiano alla l_1 sono coniugati armonici degli altri due M_1, N_1 , possiamo senz'altro inferire che

le due superficie β_1 e β'_1 si corrispondono nelle due omologie armoniche (M_1, ν_1) e (N_1, μ_1) ; ed anche nelle due che hanno per centro i due punti ε_1, l'_1 , e per piani d'omologia i due piani tangenti ad ε_1 negli stessi punti ma rispettivamente scambiati ().*

V.

INVOLUZIONI NOTEVOLI.

1. Sia G_1 un punto qualunque dello spazio ordinario S_3 in cui giace la quartica gobba razionale c_1 , che supporremo sia *generale*.

Indichiamo con γ il piano polare della retta $g \equiv OG_1$ rispetto alla varietà quadratica Θ .

Gl'iperpiani del fascio di base γ secano la curva c nei gruppi di un'involuzione I^g del quarto ordine e della prima specie. Chiameremo I_1^g l'involuzione di c_1 immagine della I^g .

Cominciamo ad osservare che la I^g contiene il gruppo dei quattro punti che la quartica normale c ha nell'iperpiano $O\gamma$. Inoltre siccome O è nella retta g , così l'iperpiano polare di esso passa per γ .

(*) DEL RE, l. c., § II, 5.

È facile poi dimostrare che la retta g e l'iperpiano $O\gamma$ sono forme polari rispetto alla polarità nella stella di centro O il cui cono fondamentale è il cono quadrico a tre dimensioni circoscritto alla varietà quadratica Θ dallo stesso punto O .

Da quanto si è detto, proiettando in S_3 deduciamo:

Dato un punto qualunque G_1 dello spazio ordinario S_3 , resta determinata sulla quartica gobba razionale c_1 , un'involuzione $I_1^{G_1}$ del quarto ordine e della prima specie. Ad essa appartengono il gruppo dei punti di contatto dei piani stazionari, e quello secato sulla curva dal piano polare del punto G_1 , rispetto alla quadrica ε_1 . Inoltre i suoi punti doppi sono i punti di contatto con c_1 dei sei piani osculatori di questa che passano per G_1 ().*

2. Volendo effettivamente costruire l'involuzione $I_1^{G_1}$ basta procedere nel modo seguente:

Per i quattro punti di contatto dei piani stazionari e per i quattro punti in cui la quartica c_1 è secata dal piano polare di G_1 rispetto alla ε_1 , si conducano rispettivamente due quadriche passanti entrambe per altri quattro punti ad arbitrio scelti sulla stessa curva. Queste due quadriche si secano in una quartica di prima specie che determina un fascio di quadriche che staccano, evidentemente, sulla curva c_1 la richiesta $I_1^{G_1}$.

È facile vedere che di queste quartiche di prima specie se ne ha una sestupla infinità.

3. Facilmente anche si dimostra che i quattro piani stazionari, le sei rette che questi a due a due determinano, e i quattro punti in cui a tre a tre si secano, sono i luoghi dei punti che determinano sulla c_1 involuzioni rispettivamente dotate di uno, due, tre punti fissi.

4. In particolare consideriamo la retta $h \equiv \pi \rho \sigma$, dove π, ρ, σ sono i tre piani direttori uscenti da O . Un iperpiano arbitrario passante per π, ρ , es., seca ulteriormente la quartica normale c in due punti la cui congiungente incontra nella retta p il piano $\chi \equiv p r s$, dove p, r, s sono le rette polari rispettivamente dei piani π, ρ, σ . Se quindi consideriamo gli altri due iperpiani che uniscono i piani ρ e σ ad uno qualunque dei due punti di c ottenuti come sopra si è detto, otteniamo altri due punti della curva che insieme coi primi due giacciono in uno stesso iperpiano passante per il piano χ .

(*) STUDY, I. C. BERZOLARI, *Sui combinanti dei sistemi...*, I. c., § 5, n.° 27 e 28; e *Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, n.° 12. (Ann. di Matem., serie II, tomo XXI.)

Proiettando in S_3 abbiamo:

Esiste sulla quartica c_1 un' involuzione di quarto ordine e di prima specie: i quattro punti di un gruppo sono tali che i tre piani passanti per uno di essi e per le tre corde principali, secano c_1 nei tre rimanenti ().*

Questa particolare involuzione sarà chiamata *involuzione sizigetica*.

Come corollario segue che

*i coni quadrici del fascio avente per base le quattro rette che dal punto di concorso delle corde principali proiettano i punti di un gruppo qualunque dell' involuzione sizigetica, secano la c_1 nei gruppi dell' involuzione stessa (**),*

giacchè di detto fascio fanno parte le quadriche ciascuna costituita da due facce opposte del quadrispigolo completo sopradetto.

5. Osserviamo che ciascuna delle omologie armoniche (p, π) , (r, ρ) , (s, σ) trasforma un piano ω trisecante la quartica c e passante per O , in un altro piano ω' analogo, e tale che uno dei punti di c in ω congiunto con uno (determinato) dei punti che la stessa curva ha in ω' , determina una retta che si appoggia tanto a p quanto a π (p. es.). Se in particolare ω è un piano tangente-secante, e tale è quindi anche ω' , la retta che unisce i due punti di contatto si appoggia tanto a p , quanto a π (p. es.).

Ne segue che i quattro punti di contatto dei piani per O tangenti-secanti, giacciono in uno stesso iperpiano passante per χ , cioè costituiscono un gruppo della involuzione I^h .

Analogamente dicasi dei punti di secamento.

Proiettando in S_3 , e rammentando quanto si disse nel n.º 1 di questo capitolo, si ha:

*I punti di contatto e i punti di secamento delle tangenti-secanti, e i punti di contatto dei piani stazionari, costituiscono tre gruppi dell' involuzione sizigetica (**).*

Per quanto si disse nella fine del n.º 1 di questo capitolo, abbiamo che *gli estremi delle tre corde principali sono i punti doppi dell' involuzione sizigetica; e precisamente gli estremi di una stessa corda principale costituiscono un gruppo dell' involuzione (**).*

Questa seconda parte segue dall' osservare che come i piani osculatori

(*) BERTINI, l. c., 13.

(**) BERZOLARI, *Sui combinanti...*, l. c., § 4, 18.

(***) BERTINI, l. c.

negli estremi delle tre corde di c che si appoggiano ad h , secano questa stessa retta, così, correlativamente, le tangenti alla curva c in detti punti, incontrano il piano χ .

6. Siano E ed F i punti di contatto di uno Ξ dei quattro iperpiani bitangenti la quartica c e che passano per la retta $h \equiv \pi \rho \sigma$. L'omografia involutoria (p, π) muterà Ξ in un altro iperpiano Ξ' passante per h (retta unita in π) ed anch'esso bitangente alla c , giacchè detta omografia trasforma punti infinitamente vicini, in altri cosiffatti. I punti di contatto di Ξ' saranno E', F' , e le rette EE', FF' si appoggiano al piano $\chi \equiv p r s$ (e precisamente alla retta p). Analogamente si hanno le altre due coppie di rette EE'', FF'' ; EE''', FF''' , dovute alle omografie involutorie (r, ρ) , (s, σ) . Ne segue senz'altro che

i punti di contatto dei piani bitangenti condotti dal punto di concorso delle tre corde principali, alla quartica c_1 , costituiscono due gruppi dell'involuzione sizigetica ().*

Se A_1 è un punto di diramazione del sistema simmetrico Δ (I, 17), tali anche saranno i suoi trasformati mercè le tre involuzioni assiali che mutano la quartica c_1 in se stessa. Quindi (V, 4) deduciamo che

*i quattro punti di diramazione del sistema simmetrico Δ , formano un gruppo dell'involuzione sizigetica (**).*

7. Ragionando in modo analogo a quello che si fece nel n.° 1 del presente capitolo, deduciamo che

*data una retta qualsivoglia dello spazio ordinario S_3 , rimane individuata sulla c_1 un'involuzione di quarto ordine e di seconda specie, costituita da tutti i gruppi delle involuzioni I_1 che i singoli punti della data retta determinano sulla quartica stessa (***)*.

Ed anche

*dato un piano arbitrario di S_3 , i gruppi delle involuzioni determinate sulla c_1 dai singoli punti del piano, costituiscono su questa curva un'involuzione del quarto ordine e della terza specie (***)*.

Osserviamo inoltre che

i gruppi ciascuno formato dai punti doppi delle involuzioni I_1 , che sulla

(*) BERZOLARI, *Sui combinanti...*, l. c., § 3, 11.

(**) BERZOLARI, *Sulla curva gobba...*, l. c., 3.

(***) BERZOLARI, *Sulle curve razionali...*, l. c.

c_1 determinano i singoli punti di una retta data t_1 , costituiscono un'involuzione I_1^4 del sesto ordine e della prima specie.

Notiamo che ciascun gruppo di questa involuzione si compone dei punti di contatto dei sei piani osculatori della quartica c_1 , che concorrono in uno stesso punto della retta data.

8. Nel caso particolare che la curva c_1 posseda due tangenti stazionarie, la I_1^4 ha due punti fissi nei due flessi della quartica.

Sia A_1 un punto arbitrario di S_3 : una retta t_1 uscente da esso, e corda della curva doppia della sviluppabile osculatrice della c_1 , curva doppia che sappiamo (IV, 3) essere una quartica con due tangenti stazionarie come la c_1 , e che chiameremo d_1 , determina su c_1 un'involuzione I_1^4 che è del quarto ordine se facciamo astrazione dei due punti fissi.

I quattro punti in cui la c_1 è osculata dai quattro piani osculatori che passano per uno qualunque dei due punti in cui la t_1 si appoggia alla quartica d_1 , giacciono nel piano determinato dalle due tangenti che concorrono nel punto che si considera. Segue che la I_1^4 ha due gruppi piani, ed è per conseguenza costituita dai gruppi di quattro punti in cui la c_1 è secata dai piani che passano per la retta comune ai due piani ciascuno determinato dalle due tangenti a questa curva concorrenti in uno dei punti in cui alla d_1 si appoggia la t_1 . In allora possiamo anche dire che i quattro punti in cui la quartica (con due tangenti stazionarie) c_1 è osculata dai quattro piani osculatori che concorrono in un punto A_1 arbitrario di S_3 , giacciono in uno stesso piano.

Viceversa sia α_1 un piano qualsivoglia dello spazio ordinario S_3 : i piani osculatori in tre dei punti in cui la c_1 è secata da α_1 , concorrono in un punto, tale che il piano dei punti di contatto dei quattro piani osculatori a c_1 e passanti per esso, non può essere altro che il piano α_1 , e ciò per quanto si è detto. Segue che i piani osculatori nei quattro punti in cui la c_1 è secata da un piano qualunque di S_3 , concorrono in uno stesso punto.

Adunque abbiamo in questo spazio una corrispondenza biunivoca tra i punti e i piani, ed essa è tale, come sopra si è visto, che se un punto descrive una retta, il piano corrispondente involupa un'altra retta, cioè la corrispondenza di cui si parla è una *correlazione*.

Si osservi ora che i punti di una retta arbitraria di S_3 e quelli in cui essa è secata dai piani corrispondenti, formano due punteggiate proiettive, le quali hanno *sei* punti uniti nei punti in cui la data retta seca la sviluppabile osculatrice della quartica c_1 ; ne segue che *tutti* i punti della retta sono uniti.

Concludendo abbiamo:

La quartica con due tangenti stazionarie determina nello spazio una polarità nulla, essendo polo e piano polare un punto e il piano dei punti di contatto dei quattro piani osculatori della curva che concorrono nel dato punto ().*

Catania, gennaio 1902.

(*) CREMONA, *Sopra una certa...*, l. c.

Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.

(Di ORAZIO TEDONE, a Genova.)

MEMORIA I.

(CORPI LIMITATI DA UN PIANO O DA UNA SFERA.)

PREFAZIONE.

I metodi aventi carattere di generalità, che, finora, sono stati adoperati per risolvere i problemi di equilibrio elastico per un corpo isotropo, si riducono, sostanzialmente, a due: a quello classico di LAMÉ, per sviluppi in serie di *funzioni semplici* ed a quello, per integrali definiti, detto, comunemente, di BETTI-CERRUTI. Il primo, già creato e felicemente adoperato per ottenere la soluzione di molti altri problemi di meccanica e di fisica-matematica, oltre al fatto che la sua applicabilità non va al di là di un numero di casi molto limitato, per quanto riguarda il nostro problema, si complica ancora per la difficoltà, spesso non facilmente superabile, della determinazione delle costanti quando si passa a soddisfare alle condizioni in superficie. Il secondo ha certamente un aspetto di grande generalità, ma, forse appunto per questa sua grande generalità, esso ha tutti i caratteri di un metodo astratto, mostrandosi poco adatto e pieghevole nei problemi, relativamente semplici, dell'equilibrio dei corpi isotropi. Che se col suo impiego si sono ottenuti notevoli risultati, per me, questi risultati debbono attribuirsi più a quello che vi hanno messo di studio e di pensiero gli illustri cultori della scienza che esso metodo hanno voluto vivificare che a sua intrinseca virtù.

Queste considerazioni volgevo in mente da molto tempo quando ho dovuto approfondire l'argomento per altro scopo. Dal mio studio ho potuto ricavare dei principi generali che mi paiono assai più adatti di quelli finora in uso per ottenere, o almeno per tentare, la soluzione dei problemi di equilibrio elastico per corpi isotropi. L'esposizione di questi principi e l'applicazione di essi a diversi problemi speciali costituirà appunto il soggetto di questa Memoria e di qualche altra che potrà farle seguito.

Io spero che, quando avrò dimostrato che si possono risolvere tutti i problemi di cui è nota la soluzione, con metodo uniforme, con semplicità e, forse anche, con eleganza; che un'altra non piccola categoria di problemi è suscettibile di soluzione, anch'essa, relativamente semplice, saranno giudicati con una certa indulgenza le mie opinioni ed il mio lavoro.

Per quanto mi sarà possibile, presenterò le soluzioni dei singoli problemi sotto forma di integrali definiti avendo queste soluzioni, su quelle presentate sotto forma di sviluppi in serie, il vantaggio di racchiudere in modo sintetico tutti gli elementi: dati e risultati, oltre ai mezzi di una verifica, spesso, pronta ed agevole. Ed anche perchè, volendo, dalle espressioni analitiche per integrali definiti si possono di frequente, con facilità, ottenere delle espressioni analitiche per serie, mentre il problema inverso non è altrettanto agevole.

In questa Memoria mi occuperò dei problemi in cui la superficie del corpo elastico è un piano, ovvero una sfera.

I. FORMOLE E PRINCIPII GENERALI.

1. Stabiliamo subito di chiamare x, y, z le coordinate di un punto qualunque dello spazio e, ogni volta che si tratterà di rappresentare una funzione con un integrale definito, di chiamare ξ, η, ζ le coordinate del punto variabile sulla superficie, o nella porzione di spazio, a cui la integrazione sarà estesa. Stabiliamo pure di indicare sempre con S la porzione di spazio finita, od infinita, e connessa occupata dal corpo elastico e con σ la sua superficie esterna la quale supporremo che, in ogni caso, soddisfi alle condizioni sotto le quali si può applicare il teorema di GREEN nello spazio S .

Per non introdurre inutili complicazioni, supporremo sempre che il corpo elastico non sia soggetto a forze esterne di massa. Allora le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico di un corpo omogeneo ed isotropo si potranno

porre sotto una qualunque delle due forme seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta^2 v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \Delta^2 w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} \right) &= 0, \quad \varpi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2\mu \left(\frac{\partial \varpi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z} \right) &= 0, \quad \varpi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2\mu \left(\frac{\partial \varpi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varpi_2}{\partial x} \right) &= 0, \quad \varpi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

in cui λ e μ sono le due note costanti di LAMÉ, le quali, come si sa, sono soggette alle condizioni :

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (3)$$

Le componenti X_n, Y_n, Z_n della tensione agente su di un elemento superficiale del corpo elastico, individuato in giacitura dalla normale n , sono date dalle formole :

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \lambda \theta \cos nx + 2\mu \left(\frac{du}{dn} + \varpi_3 \cos ny - \varpi_2 \cos nz \right), \\ Y_n &= \lambda \theta \cos ny + 2\mu \left(\frac{dv}{dn} + \varpi_1 \cos nz - \varpi_3 \cos nx \right), \\ Z_n &= \lambda \theta \cos nz + 2\mu \left(\frac{dw}{dn} + \varpi_2 \cos nx - \varpi_1 \cos ny \right), \\ \frac{d}{dn} &= \frac{\partial}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial}{\partial z} \cos nz. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Se indichiamo, per brevità di notazione, con L, M, N i valori che $-X_n, -Y_n, -Z_n$ assumono nei punti di σ quando la normale n a σ s'intenda diretta nell'interno di S , il problema più generale, di cui vogliamo occuparci, si può enunciare così: *Determinare un sistema di funzioni u, v, w regolari e soddisfacenti alle (1), ovvero alle (2), in S e tali che tre delle espressioni $u, v, w; L, M, N$, fra cui non ve ne siano due, come u ed L , corrispondenti allo stesso asse coordinato, acquistino nei punti di σ valori assegnati.*

2. Per risolvere questi problemi cominciamo a stabilire alcune formule fondamentali. Indichiamo perciò con G la solita funzione di GREEN relativa allo spazio S ed al punto (x, y, z) interno ad S , la quale, come si sa, considerata come funzione delle coordinate del punto variabile (ξ, η, ζ) , ovvero delle coordinate (x, y, z) del polo, è regolare ed armonica (*) in S , tranne per $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$, nel quale caso diventa infinita come

$$\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

e si annulla nei punti di σ . Indichiamo, analogamente, con G_1 l'altra funzione di GREEN la quale nell'interno di S soddisfa alle stesse condizioni di G , mentre su σ la derivata normale $\frac{dG_1}{dn}$ acquista un valore costante (**) che è nullo soltanto nel caso in cui S si estende all'infinito. In quest'ultimo caso G e G_1 si annullano all'infinito come funzioni potenziali. È noto che, sotto queste condizioni, le funzioni G e G_1 esistono e sono determinate univocamente in casi generalissimi.

Se osserviamo, allora, che, essendo θ una funzione armonica in S , la prima delle (1) si può scrivere

$$\Delta^2 \left[u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta \right] = 0,$$

applicando il teorema di GREEN alle funzioni G e $u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta$ in S , nell'ipotesi che u e θ sieno regolari in S , si trova

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \xi \theta \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (5)$$

(*) Per precisione di linguaggio diciamo qui che per funzione armonica intendiamo ogni funzione il cui parametro differenziale di second'ordine è, generalmente, nullo, e per funzione armonica e regolare ogni funzione che, oltre ad essere armonica, è uniforme, finita e continua insieme alle derivate di prim'ordine in quella porzione di spazio in cui la consideriamo.

(**) Volendo costruire effettivamente la funzione G_1 è, forse, più opportuno partire dalla definizione del KLEIN, per la quale G_1 ha in S due poli di prim'ordine nei punti (x, y, z) , (x_0, y_0, z_0) , invece di uno solo, coi residui $+1$ e -1 e tale che $\frac{dG_1}{dn}$ su σ si annulla.

la quale formula si può scrivere anche

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} (\xi - x) \theta \frac{dG}{dn} d\sigma. \quad (5')$$

Similmente, sotto le stesse condizioni per u e θ , applicando in S il teorema di GREEN alle funzioni G , e $u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta$ si ha

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{du}{dn} G_1 d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta - \frac{\lambda + \nu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{d\xi\theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{cost.}, \quad (6)$$

la quale formula si può pure scrivere

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{du}{dn} G_1 d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{d[(\xi - x)\theta]}{dn} G_1 d\sigma + \text{cost.} \quad (6')$$

Considerazioni analoghe valgono, naturalmente, anche per le altre due equazioni (1).

Qui vogliamo ancora osservare che, se S si estende all'infinito, le costanti che compaiono nei secondi membri (6) o (6') sono nulle; però, in questo caso, per l'applicabilità del teorema di GREEN, supporremo che la funzione $u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta$ e le analoghe si annullino all'infinito di ordine superiore ad $\frac{1}{r}$.

3. Se ora si tratta di risolvere il problema dell'equilibrio elastico quando sulla superficie σ sono dati i valori degli spostamenti u, v, w , cominceremo ad osservare che potremo scrivere, a causa della (5) e delle analoghe:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \xi \theta \frac{dG}{dn} d\sigma, \\ v &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \eta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma, \\ w &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} w \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} z \theta + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \zeta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (5'')$$

e che, in queste formole, i primi termini dei secondi membri sono noti. Il problema è allora ridotto a determinare la funzione θ , armonica e regolare in S , in modo che sia identicamente verificata l'equazione

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

ossia

$$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \theta = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} w \frac{dG}{dn} d\sigma \right] - \left. \begin{aligned} & - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial y} + z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \xi \theta \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \eta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \zeta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Si può osservare che, nella ipotesi fatta su θ , il primo ed il secondo membro della (7) sono due funzioni armoniche; ne viene che la (7) sarà verificata identicamente in S se essa è verificata identicamente in tutti i punti della superficie σ . Il problema propostoci può quindi ridursi a determinare i valori che deve assumere θ nei punti di σ , dalla equazione a cui si riduce la (7) nei punti di σ . Con questi valori si costruirà la funzione armonica θ .

Se invece si tratta di risolvere il problema dell'equilibrio elastico quando su σ sono dati i valori di L, M, N , cominceremo ad osservare che, per le (4), possiamo scrivere:

$$\frac{du}{dn} = -\frac{1}{2\mu} L - \frac{\lambda}{2} \theta \cos nx - \varpi_3 \cos ny + \varpi_2 \cos nz, \\ \dots \dots \dots$$

e che quindi, per la (6) ed analoghe:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_{\sigma} L G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{\lambda}{2\mu} \theta \cos n\xi + \varpi_3 \cos n\eta - \varpi_2 \cos n\zeta \right] G_1 d\sigma - \\ & \quad - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta - \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{d\xi \theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{cost.}, \\ v &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_{\sigma} M G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{\lambda}{2\mu} \theta \cos n\eta + \varpi_1 \cos n\zeta - \varpi_3 \cos n\xi \right] G_1 d\sigma - \\ & \quad - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta - \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{d\eta \theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{cost.}, \\ w &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_{\sigma} N G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{\lambda}{2\mu} \theta \cos n\zeta + \varpi_2 \cos n\xi - \varpi_1 \cos n\eta \right] G_1 d\sigma - \\ & \quad - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} z \theta - \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{d\zeta \theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{cost.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

nelle cui formole i primi termini dei secondi membri sono noti. In questo caso il problema è ridotto a determinare le quattro funzioni θ , ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 armoniche e regolari in S e che ivi verifichino identicamente le quattro equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; & 2\varpi_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\varpi_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}, & 2\varpi_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Non svilupperemo queste equazioni, ma non mancheremo di osservare che su di esse si possono fare delle considerazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto sulla (7).

Se, finalmente, poi si tratta di risolvere il problema dell'equilibrio elastico nel caso in cui siano date alcune delle u , v , w ed alcune delle L , M , N , con la restrizione indicata, ci si servirà opportunamente delle (5) e delle (8) ed il resto della soluzione si condurrà come nel caso precedente.

La determinazione della funzione armonica θ dalla (7), ovvero la determinazione delle funzioni θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 dalle (9) o da equazioni analoghe, costituisce la difficoltà peculiare del corrispondente problema di equilibrio elastico. Qui non ci occupiamo di dimostrare che la (7), o, per es., le (9), mantengono un significato sulla superficie σ e che sono adatte a determinarci i valori di θ , ovvero di θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 , come funzioni finite e continue dei punti di σ . Ciò avverrà certamente sotto condizioni molto generali, ma una risposta precisa a siffatte quistioni costituirebbe il teorema d'esistenza per i nostri problemi, e su ciò speriamo di poter tornare in seguito.

II. PROBLEMI IN CUI IL CORPO ELASTICO È LIMITATO DA UN PIANO INDEFINITO.

1. *Caso in cui sul piano limite sono dati: u , v , w .* Supponiamo che il corpo elastico sia limitato dal piano $z=0$ ed occupi quella porzione di spazio in cui $z>0$. In questo caso la funzione G di GREEN, relativa al punto (x, y, z) interno ad S , si riduce a

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}$$

chiamando r ed r_1 le distanze del punto (x, y, z) e del suo simmetrico, rispetto al piano $z = 0$, da uno stesso punto (ξ, η, ζ) di S . Quindi, osservando che per $\zeta = 0$

$$\frac{dG}{dn} = \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = 2 \left(\frac{z}{r^3} \right)_{\zeta=0} = -2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right)_{\zeta=0},$$

la (5') e le equazioni analoghe ci danno subito:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ w &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mentre θ sarà data dall'equazione

$$\theta = -\frac{\mu}{\pi(\lambda + 3\mu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma \right], \quad (11)$$

da cui

$$\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma \right]. \quad (12)$$

Inversamente, supposto che le funzioni u, v, w , date su σ , sieno funzioni finite e continue dei punti del piano σ , aventi le derivate parziali del primo ordine rispetto ad x e y pure finite, e che nei punti all'infinito dello stesso piano σ si annullino di ordine superiore a quello di $\frac{1}{r}$, gli integrali:

$$\int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma, \quad \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma, \quad \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma$$

sono funzioni finite e continue in tutto lo spazio; le loro derivate prime:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma; \dots$$

e le loro derivate seconde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma = \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma; \dots \end{aligned}$$

sono funzioni finite e continue in S , che tendono a limiti finiti quando ci avviciniamo ai punti di σ ; le funzioni u, v, w , date dalle (10), quando si suppone che l'integrale $\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma$ sia dato dalla (12), sono regolari e soddisfano identicamente alle equazioni (1) in S , qualunque sieno i valori delle costanti λ e μ , e, inoltre, quando ci avviciniamo ai punti di σ , tendono ai corrispondenti valori assegnati in questi punti; la funzione θ , infine, data dalla (11), è armonica e regolare in S e su σ tende a valori finiti.

2. *Caso in cui sul piano limite sono dati: L, M, N .* La funzione G , di GREEN relativa allo spazio S ed al punto (x, y, z) , si riduce a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$$

e, quindi, su σ acquista il valore $\frac{2}{r}$. Se si osserva che, per $\zeta = 0$:

$$\cos n\xi = 0, \quad \cos n\eta = 0, \quad \cos n\zeta = 1, \quad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

le (8) ci daranno subito:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} r d\sigma, \\ v &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} r d\sigma, \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} r d\sigma \end{aligned} \right\} (13)$$

e resterà, per completare la soluzione del nostro problema, da determinare le

funzioni armoniche θ , ϖ_1 e ϖ_2 dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\lambda + 3\mu}{2\mu} \theta &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{L}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{M}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{N}{r} d\sigma \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\varpi_2}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\varpi_1}{r} d\sigma \right], \\ \varpi_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{N}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{M}{r} d\sigma \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ \varpi_2 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int \frac{L}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{N}{r} d\sigma \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\theta}{r} d\sigma. \end{aligned} \right\} (14)$$

Per determinare θ , ϖ_1 , ϖ_2 da queste equazioni, osserviamo che, essendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\theta}{r} d\sigma = \int \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\theta}{r} d\sigma = \int \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{d\sigma}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\theta}{r} d\sigma = \int \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{d\sigma}{r}; \dots,$$

fra gli integrali:

$$\int \frac{\theta}{r} d\sigma; \quad \int \frac{\varpi_1}{r} d\sigma, \quad \int \frac{\varpi_2}{r} d\sigma, \quad \frac{\varpi_3}{r} d\sigma,$$

sussistono le stesse relazioni differenziali che sussistono fra le quantità θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 . Quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\varpi_2}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\varpi_1}{r} d\sigma = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\theta}{r} d\sigma = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \pi \theta$$

e la 1^a delle (14) ci da

$$\theta = \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{L}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{M}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{N}{r} d\sigma \right] \quad (15)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\theta}{r} d\sigma &= -\frac{1}{\lambda + \mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int L \log(z+r) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int M \log(z+r) d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int N \log(z+r) d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} (16)$$

Le altre due equazioni (14) ci danno allora, subito:

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} L \log(z+r) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} N \log(z+r) d\sigma \right], \\ \varpi_2 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} L \log(z+r) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} N \log(z+r) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (17)$$

e tutti gli elementi del problema sono determinati.

Inversamente, se supponiamo che L , M , N sieno funzioni finite e continue dei punti di σ che all'infinito si annullano di ordine superiore ad $\frac{1}{r^2}$, gli integrali:

$$\int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma, \dots \quad \int_{\sigma} L \log(z+r) d\sigma; \dots$$

saranno funzioni armoniche finite e continue in tutto S ; le derivate del primo ordine degli integrali del primo tipo e le derivate dei primi due ordini degli integrali del secondo tipo convergeranno a limiti finiti nei punti di σ ; per cui le funzioni θ , ϖ_1 , ϖ_2 , determinate dalle (15) e (17), saranno armoniche e regolari in S e convergeranno verso limiti finiti su σ . Se poi osserviamo che

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} r d\sigma = z \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma - \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma,$$

risulta che anche le u , v , w , determinate dalle (13), sono funzioni regolari in S e soddisfano identicamente alle (1), qualunque sieno λ e μ . Se, infine,

osserviamo che, per le (13):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma + \varpi_2 - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} z \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma - \varpi_1 - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} z \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{\lambda}{2\mu} \theta - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} z \frac{\partial \theta}{\partial z},\end{aligned}$$

nell'ipotesi che le derivate $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ abbiano limiti finiti su σ , il che si ottiene sicuramente se si suppone che L , M , N abbiano le derivate prime finite su σ , si trova:

$$\begin{aligned}\lim_{z=0} 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \varpi_2 \right) &= \lim_{z=0} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma = -L, \\ \lim_{z=0} 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \varpi_1 \right) &= -M, \quad \lim_{z=0} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta \right) = -N,\end{aligned}$$

e le condizioni al contorno sono anche verificate.

Ponendo:

$$\begin{aligned}\varrho &= \int_{\sigma} L \log(z+r) d\sigma, \quad \mathfrak{M} = \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma, \quad \mathfrak{N} = \int_{\sigma} N \log(z+r) d\sigma, \\ \bar{\varrho} &= \int_{\sigma} L (z \log(z+r) - r) d\sigma, \quad \bar{\mathfrak{M}} = \int_{\sigma} M (z \log(z+r) - r) d\sigma, \\ &\quad \bar{\mathfrak{N}} = \int_{\sigma} N (z \log(z+r) - r) d\sigma,\end{aligned}$$

$$\psi = \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}, \quad \chi = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{M}}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{N}}}{\partial z},$$

si trova facilmente:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma &= -\frac{\psi}{\lambda + \mu}, \quad \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma = -\frac{\chi}{\lambda + \mu}, \\ \int_{\sigma} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma &= -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d\sigma &= -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial x},\end{aligned}$$

e le espressioni (13) prendono la forma che è stata data loro dal professor CERRUTI:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{N}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \right), \\ v &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \overline{\mathfrak{N}}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{N}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \right), \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} + \frac{\psi}{4\pi(\lambda + \mu)} - \frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3. *Caso in cui sul piano limite sono dati: u, v, N .* Per risolvere il problema propostoci ora ci serviremo delle formole:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Il problema è risoluto appena si riesce a determinare θ e questa funzione è data immediatamente dalla equazione

$$\theta = -\frac{\mu}{\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma - \frac{1}{2\mu} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma \right]. \quad (19)$$

Sotto condizioni, agevoli a ricercarsi, per le funzioni u, v, N , sul piano σ , si mostra, inversamente, che tutte le condizioni del problema sono soddisfatte.

4. *Caso in cui sul piano limite sono dati: L, M, w .* Questo nuovo problema si risolve, anche facilmente, con le formole:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\mathfrak{M}_2}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} r d\sigma, \\ v &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\mathfrak{M}_1}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} r d\sigma, \\ w &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} r d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

e determinando θ , ϖ_1 , ϖ_2 dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \theta &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \frac{L}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^M \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\varpi_2} \frac{\varpi_2}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\varpi_1} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma \right], \\ \varpi_1 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \int_0^M \frac{M}{r} d\sigma \right], \\ \varpi_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \int_0^L \frac{L}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Queste formole risolvono senz'altro il problema, com'è facile verificare anche direttamente, quando si suppone che i dati soddisfino sul piano a condizioni analoghe a quelle che abbiamo fissato nei casi precedenti.

Possiamo anche aggiungere che dalle ultime due delle (21) si ha

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\varpi_2} \frac{\varpi_2}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\varpi_1} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma \right] &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \frac{L}{r} d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^M \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma \right] \end{aligned}$$

e che, quindi, θ è data, semplicemente, dalla formola

$$\theta = \frac{\mu}{\pi(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \frac{L}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^M \frac{M}{r} d\sigma - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma \right]. \quad (21')$$

5. *Casi in cui sul piano limite sono dati: u , M , w , ovvero L , v , w .* Questi due nuovi problemi sono identici giacchè l'uno si ottiene dall'altro con lo scambio degli assi x e y . Supporremo che sieno dati u , M , w e scriveremo le formole:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^u \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^M \frac{M}{r} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varpi_1} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma + \\ &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \left(z \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\theta \frac{\theta}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\theta \theta \log(z+r) d\sigma \right), \\ w &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^w \frac{w}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\theta \frac{\theta}{r} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

In queste formule compaiono le sole incognite θ e ϖ_1 , quindi, per la soluzione del problema, è sufficiente la determinazione di queste due quantità. La seconda di esse è data immediatamente dalla formola

$$\varpi_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma \right], \quad (23)$$

mentre θ dev'essere ricavata da un'equazione che, facendo uso della (23), si riduce a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} w \log(z+r) d\sigma \right] - \\ \left. - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma. \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

Ora siccome θ è armonica ed inoltre è eguale a

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma,$$

ponendo

$$\varphi = \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma,$$

si trova, facilmente, che all'equazione (24) si può dare la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} w \log(z+r) d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

Possiamo dimostrare agevolmente che non vi può essere che una sola funzione θ armonica e regolare in S , tale che la corrispondente funzione φ soddisfi la (24'). Se, infatti, se ne potessero determinare due θ e θ' , chiamando φ' la funzione analoga a φ e relativa a θ' , la differenza

$$\psi = \varphi - \varphi'$$

dovrebbe soddisfare l'equazione

$$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Ora, ponendo:

$$t_1 = x \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} + i y \sqrt{\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}}, \quad t_2 = x \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} - i y \sqrt{\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}},$$

l'integrale generale dell'ultima equazione è dato da

$$\psi = f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(z)$$

essendo f_1, f_2, f_3 funzioni arbitrarie. Ma poichè anche t_1, t_2 e z possono ritenersi come parametri arbitrari, affinchè ψ soddisfi all'equazione $\Delta^2 = 0$, dev'essere

$$f''_1 = \text{cost.}, \quad f''_2 = \text{cost.}, \quad f''_3 = \text{cost.}$$

Se poi si osserva che θ deve anche annullarsi all'infinito, risulta $f''_3 = 0$ e quindi, identicamente, $\theta - \theta' = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$.

D'altra parte, se chiamiamo ξ', η' le coordinate x e y che compaiono nel secondo membro della (24'), si trova facilmente che la funzione di x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} d\sigma' \left[-\frac{\partial}{\partial \xi'} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta'} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \int_{\sigma} w \log(z+r) d\sigma \right] \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi')^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

in cui $d\sigma' = d\xi' d\eta'$, soddisfa alla (24') ed è armonica. La prima proprietà è evidentemente soddisfatta, giacchè la funzione di x, y :

$$\log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi')^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2}$$

soddisfa alla (24') quando il secondo membro è nullo e diventa infinita per $x = \xi', y = \eta'$ come $\log r$. In quanto alla seconda si osserverà che, se χ è una funzione dei punti del piano σ che si annulla all'infinito, insieme alle deri-

vate prime :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \chi \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi)^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2} d\sigma' = \\ & = \int_{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi)^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2} d\sigma', \dots \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \Delta^2 \int_{\sigma} \chi \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi)^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (\eta-\eta')^2} d\sigma' = \\ & = \int_{\sigma} \Delta^2 \chi \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi)^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (\eta-\eta')^2} d\sigma', \end{aligned}$$

per cui, essendo il secondo membro della (24') una funzione armonica che si annulla all'infinito, anche la φ è una funzione armonica.

Dalla (25) risulta subito anche :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\sigma} d\sigma' \left[-\frac{\partial}{\partial \xi'} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \right. \\ &+ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta'} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \int_{\sigma} w \log(z+r) d\sigma \right] \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi')^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2}, \\ \theta &= -\frac{1}{2^2 \pi^2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \int_{\sigma} d\sigma' \left[-\frac{\partial}{\partial \xi'} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \right. \\ &+ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta'} \int_{\sigma} M \log(z+r) d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma + \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \int_{\sigma} w \log(z+r) d\sigma \right] \log \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu} (x-\xi')^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} (y-\eta')^2}. \end{aligned} \right\} (26)$$

Viceversa, se u , M , w , su σ , sono dati come funzioni finite e continue, aventi le derivate parziali del prim'ordine finite ed inoltre u , w si annullano nei punti all'infinito di σ di ordine superiore ad $\frac{1}{r}$, mentre M si annulla di

ordine superiore a $\frac{1}{r^2}$, il secondo membro della (24') sarà una funzione armonica, regolare in S , che si annulla all'infinito e tende su σ a valori finiti. Con queste condizioni anche le funzioni φ , $\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma$ e θ , date dalle (25) e (26), sono armoniche e regolari in S e tendono a valori finiti quando ci avviciniamo ai punti di σ . Le u , v , w date dalle (22) sono regolari in S , soddisfano identicamente le (1) in questo stesso spazio e verificano le condizioni al contorno come si mostra facilmente.

6. *Casi in cui sul piano limite sono dati: u , M , N , ovvero L , v , N .* Anche questi due problemi non differiscono che per lo scambio degli assi x ed y e si risolvono come i precedenti. Fermandoci al caso in cui sono dati u , M , N , cominceremo a scrivere le formole:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \left(z \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma \right), \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \end{aligned} \right\} (27)$$

e basterà determinare le funzioni θ e ϖ_1 dalle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \theta &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\varpi_1}{r} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\sigma} \theta \log(z+r) d\sigma, \\ \varpi_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma. \end{aligned} \right\} (28)$$

Ora dalla seconda di queste equazioni si ricava:

$$\int_{\sigma} \frac{\sigma_1}{r} d\sigma = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y_{\sigma}} \int N \log(z+r) d\sigma - \int \frac{M}{r} d\sigma \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma}} \int \theta \log(z+r) d\sigma,$$

quindi, sostituendo nella prima e introducendo la funzione φ del caso precedente, si trova che φ deve soddisfare alla equazione

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int \frac{u}{r} d\sigma + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{M}{r} d\sigma + \\ + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{N}{r} d\sigma - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int N \log(z+r) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Questa equazione è dello stesso tipo della (24') e la funzione φ , anche in questo caso, si determina come nel caso precedente.

III. PROBLEMI IN CUI IL CORPO ELASTICO È LIMITATO DA UNA SFERA.

1. Caso in cui sulla sfera limite sono dati: u, v, w . Spazio interno.

Chiamiamo R il raggio della sfera il cui spazio interno S è occupato dal corpo elastico e, insieme al punto (x, y, z) interno ad S , consideriamo il punto (x_1, y_1, z_1) reciproco del punto (x, y, z) rispetto alla sfera di raggio R e le distanze r, r_1 di questi due punti da un punto qualunque (ξ, η, ζ) di S . Poniamo, inoltre:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \\ x\xi + y\eta + z\zeta = l\rho \cos \omega.$$

Com'è notissimo, la funzione G di GREEN relativa al punto (x, y, z) ed alla sfera di raggio R , è data da

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_1},$$

mentre sulla superficie σ della sfera di raggio R

$$\frac{dG}{dn} = - \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right)_{r=R} = \left(\frac{R^2 - l^2}{R r^3} \right)_{r=R}.$$

Per conseguenza la (5') e le analoghe ci daranno subito:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ w &= \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

e, per risolvere completamente il problema propostoci, resta solo da determinare θ dall'equazione

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right) - \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} l \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

dove

$$l \frac{\partial}{\partial l} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Perciò ricordiamo che

$$4 \pi R \theta = (R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{\theta}{r^3} d\sigma = 2 l \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma. \quad (32)$$

Ne viene che θ resta determinata dalla (32) quando avremo determinato la funzione armonica

$$\varphi = \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma$$

dall'equazione

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda + 3 \mu}{\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31')$$

L'integrale generale di questa equazione è dato da

$$\varphi = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} l^{-\frac{\mu}{\lambda+3\mu}} \int_0^l l^{-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right] \right\} dl + l^{-\frac{\mu}{\lambda+3\mu}} \chi \quad (33)$$

dove χ è una funzione arbitraria di due parametri qualunque che, insieme ad l , individuano ciascun punto dello spazio. Notando ora che φ dev'essere finita in S e che tale è la prima parte del secondo membro della (33), anche per $l=0$, ne viene che, se $\frac{\mu}{\lambda + 3\mu} > 0$, com'è appunto il caso della elasticità, dev'essere $\chi = 0$. La espressione di φ così determinata è finita in tutta la sfera S , la superficie compresa, ed è in S una funzione armonica. Questa seconda asserzione si prova notando che, se

$$\varphi = l^{-c} \int_0^l l^{c-1} \psi dl,$$

dove c è una costante positiva qualunque, si ha pure:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = l^{-c-1} \int_0^l l^c \frac{\partial \psi}{\partial x} dl (*), \dots \quad \Delta^2 \varphi = l^{-c-2} \int_0^l l^{c+1} \Delta^2 \psi dl$$

e quindi, se ψ è armonica, lo è anche φ .

(*) Se chiamiamo infatti l, α, β le coordinate polari di un punto, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x} = \text{sen } \alpha \cos \beta \frac{\partial}{\partial l} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\text{sen } \beta}{l \text{sen } \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(l^{-c} \int_0^l l^{c-1} \psi dl \right) = -c l^{-c-1} \text{sen } \alpha \cos \beta \int_0^l l^{c-1} \psi dl + \frac{\text{sen } \alpha \cos \beta}{l} \psi + \\ + l^{-c-1} \cos \alpha \cos \beta \int_0^l l^{c-1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} dl - l^{-c-1} \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} \int_0^l l^{c-1} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} dl = \\ = l^{-c-1} \int_0^l l^c \left(\text{sen } \alpha \cos \beta \frac{\partial \psi}{\partial l} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\text{sen } \beta}{l \text{sen } \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) dl = l^{-c} \int_0^l l^c \frac{\partial \psi}{\partial x} dl.$$

Risulta anche, facilmente, dall'essere

$$(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u d\sigma}{r^3} = 2l \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{u d\sigma}{r} + \int_{\sigma} \frac{u d\sigma}{r}, \dots$$

e da note proprietà della funzione potenziale che, se u, v, w sono funzioni finite e continue di due parametri che individuano i punti di σ , insieme alle derivate prime, ed hanno le derivate seconde rispetto a questi parametri finite, le derivate prime di φ e θ tendono a valori finiti su σ e sono soddisfatte identicamente le (1) e le condizioni al contorno.

1.^{bis} *Spazio esterno.* Risolviamo ora lo stesso problema nel caso in cui il corpo elastico, invece di occupare lo spazio interno alla sfera di raggio R , occupi tutto lo spazio indefinito esterno ad essa. La funzione G di GREEN, anche in questo caso, è

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_1}.$$

Solo è da notare che adesso il punto (x, y, z) è esterno alla sfera σ , mentre (x_1, y_1, z_1) è interno. Pel valore della derivata normale, su σ , si ha invece

$$\frac{dG}{dn} = \left(\frac{\partial G}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = \left(\frac{l^2 - R^2}{R r^3} \right)_{\rho=R},$$

quindi le formole (10) vanno modificate così:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ v &= \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ w &= \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

L'equazione che determina φ , essendo nel caso presente

$$-4\pi R \theta = 2l \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \int_{\sigma} \frac{\theta d\sigma}{r},$$

è però ancora la (31') e quindi φ sarà sempre data dalla (33) in cui per limiti d'integrazione prenderemo ∞ ed l . L'espressione di φ dev'essere determinata in modo che il limite del prodotto $l\varphi$ per $l = \infty$ non diventi infi-

nito, perciò, anche in questo caso, bisognerà porre $\chi = 0$ e potremo quindi scrivere

$$\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} l^{-\frac{\mu}{\lambda+3\mu}} \int_{\infty}^l l^{-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^2} d\sigma \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right] \right\} dl. \quad (35)$$

Le ulteriori considerazioni non differiscono da quelle fatte nel caso precedente.

2. *Caso in cui sulla sfera limite sono dati: L, M, N. Spazio interno.* Per ottenere la soluzione di questo problema conviene tener presente che le quantità *L, M, N* devono essere supposte assoggettate alle condizioni:

$$\int_{\sigma} L d\sigma = \int_{\sigma} M d\sigma = \int_{\sigma} N d\sigma = \int_{\sigma} (\eta N - \zeta M) d\sigma = \\ = \int_{\sigma} (\zeta L - \xi N) d\sigma = \int_{\sigma} (\zeta M - \eta L) d\sigma = 0, \quad (36)$$

che sono necessarie perchè il corpo elastico sia in equilibrio.

La maniera più semplice per risolvere il problema propostoci mi sembra la seguente.

