LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE.

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ET DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

E. PRUVOST

Inspecteur général de l'Instruction publique
Ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand

TOME SECOND

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Quatrième Édition

PARIS
PAUL DUPONT, ÉDITEUR
4, RUE DU BOULOI, 4

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE PREMIER

CHAPITRE PREMIER

DES COORDONNÉES.

1. La Géométrie analytique à trois dimensions pour objet l'application de l'Algèbre à l'étude des figures situées d'une manière quelconque dans l'espace

Pour résoudre cette question il faut commencer par déterminer à l'aide de nombres la position d'un point dans l'espace ; on y arrive en généralisant le système de coordonnées imaginé par Descartes.

Coordonnées rectilignes.

2. Traçons dans l'espace trois droites $x'x$, $y'y$, $z'z$ non situées dans un même plan et se coupant en un point o ; par un point quel-

conque M de l'espace menons des plans parallèles aux trois plans xoy, yoz, zox, nous formerons un parallélipipède oARBPCQM.

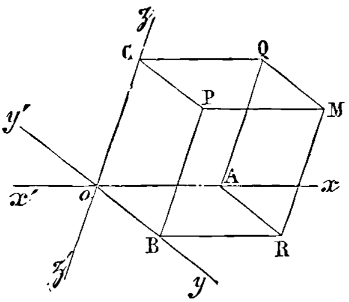


Fig. 1.

Le point M sera déterminé :

1° Si l'on donne les longueurs oA, oB, oC des arêtes de ce parallélipipède ;

2° Si l'on indique le sens dans lequel ces longueurs doivent être portées à partir du point o sur les droites $x'x$, $y'y$, $z'z$.

Pour fixer ce sens on convient d'affecter les longueurs oA, oB, oC du signe $+$ quand elles doivent être portées respectivement dans les directions ox, oy, oz, et de les affecter du signe — quand elles doivent être portées dans les directions ox', oy', oz'.

La longueur oA, affectée d'un signe convenable, est appelée *l'abscisse* du point M ; nous la désignerons généralement par la lettre x.

La longueur oB, affectée d'un signe convenable, est appelée *l'ordonnée* du point M ; nous la désignerons généralement par la lettre y.

Enfin la longueur oC, affectée d'un signe convenable, est appelée *la cote* du point M ; nous la désignerons généralement par la lettre z.

Les trois quantités x, y, z sont dites les *coordonnées rectilignes* du point M.

Les trois droites $x'x$, $y'y$, $z'z$ sont les axes de coordonnées ; $x'x$ est l'axe des x, $y'y$ est l'axe des y et $z'z$ l'axe des z.

Les trois plans xoy, yoz, zox sont les plans de coordonnées ; on les désigne souvent par les dénominations suivantes : *plan des* xy, *plan des* yz, *plan des* zx.

Le point o intersection des trois axes de coordonnées est appelé l'origine des coordonnées.

On dit que les coordonnées sont rectangulaires quand les droites ox, oy, oz forment un trièdre trirectangle ; on dit qu'elles sont obliques dans le cas contraire.

Remarques. — 1° Les sommets P, Q, R du parallélipipède oARBPCQM situés dans les plans de coordonnées sont les projections du point M sur ces plans parallèlement aux axes de coordonnées. Les coordonnées de ces projections par rapport aux deux axes placés dans le plan de coordonnées qui contient respectivement chacune d'elles ont les valeurs indiquées dans le tableau suivant :

$$P\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right. \qquad Q\left\{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}\right. \qquad R\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. .$$

Ainsi les projections d'un point sur les plans de coordonnées parallèlement aux axes de coordonnées ont deux coordonnées communes avec celles de ce point.

2° Par le point M menons à l'axe oz une parallèle terminée au point R où elle rencontre le plan des xy, puis par le point R une parallèle à l'axe oy terminée au point A où elle rencontre l'axe ox. La ligne brisée oARM est appelée le *contour des coordonnées* du point M (*fig.* 1).

Représentation des surfaces.

3. Théorème. — *Une surface est représentée par une équation entre les coordonnées d'un quelconque de ses points.*

Soit S une surface quelconque; traçons dans l'espace trois axes de coordonnées ox, oy, oz et prenons dans le plan des xy un point quelconque R. La parallèle menée par le point R à l'axe oz rencontrera la surface S en un ou plusieurs points tels que M. Il résulte de là que, quand on connaît l'abscisse x et l'ordonnée y du point M, sa cote z est déterminée ; en d'autres termes, la cote z est une fonction de l'abscisse x et de l'ordonnée y considérées comme variables *indépendantes*.

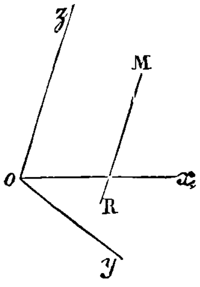


Fig. 2.

Quand la surface S sera définie par une propriété géométrique convenant à chacun de ses points, la forme de la relation qui lie les coordonnées d'un point de la surface ne changera pas, le point se déplaçant sur la surface. Il existera donc entre les coordonnées d'un point quelconque de la surface S une relation

$$f(x, y, z) = 0$$

de *forme invariable*. Cette relation est appelée *l'équation* de la surface S.

Ainsi l'équation d'une surface est la relation de *forme constante* qui lie les coordonnées de l'un quelconque de ses points.

Réciproquement *toute équation*

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

entre les coordonnées x, y et z représente en général une surface.

Pour démontrer cette réciproque, nous examinerons d'abord deux cas particuliers.

1° *L'équation* (1) *ne contient qu'une seule coordonnée, z par exemple.*

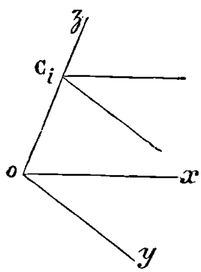


Fig. 3.

Cette équation est de la forme

$$f(z) = 0\,;$$

on en tire

$$z = c_1 \qquad z = c_2 \qquad z = c_3 \ldots$$

les quantités c_i étant des constantes.

Chaque équation telle que $z = c_i$ représente le lieu des points ayant une cote constante, c'est-à-dire évidemment un plan parallèle au plan des xy et coupant oz en un point C_i dont la cote est c_i.

Théorème. — *Une équation à une seule variable représente un faisceau de plans parallèles au plan des coordonnées qui correspond aux deux variables n'entrant pas dans l'équation.*

Remarque. — En particulier, les équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ représentent respectivement les plans des coordonnées zoy, xoz, yox.

2° *L'équation* (1) *ne contient que deux coordonnées, x et y par exemple.*

Cette équation est de la forme

(2) $$f(x, y) = 0;$$

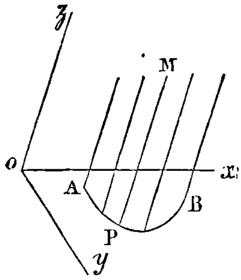


Fig. 4.

dans le plan des xy elle représente une courbe AB. Par les différents points de cette courbe menons des parallèles à oz, nous formerons un cylindre; soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un point de ce cylindre. La projection du point M sur le plan xoy faite parallèlement à oz sera un point P de la courbe AB qui, rapporté aux axes ox, oy, aura pour coordonnées α et β ; on aura donc

$$f(\alpha, \beta) = 0.$$

Cette relation exprime que les coordonnées α, β, γ du point M satisfont à l'équation (2). Maintenant les coordonnées d'un point de l'espace non situé sur le cylindre ne satisfont pas à cette équation, car la projection de ce point sur le plan xoy, faite parallèlement à oz, n'est pas située sur la courbe AB ; il résulte de là que l'équation (2) représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe oz.

Il peut arriver que ce cylindre soit imaginaire ou composé de droites parallèles à oz ; cela aura lieu quand la courbe AB sera imaginaire ou composée de points isolés les uns des autres.

Théorème. — *Une équation à deux variables représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des coordonnées qui correspond à la variable n'entrant pas dans l'équation.*

Ces deux cas particuliers étant examinés, reprenons l'équation à trois variables

(1) $$f(x, y, z) = 0.$$

Dans cette équation posons $z = \gamma$, elle devient

$$f(x, y, \gamma) = 0;$$

la nouvelle équation à *deux* variables x et y représente un cylindre AB dont les génératrices sont parallèles à oz. Les points de ce cylindre dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) sont ceux pour lesquels on a $z=\gamma$, c'est-à-dire ceux qui sont situés sur la courbe A'B' intersection du cylindre avec le plan P ayant pour équation $z=\gamma$. Quand γ variera d'une manière continue entre certaines limites, le cylindre AB se déformera en général d'une manière continue, et le plan P se déplacera aussi d'une manière continue. Le lieu des points dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) est donc engendré par une courbe A'B' qui se déplace et se déforme suivant une loi déterminée ; par suite, ce lieu est une surface.

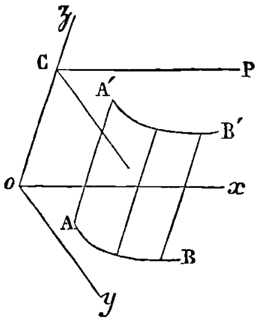


Fig. 5.

Représentation des lignes.

4. Une ligne C est l'intersection de deux surfaces ; elle sera donc représentée par deux équations

$$(3) \qquad f(x, y, z)=0 \qquad f_1(x, y, z)=0$$

considérées *simultanément*.

Si, entre les équations (3), on élimine successivement y et z, on obtient deux équations de la forme

$$(4) \qquad \varphi(x, z)=0 \qquad \varphi_1(x, y)=0 ;$$

chacune d'elles, prise isolément, représente un cylindre et nous allons démontrer que ces deux surfaces sont les cylindres projetant la ligne C sur le plan des xz et sur celui des xy.

Soit M un point quelconque de C, ses coordonnées x', y', z' satisfaisant aux équations (3), les équations

$$f(x', y', z)=0 \qquad f_1(x', y', z)=0$$

ont une solution commune $z=z'$; mais le résultant de ces équations est $\varphi_1(x', y')=0$, donc le cylindre représenté par la seconde des équations (4) contient la courbe C. La même chose a lieu pour le premier cylindre.

Remarque. — On a démontré que toute solution des équations (3) satisfait aux équations (4), mais la réciproque peut ne pas être vraie. Les équations (4) représenteront la courbe C, mais elles pourront aussi représenter en même temps une autre courbe. Pour expliquer ceci par un exemple bien simple, considérons une ellipse E dans l'espace ; les cylindres qui la projettent sur les plans xoz, xoy seront coupés par ces plans suivant des ellipses E_1, E_2. Soient A, B les points où un plan P parallèle au plan yoz coupe l'ellipse E et (Aa_1, Aa_2), (Bb_1, Bb_2) les génératrices correspondantes des deux cylindres projetants. Les génératrices (Aa_1, Aa_2) se couperont au point A de l'ellipse E et les génératrices (Bb_1, Bb_2) au point B de cette courbe ; mais, en associant les génératrices (Aa_1, Bb_2) ou les génératrices (Bb_1, Aa_2) on obtiendra deux points situés sur les cylindres projetants et n'appartenant plus à l'ellipse E.

Remarque. — Pour représenter une courbe située dans l'un des plans de coordonnées, on joindra à l'équation de ce plan celle d'une surface passant par cette courbe. Par exemple les équations

$$z = 0 \qquad f(x, y, z) = 0$$

représenteront une courbe située dans le plan xoy.

Relation entre les angles que fait une direction avec les axes de coordonnées.

Angle de deux directions.

5. **Définition.** — *Soient* oD, oD' *deux demi-droites se coupant au point* o ; *on appelle angle des deux directions* D, D' *l'angle moindre que* π *formé par les demi-droites* oD, oD'.

Remarque. — Si l'on prend des points D, D' sur chacune des demi-droites oD, oD', l'angle que nous venons de définir est celui qui est opposé au côté DD' dans le triangle DoD'.

Pour fixer dans l'espace une direction oD que l'on peut supposer appartenir à une droite passant par l'origine, on donne les angles α, β, γ que fait cette direction avec les trois directions ox, oy, oz des coordonnées positives. La connaissance de deux de ces angles α et β ne suffit pas pour fixer la direction oD ; car si l'on décrit autour de ox et de oy des demi-cônes dont les angles au sommet soient respectivement α et β, ces deux cônes se coupent suivant deux génératrices symétriquement placées par rapport au plan xoy. La connaissance de l'angle γ est donc nécessaire pour reconnaître laquelle de ces deux génératrices représente la direction oD.

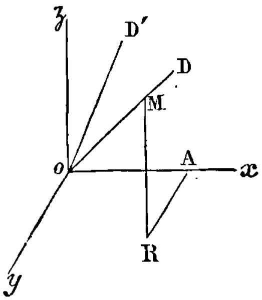


Fig. 6.

Ce qui précède montre encore que les angles α, β, γ sont liés par une relation.

Nous nous proposons de trouver cette relation ainsi que l'angle V formé par deux directions oD, oD′ ; nous appellerons α', β', γ' les angles que fait la direction oD′ avec les trois directions ox, oy, oz des coordonnées positives.

Nous examinerons deux cas.

6. Premier cas. — *Les coordonnées sont rectangulaires.* — Sur la direction oD prenons un point M(x, y, z), construisons le contour oARM de ses coordonnées et appelons l la longueur oM. (*fig.* 6.)

Projetons orthogonalement les deux chemins oARM, oM successivement sur les directions ox, oy, oz, oD, oD′, nous aurons les relations

(5) $$x = l\cos\alpha \qquad y = l\cos\beta \qquad z = l\cos\gamma$$

(6) $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l$$

(7) $$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = l\cos V.$$

Entre les équations (5) et (6) éliminons x, y, z, l, nous obtiendrons la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Théorème. — *La somme des carrés des cosinus des angles que* *fait une direction avec trois directions rectangulaires est égale à l'unité.*

Entre les équations (5) et (7) éliminons x, y, z, l, nous obtiendrons la relation

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' ;$$

elle fait connaître le cosinus de l'angle des deux directions oD, oD'.

Condition de perpendicularité. — Pour que les deux directions oD, oD' soient perpendiculaires il faut et il suffit que l'on ait

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

7. Deuxième cas. — *Les coordonnées sont obliques.* — Nous désignerons par λ, μ, ν les trois angles yoz, zox, xoy ; en projetant, comme précédemment, orthogonalement les deux chemins $oARM$, oM sur les directions ox, oy, oz, oD, oD', nous aurons les relations

$$(5')\quad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = l\cos\alpha \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = l\cos\beta \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = l\cos\gamma \end{cases}$$

$$(6')\quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l$$

$$(7')\quad x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = l\cos V.$$

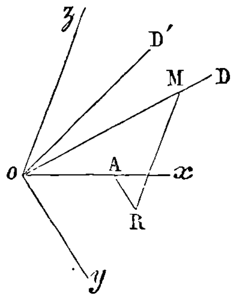


Fig. 7.

L'élimination de x, y, z, l entre les équations (5′) et (6′), puis entre les équations (5′) et (7′) donne les deux équations suivantes :

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & \cos V \end{vmatrix} = 0.$$

La première fait connaître la relation qui lie les trois angles α, β, γ et la seconde détermine l'angle des deux directions oD, oD .

8. Paramètres directeurs. — Si sur la direction oD on prend un point M situé à l'unité de distance de l'origine, les coordonnées du point M sont appelées les *paramètres directeurs* de la direction oD.

Les équations (8) et (9) prennent des formes plus simples quand aux angles (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ on substitue les paramètres directeurs (u, v, w), (u', v', w') des directions oD, oD'.

D'abord les équations (5'), (6'), (7') donnent entre ces paramètres directeurs et les angles α, β, γ, α', β', γ', V les relations

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} u + v\cos\nu + w\cos\mu = \cos\alpha \\ u\cos\nu + v + w\cos\lambda = \cos\beta \\ u\cos\mu + v\cos\lambda + w = \cos\gamma \end{array}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} u' + v'\cos\nu + w'\cos\mu = \cos\alpha' \\ u'\cos\nu + v' + w'\cos\lambda = \cos\beta' \\ u'\cos\mu + v'\cos\lambda + w' = \cos\gamma' \end{array}\right.$$

$$(12)\qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 1$$

$$(13)\qquad u\cos\alpha' + v\cos\beta' + w\cos\gamma' = \cos V$$

Dans l'équation (12) remplaçons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (10), et dans l'équation (13) remplaçons $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ par leurs valeurs tirées des équations (11), nous obtiendrons pour remplacer les équations (8) et (9) les relations suivantes :

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2vw\cos\lambda + 2wu\cos\mu + 2uv\cos\nu = 1,$$

$$\cos V = uu' + vv' + ww'$$
$$+ (vw' + wv')\cos\lambda + (wu' + uw')\cos\mu + (uv' + vu')\cos\nu.$$

La première est une relation entre les paramètres directeurs de la direction oD ; la seconde fait connaître le cosinus de l'angle des deux directions oD, oD'.