Osserviamo dapprima che le equazioni (1) danno luogo alle altre:

$$\Delta^2 \left(l \frac{\partial u}{\partial l} \right) + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta \right) = 0, \\ \Delta^2 \left(l \frac{\partial v}{\partial l} \right) + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta \right) = 0, \\ \Delta^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial l} \right) + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta \right) = 0, \\ l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial u}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial v}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial w}{\partial l} \right), \quad (37)$$

il che vuol dire che le equazioni (1) si trasformano in loro stesse quando alle funzioni incognite si applica l'operazione $l \frac{\partial}{\partial l}$; e notiamo anche le formole seguenti:

$$l \frac{\partial \varpi_1}{\partial l} + \varpi_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial w}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial v}{\partial l} \right) \right], \dots \quad (37')$$

Per i risultati del numero precedente possiamo scrivere:

$$\left. \begin{aligned}
 l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{R^2 - l^2}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r} + \\
 + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (38)$$

e queste formole, per essere, a causa del teorema di GREEN:

$$\left. \int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \sigma}{r} = \int_{\sigma} \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} d\sigma + 4\pi\sigma = -\frac{1}{2R} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + 2\pi\theta, \right\} (39)$$

si riducono subito alle altre:

$$\left. \begin{aligned}
 l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{R^2 - l^2}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{\lambda + \mu}{4\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\
 + \frac{\lambda + \mu}{16\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (38')$$

Le condizioni in superficie, avendosi su σ :

$$\cos nx = -\frac{x}{R}, \quad \cos ny = -\frac{y}{R}, \quad \cos nz = -\frac{z}{R}; \quad \frac{d}{dn} = -\frac{\partial}{\partial l},$$

diventano, nel caso presente:

$$L = \lambda \theta \frac{x}{R} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial l} + \frac{y}{R} \varpi_3 - \frac{z}{R} \varpi_2 \right), \dots$$

donde:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{L}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{x}{R} \theta - \frac{y}{R} \varpi_3 + \frac{z}{R} \varpi_2, \dots$$

per cui, eliminando $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho}$, $\frac{\partial w}{\partial \rho}$, per mezzo di queste relazioni, dai primi termini dei secondi membri delle (38'), avremo:

$$\left. \begin{aligned}
 l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L d\sigma}{r^3} - \frac{R^2 - l^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2\mu} \xi \theta + \eta \varpi_3 - \zeta \varpi_2 \right) \frac{d\sigma}{r^3} + \\
 + \frac{\lambda + \mu}{4\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{16\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (38'')$$

Conviene trasformare ancora queste formole, osservando primamente che

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{\xi \theta d \sigma}{r^3} &= x \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{\theta d \sigma}{r^3} + \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \theta \frac{\xi - x}{r^3} d \sigma = \\ &= x \theta + \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \end{aligned}$$

.

onde

$$\left. \begin{aligned} \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2 \mu} \xi \theta + \eta \varpi_3 - \zeta \varpi_2 \right) \frac{d \sigma}{r^3} &= \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta + y \varpi_3 - z \varpi_2 + \\ + \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \left[\frac{\lambda}{2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\varpi_3}{r} d \sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d \sigma \right], \end{aligned} \right\} (40)$$

secondariamente che fra le quantità:

$$\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma; \quad \int_{\sigma} \frac{\varpi_1}{r} d \sigma, \quad \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d \sigma, \quad \int_{\sigma} \frac{\varpi_3}{r} d \sigma$$

sussistono le stesse relazioni differenziali che sussistono fra le quantità $\theta; \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$. Infatti, l'espressione

$$(R^2 - l^2) \left[(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma + 2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d \sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\varpi_3}{r} d \sigma \right) \right],$$

p. es., si annulla su σ ed il suo Δ^2 è

$$- 2 \left[(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 \mu \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} \right) \right] = 0;$$

essendo, quindi, anche armonica, è nulla identicamente in tutta la sfera S , e sarà

$$(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma + 2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\varpi_2}{r} d \sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\varpi_3}{r} d \sigma \right) = 0.$$

Infine che, per mezzo di questa relazione, la (40) si riduce all'altra

$$\left. \begin{aligned} \frac{R^2 - l^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2 \mu} \xi \theta + \eta \varpi_3 - \zeta \varpi_2 \right) \frac{d \sigma}{r^3} &= \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta + y \varpi_3 - z \varpi_2 + \\ + \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma. \end{aligned} \right\} (40')$$

Quindi le (38''), a causa della (40') e delle formole analoghe, diventano:

$$\begin{aligned}
 l \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{L d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta - y \varpi_3 + z \varpi_2 + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \\
 l \frac{\partial v}{\partial l} &= \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} y \theta - z \varpi_1 + x \varpi_3 + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \\
 l \frac{\partial w}{\partial l} &= \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} z \theta - x \varpi_2 + y \varpi_1 + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma.
 \end{aligned} \tag{38''}$$

La risoluzione del nostro problema è ridotta alla determinazione delle quattro funzioni incognite θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 dalle quattro equazioni seguenti, di cui scriviamo, per brevità, soltanto le prime due, potendosi ricavare subito le altre due, dalla seconda, con permutazioni circolari:

$$\begin{aligned}
 l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{L d \sigma}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} \right) - \frac{3 \lambda}{2 \mu} \theta + \frac{\mu - \lambda}{2 \mu} l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \\
 &\quad + \frac{3}{2} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} l \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \\
 l \frac{\partial \varpi_1}{\partial l} + \varpi_1 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{16 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{16 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(z \frac{\partial \theta}{\partial y} - y \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{l}{2} \frac{\partial \varpi_1}{\partial l} + \varpi_1 - \\
 &\quad - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} \left(z \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma - y \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma \right).
 \end{aligned} \tag{41}$$

Per determinare θ , riprendiamo la notazione del numero precedente:

$$\varphi = \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \quad 4\pi R\theta = 2l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi. \quad (42)$$

Indicando, allora, con Φ l'espressione data dalla

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(\lambda + \mu)}{R} \Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{L d\sigma}{r^3} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{M d\sigma}{r^3} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{N d\sigma}{r^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

la prima delle (41) si riduce a

$$l^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \varphi = \Phi, \quad (44)$$

ovvero a

$$l \frac{\partial}{\partial l} \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + a \varphi \right) + b \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + a \varphi \right) = \Phi, \quad (44')$$

essendo a e b le radici dell'equazione

$$t^2 - \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu} t + \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} = 0.$$

I valori di queste due radici sono dati da:

$$a = \frac{2\lambda + \mu + \sqrt{(2\lambda + \mu)^2 - 2(3\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)}}{2(\lambda + \mu)},$$

$$b = \frac{2\lambda + \mu - \sqrt{(2\lambda + \mu)^2 - 2(3\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)}}{2(\lambda + \mu)}$$

e quindi, per essere $\lambda + \mu > 0$, $\mu > 0$, sono sempre immaginari coniugati. L'integrale generale dell'equazione (44'), ovvero (44''), è dato da

$$\varphi = \frac{1}{l^a} \int_0^l l^{a-b-1} dl \int_0^l l^{b-1} \Phi dl + \frac{\chi_1}{l^a} + \frac{\chi_2}{l^b}, \quad (45)$$

essendo χ_1 e χ_2 due funzioni arbitrarie di due parametri qualunque che, insieme ad l , individuano ciascun punto dello spazio. Ora la prima parte del secondo membro della (45) è una funzione armonica, regolare in S e reale perchè non muta di valore scambiando a con b . Affinchè la seconda parte sia reale è necessario che χ_1 e χ_2 sieno immaginarie coniugate; ma poichè

si può scrivere

$$\frac{\chi_1}{l^a} + \frac{\chi_2}{l^b} = \frac{1}{l^{\frac{a+b}{2}}} \left[(\chi_1 + \chi_2) \cos \left(\frac{a-b}{2i} \log l \right) + \frac{\chi_1 - \chi_2}{i} \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2i} \log l \right) \right]$$

e, sotto questa forma, si verifica facilmente che essa non è armonica, così bisogna porre

$$\chi_1 = \chi_2 = 0.$$

Resta dunque per φ ,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{l^a} \int_0^l l^{a-b-1} dl \int_0^l l^{b-1} \Phi dl = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{l^b} \int_0^l l^{b-1} \Phi dl - \frac{1}{l^a} \int_0^l l^{a-1} \Phi dl \right) = \\ &= \frac{-2(\lambda + \mu)}{\sqrt{3(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2}} l^{-\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}} \int_0^l \tau^{-\frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2}}{2(\lambda + \mu)} \log \frac{\tau}{l} \right) \Phi d\tau. \end{aligned} \quad (45')$$

Determinato φ , e quindi θ per mezzo delle (42), le rotazioni ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 si calcolano con una semplice quadratura. La seconda delle (41), infatti, si può scrivere

$$\begin{aligned} l \frac{\partial \varpi_1}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_0^\sigma \frac{N d\sigma}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_0^\sigma \frac{M d\sigma}{r^3} \right) + \\ &+ \frac{l}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial l} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{3\lambda + 2\mu}{8\pi R\mu} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Dividendo questa equazione per l , integrando fra 0 ed l ed osservando che la quantità arbitraria introdotta dall'integrazione, dovendo essere una funzione armonica, regolare in S ed indipendente da l , non può ridursi ad altro che ad una costante h_1 , si trova

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_1 &= \int_0^l \frac{dl}{l} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_0^\sigma \frac{N d\sigma}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_0^\sigma \frac{M d\sigma}{r^3} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{3\lambda + 2\mu}{8\pi R\mu} \int_0^l \left(\frac{z}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dl + h_1. \end{aligned} \quad (47)$$

Se si osserva che, a causa della relazione

$$\int_0^\sigma (N \eta - M \zeta) d\sigma = 0,$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} \right) = \\ & = - \frac{y}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} N \left(\frac{2}{r^3} + 3 \frac{R^2 - l^2}{r^5} \right) d \sigma + \frac{z}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} M \left(\frac{2}{r^3} + 3 \frac{R^2 - l^2}{r^5} \right) d \sigma + \\ & + 3 \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} (N \eta - M \zeta) \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{R^5} \right) d \sigma \end{aligned}$$

risulta subito che il primo termine del secondo membro della (47) è finito anche per $l = 0$.

In modo analogo si calcolano $\bar{\omega}_2$ e $\bar{\omega}_3$, e le espressioni relative si ottengono dalla (47) scambiando circolarmente gli indici 1, 2, 3 e le lettere x, y, z ; L, M, N .

Gli spostamenti u, v, w che ancora ci restano da determinare, si ottengono dalle (38''') con una quadratura. Se dividiamo ciascuna delle (38''') per l , integriamo fra 0 ed l ed osserviamo che le quantità arbitrarie introdotte dalla integrazione, dovendo essere, come le altre parti costituenti u, v, w , funzioni regolari in S , dovendo soddisfare all'equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$, e, dippiù, essere indipendenti da l , non possono ridursi che a delle costanti k_1, k_2, k_3 , troviamo subito:

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^l \frac{dl}{l} \left\{ \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{L d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta - y \bar{\omega}_3 + z \bar{\omega}_2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + k_1 - h_3 y + h_2 z, \\ v &= \int_0^l \frac{dl}{l} \left\{ \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} y \theta - z \bar{\omega}_1 + x \bar{\omega}_3 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} + k_2 - h_1 z + h_3 x, \\ w &= \int_0^l \frac{dl}{l} \left\{ \frac{R^2 - l^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} z \theta - x \bar{\omega}_2 + y \bar{\omega}_1 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} + k_3 - h_2 x + h_1 y. \end{aligned} \right\} (48)$$

Anche qui, se osserviamo che a causa delle relazioni:

$$\int_0^l L d\sigma = 0, \dots$$

si può scrivere:

$$\int_0^l \frac{dl}{l} \frac{R^2 - l^2}{8\pi\mu} \int_0^l \frac{L d\sigma}{r^3} = \int_0^l \frac{dl}{l} \frac{R^2 - l^2}{4\pi\mu} \int_0^l L \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\sigma, \dots$$

e che:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{3}{4\pi R} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{l}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots$$

risulta che le espressioni (48) di u , v , w sono finite anche per $l=0$.

Inversamente, se L , M , N sono funzioni finite e continue delle coordinate dei punti della sfera σ , insieme alle derivate prime, ed aventi derivate seconde finite, la Φ determinata dalla (43), la φ determinata dalla (45') e la θ data, per mezzo di φ , dalla seconda delle (42'), sono funzioni armoniche, regolari in S e nei punti di σ tendono, insieme alle derivate prime a valori finiti. Ciò risulta facilmente osservando che, p. es.,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_0^l \frac{L d\sigma}{r^3} \right] = 2l \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^l \frac{L d\sigma}{r} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^l \frac{L d\sigma}{r}$$

e tenendo presenti ben note proprietà della funzione potenziale. Similmente ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 dati dalla (47) e dalle analoghe, sono funzioni armoniche e regolari in S che tendono a valori finiti nei punti di σ . Poichè ora, evidentemente, sono soddisfatte le equazioni:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varpi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots$$

se fra le θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 sono verificate le (2), saranno verificate anche le (1). Per mostrare che i valori di u , v , w da noi trovati soddisfano alle (1) basta quindi, dimostrare che i corrispondenti valori di θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 soddisfano le (2). Si ricava intanto facilmente dalle analoghe alla (46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial \varpi_2}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \varpi_3}{\partial l} \right) &= - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial x} \left[l^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \frac{2\mu - 3\lambda}{2\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi \right]. \end{aligned}$$

Ma, d'altra parte, per la (42),

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} \right) = \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \frac{3}{2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right],$$

quindi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial \varpi_2}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \varpi_3}{\partial l} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} \right) = \\ & = \frac{\lambda + \mu}{4\pi R \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\Phi + l^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \varphi \right] = 0, \end{aligned}$$

a causa della (44). Integrando ora l'equazione

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial \varpi_2}{\partial l} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \varpi_3}{\partial l} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial l} \left\{ l \left[\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

rispetto ad l , con la condizione che $\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ sia regolare in S , si trova

$$\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

ossia le equazioni (2) sono verificate. Infine, poichè dalle (38'') risulta

$$\begin{aligned} \lambda \theta \frac{x}{l} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial l} + \varpi_3 \frac{y}{l} - \varpi_2 \frac{z}{l} \right) &= \frac{R^2 - l^2}{4\pi l} \int_{\sigma} \frac{L d\sigma}{r^3} + \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{4\pi R} (R^3 - l^3) \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

e, per $l=R$, $\frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots$ tendono a valori finiti, sono soddisfatte anche le condizioni in superficie.

Il metodo indicato per risolvere il problema precedente vale qualunque sieno λ e μ ; ma, se $\lambda + \mu > 0, \mu > 0$, possiamo anche asserire che il problema ha una sola soluzione determinata a meno di uno spostamento rigido arbitrario del corpo elastico.

2.° Spazio esterno. Il problema dell'equilibrio elastico per lo spazio esterno alla superficie sferica di raggio R , quando in superficie son date L, M, N , si può risolvere con metodo perfettamente analogo al precedente. Partendo dalle (37), dopo aver applicate ad esse le formole (34) e quindi

la formola di trasformazione

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r} = \int_{\sigma} \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} d\sigma - 4\pi\theta = -2\pi\theta - \frac{1}{2R} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma,$$

si trova:

$$l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{l^2 - R^2}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r^3} - \frac{\lambda + \mu}{4\mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{16\pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma,$$

.....

Siccome ora su σ :

$$\cos nx = \frac{x}{R}, \quad \cos ny = \frac{y}{R}, \quad \cos nz = \frac{z}{R}; \quad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial l},$$

le condizioni al contorno ci danno:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{L}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{x}{R} \varrho - \frac{y}{R} \varpi_3 + \frac{z}{R} \varpi_2, \dots$$

e quindi possiamo scrivere:

$$l \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{l^2 - R^2}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{L d\sigma}{r^3} - \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2\mu} \xi \theta + \eta \varpi_3 - \zeta \varpi_2 \right) \frac{d\sigma}{r^3} -$$

$$- \frac{\lambda + \mu}{4\mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{16\pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma,$$

.....

Osservando poi che:

$$\frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\xi \theta}{r^3} d\sigma = x\theta + \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \dots$$

si trova :

$$\begin{aligned} \frac{l^2 - R^2}{4 \pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2 \mu} \xi \theta + \eta \tilde{\omega}_3 - \zeta \tilde{\omega}_2 \right) \frac{d \sigma}{r^3} &= \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta + y \tilde{\omega}_3 - z \tilde{\omega}_2 + \\ &+ \frac{l^2 - R^2}{4 \pi R} \left(\frac{\lambda}{2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\tilde{\omega}_3}{r} d \sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\tilde{\omega}_2}{r} d \sigma \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta + y \tilde{\omega}_3 - z \tilde{\omega}_2 + \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

e quindi, al posto delle (38'''), avremo le formole :

$$\begin{aligned} l \frac{\partial u}{\partial l} &= - \frac{l^2 - R^2}{8 \pi \mu} \int_{\sigma} \frac{L d \sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta - y \tilde{\omega}_3 + z \tilde{\omega}_2 - \\ &- \frac{\lambda + \mu}{4 \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Esse sono identiche alle (38'''), tranne nel segno dell'ultimo termine. Similmente, le equazioni a cui devono soddisfare θ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ saranno identiche alle (41), tranne nel segno dell'ultimo termine. Se ora, ponendo sempre

$$\varphi = \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d \sigma,$$

osserviamo che

$$- 4 \pi R \theta = 2 l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi, \tag{50}$$

troviamo subito che φ soddisfa alla stessa equazione differenziale (44, quando si supponga Φ determinata dalla relazione

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(\lambda + \mu)}{R} \Phi &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(l^2 - R^2) \int_{\sigma} \frac{L d \sigma}{r^3} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(l^2 - R^2) \int_{\sigma} \frac{M d \sigma}{r^3} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[(l^2 - R^2) \int_{\sigma} \frac{N d \sigma}{r^3} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

Potremo perciò porre ancora

$$\varphi = \frac{- 2(\lambda + \mu)}{\sqrt{3(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2}} l^{-\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}} \int_{\infty}^l \tau^{-\frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}} \text{sen} \left(\frac{\sqrt{3(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2}}{2(\lambda + \mu)} \log \frac{\tau}{l} \right) \Phi d \tau. \tag{52}$$

La soluzione del problema è completata dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_1 = - \int_{\infty}^l \frac{dl}{l} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{l^2 - R^2}{8 \pi \mu} \int_0^l \frac{N d\sigma}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{l^2 - R^2}{8 \pi \mu} \int_0^l \frac{M d\sigma}{r^3} \right) \right] - \\ - \frac{1}{4 \pi R} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{3 \lambda + 2 \nu}{8 \pi R \mu} \int_{\infty}^l \left(z \frac{\partial \varphi}{l \partial y} - y \frac{\partial \varphi}{l \partial z} \right) dl, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} u = \int_{\infty}^l \frac{dl}{l} \left[- \frac{l^2 - R^2}{8 \pi \mu} \int \frac{L d\sigma}{r^3} - \frac{\lambda}{2 \mu} x \theta - y \tilde{\omega}_3 + z \tilde{\omega}_2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda + \nu}{4 \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{\lambda + \mu}{4 \pi R \mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Le funzioni Φ , φ e θ date dalle: (51), (52 e (50) si annullano all'infinito, e le altre funzioni $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$; u , v , w sono state determinate con questa condizione. La verifica a posteriori si fa con considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso precedente.

3. *Caso in cui sulla sfera limite sono dati: L, v, w.* A causa della simmetria della superficie sferica rispetto agli assi coordinati, i problemi in cui sulla sfera son dati: u , M , w , ovvero u , v , N , non differiscono che per il diverso nome degli assi coordinati dal problema che ci proponiamo di risolvere. In questi nuovi problemi, per non dilungarci troppo, lasceremo da parte il caso dello spazio esterno sia perchè l'estensione è agevole, sia perchè essi non hanno nella teoria della elasticità l'importanza di quelli già risolti.

Cominceremo, prima di tutto, a stabilire alcune notazioni ed alcune formole di cui ci serviremo costantemente. Poniamo cioè:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, & \varphi' &= \frac{1}{l} \int_0^l dl \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \\ \psi_i &= \int_{\sigma} \frac{\tilde{\omega}_i}{r} d\sigma, & \psi'_i &= \frac{1}{l} \int_0^l dl \int_{\sigma} \frac{\tilde{\omega}_i}{r} d\sigma, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

φ , φ' ; ψ_i , ψ'_i sono funzioni armoniche, regolari in S e fra di loro sussistono

le relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial}{\partial l}(l\varphi') = \varphi' + l \frac{\partial \varphi'}{\partial l}, & \varphi' &= \frac{1}{l} \int_0^l \varphi dl; \\ \psi_i &= \frac{\partial}{\partial l}(l\psi'_i) = \psi'_i + l \frac{\partial \psi'_i}{\partial l}, & \psi'_i &= \frac{1}{l} \int_0^l \psi_i dl \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

il qual sistema di formole è completato dalle formole che uniscono φ e ψ_i a θ e $\tilde{\omega}_i$ cioè:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi R\theta &= 2l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi, & \varphi &= 2\pi R l^{-\frac{1}{2}} \int_0^l l^{-\frac{1}{2}} \theta dl; \\ 4\pi R\tilde{\omega}_i &= 2l \frac{\partial \psi_i}{\partial l} + \psi_i, & \psi_i &= 2\pi R l^{-\frac{1}{2}} \int_0^l l^{-\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_i dl. \end{aligned} \right\} \quad (56')$$

Si vede facilmente che φ' ; ψ'_1 , ψ'_2 , ψ'_3 soddisfano alle stesse relazioni differenziali a cui soddisfano φ ; ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 e quindi θ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$. Per es., si ha

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \psi'_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi'_3}{\partial y} \right) &= \\ &= \frac{1}{l^2} \int_0^l l \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) \right] dl = 0 (*). \end{aligned}$$

(*) Più in generale, le espressioni:

$$\frac{1}{l^c} \int_0^l l^{c-1} \theta dl; \quad \frac{1}{l^c} \int_0^l l^{c-1} \tilde{\omega}_1 dl; \quad \frac{1}{l^c} \int_0^l l^{c-1} \tilde{\omega}_2 dl; \quad \frac{1}{l^c} \int_0^l l^{c-1} \tilde{\omega}_3 dl$$

dove c è una costante positiva qualunque, sono armoniche, regolari in S e sono legate dalle stesse relazioni differenziali da cui sono legate θ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$. Lo stesso può dirsi

delle espressioni che si ottengono eseguendo l'operazione $\frac{1}{l^c} \int_0^l l^{c-1} \dots dl$ su θ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$

un numero qualunque di volte, potendo variare anche il valore della costante c ogni nuova volta che si applica l'operazione indicata.

Poniamo anche, per brevità:

$$\left. \begin{aligned}
 U &= (R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u d\sigma}{r^3}, \quad V = (R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{v d\sigma}{r^3}, \quad W = (R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{w d\sigma}{r^3}; \\
 \mathfrak{L} &= \int_{\sigma} L \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \log \frac{R - l \cos \omega + r}{2R} \right) d\sigma, \\
 \mathfrak{M} &= \int_{\sigma} M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \log \frac{R - l \cos \omega + r}{2R} \right) d\sigma, \\
 \mathfrak{N} &= \int_{\sigma} N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \log \frac{R - l \cos \omega + r}{2R} \right) d\sigma,
 \end{aligned} \right\} (57)$$

e notiamo che:

$$\begin{aligned}
 l \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial l} &= \frac{R^2 - l^2}{2} \int_{\sigma} \frac{L}{r^3} d\sigma - \frac{1}{2R} \int_{\sigma} L d\sigma = \frac{R^2 - l^2}{2} \int_{\sigma} \frac{L}{r^3} d\sigma, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

se sono soddisfatte, come supponiamo, le condizioni: $\int_{\sigma} L d\sigma = 0, \dots$

Dopo ciò, per risolvere il problema propostoci, ci serviremo della prima delle formole (38''), divisa per l ed integrata fra 0 ed l , e delle ultime due formole (30):

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu} - \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} x\varphi + y\psi_3 - z\psi_2 \right) + \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} x\varphi' + y\psi_3' - z\psi_2' \right) + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \text{cost. } (*), \\
 v &= \frac{V}{4\pi R} + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\
 w &= \frac{W}{4\pi R} + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z},
 \end{aligned} \right\} (58)$$

(*) Formole di questa specie si sarebbero potuto ottenere partendo dalle (8) e sostituendo in esse, per G_1 , l'espressione

$$G_1 = \frac{1}{r} + \frac{R}{l} \frac{1}{r_1} - \int_{\rho}^{\rho} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_1} \right) d\rho.$$

Con le formole a cui accenniamo si sarebbe potuto risolvere anche il problema del n.º 2; però esse si mostrano meno suscettibili a facili trasformazioni di quelle da noi preferite.

ed il problema è ridotto a determinare le funzioni incognite θ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} \left(\varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + y \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right] + \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} \left(\varphi' + x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) + y \frac{\partial \psi'_3}{\partial x} - z \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} \right], \\
 2\tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\
 2\tilde{\omega}_2 &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial z} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} z \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} x \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \psi_2 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + y \frac{\partial \psi'_3}{\partial z} - z \frac{\partial \psi'_2}{\partial z} - \psi'_2 \right], \\
 2\tilde{\omega}_3 &= \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \\
 &\quad - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial y} - \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} y \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \psi_3 - z \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{\lambda}{2\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + y \frac{\partial \psi'_3}{\partial y} + \psi'_3 - z \frac{\partial \psi'_2}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{59}$$

Per far ciò osserviamo, intanto, che gli ultimi due termini della prima di queste equazioni, a meno del segno, si possono scrivere

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\lambda}{8\pi R\mu} \left[2\varphi - \varphi' + x \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi - \varphi') \right] + \\
 &+ \frac{1}{4\pi R} \left[y \frac{\partial}{\partial x} (2\psi_3 - \psi'_3) - z \frac{\partial}{\partial x} (2\psi_2 - \psi'_2) \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

e, per essere :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (2\psi_3 - \psi'_3) &= -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} (2\varphi - \varphi') + \frac{\partial}{\partial z} (2\psi_1 - \psi'_1), \\ \frac{\partial}{\partial x} (2\psi_2 - \psi'_2) &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} (2\varphi - \varphi') + \frac{\partial}{\partial y} (2\psi_1 - \psi'_1), \\ 2\psi_1 - \psi'_1 &= \frac{4\pi R}{l} \int_0^l \tilde{\omega}_1 dl, \end{aligned} \right\} (61)$$

l'insieme di termini (60) si riduce a

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\lambda}{8\pi R\mu} (2\varphi - \varphi') + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} x \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi - \varphi') - \frac{\lambda + 2\mu}{8\pi R\mu} l \frac{\partial}{\partial l} (2\varphi - \varphi') + \\ &+ y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{l} \int_0^l \tilde{\omega}_1 dl \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \int_0^l \tilde{\omega}_1 dl \right) = \frac{\lambda}{8\pi R\mu} (2\varphi - \varphi') + \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} x \frac{\partial}{\partial x} (2\varphi - \varphi') - \frac{\lambda + 2\mu}{8\pi R\mu} l \frac{\partial}{\partial l} (2\varphi - \varphi') - \\ &\quad - \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi' + \\ &+ \frac{1}{8\pi Rl} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (60')$$

L'ultima trasformazione l'abbiamo ottenuta sostituendo per $\tilde{\omega}_1$ il suo valore dato dalla seconda delle (59), ed abbiamo indicato con $\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$ l'operazione che consiste nell'eseguire due volte l'operazione $y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}$.

Possiamo dunque sostituire la prima delle (59) con l'altra :

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi' + \frac{3\lambda + 8\mu}{2\mu} l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} + l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \\ &+ 2 \frac{\lambda + \mu}{\mu} x \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi' = \\ &= \frac{R}{\mu} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \\ &- \frac{1}{2l} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (62)$$

Osservando ancora che

$$\begin{aligned} & -x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} \right) - l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = \\ & = x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial z} = \\ & = \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi' + l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} + l \frac{\partial \varphi'}{\partial l}, \end{aligned}$$

la (62) si trasforma nell'altra

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi' + \frac{5}{2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} + \\ & + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi' = \frac{R}{\mu} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{2l} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (62')$$

Da questa equazione bisogna ricavare, prima di tutto, φ' . Convieni, per questo, introdurre coordinate polari, ponendo, p. es.:

$$x = l \cos \alpha, \quad y = l \sin \alpha \cos \beta, \quad z = l \sin \alpha \sin \beta.$$

Si trova allora subito

$$y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \beta}$$

e quindi la (62') si trasforma nell'altra

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \varphi' + \frac{5}{2} l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} + l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \beta^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left\{ \frac{R}{\mu} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{2l} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (62'')$$

Se la deformazione è di rotazione intorno all'asse x , φ' si determina con quadrature.

Nel caso generale questa equazione, prendendo per variabile indipendente $\log l$, invece di l , diventa un'equazione a coefficienti costanti del tipo

ellittico che si sa trattare completamente col metodo delle approssimazioni successive. Però la maniera più agevole e più naturale per trattare la questione presente ci sembra quello basato sull'uso delle funzioni sferiche. Se poniamo:

$$\varphi = \sum_0^{\infty} \varrho_n, \quad V = \sum_0^{\infty} V_n, \quad W = \sum_0^{\infty} W_n,$$

indicando con ϱ_n , V_n , W_n dei polinomii sferici, armonici di grado n , il secondo membro della (62'') si ridurrà a

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sum_0^n \left\{ \frac{R}{\mu} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z} - \frac{1}{2l} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} - \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} - \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) \right] \right\}$$

e la quantità sotto il segno sommatorio sarà un polinomio armonico, sferico di grado $n - 1$. Dovendo ora φ' essere una funzione armonica e regolare in S , possiamo supporla anch'essa sviluppata in serie di polinomii sferici, armonici in modo da avere

$$\varphi' = \sum_0^{\infty} \varphi'_n.$$

Essendo allora, evidentemente

$$\frac{1}{2} \varphi' + \frac{5}{2} l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} + l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} = \sum_0^n \frac{(2n+1)(n+1)}{2} \varphi'_n$$

dovrà essere

$$\frac{(2n+1)(n+1)}{2} \varphi'_n + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \varphi'_n}{\partial \beta^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left\{ \frac{R}{\mu} \frac{\partial \varrho_{n+1}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial V_{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} - \frac{1}{2l} \int_0^l dl \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial V_{n+1}}{\partial z} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial V_{n+1}}{\partial z} \right) \right] \right\}.$$

Introducendo coordinate polari al posto di coordinate cartesiane, si sa che

al secondo membro si può dare la forma

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{l}{R}\right)^n \sum_0^n (A_{n,i} \cos i\beta + B_{n,i} \sin i\beta) \Theta_{n,i}$$

in cui le $\Theta_{n,i}$ sono funzioni di α soltanto ed in cui le costanti $A_{n,i}$, $B_{n,i}$ devono ritenersi note. Se si pone la φ'_n sotto una forma analoga e si cerca di rendere identica l'ultima equazione scritta, si trova che dev'essere

$$\varphi'_n = 2\mu \left(\frac{l}{R}\right)^n \sum_0^n \frac{(A_{n,i} \cos i\beta + B_{n,i} \sin i\beta) \Theta_{n,i}}{(2n+1)(n+1)(\lambda+2\mu) - (\lambda+\mu)i^2}$$

e quindi

$$\varphi' = 2\mu \sum_0^\infty \left(\frac{l}{R}\right)^n \sum_0^n \frac{(A_{n,i} \cos i\beta + B_{n,i} \sin i\beta) \Theta_{n,i}}{(2n+1)(n+1)(\lambda+2\mu) - (\lambda+\mu)i^2}. \quad (63)$$

Il calcolo eseguito mostra, contemporaneamente, che esiste una sola funzione φ' soddisfacente alle condizioni imposte. Inoltre, poichè la serie

$$\sum_0^\infty \left(\frac{l}{R}\right)^n \sum_0^n (A_{n,i} \cos i\beta + B_{n,i} \sin i\beta) \Theta_{n,i}$$

è assolutamente ed uniformemente convergente in S , della stessa proprietà gode anche la serie (63).

Trovata φ' , sono determinate, in conseguenza, φ e ζ ed anche $\bar{\omega}_1$, v , w . Ma è facile dimostrare che anche ψ'_2 e ψ'_3 e quindi ψ_2 , ψ_3 ; $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$; u restano determinate. La terza delle (59), infatti, si può scrivere, tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial}{\partial x} (2\psi_1 - \psi'_1) + \frac{\partial}{\partial y} (2\psi_2 - \psi_2) + \frac{\partial}{\partial z} (2\psi_3 - \psi'_3) = 0$$

e delle (61):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_2 = & \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial z} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} z \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} x \frac{\partial}{\partial z} (2\varphi - \varphi') + \\ & + \frac{1}{4\pi R} \left[y \frac{\partial}{\partial x} (2\psi_1 - \psi'_1) - x \frac{\partial}{\partial y} (2\psi_1 - \psi'_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

e da una formola analoga è determinata anche $\tilde{\omega}_3$. Con quadrature si troveranno ψ_2 e ψ_3 e quindi ψ'_2 , ψ'_3 ed u .

È facile verificare che, con condizioni molto larghe per i dati, le formole trovate soddisfano a tutte le condizioni imposte.

4. *Caso in cui sulla sfera limite sono dati: u, M, N .* Anche qui osserviamo che a causa della simmetria della sfera i problemi in cui su σ sien dati: L, v, N , ovvero L, M, w non differiscono da quello propostoci che per il nome diverso degli assi coordinati. Ed aggiungiamo subito che le difficoltà che s'incontrano nella soluzione di quest'altro problema sono della stessa natura di quelle che si sono incontrate nel problema precedente. Perciò soltanto accenneremo alla soluzione di esso.

Si partirà dalle formole:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{U}{4\pi R} + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\
 v &= \frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu} - \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} y \varphi + z \psi_1 - x \psi_3 \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} y \varphi' + z \psi'_1 - x \psi'_3 \right) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \text{const.} \\
 w &= \frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu} - \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} z \varphi + x \psi_2 - y \psi_1 \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} z \varphi' + x \psi'_2 - y \psi'_1 \right) + \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \\
 &\quad + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (R^2 - l^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \text{const.}
 \end{aligned} \tag{65}$$

e si cercherà quindi di determinare ϵ ; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ in modo che sieno identi-

camente verificate le equazioni:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) - \\
 &\quad - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} l^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} \left(y \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\lambda}{\mu} \varphi + \frac{\lambda}{2\mu} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + z \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - x \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + x \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{\lambda}{\mu} \varphi' + \frac{\lambda}{2\mu} \left(y \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) + z \frac{\partial \psi'_1}{\partial y} - x \frac{\partial \psi'_3}{\partial y} + x \frac{\partial \psi'_2}{\partial z} - y \frac{\partial \psi'_1}{\partial z} \right], \\
 2\omega_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi R} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{3\lambda + 4\mu}{8\pi R\mu} \left(y \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi R} \left[-2\psi_1 + x \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) - y \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi R} \left[-2\psi'_1 + x \left(\frac{\partial \psi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi'_3}{\partial z} \right) - y \frac{\partial \psi'_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi'_1}{\partial z} \right], \\
 2\tilde{\omega}_2 &= \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \\
 &\quad - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial z} - \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi_2 + x \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - y \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\mu} z \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \psi'_2 + x \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} - y \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right), \\
 2\tilde{\omega}_3 &= \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{66}$$

Ora, per essere

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi R} \left[-2\psi_1 + x \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) - y \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi R} \left[-2\psi'_1 + x \left(\frac{\partial \psi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi'_3}{\partial z} \right) - y \frac{\partial \psi'_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi'_1}{\partial z} \right] = \\ & = \frac{1}{4\pi R} \left[4\psi_1 + 2l \frac{\partial \psi_1}{\partial l} - 2\psi'_1 - l \frac{\partial \psi'_1}{\partial l} \right] = \\ & = \omega_1 + \frac{1}{4\pi R} (2\psi_1 - \psi'_1), \end{aligned}$$

la seconda delle (66) si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{l}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial l} (2\psi_1 - \psi'_1) &= \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{1}{4\pi R} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{3\lambda + 4\mu}{8\pi R\mu} \left(y \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (66')$$

mentre la prima delle (66), facilmente, si pone sotto la forma

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) - \frac{2\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \\ & + \frac{5\lambda + 4\mu}{8\pi R\mu} l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi R\mu} x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 3 \frac{\lambda + \mu}{4\pi R\mu} x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \\ & - \frac{\lambda}{4\pi R\mu} (2\varphi - \varphi') - \frac{1}{4\pi R} \left[z \frac{\partial}{\partial y} (2\psi_1 - \psi'_1) - y \frac{\partial}{\partial z} (2\psi_1 - \psi'_1) \right]. \end{aligned} \quad (66'')$$

Eseguito su quest'equazione l'operazione $l \frac{\partial}{\partial l}$, notando che le operazioni $l \frac{\partial}{\partial l}$ e $z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$ sono permutabili e facendo uso della identità riportata a pag. 167 e della (66'), si trova

$$\begin{aligned} & 2(\lambda + 2\mu) l^3 \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial l^3} + (9\lambda + 16\mu) l^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial l^2} + (7\lambda + 10\mu) l \frac{\partial \varphi'}{\partial l} - \\ & - 2(\lambda + 2\mu) l \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial l \partial \beta^2} + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \beta^2} = \\ & = 2l \frac{\partial}{\partial l} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial x} + R \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) \right] - \\ & - 2R \left[z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) - y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Da questa equazione si determina φ' come sopra, sviluppando il secondo membro in funzioni sferiche. Restano allora determinate φ , θ ed u e con quadrature, partendo dalla (66'), ψ' , ψ_1 e ϖ_1 . Sostituendo nella terza della (66), per $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi'_2}{\partial x}$:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial \psi'_1}{\partial y},$$

si ottiene un'equazione che, con semplici quadrature, ci può determinare ψ'_2 e quindi ψ_2 , ϖ_2 . Allo stesso modo si possono determinare ψ'_3 , ψ_3 e ϖ_3 , e restano, in conseguenza, determinati anche v e w .

IV. DI ALTRE CONDIZIONI AL CONTORNO CHE SONO ATTE AD INDIVIDUARE LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI INDEFINITE DELL'EQUILIBRIO DEI CORPI ELASTICI ISOTROPI.

1. Basta un esame, anche superficiale, delle soluzioni dei problemi d'equilibrio elastico, date precedentemente, per persuadersi che in esse vi sono già tutti gli elementi per risolvere i problemi analoghi in cui, invece delle tensioni o degli spostamenti, sien dati, sulla superficie σ , i valori di $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$, o di u , $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$, o di u , v , $\frac{dw}{dn}$, e quelli che si ottengono da questi scambiando il nome degli assi coordinati. E i concetti generali indicati in I possono servire di guida per tentare la soluzione di questi problemi anche negli altri casi in cui σ è differente da un piano o da una sfera.

Non ho notizia che sia mai stata fatta la ricerca delle condizioni più generali in superficie che sono compatibili con le equazioni indefinite (1). Per quanto una simile ricerca possa avere scarso valore per la teoria della elasticità, credo, ciò nonostante, che essa possa giovare a portar lume allo studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali, lineari, di ordine superiore al primo, dei quali quelli dell'equilibrio dei corpi isotropi devono ritenersi fra i più semplici. Qui vogliamo indicare brevemente alcune forme di condizioni in superficie per le quali il calcolo delle variazioni basta a darci la dimostrazione dei teoremi di unicità e d'esistenza. Certamente queste dimostrazioni, oltre a richiedere che u , v , w abbiano derivate regolari al con-

torno, sono soggette alle solite critiche del principio di DIRICHLET; pure ho l'opinione che, in ricerche di indole generale, forniscano indicazioni preziose.

Cominciamo perciò a dare alle equazioni:

$$\Delta^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots \quad (a)$$

diverse altre forme, servendoci delle note identità:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} \right), \dots \quad (b)$$

Se dalle (a), per mezzo di queste identità, eliminiamo $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$, troviamo le equazioni (2) già riportate:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial y} \right) = 0, \dots \quad (c)$$

Se invece eliminiamo $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$, si trovano le equazioni:

$$(\lambda + 2\mu) \Delta^2 u + 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z} \right) = 0, \dots \quad (d)$$

Sommando, infine, membro a membro le (a) con le (b), si ottiene:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \left(\Delta^2 u + \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z} \right) = 0, \dots \quad (e)$$

Ci fermeremo soltanto sulle forme (a), (c), (d), (e) delle equazioni (1), ma è chiaro che altre, con lo stesso metodo, o con metodi analoghi, se ne possono ottenere.

Moltiplichiamo ora le (a), rispettivamente, per ∂u , ∂v , ∂w , sommiamo ed integriamo ad una porzione di spazio S . Troviamo subito così

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \int_S dS \Sigma \left(\Delta^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \partial u = \\ &= - \int_{\sigma} d\sigma \Sigma \left(\frac{d u}{d n} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos n x \right) \partial u - \\ &- \partial \frac{1}{2} \int_S \left(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta^2 \right) dS \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

dove

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \dots$$

Se nella equazione (f) facciamo $\delta u = u$, $\delta v = v$, $\delta w = w$, la equazione stessa si muta nell'altra

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S \left(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta^2 \right) dS + \\ & + \int_{\sigma} d\sigma \Sigma \left(\frac{du}{dn} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos nx \right) u = 0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Supponendo che sulla superficie σ debbano essere verificate le condizioni:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos nx - c_1 u &= 0, & \frac{dv}{dn} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos ny - c_2 v &= 0, \\ \frac{dw}{dn} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos nz - c_3 w &= 0 \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 essendo delle costanti positive, la (g) ci dà:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S \left(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta^2 \right) dS + \\ & + \int_{\sigma} (c_1 u^2 + c_2 v^2 + c_3 w^2) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

e, per conseguenza, essendo $\frac{\lambda + \mu}{\mu} > 0$, si deve avere $u = v = w = 0$ in tutto S e su σ . Col solito ragionamento, da questo risultato, si deduce poi che un sistema di soluzioni u, v, w delle equazioni (a) con le condizioni al contorno:

$$L' - c_1 u + \frac{du}{dn} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta \cos nx = 0, \dots \quad (a')$$

in cui L', M', N' sono funzioni note dei punti di σ , sono univocamente determinate. Dalla (f) risulta, invece, che le funzioni u, v, w le quali su σ sono soggette alla condizione

$$\int_{\sigma} \left[L' u + M' v + N' w - \frac{1}{2} (c_1 u^2 + c_2 v^2 + c_3 w^2) \right] d\sigma = \text{cost.}$$

e rendono minimo l'integrale

$$\int_S \left(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \theta^2 \right) dS$$

soddisfano alle equazioni indefinite (a) ed alle condizioni in superficie (a'). Ammesso quindi l'esistenza di questo minimo, è provato anche il teorema d'esistenza. Le costanti c_1, c_2, c_3 possono raggiungere i valori limiti 0 ed ∞ , indipendentemente una dall'altra.

Questo ragionamento può applicarsi anche alle altre forme (c), (d), (e) delle equazioni (1) e a ciascuna di esse viene a corrispondere una forma determinata delle condizioni in superficie compatibile con le stesse equazioni. Esse possono scriversi così:

$$L'' - c_1 u + (\lambda + 2\mu) \theta \cos nx + 2\mu (\tilde{\omega}_2 \cos nz - \tilde{\omega}_3 \cos ny) = 0, \dots \quad (c')$$

$$L''' - c_1 u + (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dn} + 2(\lambda + \mu) (\tilde{\omega}_3 \cos ny - \tilde{\omega}_2 \cos nz) = 0, \dots \quad (d')$$

$$L^{IV} - c_1 u + \lambda \theta \cos nx + 2\mu \left(\frac{du}{dn} + \tilde{\omega}_3 \cos ny - \tilde{\omega}_2 \cos nz \right) = 0, \dots \quad (e')$$

Le ultime contengono, come caso particolare, quelle introdotte fin da principio e che corrispondono a dare in superficie le tensioni, ovvero gli spostamenti.

Ogni volta che le condizioni in superficie sono tali che quella corrispondente all'asse x contenga u ovvero $\frac{du}{dn}$, e nessuno degli altri spostamenti e derivate normali, e la cosa analoga valga per quelle corrispondenti agli assi y e z , si può cercare di risolvere il problema della determinazione della soluzione delle equazioni (a), corrispondente alle date condizioni in superficie, con i principii esposti in I.

V. ALCUNE OSSERVAZIONI SUI RISULTATI PRECEDENTI.

1. I problemi relativi ad una porzione di spazio limitata da un piano, o da una sfera, di cui ci siamo già occupati, devono essere ritenuti come i più semplici fra i problemi di equilibrio elastico di un corpo isotropo. Essi sono caratterizzati dalla proprietà che le equazioni da cui dipende la determinazione delle quantità $\theta; \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$, si possono porre sotto la forma di equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali; mentre, nel caso generale, queste quantità compariranno, nelle nominate equazioni, sotto integrali di superficie

indipendenti fra loro. La particolarità notata è in relazione col fatto che ogni funzione armonica, in una porzione di spazio limitato da un piano, o da una sfera, si esprime facilmente, con l'aiuto di sole derivazioni, per la funzione potenziale di una massa distribuita sul piano o sulla sfera con una densità proporzionale ai valori che la stessa funzione armonica assume in superficie.

Aggiungiamo che i problemi relativi alla porzione di spazio limitato da un piano e quelli relativi alla porzione di spazio limitata da una sfera non sono indipendenti gli uni dagli altri, chè anzi i primi possono ricavarsi facilmente come casi particolari dei secondi quando il raggio della sfera cresce indefinitamente. Per quanto ciò possa parere evidente, pure non stimo inutile dimostrarlo rigorosamente, almeno in un caso, tanto più che, credo, questo non è mai stato fatto in modo esplicito. Perciò supponiamo che la sfera di raggio R , considerata in III, abbia il centro, invece che nell'origine delle coordinate, nel punto $x = 0, y = 0, z = -R$. Bisognerà allora porre nelle formole di quel paragrafo $z + R$ e $\zeta + R$ al posto di z e ζ . Supponendo x, y, z finite, è chiaro che:

$$\lim_{R=\infty} \frac{l}{R} = 1, \quad \lim_{R=\infty} \frac{l^2 - R^2}{R} = \lim_{R=\infty} \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2Rz}{R} = 2z$$

$$\lim_{R=\infty} \frac{l}{R} \frac{\partial}{\partial l} = \lim_{R=\infty} \left(\frac{x}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{R} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{R} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Prendiamo ora a considerare le formole (34) e (35) che danno la soluzione del problema dell'equilibrio elastico per lo spazio esterno alla sfera di raggio R quando in superficie sono dati gli spostamenti:

$$u = \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{8\pi R\mu} (l^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \dots$$

$$\int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} l^{-\frac{\mu}{\lambda+3\mu}} \int_{\infty}^l l^{-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right] \right\} dl,$$

con

$$\theta = \frac{l^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r^3} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{l}{R} \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma + \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma.$$

Al limite, per $R = \infty$, i valori di u , v , w ; θ diventano:

$$u = \frac{z}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} z \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma, \dots$$

$$\theta = \frac{z}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r^3} d\sigma = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma;$$

e, poichè, pel caso della sfera,

$$\begin{aligned} \frac{l}{R} \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma &= - \frac{\mu^2}{(\lambda + 3\mu)^2} \frac{l^{-\frac{\mu}{\lambda+3\mu}}}{R} \int_{\infty}^l l^{-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 - l^2) \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma \right] + \dots \right\} dl + \\ &+ \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} \frac{1}{R} \left\{ -2x \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma - 2y \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma - 2(z + R) \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma + \right. \\ &\left. + (R^2 - l^2) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right] \right\}, \end{aligned}$$

al limite, per $R = \infty$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{\theta}{r} d\sigma &= -2\pi\epsilon = \\ &= \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \left\{ - \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma - z \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r^3} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r^3} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r^3} d\sigma \right] \right\} = \\ &= \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{v}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{w}{r} d\sigma \right] (*). \end{aligned}$$

Questi valori di u , v , w e di θ coincidono appunto con quelli dati dalle (10) e (11) di II.

(*) S'intende che, in questo passaggio al limite, si suppone che gli integrali $\int_{\sigma} \frac{u}{r} d\sigma, \dots$ restino finiti anche al limite.

2. È ovvio notare che lo stesso procedimento da noi indicato pel caso di tre dimensioni, vale anche pel caso di due dimensioni ed anche, più generalmente, se volesse considerarsi, pel caso delle equazioni dell'equilibrio di un corpo isotropo in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.

Affinchè, però, non si pensi ch'io vada troppo oltre nella estimazione delle mie vedute, soprattutto dal lato dell'originalità, noterò ora che è più facile spiegarmi, per aver mostrato abbastanza chiaramente in che cosa esse consistano, che le radici del metodo da me seguito per ottenere la soluzione dei problemi di equilibrio elastico per un corpo isotropo, si possono ritrovare fin nei più antichi lavori sull'argomento. Questo è vero, specialmente, per ciò che si riferisce ad assumere come note certe funzioni incognite e a determinarle poi dopo aver soddisfatto alle condizioni in superficie. Questa via è chiara nel metodo che THOMSON ha seguito per ottenere la soluzione del problema della sfera elastica. La ricerca di quelle soluzioni particolari di cui si ha bisogno per l'applicazione del metodo BETTI-CERRUTI, portano tracce non meno evidenti di queste idee. Anche le belle soluzioni per integrali definiti dei problemi della sfera (*) e del semispazio, date dal prof. ALMANZI, hanno, in fondo, questa origine. Più esplicito di tutti, nel seguire questa via, mi pare però che sia il prof. CESARO il quale, nella sua « Introd. alla teoria matem. dell'Elast. », dopo aver data la soluzione del problema del semispazio col metodo BETTI-CERRUTI, ne presenta un'altra che è molto simile a quella data in questo lavoro, e alla pag. 120 dice:

*Il prof. CERRUTI ha trattato il problema precedente « per dare un'illustrazione abbastanza facile del metodo generale » proposto da BETTI. Quando non si ha in vista questo scopo, ma si vuole soltanto raggiungere la soluzione del problema dei suoli elastici, è ben facile pervenire con procedimento più rapido e diretto alle formole generali ottenute dal prof. CERRUTI, e ciò senza rinunciare a « condurre la soluzione in modo che possa somministrare qualche lume per la trattazione di problemi analoghi » (**). Basta infatti riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica θ , calcolare poi gli*

(*) Mi piace, qui, citare il lavoro del prof. SOMIGLIANA: *Sopra l'equil. di un corpo elast.* ... Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 1887, in cui si trovano molti calcoli che ricordano quelli dell'ALMANZI, dei quali però il prof. ALMANZI non aveva, certo, notizia.

(**) Le parole virgolate sono del prof. CERRUTI. *Acc. dei Lincei*, 1882, p. 81.

spostamenti (u, v, w) , e dedurre l'espressione di θ : questa funzione si trova così isolata in una relazione che serve a determinarla.

Spero però, sarà riconosciuto che con la introduzione delle formole (5) e (5') contenenti le funzioni di GREEN G e G_1 , e con le altre osservazioni fatte in I, queste idee vengono ad acquistare una generalità ed una potenza che prima non avevano.

Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.

(Di TOMMASO BOGGIO, a Torino.)

PREFAZIONE.

Il prof. BIANCHI in alcune Note pubblicate negli *Atti della R. Accademia dei Lincei* (a. 1886), ha determinato le condizioni affinché due equazioni a derivate parziali, di 2.^o ordine, con due variabili indipendenti, abbiano soluzioni comuni; in questa Memoria mi propongo di stabilire la condizione analoga per due equazioni lineari, a derivate parziali, d'ordine qualunque a coefficienti costanti o variabili, e di mostrare come la condizione ottenuta permetta di trovare la forma dell'integrale generale di alcune classi di equazioni differenziali lineari.

Nel cap. I stabilisco alcune formole introducendo le derivate funzionali di espressioni differenziali lineari. Indicando con \mathfrak{D} un'espressione differenziale lineare, a quante si vogliano variabili, e con u, v due funzioni di tali variabili stabilisco, fra altro, le formole che esprimono

$$\mathfrak{D}(xu), \quad \mathfrak{D}(x^m u), \quad \mathfrak{D}(uv).$$

Suppongo poi, nel cap. II, che l'espressione \mathfrak{D} abbia coefficienti costanti e dimostro che se le funzioni u, v soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$, la funzione $U = xu + v$ verifica l'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$. Per stabilire la proprietà inversa basta dimostrare l'esistenza di una funzione che soddisfa a due certe equazioni differenziali lineari. Dimostro direttamente che, per vari tipi di equazioni differenziali, a quante si vogliano variabili, tale funzione esiste sempre, mentre nel cap. III stabilisco, nel caso di due variabili, la condizione necessaria e sufficiente affinché due equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti, delle quali una è omogenea, abbiano soluzioni comuni.

Le proprietà precedenti permettono di dimostrare (cap. IV) che ogni funzione U che verifichi l'equazione $\mathfrak{D}^m U = 0$, può, in generale, rappresentarsi colla formola:

$$U = x^{m-1} u_1 + x^{m-2} u_2 + \dots + x u_{m-1} + u_m,$$

le u essendo funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$. Se l'espressione \mathfrak{D} è scomponibile in fattori, l'integrale generale dell'equazione $\mathfrak{D} = 0$ può esprimersi mediante integrali di altre equazioni più semplici.

Molte delle precedenti proprietà valgono anche per equazioni a coefficienti variabili, come mostro nel cap. V.

Nel cap. VI trovo, nel caso di due variabili, la condizione necessaria e sufficiente affinché due equazioni lineari, a coefficienti variabili, delle quali una è omogenea, abbiano soluzioni comuni.

Indicando con u una funzione che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} u = 0$, dimostro (cap. VII) che tutte le espressioni \mathfrak{D} di secondo ordine, a coefficienti costanti, per le quali si ha

$$\mathfrak{D}^2 [(x^2 + y^2) u] = 0$$

sono riduttibili al Δ^2 di LAPLACE.

Da ultimo espongo un procedimento per integrare l'equazione:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f \right)^m U = 0,$$

(f_1, f_2, f essendo date funzioni di x, y , ed a costante) nello spazio indefinito limitato dal piano xy , supponendo di conoscere, su questo piano, il valore della funzione U e delle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini.

I.

ALCUNE FORMOLE.

1. Ricordiamo anzitutto le definizioni e le principali proprietà delle derivate funzionali di espressioni differenziali lineari ad una variabile.

Indicheremo, per brevità, con \mathfrak{D} l'espressione differenziale lineare

$$\mathfrak{D} = a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots + a_1 D + a_0 = \sum_0^m a_i D^i,$$

ovè le a denotano funzioni di x e D è l'ordinaria operazione di derivazione $\frac{d}{dx}$.

Se u è una funzione di x si ha :

$$\mathfrak{D} u = \sum_0^m a_i D^i u; \quad (1)$$

osservando che

$$D^i (x u) = x D^i u + i D^{i-1} u, \quad (2)$$

si avrà :

$$\mathfrak{D} (x u) = \sum_0^m a_i (x D^i u + i D^{i-1} u),$$

onde :

$$\mathfrak{D} (x u) - x \mathfrak{D} u = \sum_1^m a_i i D^{i-1} u. \quad (3)$$

La differenza: $\mathfrak{D} (x u) - x \mathfrak{D} u$, è dunque un'espressione della stessa forma della (1); essa può riguardarsi come ottenuta dalla (1) mediante la regola ordinaria di derivazione, applicata come se il simbolo D fosse la variabile. Per questa ragione, l'espressione $\sum a_i i D^{i-1} u$ dicesi *derivata funzionale* (*) di $\sum a_i D^i u$; indicando con $\frac{\delta}{dx}$ il simbolo di tale derivazione funzionale, avremo :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} u}{dx} = \frac{\delta}{dx} \sum_0^m a_i D^i u = \sum_1^m a_i i D^{i-1} u,$$

che scriveremo anche :

$$\frac{\delta \mathfrak{D}}{dx} = \frac{\delta}{dx} \sum_0^m a_i D^i = \sum_1^m a_i i D^{i-1};$$

sicchè la (3) potremo pure scriverla :

$$\mathfrak{D} (x u) = x \mathfrak{D} u + \frac{\delta \mathfrak{D} u}{dx}.$$

Analogamente si può considerare la derivata funzionale seconda, terza, ecc., di $\mathfrak{D} u$. Indicando con $\frac{\delta^r \mathfrak{D} u}{dx^r}$ la derivata funzionale d'ordine r di $\mathfrak{D} u$,

(*) Per maggiori particolari sulle derivate funzionali cfr. PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*; pag. 100 e seg. (Bologna, Zanichelli; a. 1901).

si ha:

$$\frac{\delta^r \mathfrak{D} u}{d x^r} = \sum_r^m a_r r! \binom{i}{r} D^{i-r} u,$$

che può ancora scriversi:

$$\frac{\delta^r \mathfrak{D} u}{d x^r} = \mathfrak{D} (x^r u) - r x \mathfrak{D} (x^{r-1} u) + \binom{r}{2} x^2 \mathfrak{D} (x^{r-2} u) - \dots + (-1)^r x^r \mathfrak{D} u.$$

È facile vedere che

$$\frac{\delta^r}{d x^r} \left(\frac{\delta^s \mathfrak{D} u}{d x^s} \right) = \frac{\delta^{r+s} \mathfrak{D} u}{d x^{r+s}}.$$

Se \mathfrak{D}_1 è un'espressione lineare analoga a \mathfrak{D} si ha:

$$\frac{\delta^r}{d x^r} (\mathfrak{D} u + \mathfrak{D}_1 u) = \frac{\delta^r \mathfrak{D} u}{d x^r} + \frac{\delta^r \mathfrak{D}_1 u}{d x^r}.$$

Se v è un'altra funzione di x , si ha, da una formola di LEIBNIZ:

$$D^i (u v) = \sum_j^i \binom{i}{j} D^j u \cdot D^{i-j} v,$$

che possiamo ancora scrivere:

$$D^i (u v) = \sum_j^i \frac{1}{j!} D^j u \cdot \frac{\delta^j D^i v}{d x^j}, \quad (4)$$

ed aggiungendo al secondo membro dei termini identicamente nulli:

$$D^i (u v) = \sum_j^m \frac{1}{j!} D^j u \cdot \frac{\delta^j D^i v}{d x^j}, \quad (m \geq i);$$

ricordando l'espressione di \mathfrak{D} se ne trae:

$$\mathfrak{D} (u v) = \sum_j^m \frac{1}{j!} D^j u \cdot \frac{\delta^j \mathfrak{D} v}{d x^j}, \quad (5)$$

che chiamasi formola di D'ALEMBERT.

2. Estenderemo ora al caso di espressioni differenziali lineari con due variabili indipendenti, le formole stabilite nel § precedente.

Sia u una funzione di x, y , allora le scritte

$$D_x^r D_y^s u, \quad D_y^s D_x^r u$$

si riterranno equivalenti a $\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s}$.

Applicando la (2) si ha :

$$D_x^r D_y^s (x u) = x D_x^r D_y^s u + r D_x^{r-1} D_y^s u,$$

quindi ponendo :

$$\mathfrak{D} = \sum_0^m a_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_0^m a_{rs} D_x^r D_y^s, \quad (r + s \leq m) \quad (6)$$

ove le a sono funzioni di x, y , si ottiene :

$$\mathfrak{D} (x u) = x \Sigma a_{rs} D_x^r D_y^s u + \Sigma a_{rs} r D_x^{r-1} D_y^s u,$$

da cui :

$$\mathfrak{D} (x u) - x \mathfrak{D} u = \Sigma a_{rs} r D_x^{r-1} D_y^s u;$$

ora, il secondo membro può riguardarsi come ottenuto dall'espressione $\Sigma a_{rs} D_x^r D_y^s u$, cioè da $\mathfrak{D} u$, mediante la regola ordinaria di derivazione parziale rispetto ad x , applicata come se i simboli D_x, D_y fossero le due variabili indipendenti. Noi daremo perciò all'espressione $\Sigma a_{rs} r D_x^{r-1} D_y^s u$ il nome di *derivata funzionale (parziale) rispetto ad x* di $\mathfrak{D} u$; indicando con $\frac{\delta}{\partial x}$ questa operazione di derivazione, abbiamo :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x} = \frac{\delta}{\partial x} \Sigma a_{rs} D_x^r D_y^s u = \Sigma a_{rs} r D_x^{r-1} D_y^s u,$$

onde la formola precedente può scriversi :

$$\mathfrak{D} (x u) = x \mathfrak{D} u + \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x}. \quad (7)$$

Ponendo :

$$a_x = a x + b y + c,$$

ove a, b, c sono costanti, si ha facilmente :

$$\mathfrak{D} (a_x u) = a_x \mathfrak{D} u + a \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x} + b \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial y},$$

nella quale $\frac{\delta}{\partial y}$ indica l'operazione di derivazione funzionale rispetto ad y .

Si possono pure considerare le derivate funzionali parziali successive rispetto ad x, y di $\mathfrak{D} u$. Si ha :

$$\frac{\delta^h}{\partial x^h} \left(\frac{\delta^k \mathfrak{D} u}{\partial y^k} \right) = \Sigma a_{rs} h! k! \binom{r}{h} \binom{s}{k} D_x^{r-h} D_y^{s-k} u;$$

il primo membro lo indicheremo anche con $\frac{\delta^{h+k} \mathfrak{D} u}{\partial x^h \partial y^k}$; è chiaro che:

$$\frac{\delta^{h+k} \mathfrak{D} u}{\partial x^h \partial y^k} = \frac{\delta^{h+k} \mathfrak{D} u}{\partial y^k \partial x^h},$$

inoltre:

$$\frac{\delta^k}{\partial y^k} \frac{\delta^h}{\partial x^h} \mathfrak{D} u = \frac{\delta^h}{\partial x^h} \frac{\delta^k}{\partial y^k} \mathfrak{D} u.$$

Stabiliremo ora una formola analoga alla (5).

Se v è un'altra funzione di x, y , si ha dalla (4):

$$\begin{aligned} D_x^r D_y^s (u v) &= D_y^s [D_x^r (u v)] = D_y^s \sum_0^r \frac{1}{i!} D_x^i u \cdot \frac{\delta^i D_x^r v}{\partial x^i} = \\ &= \sum_0^r \frac{1}{i!} \sum_0^s \frac{1}{j!} D_x^i D_y^j u \cdot \frac{\delta^{i+j} D_x^r D_y^s v}{\partial x^i \partial y^j}; \end{aligned}$$

aggiungendo all'ultimo membro dei termini identicamente nulli si può ancora scrivere:

$$D_x^r D_y^s (u v) = \sum_{ij}^m \frac{1}{i! j!} D_x^i D_y^j u \frac{\delta^{i+j} D_x^r D_y^s v}{\partial x^i \partial y^j}, \quad (m \geq r, s)$$

ricordando l'espressione (6) di \mathfrak{D} se ne deduce:

$$\mathfrak{D} (u v) = \sum_{ij}^m \frac{1}{i! j!} D_x^i D_y^j u \frac{\delta^{i+j} \mathfrak{D} v}{\partial x^i \partial y^j},$$

ossia, sotto forma sviluppata:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} (u v) &= u \mathfrak{D} v + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta \mathfrak{D} v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta \mathfrak{D} v}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\delta^2 \mathfrak{D} v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\delta^2 \mathfrak{D} v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\delta^2 \mathfrak{D} v}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \frac{\delta^m \mathfrak{D} v}{\partial x^m} + m \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial y} \frac{\delta^m \mathfrak{D} v}{\partial x^{m-1} \partial y} + \right. \\ &\left. + \binom{m}{2} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-2} \partial y^2} \frac{\delta^m \mathfrak{D} v}{\partial x^{m-2} \partial y^2} + \dots + \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \frac{\delta^m \mathfrak{D} v}{\partial y^m} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Si noti l'analogia di questa formola colla formola di TAYLOR relativa ad un polinomio di grado m nelle due variabili x, y .

Sia ad es.

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \Delta^2 \Delta^2;$$

si ha :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} &= 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} = 4 \frac{\partial \Delta^2}{\partial x}, & \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial y} &= 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} = 4 \frac{\partial \Delta^2}{\partial y}; \\ \frac{\delta^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2} &= 8 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4 \Delta^2, & \frac{\delta^2 \mathfrak{D}}{\partial x \partial y} &= 8 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & \frac{\delta^2 \mathfrak{D}}{\partial y^2} &= 8 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4 \Delta^2; \\ \frac{\delta^3 \mathfrak{D}}{\partial x^3} &= 24 \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\delta^3 \mathfrak{D}}{\partial x^2 \partial y} &= 8 \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\delta^3 \mathfrak{D}}{\partial x \partial y^2} &= 8 \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\delta^3 \mathfrak{D}}{\partial y^3} &= 24 \frac{\partial}{\partial y}; \\ \frac{\delta^4 \mathfrak{D}}{\partial x^4} &= \frac{\delta^4 \mathfrak{D}}{\partial y^4} = 24, & \frac{\delta^4 \mathfrak{D}}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{\delta^4 \mathfrak{D}}{\partial x \partial y^3} = 0, & \frac{\delta^4 \mathfrak{D}}{\partial x^2 \partial y^2} &= 8; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Delta^2 (u v) &= u \Delta^2 \Delta^2 v + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial y} \right) + \\ &+ 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ &+ 2 \Delta^2 u \Delta^2 v + 4 \left(\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \Delta^2 \Delta^2 u. \end{aligned}$$

3. Nel caso di n variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_n si possono definire delle operazioni $\frac{\delta}{\partial x_1}, \frac{\delta}{\partial x_2}, \dots, \frac{\delta}{\partial x_n}$ di derivazione funzionale analoghe a quelle considerate precedentemente.

Poniamo :

$$\mathfrak{D} = \sum_0^m a_{r_1 r_2 \dots r_n} \frac{\partial^{r_1 + r_2 + \dots + r_n}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}}, \quad (r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq m) \quad (9)$$

ove le a sono funzioni di x_1, x_2, \dots, x_n .

Se u è una funzione di x_1, x_2, \dots, x_n si ha la formola seguente, analoga alla (7) :

$$\mathfrak{D}(x_i u) = x_i \mathfrak{D} u + \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_i}, \quad (10)$$

che scriveremo anche :

$$\mathfrak{D}(x_i u) = \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D} u.$$

Ponendo :

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

ove a_1, a_2, \dots, a_n sono costanti, è facile dedurre dalla (10):

$$\mathfrak{D}(a_x u) = a_x \mathfrak{D} u + \left(a_1 \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_n} \right),$$

che scriveremo anche sotto la forma:

$$\mathfrak{D}(a_x u) = \sum_1^n a_i \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D} u. \tag{11}$$

Consideriamo ora p funzioni lineari qualunque di x_1, x_2, \dots, x_n , e siano:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{n1} x_n \\ a_{x_2} &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{n2} x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{x_p} &= a_{1p} x_1 + a_{2p} x_2 + \dots + a_{np} x_n; \end{aligned}$$

si ha facilmente, applicando la (11):

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(a_{x_1} a_{x_2} u) &= \mathfrak{D}[a_{x_1}(a_{x_2} u)] = \left[\sum_1^n a_{i1} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D} \right] (a_{x_2} u) = \\ &= \left[\sum_1^n a_{i1} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \left[\sum_1^n a_{i2} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \mathfrak{D} u, \end{aligned}$$

e in generale:

$$\mathfrak{D}(a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_p} u) = \left. \begin{aligned} &\left[\sum_1^n a_{i1} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \left[\sum_1^n a_{i2} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \dots \\ &\dots \left[\sum_1^n a_{ip} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \mathfrak{D} u; \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

se ne trae:

$$\mathfrak{D}(x_i^m u) = \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right)^m \mathfrak{D} u; \tag{13}$$

questa formola permette di calcolare $\mathfrak{D}(P \cdot u)$, ove P è un polinomio in x_1, x_2, \dots, x_n .

La (8) può estendersi facilmente al caso di n variabili; si ottiene così

la formola :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(uv) = & u \mathfrak{D}v + \sum_1^n \frac{\delta u}{\partial x_i} \frac{\delta \mathfrak{D}v}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \sum_1^n \sum^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_1^n \sum^{i,j,k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\delta^3 \mathfrak{D}v}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \\ & + \dots + \frac{1}{m!} \sum_1^n \sum^{r_1 r_2 \dots r_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_m}} \frac{\delta^m \mathfrak{D}v}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_m}}. \end{aligned}$$

In particolare, se a è costante :

$$\mathfrak{D}(e^{ax_1} u) = e^{ax_1} \left(1 + a \frac{\delta}{\partial x_1} + \frac{a^2}{2!} \frac{\delta^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{a^m}{m!} \frac{\delta^m}{\partial x_1^m} \right) \mathfrak{D}u,$$

che può ancora scriversi :

$$\mathfrak{D}(e^{ax_1} u) = e^{ax_1} \mathfrak{D}_1 u, \tag{14}$$

ove \mathfrak{D}_1 è un'espressione analoga a \mathfrak{D} .

II.

INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $\mathfrak{D}^2 = 0$.

4. Supponiamo ora, in ciò che segue, che i coefficienti a che compariscono nell'espressione (9) di \mathfrak{D} siano quantità costanti.

Indichiamo poi con $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_q$ delle espressioni differenziali lineari, a coefficienti costanti, analoghe a \mathfrak{D} .

È chiaro allora che

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\partial x_i} (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) &= \frac{\delta \mathfrak{D}_1}{\partial x_i} \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_1 \frac{\delta \mathfrak{D}_2}{\partial x_i}, \\ \frac{\delta}{\partial x_i} \mathfrak{D}^q &= q \mathfrak{D}^{q-1} \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre dalle (11), (12) § 3 si ha :

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_q (a x u) = \sum_1^n a_i \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_q u, \tag{2}$$

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_q (a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_p} u) = \left. \begin{aligned} & \left[\sum_1^n a_{i_1} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \left[\sum_1^n a_{i_2} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \dots \\ & \dots \left[\sum_1^n a_{i_p} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_q u. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Se, in particolare,

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \dots = \mathfrak{D}_q = \mathfrak{D},$$

risulterà, dalle (2), (3):

$$\mathfrak{D}^q (a_x u) = \sum a_i \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D}^q u, \quad (2')$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^q (a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_p} u) &= \left[\sum a_{i_1} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \left[\sum a_{i_2} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \dots \\ &\dots \left[\sum a_{i_p} \left(x_i + \frac{\delta}{\partial x_i} \right) \right] \mathfrak{D}^q u. \end{aligned}$$

Dalla (2') si ha ancora, ricordando la (1):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}^q (a_x u) &= \sum a_i x_i \mathfrak{D}^q u + \sum a_i \frac{\delta \mathfrak{D}^q u}{\partial x_i} = a_x \mathfrak{D}^q u + q \mathfrak{D}^{q-1} \sum a_i \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_i} = \\ &= a_x \mathfrak{D}^q u + q \left(\sum a_i \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_i} \right) \mathfrak{D}^{q-1} u. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

5. Dalla (4) segue senz'altro la proprietà seguente:

Se la funzione u soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^{q-1} u = 0$, la funzione $a_x u$ verificherà l'equazione $\mathfrak{D}^q (a_x u) = 0$.

In particolare: *Se la funzione u soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} u = 0$, la funzione $x_1 u$ verificherà l'equazione $\mathfrak{D}^2 (x_1 u) = 0$. Questa proprietà può pure dedursi subito dalla (10) § 3; infatti, se $\mathfrak{D} u = 0$, la (10) porge:*

$$\mathfrak{D} (x_1 u) = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} u,$$

onde:

$$\mathfrak{D}^2 (x_1 u) = \mathfrak{D} \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} u = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} \mathfrak{D} u = 0.$$

Ne segue facilmente che, se $\mathfrak{D} u = 0$, la funzione $x_1^q u$ soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^3 (x_1^q u) = 0$, e che in generale sarà:

$$\mathfrak{D}^q (x_1^{q-1} u) = 0;$$

analogamente risulterà :

$$\mathfrak{D}^q (x_1^{r_1} x_2^{q-1-r_1} u) = 0,$$

e in generale :

$$\mathfrak{D}^q (x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} u) = 0, \quad (r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq q - 1).$$

Ne viene che se P è un polinomio di grado $\leq q - 1$, si ha (supposto sempre $\mathfrak{D} u = 0$) :

$$\mathfrak{D}^q (P \cdot u) = 0.$$

6. Dalle proprietà esposte nel paragrafo precedente si deduce ancora :

Se le funzioni u, v soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$, la funzione $U = x_1 u + v$ verificherà l'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$.

Or si presenta spontanea la domanda : *La funzione più generale U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$ può porsi sotto la forma $U = x_1 u + v$, ove u, v sono funzioni che verificano l'equazione $\mathfrak{D} = 0$?*

Vedremo che, nel caso di due variabili, la risposta a tale questione è, in generale, affermativa ; se il numero delle variabili è > 2 stabiliremo (§ 8) questa proprietà per varie forme dell'espressione \mathfrak{D} .

È chiaro intanto che per stabilire questa proprietà è necessario e sufficiente dimostrare che, data la funzione U , si può sempre determinare una funzione u che verifichi le equazioni

$$\mathfrak{D} (U - x_1 u) = 0, \quad \mathfrak{D} u = 0,$$

ossia, ponendo $\Psi = \mathfrak{D} U$:

$$\frac{\delta \mathfrak{D} u}{\delta x_1} = \Psi, \tag{5}$$

$$\mathfrak{D} u = 0; \tag{6}$$

essendo $\mathfrak{D}^2 U = 0$, risulta dall'espressione di Ψ : $\mathfrak{D} \Psi = 0$.

Possiamo trasformare questo sistema di equazioni nel modo seguente. Sia ψ una funzione che soddisfa all'equazione

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \psi}{\delta x_1} = \Psi,$$

e poniamo :

$$u = \psi + \varphi;$$

si ha allora dalle (5), (6) :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\delta x_1} = 0, \quad \mathfrak{D} \varphi = -\mathfrak{D} \psi,$$

e, posto :

$$\Phi = - \mathfrak{D} \psi,$$

la funzione Φ verificherà l'equazione $\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x_1} = 0$, e si avrà $\mathfrak{D} \varphi = \Phi$; perciò come si vede è necessario e sufficiente dimostrare che, supposta verificata l'equazione :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad (7)$$

esiste sempre una funzione φ che soddisfa alle equazioni :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad (8)$$

$$\mathfrak{D} \varphi = \Phi. \quad (9)$$

7. È facile stabilire una limitazione a cui deve essere assoggettata l'espressione \mathfrak{D} affinché le (8), (9) siano compatibili.

Sia f una funzione di x_1, x_2, \dots, x_n , e consideriamo l'equazione $\mathfrak{D} f = 0$; poniamo poi in quest'equazione $f = e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}$, ove le α sono costanti, si otterrà, riducendo, l'equazione :

$$P(\alpha) = \sum_0^m a_{r_1 r_2 \dots r_n} \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \dots \alpha_n^{r_n} = 0, \quad (10)$$

che si chiama *l'equazione caratteristica* dell'equazione proposta $\mathfrak{D} = 0$; come si vede essa si ottiene dalla $\mathfrak{D} = 0$ leggendo invece di

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1^{r_1}}, \frac{\partial r_2}{\partial x_2^{r_2}}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial x_n^{r_n}},$$

rispettivamente :

$$\alpha_1^{r_1}, \alpha_2^{r_2}, \dots, \alpha_n^{r_n}.$$

È chiaro che l'equazione caratteristica di $\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} = 0$ è la derivata, rispetto ad α_1 , della (10).

Sia poi $\mathfrak{D}_1 = 0$ un'altra equazione analoga alla $\mathfrak{D} = 0$, e sia $P_1(\alpha) = 0$ la sua equazione caratteristica; allora possono presentarsi i due casi seguenti :

- 1.° Non esiste nessun polinomio che divida entrambi i polinomi P, P_1 .
- 2.° Esistono polinomi che dividono entrambi i polinomi P, P_1 .

Nel primo caso i polinomi P, P_1 sono primi tra loro, perciò noi diremo che le corrispondenti espressioni $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1$ sono *prime tra loro* (*).

Orbene se le espressioni $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}$ non sono prime tra loro, la proposizione del § precedente non è più vera, in generale.

Infatti, supponiamo ad es., che sia $\mathfrak{D} = \frac{d^2}{dx^2}$; allora le funzioni u, v che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$, sono funzioni lineari di x , e la funzione $U = xu + v$ risulta perciò di 2.º grado in x , mentre invece l'integrale generale dell'equazione $\mathfrak{D}^2 = \frac{d^4}{dx^4} = 0$ è una funzione di 3.º grado in x . Alla stessa conclusione si arriva esaminando le equazioni (7), (8), (9) che ora si riducono alle seguenti:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \Phi,$$

le quali sono incompatibili.

Noi supporremo pertanto che $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}$ siano prime tra loro; il caso in cui questa condizione non è soddisfatta sarà trattato più tardi (§ 16).

8. Indichiamo un procedimento per ottenere una funzione φ che verifichi le (8), (9).

Il metodo che si presenta più naturale è il seguente: Si integri la (8), si otterrà così un'espressione di φ contenente delle funzioni arbitrarie; queste funzioni arbitrarie si dovranno poi determinare in modo che questo valore di φ verifichi pure la (9). Ottenuto dunque l'integrale generale della (8), tutto si riduce a mostrare che si può sempre disporre delle funzioni arbitrarie che vi compariscono, in modo che la (9) risulti soddisfatta.

(*) Sono ad es. espressioni prime tra loro le seguenti:

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

invece le espressioni

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

non sono prime tra loro, perchè hanno a comune l'espressione $\frac{\partial}{\partial x}$.

Però questo procedimento non può applicarsi in generale, perchè, salvo in casi particolari, non si conosce la natura dell'integrale generale della (8). Ora appunto ci limiteremo a considerare alcune forme di \mathfrak{D} per le quali si possa ottenere facilmente l'integrale generale della (8); nel cap. seguente, considerando il caso di due sole variabili, mostreremo con un metodo affatto diverso che esiste sempre una funzione φ che soddisfa alle (8), (9).

A) Sia

$$\mathfrak{D} = \frac{a_0}{m+1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m+1}} + \frac{a_1}{m} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} + \dots + a_m \frac{\partial}{\partial x_1} + P \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

ove le a sono costanti, e P è un polinomio in $\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, a coefficienti costanti.

La (8) diventa:

$$\frac{\partial \mathfrak{D} \varphi}{\partial x_1} = a_0 \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial x_1^{m-1}} + \dots + a_m \varphi = 0, \quad (8')$$

di cui è assai facile trovare l'integrale generale. L'equazione caratteristica di essa è

$$a_0 \alpha_1^m + a_1 \alpha_1^{m-1} + \dots + a_m = 0;$$

supponiamo, per maggior generalità, che essa abbia radici multiple; sia ad es. α' una sua radice multipla d'ordine r , e siano $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_m$ le altre sue radici, che supporremo semplici; allora l'integrale generale dell'equazione (8') è:

$$\varphi = e^{\alpha' x_1} (f_1 + x_1 f_2 + \dots + x_1^{r-1} f_r) + e^{\alpha_{r+1} x_1} f_{r+1} + \dots + e^{\alpha_m x_1} f_m,$$

ove f_1, f_2, \dots, f_m sono funzioni arbitrarie di x_2, x_3, \dots, x_n .

Poichè la funzione Φ soddisfa all'equazione (7), cioè $\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x_1} = 0$, avremo:

$$\Phi = e^{\alpha' x_1} (F_1 + x_1 F_2 + \dots + x_1^{r-1} F_r) + e^{\alpha_{r+1} x_1} F_{r+1} + \dots + e^{\alpha_m x_1} F_m,$$

le F essendo funzioni ben determinate di x_2, x_3, \dots, x_n .

Ciò posto, si ha, applicando la (14) § 3:

$$\mathfrak{D} \varphi = e^{\alpha' x_1} [\mathfrak{D}_1 f_1 + \mathfrak{D}_1 (x_1 f_2) + \dots + \mathfrak{D}_1 (x_1^{r-1} f_r)] + e^{\alpha_{r+1} x_1} \mathfrak{D}_{r+1} f_{r+1} + \dots + e^{\alpha_m x_1} \mathfrak{D}_m f_m,$$

in cui $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_{r+1}, \dots, \mathfrak{D}_m$ sono espressioni analoghe a \mathfrak{D} .

Ricordando la (12) § 3 si può ancora scrivere :

$$\mathfrak{D} \varphi = e^{\sigma' x_1} \left[\mathfrak{D}_1 f + \left(x_1 + \frac{\delta}{\partial x_1} \right) \mathfrak{D}_1 f_2 + \dots + \left(x_1 + \frac{\delta}{\partial x_1} \right)^{r-1} \mathfrak{D}_1 f_r \right] + e^{\sigma' x_1} \mathfrak{D}_{r+1} f_{r+1} + \dots + e^{\sigma' x_1} \mathfrak{D}_m f_m .$$

Sviluppando le potenze indicate di $\left(x_1 + \frac{\delta}{\partial x_1} \right)$, poi sostituendo nella (9), vale a dire confrontando le espressioni ottenute per $\mathfrak{D} \varphi$ e Φ si ottengono le equazioni :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_1 f_1 + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 f_2}{\partial x_1} + \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 f_3}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\delta^{r-1} \mathfrak{D}_1 f_r}{\partial x_1^{r-1}} &= F_1 \\ \mathfrak{D}_1 f_2 + 2 \frac{\delta \mathfrak{D}_1 f_3}{\partial x_1} + \dots + (r-1) \frac{\delta^{r-2} \mathfrak{D}_1 f_r}{\partial x_1^{r-2}} &= F_2 \\ \mathfrak{D}_1 f_3 + \dots + \binom{r-1}{2} \frac{\delta^{r-3} \mathfrak{D}_1 f_r}{\partial x_1^{r-3}} &= F_3 \\ \dots & \\ \mathfrak{D}_1 f_{r-1} + (r-1) \frac{\delta \mathfrak{D}_1 f_r}{\partial x_1} &= F_{r-1} \\ \mathfrak{D}_1 f_r &= F_r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\mathfrak{D}_{r+1} f_{r+1} = F_{r+1}, \dots, \mathfrak{D}_m f_m = F_m ; \quad (12)$$

dall'ultima delle (11) si può ricavare f_r , dalla penultima si avrà poi f_{r-1} e così via, infine la prima fornirà f_1 ; dalle (12) si ottengono f_{r+1}, \dots, f_m .

B) Supponiamo che

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{m+1} \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n+1}}{\partial x_1^{m_1+1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} + P \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) .$$

La (8) può scriversi, in questo caso :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \varphi}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} = 0,$$

onde :

$$\varphi = \sum_1^{m_1} x_1^{i-1} f_{1i} + \sum_1^{m_2} x_2^{i-1} f_{2i} + \dots + \sum_1^{m_n} x_n^{i-1} f_{ni},$$

ove le $f_{j,i}$ sono funzioni arbitrarie di tutte le variabili salvo x_j .

Poichè la funzione Φ soddisfa all'equazione $\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x_1} = 0$, avremo analogamente :

$$\Phi = \sum_1^{m_1} x_1^{i-1} F_{1i} + \sum_1^{m_2} x_2^{i-1} F_{2i} + \dots + \sum_1^{m_n} x_n^{i-1} F_{ni},$$

le F_{ji} essendo funzioni date di tutte le variabili salvo x_j .

Si avrà applicando la (13) § 3 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \varphi = \sum_1^{m_1} \left(x_1 + \frac{\delta}{\partial x_1} \right)^{i-1} \mathfrak{D} f_{1i} + \sum_1^{m_2} \left(x_2 + \frac{\delta}{\partial x_2} \right)^{i-1} \mathfrak{D} f_{2i} + \dots \\ \dots + \sum_1^{m_n} \left(x_n + \frac{\delta}{\partial x_n} \right)^{i-1} \mathfrak{D} f_{ni}, \end{aligned}$$

sviluppando ed osservando che dall'espressione di \mathfrak{D} risulta :

$$\frac{\delta^{r-1} \mathfrak{D} f_{1r}}{\partial x_1^{r-1}} = 0, \quad (r = 2, 3, \dots, m_1),$$

si può scrivere :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \varphi = \sum_1^{m_1} x_1^{i-1} \mathfrak{D} f_{1i} + \sum_1^{m_2} \sum_0^{i-1} \binom{i-1}{j} x_2^j \frac{\delta^{i-j-1} \mathfrak{D} f_{2i}}{\partial x_2^{i-j-1}} + \\ + \sum_1^{m_3} \sum_0^{i-1} \binom{i-1}{j} x_3^j \frac{\delta^{i-j-1} \mathfrak{D} f_{3i}}{\partial x_3^{i-j-1}} + \dots + \sum_1^{m_n} \sum_0^{i-1} \binom{i-1}{j} x_n^j \frac{\delta^{i-j-1} \mathfrak{D} f_{ni}}{\partial x_n^{i-j-1}}. \end{aligned}$$

Confrontando coll'espressione di Φ abbiamo le equazioni :

$$\mathfrak{D} f_{1i} = F_{1i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_1) \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{m_2} \frac{\delta^{i-1} \mathfrak{D} f_{2i}}{\partial x_2^{i-1}} = F_{21}, \quad \sum_2^{m_2} (i-1) \frac{\delta^{i-2} \mathfrak{D} f_{2i}}{\partial x_2^{i-2}} = F_{22}, \\ \sum_3^{m_2} \binom{i-1}{2} \frac{\delta^{i-3} \mathfrak{D} f_{2i}}{\partial x_2^{i-2}} = F_{23}, \dots, \\ \mathfrak{D} f_{2, m_2-1} + (m_2 - 1) \frac{\delta \mathfrak{D} f_{2, m_2}}{\partial x_2} = F_{2, m_2-1}, \quad \mathfrak{D} f_{2, m_2} = F_{2, m_2} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

ed altri $n - 2$ sistemi analoghi hanno luogo per le funzioni $f_{3i}, f_{4i}, \dots, f_{ni}$.

Ciò posto, dalle (13) si possono ricavare le funzioni f_{1i} ; dall'ultima delle (14) si può ottenere f_{2, m_2} , dalla penultima si ha poi f_{2, m_2-1} , e così di seguito, infine la prima fornirà f_{21} . In modo analogo si otterranno le funzioni $f_{3i}, f_{4i}, \dots, f_{ni}$.

C) Assumiamo \mathfrak{D} sotto la forma :

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - a_n \right) + P \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

le a essendo quantità costanti.

La (8) diventa :

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - a_n \right) \varphi = 0,$$

che si integra assai facilmente e porge :

$$\varphi = e^{a_1 x_1} f_1 + e^{a_2 x_2} f_2 + \dots + e^{a_n x_n} f_n,$$

le f_i essendo funzioni arbitrarie di tutte le variabili eccetto x_i .

La funzione Φ che soddisfa all'equazione $\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x_1} = 0$, sarà data analogamente da :

$$\Phi = e^{a_1 x_1} F_1 + e^{a_2 x_2} F_2 + \dots + e^{a_n x_n} F_n,$$

in cui F_i indica una funzione nota di tutte le variabili eccetto x_i .

Applicando la (14) § 3 si ha :

$$\mathfrak{D} \varphi = e^{a_1 x_1} \mathfrak{D}_1 f_1 + e^{a_2 x_2} \mathfrak{D}_2 f_2 + \dots + e^{a_n x_n} \mathfrak{D}_n f_n,$$

le \mathfrak{D}_i essendo espressioni analoghe a \mathfrak{D} . Confrontando coll'espressione di φ si ottengono le equazioni :

$$\mathfrak{D}_i f_i = F_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che permettono di determinare le funzioni f_i .

In modo analogo si potrebbe procedere se fosse :

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \right)^{m_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - a_n \right)^{m_n}.$$

Si potrebbero moltiplicare gli esempi di espressioni \mathfrak{D} per le quali le (8), (9) risultano fra loro compatibili.

Si può dire che per ogni espressione \mathfrak{D} , tale che si conosca l'integrale generale della (8), il metodo precedente di dimostrazione permette di riconoscere che le (8), (9) ammettono soluzioni comuni.

III.

SOLUZIONI COMUNI A DUE EQUAZIONI LINEARI, A COEFFICIENTI COSTANTI,
CON 2 VARIABILI INDIPENDENTI.

9. Ora mostreremo, nel caso di due variabili indipendenti, con un procedimento fondato solo su operazioni algebriche e di derivazione, che le (8), (9) hanno sempre soluzioni comuni; anzi dedurremo questa proprietà come caso particolare di un'altra assai più generale.

Sia Φ una funzione di x, y e consideriamo le equazioni lineari:

$$\mathfrak{D}_1 z \equiv \sum_0^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = \Phi \quad (*) \quad (1)$$

$$\mathfrak{D}_2 z \equiv \sum_0^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \quad (2)$$

ove le a, a' sono coefficienti costanti, e z è una funzione incognita di x, y .

Supponiamo poi dapprima che le espressioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ siano prime tra loro; allora io dico che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le (1), (2) abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione:

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = \sum_0^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} \Phi}{\partial x^i \partial y^j} = 0. \quad (3)$$

È facile vedere che tale condizione è necessaria. Infatti si ha dalla (1):

$$\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 z = \mathfrak{D}_2 \Phi = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 z,$$

onde, per la (2):

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0,$$

come si era asserito.

(*) Scrivendo \sum_0^m intendiamo che ad i, j bisogna dare quei valori (interi e positivi o nulli) la cui somma è $\leq m$; quando scriveremo $\sum_0^m a'_{ij}$ intenderemo di dare ad i, j solo i valori (interi e positivi o nulli) la cui somma vale m .

10. Mostriamo ora che quella condizione è pure sufficiente.

Il procedimento che applicheremo per stabilire questa proprietà può schematicamente compendiarsi come segue :

1.° faremo vedere che le equazioni proposte permettono di definire *tutte* le derivate della funzione incognita, a partire da un certo ordine, in funzione di elementi noti e delle derivate d'ordine anteriore ;

2.° mostreremo che le espressioni così ottenute sono effettivamente le derivate di una certa funzione, la quale risulta poi determinata a meno di un certo numero di costanti arbitrarie.

Prendiamo perciò le derivate parziali successive dei primi $n - 1$ ordini della (1), e dei primi $m - 1$ ordini della (2); otteniamo così le equazioni :

$$\begin{aligned} \sum_0^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} &= \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, & (h + k \leq n - 2), \\ \sum_0^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} &= 0, & (h + k \leq m - 2), \\ \sum_0^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j+n-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} &= \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, & (h + k = n - 1), \\ \sum_0^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+m-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} &= 0, & (h + k = m - 1); \end{aligned}$$

ponendo, per brevità :

$$\begin{aligned} p_{r,s} &= \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}, & (r + s \leq m + n - 2) \\ \varphi_{r,s} &= \frac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^r \partial y^s}, & (r + s = m + n - 1), \end{aligned}$$

possiamo scrivere :

$$\sum_0^m a_{ij} p_{i+h,j+k} = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h + k \leq n - 2) \quad (4)$$

$$\sum_0^n a'_{ij} p_{i+h,j+k} = 0, \quad (h + k \leq m - 2) \quad (5)$$

$$\sum_0^m a_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} a_{ij} p_{i+h,j+k} = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h + k = n - 1) \quad (6)$$

$$\sum_0^n a'_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1} a'_{ij} p_{i+h,j+k} = 0, \quad (h + k = m - 1). \quad (7)$$

Le equazioni (6), (7) sono $n + m$ in tutto e sono di ordine $m + n - 1$, onde supposto diverso da zero il determinante d'ordine $n + m$ formato coi coefficienti delle funzioni φ , che è

$$A = \begin{vmatrix} a_{m0} & a_{m-1,1} & \dots & a_{0m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{m0} & \dots & a_{1,m-1} & a_{0m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m0} & a_{1,m-1} & \dots & a_{0m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m0} & \dots & a_{1,m-1} & a_{0m} \\ a'_{n0} & a'_{1,n-1} & \dots & a'_{0n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a'_{n0} & \dots & a'_{1,n-1} & a'_{0n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{n0} & a'_{1,n-1} & \dots & a'_{0n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{n0} & \dots & a'_{1,n-1} & a'_{0n} \end{vmatrix}$$

esse determinano le $m + n$ derivate d'ordine $m + n - 1$ della funzione z in funzione delle derivate d'ordine inferiore, cioè determinano le φ in funzione delle p .

11. Ciò posto, è chiaro che basta determinare le $p_{r,s}$ in modo che siano soddisfatte le equazioni ai differenziali totali:

$$\left. \begin{aligned} d p_{r,s} &= p_{r+1,s} dx + p_{r,s+1} dy, & (r + s \leq m + n - 3) \\ d p_{r,s} &= \varphi_{r+1,s} dx + \varphi_{r,s+1} dy, & (r + s = m + n - 2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Indichiamo poi con f una funzione di x, y e delle $p_{r,s}$ (queste quantità essendo ora riguardate come variabili indipendenti) e consideriamo le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} Xf &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^{m+n-3} p_{r+1,s} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_0^{m+n-2} \varphi_{r+1,s} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0 \\ Yf &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_0^{m+n-3} p_{r,s+1} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_0^{m+n-2} \varphi_{r,s+1} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Allora in virtù di una nota proprietà (*) affinché il sistema (8) sia in-

(*) Cfr. ad es. JORDAN, *Cours d'Analyse*; II édition, tome III, § 4 (Paris, a. 1896).

tegrabile è necessario e sufficiente che il sistema (9) sia Jacobiano, cioè che sia identicamente :

$$X(Yf) - Y(Xf) = 0.$$

Ora, ricordando che se

$$X\varphi = \sum_1^m X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \quad Y\varphi = \sum_1^m Y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

si ha

$$X(Y\varphi) - Y(X\varphi) = \sum_1^m [X(Y_i) - Y(X_i)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

avremo :

$$\begin{aligned} X(Yf) - Y(Xf) &= \sum_0^{m+n-3} (X p_{r,s+1} - Y p_{r+1,s}) \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \\ &+ \sum_0^{m+n-2} (X \varphi_{r,s+1} - Y \varphi_{r+1,s}) \frac{\partial f}{\partial p_{rs}}; \end{aligned}$$

osservando che dalle (9) si deduce :

$$X p_{r,s+1} = p_{r+1,s+1} = Y p_{r+1,s},$$

rimane

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_0^{m+n-2} (X \varphi_{r,s+1} - Y \varphi_{r+1,s}) \frac{\partial f}{\partial p_{rs}};$$

dovrà dunque essere identicamente :

$$X \varphi_{r,s+1} - Y \varphi_{r+1,s} = 0, \quad (r + s = m + n - 2). \quad (10)$$

Queste equazioni sono in tutto $m + n - 1$; giova però notare che esse non sono tutte indipendenti, perchè ora mostreremo che se è soddisfatta una di esse, lo saranno pure tutte le altre.

Infatti prendendo l' X e l' Y di ambo i membri delle (6), (7) otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^m a_{ij} X \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} a_{ij} \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_0^m a_{ij} p_{i+h+1,j+k} = \\ = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h+1} \partial y^k}, \quad (h + k = n - 1) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^m a_{ij} Y \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} a_{ij} \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_0^{m-2} a_{ij} p_{i+h,j+k+1} = \\ = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^h \partial y^{k+1}}, \quad (h + k = n - 1) \end{aligned} \right\} \quad (6'')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^n a'_{ij} X_{\varphi_{i+h,j+k}} + \sum_0^{n-1} a'_{ij} \varphi_{i+h+1,j+k} + \\ + \sum_0^{n-2} a'_{ij} p_{i+h+1,j+k} = 0, \quad (h+k = m-1) \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^n a'_{ij} Y_{\varphi_{i+h,j+k}} + \sum_0^{n-1} a'_{ij} \varphi_{i+h,j+k+1} + \\ + \sum_0^{n-2} a'_{ij} p_{i+h,j+k+1} = 0, \quad (h+k = m-1). \end{aligned} \right\} \quad (7'')$$

Dalle (6'), (6'') si ha sottraendo:

$$\sum_0^m a_{ij} (X_{\varphi_{i+h,j+k+1}} - Y_{\varphi_{i+h+1,j+k}}) = 0, \quad (h+k = n-2) \quad (6.)$$

e, dalle (7'), (7''):

$$\sum_0^n a'_{ij} (X_{\varphi_{i+h,j,k+1}} - Y_{\varphi_{i+h+1,j+k}}) = 0, \quad (h+k = m-2); \quad (7.)$$

onde le $m+n-1$ incognite $X_{\varphi_{r,s+1}} - Y_{\varphi_{r+1,s}}$ sono legate dalle $m+n-2$ equazioni (6.), (7.), che sono lineari ed omogenee; inoltre la matrice dei coefficienti si ottiene, come si riconosce subito, dal determinante A sopprimendo l'ultima verticale e l'ultima orizzontale, e poi ancora l'orizzontale corrispondente all'ultima delle (6) (cioè quella che si ottiene per $h=0$); tale matrice consta quindi di $m+n-1$ verticali ed $m+n-2$ orizzontali, ed i determinanti di ordine $m+n-2$ estratti da quella matrice non possono essere tutti nulli, altrimenti sarebbe pure nullo A , ciò che si è escluso; risolvendo quindi le (6.), (7.) rispetto ad $m+n-2$ incognite i cui coefficienti costituiscano uno di questi determinanti non nulli, avremo queste incognite espresse come funzioni lineari ed omogenee della rimanente, onde se questa è nulla, sono pure nulle tutte le altre $m+n-2$; e ciò prova il nostro asserto.

12. Ora mostreremo che dalle (10) si deduce la (3), e viceversa.

Infatti dalle (6'), dall'ultima delle (6'') (cioè quella corrispondente ad $h=0$) e dalle (6), (4) si ricava:

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} a'_{n-k,k} \left(\sum_0^m a_{ij} X_{\varphi_{i+n-1-k,j+k}} + \sum_0^{m-1} a_{ij} \varphi_{i+n-k,j+k} + \sum_0^{m-2} a_{ij} p_{i+n-k,j+k} \right) + \\ + a'_{0n} \left(\sum_0^m a_{ij} Y_{\varphi_{i,j+n-1}} + \sum_0^{m-1} a_{ij} \varphi_{i,j+n} + \sum_0^{m-2} a_{ij} p_{i,j+n} \right) + \\ + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \left(\sum_0^m a_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} a_{ij} p_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-2} a_{ij} p_{i+h,j-k} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} \left(\sum_0^m ij a_{ij} p_{i+h, j+k} + \sum_0^{m-1} ij a_{ij} p_{i+h, j+k} + \sum_0^{m-2} ij a_{ij} p_{i+h, j+k} \right) = \\
 & = \sum_0^{n-1} a'_{n-k, k} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + a'_{on} \frac{\partial^n \Phi}{\partial y^n} + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k},
 \end{aligned}$$

che può scriversi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_0^m ij a_{ij} \left[\sum_0^{n-1} a'_{n-k, k} X \varphi_{i+n-1-k, j+k} + a'_{on} Y \varphi_{i, j+n-1} + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} p_{i+h, j+k} \right] + \\
 & + \sum_0^{m-1} ij a_{ij} \left(\sum_0^n h k a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} p_{i+h, j+k} \right) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \sum_0^{m-2} ij a_{ij} \left(\sum_0^n h k a'_{hk} p_{i+h, j+k} \right) = \sum_0^n h k a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k},
 \end{aligned}$$

ora, in virtù delle (5), (7) le espressioni entro le (...) sono entrambe nulle, quindi rimane:

$$\begin{aligned}
 & \sum_0^m ij a_{ij} \left[\sum_0^{n-1} a'_{n-k, k} X \varphi_{i+n-1-k, j+k} + a'_{on} Y \varphi_{i, j+n-1} + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} p_{i+h, j+k} \right] = \mathcal{D}_2 \Phi. \quad \left. \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Ora osserviamo che se nelle (7') al posto di h si legge $h-1$ e si permutano h, k con i, j si ha:

$$\begin{aligned}
 & \sum_0^n h k a'_{hk} X \varphi_{i+h-1, j+k} + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} p_{i+h, j+k} = 0, \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, m; \quad i + j = m);
 \end{aligned}$$

dall'ultima delle (7'') (cioè quella corrispondente ad $h=0$) permutando h, k con i, j si ottiene:

$$\sum_0^n h k a'_{hk} Y \varphi_{h, m+k-1} + \sum_0^{n-1} h k a'_{hk} \varphi_{h, m+k} + \sum_0^{n-2} h k a'_{hk} p_{h, m+k} = 0.$$

Sostituendo nella (11) e riducendo, si deduce:

$$\begin{aligned}
 & - a'_{on} \sum_0^{m-1} a_{m-h, k} (X \varphi_{m-k-1, n+k} - Y \varphi_{m-k, n+k-1}) + \\
 & + a_{om} \sum_0^{n-1} a'_{n-k, k} (X \varphi_{n-k-1, m+k} - Y \varphi_{n-k, m+k-1}) = \mathcal{D}_2 \Phi. \quad \left. \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Ora, se le (10) sono soddisfatte, le quantità entro le (...) sono nulle e così otteniamo le (3). Inversamente, se la (3) è soddisfatta, l'equazione precedente unita alle (6₁), (7₁) dà un sistema di $m + n - 1$ equazioni lineari ed omogenee fra le $m + n - 1$ incognite $X_{\varphi_r, s+1} - Y_{\varphi_{r+1}, s}$, e siccome il determinante dei coefficienti, a meno del segno, vale A (*), il quale è stato supposto diverso da zero, devono necessariamente esser nulle tutte le incognite, e così otteniamo le (10).