9. Sinus du trièdre formé par les axes des coordonnées positives. — Représentons par Ω le déterminant des inconnues x, y, z dans les équations (5'), nous aurons

$$\Omega = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

La fonction Ω que l'on rencontre assez souvent peut être mise sous une forme remarquable.

Pour cela décomposons cette fonction en un produit de facteurs du premier degré, en regardant $\cos\lambda$ comme la variable. L'équation $\Omega=0$ résolue par rapport à $\cos\lambda$ donne

$$\cos\lambda=\cos(\mu+\nu) \qquad \text{et} \qquad \cos\lambda=\cos(\mu-\nu);$$

donc

$$\Omega=-[\cos\lambda-\cos(\mu+\nu)][\cos\lambda-\cos(\mu-\nu)],$$

ou bien

$$\Omega=4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

Sous cette forme, on voit que Ω ne peut pas être nul, car les droites ox, oy, oz formant un *véritable* trièdre on a

$$0<\lambda+\mu+\nu<2\pi$$
$$\mu+\nu>\lambda \qquad \nu+\lambda>\mu \qquad \lambda+\mu>\nu,$$

et Ω est toujours positif.

On vérifie facilement que l'équation $1-\Omega=0$ dont le premier terme $\cos^2\lambda$ a un coefficient positif, donne pour $\cos\lambda$ des valeurs imaginaires ; par suite, la quantité Ω est comprise entre 0 et 1 ; elle ne sera égale à l'unité que si le trièdre est trirectangle.

La quantité $\sqrt{\Omega}$ qui est comprise entre -1 et $+1$ est quelquefois appelée le *sinus du trièdre,* dont les faces sont λ, μ, ν.

Signification géométrique de $\sqrt{\Omega}$. — Considérons le parallélipipède que l'on forme en portant sur les axes des coordonnées positives des longueurs $oA=a$, $oB=b$, $oC=c$; l'aire de la base $oARB$ aura pour expression $ab\sin\nu$.

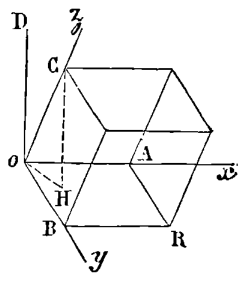


Fig. 8.

Soient CH la hauteur du parallélipipède et oD la direction parallèle à HC ; cette direction fera avec celles des axes des coordonnées positives des angles $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ et γ.

On a

$$CH=oC\cos oCH=c\cos\gamma;$$

donc le volume du parallélipipède a pour expression

$$V = abc \sin\nu \cos\gamma.$$

Maintenant l'équation (8) devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & 0 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ 0 & 0 & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

on en tire

$$\Omega = \cos^2\gamma \sin^2\nu,$$

et par suite on a

$$V = abc\sqrt{\Omega}.$$

Ainsi *le déterminant* Ω *est égal au carré du volume du parallélipipède que l'on forme en portant sur les axes des coordonnées positives des longueurs égales à l'unité.* (×)

Projection des aires planes.

10. Soit A une aire plane limitée par un contour quelconque ; la projection orthogonale de ce contour sur un plan P sera un second contour limitant une aire a qui est dite la projection de l'aire A sur le plan P.

Théorème. — *La projection orthogonale d'une aire plane* A *sur un plan est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'angle des deux plans.*

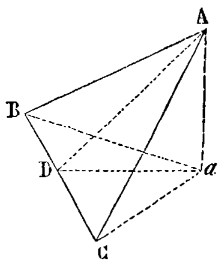


Fig. 9.

Considérons d'abord un triangle ABC dont un côté BC est parallèle au plan de projection P ; nous pourrons supposer que le plan P a été transporté de manière à passer par le côté BC.

D'après le théorème des trois perpendiculaires, si aD est la hauteur du triangle projeté aBC, AD sera la hauteur du triangle ABC. Le rapport des aires t et T de ces triangles qui ont même base BC est égal à celui des hauteurs aD, AD, c'est-à-dire au cosinus de l'angle α

des plans des deux triangles : on a donc

$$t = T \cos \alpha.$$

Supposons maintenant qu'aucun côté du triangle ne soit parallèle au plan de projection ; nous pourrons transporter ce plan de manière à le faire passer par un des sommets du triangle et choisir ce sommet B de telle sorte que le plan transporté ne coupe pas les côtés du triangle.

Prolongeons AC jusqu'au point C′ où ce côté rencontre le plan P, et projetons sur ce plan les points A, C en a et c ; les trois points a, c, C′ seront en ligne droite. Maintenant on a, d'après ce qui précède,

$$aBC' = ABC' \cos \alpha$$
$$cBC' = CBC' \cos \alpha ;$$

d'où l'on tire par soustraction

$$t = T \cos \alpha.$$

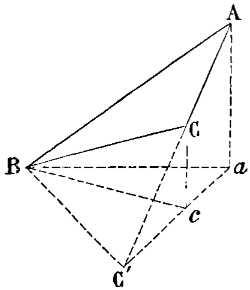


Fig. 10.

Le théorème étant démontré pour un triangle, on l'étendra à un polygone plan en décomposant cette figure en triangles.

Considérons enfin une aire plane limitée par un contour qui pourra être complètement curviligne ou composé de lignes droites et d'arcs de courbes.

Dans ce contour inscrivons un polygone dont nous appellerons l'aire P ; sa projection sera un polygone inscrit dans la projection du contour, et si p est l'aire du polygone projeté, on aura

$$p = P \cos \alpha.$$

Cette relation ayant lieu quelque petits que soient les côtés du polygone inscrit est vraie pour les limites des aires p et P, c'est-à-dire pour les aires a et A ; on a donc

$$a = A \cos \alpha.$$

Remarque. — La relation

$$a = A \cos \alpha$$

a la même forme que celle qui lie la longueur d'un segment avec celle de sa projection orthogonale sur un axe. Cette remarque permet de ramener la projection des aires planes sur un plan à celle d'une longueur sur un axe.

Par un point quelconque B du plan de l'aire A élevons sur ce plan une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur BB′ contenant autant d'unités de longueur qu'il y a d'unités de surface dans A. Menons enfin sur le plan de projection P une perpendiculaire oz; la projection de BB′ sur oz contiendra autant d'unités de longueur qu'il y a d'unités de surface dans l'aire a projection de A sur le plan P.

Théorème. — *La somme des carrés des projections d'une aire plane* A *sur trois plans rectangulaires est égale au carré de cette aire.*

Soient $oxyz$ le trièdre trirectangle formé par les trois plans de projection, et A_x, A_y, A_z les projections de l'aire A sur les plans yoz, zox, xoy. Si l'on appelle α, β, γ les angles que fait avec les droites ox, oy, oz la normale au plan de l'aire A, on aura

$$A_x = A\cos\alpha \qquad A_y = A\cos\beta \qquad A_z = A\cos\gamma;$$

d'où

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2.$$

Corollaire. — *Dans un tétraèdre trirectangle le carré de la face opposée à l'angle solide trirectangle est égal à la somme des carrés des trois autres faces.*

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous n'avons considéré que la *valeur absolue* de la projection d'une aire plane ; dans beaucoup de cas il y a avantage à donner un signe à cette projection, nous n'indiquerons pas la convention par laquelle on détermine ce signe.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

11. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface rapportée à des axes ox, oy, oz ; il est souvent avantageux de rapporter cette surface à d'autres axes, pour lesquels, quand ils sont convenablement choisis, l'équation de la surface peut prendre une forme plus simple.

Le problème sera résolu si l'on sait exprimer les coordonnées anciennes x, y, z d'un point quelconque M de l'espace en fonction des coordonnées nouvelles x', y', z' du même point.

Nous distinguerons deux cas.

1° Changement d'origine.

12. Supposons que l'on transporte les axes primitifs ox, oy, oz dans la position $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$; après ce transport, les axes des abscisses positives ox, $o'x'$ seront dirigés dans le même sens, ainsi que les deux axes des ordonnées positives et ceux des cotes positives.

La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la nouvelle origine o' relativement aux axes primitifs.

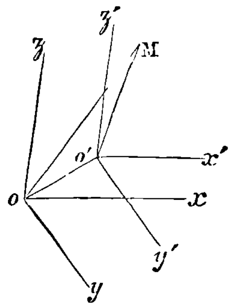


Fig. 11.

Prenons dans l'espace un point quelconque M dont nous désignerons les coordonnées anciennes par x, y z, et les coordonnées nouvelles par x', y', z'. Joignons le point M aux points o et o'.

Le théorème des projections nous donne l'équation

$$\text{proj. } o\text{M} = \text{proj. } oo' + \text{proj. } o'\text{M}.$$

En projetant successivement sur les trois axes des coordonnées primitives parallèlement au plan des deux autres, l'équation précédente nous donnera les trois relations

$$(1) \qquad x = x_0 + x' \qquad y = y_0 + y' \qquad z = z_0 + z'.$$

Ces formules résolvent le problème proposé.

2° Changement de la direction des axes.

13. Soient ox, oy, oz les axes de coordonnées primitifs et ox', oy', oz' les nouveaux axes de coordonnées; ox, oy, oz, ox', oy', oz' étant les demi-axes de coordonnées positives.

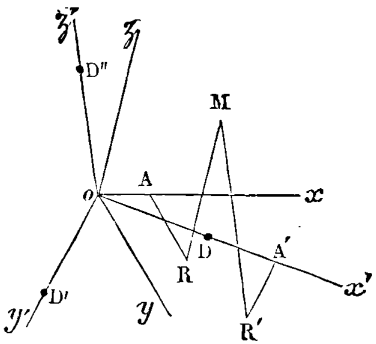


Fig. 12.

Nous définirons la position des nouveaux axes ox', oy', oz' en donnant les coordonnées (u, v, w), (u', v', w'), (u'', v'', w'') de leurs points directeurs D, D', D''. (G. P. 21).

Soit M un point quelconque de l'espace; construisons le contour oARM de ses anciennes coordonnées x, y, z, et le contour oA'R'M de ses coordonnées nouvelles x', y', z'. En projetant successivement ces deux contours sur ox parallèlement au plan yoz, sur oy parallèlement au plan zox et sur oz parallèlement au plan xoy nous aurons (G. P. 21) les trois relations

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= ux' + u'y' + u''z' \\ y &= vx' + v'y' + v''z' \\ z &= wx' + w'y' + w''z' \end{aligned}$$

qui résolvent le problème proposé.

Il ne faut pas oublier que les paramètres directeurs u, v, w, par exemple, ne sont pas arbitraires mais liés par la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2\,vw \cos\lambda + 2\,wu \cos\mu + 2\,uv \cos\nu = 1,$$

dans laquelle λ, μ, ν représentent toujours les angles yoz, zox, xoy.

Il en est de même des autres paramètres directeurs (u', v', w'), (u'', v'', w'').

Remarque. — Représentons par a, b, c les cosinus des angles que fait la direction ox' avec les trois directions ox, oy, oz, par a', b', c', et par a'', b'', c'' les quantités analogues pour les directions oy', oz'.

Le tableau T dont nous ferons souvent usage rappelle nettement la signification des neuf quantités que nous venons de définir.

T

	x'	y'	z'
x	a	a'	a''
y	b	b'	b''
z	c	c'	c''

Les trois cosinus a, b, c, par exemple, sont liés aux paramètres directeurs u, v, w par les relations

$$(3)\qquad \begin{aligned} u + v\cos\nu + w\cos\mu &= a \\ u\cos\nu + v + w\cos\lambda &= b \\ u\cos\mu + v\cos\lambda + w &= c. \end{aligned}$$

On a des relations analogues entre les paramètres directeurs des demi-droites oy', oz' et les cosinus correspondants.

Cas particuliers. — 1° *Le système primitif est rectangulaire.* — D'après les relations (3) et leurs analogues les cosinus directeurs sont égaux aux paramètres directeurs et les formules (2) deviennent

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z' \\ y &= bx' + b'y' + b''z' \\ z &= cx' + c'y' + c''z'. \end{aligned}$$

On a alors entre les neuf cosinus les relations

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}$$

2° *Les deux systèmes sont rectangulaires.* — Outre les relations (I) on a encore

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. — Quand les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, les neuf cosinus sont liés par *six* relations, et *trois* seulement d'entre eux sont arbitraires.

14. Dans le cas où les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, les neuf cosinus satisfont à d'autres relations souvent utiles mais qui *ne sont pas distinctes* des relations (I) et (II).

En regardant le tableau T on voit que a, a', a'' par exemple sont les cosinus des angles que fait la direction ox avec les trois directions ox', oy', oz' ; comme les nouveaux axes sont rectangulaires on a d'abord les relations

$$\text{(III)}\ \left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right. \qquad \text{(IV)}\ \left\{\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les autres relations, nous allons résoudre les équations (4) de deux manières différentes, par rapport à x', y', z'.

Ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par a, b, c, puis par a', b', c', et enfin par a'', b'', c'' ; nous aurons, en tenant compte des relations (I) et (II),

$$\begin{aligned} x' &= a\,x + b\,y + c\,z \\ y' &= a'x + b'y + c'z \\ z' &= a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Les mêmes équations résolues par la règle de Cramer nous donnent

$$\mathrm{D}x' = (b'c'' - c'b'')x + (c'a'' - a'c'')y + (a'b'' - b'a'')z$$

et des valeurs analogues pour y' et z'. (D *est le déterminant des inconnues* x', y', z'.)

En comparant cette seconde solution à la première, on a

$$b'c''-c'b''=a\mathrm{D} \qquad c'a''-a'c''=b\mathrm{D} \qquad a'b''-b'a''=c\mathrm{D}.$$

Ajoutons ces relations après les avoir élevées au carré et tenons compte de l'identité suivante :

$$\begin{gathered}(lm'-ml')^2+(mn'-nm')^2+(nl'-ln')^2 \\ =(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2\end{gathered}$$

qui est due à Lagrange, nous aurons

$$\begin{gathered}(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)-(a'a''+b'b''+c'c'')^2 \\ =(a^2+b^2+c^2)\mathrm{D}^2\,;\end{gathered}$$

c'est-à-dire $\mathrm{D}=\pm 1$, à cause des relations (I) et (II).

En résumé nous avons les nouvelles relations suivantes :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}=\pm 1$$

$$\frac{a}{b'c''-c'b''}=\frac{b}{c'a''-a'c''}=\frac{c}{a'b''-b'a''}=\pm 1$$

et celles que l'on déduit des trois dernières en permutant les accents.

Théorème. — *Soit le déterminant*

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Si la somme des carrés des éléments de chaque colonne est égale à l'unité ; si de plus la somme des produits des éléments correspondants de deux colonnes quelconques est nulle, alors :

1° *Ces deux propriétés sont vraies pour les lignes.*

2° *Le déterminant* D *est égal à* ± 1.

3° *Le quotient de chaque élément par le mineur correspondant est égal à* ± 1.

15. Il est facile de reconnaître si l'on a $D = +1$ ou $D = -1$.

Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, la rotation peut s'effectuer dans deux sens différents. Pour les distinguer, on représente l'axe de rotation par une demi-droite $o\mathrm{I}$ et l'on suppose un observateur placé sur cette demi-droite les pieds en o et la tête en I.

Si cet observateur voit la rotation s'effectuer de sa *gauche* vers sa *droite*, on dit que le sens de la rotation est *direct;* il est dit *inverse* dans le cas contraire.

Considérons maintenant un trièdre trirectangle $oxyz$, et plaçons l'observateur les pieds en o et la tête successivement en x, y et z ; il est aisé de voir que les trois rotations d'une amplitude égale à $\frac{\pi}{2}$ autour des axes ox, oy, oz qui amènent oy sur oz, oz sur ox, ox sur oy sont à la fois *directes* ou à la fois *inverses*.