(*) Ciò si verifica assai facilmente; per maggior chiarezza, consideriamo il caso di $m = 3, n = 2$; allora

$$A = \begin{vmatrix} a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} \\ a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} \end{vmatrix},$$

ed il determinante delle (6₁), (12), (7₁) è

$$\begin{vmatrix} a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} \\ 0 & -a'_{02} a_{30} & a'_{02} a_{21} + a_{03} a'_{20} & -a'_{02} a_{12} + a_{03} a'_{11} \\ a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 \\ 0 & a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} \end{vmatrix},$$

orlandolo con una verticale ed una orizzontale può ancora scriversi:

$$\begin{vmatrix} a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & -a'_{02} a_{30} & -a'_{02} a_{21} + a_{03} a'_{20} & -a'_{02} a_{12} + a_{03} a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{20} & a'_{11} & 1 \end{vmatrix},$$

sottraendo dalla seconda orizzontale l'ultima moltiplicata per a_{03} , esso diventa:

$$\begin{vmatrix} a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & -a'_{02} a_{30} & -a'_{02} a_{21} & -a'_{02} a_{12} & -a_{03} \\ a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{20} & a'_{11} & a'_{02} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{20} & a'_{11} & 1 \end{vmatrix};$$

dividendo infine la seconda orizzontale per $-a'_{02}$ e moltiplicando l'ultima verticale per a'_{02} si ha appunto A .

In tal modo il nostro teorema è completamente dimostrato.

Abbiamo supposto che il determinante A fosse diverso da zero; però il teorema, in generale, continua ancora a sussistere anche se $A = 0$ (*).

Se, in particolare, si suppone:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x},$$

le equazioni (1), (2), (3) si riducono rispettivamente alle (9), (8), (7) § 6; onde così è provato che, nel caso di due variabili, esiste sempre almeno una funzione φ che soddisfa alle (8), (9) § 6, e perciò il teorema del § 6 risulta dimostrato.

Si potrebbe anzi dimostrare che ogni funzione U che verifichi l'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$ può, in generale, porsi sotto la forma: $U = a_{xx} u + v$, ove a_{xx} è una funzione lineare di x, y ed u, v sono funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$.

13. Supponiamo che le espressioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ non siano prime tra loro; siano cioè della forma:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}' \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'' \mathfrak{D},$$

ove $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ sono espressioni prime tra loro.

Le (1), (2) diventano allora:

$$\mathfrak{D}' \mathfrak{D} z = \Phi, \quad \mathfrak{D}'' \mathfrak{D} z = 0; \tag{1'}$$

orbene la condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni precedenti abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione

$$\mathfrak{D}'' \Phi = 0.$$

Infatti, posto $Z = \mathfrak{D} z$, le equazioni (1') possono scriversi:

$$\mathfrak{D}' Z = \Phi, \quad \mathfrak{D}'' Z = 0,$$

(*) Infatti sia ad es.

$$\mathfrak{D}_1 z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z \equiv \frac{\partial z}{\partial x} - z = 0,$$

si ha evidentemente $A = 0$; integrando la seconda si ha: $z = e^x f(y)$, f essendo una funzione arbitraria di y ; la funzione Φ poi è della forma: $\Phi = e^x F(y)$; e poiché $\mathfrak{D}_1 z = e^x \frac{df}{dy} = \Phi$, si conclude $\frac{df}{dy} = F(y)$, da cui si può ricavare la funzione f .

e, pel teorema del § 9, si conclude che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni precedenti abbiano soluzioni comuni è appunto $\mathfrak{D}'' \Phi = 0$, come avevamo enunciato.

14. Se le espressioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ sono prime tra loro, si può dimostrare che se la funzione Φ soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_2 \Phi = 0$, esiste sempre una funzione z che verifica le equazioni:

$$\mathfrak{D}_1^p z = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z = 0.$$

Infatti, pel teorema del § 9, si ha che se $\mathfrak{D}_2 \Phi = 0$ esiste sempre una funzione z_1 , che soddisfa alle equazioni:

$$\mathfrak{D}_1 z_1 = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z_1 = 0;$$

per la stessa ragione, esisterà pure una funzione z_2 che soddisfa a queste altre:

$$\mathfrak{D}_1 z_2 = z_1, \quad \mathfrak{D}_2 z_2 = 0,$$

e quindi anche alle seguenti:

$$\mathfrak{D}_1^2 z_2 = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z_2 = 0;$$

analogamente si deduce che esisterà una funzione z_3 che verificherà le equazioni:

$$\mathfrak{D}_1^3 z_3 = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z_3 = 0,$$

e così via; onde il teorema è dimostrato.

IV.

INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $\mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q = 0$.

15. Vediamo alcune applicazioni dei teoremi del cap. precedente; considereremo, come dianzi, il caso di due variabili indipendenti x, y .

Supponiamo, al solito, che le espressioni $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ siano prime tra loro.

Allora si ha:

Ogni funzione U che verifica l'equazione $\mathfrak{D}^{p+1} U = 0$ può sempre rappresentarsi mediante $p+1$ funzioni u_1, u_2, \dots, u_{p+1} che verificano l'equa-

zione $\mathfrak{D} = 0$, per mezzo della formola (*):

$$U = x^p u_1 + x^{p-1} u_2 + \dots + x u_p + u_{p+1}.$$

Infatti poniamo:

$$U = x^p u_1 + U_1,$$

ove u_1, U_1 sono funzioni da determinarsi; avremo, ricordando la (13, § 3:

$$\mathfrak{D}^p U = \left[\left(x + \frac{\delta}{\partial x} \right)^p \mathfrak{D}^p \right] u_1 + \mathfrak{D}^p U_1;$$

supponiamo ora che la funzione u_1 verifichi l'equazione $\mathfrak{D} u_1 = 0$, allora è facile vedere che il primo termine del secondo membro si riduce a

$$p! \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^p u_1,$$

in modo che si può scrivere:

$$\mathfrak{D}^p U = p! \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^p u_1 + \mathfrak{D}^p U_1;$$

se ora si assoggetta ancora la funzione u_1 a soddisfare all'equazione

$$p! \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^p u_1 = \mathfrak{D}^p U$$

risulterà:

$$\mathfrak{D}^p U_1 = 0.$$

Ponendo:

$$\Phi = \frac{1}{p!} \mathfrak{D}^p U,$$

e osservando che $\mathfrak{D}^{p+1} U = 0$, si conclude: $\mathfrak{D} \Phi = 0$; dovremo pertanto determinare la funzione u_1 in modo che siano soddisfatte le equazioni:

$$\left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^p u_1 = \Phi, \quad \mathfrak{D} u_1 = 0, \quad (\mathfrak{D} \Phi = 0),$$

il che, pel teorema del § 14, è sempre possibile.

Consideriamo ora la funzione U_1 che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^p U_1 = 0$;

(*) Se l'equazione $\mathfrak{D} = 0$ si riduce all'equazione di LAPLACE $\Delta^2 = 0$, questo teorema è del prof. ALMANSI; cfr. ALMANSI, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$* . (Annali di Matematica; serie III, tom. II, a. 1898.)

potremo porre, analogamente a quanto si fece per la funzione U :

$$U_1 = x^{p-1} u_2 + U_2,$$

onde:

$$U = x^p u_1 + x^{p-1} u_2 + U_2,$$

e troveremo che, assoggettando la funzione u_2 a soddisfare alle equazioni:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x}\right)^{p-1} u_2 = \Phi_1, \quad \mathfrak{D} u_2 = 0, \quad \left(\Phi_1 = \frac{1}{(p-1)!} \mathfrak{D}^{p-1} U_1; \quad \mathfrak{D} \Phi_1 = 0\right),$$

il che, come sappiamo, è sempre possibile, risulterà:

$$\mathfrak{D}^{p-1} U_2 = 0.$$

Si porrà perciò analogamente:

$$U_2 = x^{p-2} u_3 + U_3$$

e risulterà:

$$U = x^p u_1 + x^{p-1} u_2 + x^{p-2} u_3 + U_3,$$

e così via; infine si avrà:

$$U = x^p u_1 + x^{p-1} u_2 + \dots + x u_p + u_{p+1},$$

e le funzioni u_i verificheranno l'equazione $\mathfrak{D} = 0$; così il teorema è dimostrato.

Con analogo procedimento si può dimostrare che la funzione U può, in generale, anche porsi sotto la forma:

$$U = P_p u_1 + P_{p-1} u_2 + \dots + P_1 u_p + u_{p+1},$$

P_i essendo un polinomio di grado i in x, y .

16. Supponiamo che l'espressione \mathfrak{D} sia il prodotto di due altre espressioni lineari $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, prime tra loro, cioè: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$.

Allora si può dimostrare che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} U = 0$ può esprimersi colla formola:

$$U = U' + U'',$$

ove U', U'' sono funzioni che soddisfano alle equazioni $\mathfrak{D}_1 U' = 0, \mathfrak{D}_2 U'' = 0$.

Infatti, ragionando come a § 6, basta dimostrare che, data la funzione U si può sempre determinare una funzione U'' che soddisfa alle equazioni:

$$\mathfrak{D}_1 (U - U'') = 0, \quad \mathfrak{D}_2 U'' = 0,$$

che possiamo scrivere, posto $\Phi = \mathfrak{D}_1 U$:

$$\mathfrak{D}_1 U'' = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 U'' = 0;$$

ora, poichè la funzione Φ soddisfa evidentemente all'equazione $\mathfrak{D}_2 \Phi = 0$, in virtù del teorema del § 9 tale funzione U'' esiste sempre, e così il teorema è dimostrato.

La proposizione precedente può estendersi evidentemente al caso in cui \mathfrak{D} è prodotto di quante si vogliono espressioni lineari, prime tra loro a due a due.

Consideriamo ora un'espressione \mathfrak{D} della forma:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q,$$

ove $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ sono espressioni lineari prime tra loro, ed inoltre sono pure prime tra loro $\mathfrak{D}_1, \frac{\delta \mathfrak{D}_1}{\partial x}$, ed $\mathfrak{D}_2, \frac{\delta \mathfrak{D}_2}{\partial x}$. Sia poi U una funzione che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} U = 0$; pel teorema precedente si può porre:

$$U = U' + U'',$$

U', U'' essendo funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1^p U' = 0, \mathfrak{D}_2^q U'' = 0$.

Applicando il teorema del § precedente, abbiamo che la funzione U' può esprimersi colla formola:

$$U' = x^{p-1} u'_1 + x^{p-2} u'_2 + \dots + x u'_{p-1} + u'_p,$$

le u'_i essendo funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D}_1 = 0$.

Similmente si può porre:

$$U'' = x^{q-1} u''_1 + x^{q-2} u''_2 + \dots + x u''_{q-1} + u''_q, \quad (\mathfrak{D}_2 u''_i = 0).$$

Abbiamo così espresso la funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q U = 0$ per mezzo di funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1 = 0, \mathfrak{D}_2 = 0$.

Analogo risultato vale per un'espressione \mathfrak{D} della forma:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1^{p_1} \mathfrak{D}_2^{p_2} \dots \mathfrak{D}_r^{p_r}.$$

È chiaro che nel caso ora considerato rientra quello escluso nel § 7, cioè il caso in cui $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ non sono prime tra loro.

Per quanto precede possiamo concludere:

Se l'espressione \mathfrak{D} è decomponibile nel prodotto di altre espressioni li-

neari, l'integrale generale dell'equazione $\mathfrak{D} = 0$ può esprimersi mediante gli integrali di altre equazioni più semplici.

17. Il teorema del § 6 permette di esprimere p funzioni che verificano l'equazione $\mathfrak{D}^2 = 0$ mediante $2p$ funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$. Esiste però un caso particolare in cui questo numero può ridursi a $p + 1$.

Supponiamo perciò, al solito, che \mathfrak{D} , $\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ siano prime fra loro, e siano poi $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_p$ delle espressioni analoghe a \mathfrak{D} , ed U_1, U_2, \dots, U_p funzioni tali che

$$\mathfrak{D} U_i = \mathfrak{D}_i f, \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

ove f è una funzione che verifica l'equazione $\mathfrak{D} f = 0$.

È chiaro intanto che le funzioni U_i verificheranno l'equazione $\mathfrak{D}^2 = 0$. Orbene, io dico che si può porre:

$$U_i = x \mathfrak{D}_i \varphi + u_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

φ, u_i essendo $p + 1$ funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$.

Infatti, da queste equazioni si ha, ricordando la (10) § 3:

$$\mathfrak{D} U_i = x \mathfrak{D} (\mathfrak{D}_i \varphi) + \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} (\mathfrak{D}_i \varphi) + \mathfrak{D} u_i,$$

che si riduce a

$$\mathfrak{D} U_i = \mathfrak{D}_i \left(\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x} \right);$$

confrontando colla (1) si vede che si può scrivere:

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x} = f + P,$$

P essendo un polinomio che soddisfa alle equazioni $\mathfrak{D}_i P = 0$ (*). Poichè, come risulta dalle (1), le funzioni U_i non mutano aggiungendo ad f il polinomio $-P$, ne segue che si può supporre nella formola precedente $P = 0$;

(*) Se il minimo ordine delle derivate che compariscono nelle \mathfrak{D}_i è ν , P sarà un polinomio di grado $\nu - 1$; in particolare, se in qualcuna delle \mathfrak{D}_i vi sono termini non contenenti derivate, P sarà zero.

vediamo perciò che la funzione φ deve soddisfare alle due equazioni:

$$\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \varphi = f, \quad \mathfrak{T} \varphi = 0,$$

ed essendo $\mathfrak{T} f = 0$, esiste sempre, come sappiamo, tale funzione φ .

Dopo ciò le (2) forniscono le funzioni u_i ; e così la proprietà è dimostrata (*).

V.

EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI VARIABILI.

18. Estenderemo al caso di equazioni lineari a coefficienti variabili, le proprietà stabilite nei §§ precedenti; supporremo dunque che i coefficienti a che figurano nell'espressione (9) § 3 di \mathfrak{T} siano date funzioni di x_1, x_2, \dots, x_n .

Convorrà premettere alcune osservazioni. Indicando con \mathfrak{D}_i un'espressione analoga a \mathfrak{D} , è chiaro che in generale le espressioni \mathfrak{D} , \mathfrak{D}_i non sono commutabili, cioè non si ha:

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i \mathfrak{D},$$

mentre invece ciò accadeva quando i coefficienti erano costanti. Del pari, quando i coefficienti erano costanti, l'espressione \mathfrak{D}^2 , che stava ad indicare $\mathfrak{D} \mathfrak{D}$, poteva pure considerarsi come quadrato simbolico di \mathfrak{D} ; nel caso attuale, invece, la scrittura \mathfrak{D}^2 deve solo ritenersi una abbreviazione di $\mathfrak{T} \mathfrak{D}$; lo stesso dicasi per $\mathfrak{D}^3, \mathfrak{D}^4, \dots$

Ciò premesso, supponiamo che le espressioni $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}$ siano commutabili (**). Allora se si indica con u una funzione che soddisfa all'equazione

(*) Se $\mathfrak{D} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ il teorema precedente è del prof. ALMANSI. Cfr.: ALMANSI, *Sulla deformazione della sfera elastica*. (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino; serie II, tom. XLVII, a. 1897.)

(**) È facile dare esempi di espressioni \mathfrak{D} per cui $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ sono commutabili. Indichiamo infatti con $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ un polinomio in $\frac{\partial}{\partial x_1}$ a coefficienti costanti, e con $P_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$\mathfrak{D} u = 0$, si ha dalla (10) § 3:

$$\mathfrak{D}(x_1 u) = \frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_1},$$

da cui:

$$\mathfrak{D}^2(x_1 u) = \mathfrak{D}\left(\frac{\delta \mathfrak{D} u}{\partial x_1}\right) = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}(\mathfrak{D} u) = 0,$$

la quale mostra che la funzione $x_1 u$ verifica l'equazione $\mathfrak{D}^2 = 0$.

Similmente è facile vedere che se $\mathfrak{D} u = 0$ la funzione $x_1^{q-1} u$ soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^q = 0$.

19. Consideriamo più particolarmente il caso di due variabili indipendenti x, y .

Supponiamo che le espressioni $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ siano commutabili e siano prime tra loro (*); allora si può dimostrare che ogni funzione U che verifichi l'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$ può esprimersi mediante la formola

$$U = x u + v,$$

u, v essendo funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$.

Procedendo come a § 6 si riconosce che basta dimostrare che esiste sempre una funzione φ che soddisfa alle equazioni (8), (9) § 6, cioè:

$$\frac{\delta \mathfrak{D} \varphi}{\partial x} = 0, \quad \mathfrak{D} \varphi = \Phi, \quad (1)$$

ove Φ è una funzione che verifica l'equazione $\frac{\delta \mathfrak{D} \Phi}{\partial x} = 0$.

Questa funzione φ esiste effettivamente, e ciò risulta come caso particolare di un teorema che dimostreremo nel cap. seguente.

un polinomio in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ i cui coefficienti siano funzioni di tutte le variabili salvo x_1 ; allora assumendo:

$$\mathfrak{D} = P \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + P_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad [1]$$

si ha: $\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} = \frac{\delta P}{\partial x_1}$, onde si riconosce subito che $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}$ sono commutabili.

Così ponendo: $\mathfrak{D} = P \cdot P_1$ si ha $\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1} = \frac{\delta P}{\partial x_1} \cdot P_1$, da cui è facile trarre la commutabilità di \mathfrak{D} e $\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x_1}$.

(*) Cioè non abbiano a comune, come fattore, nessuna espressione differenziale lineare.

Si possono ora stabilire agevolmente le proprietà seguenti, analoghe a quelle del cap. IV.

Supponendo come dianzi che $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ siano commutabili e prime tra loro, si può dimostrare che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}^{p+1} U = 0$ può sempre rappresentarsi mediante $p + 1$ funzioni u_1, u_2, \dots, u_{p+1} che verificano l'equazione $\mathfrak{D} = 0$ per mezzo della formola:

$$U = x^p u_1 + x^{p-1} u_2 + \dots + x u_p + u_{p+1} (*).$$

La dimostrazione di questa proprietà è identica a quella esposta a § 15.

Si supponga ora che l'espressione \mathfrak{D} sia decomponibile nel prodotto di due fattori $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ commutabili e primi tra loro. Si può allora dimostrare, come a § 16, che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} U = 0$ può esprimersi colla formola:

$$U = U' + U'',$$

U', U'' essendo funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1 U' = 0, \mathfrak{D}_2 U'' = 0$.

Più in generale, supponiamo che l'espressione \mathfrak{D} possa porsi sotto la forma:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1^{p_1} \mathfrak{D}_2^{p_2} \dots \mathfrak{D}_r^{p_r},$$

ove $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_r$ sono espressioni a due a due commutabili e prime tra loro, ed inoltre sono pure commutabili e prime tra loro le coppie di espressioni: $\mathfrak{D}_1, \frac{\delta \mathfrak{D}_1}{\partial x}; \mathfrak{D}_2, \frac{\delta \mathfrak{D}_2}{\partial x}; \dots; \mathfrak{D}_r, \frac{\delta \mathfrak{D}_r}{\partial x}$. Si può in tal caso dimostrare che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} U = 0$ può rappresentarsi mediante la formola:

$$U = \sum_1^r (x^{p_i-1} u_{i1} + x^{p_i-2} u_{i2} + \dots + x u_{i,p-1} + u_{ip}),$$

le u_{ij} essendo funzioni che soddisfano all'equazione $\mathfrak{D}_i u_{ij} = 0$.

Ragionando come a § 17, e supponendo che $\mathfrak{D}, \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x}$ siano commutabili e prime tra loro, si può dimostrare che se le espressioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_p$ sono

(*) Questa formola sussiste anche se l'espressione \mathfrak{D} essendo ad n variabili indipendenti è della forma [1] considerata nella nota della pag. precedente; perchè in tal caso è facile mostrare, con procedimento analogo a quello del § 8 al. A), che le (1) ammettono soluzioni comuni.

commutabili con \mathfrak{D} e se U_1, U_2, \dots, U_p sono funzioni tali che

$$\mathfrak{D} U_i = \mathfrak{D}_i f, \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

f essendo una funzione che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D} f = 0$, si può porre:

$$U_i = x \mathfrak{D}_i \varphi + u_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

ove le funzioni φ, u_i soddisfano all'equazione $\mathfrak{D} = 0$.

Questo teorema permette di esprimere le p funzioni U_1, U_2, \dots, U_p , che verificano l'equazione $\mathfrak{D}^2 = 0$, mediante sole $p + 1$ funzioni che verificano l'equazione $\mathfrak{D} = 0$, anzichè per mezzo di $2p$ funzioni, come darebbe l'applicazione immediata del primo teorema di questo §.

VI.

SOLUZIONI COMUNI A DUE EQUAZIONI LINEARI, A COEFFICIENTI VARIABILI.

20. Stabiliamo ora le proprietà analoghe a quelle del cap. III.

Indichiamo con Φ una funzione di x, y e consideriamo le equazioni differenziali seguenti, della stessa forma di quelle considerate nel § 9:

$$\mathfrak{D}_1 z \equiv \sum_{ij}^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = \Phi \quad (1)$$

$$\mathfrak{D}_2 z \equiv \sum_{ij}^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \quad (2)$$

ove ora le a, a' sono funzioni date di x, y .

Supponiamo poi che le espressioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ siano prime tra loro e siano commutabili, cioè, indicando con f una funzione di x, y che sia:

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 f = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 f. \quad (\alpha)$$

Allora si ha il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le (1), (2) abbiano solu-

zioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione (*):

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0. \tag{3}$$

Procedendo come a § 9 si vede subito che questa condizione è necessaria.

Mostriamo ora che è anche sufficiente.

Vediamo perciò anzitutto quali relazioni devono sussistere fra i coefficienti a, a' affinché la (a) sia soddisfatta. Applicando la (8) § 2, si ha:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 f = \sum_0^n a'_{ij} \mathfrak{D}_1 \left(a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right) = \sum_0^n a'_{ij} \left\{ \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \mathfrak{D}_1 a'_{ij} + \left(\frac{\partial^{i+j+1} f}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^{i+j+1} f}{\partial x^i \partial y^{j+1}} \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^{i+2} \partial y^j} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^{i+1} \partial y^{j+1}} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^i \partial y^{j+2}} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial y^2} \right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial^{i+j+m} f}{\partial x^{i+m} \partial y^j} \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial x^m} + \right. \\ \left. \left. + m \frac{\partial^{i+j+m} f}{\partial x^{i+m-1} \partial y^{j+1}} \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial x^{m-1} \partial y} + \dots + \frac{\partial^{i+j+m} f}{\partial x^i \partial y^{j+m}} \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{ij}}{\partial y^m} \right) \right\}, \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 f = \sum_0^m a_{ij} \mathfrak{D}_2 \left(a_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right) = \sum_0^m a_{ij} \left\{ \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \mathfrak{D}_2 a_{ij} + \left(\frac{\partial^{i+j+1} f}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^{i+j+1} f}{\partial x^i \partial y^{j+1}} \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^{i+2} \partial y^j} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^{i+1} \partial y^{j+1}} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^{i+j+2} f}{\partial x^i \partial y^{j+2}} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial y^2} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^{i+j+n} f}{\partial x^{i+n} \partial y^j} \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial x^n} + \right. \\ \left. \left. + n \frac{\partial^{i+j+n} f}{\partial x^{i+n-1} \partial y^{j+1}} \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + \frac{\partial^{i+j+n} f}{\partial x^i \partial y^{j+n}} \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{ij}}{\partial y^n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Eguagliando nei secondi membri i coefficienti di

$$f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \dots; \frac{\partial^{m+n-1} f}{\partial x^{m+n-1}}, \dots, \frac{\partial^{m+n-1} f}{\partial y^{m+n-1}}$$

otteniamo i gruppi di equazioni:

$$\mathfrak{D}_1 a'_{00} = \mathfrak{D}_2 a_{00} \tag{a_0}$$

(*) Nel caso di equazioni di 2.° ordine, anche non lineari, la questione è stata trattata dal prof. BIANCHI. Cfr.: BIANCHI, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali di 2.° ordine con due variabili*. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 4.^a, vol. II, 2.° semestre 1886.)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_1 a'_{10} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{00}}{\partial x} &= \mathfrak{D}_2 a_{10} + \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{00}}{\partial x} \\ \mathfrak{D}_1 a'_{01} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{00}}{\partial y} &= \mathfrak{D}_2 a_{01} + \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{00}}{\partial y} \end{aligned} \right\} (\alpha_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_1 a'_{20} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{10}}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{00}}{\partial x^2} &= \mathfrak{D}_2 a_{20} + \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{10}}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{00}}{\partial x^2} \\ \mathfrak{D}_1 a'_{11} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{01}}{\partial x} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{10}}{\partial y} + \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{00}}{\partial x \partial y} &= \mathfrak{D}_2 a_{11} + \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{01}}{\partial x} + \\ &+ \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{10}}{\partial y} + \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{10}}{\partial x \partial y} \\ \mathfrak{D}_1 a'_{02} + \frac{\delta \mathfrak{D}_1 a'_{01}}{\partial y} + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_1 a'_{00}}{\partial y^2} &= \mathfrak{D}_2 a_{02} + \frac{\delta \mathfrak{D}_2 a_{01}}{\partial y} + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \mathfrak{D}_2 a_{00}}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} (\alpha_2)$$

.....

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\delta^{m-1} \mathfrak{D}_1 a'_{n0}}{\partial x^{m-1}} + \frac{1}{m!} \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{n-1,0}}{\partial x^m} &= \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\delta^{n-1} \mathfrak{D}_2 a_{m0}}{\partial x^{n-1}} + \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{m-1,0}}{\partial x^n}, \\ \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\delta^{m-1} \mathfrak{D}_1 a'_{n-1,1}}{\partial x^{m-1}} + (m-1) \frac{\delta^{m-1} \mathfrak{D}_1 a'_{n0}}{\partial x^{m-2} \partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{m!} \left[\frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{n-2,1}}{\partial x^m} + m \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{n-1,0}}{\partial x^{m-1} \partial y} \right] = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\delta^{n-1} \mathfrak{D}_2 a_{m-1,1}}{\partial x^{n-1}} + (n-1) \frac{\delta^{n-1} \mathfrak{D}_2 a_{m0}}{\partial x^{n-2} \partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{n!} \left[\frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{m-2,1}}{\partial x^n} + n \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{m-1,0}}{\partial x^{n-1} \partial y} \right], \end{aligned} \right\} (\alpha_{m+n-1})$$

.....

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\delta^{m-1} \mathfrak{D}_1 a'_{0n}}{\partial y^{m-1}} + \frac{1}{m!} \frac{\delta^m \mathfrak{D}_1 a'_{0,n-1}}{\partial y^m} &= \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\delta^{n-1} \mathfrak{D}_2 a_{0m}}{\partial y^{n-1}} + \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \mathfrak{D}_2 a_{0,m-1}}{\partial y^n}, \end{aligned} \right|$$

che esprimono le relazioni cercate.

21. Ciò posto, operiamo come a § 10; prendiamo cioè le derivate dei primi $n - 1$ ordini della (1) e dei primi $m - 1$ ordini della (2), si ha così:

$$\begin{aligned} & \sum_0^m ij a_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} + \sum_0^m ij \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{i+j+h+k-\alpha} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k}} + \\ & \quad + \sum_0^m ij \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+h+k-\beta} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k-\beta}} + \\ & \quad + \sum_0^m ij \sum_1^h \sum_1^k (\alpha) (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+h+k-\alpha-\beta} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k-\beta}} = \\ & \quad = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h+k \leq n-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_0^n ij a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} + \sum_0^n ij \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a'_{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{i+j+h+k-\alpha} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k}} + \\ & \quad + \sum_0^n ij \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a'_{ij}}{\partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+h+k-\beta} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k-\beta}} + \\ & \quad + \sum_0^n ij \sum_1^h \sum_1^k (\alpha) (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} a'_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+h+k-\alpha-\beta} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k-\beta}} = 0 \\ & \quad (h+k \leq m-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_0^m ij a_{ij} \frac{\partial^{i+j+n-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} + \sum_0^m ij \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{i+j+n-1-\alpha} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k}} + \\ & \quad + \sum_0^m ij \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+n-1-\beta} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k-\beta}} + \\ & \quad + \sum_0^m ij \sum_1^h \sum_1^k (\alpha) (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+n-1-\alpha-\beta} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k-\beta}} = \\ & \quad = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h+k = n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_0^n ij a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+m-1} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k}} + \sum_0^n ij \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a'_{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{i+j+m-1-\alpha} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k}} + \\ & \quad + \sum_0^n ij \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a'_{ij}}{\partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+m-1-\beta} z}{\partial x^{i+h} \partial y^{j+k-\beta}} + \\ & \quad + \sum_0^n ij \sum_1^h \sum_1^k (\alpha) (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} a'_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial^{i+j+m-1-\alpha-\beta} z}{\partial x^{i+h-\alpha} \partial y^{j+k-\beta}} = 0 \\ & \quad (h+k = m-1); \end{aligned}$$

introducendo, come a § 10, le $p_{r,s}$, $\varphi_{r,s}$, abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_0^m a_{ij} p_{i+h,j+k} + \sum_0^m \sum_1^h \sum_1^\sigma \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k} + \\ & + \sum_0^m \sum_1^k \sum_1^\beta \binom{k}{\beta} \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta} + \sum_0^m \sum_1^h \sum_1^\sigma \sum_1^\beta \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\sigma+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\sigma,j+k-\beta} = \end{aligned} \right\} (4)$$

$$= \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h+k \leq n-2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_0^n a'_{ij} p_{i+h,j+k} + \sum_0^n \sum_1^h \sum_1^\alpha \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k} + \\ & + \sum_0^n \sum_1^k \sum_1^\beta \binom{k}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^n \sum_1^h \sum_1^\sigma \sum_1^\beta \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\sigma+\beta} a'_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\sigma,j+k-\beta} = 0, \quad (h+k \leq m-2) \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_0^m a_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} a_{ij} p_{i+h,j+k} + \sum_0^m \sum_1^h \sum_1^\alpha \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k} + \\ & + \sum_0^m \sum_1^k \sum_1^\beta \binom{k}{\beta} \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^m \sum_1^h \sum_1^\sigma \sum_1^\beta \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\sigma+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} = \end{aligned} \right\} (6)$$

$$= \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h \partial y^k}, \quad (h+k = n-1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_0^n a'_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1} a'_{ij} p_{i+h,j+k} + \sum_0^n \sum_1^h \sum_1^\alpha \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k} + \\ & + \sum_0^n \sum_1^k \sum_1^\beta \binom{k}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^n \sum_1^h \sum_1^\sigma \sum_1^\beta \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\sigma+\beta} a'_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} = 0, \quad (h+k = m-1). \end{aligned} \right\} (7)$$

Le equazioni (6), (7) sono $n+m$ in tutto e sono di ordine $m+n-1$; supponendo che il determinante A dei coefficienti delle funzioni φ non si annulli, esse permettono di ricavare le $m+n$ funzioni φ , in funzione delle p .

22. Procediamo ora come a § 11, cioè consideriamo i sistemi (8), (9) § 11 ed esprimiamo che il sistema (9) deve essere Jacobiano; si trova allora che

devono ancora esser soddisfatte le $m + n - 1$ equazioni (10) § 11, cioè:

$$X \varphi_{r,s+1} - Y \varphi_{r+1,s} = 0, \quad (r + s = m + n - 2); \quad (10)$$

queste equazioni non sono però tutte indipendenti, perchè è facile mostrare che se è soddisfatta una di esse, lo saranno pure tutte le altre.

Infatti prendendo l' X e l' Y dei due membri della (6) si ha:

$$\begin{aligned} & \sum_0^m {}_i j a_{ij} X \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} {}_i j a_{ij} \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_0^{m-2} {}_i j a_{ij} p_{i+h+1,j+k} + \\ & + \sum_0^m {}_i j h \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^m {}_i j \sum_2^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha+1,j+k} + \\ & + \sum_0^{m-1} {}_i j \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha+1,j+k} + \\ & + \sum_0^m {}_i j k \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i+h+1,j+k-1} + \sum_0^m {}_i j \sum_2^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h+1,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^{m-1} {}_i j \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h+1,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^m {}_i j \sum_1^h (\alpha) \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha+1,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^m {}_i j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} {}_i j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} p_{i+h,j+k} + \\ & + \sum_0^m {}_i j \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^{\alpha+1} a_{ij}}{\partial x^{\alpha+1}} p_{i+h-\alpha,j+k} + \sum_0^m {}_i j \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^{\beta+1} a_{ij}}{\partial x \partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta} + \\ & + \sum_0^m {}_i j \sum_1^h (\alpha) \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} a_{ij}}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} = \\ & = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h+1} \partial y^\beta}, \quad (h + k = n - 1), \end{aligned} \quad (6')$$

$$\begin{aligned} & \sum_0^m {}_i j a_{ij} Y \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} {}_i j a_{ij} \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_0^{m-2} {}_i j a_{ij} p_{i+h,j+k+1} + \\ & + \sum_0^m {}_i j h \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+h-1,j+k+1} + \sum_0^m {}_i j \sum_2^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k+1} + \\ & + \sum_0^{m-1} {}_i j \sum_1^h (\alpha) \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k+1} + \sum_0^m {}_i j k \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i+h,j+k} + \\ & + \sum_0^m {}_i j \sum_2^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta+1} + \sum_0^{m-1} {}_i j \sum_1^k (\beta) \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i+h,j+k-\beta-1} + \end{aligned} \quad (6'')$$

Annali di Matematica, Serie III, tomo VIII.

$$\begin{aligned}
& + \sum_0^m \sum_1^h \sum_1^k \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha, j+k-\beta+1} + \sum_0^m \sum_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i+h, j+k} + \\
& + \sum_0^{m-1} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} p_{i+h, j+k} + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_1^h \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^{\alpha+1} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y} p_{i+h-\alpha, j+k} + \\
& \quad + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_1^k \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\beta+1} a_{ij}}{\partial y^{\beta+1}} p_{i+h, j+k-\beta} + \\
& + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_1^h \sum_1^k \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+1}} p_{i+h-\alpha, j+k-\beta} = \\
& = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^h \partial y^{k+1}}, \quad (h+k=n-1);
\end{aligned} \tag{6''}$$

prendendo poi l' X e l' Y dei due membri della (7) otteniamo due equazioni, che chiameremo (7'), (7''), e che si ottengono rispettivamente dalle (6'), (6'') leggendo n ed a'_{ij} invece di m ed a_{ij} e poi mettendo 0 come secondo membro.

Dalle (6'), (6'') si ottiene, sottraendo, la (6₁) § 11; così dalle (7'), (7''), mediante sottrazione, si ha la (7₁) § 11; possiamo perciò dire che anche in questo caso sussiste la conclusione del § 11.

23. Ora, ragionando come a § 12, faremo vedere che dalle (10) si deduce la (3), e viceversa.

Infatti dalle (6'), e dall'ultima delle (6'') (cioè quella che si ha per $h=0$), e dalle (6), (4) si deduce:

$$\begin{aligned}
& \sum_0^{n-1} a'_{n-k, k} \left[\sum_0^m \sum_{ij} a_{ij} X \varphi_{i+n-1-k, j+k} + \sum_0^{m-1} \sum_{ij} a_{ij} \varphi_{i+n-k, j+k} + \sum_0^{m-2} \sum_{ij} a_{ij} p_{i+n-k, j+k} + \right. \\
& \quad + \sum_0^m \sum_{ij} (n-1-k) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+n-1-k, j+k} + \\
& \quad + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_2^{n-1-k} \binom{n-1-k}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+n-k-\alpha, j+k} + \\
& \quad \left. + \dots + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_1^{n-1-k} \sum_1^k \binom{n-1-k}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} a_{ij}}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} p_{i+n-1-k-\alpha, j+k-\beta} \right] + \\
& + a'_{on} \left[\sum_0^m \sum_{ij} a_{ij} Y \varphi_{i, j+n-1} + \sum_0^{m-1} \sum_{ij} a_{ij} \varphi_{i, j+n} + \sum_0^{m-2} \sum_{ij} a_{ij} p_{i, j+n} + \right. \\
& + \sum_0^m \sum_{ij} (n-1) \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i, j+n-1} + \sum_0^m \sum_{ij} \sum_2^{n-1} \binom{n-1}{\beta} \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i, j+n-\beta} + \\
& \quad \left. + \sum_0^{m-1} \sum_{ij} \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{\beta} \frac{\partial^\beta a_{ij}}{\partial y^\beta} p_{i, j+n-\beta} + \sum_0^m \sum_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i, j+n-1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_0^{m-1} ij \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} p_{i+j+n-1} + \sum_0^m ij \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{\beta} \frac{\partial^{\beta+1} a_{ij}}{\partial y^{\beta+1}} p_{i+j+n-1-\beta} \Big] + \\
 & \quad + \sum_0^{n-1} hk a'_{hk} \left[\sum_0^m ij a_{ij} \varphi_{i+h,j+k} + \right. \\
 & \quad + \dots + \sum_0^m ij \sum_1^h \sum_1^k \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} \Big] + \\
 & \quad + \sum_0^{n-2} hk a'_{hk} \left[\sum_0^m ij a_{ij} p_{i+h,j+k} + \right. \\
 & \quad + \dots + \sum_0^m ij \sum_1^h \sum_1^k \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} \Big] = \\
 & = \sum_0^{n-1} h a'_{n-k,h} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + a'_{on} \frac{\partial^n \Phi}{\partial y^n} + \sum_0^{n-1} hk a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} + \sum_0^{n-2} hk a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k},
 \end{aligned}$$

che può scriversi :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_0^m ij a_{ij} \left[\sum_0^{n-1} h a'_{n-k,h} X \varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{on} Y \varphi_{i,j+n-1} + \sum_0^{n-1} hk a'_{hk} \varphi_{i+h,j+k} + \right. \\
 & \quad + \sum_0^{n-2} hk a'_{hk} p_{i+h,j+k} \Big] + \sum_0^{m-1} ij a_{ij} \left(\sum_0^n hk a'_{hk} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1} hk a'_{hk} p_{i+h,j+k} \right) + \\
 & \quad + \sum_0^{m-2} ij a_{ij} \left(\sum_0^n hk a'_{hk} p_{i+h,j+k} \right) \Big\} + \\
 & \quad + \sum_0^{n-1} k a'_{n-k,k} \left(\sum_0^m ij (n-1-k) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+n-1-k,j+k} + \right. \\
 & \quad + \dots + \sum_0^m ij \sum_1^{n-1-k} \sum_1^k \binom{n-1-k}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} a_{ij}}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} p_{i+n-1-k-\alpha,j+k-\beta} \Big) + \\
 & \quad + a'_{on} \left(\sum_0^m ij (n-1) \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i,j+n-1} + \right. \\
 & \quad + \dots + \sum_0^m ij \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{\beta} \frac{\partial^{\beta+1} a_{ij}}{\partial y^{\beta+1}} p_{i,j+n-1-\beta} \Big) + \\
 & \quad + \sum_0^{n-1} hk a'_{hk} \left(\sum_0^m ij \sum_1^h \binom{h}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a_{ij}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha,j+k} + \right. \\
 & \quad + \dots + \sum_0^m ij \sum_1^h \sum_1^k \binom{h}{\alpha} \binom{k}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a_{ij}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha,j+k-\beta} \Big) = \\
 & \quad = \sum_0^n hk a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \partial y^k} ;
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

consideriamo ora l'espressione entro la $\{ \dots \}$; sostituendo in essa alle quantità

entro le (...) i loro valori ricavati dalle (5), (7), tale espressione diventa:

$$\begin{aligned} & \sum_0^m a'_{ij} a_{ij} \left[\sum_0^{n-1} a'_{n-k, hk} X \varphi_{i+n-1-k, j+k} + a'_{on} Y \varphi_{i, j+n-1} + \sum_0^{n-1} a'_{hk} a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_0^{n-2} a'_{hk} a'_{hk} p_{i+h, j+k} \right] - \sum_0^{m-1} a'_{ij} a_{ij} \left(\sum_0^n a'_{hk} \sum_1^i \binom{i}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{hk}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha, j+k} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^j \binom{j}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{i+h, j+k-\beta} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^i \sum_1^j \binom{i}{\alpha} \binom{j}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a'_{hk}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha, j+k-\beta} \right) - \\ & \quad - \sum_0^{m-2} a'_{ij} a_{ij} \left(\sum_0^n a'_{hk} \sum_1^i \binom{i}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{hk}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha, j+k} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^j \binom{j}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{i+h, j+k-\beta} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^i \sum_1^j \binom{i}{\alpha} \binom{j}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a'_{hk}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha, j+k-\beta} \right); \end{aligned} \quad (\alpha)$$

osserviamo ora che la (7'), leggendo $h-1$ al posto di h e poi permutando h, k con i, j può scriversi:

$$\begin{aligned} & \sum_0^n a'_{hk} a'_{hk} X \varphi_{i+h-1, j+k} + \sum_0^{n-1} a'_{hk} a'_{hk} \varphi_{i+h, j+k} + \sum_0^{n-2} a'_{hk} a'_{hk} p_{i+h, j+k} = \\ & = - \sum_0^n a'_{hk} (i-1) \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x} \varphi_{i+h-1, j+k} - \sum_0^n a'_{hk} \sum_2^{i-1} \binom{i-1}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{hk}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha, j+k} - \\ & \quad - \sum_0^{n-1} a'_{hk} \sum_1^{i-1} \binom{i-1}{\alpha} \frac{\partial^\alpha a'_{hk}}{\partial x^\alpha} p_{i+h-\alpha, j+k} - \sum_0^n a'_{hk} j \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{i+h, j+k-1} - \\ & \quad - \sum_0^n a'_{hk} \sum_2^j \binom{j}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{i+h, j+k-\beta} - \sum_0^{n-1} a'_{hk} \sum_1^j \binom{j}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{i+h, j+k-\beta} - \\ & \quad - \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^{i-1} \sum_1^j \binom{i-1}{\alpha} \binom{j}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a'_{hk}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha, j+k-\beta} - \sum_0^n a'_{hk} \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x} \varphi_{i+h-1, j+k} - \\ & \quad - \sum_0^{n-1} a'_{hk} \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x} p_{i+h-1, j+k} - \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^{i-1} \binom{i-1}{\alpha} \frac{\partial^{\alpha+1} a'_{hk}}{\partial x^{\alpha+1}} p_{i+h-\alpha-1, j+k} - \\ & \quad - \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^j \binom{j}{\beta} \frac{\partial^{\beta+1} a'_{hk}}{\partial x \partial y^\beta} p_{i+h-1, j+k-\beta} - \\ & \quad - \sum_0^n a'_{hk} \sum_1^{i-1} \sum_1^j \binom{i-1}{\alpha} \binom{j}{\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} a'_{hk}}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta} p_{i+h-\alpha-1, j+k-\beta}, \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, m; i+j = m); \end{aligned}$$

e l'ultima delle (7'') (cioè quella che si ha per $h=0$) permutando h, k con i, j porge:

$$\begin{aligned} & \sum_0^n {}'_{hk} a'_{hk} Y \varphi_{h,m+k-1} + \sum_0^{n-1} {}'_{hk} a'_{hk} \varphi_{h,m+k} + \sum_0^{n-2} {}'_{hk} a'_{hk} p_{h,m+k} = \\ & = - \sum_0^n {}'_{hk} (m-1) \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{h,m+k-1} - \sum_0^n {}'_{hk} \sum_2^{m-1} \binom{m-1}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{h,m+k-\beta} - \\ & - \sum_0^{n-1} {}'_{hk} \sum_1^{m-1} \binom{m-1}{\beta} \frac{\partial^\beta a'_{hk}}{\partial y^\beta} p_{h,m+k-\beta} - \sum_0^n {}'_{hk} \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{h,m+k-1} - \\ & - \sum_0^{n-1} {}'_{hk} \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} p_{h,m+k-1} - \sum_0^n {}'_{hk} \sum_1^{m-1} \binom{m-1}{\beta} \frac{\partial^{\beta+1} a'_{hk}}{\partial y^{\beta+1}} p_{h,m+k-1-\beta}; \end{aligned}$$

sostituendo nella prima Σ della (α), poi sostituendo l'espressione (α) così ottenuta nella (11) al posto della $\{ \dots \}$ si ottiene un'equazione che chiameremo (11'), semplificandola, tenendo conto delle (α_0), (α_1), (α_2), ... essa si riduce a quest'altra (*):

$$\left. \begin{aligned} & - a'_{0n} \sum_0^{m-1} a_{m-k,k} (X \varphi_{m-k-1,n+k} - Y \varphi_{m-k,n+k-1}) + \\ & + a_{0m} \sum_0^{n-1} a'_{n-k,k} (X \varphi_{n-k-1,m+k} - Y \varphi_{n-k,m+k-1}) = \mathfrak{D}_2 \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(*) Si verifica facilmente che la (11') si riduce alla (12) mediante le (α_0), (α_1), ... Prendiamo ad es. nella (11') il gruppo di termini contenenti le funzioni φ , esso, come è facile riconoscere, è il seguente:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{n-1} a'_{n-k,k} \sum_0^{m'} a_{ij} (n-k) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+n-1-k,j+k} + \sum_0^{n-1} a'_{n-k,k} \sum_0^m a_{ij} k \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i+n-k,j+k-1} + \\ & + a'_{0n} \sum_0^m a_{ij} n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i,j+n-1} - \sum_0^m a_{ij} \sum_0^n a'_{hk} i \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x} \varphi_{i+h-1,j+k} - \\ & - \sum_0^m a_{ij} a_{ij} \sum_0^n a'_{hk} j \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{i+h,j+k-1} - a_{0m} \sum_0^n a'_{hk} m \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{h,m+k-1}, \end{aligned}$$

ove, nella penultima Σ la i varia da 1 ad m ; quest'espressione possiamo ancora scriverla:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{n-1} a'_{n-k,k} \sum_0^m a_{ij} (n-k) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \varphi_{i+n-1-k,j+k} + \sum_0^n a'_{hk} a'_{hk} \sum_0^m a_{ij} k \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \varphi_{i+h,j+k-1} - \\ & - \sum_0^m a_{ij} a_{ij} \sum_0^n a'_{hk} i \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x} \varphi_{i+h-1,j+k} - \sum_0^m a_{ij} a_{ij} \sum_0^n a'_{hk} j \frac{\partial a'_{hk}}{\partial y} \varphi_{i+h,j+k-1}, \end{aligned}$$

che coincide colla (12) § 12. Se ne trae, come a § 12, che se le (10) sono soddisfatte è pure verificata la (3), e viceversa. Così la nostra proposizione è dimostrata.

Supponendo, in particolare:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x},$$

si trae, dal teorema ora dimostrato, il primo teorema del § 19.

Se le espressioni \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 non fossero prime tra loro, sussisterebbe un teorema analogo a quello del § 13.

Supponendo che le espressioni \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 siano commutabili e prime tra loro, si può dimostrare, come a § 14, che se la funzione Φ soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_2 \Phi = 0$, esiste sempre una funzione z che verifica le equazioni:

$$\mathfrak{D}_1^p z = \Phi, \quad \mathfrak{D}_2 z = 0.$$

ora, questo gruppo di termini è nullo; prendiamo infatti ad es. il coefficiente di $\varphi_{m+n-1,0}$, esso è:

$$a'_{n0} n \frac{\partial a_{m0}}{\partial x} + a'_{n-1,1} \frac{\partial a_{m0}}{\partial y} - a_{m0} m \frac{\partial a'_{n0}}{\partial x} - a_{m-1,1} \frac{\partial a'_{n0}}{\partial y};$$

ora la prima delle (α_{m+n-1}) ci dà:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m-1)!} \left[(m-1)! a_{m-1,0} a'_{n0} + m! a_{m0} \frac{\partial a'_{n0}}{\partial x} + (m-1)! a_{m-1,1} \frac{\partial a'_{n0}}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{1}{m!} m! a_{m0} a'_{n-1,0} = \frac{1}{(n-1)!} \left[(n-1)! a'_{n-1,0} a_{m0} + n! a'_{n0} \frac{\partial a_{m0}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + (n-1)! a'_{n-1,1} \frac{\partial a_{m0}}{\partial y} \right] - \frac{1}{n!} n! a'_{n0} a_{m-1,0}, \end{aligned}$$

ossia:

$$m a_{m0} \frac{\partial a'_{n0}}{\partial x} + a_{m-1,1} \frac{\partial a'_{n0}}{\partial y} = n a'_{n0} \frac{\partial a_{m0}}{\partial x} + a'_{n-1,1} \frac{\partial a_{m0}}{\partial y},$$

la quale mostra appunto che il coefficiente di $\varphi_{m+n-1,0}$, scritto dianzi, è nullo.

In modo analogo si riconosce che son nulli i coefficienti delle altre φ , e infine i coefficienti delle p .

VII.

APPLICAZIONI.

24. Indichiamo con \mathfrak{D} un'espressione lineare a due variabili indipendenti, a coefficienti costanti, cioè un'espressione della forma (6) § 2, ove le a si suppongono costanti.

Sia poi u una funzione che verifichi l'equazione $\mathfrak{D}u = 0$. Si tratta di determinare tutte le forme di \mathfrak{D} tali che ponendo:

$$U = (x^2 + y^2)u,$$

la funzione U verifichi l'equazione $\mathfrak{D}^2 U = 0$.

Applicando la (13) § 3 si ha:

$$\mathfrak{D} [(x^2 + y^2)u] = \left[\left(x + \frac{\delta}{\partial x} \right)^2 + \left(y + \frac{\delta}{\partial y} \right)^2 \right] \mathfrak{D} u,$$

ossia, sviluppando, e ricordando che $\mathfrak{D}u = 0$:

$$\mathfrak{D} [(x^2 + y^2)u] = 2x \frac{\delta \mathfrak{D}u}{\partial x} + 2y \frac{\delta \mathfrak{D}u}{\partial y} + \left(\frac{\delta^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{D}}{\partial y^2} \right) u,$$

da cui

$$\mathfrak{D}^2 U = \mathfrak{D}^2 [(x^2 + y^2)u] = 2 \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^2 u + 2 \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial y} \right)^2 u,$$

onde, se si vuole che sia $\mathfrak{D}^2 U = 0$, dovrà essere:

$$\left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^2 u + \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial y} \right)^2 u = 0;$$

se ne deduce:

$$\left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\partial y} \right)^2 = \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D},$$

ove \mathfrak{D}_0 è un'espressione lineare arbitraria, di un tipo analogo a \mathfrak{D} .

Indicando con $f(\alpha, \beta)$, $f_0(\alpha, \beta)$ rispettivamente i primi membri delle equazioni caratteristiche delle equazioni $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{D}_0 = 0$, è chiaro che per ottenere un'espressione \mathfrak{D} che verifichi l'equazione precedente, basterà determi-

nare un polinomio $f(\alpha, \beta)$ che verifichi l'equazione :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 = f_0 f, \quad (1)$$

f_0 essendo un polinomio arbitrario in α, β .

25. Per determinare il polinomio f applicheremo il metodo dei coefficienti indeterminati.

Supponiamo dapprima che f_0 si riduca ad una costante che chiameremo $4c$.

È evidente che il polinomio f dovrà allora essere di 2.° grado; poniamo perciò :

$$f = a_{20} \alpha^2 + 2 a_{11} \alpha \beta + a_{02} \beta^2 + a_{10} \alpha + a_{01} \beta + a_{00},$$

ove le a sono costanti da determinarsi. Sostituendo nella (1) ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di α, β si hanno le equazioni :

$$\left. \begin{aligned} a_{20}^2 + a_{11}^2 &= c a_{20} \\ a_{02}^2 + a_{11}^2 &= c a_{02} \\ a_{20} a_{11} + a_{02} a_{11} &= c a_{11} \\ a_{20} a_{10} + a_{11} a_{01} &= c a_{10} \\ a_{02} a_{01} + a_{11} a_{10} &= c a_{01} \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 &= 4 c a_{00}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

la 3.^a di queste equazioni porge subito :

$$a_{11} = 0, \quad \text{ovvero} \quad a_{20} + a_{02} = c,$$

onde il sistema (2) si scinde nei due seguenti :

$$\left. \begin{aligned} a_{20}^2 &= c a_{20} \\ a_{02}^2 &= c a_{02} \\ a_{11} &= 0 \\ a_{20} a_{10} &= c a_{10} \\ a_{02} a_{01} &= c a_{01} \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 &= 4 c a_{00}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{20}^2 + a_{11}^2 &= c a_{20} \\ a_{02}^2 + a_{11}^2 &= c a_{02} \\ a_{20} + a_{02} &= c \\ a_{20} a_{10} + a_{11} a_{01} &= c a_{10} \\ a_{02} a_{01} + a_{11} a_{10} &= c a_{01} \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 &= 4 c a_{00}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Una soluzione del sistema (3) si ha ponendo :

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_{02} = c \\ a_{00} &= \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4c}, \end{aligned}$$

cui corrisponde la forma seguente di f :

$$f(\alpha, \beta) = c(\alpha^2 + \beta^2) + a_{10}\alpha + a_{01}\beta + \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4c},$$

onde

$$\mathfrak{D} = c \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + a_{10} \frac{\partial}{\partial x} + a_{01} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4c}, \quad (5)$$

c, a_{10}, a_{01} essendo costanti arbitrarie.

Le altre soluzioni del sistema (3) conducono ad espressioni \mathfrak{D} che sono casi particolari della precedente, ovvero sono della forma :

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \right)^2 \quad (6)$$

A, B, C indicando delle costanti.

Occupiamoci ora del sistema (4). Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ha :

$$a_{20}^2 - a_{02}^2 = c(a_{20} - a_{02}),$$

da cui :

$$a_{20} = a_{02}, \quad \text{ovvero} \quad a_{20} + a_{02} = c;$$

perciò il sistema (4) dà luogo ai due seguenti :

$$\left. \begin{aligned} a_{20}^2 + a_{11}^2 &= c a_{20} \\ 2 a_{20} &= c \\ a_{20} a_{10} + a_{11} a_{01} &= c a_{10} \\ a_{20} a_{01} + a_{11} a_{10} &= c a_{01} \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 &= 4 c a_{00} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_{10}^2 + a_{11}^2 &= c a_{20} \\ a_{20} + a_{02} &= c \\ a_{20} a_{10} + a_{11} a_{01} &= c a_{10} \\ a_{02} a_{01} + a_{11} a_{10} &= c a_{01} \\ a_{10}^2 + a_{01}^2 &= 4 c a_{00}, \end{aligned}$$

le soluzioni dei quali forniscono per \mathfrak{D} delle espressioni della forma (6).

Dall'espressione (5) di \mathfrak{D} si deduce :

Se la funzione u soddisfa all'equazione :

$$c \Delta^2 u + a_{10} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4c} u = 0, \quad (7)$$

la funzione $U = (x^2 + y^2) u$ verificherà l'equazione :

$$\left(c \Delta^2 + a_{10} \frac{\partial}{\partial x} + a_{01} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4c} \right)^2 U = 0.$$

È però facile riconoscere che l'espressione (5) di \mathfrak{D} è riducibile al Δ^2 di LAPLACE. Infatti facendo il cambiamento di funzione :

$$u = v e^{-\frac{1}{2} a_{10} x - \frac{1}{2} a_{01} y}$$

l'equazione (7) si riduce senz'altro all'equazione di LAPLACE: $\Delta^2 v = 0$.

Quanto alla forma (6), mediante una sostituzione lineare essa può ridursi ad un'espressione differenziale ordinaria.

Si può pertanto enunciare il teorema:

Tutte le espressioni \mathfrak{D} lineari, di 2.° ordine, a coefficienti costanti, tali che posto :

$$U = (x^2 + y^2) u, \quad (\mathfrak{D} u = 0)$$

risulti $\mathfrak{D}^2 U = 0$, sono riducibili al Δ^2 di LAPLACE o ad espressioni differenziali ordinarie.

Supponiamo ora che f_0 sia un polinomio di grado n in α, β , allora f dovrà essere un polinomio di grado $n + 2$; però la determinazione dei coefficienti di f dà luogo a sistemi assai complicati di equazioni di 2.° grado, di cui non è agevole assegnare la soluzione generale.

26. Indichiamo con S lo spazio indefinito limitato da un piano σ , che assumeremo come piano xy , con f, f_1, f_2 tre funzioni regolari date di x, y e con a una costante.

Si tratta di determinare una funzione U , regolare in S , che verifichi in ogni punto di S l'equazione :

$$\left(\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f \right)^2 U = 0, \quad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

e che sul piano σ assuma, colla sua derivata rispetto alla normale interna $\frac{\partial U}{\partial n}$, due date successioni di valori Φ, Ψ .

Si ha intanto evidentemente :

$$\frac{\delta}{\partial z} \left(\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f \right) = 2 \frac{\partial}{\partial z} + a,$$

è perciò chiaro che le espressioni

$$\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f, \quad \frac{\delta}{\delta z} \left(\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f \right)$$

sono commutabili, quindi, in virtù di quanto si disse nella nota della pag. 213, potremo porre:

$$U = z v + u,$$

u , v essendo funzioni che soddisfano all'equazione:

$$\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f = 0.$$

Sul piano σ , cioè per $z = 0$, si ha:

$$U = u = \Phi,$$

quindi, per determinare la funzione u si hanno le equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^2 u + f_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a \frac{\partial u}{\partial z} + f u = 0 \quad \text{in } S \\ u = \Phi \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{su } \sigma. \end{array} \right\} \quad (8)$$

È facile mostrare che se $f < 0$ esiste una sola funzione u che soddisfa a queste equazioni e che all'infinito assume un valore costante.

Infatti, se esistessero due di tali funzioni, la loro differenza U' verificherebbe le equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^2 U' + f_1 \frac{\partial U'}{\partial x} + f_2 \frac{\partial U'}{\partial y} + a \frac{\partial U'}{\partial z} + f U' = 0 \quad \text{in } S \\ U' = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{su } \sigma \end{array} \right\}$$

e si annullerebbe all'infinito; perciò avrebbe in S un massimo positivo ed un minimo negativo. Ora ciò è impossibile, perchè sia ad es. $M(x_0, y_0, z_0)$ il punto ove U' assume il massimo valore positivo; si avrà ivi:

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial x} \right)_M = \left(\frac{\partial U'}{\partial y} \right)_M = \left(\frac{\partial U'}{\partial z} \right)_M = 0.$$

Ciò posto, la formola di TAYLOR, col resto di LAGRANGE, porge:

$$U'(x, y_0, z_0) - U'(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U'(\xi, y_0, z_0)$$

$$U'(x_0, y, z_0) - U'(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} U'(x_0, \eta, z_0)$$

$$U'(x_0, y_0, z) - U'(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} U'(x_0, y_0, \zeta),$$

ove ξ , η , ζ sono rispettivamente compresi tra x ed x_0 , y ed y_0 , z e z_0 . Essendo U' massima in M si deduce facilmente dalle equazioni precedenti:

$$(\Delta^2 U')_M \leq 0;$$

poichè inoltre:

$$(f U')_M < 0,$$

risulta:

$$\left(\Delta^2 U' + f_1 \frac{\partial U'}{\partial x} + f_2 \frac{\partial U'}{\partial y} + a \frac{\partial U'}{\partial z} + f U' \right)_M < 0,$$

ciò che è assurdo, perchè si ha:

$$\left(\Delta^2 U' + f_1 \frac{\partial U'}{\partial x} + f_2 \frac{\partial U'}{\partial y} + a \frac{\partial U'}{\partial z} + f U' \right)_M = 0.$$

Analogamente si dimostra l'impossibilità di un minimo negativo. Ne segue che la funzione U' è nulla in tutto S ; da ciò si deduce la proprietà enunciata (*).

Cerchiamo ora le equazioni a cui soddisfa la funzione v .

Supponendo che la direzione positiva dell'asse z sia quella che va nell'interno di S , si ha, nei punti di σ :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial z} = v + \frac{\partial u}{\partial z} = \Psi,$$

perciò la funzione v verifica le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 v + f_1 \frac{\partial v}{\partial x} + f_2 \frac{\partial v}{\partial y} + a \frac{\partial v}{\partial z} + f v &= 0 && \text{in } S \\ v &= \Psi - \frac{\partial u}{\partial z} && \text{su } \sigma \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

che sono dello stesso tipo delle (8).

(*) Questo metodo di dimostrazione è dovuto ad A. PARAF. Cfr. PARAF, *Sur le problème de DIRICHLET et son extension au cas de l'équation linéaire générale*. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse; a. 1892.)

In tal modo la questione proposta è stata ricondotta alla risoluzione dei due sistemi (8), (9). Si determinerà perciò anzitutto, mediante le (8) (*), la funzione u , e poi, per mezzo delle (9), la funzione v .

Più in generale, per determinare la funzione U che soddisfa nei punti di S all'equazione:

$$\left(\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f\right)^m U = 0$$

e che su σ assume colle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini, dei valori assegnati, si porrà:

$$U = z^{m-1} u_1 + z^{m-2} u_2 + \dots + z u_{m-1} + u_m,$$

ove le u sono funzioni che soddisfano all'equazione:

$$\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f = 0;$$

esse si determinano successivamente con un procedimento analogo a quello indicato nel caso precedente.

(*) Relativamente all'integrazione di questo sistema in un dato campo, vedasi:

PICARD, *Sur la théorie générale des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*. (Journal de Mathématiques; a. 1890, 1896, 1900.) — E. LE-ROY, *Intégration des équations de la chaleur*, Thèse. (Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris; a. 1897.)

INDICE.

	PREFAZIONE	Pag. 181
Cap.	I. Alcune formole	» 182
»	II. Integrale generale dell'equazione $\mathfrak{D}^2 = 0$	» 189
»	III. Soluzioni comuni a due equazioni lineari, a coefficienti costanti, con 2 variabili indipendenti	» 198
»	IV. Integrale generale dell'equazione $\mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q = 0$	» 206
»	V. Equazioni lineari a coefficienti variabili	» 211
»	VI. Soluzioni comuni a due equazioni lineari, a coefficienti variabili . .	» 214
»	VII. Applicazioni	» 225

Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche.

(Di MATTEO BOTTASSO, a Torino.)

Le questioni di pluricontatto e di contatto d'ordine superiore d'una conica con una superficie, che non sia un piano, non consta siano state risolte neppure in casi particolari.

La presente Nota apporta un primo contributo a tale classe di problemi, poichè stabilisce la condizione di bicontatto d'una conica con una superficie, F^n , generale nel suo ordine.

Il metodo che seguiremo consisterà nel ridurre, in parte, il problema nostro, relativo alle coniche dello spazio, ai problemi analoghi, risolti dallo ZEUTHEN, per le coniche del piano, appoggiandoci ad un teorema dell'HALPHEN sulla teoria delle caratteristiche delle coniche. Per risolvere poi completamente la questione, ci gioveremo essenzialmente delle relazioni, che legano i caratteri d'un sistema ∞^4 di coniche col numero delle coniche del sistema che degenerano in una coppia di rette complanari, distinte o coincidenti; e quindi ci guiderà, in sostanza, il concetto stesso seguito dallo ZEUTHEN nella determinazione delle coniche d'un piano pluritangenti ad una curva di questo, dotata di sole singolarità ordinarie (*).

1. Adotteremo il calcolo coi simboli di condizione, traendo le notazioni relative dal classico trattato dallo SCHUBERT (**); epperò indicheremo

(*) ZEUTHEN, *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques*. (Nouv. Ann. de Math., 2.^{ième} série, t. V, 1866.) [È la riproduzione d'una Memoria dell'Accademia Danese, dal titolo: *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit*, ecc.; Copenaghen, 1865.] Queste ricerche furono poi completate dal CAYLEY, *On the curves which satisfy given conditions*. (Philosophical Transactions, t. CLVIII, pag. 75, 1868; oppure: *Collected Mathematical Papers*, t. VI, pag. 191.)

(**) *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Leipzig, 1879.

la condizione (semplice) per una conica d'aver il suo piano passante per un dato punto, o d'appoggiarsi ad una data retta, o di toccare un piano dato rispettivamente con μ , ν , ρ . Le condizioni (semplici) di degenerazione d'una conica, o in una coppia di rette incidenti e distinte, o in una retta doppia con due vertici ed un piano che ad essa appartengono, s'indicheranno rispettivamente con δ ed η .

Diremo inoltre $\alpha_2(n)$ la condizione (doppia) per una conica di toccare in due punti distinti una F^n ; e $\alpha'_2(n)$ la condizione (pure doppia) per le coniche d'un piano di bitoccare una curva γ^n di questo, generale nel suo ordine.

2. Lo ZEUTHEN, considerando le coniche dei sistemi elementari ∞^2 del piano, costituiti da tutte le coniche del piano che soddisfano ad una delle quattro condizioni triple ν^3 , $\nu^2\rho$, $\nu\rho^2$ e ρ^3 , ha mostrato che quelle fra esse che bitoccano una γ^n , generale nel suo ordine, sono rispettivamente in numero di (*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n(n-1)(n^2+3n-6), & \quad n(n-1)(n^2+3n-8), \\ 2n(n-1)(n^2+n-5), & \quad 2n(n-1)(n^2-3). \end{aligned}$$

Ora, pel teorema del CREMONA sulle caratteristiche delle coniche d'un piano, la condizione per queste di bicontatto con γ^n , ossia il numero delle coniche d'un sistema ∞^2 del piano che bitoccano γ^n , dev'essere così espresso:

$$\alpha'_2(n) = x(n)\nu^2 + y(n)\nu\rho + z(n)\rho^2,$$

ove x , y , z son funzioni dell'unico carattere, n , di γ , e ν^2 , $\nu\rho$, ρ^2 son i caratteri del sistema ∞^2 considerato. Questi caratteri pei sistemi elementari ∞^2 del piano, prima definiti, sono eguali rispettivamente ad (1, 2, 4), (2, 4, 4), (4, 4, 2), (4, 2, 1), e quindi s'avranno le relazioni:

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= \frac{1}{2} n(n-1)(n^2+3n-6); \\ 2x + 4y + 4z &= n(n-1)(n^2+3n-8) \\ 4x + 4y + 2z &= 2n(n-1)(n^2+n-5), \end{aligned}$$

le quali permettono di ricavare x , y , z , e s'ottiene così, come espressione

(*) ZEUTHEN, loc. cit., pag. 256.

esplicita di $\alpha'_2(n)$ la seguente :

$$\alpha'_2(n) = \frac{1}{4} n(n-1) \{ 2(n^2 - n - 1) \nu^2 + (4n - 9) \nu \rho + 2\rho^2 \} \quad (*)$$

3. Pel teorema di HALPHEN sulle caratteristiche delle coniche dello spazio (**), la condizione $\alpha_2(n)$ di bicontacco d'una conica con F^n , che esprime pure il numero delle coniche d'un sistema $\Sigma \infty^2$ bitangenti ad F^n , è rappresentata da un polinomio omogeneo di secondo grado in μ, ν, ρ , i cui coefficienti dipendono esclusivamente da n . Ora, se il sistema Σ è piano, cioè se son nulli i termini che contengono la μ , la $\alpha_2(n)$ si riduce ad $\alpha'_2(n)$, e quindi si ha :

$$\alpha_2(n) = x'(n) \mu^2 + y'(n) \mu \nu + z'(n) \mu \rho + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{4} n(n-1) \{ 2(n^2 - n - 1) \nu^2 + (4n - 9) \nu \rho + 2\rho^2 \} . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Per determinare i coefficienti x', y', z' , che compaiono in questa formola, basterà ovviamente procurarci il valore di $\alpha_2(n)$ per tre convenienti sistemi ∞^2 di coniche: e ciò noi faremo considerando tutte le coniche che rispettivamente soddisfano alle condizioni sestuple $\mu^2 \nu^4, \mu^2 \nu^2 \rho^2$ e $\mu \nu^5$; troveremo cioè le coniche dello spazio soddisfacenti alle condizioni

$$\mu^2 \nu^4 \alpha_2(n), \quad \mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n), \quad \mu \nu^5 \alpha_2(n).$$

A tal fine ci gioveremo delle relazioni simboliche (***)

$$\nu = \frac{1}{3} \delta + \frac{2}{3} \eta + \frac{4}{3} \mu, \quad \rho = \frac{2}{3} \delta + \frac{1}{3} \eta + \frac{2}{3} \mu, \quad (2)$$

le quali permettono di ridurre la nostra ricerca alle questioni dei contatti di rette con F^n , e dei contatti delle coniche d'un piano con una sua curva γ^n .

Convorrà pure tener presente la relazione (****)

$$P = \mu \nu - 2 \mu^2, \quad (3)$$

(*) Se si moltiplica quest'espressione di $\alpha'_2(n)$ per ρ^3 , s'ottiene la 4.^a delle formole citate di ZEUTHEN, della quale non s'è fatto uso.

(**) HALPHEN, *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre*. Troisième partie. (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. II, 1874.)

(***) SCHUBERT, loc. cit., pag. 92.

(****) Ibidem, pag. 95.

che esprime per una conica la condizione, doppia, di passaggio per un punto dato, e dalla quale segue:

$$\mu^2 \nu^2 = P^2 + 4 \mu^3 \nu. \quad (4)$$

4. Applicando la (4) e la prima delle (2), s'ottiene:

$$\begin{aligned} \mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) &= 4 \mu^3 \nu^3 \alpha_2(n) + \frac{1}{3} P^2 \nu \delta \alpha_2(n) + \\ &+ \frac{2}{3} P^2 \nu \eta \alpha_2(n) + \frac{4}{3} P^2 \mu \nu \alpha_2(n), \end{aligned}$$

ed essendo $P^2 \nu \eta \alpha_2(n) = 0$, $P^2 \mu \nu \alpha_2(n) = \mu^3 \nu^3 \alpha_2(n)$, si potrà scrivere:

$$\mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) = \frac{1}{3} P^2 \nu \delta \alpha_2(n) + \frac{16}{3} \mu^3 \nu^3 \alpha_2(n). \quad (5)$$

Poichè è noto del secondo membro di questa eguaglianza il secondo termine, basterà cercarne il primo, cioè $P^2 \nu \delta \alpha_2(n)$.

A questo scopo, dico A_1, A_2 i punti della condizione P^2 , a la retta della condizione ν , ed x, y le due rette incidenti di cui si compone una δ , soddisfacente alla condizione imposta $P^2 \nu \alpha_2(n)$. I casi che si possono presentare dovranno allora, di necessità, rientrare in uno dei due seguenti: 1.^o una delle due rette di δ , p. es. x , passa per i due punti A_1, A_2 , e l'altra incontra a ; 2.^o una delle due rette di δ , e sia la x , passa per l'uno dei due punti dati, p. es. A_1 , e s'appoggia alla retta a , mentre l'altra retta, y , passa pel rimanente punto, A_2 : le soluzioni di questo caso, per lo scambio che si può fare dei due punti A_1, A_2 , dovranno contarsi due volte.

Nel primo caso, perchè sia soddisfatta la condizione $\alpha_2(n)$, possiamo supporre o che la y , appoggiata ad a , sia bitangente ad F^n , o che le sia tangente ed inoltre il vertice di δ appartenga ad F^n . Essendo

$$\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3) \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$$

l'ordine e la classe della congruenza delle rette bitangenti ad F^n , sarà $n(n+1)(n-2)(n-3)$ il numero di queste bitangenti appoggiate alle rette a ed A_1, A_2 , ognuna delle quali costituisce colla $x \equiv A_1, A_2$ una δ che soddisfa al problema. In secondo luogo osserviamo che per ognuno degli n punti d'incontro di $x \equiv A_1, A_2$ con F^n passano precisamente $n^2 - n - 2$ rette, le quali, appoggiandosi ad a , toccano altrove F^n , e ciascuna di esse ci dà

una nostra δ col vertice sulla superficie, per il qual fatto si deve considerare come una soluzione doppia (*), e così s'hanno altre $2n(n^2 - n - 2)$ soluzioni. Il numero delle soluzioni pel primo caso è dunque $n(n-2)(n^2-1)$.

Nel secondo caso possiam supporre che le due rette x, y o siano entrambe tangenti, o l'una di esse sia tangente ed il vertice giaccia sopra F^n , od infine che y sia bitangente alla superficie. Le rette per A_1 , appoggiate ad α , che toccano F^n sono $n(n-1)$, ed una qualsiasi di esse è incontrata da $n(n-1)$ tangenti alla superficie passanti per A_2 , onde nella prima ipotesi si hanno $n^2(n-1)^2$ soluzioni. Poichè poi ognuna delle dette $n(n-1)$ tangenti alla superficie per A_1 incontra ulteriormente F^n in $n-2$ punti, sono $n(n-1)(n-2)$ le coniche δ , la cui x tocca F^n ed il cui vertice giace sopra questa, le quali contano perciò come $2n(n-1)(n-2)$ soluzioni. Il cono circoscritto da A_2 alla superficie incontra quest'ultima, fuori della curva di contatto, in una curva d'ordine $n^2(n-1) - 2n(n-1)$; onde sono $n(n-1)(n-2)$ le rette per A_2 appoggiate alla sezione γ^n del piano A_1 con F^n , le quali toccano altrove la superficie, ed ognuna ci dà una δ , che ha la retta y tangente ad F^n ed il vertice sopra questa; epperò, in tal modo, s'ottengono $2n(n-1)(n-2)$ soluzioni, come nella precedente ipotesi. Infine ognuna delle $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ bitangenti ad F^n , che escon da A_2 , individua una conica δ che soddisfa al problema, e s'hanno così altrettante soluzioni. Nel secondo caso s'hanno quindi

$$\frac{1}{2}n(n-1)(3n^2+n-10)$$

soluzioni, da contarsi, per quanto s'è detto in principio, due volte.

Sicchè concludiamo essere $P^2 \nu \delta \alpha_2(n) = 4n(n-1)(n^2-3)$.

Sostituendo nella (5), e ricordando che è

$$\mu^3 \nu^3 \alpha_2(n) = \frac{1}{2}n(n-1)(n^2+3n-6),$$

(*) Per quanto concerne la molteplicità colla quale una conica degenera va considerata come soddisfacente alle imposte condizioni, se queste son formate con ν e ρ , ci atterremo allo SCHUBERT (loc. cit., pag. 93); e, se si tratta invece di condizioni di contatto, ci atterremo a quanto è posto rigorosamente in evidenza dallo ZEUTHEN (Nouv. Ann., loc. cit.), notando che queste molteplicità non possono mutare quando si passi a considerare in luogo d'una curva piana, una superficie di cui detta curva è sezione.

s'ottiene:

$$\mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) = 4n(n-1)(n^2 + 2n - 5). \quad (6)$$

5. Per la (4) e la seconda delle (2) si ha:

$$\begin{aligned} \mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n) &= 4\mu^3 \nu \rho^2 \alpha_2(n) + \frac{2}{3} P^2 \rho \delta \alpha_2(n) + \\ &+ \frac{1}{3} P^2 \rho \eta \alpha_2(n) + \frac{2}{3} P^2 \rho \mu \alpha_2(n), \end{aligned}$$

ed essendo identicamente

$$P^2 \rho \eta \alpha_2(n) = 0, \quad P^2 \mu \rho \alpha_2(n) = \mu^3 \nu^2 \rho \alpha_2(n),$$

s'avrà la relazione:

$$\mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n) = \frac{2}{3} P^2 \rho \delta \alpha_2(n) + 4\mu^3 \nu \rho^2 \alpha_2(n) + \frac{2}{3} \mu^3 \nu^2 \rho \alpha_2(n), \quad (7)$$

la quale riduce il calcolo di $\mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n)$ a quello di $P^2 \rho \delta \alpha_2(n)$.

Per avere questo numero dico nuovamente A_1, A_2 i punti della condizione P^2 , ed indico con π il piano della condizione ρ , sul quale deve stare il vertice di $\delta \equiv (x, y)$. Non si potranno allora presentare che i due casi seguenti: 1.^o) Una retta, p. es. la x , di δ coincide colla retta $A_1 A_2$; 2.^o) una retta, x , di δ passa per A_1 , e l'altra passa per A_2 .

Nel primo caso la retta y di δ dovrà passare pel punto $A_1 A_2 \pi \equiv x \pi$, quindi non potrà essere che una delle $\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$ rette bitangenti ad F^n , uscenti da tal punto, e ci darà così altrettante soluzioni.

Nel secondo caso si dovrà supporre o che una delle due rette x, y sia bitangente, ovvero che sian tangenti entrambe, oppure che l'una d'esse sia tangente (ad F^n), ed il vertice appartenga inoltre alla superficie. Le bitangenti ad F^n , che escono da ciascuno dei punti A_i , sono

$$\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

ed ognuna individua una conica δ che soddisfa al problema, epperò s'avranno in questo modo $n(n-1)(n-2)(n-3)$ soluzioni. Le nostre coniche δ , le cui due rette toccano entrambe F^n , son tante quanti sono i punti comuni alle sezioni con π dei coni tangenti ad F^n che escono da A_1 ed A_2 , cioè $n^2(n-1)^2$. S'è già notato che le rette del cono tangente ad F^n col ver-

tice in A_1 , le quali s'appoggiano alla sezione γ^n della superficie con π , ma hanno il loro punto di contatto fuori di π , sono $n(n-1)(n-2)$: ognuna di esse ci dà una nostra δ , col vertice sopra F^n , la quale va perciò contata due volte; e poichè il detto per A_1 vale anche per A_2 , avremo in totale $4n(n-1)(n-2)$ soluzioni.

Dopo ciò, osservando inoltre che per la condizione ρ imposta alle δ , tutte le soluzioni ottenute devono contarsi 2¹ volte, potrà concludersi essere:

$$P^2 \rho \delta \alpha_2(n) = n(n-1)(5n^2 - 9n + 2).$$

Ed allora, sostituendo nella (7), tenendo pure presente che si ha

$$\mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n) = n(n-1)(n^2 + 3n - 8),$$

$$\mu^3 \nu \rho^2 \alpha_2(n) = 2n(n-1)(n^2 + n - 5),$$

s'ottiene:

$$\mu^2 \nu^2 \rho^2 \alpha_2(n) = 4n(n-1)(3n^2 + n - 11). \quad (8)$$

6. In virtù delle (3) e (2) si ha:

$$\begin{aligned} \mu \nu^5 \alpha_2(n) &= 2 \mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) + \frac{1}{3} P \nu^3 \delta \alpha_2(n) + \\ &+ \frac{2}{3} P \nu^3 \eta \alpha_2(n) + \frac{4}{3} P \mu \nu^3 \alpha_2(n), \end{aligned}$$

e, riconoscendosi essere identicamente

$$P \nu^3 \eta \alpha_2(n) = 0, \quad P \mu \nu^3 \alpha_2(n) = \mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) - 2 \mu^3 \nu^3 \alpha_2(n),$$

s'avrà:

$$\mu \nu^5 \alpha_2(n) = \frac{1}{3} P \nu^3 \delta \alpha_2(n) + \frac{10}{3} \mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) - \frac{8}{3} \mu^3 \nu^3 \alpha_2(n). \quad (9)$$

Per quanto si è visto, già sappiamo essere:

$$\mu^3 \nu^3 \alpha_2(n) = \frac{1}{2} n(n-1)(n^2 + 3n - 6),$$

$$\mu^2 \nu^4 \alpha_2(n) = 4n(n-1)(n^2 + 2n - 5),$$

e basterà quindi calcolare $P \nu^3 \delta \alpha_2(n)$.

A tal fine, se A è il punto della condizione P , ed a_1, a_2, a_3 son le rette della condizione ν^3 , osserviamo che una delle rette di $\delta \equiv (x, y)$, p. es. x , dovrà necessariamente passare per A , e potrà non appoggiarsi ad alcuna delle a_i (che dovranno allora incontrare tutte la y), od appoggiarsi ad una

delle a_i (mentre la y s'appoggerà alle altre due), od incontrare due delle a_i (mentre la restante a_i sarà incidente ad y). Per i vari modi di scelta delle rette a_i ognuna delle soluzioni, che s'ottengono nei due casi ultimi, andrà contata tre volte.

Nel primo caso può anzitutto supporre che x sia bitangente ad F^n , e s'hanno allora $n(n-1)(n-2)(n-3)$ soluzioni; ovvero che tanto x quanto y tocchino F^n , ottenendo così altre $2n^2(n-1)^2$ soluzioni. Volendo invece che x sia tangente alla superficie, ed il vertice di δ stia sopra questa, basterà osservare che tal vertice dovrà esser uno dei punti in cui la schiera delle rette appoggiate ad a_1, a_2, a_3 incontra la curva d'ordine $n(n-1)(n-2)$ d'ulteriore intersezione di F^n col cono ad essa circoscritto da A , fuori della curva di contatto; epperò s'hanno in tal guisa $2n(n-1)(n-2)$ soluzioni, da contarsi ognuna due volte. Infine, supposta la y tangente ad F^n , poichè sono $2n(n-1)$ le rette appoggiate ad a_1, a_2, a_3 , che toccano la superficie, otterremo di nuovo $2n(n-1)(n-2)$ coniche δ col vertice sopra F^n , che pure rappresentano un numero doppio di soluzioni. Onde, nel primo caso, il numero complessivo delle soluzioni è $n(n-1)(3n^2+n-10)$.

Nel secondo caso, quando x passando per A incontra p. es. a_1 , supposto che tanto x quanto y sian tangenti ad F^n , si hanno $2n^2(n-1)^2$ soluzioni; se invece y bitocca la superficie, il numero delle soluzioni che s'ottengono è precisamente eguale a quello delle rette bitangenti ad F^n appoggiate ad a_2, a_3 , cioè $n(n+1)(n-2)(n-3)$. — Può pure supporre che il vertice della nostra δ appartenga ad F^n : se questa è allora toccata dalla retta x , abbiamo $n(n-1)(n-2)$ di tali δ da contarsi ciascuna due volte come soluzione. Vediamo ora quando F^n è invece toccata dalla retta y . La rigata d'ordine $2n(n-1)$ delle tangenti ad F^n appoggiate ad a_1, a_2, a_3 taglia la superficie, fuori della curva di contatto d'ordine n^2 , in una curva d'ordine $2n^2(n-2)$: tanti son quindi i punti del piano Aa_1 , appartenenti ad F^n , ciascuno dei quali è vertice d'una conica δ , la cui y tocca la superficie; epperò in tal guisa otteniamo $4n^2(n-2)$ soluzioni. — Quindi il numero delle soluzioni ottenute nel secondo caso sarà $n(n-1)(3n^2+n-10)$; e, quando si scambino fra di loro le a_i , s'avranno in totale $3n(n-1)(3n^2+n-10)$ soluzioni.

Infine, nell'ultimo caso, la retta x , dovendo passare per A ed appoggiarsi p. es. ad a_1 , ed a_2 , è fissa: onde la retta y o sarà bitangente, oppure toccherà semplicemente la superficie ed il vertice di δ starà sopra questa. Le coniche δ che soddisfano al problema sono $n(n+1)(n-2)(n-3)$ nella

prima ipotesi, ed $n(n^2 - n - 2)$ nella seconda; quest'ultime però si devono contare due volte. Tenendo poi conto degli scambi che si possono effettuare fra le a_i , si trae che nel terzo caso s'hanno $3n(n-2)(n^2-1)$ soluzioni.

Raccogliendo s'avrà:

$$Pv^3 \delta \alpha_2(n) = n(n-1)(15n^2 + n - 46).$$

Quindi, sostituendo nella (9), abbiamo:

$$\mu v^5 \alpha_2(n) = n(n-1)(17n^2 + 23n - 74). \quad (10)$$

7. Se moltiplichiamo ora la (1) successivamente per $\mu^2 v^4$, $\mu^2 v^2 \rho^2$, μv^5 , poichè è (*):

$$\begin{array}{llll} \mu^3 v^5 = 1 & \mu^3 v^4 \rho = 2 & \mu^3 v^3 \rho^2 = 4 & \mu^3 v^2 \rho^3 = 4 \\ \mu^2 v^6 = 8 & \mu^2 v^5 \rho = 14 & \mu^2 v^4 \rho^2 = 24 & \mu^2 v^3 \rho^4 = 16 \\ \mu v^7 = 34 & \mu v^6 \rho = 52 & \mu v^5 \rho^2 = 76 & \mu^4 v^4 = \mu^4 v^2 \rho^2 = 0, \end{array}$$

s'ottiene:

$$\begin{aligned} \mu^2 v^4 \alpha_2(n) &= y' + 2z' + \frac{1}{2}n(n-1)(8n^2 + 20n - 47) \\ \mu^2 v^2 \rho^2 \alpha_2(n) &= 4y' + 4z' + 2n(n-1)(6n^2 + 6n - 29) \\ \mu v^5 \alpha_2(n) &= x' + 8y' + 14z' + n(n-1)(17n^2 + 35n - 96). \end{aligned}$$

Queste relazioni, insieme ai risultati (6), (8), (10) prima ottenuti, ci danno le equazioni:

$$\begin{aligned} y' + 2z' &= -\frac{1}{2}n(n-1)(4n-7) \\ 4y' + 4z' &= -n(n-1)(4n-7) \\ x' + 8y' + 14z' &= -2n(n-1)(6n-11), \end{aligned}$$

dalle quali, ricavando x' , y' , z' , e sostituendo poi nella (1), si ha:

$$\alpha_2(n) = \frac{1}{4}n(n-1) \left\{ \begin{array}{l} 8(2n-3)\mu^2 - 2(4n-7)\mu v + \\ + 2(n^2 - n - 1)v^2 + (4n-9)v\rho + 2\rho^2 \end{array} \right\} (**). \quad (11)$$

(*) SCHUBERT, loc. cit., pag. 95.

(**) Della formula così ottenuta si può fare la verifica seguente: Se si considera il sistema, ∞^2 , delle sezioni d'una data quadrica φ^2 coi piani d'una stella (O), le coniche di

8. La formola a cui siamo giunti esprimerà il numero delle *coniche non degeneri* d'un qualsivoglia sistema ∞^2 , che bitoccano una data F^n , la quale non abbia alcuna particolare relazione col sistema considerato: ossia, rimanendo fisso questo, possa supporre che la F^n occupi nello spazio una posizione generica. Se ciò non fosse, potrebbe accadere che il numero considerato, o diventasse infinito, o, pur restando finito, comprendesse coniche degeneri della specie δ , η , o della terza specie (retta doppia con un vertice sopra di essa), con certe molteplicità. L'HALPHEN (*) ha dimostrato ed espresso con rigore, nel caso di sistemi semplici o quadrupli d'un piano, quand'è che, volendo escludere le coniche degeneri, è tuttavia valida la teoria delle caratteristiche; ma non essendo state estese quelle ricerche, non possiamo dire se, escludendo le coniche degeneri quando si presentano, il numero $\alpha_2(n)$ continui ad esser dato da una espressione del tipo di quella scritta.

9. La (11) permette di trovare tutti i *numeri che si riferiscono a coniche soddisfacenti ad una o più condizioni di bicontatto con date superficie, generali nei loro ordini, e soddisfano inoltre ad altre condizioni, semplici o no, anche irriducibili (**), delle quali si conoscono le espressioni in funzione di μ , ν , ρ .*

Come esempio, si può ricercare il *numero delle coniche dello spazio che bitoccano quattro superficie $F_1^{n_1}$, $F_2^{n_2}$, $F_3^{n_3}$, $F_4^{n_4}$* (in posizione generica le une rispetto alle altre), cioè il numero rappresentato da $\prod_1^4 \alpha_2(n_i)$.

Se si eseguisce direttamente questo prodotto, sostituendo poscia, nel risultato, alle condizioni di dimensione otto, formate con μ , ν , ρ , i loro valori

un tal sistema, che bitoccano F^n , non son altro che le sezioni di φ^2 fatte coi piani che sono bitangenti alla curva Γ^{2n} , intersezione di φ^2 con F^n , cioè coi piani bitangenti al cono che da O proietta la curva Γ . Ora questo cono, di classe $2n^2$ con $n(n-1)$ generatrici doppie, ammette $2n(n-1)(n^2+n-4)$ piani bitangenti, e tal numero s'ottiene pure dalla (11) quando in essa si pongano i caratteri del particolare sistema considerato, che si riconoscon essere:

$$\mu^2 = 1, \quad \mu\nu = \mu\rho = 2, \quad \nu^2 = \nu\rho = \rho^2 = 4.$$

(*) HALPHEN, *Caractéristiques des systèmes de coniques*. (Jour. de l'Ec. Polit., 45.ième Cahier, 1878.)

(**) Cioè, quelle condizioni che non si possono ottenere come prodotto di altre di dimensione minore.

numerici (quali si trovano, ad es., in SCHUBERT, loc. cit., pag. 95), s'ottiene:

$$\prod_1^4 \alpha_2(n_i) = \frac{1}{4} \prod_1^4 n_i (n_i - 1) \cdot$$

$$\cdot \{ n_1 n_2 n_3 n_4 [23 n_1 n_2 n_3 n_4 + 17 \Sigma^4 n_1 n_2 n_3 - 9 \Sigma^6 n_1 n_2 - 47 \Sigma^4 n_1 + 151] -$$

$$- 86 \Sigma^4 n_1^2 n_2^2 n_3^2 - 42 \Sigma^{12} n_1^2 n_2^2 n_3 + 138 \Sigma^{12} n_1^2 n_2 n_3 + 316 \Sigma^6 n_1^2 n_2^2 - 156 \Sigma^{12} n_1^2 n_2 -$$

$$- 202 \Sigma^4 n_1 n_2 n_3 - 576 \Sigma^4 n_1^2 - 4 \Sigma^6 n_1 n_2 + 528 \Sigma^4 n_1 + 416 \} ,$$

ove le sommatorie s'intendono estese a tutti i termini che si posson formare con n_1, n_2, n_3, n_4 , del tipo di quello scritto: l'apice posto alla sommatoria indica il numero dei termini che questa contiene.

Quando le quattro superficie F_i abbiano tutte lo stesso ordine n , si ha:

$$\alpha_2^4(n) = \frac{1}{4} n^4 (n - 1)^4 (23 n^8 + 68 n^7 - 398 n^6 - 692 n^5 +$$

$$+ 3703 n^4 - 2680 n^3 - 2328 n^2 + 2112 n + 416).$$

Ponendo $n = 2$, s'ottiene che *le coniche dello spazio, le quali bitoccano quattro quadriche date, sono in numero di 448.*

Sul limite del quoziente di due funzioni.

(Di ETTORE BORTOLOTTI, a Modena.)

Quando si cerca il limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ di due funzioni che sono in uno stesso punto entrambe infinite od infinitesime, si ricorre solitamente al limite del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ delle loro derivate (*). Ora, non solo può accadere che il primo limite esista, senza che esista il secondo, ma può anche darsi che quest'ultimo esista, e non il primo. Ciò per il fatto che le f' , φ' possono avere dei fattori comuni che, al crescere indefinito di x , sempre presentano qualche cambiamento di segno e che, nella ricerca del limite del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ sono trascurati.

Così se si fa $f = x + \sin x \cos x$, $\varphi = e^{\sin x} (x + \sin x \cos x)$, si ha $f' = 2 \cos^2 x$, $\varphi' = \cos x e^{\sin x} (x + \sin x \cos x + 2 \cos x)$.

Si vede che la f' è sempre positiva o nulla, la φ' cambia continuamente di segno, e non è possibile determinare due numeri positivi ε , μ , tali che, nei punti di un determinato intorno $(x_{\varepsilon, \mu}, \dots, \infty)$, sia

$$\varepsilon \varphi' < f' \leq \mu \varphi'. \quad (1)$$

Il quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, tolto il fattore $\cos x$ comune ai due termini, diventa infinitesimo per $x = \infty$. Quello delle funzioni, come subito si scorge, non ha limite, ma oscilla fra $\frac{1}{e}$ ed e .

(*) Lo STOLZ dimostra che si può invece cercare quello delle differenze finite, nelle Memorie: *Ueber die Grenzwert der Quotienten* (Mat. Ann. XIV, pag. 232-239, XV, pag. 556-559); *Verallgemeinerung eines Satz von Cauchy* (Mat. Ann. XXXIII, pag. 238), anche quest'ultimo limite può non esistere, pur esistendo quello del quoziente delle funzioni. Cfr. anche CESARO (*Rend. Acc. Lincei*, 1888, pag. 116).

Lo STOLZ, che cita codesto esempio (*), pare voler attribuire ciò al fatto che, le due derivate, f' e φ' , sono insieme nulle in infiniti punti di ogni intorno dell'infinito, ed esclude, nel suo enunciato, le coppie di funzioni le cui derivate sono, in un insieme di punti $[\xi]$ che hanno limite superiore $+\infty$, contemporaneamente nulle od infinite. Vedremo però che tale esclusione non è necessaria, a patto che quelli fra i punti $[\xi]$ che sono situati in un intervallo finito qualunque, costituiscano un insieme di dimensione esterna nulla; cioè, — per usare una denominazione da me introdotta (**), per analogia a quella usata dallo STOLZ stesso e dall'HARNACH, — che l'insieme di tutti i punti $[\xi]$ sia *discreto*.

Il quesito generale che mi sono proposto è il seguente:

In quale relazione deve stare la estensione dell'insieme di tutti i punti $[x]$ di un determinato intorno $(x_0, \dots + \infty)$ nei quali le f' φ' non sono insieme nulle nè infinite ed è soddisfatta una relazione della forma

$$m \leq \left| \frac{f'}{\varphi'} \right| \leq M. \quad (1)$$

m, M , positivi (o nulli) determinati, a quella dell'insieme dei punti $[\xi]$ di quel medesimo intorno dove tale relazione può non essere soddisfatta e le f' , φ' possono essere insieme nulle od infinite, perchè si possa esser certi della esistenza di un intorno $(x_{m,M}, \dots + \infty)$ in ogni punto del quale sia

$$m \mu < \left| \frac{f}{\varphi} \right| \leq \nu M, \quad (2)$$

μ, ν , diversi dallo zero e dall'infinito, non variabili con x ?

Nel § I, per eliminare le difficoltà che nascono dalla supposizione che le funzioni f' , φ' possano avere punti di infinito o di infinitesimo comuni, ho sostituito alla considerazione del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ quella delle relazioni di grandezza fra le funzioni medesime f , φ .

I risultamenti ottenuti in questo paragrafo mi permettono, nel § II, di stabilire delle condizioni sufficienti per la esistenza della (2).

Ho visto che, quando non si introduca alcuna nuova ipotesi oltre quelle che in simili ricerche solitamente si ammettono per le funzioni f , φ , è con-

(*) *Mat. Ann.*, XV, pag. 557.

(**) Cfr. la nota: *Contributo alla teoria degli insiemi*. Rendiconti Acc. Lincei. Vol. XI, 2.º sem., serie 5.ª, fasc. 2.º (1902).

dizione sufficiente che sia *discreto* l'insieme dei punti $[\xi]$ dove la (1) può non essere soddisfatta e le f' φ' possono essere insieme nulle od infinite.

Nel § III, introducendo in più la ipotesi che delle due funzioni $|f|$, $|\varphi|$, una almeno vada all'infinito sempre crescendo, ho visto che è sufficiente che il rapporto fra le estensioni degli insiemi dei punti $[\xi]$, $[x]$ situati nell'intervallo $(x_0 \dots x)$, diventi infinitesimo per $x = +\infty$.