Quand ces trois rotations seront directes, nous dirons que le trièdre est *direct;* quand elles seront inverses, nous dirons que le trièdre est *inverse*.

Cela posé, on peut énoncer la règle suivante :

Règle. — *On devra prendre* $D = +1$ *si les deux trièdres* $oxyz$, $ox'y'z'$ *sont de même espèce et* $D = -1$ *si l'un est direct et l'autre inverse.*

En effet, faisons tourner, d'une manière continue, le trièdre $ox'y'z'$ autour du point o ; dans ce mouvement, le déterminant D ne pourra varier que d'une manière continue : comme il ne peut prendre que les valeurs $+1$ ou -1, il restera constant.

De cette remarque il résulte qu'il suffira de chercher la valeur que prend D pour une position particulière du trièdre mobile.

Faisons coïncider ox' avec ox et oy' avec oy ; deux cas pourront se présenter :

1° *Les deux trièdres sont de même espèce.* — Dans ce cas, oz' coïncide avec oz et l'on a

$$a = b' = c'' = 1$$
$$a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0 ;$$

donc $D = +1$.

2° *L'un des trièdres est direct et l'autre inverse.* — Dans ce cas, oz' coïncide avec le prolongement de oz, et l'on a

$$a = b' = -c'' = 1$$
$$a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0 ;$$

donc $D = -1$.

La règle énoncée est donc établie.

Transformation générale.

16. Quand on change à la fois l'origine et la direction des axes, les formules de transformation sont

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ux' + u'y' + u''z' \\ y &= y_0 + vx' + v'y' + v''z' \\ z &= z_0 + wx' + w'y' + w''z' ; \end{aligned}$$

elles sont du premier degré par rapport à x', y', z'.

Classification des surfaces.

17. On divise les surfaces rapportées à des coordonnées rectilignes en surfaces algébriques et en surfaces transcendantes, suivant que leur équation est algébrique ou transcendante.

Quand l'équation d'une surface est algébrique, on peut toujours, en faisant disparaître les radicaux et les dénominateurs, la mettre sous forme entière.

Cela posé, on classe les surfaces algébriques d'après le degré de leur équation mise sous forme entière.

Si cette équation est du degré m, on dit que la surface est d'ordre m.

On démontrera, comme dans la géométrie plane, que le degré d'une équation mise sous forme entière ne peut pas être altéré par la transformation des coordonnées.

Théorème I. — *Une surface algébrique d'ordre m est coupée par un plan suivant une courbe qui est au plus d'ordre m.*

Prenons le plan sécant pour plan des xy, et soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface. On aura l'équation de la section rapportée aux axes ox, oy en faisant $z = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne l'équation

$$f(x, y, 0) = 0$$

qui est au plus du degré m.

Théorème II. — *Une surface algébrique d'ordre m est rencontrée par une droite au plus en m points.*

Prenons la droite pour axe des x et soit

$$f(x, y, z)=0$$

l'équation de la surface.

Pour avoir les abscisses des points où la surface rencontre l'axe des x, nous devons faire $y=z=0$ dans son équation, ce qui donne l'équation

$$f(x, 0, 0)=0,$$

qui a au plus m racines, car elle est au plus du degré m.

Classification des courbes.

18. Définition. — *On dit qu'une courbe est gauche ou à double courbure quand tous ses points ne sont pas dans un même plan.*

Une courbe gauche est dite d'ordre m quand un plan quelconque la coupe en m points.

Théorème. — *L'intersection de deux surfaces, l'une d'ordre m et l'autre d'ordre p, est une courbe de l'ordre mp.*

En effet un plan quelconque coupe la première surface suivant une courbe d'ordre m et la seconde suivant une courbe d'ordre p. Or, d'après le théorème de Bézout, ces deux courbes ont généralement mp points communs.

Formules d'Euler.

19. Les formules qui permettent de passer d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire sont symétriques, mais elles ont l'inconvénient de renfermer neuf cosinus, dont *trois* seulement sont arbitraires ; dans les applications on ne doit donc jamais perdre de vue les six relations qui lient les neuf cosinus.

Il est quelquefois avantageux, surtout en Mécanique et en Astronomie, d'employer des formules dans lesquelles n'entrent que trois constantes.

Ces formules sont dues à Euler ; nous allons les établir.

Soient $oxyz$, $ox'y'z'$ les trièdres trirectangles formés par les axes des coordonnées positives anciennes et nouvelles ; nous les supposerons de même espèce, tous les deux directs, par exemple, et nous allons montrer qu'on peut amener le premier trièdre sur le second par trois rotations successives.

Les angles décrits dans chacune de ces rotations sont les constantes d'Euler.

Première rotation. — Soit N la trace du plan $x'oy'$ sur le plan xoy.

Faisons tourner le trièdre $oxyz$ autour de oz, dans le sens direct, jusqu'à ce que la demi-droite ox rencontre, pour la première fois, la trace N ; soient ox_1 la position que prend alors ox, et ψ l'angle compris entre 0 et π décrit par cette demi-droite.

Après cette rotation le trièdre occupera la position ox_1y_1z.

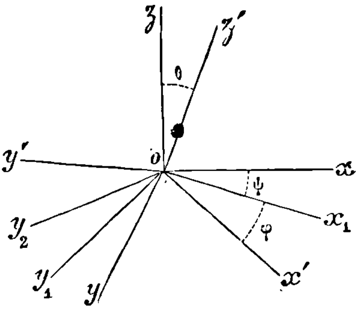


Fig. 13.

Deuxième rotation. — Remarquons d'abord que la droite oz' perpendiculaire au plan $x'oy'$ est perpendiculaire sur la trace ox_1 et par suite située dans le plan zoy_1 qui est perpendiculaire sur ox_1.

Cela posé, faisons tourner le trièdre ox_1y_1z autour de ox_1, dans le sens direct, jusqu'à ce que oz coïncide avec oz', et appelons θ l'angle compris entre 0 et 2π décrit par oz.

Après cette seconde rotation, le trièdre occupera la position ox_1y_2z'.

Troisième rotation. — Remarquons que les droites ox_1, ox', oy_2, oy' perpendiculaires sur oz' sont dans un même plan.

Cela posé, faisons tourner le trièdre ox_1y_2z' autour de oz', dans le sens direct, jusqu'à ce que ox_1 coïncide avec ox'; comme ce trièdre et le trièdre $oxyz$ sont de même espèce, la demi-droite oy_2 coïncidera avec oy'. Appelons φ l'angle compris entre 0 et 2π décrit par ox_1.

Quand on connaîtra les trois angles ψ, θ, φ, c'est-à-dire les constantes d'Euler, on pourra, par trois rotations successives, amener le trièdre $oxyz$ sur le trièdre $ox'y'z'$.

Ce trièdre occupera successivement les positions suivantes :

$$(1°)\quad oxyz \qquad (2°)\quad ox_1y_1z \qquad (3°)\quad ox_1y_2z' \qquad (4°)\quad ox'y'z'.$$

Soit M un point quelconque de l'espace ; désignons ses coordonnées par rapport aux systèmes (1), (2), (3), (4) respectivement par

$$(xyz) \qquad (x_1y_1z) \qquad (x_1y_2z') \qquad (x'y'z').$$

Deux systèmes d'axes consécutifs ont un *axe commun*, donc le passage d'un système au suivant exigera seulement l'emploi des formules relatives à transformation des coordonnées dans un plan.

On a ainsi, par ces transformations successives, les relations

$$x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi \qquad y_1 = y_2\cos\theta - z'\sin\theta \qquad x_1 = x'\cos\varphi - y'$$
$$y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi \qquad z = y_2\sin\theta + z'\cos\theta \qquad y_2 = x'\sin\varphi + y$$

L'élimination des quantités auxiliaires x_1, y_1, y_2 donne

$$\left\{\begin{array}{l} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ \quad + z'\sin\psi\sin\theta \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ \quad - z'\cos\psi\sin\theta \\ z = x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta \end{array}\right.$$

Telles sont les formules connues sous le nom de formules d'Euler.

Section d'une surface par un plan.

20. Quand on veut étudier les propriétés métriques de la section d'une surface par un plan, par exemple reconnaître si cette section est un cercle, une hyperbole équilatère..., il est souvent utile d'avoir l'équation de la section rapportée à des axes situés dans son plan.

Les formules d'Euler donnent la solution de cette question.

Nous supposerons que la surface est rapportée à des axes rectangulaires et que le plan sécant passe par l'origine. Si cette dernière condition n'était pas remplie, on transporterait l'origine en un point du plan sécant, par exemple en l'un des points où il rencontre les axes de coordonnées ox, oy, oz.

Prenons le plan sécant pour plan des $x'y'$ et pour axe des x' sa trace sur le plan xoy, on aura $\varphi = 0$.

Par rapport au système ox', oy', oz' les points du plan sécant ont une cote nulle ; on aura donc les coordonnées d'un point de ce plan rapporté aux axes ox, oy, oz en faisant $z' = 0$, $\varphi = 0$ dans les formules d'Euler, ce qui donne

$$(5) \qquad \begin{array}{l} x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\theta \\ y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\theta \\ z = y'\sin\theta. \end{array}$$

En substituant ces valeurs de x, y, z dans l'équation de la surface, on aura l'équation de la section rapportée aux axes ox', oy'.

Démonstration directe des formules précédentes. — Au lieu de déduire les formules (5) de celles d'Euler nous allons les démontrer directement en profitant des simplifications qui résultent de ce que l'on a $z' = 0$ et de ce que l'axe des x' coïncide avec la trace du plan sécant sur le plan xoy.

Nous prenons ici pour axe des x' la trace du plan sécant sur le plan xoy.

Menons, dans le plan sécant, une demi-droite oy' perpendiculaire sur ox' ; puis une demi-droite oz' perpendiculaire sur le plan sécant et dans un sens tel que les deux trièdres $oxyz$, $ox'y'z'$ soient de même espèce. Nous les supposerons directs.

Faisons tourner le trièdre $oxyz$, dans le sens direct, autour de oz jusqu'à ce que ox coïncide avec ox' ; appelons ψ l'angle compris entre 0 et 2π décrit par ox.

Après cette rotation le trièdre occupera la position $ox'y_1z$.

Remarquons maintenant que les quatre droites oz, oz', oy_1, oy' sont dans un même plan perpendiculaire à ox'

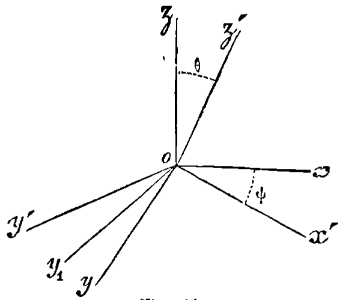


Fig. 14.

Cela posé, faisons tourner le trièdre $ox'y_1z$ autour de ox', dans le sens direct, jusqu'à ce que oz coïncide avec oz ; alors oy_1 coïncidera avec oy'.

Appelons θ l'angle compris entre 0 et 2π décrit par oz.

Quand on connaîtra les angles ψ et θ dont le dernier est l'inclinaison du plan sécant sur le plan xoy, on pourra, par deux rotations successives, amener le trièdre $oxyz$ sur le trièdre $ox'y'z'$.

Ce trièdre occupera successivement les positions suivantes :

$$(1^\circ)\quad oxyz \qquad (2^\circ)\quad ox'y_1z \qquad (3^\circ)\quad ox'y'z'.$$

Soit M un point quelconque du plan $x'oy'$; désignons ses coordonnées par rapport aux systèmes (1), (2), (3) par

$$(x, y, z) \qquad (x', y_1, z) \qquad (x', y', 0).$$

Deux systèmes consécutifs ayant un axe commun, on passera d'un système au suivant à l'aide des formules relatives à la transformation des coordonnées dans un plan.

On a ainsi, par ces transformations successives, les relations

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y_1\sin\psi & \qquad y_1 &= y'\cos\theta \\ y &= x'\sin\psi + y_1\cos\psi & \qquad z &= y'\sin\theta \end{aligned}$$

d'où

$$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\theta$$
$$y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\theta$$
$$z = y' \sin\theta.$$

Distance de deux points.

21. Nous nous proposons de trouver l'expression de la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées.

Supposons d'abord que l'un des points donnés B coïncide avec l'origine et soient x, y, z les coordonnées de l'autre point A. Posons $oA = l$ et appelons α, β, γ les angles que la direction oA fait avec les directions ox, oy, oz des axes des coordonnées positives. Projetons maintenant orthogonalement sur ces axes et sur oA le contour des coordonnées $oCRA$ et le segment oA, nous aurons les relations

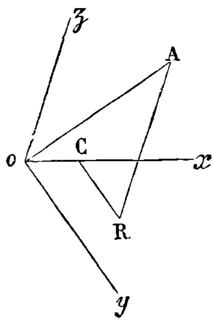


Fig. 15.

$$\begin{aligned} x + y\cos\nu + z\cos\mu &= l\cos\alpha \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= l\cos\beta \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= l\cos\gamma \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= l \end{aligned}$$

entre lesquelles il faut éliminer $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Pour cela il suffit d'ajouter les trois premières, après les avoir respectivement multipliées par x, y et z; en tenant compte de la troisième relation, on obtient la formule

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$

que nous écrirons, pour abréger, de la manière suivante :

$$l^2 = \Sigma x^2 + 2\Sigma yz\cos\lambda.$$

Cherchons maintenant la distance de deux points $A(x, y, z)$, $B(x', y', z')$ situés d'une manière quelconque dans l'espace.

En transportant l'origine au point B on rentrera dans le cas précédent et l'on obtiendra, comme en géométrie plane, la formule

$$l^2 = \Sigma(x - x')^2 + 2\Sigma(y - y')(z - z')\cos\lambda.$$

Cas particulier. — Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, les formules précédentes deviennent

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

LIVRE II

CHAPITRE PREMIER

DU PLAN.

22. L'équation générale du premier degré entre les trois variables x, y, z est de la forme :

$$\text{(1)} \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

La surface représentée par cette équation ne pouvant être coupée par une droite en plus d'un point est un plan.

Nous allons démontrer directement cette proposition.

Examinons d'abord deux cas particuliers.

1° *Les deux coefficients* A *et* B *sont nuls*. — L'équation (1) devient

$$Cz + D = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = -\frac{D}{C};$$

elle représente un plan parallèle au plan xoy et coupant l'axe oz en un point dont la cote est $-\frac{D}{C}$.

2° *Le coefficient* C *est nul*. — L'équation (1) devient

$$Ax + By + D = 0;$$

comme elle ne contient pas z, elle représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à oz ; ce cylindre est un plan, car sa trace sur le plan des xy est une droite ayant pour équations

$$z=0 \qquad Ax+By+D=0.$$

Supposons enfin qu'aucun des coefficients A, B, C des variables ne soit nul. La trace sur le plan des xy de la surface représentée par l'équation (1) est une droite AB ayant pour équations

$$z=0 \qquad Ax+By+D=0.$$

Coupons la surface par un plan P ($z=\gamma$) parallèle au plan des xy, la projection de cette section sur ce plan a pour équation

$$Ax+By+C\gamma+D=0;$$

c'est une droite A′B′ parallèle à AB. La section elle-même étant la ligne suivant laquelle le plan P, parallèle à xoy, rencontre le plan mené par A′B′ parallèlement à oz, est une droite G parallèle à A′B′, et, par conséquent, parallèle à AB.

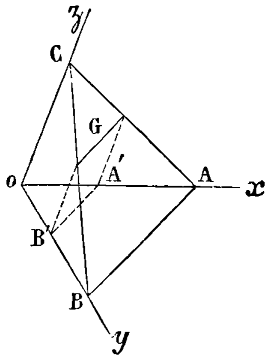


Fig. 16.

Il résulte de là que la surface inconnue est un *cylindre*, car on peut la regarder comme engendrée par une droite G parallèle à AB. Ce cylindre est *un plan*, puisque sa trace sur le plan zox est une droite AC dont les équations sont

$$y=0 \qquad Ax+Cz+D=0.$$

Réciproquement, *tout plan est représenté par une équation du premier degré.*

La proposition est évidente quand le plan est parallèle à l'un des plans coordonnés, celui des xy par exemple, car il a alors pour équation $z=c$.