Non occorre dunque che la estensione dell'insieme $[\xi]$ sia nulla, basta che essa sia infinitesima rispetto alla estensione dell'insieme $[x]$.

Talé condizione è tanto poco restrittiva da raggiungere la condizione necessaria da me appunto trovata nel § V.

La ricerca delle **condizioni necessarie**, è sempre stata considerata come difficilissima, nessuno, credo, tolto il Du-BOIS-REYMOND (*), ha tentato di risolverla. Questi è costretto ad ammettere che esistano determinate anche le derivate seconde f'' , φ'' , e che sieno infinitesimi entrambi i quozienti $\frac{f''}{f'}$, $\frac{\varphi''}{\varphi'}$, per $x = +\infty$; ciò che restringe di troppo il campo delle sue ricerche. Il punto di vista dal quale egli è partito è poi sostanzialmente diverso dal mio. Le condizioni che io impongo alle due funzioni della variabile reale x f , φ , ad un valore, monotone, finite, continue, derivabili in ogni intorno $(x_0 \dots +\infty)$ sono sostanzialmente queste: che delle due funzioni f , φ , una almeno tenda all'infinito sempre crescendo, e, delle due derivate f' , φ' , una almeno sia integrabile (propriamente od impropriamente) in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$; trovo allora, come *condizione necessaria* (teoremi 11 e 12), che *il rapporto delle estensioni degli insiemi dei punti $[\xi]$, $[x]$ dianzi definiti, contenuti nell'intervallo $(x_0 \dots x)$ sia infinitesimo, per $x = +\infty$, e ciò mi permette in particolare di enunciare la **condizione necessaria e sufficiente** (teoremi 10 e 13) perchè il quoziente $\left| \frac{f}{\varphi} \right|$ sia infinito (infinitesimo) per $x = +\infty$.*

Nel caso in cui i limiti dei quozienti delle funzioni e delle derivate sieno entrambi determinati per $x = +\infty$, ho cercato, con le *Osservazioni* ai

(*) *Ueber Integration und Differentiation infinitärer Relationen* (Mat. Annalen XIV, pag. 498-506). Cfr. anche STOLZ: *Ueber die Grenzwerte der Quotienten* (Mat. Ann. XIV, pag. 237-238).

n.º 7 (§ II) e 10 (§ IV) di stabilire le rapidità relative di tendenza al limite di quei due quozienti.

Sono giunto così a criteri che permettono di trar partito dal teorema dell'HÔPITAL, anche quando il quoziente delle derivate si ripresenti sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$, o sotto l'altra $\frac{0}{0}$.

Tali criteri sono di non dubbia utilità pratica e si enunciano brevemente dicendo:

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ sono entrambe infinite per $x = +\infty$, se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ è per $x = +\infty$ infinita (infinitesima), il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ non può ivi essere determinato senza essere infinitesimo (infinito).

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, sono entrambe infinitesime per $x = +\infty$, se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ è infinita (infinitesima) per $x = +\infty$, il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ non può essere ivi determinato senza essere anch'esso infinito (infinitesimo).

Fra le molte applicazioni che si possono fare della teoria qui svolta, ne ho scelta una che ha speciale interesse, poichè si riferisce alla determinazione dell'ordine di infinito delle funzioni, ed in particolare di quelle funzioni monotone che soddisfano la relazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

M'è sembrato opportuno considerare queste funzioni come appartenenti ad una stessa classe, che è la prima nella classificazione secondo la rapidità di crescita da me proposta in una Memoria, che può considerarsi come preventiva, stampata negli *Atti della Società dei Matematici e Naturalisti di Modena*, l'anno 1901.

L'opportunità di codesta classificazione risulta manifesta delle considerazioni seguenti:

Se si dà alla x una successione di valori $x_0 + n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) si può far coincidere la successione $f(x_0 + n)$ con quella dei prodotti parziali

$$P_n = (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)$$

di un determinato prodotto infinito $\prod_1^{\infty} (1 + b_n)$, ed anche, se si vuole, con quella delle somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

di una serie

$$\sum_1^{\infty} u_n.$$

Ora, se la $f(x)$ è monotona non decrescente, le b_n e le u_n sono tutte positive o nulle. Se la $f(x)$ appartiene a quella classe prima, ad essa corrispondono prodotti infiniti il cui fattore generale $1 + b_n$ tende ad 1 e reciprocamente. Le serie a termini positivi, il cui termine generale u_n tende allo zero per $n = \infty$, sono tutte corrispondenti a funzioni della classe prima.

Queste serie e quei prodotti infiniti sono come è noto i più studiati ed i più ovvi, i soli che possano convergere, quelli la cui divergenza, quando non convergano, è meglio conosciuta.

Si osservi in secondo luogo che le *funzioni monotone che hanno derivata logaritmica infinitesima appartengono tutte a quella prima classe* (Teoremi 2.°, 3.°, 4.° del § VI) e che *le funzioni di quella prima classe divergono meno rapidamente della esponenziale e^{ax} (a numero reale positivo)*, proprietà queste che mi paiono rilevanti, pensando alla importanza che hanno nel calcolo infinitario il comportamento assintotico della derivata logaritmica (*), ed in quello delle funzioni intere il confronto con la rapidità di crescita della esponenziale e^{ax} (**).

Le proprietà enunciate saranno qui dimostrate con maggiore generalità di quel che lo siano nella citata Memoria, e saranno anche messe in evidenza le condizioni sotto cui possono dimostrarsi le proposizioni reciproche: *Le funzioni della prima classe hanno derivata logaritmica infinitesima. Le funzioni monotone che divergono meno rapidamente della esponenziale e^{ax} appartengono alla prima classe.*

Ne risulterà così la risoluzione del quesito:

Sotto quali condizioni si può ritenere che i due fatti: di avere derivata logaritmica infinitesima; di divergere meno rapidamente di e^{ax} ; sono per una data funzione monotona, conseguenza l'uno dall'altro?

Messe così in sodo le proprietà fondamentali delle funzioni della prima classe, si potrà poi definire una seconda classe stabilendo che essa debba

(*) Cfr. p. es. DU BOIS REYMOND, questi *Annali*, Serie II, Vol. IV, pag. 338-353.

(**) Vedi p. es. BOREL. *Fonctions Entières*, pag. 7.

comprendere le funzioni $f(x)$ tali che fatto il rapporto

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \varphi(x)$$

ne risultino funzioni $\varphi(x)$ della prima classe, e che non sieno esse stesse della classe prima.

Si vede facilmente che le funzioni di questa classe divergono meno rapidamente di e^{ax^2} , e non meno rapidamente di e^{ax} , (a reale positiva).

Con eguale facilità si definiscono le classi successive, e si cercano le proprietà assintotiche delle funzioni che le compongono.

Ciò è stato già accennato nella citata Memoria, e risulterà meglio da un prossimo lavoro.

§ I.

1. Seguendo le notazioni usate nella mia Nota: *Contributo alla teoria degli insiemi* (*) rappresenterò con Ξ , un insieme *discreto* di punti $[\xi]$ situati in un intorno $(x_0 \dots + \infty)$. La estensione esterna della parte di questo insieme che è situata in un intervallo $(x_0 \dots x)$ finito qualunque, è dunque sempre identicamente nulla.

Indicheremo con K , l'insieme dei punti che rimangono nell'intorno $(x_0 \dots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti tutti i punti di un insieme Ξ .

Queste definizioni non escludono il caso in cui Ξ , si componga di un numero finito di punti, e K , comprenda tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito.

2. Consideriamo prima il caso di due funzioni f, φ , entrambe monotone in un determinato intorno $(x_0 \dots + \infty)$.

Siccome, col prendere x_0 abbastanza grande, possiamo sempre fare che in quell'intorno le funzioni date non abbiano cambiamenti di segno, così si potranno considerare come monotone anche le funzioni $|f|, |\varphi|$, che si ottengono prendendo i loro valori assoluti. Queste $|f|, |\varphi|$ hanno dunque sempre limite determinato (finito, nullo od infinito) per $x = \infty$; ed avendo noi specialmente in vista i casi in cui esse sono ivi entrambe infinite od in-

(*) Loc. cit., n.º 13, pag. 51.

finitesime, potremo limitarci alla considerazione di quelle coppie f, φ , di funzioni, i cui valori assoluti $|f|, |\varphi|$, sono contemporaneamente non decrescenti o non crescenti.

TEOREMA 1.^o *Sieno $f(x), \varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots + \infty)$,*

i loro valori assoluti $|f|, |\varphi|$, sieno, ivi, insieme non decrescenti, delle due derivate f', φ' , una almeno p. es. la φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita $(x_0 \dots x)$,

esistano due numeri positivi m, M , tali che il limite inferiore dei valori assoluti che la f' assume nei punti di un insieme K_1 , compresi in ogni tratto $(x_s, x_s + \delta_s)$ $x_s > x_0, \delta_s > 0$, non sia minore del corrispondente limite inferiore della funzione $m|\varphi'|$, e che il limite superiore della $|f'|$, in quegli stessi punti, non sia maggiore del limite superiore corrispondente della funzione $M|\varphi'|$.

Dico che esistono tre numeri finiti positivi $x_{\mu, \nu}, \mu, \nu$, tali che

$$\left. \begin{array}{l} x > x_{\mu, \nu} \\ \mu m < \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \nu M. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Ed infatti, per le ipotesi poste, e pel teorema 3.^o della Nota: *Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media*, pubblicata nel fascicolo 4.^o dello stesso semestre dei *Rendiconti dei Lincei* (posto, per fissare le idee, che sia φ' quella fra le due derivate che si suppone atta alla integrazione definita), in ogni intervallo finito $(x_1 \dots x)$, $x > x_1 > x_0$, si ha:

$$\int_{x_1}^x m |\varphi'(x)| dx \leq |f(x) - f(x_1)| \leq \int_{x_1}^x M |\varphi'(x)| dx. \quad (2)$$

Siccome la φ' conserva il medesimo segno in tutti i punti, dove non è nulla, dell'intervallo $(x_1 \dots x)$, così avremo ancora

$$m |\varphi(x) - \varphi(x_1)| < |f(x) - f(x_1)| < M |\varphi(x) - \varphi(x_1)|. \quad (3)$$

Se ora le funzioni monotone $f(x), \varphi(x) \dots$ non si riducono a costanti numeriche, ciò che escluderemo, potremo trovare un valore di x abbastanza grande, perchè non sia nulla la differenza $|\varphi(x) - \varphi(x_1)|$. Questa poi, in valore assoluto, non potrà più diminuire, col crescere di x , e, per ogni valor

finito di x , sarà finita e determinata. Potremo dunque dalle (3) dedurre la seguente:

$$m < \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} \right| \leq M. \quad (4)$$

Tenendo nota del fatto che, in nessun punto a distanza finita, le f e φ possono esser nulle nè infinite, avremo ancora:

$$m < \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}} \right| < M. \quad (5)$$

Indichiamo con x_2 un valore di x maggiore di x_1 e per il quale non è nulla nessuna delle due differenze: $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$, $f(x_2) - f(x_1)$, poniamo poi:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \delta_1, \quad \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \delta_2 \quad (6)$$

avremo

$$0 < \delta_1 < 1, \quad 0 < \delta_2 < 1 \quad (7)$$

ed anche

$$x > x_2 \quad \left. \begin{array}{l} 0 < \frac{f(x_1)}{f(x)} < \delta_1 < 1, \quad 0 < \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} < \delta_2 < 1 \end{array} \right\} \quad (8)$$

epperò

$$1 - \delta_1 < \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}} < 1 - \delta_2$$

Dalla (5) perciò ricaveremo:

$$x > x_2 \quad \left. \begin{array}{l} m(1 - \delta_2) < \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \frac{M}{1 - \delta_1} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Questa appunto, fatto $1 - \delta_2 = \mu$, $\frac{1}{1 - \delta_1} = \nu$, $x_2 = x_{\mu\nu}$, è la formula richiesta.

Si considerino p. es. le funzioni

$$f = x + \operatorname{sen} x \cos x \quad \varphi = x + \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Le loro derivate

$$f' = 2 \cos^2 x, \quad \varphi' = \cos^2 x (1 + 4 \operatorname{sen}^2 x),$$

sono nulle in infiniti punti di ogni intorno dell'infinito. Per la determinazione del comportamento assintotico del loro quoziente non servirebbe nè l'ordinario teorema dell'HÔPITAL, nè il criterio dello STOLZ. Se si osserva però che i punti dove esse sono entrambe nulle, costituiscono certamente un insieme discreto, che nei rimanenti punti si ha sempre:

$$2|\varphi'| > |f'| \geq \frac{2}{5} |\varphi'|,$$

e che tutte le altre condizioni dell'enunciato sono soddisfatte, potremo senz'altro concludere che il quoziente $\left| \frac{f}{\varphi} \right|$ è situato fra due numeri finiti e diversi dallo zero, per tutti i valori di x di un determinato intorno dell'infinito: cioè che esse hanno lo stesso ordine di infinito. Ciò del resto, in questo caso, si verifica subito direttamente.

3. Vi sono funzioni che, pur non essendo monotone, si possono dire *generalmente crescenti o decrescenti*.

Tali sono le funzioni relativamente alle quali, ad ogni numero positivo x_1 dell'intervallo $(x_0 \dots + \infty)$, dove si suppongono finite, continue, ad un valore, si può far corrispondere un secondo numero $x_2 \geq x_1$, per modo che i valori corrispondenti a punti dell'intervallo $(x_2 \dots + \infty)$ sieno tutti maggiori (minori) di quelli corrispondenti a punti dell'intervallo $(x_0 \dots x_1)$.

In particolare ciò ha luogo per le funzioni che sono infinite (infinitesime) nel punto $x = \infty$, e sono finite (diverse dallo zero) in ogni punto a distanza finita.

Per funzioni generalmente crescenti si hanno i teoremi seguenti:

TEOREMA 2.^o Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x ad un valore, finite, continue e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots \infty)$.

Il valore assoluto $|\varphi|$ sia ivi monotono, non decrescente.

Relativamente alla funzione f , esistano tre numeri positivi $x_1 \geq x_0$, x_2 , δ , tali che

$$\left. \begin{array}{l} x > x_2, \\ \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right| < \delta < 1. \end{array} \right\} \quad (10)$$

La derivata φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita ($x_0 \dots x$).

Relativamente alle derivate f' , φ' , esista un numero positivo M tale che, il limite superiore dei valori assoluti, che la f' assume nei punti di un insieme K_1 , situati in un intervallo di ampiezza arbitraria ($x_s, \dots x_s + d_s$) $x_s \geq x_0$, $d_s > 0$, non sia maggiore del limite superiore corrispondente della funzione $M|\varphi'|$.

Dico che esiste un numero positivo x_1 tale che:

$$\left. \begin{array}{l} x > x_1, \\ \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \frac{M}{1 - \delta} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Ed infatti, per le ipotesi poste, e pel teorema 4.^o della mia Nota: *Alcuni teoremi*, ecc., già citata, si ha:

$$|f(x) - f(x_1)| < M |\varphi(x) - \varphi(x_1)|. \quad (12)$$

Se la φ non è costante in tutto l'intorno ($x_1 \dots \infty$), ciò che escluderemo, si potrà determinare un numero x_3 abbastanza grande perchè $x \geq x_3$, $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| > 0$, avremo perciò, dalla (12):

$$\left. \begin{array}{l} x > x_3 \\ \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} \right| < M. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Chiamiamo con x_4 quello dei due numeri x_2 , x_3 , che non è minore, tenendo conto della (10), avremo dalla (13):

$$\left. \begin{array}{l} x > x_4 \\ \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \frac{M}{1 - \delta} \end{array} \right\}$$

come appunto volevamo provare.

OSSERVAZIONE. È facile vedere che, se la $|f|$ fosse monotona non decrescente, se per la φ fosse soddisfatta la condizione $x > x_2$, $\left| \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} \right| < \delta < 1$, se la f' fosse integrabile ed il limite inferiore dei suoi valori assoluti nei punti di un insieme K_1 situati nell'intervallo ($x_s, \dots x_s + d_s$) $x_s \geq x_0$, $d_s > 0$, non fosse inferiore a quello della $m|\varphi'|$ in quegli stessi punti, si avrebbe:

$$\left. \begin{array}{l} x > x_4 \\ \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \geq (1 - \delta) m. \end{array} \right\}$$

4. Nel caso in cui nè la f , nè la φ sieno monotone, ma abbiano quella generale tendenza ad aumentare che fu definita al n.º 3, dovremo studiare le relazioni fra le funzioni e le derivate, considerando ed il valore assoluto, ed il segno che esse hanno. Le proprietà che si ricaveranno saranno praticamente meno importanti di quelle date nei numeri precedenti, ma spesso utili per lo studio del quoziente $\frac{f}{\varphi}$. In particolare enuncieremo il teorema, di facilissima dimostrazione:

TEOREMA 3.º *Le funzioni f , φ , della variabile reale x sieno ad un valore, finite, continue, derivabili, in un intorno $(x_0 \dots \infty)$, esistano quattro numeri positivi x_1 , x_2 , δ_1 , δ_2 , tali che*

$$x > x_2, \quad \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right| < \delta_1 < 1, \quad \left| \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} \right| < \delta_2 < 1.$$

Delle due derivate una almeno p. es. la φ' sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo di ampiezza finita $(x_0 \dots x)$, e si possano determinare due numeri m , M , tali che, per i punti di un determinato insieme K , situati in un intervallo $(x_s, \dots, x_s + d_s)$ $x_s > x_0$, $d_s > 0$, sia

$$\begin{array}{ccccccc} \text{il limite inferiore della } f' & > & \text{del limite inferiore di } m \varphi' \\ \text{„ superiore „} & < & \text{„ superiore „} & M \varphi'. \end{array}$$

Dico che esiste un numero x_3 tale che

$$x > x_3 \\ (1 - \delta_2) m \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{M}{1 - \delta_1}.$$

§ II.

5. I risultamenti conseguiti nel § I permettono di enunciare i teoremi seguenti:

TEOREMA 1.º *Sieno f , φ , due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots + \infty)$, i loro valori assoluti $|f|$, $|\varphi|$, sieno entrambi non decrescenti, i punti dove le derivate f' , φ' sono ad un tempo nulle od infinite e quelli*

dove non può essere soddisfatta una relazione della forma :

$$\left. \begin{array}{l} x > x_{m,M} \\ m < \left| \frac{f'}{\varphi'} \right| < M \end{array} \right\} \quad (1)$$

$x_{m,M}$, m , M , numeri positivi, costituiscano un insieme discreto $\Xi_1 [\frac{1}{2}]$.

In tutti gli altri punti x dell'intorno ($x_{m,M}, \dots + \infty$) $x_{m,M} \geq x_0$, sieno invece soddisfatte le (1) e le f' , φ' non sieno insieme nulle od infinite.

Delle due derivate f' , φ' , una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito ($x_0 \dots x$).

Sarà possibile determinare due numeri positivi, diversi dallo zero μ , ν , ed un terzo numero $x_{\mu,\nu}$ abbastanza grande perchè :

$$\left. \begin{array}{l} x \leq x_{\mu,\nu} \\ \mu m \leq \left| \frac{f}{\varphi} \right| < \nu M. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Infatti: la condizione $m |\varphi'| \leq |f'| \leq M |\varphi'|$ è soddisfatta in tutti i punti di un insieme K_1 , e sono parimenti soddisfatte tutte le altre richieste per la validità del teor. 1° , § 1°.

Come esempio, proponiamoci di determinare l'ordine di infinito della funzione :

$$f(x) = \int_0^x \text{sen}^2 x \cdot e^{\cos x} dx.$$

Paragoniamola perciò con la funzione, infinita del primo ordine :

$$\varphi(x) = x - \text{sen } x \cos x.$$

Le derivate $f'(x) = \text{sen}^2 x e^{\cos x}$, $\varphi' = 2 \text{sen}^2 x$ sono insieme nulle in infiniti punti ξ che costituiscono un insieme Ξ_1 certamente discreto, ed in tutti i rimanenti punti $[x]$ dell'intorno ($0 \dots + \infty$) è soddisfatta la relazione $\frac{1}{2e} < \frac{f'}{\varphi'} < \frac{e}{2}$, ciò basta per assicurarci che la funzione f proposta, è infinita del primo ordine per $x = \infty$.

TEOREMA 2.° Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x ad un valore, finite, continue, derivabili in tutti i punti di un intorno ($x_0 \dots \infty$). Il valore assoluto $|\varphi|$ sia ivi sempre non decrescente.

La $f(x)$ soddisfi una relazione della forma :

$$\left. \begin{array}{l} x > x_2, \quad x_0 \leq x_1 < x_2, \\ \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right| \leq \delta < 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

dove x_1, x_2, δ sono numeri positivi determinati.

Delle due derivate f', φ' , una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$, e, fatta tutto al più eccezione dei punti ξ di un insieme discreto Ξ_1 , esse non sieno ad un tempo nulle od infinite e soddisfino la relazione :

$$\left. \begin{array}{l} x > x_M \\ \left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| \leq M, \end{array} \right\} \quad (4)$$

M, x_M , numeri positivi determinati.

Esisteranno due numeri positivi ν, x_ν , tali che :

$$x > x_\nu, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \nu M. \quad (5)$$

TEOREMA 3.º Le funzioni f, φ , della variabile reale x sieno ad un valore, finite, derivabili in un intorno $(x_0, \dots + \infty)$.

Esistano quattro numeri positivi $x_1, x_2, \delta_1, \delta_2$, tali che si abbia :

$$x > x_2, \quad \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right| < \delta_1 < 1, \quad \left| \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} \right| < \delta_2 < 1. \quad (6)$$

Delle due derivate, una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$ e, fatta al più eccezione dai punti di un insieme discreto Ξ_1 , non sieno insieme nulle nè infinite e rendano soddisfatta una relazione della forma :

$$x > x_1, \quad m \leq \frac{f'}{\varphi'} \leq M, \quad (7)$$

m, M , numeri determinati (positivi, nulli, o negativi). Si potrà trovare un numero positivo $x_{\mu, \nu}$, tale che :

$$x > x_{\mu, \nu}, \quad (1 - \delta_2) m \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{M}{1 - \delta_1}. \quad (8)$$

Dimostriamo, per esempio di quest'ultimo teorema, che la funzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \int_0^x \cos x \cdot e^{\cos x - \operatorname{tg}^2 x} (1 + \cos x - x \operatorname{tg} x) dx \\ f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \end{array} \right.$$

non è, per $x = \infty$, infinita di ordine superiore al primo.

Confrontiamola perciò con la funzione

$$\varphi(x) = e^{\cos x} (x + \operatorname{sen} x).$$

Le derivate

$$f'(x) = \cos x e^{\cos x - \operatorname{tg}^2 x} (1 + \cos x - x \operatorname{tg} x)$$

$$\varphi'(x) = \cos x e^{\cos x} (1 + \cos x - x \operatorname{tg} x)$$

sono insieme nulle in un insieme discreto di punti, ed in tutti gli altri punti si ha $0 \leq \frac{f'}{\varphi'} \leq 1$.

Facilmente si verificano le condizioni richieste dall'enunciato per le funzioni f, φ ; e si conclude perciò che esiste un numero positivo L tale che, in tutti i punti di un determinato intorno (x_L, \dots, ∞) , si ha $0 \leq \frac{f}{\varphi} \leq L$.

6. OSSERVAZIONE 1.^a Se delle due funzioni f, φ , una almeno è infinita per $x = \infty$, quello dei due numeri $\delta_1 < \left| \frac{f(x_1)}{f(x)} \right|$, $\delta_2 = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}$ che gli corrisponde, può farsi, per $x_{\mu, \nu}$ abbastanza grande, tanto piccolo quanto si vuole. Dei due numeri $\mu = (1 - \delta_2)$, $\nu = \frac{1}{1 - \delta_1}$, uno dunque può esser fatto tanto vicino quanto si vuole ad 1, e così dei due numeri $\mu m, \nu M$, fra i quali è compreso il quoziente delle funzioni, uno almeno può farsi tanto prossimo quanto si vuole al corrispondente dei numeri m, M fra i quali è compreso il quoziente delle derivate.

In particolare si ha il teorema:

TEOREMA 4.^o Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x ad un valore, monotone e derivabili in tutti i punti di un intorno $(x_0, \dots, +\infty)$, infinite entrambe nel punto $x = \infty$. Delle due derivate f', φ' , una almeno sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito (x_0, \dots, x) , ed il loro

quoziente $\left| \frac{f'}{\varphi} \right|$ abbia limite determinato λ (finito, nullo od infinito), quando la x tende all'infinito percorrendo una successione qualunque $[x_n]$ estratta da un insieme K_1 ; nei punti di K_1 le derivate medesime non sieno insieme nulle nè infinite.

Anche se lungo infinite altre successioni $[\xi_n]$, $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty \right)$ il quoziente $\left| \frac{f'}{\varphi} \right|$ tende ad un limite diverso da λ , o non tende a nessun limite; purchè i punti $[\xi_n]$ costituiscano, nel loro complesso, un insieme discreto, si può asserire che è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \quad (9)$$

qualunque sia il modo con cui x tende all'infinito.

7. OSSERVAZIONE 2.^a È importante notare che, nei casi considerati dall'ultimo teorema, il quoziente delle funzioni e quello delle derivate non hanno in generale la stessa rapidità di tendenza al limite, nemmeno quando esista anche il limite λ del quoziente delle derivate, indipendente dal modo con cui x tende all'infinito (*).

Per vedere la ragione di questo fatto si consideri che preso un numero positivo arbitrario ε , e trovato un numero x_ε tale che

$$x \geq x_\varepsilon, \quad \lambda - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \leq \lambda + \varepsilon, \quad (10)$$

la formula (9) trovata alla pag. 252, ci dà:

$$(\lambda - \varepsilon)(1 - \delta_2) \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq (\lambda + \varepsilon) \frac{1}{1 - \delta_1},$$

cioè:

$$\lambda - (\lambda - \varepsilon)\delta_2 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \lambda + \frac{(\lambda + \varepsilon)\delta_1}{1 - \delta_1} + \varepsilon.$$

(*) È notevole il fatto che una considerazione così semplice ed ovvia sia finora sfuggita ai geometri, che spesso usano il teorema dell'HÔPITAL per determinare l'ordine di infinito del quoziente di due funzioni, supponendo che sia noto quello del quoziente delle derivate. Per citare l'esempio più recente, si vedano le *Leçons sur les séries à termes positifs* del BOREL (Paris 1902) alle pagg. 45 e 46.

Bisogna ora trovare un numero x'_ε , abbastanza grande *rispetto ad* x_ε , perchè i quozienti $\delta_1 = \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x'_\varepsilon)}$, $\delta_2 = \frac{\varphi(x_\varepsilon)}{\varphi(x'_\varepsilon)}$ soddisfino le due relazioni

$$\frac{(\lambda + \varepsilon) \delta_1}{1 - \delta_1} < \varepsilon, \quad (\lambda - \varepsilon) \delta_2 < \varepsilon, \quad (11)$$

e prendere $x > x'_\varepsilon$, se si vuole aver la certezza che sia

$$\lambda - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \lambda + 2\varepsilon. \quad (12)$$

Al tendere di ε allo zero x_ε tende all'infinito, ed anche, in generale almeno, tende all'infinito il rapporto $\frac{x'_\varepsilon}{x_\varepsilon}$. Sembrerebbe di poter concludere che *il rapporto delle funzioni non tende al limite più rapidamente di quello delle derivate*. Anche tale conclusione però non sarebbe rigorosa perchè, se le condizioni richieste per il numero x'_ε sono sufficienti per la esattezza della (12), non sono però sempre necessarie, ed in particolare la (12) potrebbe anche essere soddisfatta per valori x''_ε di x inferiori a quelli che rendono valida la (10).

A questo proposito si noti che, se la rapidità di convergenza al limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ dovesse essere superiore a quella del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, il numero x''_ε dovrebbe essere in tale relazione col numero x_ε , dianzi definito, da rendere infinitesimo il rapporto

$$\left| \frac{\lambda - \frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)}}{\lambda - \frac{f'(x''_\varepsilon)}{\varphi'(x''_\varepsilon)}} \right|, \quad (13)$$

o, nel caso di $\lambda = +\infty$, da rendere infinito il rapporto

$$\frac{\frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)}}{\frac{f'(x''_\varepsilon)}{\varphi'(x''_\varepsilon)}}. \quad (14)$$

Si verifica subito, nei casi di $\lambda = 0$, o di $\lambda = \infty$, che il rapporto delle funzioni non può essere infinitesimo (infinito) di ordine superiore a quello delle derivate.

Sia per es.

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{\varphi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{\varphi'} = 0.$$

Supporremo che la funzione $\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ non sia una di quelle che fanno infinite oscillazioni in tratti arbitrariamente piccoli. Questa condizione del resto è certamente soddisfatta se si ammette la ipotesi che la derivata $\psi'(x)$, sia integrabile in ogni intervallo finito di un determinato intorno dell'infinito. (DINI, *Fondamenti*, pag. 283.) Ciò posto, potremo determinare una successione di segmenti:

$$x_n + h_n, \quad h_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots + \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = + \infty,$$

tali che sia contemporaneamente:

$$k \leq h_n, \quad \frac{f(x_n + k)}{\varphi(x_n + k)} \leq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad \varphi(x_n + k) > \varphi(x_n). \quad (15)$$

Ed infatti, nelle ipotesi poste per le f, φ , nei tratti dove si ha

$$\frac{f(x_n + k)}{\varphi(x_n + k)} \leq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

non può essere

$$\varphi(x_n + k) = \varphi(x_n)$$

senza che sia anche

$$f(x_n + k) = f(x_n),$$

e ciò è escluso dalle ipotesi che le f e φ sieno monotone e che le f', φ' non possano essere nulle contemporaneamente se non in punti di un insieme discreto.

In tali segmenti si avrà ancora perciò:

$$\frac{f(x_n + k) - f(x_n)}{\varphi(x_n + k) - \varphi(x_n)} \leq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

cioè:

$$\frac{f'(x_n + \theta k)}{\varphi'(x_n + \theta k)} \leq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}. \quad (16)$$

Siccome queste disequaglianze debbono aver luogo per tutti i valori positivi di $k < h_n$, ne dedurremo:

$$\frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)} \leq \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots + \infty),$$

e ciò esclude che sia infinitesimo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (17)$$

nel punto $x = + \infty$.

Il ragionamento fatto vale indipendentemente dalla ipotesi che sia determinato il limite di $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Si consideri ora che, se il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ avesse per $x = +\infty$ limite finito e diverso dallo zero, il quoziente delle derivate dovrebbe tendere allo stesso limite, almeno lungo certe determinate successioni x_n , e perciò il quoziente $\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}$, non potrebbe essere determinato per $x = +\infty$ senza avere ivi il valore 1.

Potremo dunque enunciare il seguente **criterio**:

Se le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ sono entrambe infinite per $x = \infty$, se la espressione $\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ è nel punto $x = \infty$ infinita (infinitesima), il quoziente delle due funzioni $\frac{f}{\varphi}$ non può essere determinato senza essere infinitesimo (infinito).

Questo criterio ha pratica importanza nei casi in cui anche le f' , φ' sieno entrambe infinite per $x = \infty$. Per citare un esempio notissimo, fatto $f = e^x$, $\varphi = x^\mu$, il fatto che la (17) è in questo caso infinitesima e che per $x > \mu$ $\psi'(x)$ è positiva, induce alla conclusione che l'ordine di infinito della f è superiore a qualunque numero reale μ .

Non è poi da credere (come sembrerebbe di poter fare leggendo alla prima i trattati di calcolo) che le funzioni che sono infinite per $x = +\infty$, non possano, in quel punto, aver derivata determinata, se non infinita; vedremo infatti fra poco, che tutte le funzioni che hanno ordine di infinito inferiore al 1.° non possono avere derivata determinata nel punto $x = +\infty$, se questa non è infinitesima.

§ III.

8. Indicherò con $\Xi, [\xi]$ o brevemente con Ξ_2 un insieme di punti $[\xi]$ situati nell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, se il rapporto $\frac{S(x)}{x - x_0}$ fra la estensione esterna della parte di Ξ_2 contenuta nell'intervallo $(x_0, \dots x)$ e la lunghezza

di questo medesimo intervallo, tende allo zero per $x = \infty$ (*). Indicherò ancora con $K_2 [x]$, o semplicemente con K_2 , l'insieme dei punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \dots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti quelli di un insieme Ξ_2 .

Mi propongo ora di dimostrare che, introducendo per le f' , φ' alcune nuove ipotesi che nei casi ordinari sono sempre verificate, i punti ξ nei quali il quoziente delle derivate può assumere valori arbitrari possono costituire un insieme Ξ_2 , cioè anche avere dimensione infinita, senza che il quoziente delle funzioni cessi dall'essere determinato nel punto $x = + \infty$.

TEOREMA 5.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile x , ad un valore, finita monotona e derivabile in tutti i punti a distanza finita di un intorno $(x_0, \dots + \infty)$.*

Se ad ogni numero ε positivo assegnato si può far corrispondere un numero x_ε abbastanza grande perchè in un insieme K_2 di punti situati entro l'intorno $(x_\varepsilon, \dots + \infty)$ sia $|f'(x)| < \varepsilon$,

se esiste un numero positivo M tale che la relazione $|f'(x)| > M$ non possa aver luogo che nei punti di un insieme discreto Ξ_1 ,

se la $f'(x)$ è integrabile (propriamente od impropriamente) in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$,

potremo determinare due numeri positivi μ , x_μ , tali che sia:

$$x > x_\mu \quad \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon \mu.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente nell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, anche la $f'(x)$ sarà ivi positiva, o nulla. Escludiamo anche il caso che $f(x)$ sia costante in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito. Nel qual caso il teorema è evidente.

Indichiamo con $F'(x)$ una funzione che è eguale ad $f'(x)$ nei punti dove questa è $< M$, ed è $= 0$, nei punti dove è $f'(x) > M$. Poichè questi ultimi punti formano un insieme discreto Ξ_1 , la estensione esterna di quella parte di Ξ_1 che è contenuta in un intervallo finito qualunque $(x_\varepsilon, \dots x)$ sarà identicamente nulla: avremo perciò:

$$f(x) - f(x_\varepsilon) = \int_{x_\varepsilon}^x f'(x) dx = \int_{x_\varepsilon}^x F'(x) dx (**).$$

(*) Cfr. la mia Nota, *Contributo alla teoria degli insiemi*, n.° 10.

(**) Cfr. p. es. E. H. MOORE, *Of improper definite integrals*. (Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 2, n.° 3, pag. 307, teorema IV (Corollario).)

Dividendo l'intervallo $(x_\varepsilon, \dots x)$ in tratti di lunghezza $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ ed indicando con F_r uno qualunque dei valori che la $F(x)$ assume nel tratto δ_r , avremo ancora

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{\delta_r=0} \sum \delta_r F_r.$$

Per ogni sistema di valori δ_r i termini della somma al secondo membro sono tutti positivi (o nulli). Riunisco insieme quelli che corrispondono a valori $F_r < \varepsilon$, e quelli che corrispondono a valori $F_r > \varepsilon$, minori però sempre, come sappiamo, di M .

Indicando con $S(x)$ l'estensione esterna della parte di Ξ_ε contenuta in $(x_\varepsilon, \dots x)$, avremo immediatamente:

$$x > x_\varepsilon, \quad f(x) - f(x_\varepsilon) < (x - x_\varepsilon) \varepsilon + S(x) M.$$

Di qui si ricava

$$x > x_\varepsilon, \quad \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon + \frac{S(x)}{x - x_\varepsilon} M.$$

Per le ipotesi poste si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x - x_\varepsilon} = 0$: ad ogni numero $\sigma = \frac{\varepsilon}{M}$ potremo far corrispondere un x_σ abbastanza grande perchè

$$x \geq x_\sigma, \quad \frac{S(x)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon,$$

epperò avremo:

$$x > x_\sigma, \quad \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{x - x_\varepsilon} < 2\varepsilon$$

cioè

$$x > x_\sigma, \quad \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{x_\varepsilon}{x}} < 2\varepsilon.$$

Fissato un $x_\mu > x_\sigma$ al quale corrisponda un valore diverso dallo zero per la differenza $1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x_\mu)}$, cioè un valore finito μ per il quoziente $\frac{1 - \frac{x_\varepsilon}{x_\mu}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x_\mu)}}$ avremo in fine

$$x > x_\mu, \quad \frac{f(x)}{x} < 2\mu\varepsilon. \quad \text{c. d. d.}$$

TEOREMA 6.° Sieno f, φ , due funzioni della variabile reale x , ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili nell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$. La φ sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. Le loro derivate sieno atte alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$. Il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1 , abbia, nell'intorno considerato, limite superiore finito, ed, almeno per i punti di un insieme K_2 , situato in un determinato intorno $(x_0, \dots + \infty)$, si mantenga inferiore ad un numero positivo arbitrario ε .

Ciò basta per poterne concludere: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Se poniamo infatti $z = \varphi(x)$, stabiliremo fra i punti dell'intorno $(x_0, \dots \infty)$ e quelli dell'intorno $(z_0 = \varphi(x_0), \dots + \infty)$ una corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, e potremo applicare le conclusioni trovate ai n.° 18, 19, 20, della mia Nota: *Contributo alla teoria degli insiemi*. In particolare, ad un insieme discreto di punti $\Xi_1(\xi)$ dell'intorno $(x_0, \dots \infty)$ corrisponderà un insieme discreto dell'intorno $(z_0, \dots \infty)$, e ad un insieme $K_2[x]$, corrisponderà ancora un insieme $K_2[z]$. Ora, ricavando dalla $z = \varphi(x)$ la funzione inversa $x = \psi(z)$, questa sarà ancora sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, avremo dunque:

$$f(x) = f(\psi(z)) = F(z), \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F(z)}{z}, \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = F'(z).$$

Applicando alla $F(z)$ il teorema precedente, si avrà infine:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{z} = 0, \quad \text{cioè ancora:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

COROLLARIO. Sieno f, φ , funzioni della variabile reale x ad un valore, finite, derivabili in tutti i punti a distanza finita dell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, le derivate f', φ' sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$, il loro quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1 , non abbia limite superiore infinito ed, almeno quando x va all'infinito lungo successioni estratte da un insieme K_2 , si abbia $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{\varphi'} = \lambda$; λ finito e diverso dallo zero. Se oltre a ciò la funzione φ va all'infinito sempre crescendo per $x = +\infty$, e la funzione $F = f - \lambda \varphi$ è monotona in un determinato intorno dell'infinito; ciò basterà per concludere che è $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda$.

La dimostrazione si fa applicando il teorema precedente alle funzioni F, φ .

Se si considera che, nei punti di K_2 , si ha $\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'}{f'} = \frac{1}{\lambda}$; si vede facilmente che il teorema si può applicare tutte le volte che delle due funzioni f, φ , una almeno vada all'infinito sempre crescendo.

TEOREMA 7.° Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x , ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili in tutto l'intorno $(x_0, \dots + \infty)$. La f sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. Le loro derivate f', φ' siano atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$. Il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto Ξ_1 , non abbia limite inferiore nullo ed, almeno nei punti di un insieme K_2 contenuti nell'intorno $(x_M, \dots + \infty)$ si mantenga superiore a qualunque numero positivo M . Ciò basterà per poterne concludere

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Le condizioni che, in forza di questi ultimi teoremi, sono sufficienti per la esistenza del $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sono molto generali.

Il quoziente delle derivate può assumere valori arbitrari in infiniti punti ξ , si domanda solo che il rapporto fra la estensione esterna dell'insieme di questi punti ξ contenuti in un intervallo $(x_0, \dots x)$, e la lunghezza dell'intervallo stesso, sia infinitesimo per $x = \infty$.

Vedremo fra poco che queste condizioni sono anche necessarie perchè sia nullo (od infinito) il $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

§ IV.

9. Ci siamo fino ad ora specialmente occupati di funzioni non decrescenti, ed in particolare di quelle che sono infinite per $x = \infty$.

Analoghi risultamenti si hanno per le funzioni *non crescenti*. Queste hanno

sempre limiti determinati e finiti (o nulli) per $x = \infty$. Se è $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$, e poniamo $F = f(x) - \alpha$, la F sarà una funzione positiva, monotona, tendente allo zero, e nel caso che la $f(x)$ sia derivabile la F avrà in ogni punto la stessa derivata della f .

Possiamo dunque limitarci al caso di funzioni positive, monotone, infinitesime per $x = \infty$.

Non intendo dilungarmi su questo argomento, mi limiterò anzi ad un cenno della dimostrazione del seguente teorema che servirà a far risaltare alcune differenze, del resto poco notevoli, che si riscontrano.

TEOREMA 3.° *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni della variabile reale x , ad un valore, monotone, positive, derivabili in tutti i punti dell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, infinitesime per $x = +\infty$. Una almeno delle due derivate, per es. la φ' , sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$. Esistano due numeri m, M positivi ed un numero $x_{m,M}$, abbastanza grande perchè, fatta al più eccezione dai punti di un insieme discreto $\Xi, [\xi]$, si abbia:*

$$x \geq x_{m,M}, \quad m |\varphi'| \leq |f'| \leq M |\varphi'|.$$

Ciò basterà per poterne concludere:

$$x > x_{m,M} \quad m < \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq M. \quad (19)$$

Basta infatti, analogamente a quanto s'è fatto pel teorema 1.°, notare che dalle condizioni proposte si ricava

$$x > x_1, \quad x_1 \geq x_{m,M}, \quad m < \frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} \leq M,$$

cioè

$$x > x_1, \quad x_1 \geq x_{m,M} \quad m \leq \frac{1 - \frac{f(x)}{f(x_1)}}{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}} \cdot \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \leq M.$$

Si può ora prendere x abbastanza grande, rispetto ad x_1 , perchè i quozienti $\frac{f(x)}{f(x_1)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}$ sieno minori di qualunque quantità positiva, dunque rimane

$$x_1 \geq x_{m,M}, \quad m \leq \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \leq M. \quad \text{c. d. d.}$$

10. OSSERVAZIONE. È bene notare che, se le derivate f' , φ' non sono nulle od infinite contemporaneamente se non nei punti di un insieme discreto, il quoziente delle funzioni è contenuto fra gli stessi limiti di quello delle derivate, e per punti dello stesso intorno ($x_m, M, \dots \infty$).

Se dunque il quoziente delle derivate ha limite determinato λ (finito, nullo od infinito) quello delle funzioni tende allo stesso limite con rapidità non minore.

Ciò a distinzione del fatto, a suo luogo accertato, che ha luogo per i quozienti di funzioni infinite per $x = \infty$.

Nel caso presente, di funzioni cioè infinitesime per $x = +\infty$, monotone in un determinato intorno ($x_0, \dots +\infty$); avremo che: *Se il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è infinito (infinitesimo) per $x = +\infty$, la espressione $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)$ non può essere infinitesima (infinita). Se il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ha limite finito e diverso dallo zero, la espressione $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} : \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)$, se è determinata, tende ad 1 per $x = \infty$.*

Si ricava di qui il seguente criterio:

Se la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ è infinita (infinitesima) per $x = \infty$, il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ delle due funzioni f , φ , infinitesime entrambe per $x = \infty$, non può essere determinato senza essere anch'esso infinito (infinitesimo).

Questo criterio ha importanza pratica per il fatto che la derivata di una funzione infinitesima per $x = \infty$, non può essere determinata nel punto $x = \infty$, senza esser ivi infinitesima, e perciò il quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ ha sempre la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, mentre che la espressione $\left(\frac{f}{\varphi} : \frac{f'}{\varphi'}\right)$ può essere in molti casi determinata.

§ V.

11. I teoremi seguenti hanno per iscopo di stabilire delle condizioni necessarie per la esistenza del $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Accostando i risultamenti che troveremo a quelli conseguiti nei § precedenti, ne risulteranno in taluni casi molto importanti, le condizioni necessarie e sufficienti per la validità del criterio dell'HÔPITAL.

TEOREMA 9.^o *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x , ad un valore, monotona, finita, continua, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0, \dots + \infty)$. Esista un numero positivo λ a cui si possa far corrispondere un numero $x_\lambda > x_0$ tale che:*

$$x > x_\lambda, \quad \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \lambda. \quad (20)$$

La derivata $f'(x)$ sia inoltre atta alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo $(x_0, \dots x)$.

Dico che esiste un numero finito e diverso dallo zero μ , a cui si può coordinare un x_μ abbastanza grande perchè la condizione:

$$|f'(x)| < \mu \lambda, \quad (21)$$

sia soddisfatta almeno in tutti i punti di un insieme K_2 situato nell'intorno $(x_\mu, \dots \infty)$.

È facile vedere che la condizione (21) finisce coll'esser soddisfatta per tutti i termini x_n che hanno indice abbastanza grande, di infinite successioni tendenti all'infinito (*).

Consideriamo ora l'insieme $[\xi]$ dei punti ξ , nei quali essa può non essere soddisfatta. Dico che questo insieme è uno di quelli che nei § precedenti furono indicati con Ξ_2 .

Sia $x_\mu = x_1, x_2, x_3, \dots$, una successione che tende all'infinito sempre crescendo, e supponiamo che x_n non sia, per $n = \infty$, infinita di ordine su-

(*) Cfr. p. es., STOLZ, loc. cit., D. B. REYMOND: *Ueber den Satz $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$* , (Mat. Ann. XVI, pag. 550).

periore al primo: cioè che esista un numero positivo ν , ed un indice n , abbastanza grande perchè sia:

$$n > n_\nu, \quad \frac{n}{x_{n+1}} > \nu. \quad (22)$$

Indichiamo con $\delta_{1n}, \delta_{2n}, \delta_{3n}, \dots$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) i limiti inferiori degli intervalletti situati nel segmento $(x_n, \dots x_{n+1})$ e che contengono punti, o punti limiti dell'insieme $[\xi]$.

Entro qualunque tratticello $\delta_{r,sn}$, che faccia parte di uno degli intervalletti δ_{sn} , deve essere dunque situato almeno uno dei punti ξ in cui si ha

$$|f'(\xi)| > \lambda, \quad (\lambda, \text{ positivo, scelto prima a piacere}). \quad (23)$$

Tenendo conto della integrabilità della f' e del fatto che essa ha sempre il medesimo segno in tutti i punti, dove non è nulla, dell'intervallo $(x_n, \dots x_{n+1})$, avremo perciò:

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| > \lambda \sum \delta_{sn}. \quad (24)$$

Poniamo ora che la somma $S_n = \sum \delta_{sn}$, che rappresenta la dimensione esterna della parte di $[\xi]$ contenuta in $(x_n, \dots x_{n+1})$ si mantenga superiore ad un numero σ indipendente da n . Ricordando che la $f(x)$ è monotona, avremo dalla (24):

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| > n \sigma \lambda,$$

e, per la (22)

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| > x_{n+1} \nu \sigma \lambda,$$

cioè

$$\left| \frac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}} \right| > \nu \sigma \lambda - \frac{f(x_n)}{x_{n+1}}. \quad (25)$$

Ma, al crescere di n , il quoziente $\frac{f(x_n)}{x_{n+1}}$ tende allo zero, potremo dunque determinare due numeri positivi ν_1, N , tali che

$$n > N, \quad \left| \frac{f(x_n)}{x_n} \right| > \nu_1 \sigma \lambda. \quad (26)$$

Supposto ora $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\nu_1 \sigma}$, ne viene:

$$x_n \geq x_N, \quad \left| \frac{f(x_n)}{x_n} \right| > \lambda,$$

in contraddizione con la (20).

Se poniamo $\mu = \frac{1}{\nu \sigma}$, vediamo dunque che le dimensioni esterne S_n degli insiemi di punti ξ , che possono fare eccezione alla (21) e sono situati negli intervalli $(x_n, \dots x_{n+1})$, dove x_n è una successione sempre crescente infinita, per $n = \infty$ di ordine non superiore al primo, divengono infinitesime per $n = \infty$.

Tutti i punti $[\xi]$ costituiscono quindi un insieme Ξ_2 (*) come appunto volevamo provare.

In particolare: Se $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$ è infinitesima, per $x = \infty$, cioè se $|f(x)|$ è infinita di ordine inferiore al primo, la derivata $f'(x)$ è infinitesima, per x che tende all'infinito lungo qualunque successione x_n estratta da un insieme K_2 .

12. Ricordando il teorema 5.° potremo concludere:

TEOREMA 10.° Sia $f(x)$ una funzione della variabile x , ad un valore, finita, continua, derivabile, monotona in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0, \dots + \infty)$.

La sua derivata sia atta alla integrazione definita (propria od impropria) in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$, ed, esclusi tutto al più i punti di un insieme discreto, abbia, nell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, limite superiore finito.

Condizione **necessaria e sufficiente** perchè sia

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

cioè perchè la funzione data sia infinita di ordine inferiore al primo, per $x = +\infty$, si è che il rapporto fra la dimensione esterna dell'insieme $[\xi]$ dei punti contenuti in un intervallo $(x_\varepsilon, \dots x)$ e nei quali la $f'(x)$ non può essere in valore assoluto minore del numero positivo ε scelto a piacere, alla dimensione dell'insieme $[x]$ di quei punti dove invece è $|f'(x)| < \varepsilon$, tenda allo zero, col crescere indefinito di x .

13. **TEOREMA 11.°** Sia φ una funzione della variabile reale x , ad un valore, finita, continua, derivabile, sempre crescente in tutti i punti dell'in-

(*) Cfr. il n.° 9 della mia Nota, *Contributo alla teoria degli insiemi*.

torno $(x_0, \dots \infty)$, e sia infinita nel punto $x = \infty$. Sia $f(x)$ una funzione monotona, finita, continua, derivabile nei punti di quel medesimo intorno e la sua derivata sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots \infty)$. Esistano due numeri positivi λ, x_λ , tali che

$$x > x_\lambda, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \lambda.$$

Dico che la relazione $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} < \mu \lambda$, μ positivo determinato, ha luogo in tutti i punti di un insieme K_2 contenuto in un determinato intorno $(x_\mu, \dots \infty)$.

La dimostrazione non offre difficoltà ed è analoga a quella fatta per il teorema 6.°

Così pure tralasciamo la dimostrazione del teorema seguente :

TEOREMA 12.° Se $|f|$ e $|\varphi|$ sono funzioni della variabile reale x , ad un valore, sempre crescenti, finite, continue, derivabili in tutti i punti a distanza finita di un intorno $(x_0, \dots + \infty)$, infinite entrambe per $x = + \infty$. Se le loro derivate sono atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$.

Se ha luogo la relazione :

$$x > x_0 \quad m \leq \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \leq M,$$

esisteranno due numeri positivi μ, ν , ed un numero x_μ , abbastanza grande perchè in tutti i punti di un insieme K_2 contenuto nell'intorno $(x_\mu, \dots \infty)$ sia soddisfatta la relazione

$$\mu m \leq \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \leq \nu M.$$

In particolare : Se il quoziente $\frac{f}{\varphi}$, ha, per $x = + \infty$, limite determinato (finito od infinito), quello delle derivate, tende, almeno lungo infinite successioni estratte in modo qualunque da un insieme K_2 , a quel medesimo limite.

Ricordando i teoremi 6.° e 7.° potremo in fine enunciare i teoremi :

TEOREMA 13.° Sieno f e φ due funzioni della variabile reale x , ad un valore, finite, continue, monotone, derivabili nell'intorno $(x_0, \dots \infty)$. La φ (la f)

inoltre sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. Il quoziente delle loro derivate non possa avere limite superiore infinito (limite inferiore nullo) se non, tutt'al più, nei punti di un insieme discreto; le derivate medesime sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0, \dots x)$. Dico che, **condizione necessaria e sufficiente**, perchè l'ordine di infinito della f sia inferiore (superiore) a quello della φ , si è che, ad ogni numero positivo ε piccolo ad arbitrio, (grande quanto si vuole) possa coordinarsi un numero x_ε tale che il rapporto fra la estensione esterna dell'insieme dei punti $[x]$ situati nell'intervallo $(x_\varepsilon, \dots x)$ pei quali è soddisfatta la relazione $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} < \varepsilon$ ($\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > \varepsilon$) alla estensione dell'insieme dei punti $[\xi]$ in cui quella relazione non può essere soddisfatta, tenda all'infinito insieme ad x .

OSSERVAZIONE. Il teorema 12, insieme col corollario del teor. 6°, non possono senz'altro fornirci le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza del limite λ , finito e diverso dallo zero; pel quoziente $\frac{f}{\varphi}$. Invero: la condizione di essere monotona, per la $F = f - \lambda\varphi$, è stata trovata sufficiente, ma non risulta come necessaria dalle dimostrazioni fatte.

§ VI.

Lo studio del comportamento assintotico della *derivata logaritmica*, che fu già dal DU BOIS REYMOND posto a base della classificazione delle funzioni secondo l'ordine di infinito (*), ha assunto in questi ultimi tempi importanza specialissima per tutte le quistioni riguardanti il calcolo infinitario.

Non sembrerà quindi inopportuno che io qui accenni alle applicazioni che trovano, in questo campo, alcuni dei teoremi stabiliti nei §§ precedenti.

14. Per conservare le notazioni usate precedentemente, indicherò con Ξ_ε un insieme di punti $[\xi]$ appartenenti ad un intorno $(x_0, \dots +\infty)$, se il rapporto fra la estensione esterna della parte di Ξ_ε contenuta nell'intervallo $(x_0, \dots x$ alla lunghezza $x - x_0$ dell'intervallo stesso, è infinitesimo per $x = \infty$.

(*) Questi *Annali*, Serie II, Vol. IV, pag. 338-393 (1870).

Annali di Matematica, Serie III, tomo VIII.

Indicherò con K_2 l'insieme dei punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \dots + \infty)$ dopo che se ne sono tolti i punti $[\xi]$.

15. TEOREMA 1.^o Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x , ad un valore, finita, continua, monotona e che ha derivata atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito di un determinato intorno $(x_0, \dots + \infty)$.

Dico che, se essa soddisfa la condizione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1, \quad (1)$$

la sua derivata logaritmica è infinitesima per x che tende all'infinito lungo infinite successioni ξ_n che costituiscono nel loro complesso un insieme egualmente denso nell'intorno $(x_0, \dots + \infty)$, e che:

ad ogni numero positivo ε se ne può coordinare uno x_ε abbastanza grande perchè, in tutti i punti $[x]$ di un insieme K_2 contenuto in $(x_\varepsilon, \dots + \infty)$, sia soddisfatta la relazione:

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Ci limiteremo, per maggior semplicità, a funzioni $f(x)$ positive non decrescenti.

Facilmente si vede che, per qualunque numero h positivo anche variabile con x ma non avente limite superiore infinito, si ha, per le ipotesi poste:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 1. \quad (1')$$

Scriviamo poi:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(\xi_{x,h}) \quad x \leq \xi_{x,h} \leq x+h,$$

Di qui si ricava

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = 1 + h \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \cdot \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)}. \quad (3)$$

Dalla (1') si deduce che, ad ogni coppia di numeri h, σ , positivi arbitrari, si può coordinare un numero $x_{h,\sigma}$, abbastanza grande perchè

$$x > x_{h,\sigma}, \quad 1 \leq \frac{f(x+h)}{f(x)} \leq 1 + \sigma.$$

Dalle (3) perciò ricaveremo:

$$x > x_{h,\sigma}, \quad h \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \cdot \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} < \sigma, \quad x \leq \xi_{x,h} \leq x+h.$$

Ma si ha $\frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} \geq 1$, dunque, posto $\frac{\sigma}{h} = \varepsilon$, $x_{h,\sigma} = x_\varepsilon$, si ha

$$x > x_\varepsilon, \quad \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon, \quad x \leq \xi_{x,h} \leq x + h. \quad (4)$$

Poichè, ad ogni coppia x, h , corrisponde un numero $\xi_{x,h}$ situato fra x , ed $x + h$, così la (4) prova la prima parte del teorema.

Dico ora che non è possibile che esistano due numeri positivi η, δ , ai quali si possa coordinare un numero M abbastanza grande, perchè, avendo scelto a piacere un valore x_1 dell'intorno $(x_0 \dots + \infty)$, se ne trovi poi un altro almeno $x_2 > x_1$, tale, che l'insieme dei punti ξ situati nell'intervallo $(x_2, x_2 + M)$ e per i quali si può soddisfare la condizione:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \geq \delta, \quad (5)$$

abbia estensione esterna non minore di η .

Dato che un tale intervallo esista, poichè, per le ipotesi poste, le funzioni $f'(x), \frac{f'(x)}{f(x)}$, sono entrambe integrabili, ed è inoltre:

$$x \geq x_2, \quad \frac{f'(x)}{f(x_2)} \geq \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 0, \quad (6)$$

avremo:

$$f(x_2 + M) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_2+M} f'(x) dx,$$

$$\frac{f(x_2 + M)}{f(x_2)} - 1 = \int_{x_2}^{x_2+M} \frac{f'(x)}{f(x_2)} dx \geq \int_{x_2}^{x_2+M} \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

e, per la (5), e per la ipotesi posta sulla estensione esterna dell'insieme $[\xi]$,

$$\frac{f(x_2 + M)}{f(x_2)} - 1 \geq \eta \delta.$$

Ciò dovendo accadere per valori x_2 grandi a piacere, contraddice l'ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + M)}{f(x)} = 1.$$

Si vede dunque che l'insieme dei punti $[\xi]$, dove la (2) può non essere soddisfatta, gode della proprietà che la estensione esterna di quella sua parte

che è contenuta in un intervallo $(x \dots x + M)$ di ampiezza finita, diventa infinitesima col crescere indefinito di x . L'insieme $[\xi]$ è perciò (*) un insieme Ξ_2 , e quello dei punti dove invece la (2) è soddisfatta è un insieme K_2 . c. d. d.

16. TEOREMA 2.^o Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x , ad un valore, finita, continua, monotona e che ammette derivata atta alla integrazione definita in qualunque intervallo finito dell'intorno $(x_0 \dots + \infty)$.

Ad ogni numero ε positivo, se ne possa coordinare uno x_ε abbastanza grande perchè la relazione:

$$\left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right| < \varepsilon \quad (7)$$

sia soddisfatta nei punti $[\xi]$ di un insieme denso egualmente nell'intorno $(x_\varepsilon \dots + \infty)$.

Dico che si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1. \quad (8)$$

Preso infatti un numero $x > x_\varepsilon$, dividiamo l'intervallo $(x, \dots x+1)$ in un numero arbitrario di tratti $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \dots$

Entro ogni tratto ∂_r si dovranno poter trovare punti nei quali è soddisfatta la (7).

Indichiamo con ξ_r uno di tali punti.

Per la integrabilità della $f'(x)$, avremo:

$$f(x+1) - f(x) = \lim \sum \partial_r f'(\xi_r). \quad (9)$$

Possiamo sempre supporre x_ε abbastanza grande perchè la $f(x)$ non cambi segno, e quindi non si annulli mai, nell'intorno $(x_\varepsilon, \dots + \infty)$. Ivi è dunque integrabile anche la funzione $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente: avremo allora:

$$\xi_r \leq x+1, \quad \frac{f'(\xi_r)}{f(x+1)} \leq \frac{f'(\xi_r)}{f(\xi_r)} < \varepsilon,$$

(*) Cfr. il n.º 9 del mio *Contributo alla teoria degli insiemi*.

epperò, dalle (9) si ha :

$$x \geq x_\varepsilon, \quad 1 - \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim \sum \delta_r \frac{f'(\xi_r)}{f(\xi_r+1)} \leq \lim \sum \delta_r \frac{f'(\xi_r)}{f(\xi_r)} < \varepsilon \quad (10)$$

e ciò prova l'asserto.

17. Accostando questo teorema al precedente, si vede che la condizione $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} < \varepsilon$, che pel teor. 1.^o è necessaria e per il teorema 2.^o sufficiente, affinchè si abbia $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, non è dai due enunciati richiesta per gli stessi insiemi di punti. E cioè: i punti nei quali deve essere soddisfatta la condizione necessaria costituiscono un insieme non necessariamente denso in ogni punto dell'intorno in cui esso è situato, ciò è sempre richiesto invece dal secondo teorema.

Per giungere ad una condizione necessaria e sufficiente basterebbe provare che l'insieme $K_\varepsilon(x)$ di cui si è fatto parola al teor. 1.^o è denso egualmente in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito.

È bene di non confondere il complesso di tutti i termini $\xi_{x,h}$ delle successioni lungo le quali si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} = 0, \quad (11)$$

con l'insieme dei punti pei quali è

$$\frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon. \quad (12)$$

Fissato un ε , ad ogni valore di h corrisponde un valore $x_{\varepsilon,h}$ tale che

$$x > x_{\varepsilon,h}, \quad x \leq \xi_{x,h} \leq x + h, \quad \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} < \varepsilon,$$

ma, non si può escludere che, al tendere di h allo zero $x_{\varepsilon,h}$ non tenda all'infinito, e così non si può asserire che, entro un determinato intorno dell'infinito, i valori che fanno parte di successioni lungo le quali è soddisfatta la (11) soddisfino anche tutti la (12).

Quella convergenza uniforme che occorrerebbe richiedere, ha sicuramente luogo quando si tratti di funzioni che hanno derivata logaritmica determi-

nata nel punto $x = \infty$; poichè, in forza delle (11), il limite: $\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ non può esistere senza essere nullo.

Si può aggiungere ancora che:

il teorema fondamentale della mia Memoria: *Sulla Determinazione dell'ordine di infinito*, vale, per le funzioni che hanno derivata logaritmica determinata per $x = +\infty$, indipendentemente dalle ipotesi che la derivata ordinaria $f'(x)$, sia integrabile in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$ e che sia determinata per $x = +\infty$.

Dimostrerò infatti il teorema seguente:

TEOREMA 3.º *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$ della variabile reale x , ad un valore, finita, continua, monotona, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots +\infty)$ e che ammette derivata logaritmica determinata anche nel punto $x = +\infty$, soddisfi la condizione*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

è che la sua derivata logaritmica sia infinitesima per $x = \infty$.

La formula (4) trovata al teor. (1), senza aver ricorso alla supposta integrabilità della $f'(x)$, dimostra appunto che la condizione è necessaria.

Veniamo alla seconda parte: *La condizione è sufficiente*. Questa, che nel mio lavoro più volte citato, *Sulla determinazione, ecc.*, ha l'importanza maggiore, si trova ivi dimostrata in tre diversi modi. Mi permetto di riportare qui la terza dimostrazione perchè è semplicissima ed ha la massima generalità.

Supponiamo, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia positiva non decrescente, e vediamo se è possibile che lungo una successione x_n di punti tendenti all'infinito, sia sempre

$$\frac{f(x_n+1)}{f(x_n)} > \delta, \quad \delta > 1. \quad (13)$$

Si ha intanto:

$$f(x_n+1) = f(x_n) + f'(\xi_n), \quad x_n \leq \xi_n \leq x_n+1,$$

$$\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)} = \frac{f(x_n+1)}{f(\xi_n)} - \frac{f(x_n)}{f(\xi_n)} = \frac{\frac{f(x_n+1)}{f(x_n)} - 1}{\frac{f(\xi_n)}{f(x_n)}}. \quad (14)$$

Se poniamo:

$$\frac{f(x_n + 1)}{f(x_n)} = M_n, \quad \frac{f(\xi_n)}{f(x_n)} = m_n, \quad (15)$$

abbiamo:

$$1 \leq m_n \leq M_n, \quad (16)$$

e perciò, tenendo conto delle (15) e (13), si ha dalla 14:

$$\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)} = \frac{M_n - 1}{m_n} \geq \frac{M_n - 1}{M_n} = 1 - \frac{1}{M_n} > 1 - \frac{1}{\delta}. \quad (17)$$

Poichè δ è una quantità costante > 1 , la (17) ci dice che non è possibile che la derivata logaritmica sia infinitesima per $x = \infty$.

18. Se, come è supposto nella mia Memoria, ci si limita alla considerazione di quelle funzioni che sono finite, continue, monotone, derivabili in tutti i punti di un determinato intorno ($x_0 \dots + \infty$), e che hanno derivata logaritmica determinata nel punto $x = +\infty$, e si dicono appartenere alla prima classe quelle per le quali è soddisfatta la condizione $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, potremo, analogamente a quanto ivi è detto nel *Teorema fondamentale*, concludere: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione appartenga alla prima classe, si è che abbia derivata logaritmica infinitesima per $x = +\infty$.*

19. OSSERVAZIONE I. La condizione di *avere derivata logaritmica determinata*, che noi abbiamo imposto alle funzioni della prima classe, limita, più di quel che occorra, la utilità pratica del teorema fondamentale.

Vi sono infatti funzioni per le quali può dirsi che una tale condizione è conseguenza necessaria del fatto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Per vedere, con maggiore chiarezza, le ragioni di questa cosa, escludo i punti x dove è $f'(x) = 0$, nei quali la derivata logaritmica è identicamente nulla. Ricordando che la $f(x)$ è monotona, verrò così ad escludere anche che sia $f'(\xi_{x,h}) = 0$ e potrò scrivere:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)}.$$

Di qui, essendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_{x,h})}{f(x)} = 1,$$

deduco :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})}.$$

Ora, per le formule (4), si ha :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_{x,h})}{f(\xi_{x,h})} = 0.$$

D'altra parte, per ogni valore di x , si ha

$$\lim_{h=0} f'(\xi_{x,h}) = f'(x),$$

cioè, preso un numero positivo M maggiore di 1, si può ad ogni valore di x far corrispondere un H_x tale che

$$h < H_x, \quad \frac{f'(x)}{f'(\xi_{x,h})} < M, \quad x < \xi_{x,h} < x + h.$$

Ogniquale volta adunque esista un valore positivo M con la proprietà espressa dalle formule precedenti, e le H_x corrispondenti abbiano limite inferiore H maggiore di zero, fatto $h < H$, in tutte le formule precedenti, ne verrà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

e la derivata logaritmica sarà veramente infinitesima, in conseguenza della ipotesi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Tale conclusione potrà essere erronea solo quando sia $H = 0$.

Si osservi però che, in questo caso, ad ogni coppia di numeri positivi h, M , deve potersi coordinare un numero positivo x_h abbastanza grande perchè, in ogni intorno $(x, \dots, +\infty)$, $x > x_h$, esista almeno un punto x' con la proprietà :

$$\frac{f'(x')}{f'(\xi_{x',h})} > M, \quad x' < \xi_{x',h} < x' + h.$$

Se ora consideriamo che h può essere scelto piccolo a piacere ed M arbitrariamente grande, e che d'altra parte in ogni punto x' si ha sempre

$$\lim_{h=0} \frac{f'(x')}{f'(\xi_{x',h})} = 1,$$

si vede che, se la $f(x)$ non è infinitesima almeno lungo determinate suc-

cessioni di valori x tendenti all'infinito, non è possibile che essa soddisfi la condizione seguente:

Esista un numero positivo δ al quale si possa coordinare un numero h positivo tale, che, entro ogni tratto di ampiezza minore od eguale ad h , di un determinato intorno dell'infinito, la oscillazione della funzione $f'(x)$ sia minore di δ .

In particolare si vedè che:

Se per una funzione della variabile reale x , ad un valore, monotona e derivabile in ogni intorno dell'infinito, è soddisfatta la relazione

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

se la derivata logaritmica $\frac{f'(x)}{f(x)}$ non è infinitesima nel punto $x = +\infty$, e la derivata ordinaria $f'(x)$, è ivi determinata, senza essere infinitesima, questa stessa derivata non può essere continua uniformemente in un determinato intorno dell'infinito.

Tenendo conto del fatto che le funzioni con cui più di frequente s'ha che fare nel calcolo infinitario, hanno sempre derivata uniformemente continua in un intorno determinato dell'infinito ed infinita per $x = +\infty$, tornerà utile il seguente teorema:

TEOREMA 4.^o *Se una funzione della variabile reale x , ad un valore, monotona e derivabile in un determinato intorno dell'infinito, soddisfa la condizione $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, se la sua derivata ordinaria $f'(x)$ è continua uniformemente in un determinato intorno dell'infinito ed è determinata nel punto $x = +\infty$, senza essere ivi infinitesima; ciò basterà per concludere*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

Si noti, a questo proposito, che, da un noto teorema del prof. C. ARZELÀ (Cfr. *Sulle serie di funzioni*. Mem. Acc. di Bologna, anno 1899, pag. 135) si deduce subito che, per ogni segmento finito (x_0, \dots, x) ad ogni numero positivo ε , può coordinarsi un numero positivo h abbastanza piccolo perchè la

somma dei segmenti $\partial_{h,s}$ nei quali non è:

$$|f'(x) - f'(\xi_{x,h})| < \varepsilon$$

sia tanto piccola quanto si vuole.

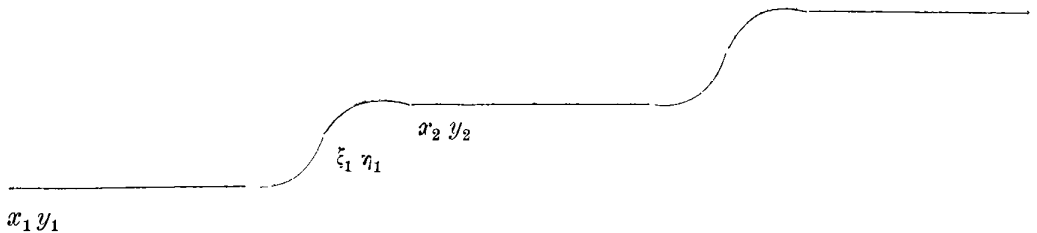
Ciò può servire di conferma a quanto fu dimostrato al teorema 1.º di questo §.

20. OSSERVAZIONE II. Taluno che ha fama meritata di geometra illustre e che è in questo genere di quistioni specialmente versato, mi ha invitato ad esaminare con maggiore profondità l'importante argomento trattato nelle pagine precedenti, per vedere: se alcune delle condizioni espresse negli enunciati dei teoremi 1.º e 4.º non fossero nel fatto superflue, e non vi apparissero se non per la necessità di rendere rigoroso il ragionamento.

In particolare: esaminare (in relazione al Teor. 4.º) se non fosse sufficiente, per la derivata $f'(x)$, la condizione di essere finita e continua in ogni punto a distanza finita.

Ora non è difficile citare l'esempio di una funzione monotona, finita, derivabile in ogni intorno dell'infinito, finita anche nel punto $x = +\infty$, e quindi tale da rendere soddisfatta la relazione $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, la cui derivata è pure finita e continua in ogni punto a distanza finita, ma, lungo certe successioni ξ_n , è infinita nel punto $x = +\infty$.

Tale è la funzione rappresentata dalla curva



tracciata al modo seguente:

Indichiamo con h ed r due dati numeri positivi, e con p un numero maggiore di 1.

Consideriamo poi le successioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n = \frac{r}{n^p} \\ \varphi_n = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Partendo ora da un punto qualunque del piano xy , che chiameremo (x_1, y_1) tracciamo un segmento $\{(x_1, y_1) - (x_1 + h, y_1)\}$ parallelo all'asse delle x .

Nel termine $(x_1 + h, y_1)$ tracciamo un arco di cerchio tangente a quel segmento, con raggio r_1 , centro nel punto $(x_1 + h, y_1 + r_1)$, ed ampiezza φ_1 .

Il termine di questo arco, avrà per coordinate,

$$\xi_1 = x_1 + h + r_1 \operatorname{sen} \varphi_1, \quad \eta_1 = y_1 + r_1 (1 - \cos \varphi_1).$$

In questo punto si continui la curva con un secondo arco eguale e tangente al primo, ma con la concavità rivolta verso l'asse delle x .

Chiamando con x_2, y_2 le coordinate del termine di questo arco, conduco in questo punto un segmento di lunghezza h parallelo all'asse delle x , continuo la curva con due archi tracciati in modo analogo ai precedenti ma con raggio r_2 , ed ampiezza φ_2 . Proseguo così indefinitamente.

Le ordinate y_n della curva tracciata, non crescono più rapidamente delle somme S_n della serie $\sum \frac{1}{n^p}$, epperò la funzione rappresentata da quella curva (evidentemente monotona e continua) è finita per $x = +\infty$.

La tangente varia con continuità, non è mai perpendicolare all'asse x , ma, nei punti di ascisse ξ_n , fa angoli φ_n che tendono al limite $\frac{\pi}{2}$.

La derivata, lungo la successione, ξ_n è dunque infinita, per $n = +\infty$ ed il rapporto $\frac{y'}{y}$ non può essere infinitesimo.

Con una lieve modificazione si costruisce una funzione *sempre crescente*, che conserva la medesima proprietà.

Basterà p. es. dare ai segmenti rettilinei inclinazioni positive ψ_n , con la condizione che la successione $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ diventi infinitesima di ordine superiore alla successione $\frac{\pi}{2} - \varphi_1, \frac{\pi}{2} - \varphi_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_3, \dots$, conservare per gli archi circolari i medesimi raggi, e per quelli che volgono la convessità verso l'asse x , anche le stesse ampiezze, disponendoli in modo che si conservino a due a due tangenti fra di loro ed ai segmenti rettilinei a cui si congiungono.

21. Le difficoltà che si incontrano quando si cerchi il comportamento assintotico della derivata logaritmica, e che nel fatto dipendono dalla forma

che assume il criterio inverso di quello dell'HÔPITAL, sono in parte eliminate quando si risalga dalla derivata logaritmica al logaritmo.

Poichè, nei §§ precedenti, abbiamo trovato delle condizioni *necessarie e sufficienti* per l'applicazione del teorema dell'HÔPITAL, potremo senza nessuna difficoltà eseguire questo passaggio.

Ed anzitutto, se conserviamo la definizione di classe 1.^a, data al n.° 18; scorgeremo subito che i logaritmi delle funzioni appartenenti alla 1.^a classe soddisfano le condizioni richieste dal Teor. 10; e ne concluderemo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione della variabile reale x finita, continua, monotona, derivabile in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito, ed avente derivata logaritmica determinata anche nel punto dell'infinito, soddisfi la condizione $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, si è che il suo logaritmo sia infinito di ordine inferiore al primo.

D'onde la espressione

$$y = e^{\alpha \cdot \varepsilon(x)}$$

$\varepsilon(x)$ monotona, $\varepsilon(x)$ finita, continua, derivabile in tutti i punti di intorno $(x_0, \dots, +\infty)$, infinitesima per $x = +\infty$, per le funzioni appartenenti alla prima classe, trovata al n.° 32, della citata Memoria.

22. L'enunciato precedente contiene delle condizioni superflue, ed, in particolare, quella che la derivata logaritmica sia determinata nel punto $x = +\infty$. Si hanno cioè i teoremi seguenti:

TEOREMA 5.° *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x , ad un valore, finita, continua, sempre crescente in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \dots \infty)$ ed abbia derivata atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $(x_0 \dots x)$.*

Dico che, se è soddisfatta la relazione

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

il logaritmo $\varphi = \lg f$, non può essere infinito di ordine superiore nè eguale al primo.

Supponiamo infatti che $\varphi = \lg f$, sia per $x = +\infty$, infinita di ordine ≥ 1 .

La funzione φ , che per le ipotesi poste è sempre crescente, finita, continua ed ha derivata atta alla integrazione definita, dovrebbe soddisfare la condizione $\left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| > m$, (m positivo determinato).

Per il Teorema 12.°, dato al § V, si dovrebbero poter determinare due numeri positivi μ, x_μ , tali che in tutti i punti di un insieme K_2 contenuto nell'intorno $(x_\mu, \dots \infty)$, $|\varphi'(x)| > \mu m$.

Preso un numero ε positivo $< \mu m$, la condizione $|\varphi'(x)| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < \varepsilon$, non potrebbe dunque essere soddisfatta che in un insieme $\Xi_2 = (x_\mu \dots \infty) - K_2$. La condizione che al Teorema 1.° è stata riconosciuta necessaria, perchè esista la relazione $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, non potrebbe perciò essere soddisfatta.

TEOREMA 6.° *Sia: $f = e^{x \cdot \varepsilon(x)}$. La $\varepsilon(x)$ sia una funzione finita, monotona in un intorno $(x_0 \dots + \infty)$, infinitesima per $x = + \infty$. La $x \varepsilon(x)$ sia anch'essa monotona in quello stesso intorno. Ciò basta per potere asserire che si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.*

Poniamo, anche qui, che la $f(x)$ sia positiva, non decrescente e che la $\varepsilon(x)$ sia positiva, e perciò non crescente, in tutto l'intorno $(x_0 \dots + \infty)$. Scriveremo:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{(x+1)\varepsilon(x+1) - x\varepsilon(x)} = e^{\varepsilon(x)} \cdot e^{(x+1)\{\varepsilon(x+1) - \varepsilon(x)\}}.$$

Poichè è $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon(x)} = 1$, si tratta di provare che è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \{ \varepsilon(x+1) - \varepsilon(x) \} = 0. \tag{18}$$

Ora, per essere $x \varepsilon(x)$ positivo non decrescente, si ha

$$(x+1) \varepsilon(x+1) > x \varepsilon(x)$$

ed anche

$$(x+1) \{ \varepsilon(x+1) - \varepsilon(x) \} > x \varepsilon(x) - (x+1) \varepsilon(x)$$

$$(x+1) \{ \varepsilon(x) - \varepsilon(x+1) \} < \varepsilon(x).$$

Poichè si ha

$$\varepsilon(x) - \varepsilon(x+1) \geq 0, \quad \varepsilon(x) > 0,$$

ed è :

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

sarà anche $\lim_{x=\infty} (x+1) \{ \varepsilon(x+1) - \varepsilon(x) \} = 0$, e ciò dimostra il teorema.

È notevole il fatto che, per questa dimostrazione, *non è necessaria la continuità* della $f(x)$ nè, conseguentemente, della $\varepsilon(x)$.

23. Se vorremo estendere ora il concetto di *classe* anche a funzioni finite, continue, monotone, derivabili in tutti i punti di un intorno $(x_0 \dots + \infty)$, delle quali non è richiesto che nel punto $x = + \infty$ sia determinata la derivata logaritmica; se continueremo ad assegnare alla classe prima quelle fra tali funzioni per le quali si ha $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, potremo enunciare il seguente criterio :

Tutte le funzioni sempre crescenti appartenenti alla prima classe hanno la forma $y = e^{x\varepsilon(x)}$, $\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Le funzioni della forma $y = e^{x\varepsilon(x)}$, dove $x\varepsilon(x)$ ed $\varepsilon(x)$ sono entrambe monotone, e la $\varepsilon(x)$ è finita, continua, derivabile in un intorno $(x_0 \dots + \infty)$, infinitesima per $x = + \infty$, appartengono alla prima classe.

Stabilite così le proprietà fondamentali delle funzioni appartenenti alla prima classe, non sarà difficile dedurne quelle relative alle classi superiori.

Ho già mostrato, nella Memoria preventiva più volte citata, qual profitto se ne tragga per la *Determinazione dell'ordine di infinito*. Quesito questo fino ad ora non risolto e può dirsi anche *non istudiato*, se non per classi limitatissime di funzioni.

Spero in un prossimo lavoro di riprendere questo argomento, e, seguendo la traccia segnata in quella prima Memoria, di svolgerlo con quella larghezza e quel rigore che esigono la sua importanza e le difficoltà che esso presenta.

Mi è grato intanto ringraziare qui il mio vecchio maestro e caro amico prof. CESARE ARZELA, pei consigli e gli incoraggiamenti di cui mi è stato cortese durante la compilazione della presente Memoria.

Modena, 13 Aprile 1902.

Alcuni teoremi sui determinanti.

(Di ONORATO NICCOLETTI, a Pisa.)

In una ricerca relativa ad una classe di equazioni algebriche a radici reali sono stato condotto ad alcuni teoremi sui determinanti, il primo dei quali costituisce un'estensione, a mio credere, non priva d'importanza di un noto teorema di HESSE (*). Mi permetto comunicarne in quel che segue la dimostrazione.

1. Si abbia un determinante di ordine n :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tr} & p_{t1} & p_{t2} & \dots & p_{ts} \\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1r} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2r} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{u1} & q_{u2} & \dots & q_{ur} & b_{u1} & b_{u2} & \dots & b_{us} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ik}, & p_{im} \\ q_{lk}, & b_{lm} \end{vmatrix}, \begin{matrix} i = 1, 2 \dots t \\ k = 1, 2 \dots r \\ l = 1, 2 \dots u \\ m = 1, 2 \dots s \end{matrix} \quad (1)$$

($t + u = r + s = n$)

nel quale abbiain posto in evidenza due matrici *complementari* :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad A \equiv \| a_{ik} \| \quad (i = 1, 2 \dots t; \quad k = 1, 2 \dots r) \\ (b) \quad B \equiv \| b_{lm} \| \quad (l = 1, 2 \dots u; \quad m = 1, 2 \dots s) \end{array} \right\} \quad (2)$$

o, se si vuole, le altre due, pure complementari (e che potrebbero opportunamente dirsi *adiacenti* a ciascuna delle due matrici A e B) :

$$\left. \begin{array}{l} (p) \quad P \equiv \| p_{im} \| \quad (i = 1, 2 \dots t; \quad m = 1, 2 \dots s) \\ (q) \quad Q \equiv \| q_{lk} \| \quad (l = 1, 2 \dots u; \quad k = 1, 2 \dots r). \end{array} \right\} \quad (2)$$

(*) Cf. HESSE, *Ein Determinantensatz*. (Giornale di Crelle, Vol. 69, p. 319.)

Nella matrice A indichiamo con $a_{\alpha_1 \dots \alpha_\rho, \beta_1 \dots \beta_\rho}$ il minore di ordine ρ formato colle righe $\alpha_1 \dots \alpha_\rho$, colle colonne $\beta_1 \dots \beta_\rho$ (supporremo sempre $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\rho$; $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_\rho$) e con notazioni del tutto analoghe designiamo i minori delle matrici B, P, Q .

Ciò premesso, sia, per fissare le idee: $t \leq r$ (e quindi $u \geq s$) e sviluppiamo il determinante D , secondo il teorema di LAPLACE, per i minori della matrice delle prime t righe. I minori di questa matrice possono distribuirsi in gruppi, ponendo in un medesimo gruppo quei minori che contengono uno stesso numero di colonne della matrice P (o della A); il numero di questi gruppi è evidentemente uguale al minore dei due numeri $t + 1, s + 1$, cioè, ricordando che $t \leq r, s \leq u$, e indicando con α il minore dei quattro numeri r, s, t, u , è uguale ad $\alpha + 1$.

Un minore qualunque del gruppo ρ^{mo} (con $0 \leq \rho \leq \alpha$) potrà indicarsi cogli indici delle colonne delle matrici A e P che contiene: porremo brevemente:

$$M_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} = | a_{i\alpha_1}, a_{i\alpha_2} \dots a_{i\alpha_{t-\rho}}; p_{i\gamma_1}, p_{i\gamma_2} \dots p_{i\gamma_\rho} | \quad (i = 1, 2 \dots t) \quad (3)$$

e sarà $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{t-\rho})$ una combinazione qualsiasi della classe $t - \rho$ dei numeri $1, 2 \dots r$;

$(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\rho)$ una combinazione qualsiasi della classe ρ dei numeri $1, 2 \dots s$.

Se con $(\alpha_{t-\rho+1}, \alpha_{t-\rho+2} \dots \alpha_r), (\gamma_{\rho+1} \dots \gamma_s)$ indichiamo le combinazioni complementari (di classe $r - t + \rho, s - \rho$ rispettivamente) delle due $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-\rho}), (\gamma_1 \dots \gamma_\rho)$, il minore complementare in D di $M_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho}$ sarà il determinante di ordine $u = r - t + s$

$$\left. \begin{aligned} & N_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} = \\ & = | q_{k\alpha_{t-\rho+1}}, q_{k\alpha_{t-\rho+2}}, \dots, q_{k\alpha_r}; b_{k\gamma_{\rho+1}}, b_{k\gamma_{\rho+2}}, \dots, b_{k\gamma_s} | \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$(k = 1, 2 \dots u);$

la loro classe comune è data da:

$$\frac{t(t+1)}{2} + r\rho + \sum_1^{t-\rho} \alpha_\omega + \sum_1^\rho \gamma_\epsilon,$$

quindi, pel teorema di LAPLACE, si avrà:

$$\left. \begin{aligned} D &= (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} \sum_0^\alpha (-1)^{r\rho} \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho})}^{(1 \dots r)} \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_\rho)}^{(1 \dots s)} \\ & (-1)^{\sum_1^{t-\rho} \alpha_\omega + \sum_1^\rho \gamma_\epsilon} M_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} \cdot N_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

in cui il simbolo $\sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho})}^{(1,2 \dots r)}$ sta ad indicare che la relativa somma va estesa a tutte le combinazioni $(\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho})$ della classe $t - \rho$ dei numeri $1, 2 \dots r$, e un analogo significato ha l'altro simbolo sommatorio.

Sviluppriamo ora ciascun determinante $M_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho}$ di ordine t per i minori della matrice delle prime $t - \rho$ colonne; indicando perciò con $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-\rho})$ una combinazione della classe $t - \rho$ dei numeri $1, 2 \dots t$, con $(\beta_{t-\rho+1} \dots \beta_t)$ la complementare, si avrà, ancora per il teorema di LAPLACE:

$$M_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} = (-1)^{\frac{(t-\rho)(t-\rho+1)}{2}} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_{t-\rho})}^{(1 \dots t)} (-1)^{\sum_{\sigma=1}^{t-\rho} \beta_\sigma} \cdot a_{\beta_1 \dots \beta_{t-\rho}; \alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}} \cdot p_{\beta_{t-\rho+1} \dots \beta_t; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} \cdot \left. \right\} \quad (6)$$

Affatto analogamente, sviluppando il determinante $N_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho}$ di ordine u per i minori della matrice delle prime $u - s + \rho$ colonne, si ha, ponendo:

$$w = u - s = r - t \quad (7)$$

ed indicando con $(\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{w+\rho})$ una combinazione della classe $w + \rho$ dei numeri $1, 2 \dots u$, con $(\delta_{w+\rho+1} \dots \delta_u)$ la complementare:

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} = (-1)^{\frac{(w+\rho)(w+\rho+1)}{2}} \sum_{(\delta_1 \dots \delta_{w+\rho})}^{(1 \dots u)} (-1)^{\sum_{\tau=1}^{w+\rho} \delta_\tau} \cdot b_{\delta_{w+\rho+1} \dots \delta_u; \gamma_{\rho+1} \dots \gamma_s} \cdot q_{\delta_1 \dots \delta_{w+\rho}; \alpha_{t-\rho+1} \dots \alpha_r} \cdot \left. \right\} \quad (8)$$

Mediante le (6), (7), (8) la (5) si trasforma (con semplici riduzioni) nella formola seguente:

$$D = (-1)^{\frac{w(w+1)}{2}} \sum_0^{\alpha} (-1)^\rho \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho})}^{(1 \dots r)} \cdot \sum_{(\beta_1 \dots \beta_{t-\rho})}^{(1 \dots t)} \cdot \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_\rho)}^{(1 \dots s)} \cdot \sum_{(\delta_1 \dots \delta_{w+\rho})}^{(1 \dots u)} \left. \right\} \quad (9)$$

$$D_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \beta_1 \dots \beta_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho; \delta_1 \dots \delta_{w+\rho}}$$

essendo:

$$D_{\alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}; \beta_1 \dots \beta_{t-\rho}; \gamma_1 \dots \gamma_\rho; \delta_1 \dots \delta_{w+\rho}} = \left. \right\} \quad (10)$$

$$= (-1)^{\sum_{\omega=1}^{t-\rho} (\alpha_\omega + \beta_\omega) + \sum_{\varepsilon=1}^{\rho} \gamma_\varepsilon + \sum_{\tau=1}^{w+\rho} \delta_\tau} \cdot a_{\beta_1 \dots \beta_{t-\rho}; \alpha_1 \dots \alpha_{t-\rho}} \cdot b_{\delta_{w+\rho+1} \dots \delta_u; \gamma_{\rho+1} \dots \gamma_s} \cdot p_{\beta_{t-\rho+1} \dots \beta_t; \gamma_1 \dots \gamma_\rho} \cdot q_{\delta_1 \dots \delta_{w+\rho}; \alpha_{t-\rho+1} \dots \alpha_r} (*)$$

(*) Come è chiaro da tutto il ragionamento, per un minore di ordine zero va nella (10) posta l'unità positiva.

Le formule (9) e (10) costituiscono il teorema cui volevamo pervenire, che può dirsi opportunamente *il teorema di HESSE generalizzato*. Per mezzo di esse formule il determinante D viene espresso come un aggregato *quadrilineare ed intero* dei minori dei successivi ordini delle quattro matrici A, B, P, Q , a due a due complementari od adiacenti, colle quali il determinante stesso si compone. Diremo anche che per le (9) e (10) il determinante D è sviluppato *per i minori delle due matrici complementari A e B (o P e Q), od anche, più brevemente, per i minori di una qualunque di esse matrici*.

2. Se la quantità w , data dalla (7), è nulla, due delle quattro matrici A, B, P, Q , e precisamente le A e B , sono quadrate. In questo caso si possono porre le formule (9) e (10) sotto una forma molto più semplice.

Chiamiamo infatti $A_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}}$ il complemento algebrico nel determinante A del minore di ordine ρ $\alpha_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}}$; analogamente sia $B_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}}$ il complemento algebrico in B del minore $b_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}}$; si avrà allora nella (10) (ricordando che ora $t = r, u = s$):

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\sum_{\omega}^{t-\rho} (\alpha_{\omega} + \beta_{\omega})} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}} &= A_{\beta_{r-\rho+1} \dots \beta_r; \alpha_{r-\rho+1} \dots \alpha_r} \\ (-1)^{\sum_{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon} + \delta_{\varepsilon})} \cdot b_{\delta_{q+1} \dots \delta_s; \gamma_{q+1} \dots \gamma_s} &= B_{\delta_1 \dots \delta_q; \gamma_1 \dots \gamma_q} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

con lievi modificazioni di indici, si ha allora dalle (9), (10), (11), la formula:

$$\left. \begin{aligned} D = \sum_{\rho}^{\alpha} (-1)^{\rho} \sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}) \\ (\beta_1 \dots \beta_{\rho})}}^{(1 \dots r)} \cdot \sum_{\substack{(\gamma_1 \dots \gamma_{\rho}) \\ (\delta_1 \dots \delta_{\rho})}}^{(1 \dots s)} A_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}} \cdot B_{\gamma_1 \dots \gamma_{\rho}; \delta_1 \dots \delta_{\rho}} \cdot \\ \cdot p_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \delta_1 \dots \delta_{\rho}} \cdot q_{\gamma_1 \dots \gamma_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}} \quad (*) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

dove ancora α è il minore di due numeri r ed s , tali che $r + s = n$, ordine di D . Diremo che per la (12) il determinante D è sviluppato per i minori di uno qualunque dei due determinanti A o B . È ben chiaro, ed è affatto inutile insistervi, come uno sviluppo analogo si possa avere per i minori di due qualunque minori complementari di D .

(*) S'intende che per $\rho = 0$ $A_{\alpha_1 \dots \alpha_{\rho}; \beta_1 \dots \beta_{\rho}} = A$; $B_{\gamma_1 \dots \gamma_{\rho}; \delta_1 \dots \delta_{\rho}} = B$.

La (12) comprende come casi particolari alcune formule note; ponendo in essa $s = 1$, $r = n - 1$, si ha il teorema di HESSE già citato in principio; se delle matrici quadrate A e B quella di ordine minore si suppone formata di elementi tutti nulli, la (12) si riduce allo sviluppo di un determinante *orlato* con un certo numero di righe e colonne (*).

3. Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

a) In un termine qualunque dello sviluppo del determinante D , come è dato dalle formule (9) e (10), il prodotto dei termini principali dei singoli (determinanti) fattori è evidentemente un termine del determinante D e col suo segno: ne segue che questo termine ha in D il segno:

$$(-1)^{\frac{w(w+1)}{2} + \epsilon + \sum \alpha + \sum \beta + \sum \gamma + \sum \delta}$$

(il che del resto si verifica molto agevolmente). Supponiamo inoltre, per fissare le idee, che sia ad es.:

$$t \leq s \leq r \leq u; \quad (13)$$

le quattro matrici P , A , B , Q si diranno allora, *nell'ordine scritto, prima, seconda, terza, quarta* matrice. Con queste convenzioni, il risultato del n.º 1 può enunciarsi al modo seguente: Si consideri nella *prima* matrice un minore qualsiasi di ordine ρ , nella matrice complementare, la *quarta*, si consideri pure un minore qualsiasi di ordine $w + \rho$; sopprimendo in D le righe e le colonne che formano questi due minori, rimangono due minori, l'uno di A , l'altro di B . *Il prodotto di questi quattro minori col segno con cui il prodotto dei loro termini principali figura nel determinante D è un termine dello sviluppo di D secondo le (9) e (10): e si ottiene appunto il valore di D sommando tutti i termini ottenuti in tal guisa da **tutti** i minori della **prima** matrice.*

Un risultato affatto identico si ha, riferendosi, invece che alla *prima* ed alla *quarta*, alla *seconda* e *terza* matrice.

b) Chiamiamo c_A , c_B , c_P , c_Q le caratteristiche delle quattro matrici A , P , B , Q : se consideriamo la matrice formata dalla riunione di due matrici adiacenti, ad es.: delle A e P , la sua caratteristica non può evidentemente superare $c_A + c_P$; se essa caratteristica è d'altra parte minore del nu-

(*) Cf. M. ARNALDI, *Sui determinanti orlati...* (Giornale di Battaglini, Vol. 34; pag. 209, 1896.)

mero t delle sue righe, il determinante D è uguale allo zero. Ne segue il risultato (che potrebbe dedursi direttamente dalle formule (9) e (10)):

Se ha luogo una delle quattro disuguaglianze :

$$c_A + c_P < t, \quad c_A + c_Q < r, \quad c_B + c_P < s, \quad c_B + c_Q < u \quad (14)$$

il determinante D è nullo.

c) Nessuna delle quattro disuguaglianze superiori abbia luogo : sia invece ad es. :

$$c_A + c_P = t. \quad (\text{ed insieme } c_A > 0, c_P > 0). \quad (15)$$

Nelle (9) e (10) sono allora nulli tutti quei termini, per cui è $\rho \neq c_P$. Poichè inoltre ciascuna delle due matrici $A^{(c_A)}$, $P^{(c_P)}$ associate delle A e P dei ranghi c_A , c_P rispettivamente (*), hanno la caratteristica 1, si potrà porre, indicando con μ , ν , (ρ, σ) delle funzioni razionali delle $a_{ik}(p_{rs})$:

$$\left. \begin{aligned} a_{\beta_1 \dots \beta_{c_A}; \alpha_1 \dots \alpha_{c_A}} &= \mu_{\beta_1 \dots \beta_{c_A}} \cdot \nu_{\alpha_1 \dots \alpha_{c_A}} \\ p_{\beta_{c_A+1} \dots \beta_t; \gamma_1 \dots \gamma_{c_P}} &= \rho_{\beta_{c_A+1} \dots \beta_t} \cdot \sigma_{\gamma_1 \dots \gamma_{c_P}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Per le (15) e (16) le (9) e (10) allora diventano :

$$D = (-1)^{\frac{w(w+1)}{2} + c_P} \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{c_A})}^{(1 \dots r)} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_{c_A})}^{(1 \dots t)} \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_{c_P})}^{(1 \dots s)} \sum_{(\delta_1 \dots \delta_{w+c_P})}^{(1 \dots u)} (-1)^{\sum_{\omega}^{c_A} (\alpha_{\omega} + \beta_{\omega}) + \sum_{\varepsilon}^{c_P} \gamma_{\varepsilon} + \sum_{\eta}^{w+c_P} \delta_{\eta}} \cdot \mu_{\beta_1 \dots \beta_{c_A}} \cdot \nu_{\alpha_1 \dots \alpha_{c_A}} \cdot \rho_{\beta_{c_A+1} \dots \beta_t} \cdot \sigma_{\gamma_1 \dots \gamma_{c_P}} \cdot b_{\delta_{w+c_P+1} \dots \delta_u; \gamma_{c_P+1} \dots \gamma_s} \cdot q_{\delta_1 \dots \delta_{w+c_P}; \alpha_{c_A+1} \dots \alpha_r} ;$$

ponendo quindi :

$$\left. \begin{aligned} G &= (-1)^{\frac{w(w+1)}{2} + c_P} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_{c_A})}^{(1 \dots t)} (-1)^{\sum_{\omega}^{c_A} \beta_{\omega}} \mu_{\beta_1 \dots \beta_{c_A}} \cdot \rho_{\beta_{c_A+1} \dots \beta_t} \\ H &= \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_{c_A})}^{(1 \dots r)} \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_{c_P})}^{(1 \dots s)} \sum_{(\delta_1 \dots \delta_{w+c_P})}^{(1 \dots u)} (-1)^{\sum_{\omega}^{c_A} \alpha_{\omega} + \sum_{\varepsilon}^{c_P} \gamma_{\varepsilon} + \sum_{\eta}^{w+c_P} \delta_{\eta}} \nu_{\alpha_1 \dots \alpha_{c_A}} \cdot \sigma_{\gamma_1 \dots \gamma_{c_P}} b_{\delta_{w+c_P+1} \dots \delta_u; \gamma_{c_P+1} \dots \gamma_s} q_{\delta_1 \dots \delta_{w+c_P}; \alpha_{c_A+1} \dots \alpha_r} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(*) Cf. NICCOLETTI, *Sulle matrici associate ad una matrice data* (Atti dell'Accademia di Torino, giugno 1902).

si ha infine :

$$D = G \cdot H; \tag{18}$$

donde il teorema :

Se in un determinante di ordine n si ha una matrice di un certo numero di righe (colonne) e di tutte le colonne (righe), la quale sia decomponibile in due matrici parziali, con elementi non tutti nulli, tali che la somma delle loro caratteristiche uguagli il numero delle righe (colonne) della matrice che le contiene, il determinante stesso si decompone nel prodotto di due funzioni razionali dei suoi elementi.

d) In ciascun termine dello sviluppo di D , secondo le formole (9) e (10), figura un minore della matrice Q di ordine maggiore od uguale a $w = r - t = u - s$, uno della B di ordine maggiore od uguale a $w' = s - t = u - r$. Ne segue immediatamente :

Se ha luogo una delle due disuguaglianze :

$$c_B < w', \quad c_Q < w, \tag{19}$$

il determinante D è nullo.

e) Si abbia invece ad es. : $c_Q = w$; nelle formole (9) e (10) bisogna limitarsi al valore $\rho = 0$; inoltre si può porre :

$$q_{\delta_1, \dots, \delta_w; \alpha_{t+1} \dots \alpha_r} = \rho_{\delta_1, \dots, \delta_w} \cdot \sigma_{\alpha_{t+1} \dots \alpha_r} \tag{20}$$

indicando le ρ e σ determinate funzioni razionali degli elementi q_{ik} .