En second lieu si le plan est parallèle à l'un des axes de coordonnées, l'axe oz par exemple, on peut le considérer comme un cylindre dont les génératrices sont parallèles à oz et dont la trace sur le plan xoy est une droite. Le plan considéré est donc représenté par une équation de la forme

$$Ax+By+D=0.$$

Supposons enfin que le plan donné P ne soit parallèle à aucun des axes de coordonnées ; soient A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) les points où il rencontre les trois axes de coordonnées. Nous savons que l'équation

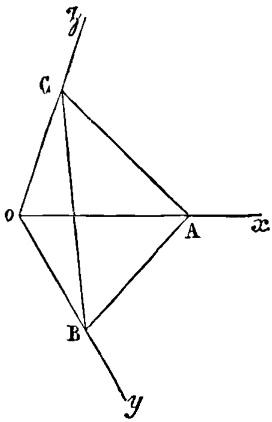


Fig. 17.

$$(1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan R ; elle représentera en particulier le plan P, si l'on peut disposer des coefficients A, B, C, D de manière que le plan R passe par les trois points A, B, C du plan P.

En exprimant que les coordonnées de ces points satisfont à l'équation (1) on obtient les relations

$$\frac{A}{D} = -\frac{1}{a} \qquad \frac{B}{D} = -\frac{1}{b} \qquad \frac{C}{D} = -\frac{1}{c},$$

et l'équation (1) devient

$$(2)\qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

L'équation (2) représente le plan P, et la réciproque est complètement démontrée.

Remarque. — L'équation (2) est celle d'un plan en fonction des coordonnées des points où il rencontre les axes de coordonnées.

Conditions pour que deux plans soient parallèles.

23. Théorème. — *Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que, dans les équations de ces plans, les coefficients de x, y et z soient proportionnels.*

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations des deux plans. Pour que ces plans soient parallèles, il faut et il suffit que leurs traces sur deux des plans coordonnés soient respectivement parallèles. En exprimant cette double condition on obtient sans difficulté les relations

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Problèmes sur le plan.

L'équation générale du plan

$$Ax+By+Cz+D=0$$

renferme trois paramètres ; donc *trois conditions simples* sont nécessaires pour fixer la position d'un plan dans l'espace.

24. **Problème I.** — *Trouver l'équation générale des plans passant par un point donné* $A(x', y', z')$.

On obtiendra l'équation cherchée en éliminant D entre les équations

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0\\ Ax'+By'+Cz'+D&=0, \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

25. **Problème II.** — *Mener par un point donné* $A(x', y', z')$ *un plan parallèle à un plan donné* P.

Soit

$$Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation du plan P ; l'équation du plan inconnu sera de la forme

$$A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z)=0.$$

Ce plan devant être parallèle au plan P, on aura

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C};$$

l'équation cherchée est donc

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

26. Problème III. — *Trouver l'équation d'un plan passant par trois points* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Par une méthode semblable à celle qui a été donnée en géométrie plane (G. P, 38) on trouve que l'équation cherchée est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Problème IV. — *Trouver l'équation générale des plans qui passent par la droite d'intersection* L *de deux plans donnés* P, P_1.

Soient

$$\begin{aligned} P &= A\ x + B\ y + C\ z + D = 0 \\ P_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{aligned}$$

les équations des deux plans donnés. L'équation

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 = 0 \tag{3}$$

représentera, quand on fera varier les constantes λ, λ_1, un faisceau de plans passant par la droite L intersection des plans P, P_1; en effet les coordonnées d'un point de L annulent P et P_1.

En second lieu l'équation (3) représentera un plan quelconque R passant par L; car on peut déterminer λ et λ_1 de manière que l'équation (3) soit satisfaite par les coordonnées $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ d'un point M pris arbitrairement sur le plan R. La relation de condition est

$$\lambda P' + \lambda_1 P'_1 = 0,$$

en représentant par P', P'_1 les valeurs que prennent les fonctions P, P_1 quand on y remplace x, y, z par x', y', z'.

En tenant compte de cette relation, l'équation (3) devient

$$\frac{P}{P'} = \frac{P_1}{P'_1}; \tag{4}$$

et le plan qu'elle représente se confond avec R.

Remarque. — L'équation (4) donne la solution du problème suivant :

Problème V. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné* $M(x', y', z')$ *et par la droite* L *intersection des plans* P, P_1.

28. Problème VI. — *Trouver l'équation générale des plans qui passent par le point de concours* S *de trois plans donnés* P, P_1, P_2.

Soient

$$P = 0 \qquad P_1 = 0 \qquad P_2 = 0$$

les équations des trois plans donnés, l'équation cherchée sera

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

D'abord les plans représentés par cette équation passent tous par le point S ; en second lieu l'équation peut représenter un plan quelconque R passant par S, car on peut déterminer les constantes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ de manière qu'elle soit satisfaite par les coordonnées de deux points pris arbitrairement sur le plan R.

29. Théorème I. — *Quand l'équation d'un plan contient un paramètre arbitraire* $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ *au premier degré, tous les plans qu'elle représente passent par une même droite.*

En effet l'équation du plan est alors de la forme

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 = 0,$$

et cette équation est satisfaite *quels que soient* λ et λ_1 par les coordonnées de tous les points de la droite ayant pour équations

$$P = 0 \qquad P_1 = 0.$$

30. Théorème II. — *Pour que trois plans ayant pour équations*

$$P=0 \qquad P_1=0 \qquad P_2=0$$

passent par une même droite, il faut et il suffit qu'il existe entre les fonctions P, P_1, P_2 *une relation linéaire et homogène.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soient en effet

$$\begin{aligned} P &= A\,x+B\,y+C\,z+D=0\\ P_1 &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ P_2 &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}$$

les équations des trois plans donnés P, P_1, P_2. L'équation

(5) $$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2=0$$

dans laquelle λ_1, λ_2 sont des paramètres arbitraires, représente tous les plans passant par la droite L intersection des plans P_1, P_2 ; comme, par hypothèse, le plan P passe par la droite L, il pourra être représenté par l'équation (5) ; en d'autres termes, il existera des constantes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ qui ne sont pas toutes nulles et telles que l'on aura idendiquement

$$\lambda P+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2\equiv 0.$$

2° *La condition est suffisante.* — Supposons en effet que l'on ait l'identité

(6) $$\lambda P+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2\equiv 0,$$

les constantes λ, λ_1, λ_2 n'étant pas toutes nulles. Pour fixer les idées, soit, par exemple, $\lambda \gtrless 0$; de l'identité (6) on tire la nouvelle identité

$$P\equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda}P_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}P_2,$$

elle nous montre que le plan P est représenté par l'équation

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}P_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}P_2=0.$$

Donc ce plan passe par la droite d'intersection des plans P_1, P_2.

Expression analytique de la condition précédente. — En égalant à zéro, dans l'identité (6), les coefficients de x, y, z et le terme constant, on obtient les relations

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
A\lambda + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 &= 0\\
B\lambda + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 &= 0\\
C\lambda + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 &= 0\\
D\lambda + D_1\lambda_1 + D_2\lambda_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ces équations sont homogènes par rapport aux quantités λ, λ_1, λ_2 qui ne sont pas toutes nulles ; en les associant trois à trois on voit que, si les trois plans passent par une même droite, tous les déterminants formés avec trois colonnes du tableau rectangulaire suivant :

$$
\begin{Vmatrix}
A & B & C & D\\
A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\
A_2 & B_2 & C_2 & D_2
\end{Vmatrix}
$$

sont nuls.

Réciproquement, *quand les déterminants* (AB_1C_2), (AB_1D_2), (AC_1D_2), (BC_1D_2) *sont nuls les trois plans* P, P_1, P_2 *passent par une même droite.*

En effet ces relations expriment qu'on peut satisfaire aux équations (7) par des valeurs de λ, λ_1, λ_2 qui ne sont pas toutes nulles, et, par suite, l'identité (6) sera également satisfaite.

Remarque. — Les quatre conditions

$$
(AB_1C_2)=0 \quad (AB_1D_2)=0 \quad (AC_1D_2)=0 \quad (BC_1D_2)=0
$$

se réduisent à *deux distinctes ;* car, pour que le plan P contienne la droite d'intersection des plans P_2, P_3, il suffit que *deux* points de cette droite soient dans le plan P. Quand nous aurons étudié l'intersection de trois plans, il sera facile de reconnaître les deux relations de condition qui sont *distinctes.*

31. Théorème III. — *Quand l'équation d'un plan contient deux paramètres arbitraires* $\frac{\lambda}{\lambda_2}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *et qu'elle est linéaire par rapport à ces paramètres, tous les plans qu'elle représente passent par un même point.*

En effet l'équation du plan est alors de la forme

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

et cette équation est satisfaite quels que soient $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ par les coordonnées du point de rencontre des trois plans P, P_1, P_2.

32. Théorème IV. — *Pour que quatre plans ayant pour équations*

$$P = 0 \qquad P_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 0$$

passent par un même point, il faut et il suffit qu'il existe entre les fonctions P, P_1, P_2, P_3 *une relation linéaire et homogène.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soient en effet

$$\begin{aligned}
P &= A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\\
P_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0\\
P_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0\\
P_3 &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0
\end{aligned}$$

les équations des quatre plans P, P_1, P_2, P_3. L'équation

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \tag{8}$$

dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des paramètres arbitraires, représente tous les plans passant par le point de rencontre S des trois plans P_1, P_2, P_3 ; comme par hypothèse le plan P passe par le point S, il pourra être représenté par l'équation (8) : en d'autres termes, il existera des constantes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui ne sont pas toutes nulles et telles que l'on aura identiquement

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0. \tag{9}$$

2° *La condition est suffisante.* — Supposons en effet que l'on ait l'identité (9) et que la constante λ par exemple ne soit pas nulle ; on en tirera la nouvelle identité

$$P \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda} P_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} P_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda} P_3,$$

elle nous montre que le plan P est représenté par l'équation

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} P_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} P_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda} P_3 = 0.$$

Ce plan passe donc par le point S intersection des plans P_1, P_2, P_3.

Expression analytique de la condition précédente. — En développant l'idendité (9) comme pour le Théorème II, on trouve que le déterminant $(AB_1C_2D_3)$ doit être nul.

La réciproque se démontre aussi de la même manière.

33. Problème VII. — *Trouver l'intersection de trois plans* P, P_1, P_2.

Le problème revient à la résolution et à la discussion des trois équations

$$(10) \qquad \begin{aligned} P &= A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ P_1 &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,; \end{aligned}$$

cette question a été traitée en Algèbre ; nous n'aurons ici qu'à interpréter géométriquement les résultats connus.

Nous désignerons par G le déterminant des inconnues x, y, z, et nous distinguerons plusieurs cas.

Premier cas. — *Le déterminant* G *n'est pas nul.* — Les trois plans se coupent en un point unique à distance finie, ils forment un véritable trièdre.

Deuxième cas. — *Le déterminant* G *est nul, mais un mineur du premier ordre* $AB_1 - BA_1$ *par exemple n'est pas nul.*

Ce cas se subdivise en deux autres.

(α) 1° *Le déterminant* (AB_1D_2) *n'est pas nul.* — Les équations (10) sont incompatibles ; comme G est nul on a idendiquement (30)

$$(\beta) \quad \lambda(P - D) + \lambda_1(P_1 - D_1) + \lambda_2(P_2 - D_2) \equiv 0,$$

ce qui montre que les trois plans transportés à l'origine passent par une même droite.

Les trois plans P, P_1, P_2 sont donc parallèles à une même droite ; ils forment un prisme triangulaire indéfini et on peut les regarder comme se coupant en un point unique situé à distance infinie.

2° *Le déterminant* (AB_1D_2) *est nul.* — Si l'on donne à z une valeur *arbitraire*, les équations $P=0$, $P_1=0$ donnent pour x et y des valeurs qui satisfont à l'équation $P_2=0$; donc tous les points de la droite intersection des plans P et P_1 sont situés dans le plan P_2, et les trois plans passent par une même droite.

Il résulte de là que les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois plans P, P_1, P_2 passent par une même droite *située à distance finie* sont

$$(AB_1C_2)=0 \qquad (AB_1D_2)=0.$$

Il ne faut pas oublier que cela suppose que le mineur AB_1-BA_1 n'est pas nul.

Troisième cas. — *Tous les mineurs du premier ordre de* G *sont nuls ; mais un élément au moins,* A *par exemple, n'est pas nul.*

Ce cas se subdivise en deux autres.

1° *Les déterminants* AD_1-DA_1, AD_2-DA_2 *ne sont pas nuls tous les deux.* — Les équations (10) sont incompatibles ; on vérifie facilement que les trois plans sont parallèles.

Remarque. — Dans ce cas les plans P_1, P_2 peuvent être rejetés à l'infini ; cela aura lieu pour le plan P_1 par exemple quand on aura à la fois $A_1=B_1=C_1=0$, car il rencontrera chacun des axes de coordonnées en un point rejeté à l'infini.

2° *Les déterminants* AD_1-DA_1, AD_2-DA_2 *sont nuls.* — Si l'on donne à y et à z des valeurs arbitraires, l'équation $P=0$ donne pour x une valeur qui satisfait aux équations $P_1=0$, $P_2=0$; donc tous les points du plan P sont situés dans les plans P_1, P_2 et les trois plans se confondent.

Remarque. — Dans ce cas les plans P_1 et P_2 peuvent être indéterminés, c'est-à-dire que leurs équations peuvent prendre la forme $0=0$.

Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où tous les éléments A_i, B_i, C_i sont nuls, car alors les plans donnés n'existent plus en réalité.

Équation du plan en fonction des angles que font les axes de coordonnées avec la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan et de la longueur de cette perpendiculaire.

34. De l'origine abaissons sur le plan P une perpendiculaire oD ; désignons par p la longueur oD et par α, β, γ les angles que font les directions ox, oy, oz des coordonnées positives avec la direction oD.

Prenons sur le plan un point quelconque $M(x, y, z)$, construisons le contour de ses coordonnées et projetons orthogonalement sur oD les deux chemins oARMD et oD. La projection de MD étant nulle, nous aurons la relation

(11) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$

Cette équation qui a lieu entre les coordonnées d'un point quelconque du plan P, représente ce plan.

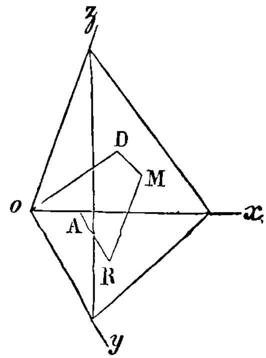


Fig. 18.

Remarque. — La forme que nous venons de donner à l'équation du plan nous permettra de trouver facilement les angles que les axes de coordonnées font avec une normale à un plan ou la distance d'un point à ce plan.

35. Problème VIII. — *Connaissant l'équation d'un plan, trouver les angles que les directions positives des axes de coordonnées font avec une normale au plan.* (*Coordonnées rectangulaires.*)

Soit

$$P = Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan ; en désignant par α, β, γ les angles inconnus, le plan sera aussi représenté par l'équation (11) ; on a donc

$$(12) \qquad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(px.)

Les formules (12) donnent, pour chaque cosinus, deux valeurs égales et de signes contraires; quelques développements sont nécessaires si l'on veut préciser les angles qui correspondent à chacun des deux signes du radical.

Le plan P sépare l'espace en deux régions ; en chaque point M de l'une de ces régions la fonction P conserve un signe constant, car elle reste finie, continue et ne s'annule pas quand le point M reste dans la même région. Cette fonction change de signe quand le point M passe d'une région à l'autre ; on le voit en plaçant ce point d'abord sur l'axe des z positifs puis sur l'axe des z négatifs. La fonction P se réduit alors à $Cz + D$, et elle a le signe de Cz pour des valeurs *absolues* suffisamment grandes de z.

La région pour tous les points de laquelle on a $P > 0$ est appelée la région *positive* de l'espace.

Celle pour tous les points de laquelle on a $P < 0$ est appelée la région *négative* de l'espace.

A partir de chaque point du plan, sur la normale en ce point, on distingue deux directions opposées.

On appelle normale *positive* celle qui se dirige vers la région positive du plan, et normale *négative* celle qui se dirige vers la région négative du plan.