Si ponga allora nelle (9) e (10) $\rho = 0$ (e quindi $p_{\beta_{t-q+1} \dots \beta_{t-\gamma}, \dots, \gamma_\rho} = 1$); e, per la (20), si ponga anche :

$$\left. \begin{aligned} M &= (-1)^{\frac{w'w+1}{2} + \frac{t(t+1)}{2}} \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_t)}^{(1 \dots r)} (-1)^{\sum_1^t \alpha_i} a_{1,2 \dots t, \alpha_1 \dots \alpha_t} \sigma_{\alpha_{t+1} \dots \alpha_r} \\ N &= \sum_{(\delta_1 \dots \delta_w)}^{(1 \dots t)} (-1)^{\sum_1^w \delta_i} b_{\delta_{w+1} \dots \delta_w; 1, 2 \dots s} \rho_{\delta_1, \dots, \delta_w} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

si avrà :

$$D = M \cdot N; \tag{22}$$

cioè il teorema :

Ove abbia luogo una almeno delle due uguaglianze

$$c_B = w', \quad c_Q = w,$$

il determinante D si decompone ancora nel prodotto di due funzioni razionali dei suoi elementi.

f) Si supponga in particolare :

$$t = s = 1, \quad r = u = n - 1.$$

È allora $w = n - 2$, $w' = 0$; il teorema precedente si riduce ad un noto teorema di HESSE (*).

4. Il teorema espresso dalle formule (9) e (10) è compreso come caso particolare in un teorema molto più generale.

In un determinante D di ordine n dividiamo le righe in i gruppi di r_1, r_2, \dots, r_i righe ciascuno, ($r_\mu > 0$), le colonne in k gruppi di s_1, s_2, \dots, s_k ($s_\rho > 0$) colonne ciascuno, di guisa che si abbia

$$n = \sum_1^i r_\mu = \sum_1^k s_\rho. \quad (23)$$

Determiniamo poi *tutte* le soluzioni (che sono evidentemente in numero finito) in numeri interi, positivi e nulli, del sistema di $i + k$ equazioni nelle $i k$ quantità $a_{\mu\rho}$:

$$\left. \begin{aligned} r_\mu &= \sum_1^k a_{\mu\rho}; & (\mu = 1, 2 \dots i) \\ s_\rho &= \sum_1^i a_{\mu\rho}; & (\rho = 1, 2 \dots k). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Indicando con $(a_{\mu\rho})$ una determinata soluzione delle (24), dividiamo le righe (le colonne) del gruppo r_μ (del gruppo s_ρ) in k (i) gruppi parziali di $a_{\mu 1}, a_{\mu 2} \dots a_{\mu k}$ righe ($a_{1\rho}, a_{2\rho} \dots a_{i\rho}$ colonne) e consideriamo gli $i k$ determinanti $D_{a_{\mu\rho}}$ (minori di D) che si ottengono colle righe e colonne $a_{\mu\rho}$ del gruppo r_μ (e s_ρ), avvertendo che per un minore di ordine nullo intendiamo l'unità positiva. Si ha allora :

a) *Il prodotto degli $i k$ minori $D_{a_{\mu\rho}}$ ora definiti fa parte del determinante D , quando allo stesso prodotto si attribuisca il segno che il prodotto dei loro termini principali, (che è evidentemente un termine di D) ha nel determinante D .*

Si considerino ora *tutte* le possibili soluzioni delle equazioni (24); per *ciascuna* di esse soluzioni tutti i possibili modi diversi di divisione delle righe r_μ e delle colonne s_ρ in gruppi parziali, *corrispondenti* alla soluzione

(*) Cf. HESSE, loc. cit., pag. 320.

considerata; ed ogni volta si consideri, col suo segno, il prodotto dei numeri $D_{a_{\mu\nu}}$ che si sono ottenuti. Si ha allora:

b) *La somma di questi prodotti è uguale al determinante D .*

Accenniamo sommariamente alla dimostrazione di questo teorema.

Osserviamo innanzi tutto che esso è già noto per alcuni valori particolari dei numeri i e k . Così ad es.: per $i = k = 2$, si ha il teorema espresso dalle formule (9) e (10); per i (o k) = 1, k (od i) qualunque si ha il teorema di LAPLACE sotto la sua forma più generale (*); per $i = k = n$ si ha lo sviluppo del determinante D secondo l'ordinaria definizione, ecc. Potremo adunque procedere per induzione e dimostrarne la verità per un certo sistema (i, k) , quando si sia già ammesso per qualunque sistema (l, m) , per cui si abbia $l \leq i$, $m \leq k$ ed insieme $l + m < i + k$. Supponiamo allora che uno dei due indici i, k , ad es.: i sia maggiore di uno; poniamo:

$$n = r_1 + n', \quad \text{con} \quad n' = r_2 + r_3 + \dots + r_i; \quad (25)$$

e sviluppiamo D , secondo il teorema di LAPLACE, per la matrice delle r_1 righe del gruppo r_1 . Dovremo considerare un minore qualunque M di questa matrice, il suo complementare N , e al loro prodotto attribuire il segno con cui il prodotto dei loro termini principali figura in D , quindi sommare tutti questi prodotti. Il minore M di ordine r_1 conterrà un certo numero di colonne, $a_{1\rho}$, del gruppo s_ρ ($a_{1\rho} \geq 0$); il complementare N ne conterrà $s'_\rho = s_\rho - a_{1\rho}$; e sarà anche evidentemente

$$\sum_1^k a_{1\rho} = r_1 \quad (26)$$

e quindi anche

$$\sum_1^k s'_\rho = n'. \quad (26^*)$$

Sviluppiamo ora il minore M mediante il teorema di LAPLACE generalizzato (o ciò che fa lo stesso per il teorema enunciato sopra in cui si sia fatto $n = r_1$, $i = 1$, $s_\rho = a_{1\rho}$) per le *matrici* delle colonne $a_{11}, a_{12} \dots a_{1k}$ in esso contenute; verrà M uguale alla somma di un certo numero di prodotti di k determinanti degli ordini $a_{11}, a_{12} \dots a_{1k}$, con un segno determinato. Sviluppiamo quindi il minore complementare N secondo il teorema superiore, per le righe $r_2, r_3 \dots r_i$ e per le colonne $s'_1, s'_2 \dots s'_k$ (si noti che il teorema

(*) Cf. ad es.: PASCAL, *Determinanti*, pag. 51.

superiore è vero per ipotesi per i valori $i-1$ e k); verrà N uguale alla somma di un certo numero di prodotti (con un segno determinato) di $(i-1)k$ determinanti $N'_{a_{\mu\rho}}$ ($\mu = 2, 3 \dots i$, $\rho = 1, 2 \dots k$) corrispondenti, in tutti i modi possibili, alle soluzioni del sistema:

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu} &= \sum_{\rho=1}^k a_{\mu\rho} & (\mu = 2, 3 \dots i) \\ s'_{\rho} &= \sum_{\mu=2}^i a_{\mu\rho} & (\rho = 1, 2 \dots k). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dal prodotto di M per N e dalla somma dei prodotti analoghi che figurano nello sviluppo di D si ottiene quindi che D è uguale alla somma di un certo numero di prodotti di ik determinanti $D'_{a_{\mu\rho}}$ corrispondenti, *in tutti i modi possibili*, alle soluzioni del sistema (27), combinate con tutte quelle della (26). Ciascuno di questi prodotti figura poi in D con un segno determinato. Ma ricordando che

$$s_{\rho} = s'_{\rho} + a_{1\rho}$$

ne segue che in tal guisa si ottengono *tutte* le possibili soluzioni delle equazioni (24) e, corrispondentemente ad una determinata soluzione, *tutti* i modi possibili di divisione dei gruppi delle righe r_{μ} e delle colonne s_{ρ} in gruppi parziali corrispondenti. Inoltre, considerando in ciascuno degli ik determinanti fattori di ciascun termine della somma così ottenuta il suo termine principale, il prodotto di questi termini principali (che è evidentemente un termine di D) viene nello sviluppo ad avere il segno stesso del termine da cui è tolto: questo segno è dunque quello con cui figura nello sviluppo ordinario di D il prodotto di essi termini principali: il che evidentemente completa la dimostrazione del teorema enunciato.

5. Dal teorema precedente segue un'interessante identità aritmetica. Ogni termine dello sviluppo di D secondo esso teorema contiene $\Pi_{\mu\rho}(a_{\mu\rho}!)$ termini del determinante D , essendo $(a_{\mu\rho})$ la soluzione delle (24) cui il termine corrisponde: ad *una* di queste soluzioni corrispondono evidentemente: $\frac{\Pi_{\mu} r_{\mu}!}{\Pi_{\mu\rho}(a_{\mu\rho}!)} \cdot \frac{\Pi_{\rho} s_{\rho}!}{\Pi_{\mu\rho}(a_{\mu\rho}!)}$ termini dello sviluppo di D secondo il teorema superiore: d'altra parte D contiene $n!$ termini, prodotti di n dei suoi elementi; ne segue l'identità (che sarebbe agevole dimostrare coi metodi del calcolo

combinatorio :

$$\sum \frac{1}{\prod_{\mu\rho} (a_{\mu\rho}!)} = \frac{n!}{\prod_{\mu} r_{\mu}! \prod_{\rho} s_{\rho}!} \quad (\mu = 1, 2 \dots i, \rho = 1, 2 \dots k) \quad (28)$$

essendo la somma estesa a tutte le possibili soluzioni distinte in numeri interi, positivi o nulli, delle equazioni (24).

Pisa, 25 Novembre 1902.

De la détermination de certaines fonctions d'après des conditions données.

(Par I. H. GRAF, à Berne.)

I.

DE LA FONCTION $f(x) = \int_0^x -\log(1-x) \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$.

De l'intégrale du titre on déduit: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\log(1-x) \cdot \frac{1}{x}$; (1)

$f(-x) = \int_0^{-x} -\log(1+x) \frac{dx}{x}$; $\frac{\partial f(-x)}{\partial x} = -\log(1+x) \cdot \frac{1}{x}$; (2)

$f(1-x) = \int_1^{1-x} \log x \cdot \frac{dx}{1-x}$; $\frac{\partial f(1-x)}{\partial x} = \frac{\log x}{1-x}$; (3)

$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{x}} \frac{\log(1+x) - \log x}{x} dx$; $\frac{\partial f\left(-\frac{1}{x}\right)}{\partial x} = \frac{\log(1+x) - \log x}{x}$; (4)

$f\left(\frac{-x}{1-x}\right) = \int_0^{\frac{-x}{1-x}} \frac{\log(1-x)}{x(1-x)} dx$; $\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{-x}{1-x}\right) = \frac{\log(1-x)}{x(1-x)}$; (5)

(1) plus (2), $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + f(-x)] = -\frac{\log(1-x^2)}{x}$; (6)

(1) " (3), $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + f(1-x)] = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{\log x}{1-x}$; (7)

(1) " (4), $\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\log(1+x)(1-x)^{-1}x^{-1}}{x}$; (8)

$$(1) \text{ plus } (5), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log(1-x)}{1-x}; \quad (9)$$

$$(2) \text{ " } (3), \quad \frac{\partial}{\partial x} [f(-x) + f(1-x)] = \frac{\log x^x (1+x)^{x-1}}{x(1-x)}; \quad (10)$$

$$(2) \text{ " } (4), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = -\frac{\log x}{x}; \quad (11)$$

$$(2) \text{ " } (5), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(-x) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log(1-x^2)^x (1+x)^{-1}}{x(1-x)}; \quad (12)$$

$$(3) \text{ " } (4), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(1-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\log x^{2x-1} (1+x)}{x(1-x)}; \quad (13)$$

$$(3) \text{ " } (5), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(1-x) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log x^x (1-x)}{x(1-x)}; \quad (14)$$

$$(4) \text{ " } (5), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log x^{x-1} (1-x)^x (1+x)^{1-x}}{x(1-x)}; \quad (15)$$

$$1) \text{ moins } 2) \quad \frac{\partial}{\partial x} [f(x) - f(-x)] = \frac{\log(1+x)(1-x)^{-1}}{x} \quad (16)$$

$$1) \text{ — } 3) \quad \frac{\partial}{\partial x} [f(x) - f(1-x)] = \frac{\log x^{-x} (1-x)^{x-1}}{x(1-x)} \quad (17)$$

$$1) \text{ — } 4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\log x (1-x^2)^{-1}}{x} \quad (18)$$

$$1) \text{ — } 5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) - f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log(1-x)^{x-2}}{x(1-x)} \quad (19)$$

$$2) \text{ — } 3) \quad \frac{\partial}{\partial x} [f(-x) - f(1-x)] = \frac{\log(1+x)^{x-1} x^{-x}}{x(1-x)} \quad (20)$$

$$2) \text{ — } 4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(-x) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\log x (1+x)^{-2}}{x} \quad (21)$$

$$2) \text{ — } 5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(-x) - f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log(1+x)^{x-1} (1-x)^{-x}}{x(1-x)} \quad (22)$$

$$3) \text{ — } 4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(1-x) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\log x (1+x)^{x-1}}{x(1-x)} \quad (23)$$

$$3) \text{ — } 5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f(1-x) - f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log x^x (1-x)^{-1}}{x(1-x)} \quad (24)$$

$$4) \text{ — } 5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[f\left(-\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{-x}{1-x}\right) \right] = \frac{\log x^{x-1} (1+x)^{1-x} (1-x)^{-1}}{x(1-x)}. \quad (25)$$

Quelques unes de ces relations sont très-bien construites pour être utilisées dans la théorie, p. e. :

D'après (6) on a :

$$\begin{aligned} d[f(x) + f(1-x)] &= -\frac{\log(1-x^2)}{x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\log(1-x^2)}{x^2} \cdot d(x^2) \\ f(x) + f(-x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 -\frac{\log(1-x^2)}{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} f(x^2) \\ f(x) + f(-x) &= \frac{1}{2} f(x^2) \end{aligned} \tag{26}$$

$$x=1, \quad f(1) + f(-1) = \frac{1}{2} f(1)$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} f(1). \tag{27}$$

D'après (7) on a

$$d[f(x) + f(1-x)] = -\frac{\log(1-x)}{x} dx + \frac{\log x}{1-x} dx$$

$$d[f(x) + f(1-x)] = -d[\log x \cdot \log(1-x)]$$

$$f(x) + f(1-x) = C - \log x \cdot \log(1-x).$$

La constante est égale à $f(1)$

$$f(x) + f(1-x) = f(1) - \log x \cdot \log(1-x). \tag{28}$$

D'après 9) on a

$$d\left[f(x) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right)\right] = +\frac{\log(1-x)}{1-x} dx = -\log(1-x) d \log(1-x)$$

$$f(x) + f\left(\frac{-x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2} [\log(1-x)]^2. \tag{29}$$

D'après (11) on a

$$d\left[f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{\log x}{x} dx$$

$$f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = C - \frac{1}{2} (\log x)^2.$$

La constante C est égale à $-f(1)$, donc

$$f(-x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f(1) - \frac{1}{2}(\log x)^2. \quad (30)$$

Dans le commencement on suppose x réel dans les relations 26) 28) 29) et 30) et la valeur de x prise entre les limites 0 et 1; donc $0 < x < 1$ et ainsi $\log x$ et $\log(1-x)$ sont réels. Si l'on substitue dans la relation (29) $1-x$ au lieu de x on reçoit

$$f(1-x) + f\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\log x)^2. \quad (31)$$

En soustrayant de (31) la relation (30)

$$f(1-x) - f(-x) + f\left(1-\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(1). \quad (32)$$

De même de 28) la relation (26)

$$f(1-x) - f(-x) = f(1) - \log x \log(1-x) - \frac{1}{2}f(x^2) \quad (33)$$

et (32) et (33)

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}f(x^2) + \log x \cdot \log(1-x). \quad (34)$$

Nous écrivons pour le moment t au lieu x et nous conduisons la variable t de sa position entre 0 et 1, en passant le nord du point 1 à la valeur $\frac{1}{x}$, qui est > 1 , alors $1-t$ perd sa valeur $1-x$, la phase étant zéro, il passe par le sud de zéro, avec une phase décroissante, pour prendre la valeur négative $1-\frac{1}{x} = -\frac{1-x}{x}$, dont la phase est $-\pi$. Par ce mouvement $\log(1-t)$ s'est transformée en $-i\pi + \log(1-x) - \log x$. En même temps t^2 a perdu sa valeur x^2 et a passé par le nord de 1 à $\frac{1}{x^2}$.

La relation (33) se change donc comme suit:

$$\left. \begin{aligned} f\left(1-\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) &= f(1) - i\pi \log x + \log x \cdot \log(1-x) - \\ &- (\log x)^2 - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Nous additionnons (33) et (35)

$$\underbrace{f(1-x) - f(-x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right)}_{f(1) \text{ la relation (32)}} = 2f(1) - i\pi \log x - (\log x)^2 - \frac{1}{2}f(x^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

alors

$$f(1) - i\pi \log x - (\log x)^2 - \frac{1}{2}f(x^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0. \quad (36)$$

$$f(x^2) + f\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2f(1) - 2i\pi \log x - (\log x)^2.$$

En substituant x pour x^2 , on a

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(1) - i\pi \log x - \frac{1}{2}(\log x)^2. \quad (37)$$

$x = 1$ donne une relation absolument identique; cela nous prouve qu'elle est juste.

On doit procéder de la même manière avec la relation (30).

Nous transportons la variable t de la valeur $-\frac{1}{x}$ par le nord de 1 à la valeur $+\frac{1}{x}$, alors l'argument u de $\log u$ se déplace au nord de zéro de x à $-x$, par conséquent $\log u$ se change en $i\pi + \log x$, en somme

$$\begin{array}{l|l} f(-x) & \text{se transforme en } f(x) \\ f\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{ " en } f\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\log x)^2 \text{ en } (i\pi + \log x)^2, \end{array} \right.$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(1) - \frac{1}{2}(i\pi + \log x)^2$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(1) + \frac{\pi^2}{2} - i\pi \log x - \frac{1}{2}(\log x)^2 \quad (38)$$

$$x = 1, \quad 3f(1) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et d'après (27)} \quad f(-1) = -\frac{\pi^2}{12}. \quad (39)$$

Si l'on a

$$\sum_{k=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} = S_{2n}$$

et le nombre de BERNOULLI

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot S_{2n},$$

alors

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = \frac{(2\pi)^{2n} \cdot B_n}{2(2n)!}$$

et pour $n = 1$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \alpha)$$

comme

$$B_1 = \frac{1}{6},$$

donc

$$f(1) = S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui correspond très-bien à la définition de $f(x)$ au titre de ce travail.

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - + \dots = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \dots = \frac{\pi^2}{12}. \quad \beta)$$

En soustrayant et en additionnant $\alpha)$ et $\beta)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{24} \quad \gamma)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad \delta)$$

II.

LE PROBLÈME POSÉ EST DE TROUVER UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ DU DEGRÉ n DE TELLE NATURE QUE, AVEC $|x| < 1$, DANS LE DEVELOPPEMENT DU PRODUIT

$$\log(1+x) \cdot f(x)$$

LES COEFFICIENTS DES PUISSANCES $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{2n}$ SOIENT ÉGAUX À ZÉRO.

Nous supposons

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_{\lambda} x^{n-\lambda}, \quad (1)$$

alors le coefficient du terme x^{n+m} dans le produit $\log(1+x) \cdot f(x)$ se détermine comme suit :

$$\log(1+x) = \dots + (-1)^{m+\lambda-1} \frac{x^{m+\lambda}}{m+\lambda} + \dots$$

$$f(x) = \dots + A_{\lambda} x^{n-\lambda} + \dots,$$

donc le coefficient de x^{n+m} que nous désignons par $[x^{n+m}]$ est égal à :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{m+\lambda-1} A_{\lambda}}{m+\lambda}.$$

Le problème demande

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{\lambda} A_{\lambda}}{m+\lambda} = 0 \quad (1')$$

pour les valeurs $m = 1, 2, 3, \dots, n$.

Nous multiplions (1') par $(m+n)$, alors on a

$$(m+n) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{\lambda} A_{\lambda}}{m+\lambda} = 0 \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 1, \quad (n+1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{\lambda} A_{\lambda}}{(\lambda+1)} = 0 \quad \alpha)$$

$$m = 2, \quad (n+2) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^{\lambda} A_{\lambda}}{\lambda+2} = 0 \quad \beta)$$

$$m = 3, \quad (n + 3) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^\lambda A_\lambda}{\lambda + 3} = 0 \quad \gamma)$$

.

$$m = n, \quad 2n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-1)^\lambda A_\lambda}{n + \lambda} = 0. \quad \xi)$$

En soustrayant $\alpha)$ de $\beta)$, $\gamma)$... $\xi)$ on obtient les résultats suivants :

$$- \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda) (-1)^\lambda A_\lambda}{(\lambda + 1) (2 + \lambda)} = 0$$

$$- 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda) (-1)^\lambda A_\lambda}{(\lambda + 1) (3 + \lambda)} = 0$$

$$- 3 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda) (-1)^\lambda A_\lambda}{(\lambda + 1) (4 + \lambda)} = 0$$

.

$$- (n - 1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda) (-1)^\lambda A_\lambda}{(\lambda + 1) (n + \lambda)} = 0$$

et en généralisant

$$- (m - 1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda) (-1)^\lambda A_\lambda}{(\lambda + 1) (\lambda + m)} = 0, \text{ pour } m = 2, 3, \dots n.$$

Nous divisons par $-(m - 1)$, alors on a

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n - \lambda)}{(\lambda + 1) (\lambda + m)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0, \quad m = 2, 3, \dots n. \quad (2)$$

Nous multiplions par $(n + m - 1)$,

$$(n + m - 1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n - \lambda)}{(\lambda + 1) (\lambda + m)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0, \quad m = 2, 3, \dots n,$$

nous répétons le même procédé, alors nous recevons, après avoir divisé par $-(m - 2)$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-2} \frac{(n - \lambda) (n - \lambda - 1)}{(\lambda + 1) (\lambda + 2) (\lambda + m)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0, \quad m = 3, 4, \dots n \quad (3)$$

et ainsi en répétant toujours la même opération on arrive à un système d'équations :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r} \frac{(n - \lambda) (n - \lambda - 1) \dots (n - \lambda - r + 1)}{(\lambda + 1) (\lambda + 2) \dots (\lambda + r) (\lambda + m)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0 \\ m = r + 1, r + 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

En effet si on multiplie (4) par $(n - m - r)$, et qu'on répète la même procédé et enfin qu'on divise par $-(m - r - 1)$, on obtient l'équation suivante

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r-1} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\dots(n-\lambda-r)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+r+1)(\lambda+m)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0 \\ m = r + 2, r + 3, \dots n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

L'analogie des équations (4) et (5) nous prouve que (4) est bien juste.

A présent nous prenons toujours dans les équations (1) (2) (3) ... (4) la première seulement de chaque système, donc de (1)

$$m = 1, \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda+1} (-1)^\lambda A_\lambda = 0 \quad \alpha)$$

de (2)

$$m = 2, \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0 \quad \beta)$$

de (3)

$$m = 3, \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-2} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0 \quad \gamma)$$

.....

de (4)

$$m = r + 1, \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\dots(n-\lambda-r+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+r)(\lambda+r+1)} (-1)^\lambda A_\lambda = 0. \quad \delta)$$

Alors $\delta)$ nous généralison et nous aurons

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r} \frac{\lambda!(n-\lambda)!}{(\lambda+r+1)!(n-r-\lambda)!} (-1)^\lambda A_\lambda = 0, \quad r = 0, 1, \dots (n-1). \quad (6)$$

La dernière équation du système (6) donne

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=1} \frac{\lambda!(n-\lambda)!}{(\lambda+n)!(\lambda+1)!} (-1)^\lambda A_\lambda = 0$$

$$A_0 - \frac{1}{n(n+1)} A_1 = 0, \quad A_0 = 1$$

$$A_1 = n(n+1) = \frac{(n+1)!}{(n-1)!1!1!}.$$

L'avant-dernière, $r = n - 2$, nous donne

$$\frac{n}{2} A_0 - \frac{1}{n} A_1 + \frac{2}{(n-1)n(n+1)} A_2 = 0$$

$$A_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} = \frac{(n+2)!}{(n-2)!2!2!},$$

donc

$$A_\lambda = \frac{(n+\lambda)!}{(n-\lambda)! \lambda! \lambda!}. \quad (7)$$

Nous recevons pour le terme général de (6)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda!(n-\lambda)!}{(\lambda+r+1)!(n-r-\lambda)!} (-1)^\lambda A_\lambda &= \frac{(-1)^\lambda \lambda!(n-\lambda)!(n+\lambda)!}{(\lambda+r+1)!(n-r-\lambda)!(n-\lambda)! \lambda! \lambda!} \\ &= (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{n-r} \cdot \frac{(n-r)!}{\lambda!(n-r-\lambda)!} \cdot \frac{(n+\lambda)!}{(n-r-1)!(\lambda+r+1)!}, \end{aligned}$$

mais

$$\frac{(n+\lambda)!}{(n-r-1)!(\lambda+r+1)!} = \binom{n+\lambda}{\lambda+r+1} = (-1)^{\lambda+r+1} \binom{-n+r}{\lambda+r+1},$$

donc le terme général de (6) est égal à

$$\frac{(-1)^{r+1}}{n-r} \cdot \binom{n-r}{n-r-\lambda} \binom{-n+r}{\lambda+r+1}.$$

Mais

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r} \frac{(-1)^{r+1}}{n-r} \cdot \binom{n-r}{n-r-\lambda} \binom{-n+r}{\lambda+r+1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r} \frac{(-1)^{r+1}}{n-r} \binom{0}{n+1} = 0$$

pour

$$r = 0, 1, 2, 3 \dots (n-1).$$

Nous avons donc trouvé le coefficient de la fonction $f(x)$ et la fonction elle-même qui satisfait le problème posé, par conséquent la fonction cherché s'appelle :

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n+\lambda)!}{(n-\lambda)! \lambda! \lambda!} x^{n-\lambda} = 0.$$

III.

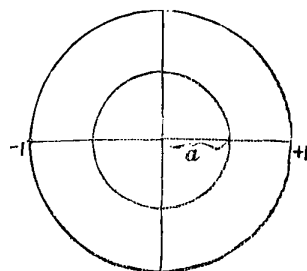
DETERMINAISON D'UNE FONCTION $f(x)$, QUI DANS L'INTÉRIEUR DU CERCLE RAYON 1 AUTOUR DE ZÉRO EST DÉVELOPABLE PAR DES VALEURS DE LA COMPOSANTE RÉELLE SUR LA PÉRIPHÉRIE DE CE CERCLE.

On décrit un cercle autour de zéro par le rayon $a < 1$, x soit dans l'intérieur de ce cercle, alors $\frac{a^2}{x}$ est dehors du cercle a , la variable t parcourt sa périphérie avec des phases croissantes et on a d'après CAUCHY

$$\frac{1}{2i\pi} \int f(t) \frac{dt}{t-x} = f(x); \quad (1)$$

de même

$$\frac{1}{2i\pi} \int -\frac{1}{2} f(t) \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} f(0) \quad (2)$$



et en additionnant (1) et (2)

$$f(x) - \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int f(t) \left\{ \frac{1}{t-x} - \frac{1}{2t} \right\} dt$$

$$f(x) - \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{2} f(t) \frac{t+x}{t-x} \cdot \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

Comme $\frac{a^2}{x}$ est situé dehors du cercle on a , si la variable u parcourt la périphérie du cercle a avec des phases croissantes

$$\frac{1}{2i\pi} \int g(u) \frac{du}{u - \frac{a^2}{x}} = 0, \quad (4)$$

analogue

$$\frac{1}{2i\pi} \int -\frac{1}{2} g(u) \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} g(0) \quad (5)$$

et en additionnant (4) et (5)

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} g(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int g(u) \left\{ \frac{1}{2u} - \frac{1}{u - \frac{a^2}{x}} \right\} du \\
 -\frac{1}{2} g(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{2} g(u) \frac{u + \frac{a^2}{x}}{u - \frac{a^2}{x}} \cdot \frac{du}{u}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Si l'on substitue $u = \frac{a^2}{t}$, alors t parcourt la périphérie du cercle a avec des phases décroissantes et (6) se transforme en

$$-\frac{1}{2} g(u) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{2} g\left(\frac{a^2}{t}\right) \cdot \frac{x+t}{x-t} \frac{dt}{t}. \quad (7)$$

Si x' est conjugué de x , alors la fonction $g(x')$ est conjuguée à la fonction $f(x)$ et si on présume $f(0)$ comme étant réel, alors $f(0) = g(0)$ et en soustrayant (7) de (3) on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{2} \left[f(t) + g\left(\frac{a^2}{t}\right) \right] \frac{t+x}{t-x} \frac{dt}{t}. \quad (8)$$

Dans cette dernière formule $\frac{1}{2} \left[f(t) + g\left(\frac{a^2}{t}\right) \right]$ est la composante réelle de la fonction $f(t)$ prise le long de la périphérie du cercle a et la fonction est monogène aussi longtemps que $a < 1$.

Nous soulevons la question si la monogénité se maintient encore dans le cas où a est devenu égal à 1 où cesse-t-elle dans quelques points de la périphérie ainsi que l'intégration est encore possible?

Supposons $t = a e^{i\theta}$, alors $f(t) = f(a e^{i\theta})$ et $h(0)$ soit la limite de la composante réelle de $f(a e^{i\theta})$ si le rayon croît à la valeur 1, θ réel,

$$h(\theta + 2\pi) = h(\theta), \quad f(0) \text{ réel,}$$

on a d'après la formule (7)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} \cdot \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{i\theta}}, \quad a = 1 \\
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} \cdot d\theta \quad (8)
 \end{aligned}$$

valable pour tous les arguments $|x| < 1$.

Désignons la valeur absolue de x , donc $|x| = m$ alors

$$\left| \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} \right| n' \text{ est jamais plus grand que } \left| \frac{1+m}{1-m} \right|.$$

Donc si α désigne $+1$ ou -1 dans ce sens que $\alpha h(\theta)$ soit toujours positif,

$$|f(x)| \text{ ne peut pas dépasser } \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+m}{1-m} \int_0^{2\pi} \alpha h(\theta) d\theta,$$

et il est sûr que l'expression (8) est une expression convergente, si $\int_0^{2\pi} \alpha h(\theta) d\theta$ est convergent.

Cela supposé, nous développons dans (8)

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} &= 1 + 2x e^{-i\theta} + 2x^2 e^{-2i\theta} + \dots \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n e^{-in\theta} \end{aligned}$$

et en substituant en (8)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n e^{-in\theta} \right\} d\theta \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Supposons $r < 1$, φ réel, $u(r, \varphi)$ la composante réelle de $f(x) = f(r e^{i\varphi})$, alors

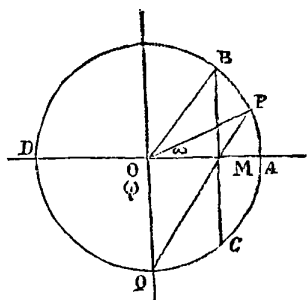
$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} d\theta, \quad \begin{matrix} \theta - \varphi = \omega \\ d\theta = d\omega \end{matrix}$$

pendant que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega} d\omega \\ h(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega} d\omega, \end{aligned}$$

donc

$$u(r, \varphi) - h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \omega} d\omega \quad (9)$$



$OA = 1$, $OM = r$, par M doit passer la corde mouvante PQ , $AP = \omega$, $DQ = \psi$, $AB = AC = \varepsilon$, $r = \cos \varepsilon$, $MP = \rho$, $MQ = \sigma$, alors $\rho\sigma = (1+r) \cdot (1-r) = 1 - r^2$, $\frac{d\omega}{\rho} = \frac{d\psi}{\sigma}$, $\rho^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \omega$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \omega} d\omega &= \frac{(1 - r^2) d\omega}{\rho^2} = \\ &= \frac{\rho\sigma}{\rho^2} d\omega = \frac{\sigma}{\rho} d\omega = d\psi. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale on introduit ces valeurs

$$u(r, \varphi) - h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi. \quad (10)$$

Si ω passe d'abord de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ et ensuite de $+\varepsilon$ à $2\pi - \varepsilon$, alors ψ passe d'abord de $-(\pi - \varepsilon)$ à $\pi - \varepsilon$ et ensuite de $\pi - \varepsilon$ à $\pi + \varepsilon$ et on reçoit l'intégrale

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) - h(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi. \end{aligned}$$

Nous désignons par m le maximum de la différence $|h(\varphi + \omega) - h(\varphi)|$ le long de la circonférence du cercle, par μ celui dans l'intervalle $-\varepsilon < \omega < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi \right| &< \mu \\ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi \right| &< \frac{m \cdot \varepsilon}{\pi}, \\ |u(r, \varphi) - h(\varphi)| &< \mu + \frac{m \cdot \varepsilon}{\pi}. \end{aligned}$$

Si nous supposons ε suffisant petit, et $h(\varphi + \omega)$ reste continue dans le voisinage de $\omega = 0$, alors nous pouvons faire μ aussi petit que possible. Si l'on doit faire $|u(r, \varphi) - h(\varphi)|$ plus petit que le nombre petit et positif ζ , on met $\varepsilon < \frac{\pi \zeta}{m}$, alors $\mu < \zeta - \frac{m \varepsilon}{\pi}$. Si la valeur μ , qui correspond à la valeur ε , remplit ces condition, alors nous avons ce que nous demandons. Si μ ne remplit pas ces conditions, ces dernières sont certainement remplies par un μ encor plus petit et comme à cet plus petit μ correspond aussi un plus petit ε , les conditions sont remplies. Donc : *Si $h(\theta)$ est partout fini et continu dans le point $\theta = \varphi$ l'expression $u(r, \varphi) - h(\varphi)$ se rapproche continuellement à zéro pendant que le rayon r accroît jusqu'à la valeur 1.*

Si pour les valeurs $\theta = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$

$h(\theta)$ devient infini mais tellement que en supposant les nombres β_1, γ_1, \dots assez petit qu'on peut rendre les intégrales

$$\int_{\alpha_1 - \beta_1}^{\alpha_1 + \gamma_1} h(\theta) d\theta, \dots$$

aussi petit qu'on désire et en supposant les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ hors de l'interval

$$\varphi - \varepsilon < \theta < \varphi + \varepsilon,$$

nous désignons par ν la somme des valeurs absolues des intégrales

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega = \alpha_1 - \varphi - \beta_1}^{\omega = \alpha_1 - \varphi - \gamma_1} [h(\varphi + \omega) - h(\varphi)] d\psi,$$

par m le maximum des valeurs absolues de la différence $h(\varphi + \omega) - h(\varphi)$ le long de la périmétrie restant du cercle dehors des regions de l'infini

$$\alpha_1 - \varphi - \beta_1 < \omega < \alpha_1 - \varphi + \gamma_1 \text{ etc.},$$

alors on peut rendre ν aussi petit que l'on veut et l'on a

$$|u(r, \varphi) - h(\varphi)| < \nu + \mu + m \cdot \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Si l'on pose

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi + \omega) d\omega + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} r^\lambda \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi + \omega) \cdot \cos \lambda \omega \cdot d\omega + R_n,$$

alors

$$R_n = \frac{r^n}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n \omega - r \cos (n-1) \omega}{1 + r^2 - 2 r \cos \omega} h(\varphi + \omega) d\psi.$$

Si l'on pouvait indiquer exactement comment est la construction de la fonction $h(\theta)$ afin que la dernière intégrale, qui peut être représentée par

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi + \omega) \frac{\cos n \omega - r \cos (n-1) \omega}{1 - r^2} d\psi,$$

et en laissant croître le rayon r jusqu'à 1, prenne une valeur finie qu'on pourrait faire aussi petit que possible si la nombre n devient assez grand: alors pour tous ces cas serait prouvée la convergence de l'expression

$$h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi + \omega) d\omega + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi + \omega) \cos \lambda \omega \cdot d\omega.$$

Alors on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n \omega - r \cos (n-1) \omega}{1 - 2 r \cos \omega + r^2} d\omega = 0;$$

on peut cela aussi prouver dans la manière suivante:

Cette dernière expression est la composante réelle de

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\omega} \frac{d\omega}{e^{i\omega} - r} &= \frac{1}{i} \int_{0r} \frac{dt}{t^n(t-r)} = \frac{1}{i} \int_0 \frac{1}{t-r} \cdot \frac{dt}{t^n} + \\ &\frac{1}{i} \int_r \frac{1}{t^n} \cdot \frac{dt}{t-r} = -\frac{2\pi}{r^n} + \frac{2\pi}{r^n} = 0. \end{aligned}$$

IV.

LES VALEURS BORDÉES $h(\theta)$ D'UNE FONCTION $f(x)$ SONT DONNÉES LE LONG DE LA PÉRIPHÉRIE D'UN CERCLE AVEC LE CENTRE À ZÉRO ET LE RAYON 1. AU POINT a SITUÉ SUR L'AXE RÉELLE ENTRE 0 ET 1 SE TROUVE UN POINT DE DISCONTINUITÉ, DANS LEQUEL LA FONCTION A LA VALEUR $\frac{A}{x-a}$, OÙ $A = l + im$, PARTOUT, CE POINT À EXCEPTÉ, LA FONCTION EST CONTINUE ET DÉRIVABLE.

Nous formons la différence

$$\frac{l + im}{x - a} - \frac{l - im}{\frac{1}{x} - a} \quad (1)$$

et substituons $x = e^{i\theta}$, la valeur de x à la périphérie, alors l'expression est égale

$$\begin{aligned} &= \frac{l + im}{e^\theta - a} - \frac{l - im}{e^{-\theta} - a} = \frac{(l + im)(e^{-\theta} - a) - (l - im)(e^\theta - a)}{(e^\theta - a)(e^{-\theta} - a)} \\ &= \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \{ (l + im)(\cos \theta - i \sin \theta) - (l - im)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &\quad - (l + im)a + (l - im)a \} \\ &= \frac{2i}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \{ m(\cos \theta - a) - l \sin \theta \}, \end{aligned}$$

Donc la composante réelle de l'expression (1) est égale à 0 et dans l'intérieur il a la valeur de discontinuité prescrite. Dans III nous avons trouvé l'expression d'une fonction déterminée par les valeurs bordées $h(\theta)$, qui est partout dans le cercle continue et dérivable comme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} d\theta. \quad (2)$$

Si nous ajoutons (2) à l'expression (1), nous recevons une fonction

$$F(x) = \frac{l + im}{x - a} - \frac{(l - im)x}{1 - ax} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} d\theta \quad (3)$$

qui satisfait le problème posé.

V.

DE L'INFLUENCE DES POINTS DE DISCONTINUITÉ LOGARITHMIQUES, QUI SE TROUVENT SUR LA PÉRIPHÉRIE D'UN CERCLE AUTOUR DE ZÉRO ET AVEC LE RAYON 1.

Nous formons la fonction

$$\log \frac{e^{i\beta} - x}{e^{i\alpha} - x}, \quad \text{où } 0 < \alpha < \beta < 2\pi. \quad (1)$$

Si x se trouve au centre, c'est-à-dire pour $x = 0$ la fonction prend la valeur $\log e^{i(\beta-\alpha)} = i(\beta-\alpha)$ et nous laissons marcher x jusqu'à la périphérie donc jusqu'à $e^{i\varphi}$. Alors pour l'intervalle $\alpha < \varphi < \beta$

$$\begin{aligned} \text{l'expression (1)} &= \log \frac{e^{i\beta} - e^{i\varphi}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi}} = \log \frac{e^{i(\beta-\varphi)} - 1}{e^{i(\alpha-\varphi)} - 1} \\ &= \log \frac{e^{i \frac{\beta-\varphi}{2}} \left(e^{i \frac{\beta-\varphi}{2}} - e^{-i \frac{\beta-\varphi}{2}} \right)}{e^{i \frac{\alpha-\varphi}{2}} \left(e^{i \frac{\alpha-\varphi}{2}} - e^{-i \frac{\alpha-\varphi}{2}} \right)} \\ &= \log e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \cdot \frac{2i \sin \frac{\beta-\varphi}{2}}{2i \sin \frac{\alpha-\varphi}{2}} \\ &= \log (-1) \cdot e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{\beta-\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi-\alpha}{2}} \\ &= \log \frac{\sin \frac{\beta-\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi-\alpha}{2}} + i \left(\pi + \frac{\beta-\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

ce qui est la valeur de (1) dans l'intervalle indiqué dans la périphérie du cercle.

Pour l'autre partie de la périphérie, pour l'intervalle

$$\beta < \varphi < 2\pi + \alpha$$

on a

$$\begin{aligned} \log \frac{e^{i\beta} - e^{i\varphi}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi}} &= \log \frac{e^{i \frac{\beta-\varphi}{2}} 2i \sin \frac{\beta-\varphi}{2}}{e^{i \left(\frac{\alpha-\varphi}{2}\right)} 2i \sin \frac{\alpha-\varphi}{2}} \\ &= \log e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{\varphi-\beta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\alpha}{2}} \\ &= \log \frac{\sin \frac{\varphi-\beta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\alpha}{2}} + i \frac{\beta-\alpha}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est la valeur de (1) dans l'intervalle indiqué de la périphérie. Dans les deux cas on a supposé que les logarithmes des nombres positifs en question sont réels.

Si nous construisons la fonction

$$f(x) = \frac{a}{i\pi} \log \frac{e^{i\beta} - x}{e^{i\alpha} - x} - a \frac{\beta - \alpha}{2\pi}, \quad (2)$$

où a réel, alors la composante réelle

1) dans l'intervalle $\alpha < \varphi < \beta$ est

$$\frac{a}{i\pi} i \left(\pi + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) - a \frac{\beta - \alpha}{2\pi} = a;$$

2) dans l'intervalle $\beta < \varphi < 2\pi + \alpha$

$$\frac{a}{i\pi} i \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) - a \frac{\beta - \alpha}{2\pi} = 0.$$

Maintenant nous développons $f(x)$ dans une série de puissances croissantes de x , nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{a}{2\pi} (\beta - \alpha) + \frac{a}{i\pi} \log \frac{e^{i\beta} \left(1 - \frac{x}{e^{i\beta}} \right)}{e^{i\alpha} \left(1 - \frac{x}{e^{i\alpha}} \right)} \\ &= -\frac{a}{2\pi} (\beta - \alpha) + \frac{a}{i\pi} \cdot i (\beta - \alpha) + \\ &\quad + \frac{a}{i\pi} \left\{ - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-in\beta} x^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-in\alpha} x^n \right\} \\ f(x) &= \frac{a}{2\pi} (\beta - \alpha) + \frac{a}{i\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} (e^{-in\alpha} - e^{-in\beta}) x^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Si nous substituons dans (3) $x = e^{i\varphi}$, la série n'est que convergente, si φ diffère de α ainsi que de β .

Désignons par $h(\varphi)$ la composante réelle de $f(e^{i\varphi})$, nous voulons chercher la valeur de $h(\varphi)$. Du produit $(e^{-in\alpha} - e^{-in\beta}) e^{in\varphi}$ on doit à cause du facteur $\frac{\alpha}{i\pi}$ seulement prendre les termes qui sont multipliés par i , donc

$$\begin{aligned}
 & i(\sin n\varphi \cos n\alpha - \cos n\varphi \sin n\alpha) = i \sin n(\varphi - \alpha) \\
 & - i(\sin n\varphi \cos n\beta - \cos n\varphi \sin n\beta) = -i \sin n(\varphi - \beta) \\
 h(\varphi) &= \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n(\varphi - \alpha)}{n} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n(\varphi - \beta)}{n} \right\} \\
 h(\varphi) &= \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\beta - \alpha}{2} + \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n(\varphi - \alpha)}{n} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n(\varphi - \beta)}{n} \right\} \right] \\
 h(\varphi) &= \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\beta - \alpha}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n} \sin n \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \cos n \left(\varphi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \tag{4}
 \end{aligned}$$

Nous fixons maintenant dans la périphérie du cercle n divers *points de discontinuité logarithmiques*

où

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \\
 & 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2\pi, \\
 & \alpha_{n+1} = 2\pi + \alpha_1 \\
 & \alpha_{n+2} = 2\pi + \alpha_2 \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

et nous remplaçons

$$\begin{array}{lll}
 \alpha & \text{par} & \alpha_\lambda \\
 \beta & \text{ " } & \alpha_{\lambda+1} \\
 a & \text{ " } & a_\lambda
 \end{array}$$

et nous recevons d'après (2)

$$\frac{\alpha_\lambda}{i\pi} \cdot \log \frac{e^{i\alpha_{\lambda+1}} - x}{e^{i\alpha_\lambda} - x} - \frac{1}{2\pi} a_\lambda (\alpha_{\lambda+1} - \alpha_\lambda)$$

et en additionnant cette valeur pour $\lambda = 1, 2, 3, \dots n$ ou

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\alpha_\lambda}{i\pi} \log \frac{e^{i\alpha_{\lambda+1}} - x}{e^{i\alpha_\lambda} - x} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{n=\infty} a_\lambda (\alpha_{\lambda+1} - \alpha_\lambda) \tag{5}$$

$h(\varphi)$ signifie la composante réelle de $f(e^{i\varphi})$, alors

$$h(\varphi) = a_\lambda, \quad \alpha_\lambda < \varphi < \alpha_{\lambda+1} \\ \lambda = 1, 2, 3 \dots n.$$

Représentons les points de discontinuité logarithmiques situés tous ensemble en introduisant un points de l'infini, alors

$$\alpha_\lambda = 0$$

$$\alpha_{\lambda+1} - \alpha_\lambda = d\theta$$

$$a_\lambda = h(\theta),$$

$$\log \frac{e^{i\alpha_{\lambda+1}} - x}{e^{i\alpha_\lambda} - x} \text{ se transforme en } \frac{i \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta}{e^{i\theta} - x}$$

la formule (5) en

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot 2 \frac{i e^{i\theta}}{e^{i\theta} - x} \cdot d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta,$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \left\{ 2 \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - x} - 1 \right\} d\theta$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \frac{e^{i\theta} + x}{e^{i\theta} - x} d\theta. \quad (6)$$

Si $h(\theta)$ n'est pas une véritable $f(x)$ sur aucune partie du contour, alors $f(x)$ ne peut pas être continué dehors l'aire du cercle, cette fonction $f(x)$ n'existe plus hors de l'aire du cercle.

Je dois ces exemples à mon feu prof. L. SCHLAEFLI. Je les ai approfondis et élargis et j'estime qu'ils sont d'une certaine valeur pour les recherches dans ce genre de fonctions.

Berne, en décembre 1902.