Cela posé, nous allons établir la règle suivante :

Règle. — *Si dans les formules* (12) *on donne au radical le signe* $+$, *elles déterminent les cosinus des angles que les directions positives des axes de coordonnées font avec la normale positive ; si, dans ces formules on donne au radical le signe* $-$, *elles déterminent les cosinus des angles que les directions positives des axes de coordonnées font avec la normale négative.*

Sur une normale au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ du plan P prenons une *longueur* $M_1M' = \rho$, les cosinus des angles α, β, γ que les directions positives des axes de coordonnées font avec la direction M_1M' seront déterminés par l'une ou l'autre des formules (12). En projetant orthogonalement M_1M' sur ces axes on a, pour exprimer les coordonnées x', y', z' du point M', les relations

$$x' = x_1 + \rho \cos\alpha \qquad y' = y_1 + \rho\cos\beta \qquad z' = z_1 + \rho\cos\gamma.$$

Substituons ces valeurs dans la fonction P, nous aurons

$$Ax' + By' + Cz' + D = P_1 + \rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)$$

ou bien

$$(13) \qquad P' = \pm \rho\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

en remarquant que P_1 est nul, tenant compte des équations (12) et désignant par P' la valeur que prend la fonction P pour $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

Si le point M′ est sur la normale positive, P′ est positif, et, dans le second membre de l'équation (13), on doit adopter le signe $+$, ce qui exige qu'on adopte également ce signe dans les équations (12).

Si le point M′ est sur la normale négative, P′ est négatif, et, dans le second membre de l'équation (13), on doit adopter le signe —, ce qui exige qu'on adopte également ce signe dans les équations (12).

La règle énoncée se trouve ainsi établie.

36. Problème IX. — *Connaissant les équations de deux plans, trouver l'angle de ces deux plans. (Coordonnées rectangulaires.)*

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations des deux plans ; ces plans forment entre eux deux angles respectivement égaux aux angles formés par les normales à ces plans. Désignons par α, β, γ et par α', β', γ' les angles que les directions positives des axes de coordonnées font avec les normales aux deux plans et par V l'un quelconque des angles cherchés, nous aurons

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma';$$

d'où, en vertu des formules (12),

$$\cos V = \pm \frac{AA' + BB' + CC'}{[(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Au signe $+$ correspond le cosinus de l'angle des deux normales positives ou des deux normales négatives ; au signe — correspond le cosinus de l'angle que fait une normale positive avec une normale négative.

Condition de perpendicularité de deux plans. — Cette condition est exprimée par la relation

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

CHAPITRE II

LIGNE DROITE.

37. Toute droite de l'espace peut être considérée comme l'intersection de deux plans, une droite sera donc représentée par deux équations du premier degré

$$P = Ax + By + Cz + D = 0 \qquad P' = A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

considérées *simultanément*.

Projections d'une droite. — Supposons que $AB' - BA'$ ne soit pas nul, les équations précédentes pourront être résolues par rapport à x et à y ; elles donneront des valeurs de la forme

$$(1) \qquad x = az + p \qquad y = bz + q.$$

Ces équations sont celles des plans qui projettent la droite sur le plan xoz et sur le plan yoz. On peut aussi considérer la première comme l'équation de la projection de la droite sur le plan xoz et la seconde comme celle de la projection de cette droite sur le plan yoz.

Remarque. — Pour obtenir les équations (1) on a supposé que la quantité $AB' - BA'$ n'était pas nulle, c'est-à-dire que les traces des plans P et P′ sur le plan xoy n'étaient pas parallèles. Cela revient à supposer que la droite de l'espace n'est pas parallèle au plan xoy.

Ainsi les équations (1) représentent toutes les droites de l'espace, excepté celles qui sont parallèles au plan xoy ; dans ce cas les équations de la droite sont évidemment de la forme

$$z = h \qquad y = \alpha x + \beta.$$

Pour cette raison nous emploierons rarement les équations (1) ; nous représenterons la droite par d'autres équations que nous allons établir et qui offrent le double avantage d'être symétriques et générales.

38. Par l'origine menons à la droite donnée une parallèle sur laquelle nous prendrons un point quelconque D(a, b, c) ; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point fixe A de cette droite, et x, y, z celles d'un point variable M de la même droite. Par le point A menons des droites Ax', Ay', Az', respectivement parallèles aux axes ox, oy, oz ; puis, par les points D et M, menons parallèlement à l'axe des x des droites rencontrant, la première, le plan zoy au point d et, la deuxième, le plan z'Ay' au point m.

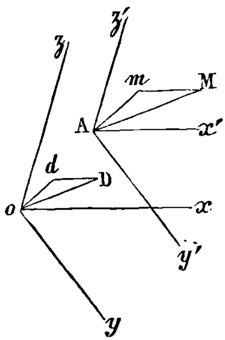


Fig. 19.

Les deux triangles semblables Dod, MAm donnent

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{D}d} = \frac{\mathrm{AM}}{o\mathrm{D}}$$

ou

$$\frac{x - x_0}{a} = \rho$$

en posant $\rho = \dfrac{\mathrm{AM}}{o\mathrm{D}}$.

On verrait de même que l'on a $\dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} = \rho$; les coordonnées d'un point quelconque M de la droite satisfont donc aux relations

$$(2) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \rho.$$

On vérifie facilement que les formules (2) sont générales pourvu que l'on regarde ρ comme positif quand les directions AM et oD sont de *même sens*, et ρ comme négatif quand ces directions sont de *sens contraire*.

Les mêmes formules montrent qu'une droite de l'espace peut être représentée par les équations

$$(3) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Cas particuliers. — 1° *La droite est parallèle au plan des xy.* — Le point D est alors dans le plan xoy ; par suite, c est nul et les équations (3) deviennent

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b} \qquad z-z_0=0.$$

2° *La droite est parallèle à l'axe des z.* — Le point D est alors sur cet axe ; par suite, a et b sont nuls et les équations (3) deviennent

$$x-x_0=0 \qquad y-y_0=0.$$

Remarques. — 1° Dans la suite nous représenterons toujours une droite par les équations (3) ; pour appliquer les résultats trouvés au cas où la droite est représentée par les équations (1), il suffira de poser $c=1$, $x_0=p$, $y_0=q$, $z_0=0$.

2° Nous appellerons les coordonnées a, b, c du point D les *coefficients de direction* de la droite ; ces coefficients sont évidemment proportionnels aux paramètres directeurs u, v, w de cette droite ; on a donc

$$(4) \qquad \frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}=\pm\sqrt{\Sigma a^2+2\Sigma bc\cos\lambda}.$$

3° Si les coordonnées sont rectangulaires, les paramètres directeurs sont les cosinus des angles α, β, γ que les axes de coordonnées font avec la droite ; les équations (3) deviennent alors

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

4° Pour que deux droites soient parallèles il faut et il suffit que leurs coefficients de direction soient proportionnels.

Condition pour que deux droites soient dans un même plan.

39. Soient

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\rho \qquad \frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}=\rho'$$

les équations des deux droites données L et L', et

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan quelconque P.

Les valeurs de ρ et de ρ' qui correspondent aux points où les droites L et L' rencontrent le plan P sont données par les équations

$$\begin{aligned}(Aa + Bb + Cc)\rho + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0\\ (Aa' + Bb' + Cc')\rho' + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0.\end{aligned}$$

Pour que les droites L, L' soient situées dans un même plan P, il faut et il suffit que les équations précédentes soient satisfaites, quels que soient ρ et ρ' ; on doit donc avoir

$$\begin{aligned}Aa + Bb + Cc &= 0 \qquad & Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0\\ Aa' + Bb' + Cc' &= 0 \qquad & Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{gathered}A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = 0\\ Aa + Bb + Cc = 0\\ Aa' + Bb' + Cc' = 0.\end{gathered}$$

En éliminant A, B, C entre les équations précédentes, on obtient, pour exprimer la condition cherchée, la relation

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 ;$$

elle est satisfaite en particulier quand les droites sont parallèles, car les éléments des deux dernières lignes du déterminant précédent sont alors proportionnels.

Problèmes sur la ligne droite.

40. Problème I. — *Trouver les équations d'une droite passant par deux points donnés* $A(x', y', z')$, $B(x'', y'', z'')$.

Par une méthode semblable à celle qui a été exposée en géométrie plane (G.P. 38) on trouve pour les équations de la droite inconnue.

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}.$$

Si le point B coïncide avec l'origine, ces équations deviennent

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}.$$

41. Problème II. — *Connaissant les équations d'une droite, trouver les angles qu'elle fait avec les axes de coordonnées.*

Soient

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

les équations de la droite transportée à l'origine ; appelons D le point de cette droite dont les coordonnées sont a, b, c et α, β, γ les angles que les directions positives des axes font avec la direction oD.

Supposons d'abord les coordonnées *rectangulaires*, nous aurons

$$a=o\mathrm{D}\cos\alpha \qquad b=o\mathrm{D}\cos\beta \qquad c=o\mathrm{D}\cos\gamma$$
$$o\mathrm{D}=(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\cos\alpha=\frac{a}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \cos\beta=\frac{b}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \cos\gamma=\frac{c}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant les coordonnées *obliques ;* sur la direction oD prenons une longueur $od=1$, et soient u, v, w les coordonnées du point d, c'est-à-dire les *paramètres directeurs* de la droite. Nous aurons

$$\cos\alpha=u+v\cos\nu+w\cos\mu$$

et

$$\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}=[\Sigma a^2+2\Sigma bc\cos\lambda]^{\frac{1}{2}};$$

car a, b, c ayant respectivement les signes de u, v, w, on doit, dans les formules (4) du paragraphe 38, donner au radical le signe $+$.

On a donc

$$\frac{\cos\alpha}{a+b\cos\nu+c\cos\mu}=\frac{\cos\beta}{a\cos\nu+b+c\cos\lambda}=\frac{\cos\gamma}{a\cos\mu+b\cos\lambda+c}$$

$$=[\Sigma a^2+2\Sigma bc\cos\lambda]^{-\frac{1}{2}}.$$

42. Problème III. — *Connaissant les équations de deux droites, trouver l'angle* V *de ces deux droites.*

Soient

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\qquad\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$$

les équations des deux droites transportées à l'origine. Appelons D le point de la première dont les coordonnées sont a, b, c, et D' le point de la seconde dont les coordonnées sont a', b', c' ; nous allons chercher le cosinus de l'angle V formé par les directions oD, oD'.

Supposons d'abord les coordonnées *rectangulaires ;* si (α, β, γ), (α', β', γ') sont les angles que les directions positives des axes font avec les directions oD, oD', on a

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

d'où

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+cc'}{[(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant les coordonnées *obliques ;* sur les directions oD, oD' prenons des longueurs $od=od'=1$, et soient (u,v,w), (u',v',w') les coordonnées des points d, d', c'est-à-dire les *paramètres directeurs* des deux droites, nous aurons

$$\cos V=\Sigma uu'+\Sigma(vw'+wv')\cos\lambda,$$

d'où

$$\cos V=\frac{\Sigma aa'+\Sigma(bc'+cb')\cos\lambda}{[(\Sigma a^2+2\Sigma bc\cos\lambda)(\Sigma a'^2+2\Sigma b'c'\cos\lambda)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Condition de perpendicularité de deux droites. — Cette condition est

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

en coordonnées *rectangulaires* et

$$\Sigma aa' + \Sigma(bc' + cb')\cos\lambda = 0$$

en coordonnées *obliques*.

CHAPITRE III

DROITES ET PLANS COMBINÉS ENTRE EUX.

43. Nous allons maintenant résoudre quelques problèmes pour lesquels nous aurons à combiner une droite avec un plan.

Nous représenterons par

$$\text{L} \qquad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\rho$$

les équations de la droite, et par

$$\text{P} \qquad \text{A}x+\text{B}y+\text{C}z+\text{D}=0$$

celle du plan.

Condition pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

44. La valeur de ρ qui correspond au point où la droite L rencontre le plan P est donnée par l'équation

$$(1) \qquad (\text{A}a+\text{B}b+\text{C}c)\rho+\text{A}x_0+\text{B}y_0+\text{C}z_0+\text{D}=0.$$

Pour que la droite soit parallèle au plan, il faut et il suffit que son point de rencontre avec le plan soit rejeté à l'infini ; la condition cherchée est donc

$$\text{A}a+\text{B}b+\text{C}c=0.$$

Conditions pour qu'une droite soit située dans un plan.

45. Pour que la droite soit située dans le plan P, il faut et il suffit que l'équation (1) soit satisfaite quel que soit ρ; les conditions cherchées sont donc

$$Aa + Bb + Cc = 0 \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Conditions pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan.

46. Nous supposerons les axes de coordonnées *rectangulaires* et nous ferons la même hypothèse pour tous les problèmes relatifs aux angles et aux distances qui seront résolus dans ce chapitre.

Quand nous ne ferons plus cette hypothèse, nous aurons soin de l'indiquer.

Une droite perpendiculaire à un plan se confond avec une normale à ce plan; par suite, les directions positives des axes de coordonnées font des angles égaux avec la droite et une des deux directions de la normale au plan; les conditions cherchées sont donc

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}. \tag{2}$$

Remarque. — Il est aisé de vérifier que les relations précédentes expriment que les traces du plan sur chacun des plans de coordonnées sont respectivement perpendiculaires aux projections de la droite sur ces mêmes plans.

47. Problème I. — *Par un point* $A(x', y', z')$ *mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée* L.

Le plan passant par le point A, son équation est de la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0\,;$$

en tenant compte des relations (2), on voit que l'équation du plan cherché est

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0.$$

48. Problème II. — *Trouver les équations des plans perpendiculaires aux axes de coordonnées.*

Nous supposerons ici les coordonnées *obliques*, car, quand elles sont rectangulaires, le problème est immédiatement résolu et les équations des plans inconnus sont de la forme

$$x = p \qquad y = q \qquad z = r.$$

Cherchons par exemple l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe ox; les angles que les directions positives des axes de coordonnées font avec l'une des directions de la normale au plan sont $\alpha = 0$, $\beta = \nu$, $\gamma = \mu$. L'équation du plan inconnu est donc

$$x + y\cos\nu + z\cos\mu - p = 0.$$

Posons

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu\,;$$

les plans perpendiculaires aux axes ox, oy, oz auront respectivement pour équations

$$\tfrac{1}{2}\,S'_x - p = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\,S'_y - q = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\,S'_z - r = 0.$$

Remarque. — De ce qui précède il résulte que les équations d'une droite perpendiculaire au plan xoy par exemple sont

$$\tfrac{1}{2}\,S'_x - p = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\,S'_y - q = 0.$$

49. Problème III. — *Connaissant les équations d'une droite et celle d'un plan, trouver l'angle* V *que la droite fait avec le plan.*

L'angle inconnu V est le complément de l'angle V_1 que la droite fait avec la normale au plan ; les équations d'une normale au plan transportée à l'origine étant

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C},$$

on a

$$\cos V_1 = \sin V = \frac{Aa + Bb + Cc}{[(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette formule fait connaître le sinus du complément de l'angle V_1 formé par les directions allant de l'origine aux points qui ont respectivement pour coordonnées (a, b, c) et (A, B, C).

Détermination des distances.

50. Problème IV. — 1° *D'un point donné* A(x', y', z') *abaisser une perpendiculaire sur un plan* P ; 2° *trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

1° Les équations de la droite cherchée sont de la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}.$$

Cette droite sera perpendiculaire au plan P, si l'on a

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c};$$

les équations de la perpendiculaire inconnue sont donc

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

2° Pour trouver la longueur d de cette perpendiculaire, on pourrait calculer les coordonnées de son pied B, puis chercher la distance des points A et B dont on connaît alors les coordonnées. On arrive plus rapidement au résultat de la manière suivante :

Supposons d'abord que le point A coïncide avec l'origine ; en appelant d la distance de l'origine au plan, nous savons que ce plan peut être représenté par l'équation

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-d=0.$$

En identifiant cette équation avec celle du plan, on obtient les relations

$$(\lambda) \qquad \frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-d}{D},$$

d'où l'on tire

$$\cos\alpha=-\frac{d}{D}A \qquad \cos\beta=-\frac{d}{D}B \qquad \cos\gamma=-\frac{d}{D}C.$$

Portons ces valeurs de $\cos\alpha$, de $\cos\beta$ et de $\cos\gamma$ dans la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (\times)$$

nous obtiendrons la formule

$$d = \frac{D}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant que le point A ne coïncide plus avec l'origine. On ramènera ce cas au précédent en transportant l'origine au point A ; l'équation du plan deviendra

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

en posant

$$D' = Ax' + By' + Cz' + D.$$

La distance du point A au plan sera donc donnée par la formule

$$d = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans la formule précédente, le dénominateur est une quantité positive ; cette formule sera générale si l'on fait la convention suivante :

La distance d est regardée comme positive quand, par rapport au plan P, *le point* A *se trouve dans la région positive de l'espace ; elle est regardée comme négative quand le point* A *se trouve dans la région négative de l'espace.*

51. Problème V. — *Trouver les équations des plans bissecteurs des angles formés par deux plans dont on donne les équations.*

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations des deux plans donnés P, P'. En regardant les plans bissecteurs comme le lieu des points également distants des plans P, P', on obtient immédiatement, pour les représenter, les équations

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{(A'^2+B'^2+C'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

52. Problème VI. — *Étant données les équations d'une droite* L, *trouver : 1° les équations de la perpendiculaire abaissée du point* $M(x', y', z')$ *sur la droite ; 2° la longueur de cette perpendiculaire.*

1° Soient

$$\text{L} \qquad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\rho$$

les équations de la droite donnée L. La perpendiculaire MB abaissée du point M sur cette droite se trouve à l'intersection du plan P passant par le point M et la droite L, avec le plan Q passant par le point M et perpendiculaire sur la droite L.

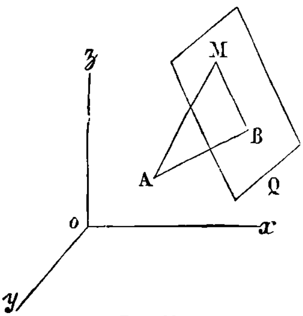


Fig. 20.

Le plan P passant par le point M, son équation est de la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0\,;$$

en exprimant que ce plan contient la droite L, on a les deux relations de condition

$$A(x_0-x')+B(y_0-y')+C(z_0-z')=0$$
$$Aa+Bb+Cc=0$$

L'équation du plan P est donc

$$\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ x_0-x' & y_0-y' & z_0-z' \\ a & b & c \end{vmatrix}=0.$$

Quant à l'équation du plan Q, elle est

$$(3) \qquad a(x-x')+b(y-y')+c(z-z')=0.$$

2° Les coordonnées (x, y, z) du point B pied de la perpendiculaire MB sont données par les équations (L) et (3) considérées simultanément ; ces coordonnées étant connues, la distance $MB = d$ sera donnée par la formule

$$(4) \qquad d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Le problème se trouve ainsi ramené à éliminer x, y, z entre les équations (L), (3) et (4).

Des équations (L) tirons les valeurs de x, y, z en fonction de ρ pour les porter dans les équations (3) et (4), nous aurons

$$(5) \qquad \rho = \frac{V}{a^2 + b^2 + c^2}$$

et

$$(6) \qquad d^2 = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 - 2V\rho + (a^2 + b^2 + c^2)\rho^2,$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$V = a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c(z' - z_0).$$

En éliminant ρ entre les équations (5) et (6), on obtient la formule

$$(7) \quad d^2 = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 - \frac{[a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c(z' - z_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Remarque. — 1° Des considérations géométriques permettent d'écrire immédiatement la formule précédente.

Soit, en effet, A le point de la droite L qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, le triangle rectangle MAB donne

$$\overline{MB}^2 = d^2 = \overline{MA}^2 - \overline{BA}^2 ;$$

en remarquant que MA est la distance des deux points $M(x', y', z')$, $A(x_0, y_0, z_0)$ et que AB est la distance du point A au plan Q, on retrouve la formule (7).

2° Cette formule écrite de la manière suivante :

$$d^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)[(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2] - [a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c(z' - z_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

puis transformée par l'identité de Lagrange, devient

$$d^2 = \frac{[b(z' - z_0) - c(y' - y_0)]^2 + [c(x' - x_0) - a(z' - z_0)]^2 + [a(y' - y_0) - b(x' - x_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

53. Problème VII. — *Connaissant les équations de deux droites* L, L′, *trouver : 1° les équations de la perpendiculaire commune à ces deux droites ; 2° la longueur de leur plus courte distance.*

Par la droite L′ menons un plan P parallèle à la droite L ; on déterminera la position de la perpendiculaire commune à ces deux droites en remarquant qu'elle est l'intersection des plans Q et R perpendiculaires au plan P et passant respectivement par les droites L, L′.

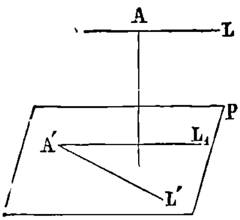


Fig. 21.

La longueur de la plus courte distance sera égale à la distance d'un point quelconque de la droite L au plan P.

Soient

$$\text{L} \qquad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\text{L}' \qquad \frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}$$

les équations des droites L, L′. Cherchons d'abord l'équation du plan P.

Ce plan passant par le point A′(x_1, y_1, z_1) de la droite L′, son équation est de la forme

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 ;$$

en exprimant que le plan est parallèle aux droites L et L′, on obtient les relations

$$Aa+Bb+Cc=0 \qquad Aa'+Bb'+Cc'=0 ;$$

donc l'équation du plan P est

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$(x-x_1)U'_l+(y-y_1)U'_m+(z-z_1)U'_n=0$$

en posant

$$U = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Par un calcul analogue au précédent on trouve facilement que les plans Q et R ont pour équations

$$Q \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ U_l & U'_m & U'_n \end{vmatrix} = 0 \quad R \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a' & b' & c \\ U'_l & U'_m & U_n \end{vmatrix} = 0;$$

ces équations considérées simultanément représentent la perpendiculaire commune.

On aura la longueur d de la plus courte distance en cherchant la distance du point $A(x_0, y_0, z_0)$ de la droite L au plan P, ce qui donne

$$(8) \qquad d^2 = \frac{[(x_0 - x_1)U'_l + (y_0 - y_1)U'_m + (z_0 - z_1)U'_n]^2}{U'^2_l + U'^2_m + U'^2_n}.$$

54 Remarque. — Quand la droite L′ devient parallèle à L, la longueur de la plus courte distance est évidemment égale à la distance d'un point quelconque de L à la droite L′.

Dans cette hypothèse, les quantités U'_l, U'_m, U'_n deviennent nulles, et l'expression de d^2 prend la forme illusoire $\frac{0}{0}$.

Pour expliquer ce résultat, il suffit de remarquer que le plan P est alors un plan quelconque passant par la droite L′, et que la distance du point $A(x_0, y_0, z_0)$ à ce plan peut varier depuis zéro jusqu'à la distance des deux droites parallèles.

Cependant la formule (8) étant toujours applicable, quelque petites que soient les quantités U'_l, U'_m, U'_n, on doit pouvoir, en faisant tendre ces quantités vers zéro *d'après une loi convenablement choisie*, déduire de la formule l'expression de la plus courte distance pour le cas particulier considéré.

Par le point A′ de la droite L′ menons une droite $A'L_1$ parallèle à AL ; si l'on fait tendre U'_l, U'_m, U'_n vers zéro d'après une loi *arbitrairement choisie*, la droite A'L' tendra vers $A'L_1$ en décrivant un cône *quelconque* ayant pour sommet le point A'.

Le plan P aura pour position limite le plan tangent à ce cône suivant la génératrice $A'L_1$, c'est-à-dire un plan quelconque passant par $A'L_1$.

Quant aux plans Q et R, ils auront pour limites des plans perpendiculaires à ce plan P et passant l'un par L l'autre par $A'L_1$, c'est-à-dire des plans parallèles entre eux ; leur intersection sera donc *rejetée à l'infini.*

Or, quand les droites L, L' sont parallèles, leur perpendiculaire commune n'est pas rejetée à l'infini, mais sa position n'est pas *déterminée.*

Cette remarque montre que, pour déduire de la formule (8) l'expression de la plus courte distance des droites L et L' quand elles deviennent parallèles, il faut faire tendre vers zéro les quantités U'_l, U'_m, U'_n d'après une loi telle qu'à la limite les plans Q et R *se confondent.*

Posons

$$U'_l = \alpha h \qquad U'_m = \beta h \qquad U'_n = \gamma h,$$

α, β, γ, h étant des fonctions de a, b, c et de a', b', c', dont la dernière h tend vers zéro quand a', b', c' tendent respectivemen vers a, b, c ; la formule (8) deviendra

$$(8') \qquad d^2 = \frac{[\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)]^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

et les équations des plans Q, R deviendront

$$\mathrm{Q} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \mathrm{R} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

A la limite ces plans sont parallèles, puisque a', b', c' tendent respectivement vers a, b, c ; pour qu'ils se confondent, il suffit donc que le plan R passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ qui appartient au plan Q. Ainsi les fonctions inconnues α, β, γ devront satisfaire à la relation

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, à la relation

$$\alpha[b(z_0-z_1)-c(y_0-y_1)]+\beta[c(x_0-x_1)-a(z_0-z_1)]$$
$$+\gamma[a(y_0-y_1)-b(x_0-x_1)]=0.$$

Maintenant la somme $aU'_l+bU'_m+cU'_n$ qui n'est autre chose que le déterminant U dans lequel on remplace l, m, n par a, b, c est *identiquement* nulle ; donc on a aussi

$$(10) \qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Des équations (9) et (10) on tire facilement

$$\frac{\alpha}{(a^2+b^2+c^2)(x_0-x_1)-aV}=\frac{\beta}{(a^2+b^2+c^2)(y_0-y_1)-bV}=\frac{\gamma}{(a^2+b^2+c^2)(z_0-z_1)-cV}$$

en posant

$$V=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1).$$

En portant ces valeurs de α, β, γ dans la formule (8'), elle devient

$$d^2=\frac{[(a^2+b^2+c^2)\Sigma(x_0-x_1)^2-V^2]^2}{(a^2+b^2+c^2)[(a^2+b^2+c^2)\Sigma(x_0-x_1)^2-V^2]},$$

ou enfin

$$d^2=\Sigma(x_0-x_1)^2-\frac{V^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cette formule représente bien le carré de la plus courte distance des deux droites parallèles L, L', car elle exprime le carré de la distance d'un point de l'une de ces droites à l'autre.

Expression du volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets.

55. Soient

$$A_1(x_1y_1z_1) \quad A_2(x_2y_2z_2) \quad A_3(x_3y_3z_3) \quad A_4(x_4y_4z_4)$$

les sommets du tétraèdre; l'équation du plan de la base $A_2\,A_3\,A_4$

sera

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et, les coordonnées étant rectangulaires, la hauteur A_1H aura pour expression

$$A_1H = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{\pm 2\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}};$$

en représentant par B_x, B_y, B_z les projections orthogonales de l'aire B de la base $A_2A_3A_4$ sur les plans de coordonnées.

Or on a

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2;$$

donc, si l'on appelle V le volume du tétraèdre, on aura

$$(11) \qquad 6V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dans le second membre de la formule (11), on devra choisir le signe de manière que ce second membre soit positif; nous allons établir une règle permettant de fixer ce signe.

Supposons que le tétraèdre se déplace dans l'espace, les coordonnées de ses sommets varieront d'une manière continue; donc si le second membre de la relation (11) peut varier, il variera d'une manière continue. Or, ce second membre ne peut prendre que les valeurs 6V ou —6V; donc, il restera constant.

Il résulte de là que, pour déterminer le signe qu'on doit prendre dans le second membre de la relation (11) on peut donner au tétraèdre une position particulière.

Pour fixer les idées, nous supposerons que le trièdre formé par les axes des coordonnées positives est *direct*.

Plaçons la base $A_2A_3A_4$ du tétraèdre dans le plan xoy de manière que le sommet A_2 soit à l'origine, le sommet A_3 sur l'axe des x positifs et le sommet A_1 dans la région des z positifs ; on aura

$$6V = \pm x_3 y_4 z_1.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° *Le sommet* A_4 *est, par rapport à l'axe des* x *du côté des* y *positifs.* — Le produit $x_3y_4z_1$ étant alors positif, on doit, dans le second membre de la relation (11), affecter le déterminant du signe $+$.

Par un point ω intérieur au triangle $A_2A_3A_4$ menons, au plan de ce triangle, une perpendiculaire ωI dirigée dans la région de l'espace où se trouve le sommet A_1 du tétraèdre, dans sa position primitive. Supposons un observateur placé sur la demi-droite ωI, les pieds en ω et la tête en I ; dans le cas qui nous occupe, un mobile parcourant les côtés du triangle $A_2A_3A_4$, dans l'ordre indiqué par les lignes du déterminant à partir de la seconde, paraîtra tourner dans le sens *direct*.

2° *Le sommet* A_4 *est, par rapport à l'axe des* x *du côté des* y *négatifs.* — On doit alors, dans le second membre de la relation (11), affecter le déterminant du signe $-$. Quant au mobile dont nous venons de parler, il paraîtra tourner dans le sens *indirect*.

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

Règle. — *Soient* $A_1A_2A_3A_4$ *les sommets du tétraèdre rangés dans l'ordre indiqué par les lignes du déterminant de la formule* (11), *à partir de la première. Par un point* ω *intérieur au triangle* $A_2A_3A_4$ *menons, au plan de ce triangle, une perpendiculaire* ωI *dirigée vers la région de l'espace où se trouve le sommet* A_1 *du tétraèdre, et supposons un observateur placé sur la demi-droite* ωI, *les pieds en* ω *et la tête en* I.

On affectera le déterminant du signe $+$ *quand un mobile parcourant les côtés du triangle* $A_2A_3A_4$, *dans l'ordre indiqué par les lignes du déterminant à partir de la seconde, paraîtra tourner dans le sens direct.*

On affectera ce déterminant du signe $-$ *si le mobile paraît tourner dans le sens indirect.*

Remarque. — Quand le trièdre formé par les axes des coordonnées positives est *inverse*, on doit donner au déterminant un signe contraire à celui qui résulterait de l'application de la règle précédente.

Expression des coordonnées d'un point variable d'une droite en fonction d'un seul paramètre.

56. Les formules

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\rho$$

trouvées au paragraphe 38 donnent une première solution du problème proposé.

Deuxième solution. — Prenons sur la droite donnée deux points $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, et soit $M(x, y, z)$ un point variable de cette droite.

Posons

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\lambda},$$

les quantités λ et μ étant de même signe quand le point M est sur le segment AB et de signes contraires quand ce point est situé en dehors du segment.

Cette relation *homogène* par rapport aux segments MA, MB situés sur une même droite, reste vraie quand on projette cette droite sur les plans coordonnés; on a donc (G.P. 58)

$$\frac{x}{\lambda x_1+\mu x_2}=\frac{y}{\lambda y_1+\mu y_2}=\frac{z}{\lambda z_1+\mu z_2}=\frac{1}{\lambda+\mu}.$$

Ces relations rendues homogènes deviennent

$$\frac{x}{\lambda x_1+\mu x_2}=\frac{y}{\lambda y_1+\mu y_2}=\frac{z}{\lambda z_1+\mu z_2}=\frac{t}{\lambda t_1+\mu t_2};$$

dans les résultats obtenus à l'aide de ces dernières formules, on devra poser

$$t=t_1=t_2=1.$$

Centre des distances proportionnelles.

57. La définition du centre des distances proportionnelles de p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ situés dans un même plan (G.P. 59) s'étend immédiatement au cas où ces points occupent des positions quelconques dans l'espace. D'un autre côté, toutes les relations qui existent entre les segments de droites que l'on considère dans cette définition, restent vraies quand on projette ces points sur les plans coordonnés ; les coordonnées α, β, γ du centre des distances proportionnelles ont donc pour expressions

$$\alpha = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \qquad \beta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \qquad \gamma = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

en désignant par x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points A, et par m le paramètre correspondant.

Centre des moyennes distances. — En supposant tous les paramètres m égaux entre eux, on aura les coordonnées du centre des moyennes distances des points donnés ; elles ont pour expressions

$$\alpha = \frac{\Sigma x}{p} \quad \beta = \frac{\Sigma y}{p} \quad \gamma = \frac{\Sigma z}{p}.$$

CHAPITRE IV

SPHÈRE.

Equation de la sphère en coordonnées obliques.

58. Définition. — *La sphère est une surface dont tous les points sont également distants d'un point appelé centre.*

La distance constante de chaque point de la surface de la sphère au centre est le rayon.

Cette définition conduit immédiatement à l'équation de la sphère.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère, R son rayon, et x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de sa surface ; son équation sera

$$(1) \qquad \Sigma(x-x_0)^2+2\Sigma(y-y_0)(z-z_0)\cos\lambda-\mathrm{R}^2=0$$

ou, en développant,

$$(2) \qquad \Sigma x^2+2\Sigma yz\cos\lambda-2\Sigma(x_0+y_0\cos\nu+z_0\cos\mu)x$$
$$+\Sigma x_0^2+2\Sigma y_0z_0\cos\lambda-\mathrm{R}^2=0.$$

Quand la sphère varie, les coefficients qui changent dans l'équation (2) sont ceux des termes du premier degré, et le terme tout connu. L'équation de la sphère est donc de la forme

$$(3) \quad f=\Sigma x^2+2\Sigma yz\cos\lambda+2\mathrm{C}_1x+2\mathrm{C}_1'y+2\mathrm{C}_1''z+\mathrm{D}_1=0.$$

Réciproquement, *toute équation de la forme précédente représente en général une sphère, pourvu que les angles des axes de coordonnées soient* λ, μ, ν.

En effet, en identifiant les équations (2) et (3), on obtient les quatre relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0 \qquad\quad + y_0\cos\nu + z_0\cos\mu + C_1 = 0 \\ x_0\cos\nu + y_0 \qquad\quad + z_0\cos\lambda + C_1' = 0 \\ x_0\cos\mu + y_0\cos\lambda + z_0 \qquad\quad + C_1'' = 0 \end{array}\right.$$

$$(5)\qquad \Sigma x_0^2 + 2\Sigma y_0 z_0 \cos\lambda - R^2 = D_1,$$

qui contiennent quatre inconnues x_0, y_0, z_0, R ; donc l'identification des équations (2) et (3) sera en général possible.

59. Il faut maintenant examiner si les équations (4) et (5) donneront toujours pour x_0, y_0, z_0, R des valeurs admissibles.

Équations du centre. — Les équations (4) qui déterminent le centre sont appelées les équations du centre ; elles sont toujours compatibles, car le déterminant des inconnues x_0, y_0, z_0 est la quantité Ω qui n'est pas nulle (9).

Si f représente le premier membre de l'équation (3), les équations du centre sont

$$f'_{x_0} = 0 \qquad f'_{y_0} = 0 \qquad f'_{z_0} = 0.$$

Détermination du rayon. — On peut remplacer l'équation (5) par une autre plus simple ; pour cela il suffit d'y ajouter les équations (4) multipliées respectivement par $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$, ce qui donne l'équation

$$(6)\qquad C_1 x_0 + C_1' y_0 + C_1'' z_0 + D_1 + R^2 = 0.$$

L'élimination de x_0, y_0, z_0 entre les équations (4) et (6) donne pour déterminer le carré du rayon, l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & C_1 + 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & C_1' + 0 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C_1'' + 0 \\ C_1 & C_1' & C_1'' & D_1 + R^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & C_1 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & C_1' \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C_1'' \\ C_1 & C_1' & C_1'' & D_1 \end{vmatrix} + \Omega R^2 = 0.$$

Si la dernière équation donne pour R une valeur réelle, l'équation (3) représente une véritable sphère.

Si cette équation donne pour R une valeur nulle, l'équation (3) ne sera vérifiée que par les coordonnées du centre; on dit que la sphère se réduit à un point.

Enfin si l'on trouve pour R une valeur imaginaire, l'équation (3) n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point de l'espace; on dit alors qu'elle représente une sphère imaginaire.

Remarque. — Rendons homogène l'équation (3) en y remplaçant x, y, z par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, puis en chassant le dénominateur t^2; si nous appelons $\varphi(x, y, z, t)$ le premier membre de l'équation (3) ainsi modifiée, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\varphi'_{t_0} = C_1 x_0 + C'_1 y_0 + C''_1 z_0 + D_1 t_0.$$

Dans la pratique, on convient de remplacer le symbole $\frac{1}{2}\varphi'_{t_0}$ par le symbole $\frac{1}{2}f'_{t_0}$; l'équation (6) devient alors

$$\tfrac{1}{2}f'_{t_0} + R^2 = 0.$$

Conditions pour que l'équation générale du second degré représente une sphère.

60. L'équation générale du second degré à trois variables est

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0; \end{gathered}$$

pour qu'elle représente une sphère, il faut et il suffit qu'on puisse l'identifier avec l'équation (3).

Les relations d'identification sont

$$A = A' = A'' = \frac{B}{\cos\lambda} = \frac{B'}{\cos\mu} = \frac{B''}{\cos\nu} = \frac{C}{C_1} = \frac{C'}{C'_1} = \frac{C''}{C''_1} = \frac{D}{D_1}. \tag{7}$$

Ces relations au nombre de *neuf* contiennent *quatre* indéterminées C_1, C'_1, C''_1, D_1, et l'on aura les *cinq* relations qui doivent lier les coefficients A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', D, en éliminant les cinq indéterminées entre les équations (7). Cette élimination est toute faite, car les six premières fractions, dans les équations (7), ne contiennent pas C_1, C'_1, C''_1, D_1.

Les conditions cherchées sont donc

$$A = A' = A'' = \frac{B}{\cos\lambda} = \frac{B'}{\cos\mu} = \frac{B''}{\cos\nu}.$$

Théorème. — *Pour que l'équation du second degré à trois variables représente une sphère, les angles des axes de coordonnées étant* λ, μ, ν, *il faut et il suffit:*

1° *Que les coefficients des carrés* x^2, y^2 *et* z^2 *soient égaux.*

2° *Qu'après avoir divisé l'équation par ces coefficients égaux, les coefficients des rectangles* yz, zx, xy *soient respectivement égaux à* $2\cos\lambda$, $2\cos\mu$, $2\cos\nu$.

Équation de la sphère en coordonnées rectangulaires.

61. Quand les coordonnées sont rectangulaires, l'équation (1) devient

$$(1') \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0\,;$$

et, en développant,

$$(2') \qquad x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0\,;$$

cette dernière équation est de la forme

$$(3') \qquad f=x^2+y^2+z^2+2C_1x+2C'_1y+2C''_1z+D_1=0.$$

Les équations du centre sont ici

$$\tfrac{1}{2}f'_{x_0}=x_0+C_1=0 \qquad \tfrac{1}{2}f'_{y_0}=y_0+C'_1=0 \qquad \tfrac{1}{2}f'_{z_0}=z_0+C''_1=0\,;$$

quant au rayon il est donné par la relation

$$R^2=C_1^2+C_1'^2+C_1''^2-D_1.$$

Conditions pour que l'équation générale du second degré représente une sphère, les axes des coordonnées étant rectangulaires.

Les conditions cherchées sont

$$A = A' = A'' \qquad B = B' = B'' = 0.$$

Théorème. — *Pour que l'équation du second degré à trois variables représente une sphère, les axes des coordonnées étant rectangulaires, il faut et il suffit :*

1° *Que les coefficients des carrés x^2, y^2 et z^2 soient égaux ;*
2° *Que les termes en yz, zx, xy manquent dans l'équation.*

Équation de la sphère rapportée à divers axes particuliers.

62. 1° *Le centre est à l'origine.* — L'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu - R^2 = 0$$

en coordonnées obliques, et

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

en coordonnées rectangulaires.

2° *L'axe des x est un diamètre et les axes des y et des z sont deux droites rectangulaires situées dans le plan tangent à l'extrémité de ce diamètre.* — L'équation de la sphère est alors

$$x^2 + y^2 + z^2 \mp 2Rx = 0.$$

EXERCICES.

1° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les relations

$$\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z' \\ y &= bx' + b'y' + b''z' \\ z &= cx' + c'y' + c''z' \end{aligned}$$

représentent les formules permettant de passer des axes ox, oy, oz aux axes ox', oy', oz'.

Démontrer que si le déterminant $(ab'c'')$ est nul, tous les points $M(x,y,z)$ obtenus en faisant varier x', y', z' sont dans un même plan passant par le sommet o du trièdre $oxyz$.

2° Étant donnée une conique A, trouver dans l'espace le lieu des points tels que l'expression de la distance de chacun d'eux à l'un quelconque des points de cette conique soit une fonction linéaire des coordonnées du point de la conique.

Ce lieu se compose de deux coniques B, C appelées les *focales* de la conique A.

Les trois coniques A, B, C forment un groupe tel que chaque conique est une focale des deux autres.

Si l'on joint deux points m, m' d'une focale B à chaque point M de la conique A, la somme ou la différence des rayons vecteurs Mm, Mm' est constante.

Le rapport des distances du point M au point m et à une droite D située dans le plan de la conique A est constant. La droite D passe par le point où la normale au point m de la focale B rencontre le plan de la conique A.

3° Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres intérieurs se coupent suivant une même droite. — Les plans menés par les arêtes et par les bissectrices des faces opposées, se coupent suivant une même droite. — Les plans menés par les bissectrices des faces perpendiculairement aux plans de ces faces se coupent suivant une même droite. — Les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux plans des faces opposées se coupent suivant une même droite.

4° Les plans menés perpendiculairement aux arêtes d'un tétraèdre en leurs milieux se coupent en un même point.

5° Si par les milieux des arêtes d'un tétraèdre, on mène des plans perpendiculaires à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point.

6° Lorsque, dans un tétraèdre, deux arêtes sont respectivement perpendiculaires aux arêtes opposées, les deux dernieres arêtes sont aussi perpendiculaires entre elles.

Les quatre hauteurs se rencontrent en un même point H et réciproquement.

Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées se coupent au point de rencontre des hauteurs.

Les normales menées aux faces par leur centre de gravité se coupent en un même point g.

Le centre de gravité du tétraèdre et les points H, g sont en ligne droite.

7° Étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' si les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D du premier sur les faces B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' du second, respectivement, concourent en un même point; alors les perpendiculaires abaissées des sommets A', B', C', D' du second sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC du premier, respectivement, sont aussi concourantes.

8° Trouver la distance l d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ à une droite représentée par les équations

$$P = Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Q = A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

En représentant par P_0, Q_0 les valeurs que prennent les fonctions P, Q pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et posant

$$U = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

les coordonnées du pied de la perpendiculaire satisferont aux équations

$$(x - x_0)U'_\alpha + (y - y_0)U'_\beta + (z - z_0)U'_\gamma = 0$$
$$(y - y_0)U'_\gamma - (z - z_0)U'_\beta = A'P_0 - AQ_0$$
$$(z - z_0)U'_\alpha - (x - x_0)U'_\gamma = B'P_0 - BQ_0$$
$$(x - x_0)U'_\beta - (y - y_0)U'_\alpha = C'P_0 - CQ_0.$$

On obtient l'expression de l^2 en ajoutant les équations précédentes, après les avoir élevées au carré.

9° Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères. (Plan radical.)

Lieu des points d'égale puissance par rapport à trois sphères. (Axe radical.)

Les axes radicaux de quatre sphères prises trois à trois concourent en un même point. (Centre radical.)

10° Par un point donné p on mène une sécante quelconque qui rencontre en a et a' une sphère donnée, le point p' conjugué harmonique du point p par rapport aux points a et a' décrit un plan. (Plan polaire du point p.)

11° Trouver l'équation de la sphère coupant à angle droit quatre sphères données.

12° La sphère coupant à angle droit quatre sphères données est le lieu des points de l'espace dont les plans polaires par rapport à ces sphères, passent par un même point; elle est aussi le lieu du point de concours des quatre plans polaires.

13° Le lieu décrit par le point de contact de deux sphères variables tangentes entre elles et à deux sphères fixes est une sphère S ; la ligne des centres des sphères variables touche la sphère S.

Le lieu décrit par le point de contact de deux sphères variables tangentes entre elles et à trois sphères fixes est un cercle C ; la ligne des centres des sphères variables touche le cercle C.

14° On considère une série de sphères ayant deux à deux le même plan radical et l'on propose de démontrer les propriétés suivantes :

Il y a dans la série deux sphères de rayon nul ou *points limites* L, L'.

Si d'un point du plan radical commun on mène des plans tangents aux sphères de la série, les points de contact sont sur une même sphère passant par les points L, L' et coupant orthogonalement toutes les sphères de la série.

Les plans polaires d'un point P relativement aux sphères de la série passent par une droite fixe D, et les plans polaires d'un point P' de la droite D passent par une droite D' sur laquelle se trouve le point P. La sphère décrite sur PP' comme diamètre coupe orthogonalement les sphères de la série.

Enfin la droite PP' touche aux points P et P' deux sphères de la série.

15° On considère une série de sphères ayant trois à trois le même axe radical et l'on propose de démontrer les propriétés suivantes :

Il y a dans la série une infinité de sphères de rayon nul ou *points limites ;* ces points sont situés sur la circonférence d'un cercle C.

Si d'un point de l'axe radical commun on mène des plans tangents aux sphères de la série, les points de contact sont sur une sphère passant par le cercle C et coupant orthogonalement les sphères de la série.

Les plans polaires d'un point P relativement aux sphères de la série passent par un point fixe P', et les plans polaires du point P' passent par le point P. La sphère décrite sur PP' comme diamètre coupe orthogonalement toutes les sphères de la série.

Enfin la droite PP' touche aux points P et P' deux sphères de la série.

LIVRE III

SURFACES.

CHAPITRE PREMIER

TANGENTE ET PLAN TANGENT.

63. Tangente. — Soit M un point quelconque d'une courbe, ses coordonnées x, y, z pourront être considérées comme des fonctions d'une même variable indépendante ω. Appelons Δx, Δy, Δz les accroissements de ces coordonnées qui correspondent à un accroissement $\Delta\omega$ de la variable ω ; les coordonnées nouvelles $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ définiront un autre point M′ de la courbe, et la sécante MM′ sera représentée par les équations

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta\omega}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta\omega}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta\omega}}.$$

Lorsqu'on fait tendre $\Delta\omega$ vers zéro, la sécante devient la tangente à la courbe, au point M ; les équations de cette tangente sont donc

$$(1)\qquad \frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'},$$

en représentant par x', y', z' les dérivées des fonctions x, y, z par rapport à ω.

Supposons que la courbe soit définie par deux équations

$$(2)\qquad f(x, y, z)=0 \qquad\qquad (3)\qquad F(x, y, z)=0$$

entre les coordonnées x, y, z ; en appliquant la règle des fonctions composées, on aura entre les dérivées x', y', z' les relations

$$(4)\quad x'f'_x+y'f'_y+z'f'_z=0 \qquad (5)\quad x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z=0,$$

qui feront connaître des valeurs respectivement proportionnelles à ces dérivées. En portant ces valeurs dans les équations (1) on aura les équations de la tangente.

Au lieu d'opérer de cette manière, il est évident qu'on arrivera au même résultat en remplaçant, dans les équations (4) et (5), les dérivées x', y', z' par les différences $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ auxquelles elles sont respectivement proportionnelles, d'après les équations (1).

Les équations de la tangente sont donc

$$(6)\qquad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0$$
$$(7)\qquad (X-x)F'_x+(Y-y)F'_y+(Z-z)F'_z=0.$$

64. Plan tangent. — Soient

$$f(X, Y, Z)=0$$

l'équation d'une surface donnée S et, sur cette surface, une courbe MA passant par le point $M(x, y, z)$.

Si l'on associe à l'équation précédente l'équation

$$F(X, Y, Z)=0$$

d'une surface S' passant par la courbe MA, la tangente au point M de cette courbe sera représentée par les équations (6) et (7).

Faisons varier la fonction F de manière que la surface S' passe toujours par le point M, nous obtiendrons, sur la surface S, des courbes passant par le point M, et comme l'équation (6) ne change pas, les tangentes au point M de toutes ces courbes sont situées dans le plan représenté par l'équation (6). Ce plan est dit *tangent* au point M de la surface S.

Théorème. — *Le lieu des tangentes menées, en un point* M, *à toutes les courbes tracées sur une surface et passant par ce point, est en général un plan.*

Remarque. — Le théorème précédent cesse d'être vrai quand, pour un point M de la surface, on a en même temps

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0.$$

Nous dirons plus loin quelques mots de ces points particuliers.

65. L'équation (6) du plan tangent peut être mise sous une forme plus simple.

Rendons homogène la fonction f en y remplaçant x, y et z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ et $\frac{z}{t}$, puis posons

$$t^m f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = \varphi(x, y, z, t);$$

nous aurons l'identité

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z + t\varphi'_t \equiv m\varphi(x, y, z, t).$$

Pour $t = 1$, la fonction $\varphi(x, y, z, t)$ devient $f(x, y, z)$, et par suite elle s'annule ; les fonctions φ'_x, φ'_y, φ'_z deviennent f'_x, f'_y, f'_z. Quant à la valeur que prend alors φ'_t, nous conviendrons de la désigner par f'_t. Nous aurons alors la relation

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + f'_t = 0,$$

et l'équation du plan tangent prendra la forme suivante :

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0;$$

on devra toujours poser $T = t = 1$.

66. On peut obtenir immédiatement l'équation du plan tangent sous cette forme, quand l'équation de la surface est algébrique et de forme entière.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la surface S, et X, Y, Z celles d'un point quelconque d'une sécante passant par le point M.

Les coordonnées α, β, γ d'un des points M' où la sécante rencontre de nouveau la surface pourront être représentées par les formules

$$\frac{\alpha}{\lambda x+\mu X}=\frac{\beta}{\lambda y+\mu Y}=\frac{\gamma}{\lambda z+\mu Z}=\frac{\theta}{\lambda t+\mu T},$$

pourvu que l'on convienne de faire $t=T=\theta=1$ dans les résultats que nous allons obtenir.

Cela posé, soit

$$f(x, y, z, t)=0$$

l'équation rendue homogène de la surface, les valeurs de λ et de μ qui correspondent aux points où la sécante rencontre la surface satisferont à l'équation

$$f(\lambda x+\mu X, \lambda y+\mu Y, \lambda z+\mu Z, \lambda t+\mu T)=0.$$

En développant et remarquant que pour $t=1$ le coefficient $f(x, y, z, t)$ du premier terme du développement est nul, l'équation précédente devient

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\lambda^{m-1}\mu(Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z+Tf'_t) \\ &+\frac{\lambda^{m-2}\mu^2}{2!}(Xf''_x+Yf''_y+Zf''_z+Tf''_t)^{(2)}+\ldots=0. \end{aligned}$$

Pour que la sécante touche au point M une courbe tracée sur la surface et passant par ce point, il faut et il suffit que l'équation précédente admette la racine double $\mu=0$; on doit donc avoir la relation

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z+Tf'_t=0.$$

Cette équation, après qu'on y a fait $T=t=1$, représente un plan qui contient les tangentes au point M de toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point, c'est-à-dire le plan tangent.

67. Points multiples. — Lorsqu'une droite *quelconque* L passant par le point M rencontre une surface algébrique S en m points dont p coïncident avec le point M, on dit que ce point est multiple et d'ordre p.

Si l'on n'a pas simultanément

$$(9) \qquad f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0 \qquad f'_t = 0,$$

l'équation (8) n'admet qu'une seule fois la racine $\mu = 0$, quand X, Y, Z restent arbitraires; le point M est *simple.*

Si au contraire les équations (9) sont vérifiées, l'équation (8) admet la racine $\mu = 0$ avec le degré *deux* de multiplicité, le point M est *un point double.*

Pour que la sécante L touche, au point M, une courbe tracée sur la surface et passant par ce point, il faut et il suffit que l'équation (8) admette la racine triple $\mu = 0$; on doit donc avoir la relation

$$(\mathrm{X}f''_x + \mathrm{Y}f''_y + \mathrm{Z}f''_z + \mathrm{T}f''_t)^{(2)} = 0.$$

Nous verrons plus tard que cette équation, après qu'on y a fait $\mathrm{T} = t = 1$, représente un cône du second ordre.

Si les coordonnées du point M annulaient à la fois les dérivées partielles du premier ordre et celles du second ordre de la fonction $f(x, y, z, t)$, ce point serait triple, et le lieu des tangentes au point M de toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point serait un cône du troisième ordre.

Plan tangent à l'origine.

68. Théorème. — *Quand une surface algébrique passe par l'origine, l'équation du plan tangent en ce point s'obtient en égalant à zéro les termes du premier degré dans l'équation de la surface mise sous forme entière.*

Nous supposons ici que, dans l'équation de la surface, les termes de moindre degré sont du *premier degré;* c'est le seul cas que nous examinerons.

En groupant ensemble les termes de même degré, l'équation de la surface prendra la forme

$$\varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Soient

$$(10) \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\rho$$

les équations d'une droite L passant par l'origine ; les valeurs de ρ qui correspondent aux points où cette droite rencontre la surface seront les racines de l'équation

$$\rho^m \varphi_m(a, b, c)+\ldots+\rho\varphi_1(a, b, c)=0.$$

Pour que la droite L touche, à l'origine, une courbe passant par ce point et tracée sur la surface, il faut et il suffit que l'équation précédente admette la racine double $\rho=0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(11) \qquad \varphi_1(a, b, c)=0.$$

En éliminant a, b, c entre les équations (10) et l'équation (11), on aura, pour représenter le lieu des droites L jouissant de cette propriété ou le plan tangent à l'origine, l'équation

$$\varphi_1(x, y, z)=0.$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

Plan tangent aux surfaces du second ordre.

69. Pour abréger le langage, nous désignerons souvent une surface du second ordre sous le nom de **quadrique**.

L'équation générale d'une quadrique, rendue homogène, est

$$\begin{aligned} f = {} & \mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy \\ & +2\mathrm{C}xt+2\mathrm{C}'yt+2\mathrm{C}''zt+\mathrm{D}t^2=0 ; \end{aligned}$$

pour ces surfaces, l'équation

$$(12) \qquad \mathrm{X}f'_x+\mathrm{Y}f'_y+\mathrm{Z}f'_z+\mathrm{T}f'_t=0$$

du plan tangent au point M (x, y, z) peut être écrite de la manière suivante :

$$xf'_{\mathrm{X}}+yf'_{\mathrm{Y}}+zf'_{\mathrm{Z}}+tf'_{\mathrm{T}}=0.$$

70. Problème I. — *Étant donnée l'équation d'un plan*

$$aX + bY + cZ + dT = 0,$$

exprimer que ce plan est tangent à une quadrique donnée.

Pour exprimer que le plan considéré est tangent à une quadrique, il suffit d'identifier son équation avec l'équation (12), ce qui donne les équations de condition

$$\text{(13)} \qquad \frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c} = \frac{f'_t}{d} = 2\lambda,$$

où λ représente une inconnue auxiliaire.

Comme le point de contact M est sur la surface, la fonction $f(x, y, z, t)$ est nulle pour $t = 1$, ou, ce qui est la même chose, on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 0,$$

équation qui devient

$$\text{(14)} \qquad ax + by + cz + dt = 0,$$

en tenant compte des relations (13).

Il reste à éliminer x, y, z, t, λ entre les équations (13) et (14), ou, en développant, entre les équations

$$\begin{array}{l}
A\,x + B''y + B'\,z + C\,t - a\lambda = 0 \\
B''x + A'\,y + B\,z + C'\,t - b\lambda = 0 \\
B'\,x + B\,y + A''z + C''t - c\lambda = 0 \\
C\,x + C'\,y + C''z + D\,t - d\lambda = 0 \\
a\,x + b\,y + c\,z + d\,t \qquad\quad = 0
\end{array}$$

Représentons par H le discriminant de la fonction f, c'est-à-dire posons

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}$$

le résultat de cette élimination sera

$$U = \begin{vmatrix} & & & & \vdots & a \\ & & H & & \vdots & b \\ & & & & \vdots & c \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & d \\ a & b & c & d & & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — Le déterminant U est un *invariant*, car il est le discriminant de la fonction

$$f(x, y, z, t) + 2\lambda(ax + by + cz + dt)$$

des cinq variables x, y, z, t, λ.

71. Problème II. — *Étant données les équations d'une droite*

$$\begin{aligned} P &= a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} + d\mathrm{T} = 0 \\ P' &= a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} + d'\mathrm{T} = 0 \end{aligned}$$

exprimer que cette droite est tangente à une quadrique.

Soient x, y, z les coordonnées du point de contact ; le plan tangent à la surface en ce point aura pour équation

$$\mathrm{X}f'_x + \mathrm{Y}f'_y + \mathrm{Z}f'_z + \mathrm{T}f'_t = 0.$$

Ce plan devant contenir la droite donnée sera aussi représenté par l'équation

$$2(\lambda P + \lambda' P') = 0;$$

on aura donc les relations

$$(15) \quad f'_x = 2(\lambda a + \lambda' a') \quad f'_y = 2(\lambda b + \lambda' b') \quad f'_z = 2(\lambda c + \lambda' c') \quad f'_t = 2(\lambda d + \lambda' d').$$

A ces relations il faut joindre les suivantes :

$$(16) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \end{cases}$$

qui expriment que le point de contact est sur la droite, et aussi sur la surface, si l'on tient compte des relations (15). On obtiendra la relation cherchée en éliminant $x, y, z, t, \lambda, \lambda'$ entre les équations (15) et (16); cette relation est

$$V = \left|\begin{array}{cccc:cc} & & & & a & a' \\ & H & & & b & b' \\ & & & & c & c' \\ \hdashline & & & & d & d' \\ a & b & c & d & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \end{array}\right| = 0.$$

Remarque. — Le déterminant V est un *invariant*, car il est le discriminant de la fonction

$$f(x, y, z, t) + 2\lambda(ax + by + cz + dt) + 2\lambda'(a'x + b'y + c'z + d't)$$

des six variables $x, y, z, t, \lambda, \lambda'$.

72. Problème III. — *Étant données les équations d'une droite*

$$P = 0 \qquad P' = 0,$$

reconnaître si cette droite rencontre une quadrique en des points réels ou imaginaires.

Les deux points de rencontre étant confondus quand la fonction V est nulle, on prévoit que, les deux points ne coïncidant pas, leur nature dépendra du signe de cette fonction; comme cette fonction est un invariant, elle conservera son signe si l'on prend la droite donnée pour axe des x, c'est-à-dire si l'on pose

$$a = c = d = 0 \qquad \text{et} \qquad a' = b' = d' = 0.$$

On a alors

$$V = b^2 c'^2 (AD - C^2).$$

D'un autre côté, les abscisses des points où l'axe des x rencontre la quadrique sont les racines de l'équation

$$Ax^2 + 2Cx + D = 0.$$

Elles sont réelles ou imaginaires suivant que le binôme $C^2 - AD$

est positif ou négatif; donc *les points de rencontre de la droite et de la quadrique*

$$\textit{seront} \begin{cases} \textit{réels} \\ \textit{imaginaires} \end{cases} \textit{si l'on a} \begin{cases} V < 0 \\ V > 0 \end{cases}.$$

NORMALES.

73. Définition. — *On appelle normale la perpendiculaire à un plan tangent menée par le point de contact.*

Le point où la normale rencontre la surface à angle droit est le *pied* de cette droite, ou encore son *point d'incidence.*

Les coordonnées étant rectangulaires les équations de la normale ayant pour point d'incidence un point M(x, y, z) sont

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = \frac{Z-z}{f'_z}.$$

CHAPITRE II

GÉNÉRATION DES SURFACES.

74. Quand une surface est définie par une propriété géométrique commune à chacun de ses points, on obtient son équation en traduisant, à l'aide des symboles de l'Algèbre, cette propriété géométrique.

C'est ainsi que nous avons pu écrire immédiatement l'équation de la sphère.

Dans la plupart des cas, une surface est considérée comme le lieu des positions occupées par une courbe qui se déplace et se déforme d'après une loi déterminée.

Cette courbe est appelée la *génératrice* de la surface.

On reconnaît que la loi de déformation et du déplacement de la génératrice est déterminée lorsque ses équations ne contiennent qu'un seul paramètre arbitraire.

Il est facile de voir qu'une courbe dont les équations contiennent plus d'un paramètre arbitraire n'engendre pas une surface.

En effet, en profitant de l'indétermination de ces paramètres, on pourra faire passer la courbe considérée par un point quelconque de l'espace ; la courbe pourra être imaginaire pour les points de certaines régions de l'espace, mais il existera, en général, d'autres régions pour tous les points desquelles elle sera réelle.

Par exemple, les coordonnées étant rectangulaires, les équations

$$x^2 + y^2 = R^2 - \alpha^2 - \gamma^2 \qquad z = \gamma,$$

où α et γ sont des paramètres arbitraires, représentent des cercles situés sur les sphères qui ont pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - \alpha^2.$$

On peut faire passer un de ces cercles par chaque point de l'espace *intérieur* à la sphère de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées.

Il résulte de là que les cercles considérés n'engendrent pas une surface mais le solide intérieur à la sphère précédente.

Recherche de l'équation d'une surface.

Nous distinguerons deux cas.

75. Premier cas. — *Les équations de la génératrice contiennent un seul paramètre arbitraire.* — Soient

$$G \qquad F(x, y, z, \alpha)=0 \qquad F_1(x, y, z, \alpha)=0$$

les équations de la génératrice G ; nous allons montrer qu'on obtient l'équation de la surface engendrée par cette courbe en *éliminant* α entre les équations G.

Nous représenterons par

$$R \qquad \psi(x, y, z)=0$$

le résultant des équations G.

Soit G_1 une position de la génératrice pour laquelle $\alpha=\alpha_1$; prenons sur cette courbe un point quelconque $M_1(x_1, y_1, z_1)$, nous aurons

$$F(x_1, y_1, z_1, \alpha_1)=0 \qquad F_1(x_1, y_1, z_1, \alpha_1)=0.$$

Ces relations montrent que les deux équations

$$F(x_1, y_1, z_1, \alpha)=0 \qquad F_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)=0$$

ont une racine commune $\alpha=\alpha_1$; par suite, les coordonnées du point M_1 satisfont à l'équation R.

Ceci démontre que la surface engendrée par la courbe G est une des nappes de la surface représentée par l'équation R.

Reste à faire voir que tous les points de la surface R appartiennent *en général* à la surface engendrée par G.

Prenons sur la surface R un point quelconque $M'(x', y', z')$;

comme l'équation $R = 0$ est le résultant des équations G, les deux équations

$$F(x', y', z', \alpha) = 0 \qquad F_1(x', y', z', \alpha) = 0$$

auront une racine commune $\alpha = \alpha'$. Donc, par chaque point de la surface R passera une courbe G ; de plus, cette courbe sera tout entière sur la surface R d'après la première partie de la démonstration. Il résulte de là que toutes les nappes de la surface R peuvent être considérées comme engendrées par la courbe G.

Remarque. — Cette conclusion peut être en défaut, par exemple quand la valeur $\alpha = \alpha'$ est imaginaire pour tous les points d'une nappe de la surface R ou pour des points particuliers de cette surface. Elle peut encore être en défaut si le paramètre α, d'après la nature du problème, ne peut pas prendre toutes les valeurs réelles imaginables.

Nous ne donnerons pas d'exemples de ces cas exceptionnels ; pour les comprendre, il suffira de se reporter aux développements donnés dans la *Géométrie plane* (Liv. II, ch. III).

76. Deuxième cas. — *Les équations de la génératrice renferment p paramètres.* — Soient

$$G \quad F(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = 0 \quad F_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = 0$$

les équations de la génératrice. Pour que cette courbe engendre une surface, il faut qu'un seul des p paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ soit arbitraire.

Il résulte de cette remarque que les p paramètres doivent être liés par $p - 1$ équations de conditions

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \qquad \ldots \qquad \varphi_{p-1} = 0.$$

On démontrera comme dans le premier cas que, pour obtenir l'équation de la surface il faut éliminer les p paramètres entre les équations G de la génératrice et les relations de conditions (1).

77. Dans les applications, on définit ordinairement la loi suivant laquelle la génératrice se déplace et se déforme en l'assujettissant à rencontrer des courbes fixes, que l'on nomme *directrices*.

Soient

$$(2) \qquad f(x, y, z)=0 \qquad f_1(x, y, z)=0$$

les équations d'une directrice ; on exprimera que la génératrice rencontre la directrice en écrivant que les quatre équations (G) et (2) sont vérifiées par un même système de valeurs de x, y, z, c'est-à-dire en éliminant x, y, z entre ces quatre équations. On obtiendra ainsi *une seule* relation de condition entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

En résumé, lorsque les équations de la génératrice renferment p paramètres, il faut, pour que cette courbe engendre une surface, l'assujettir à rencontrer $p-1$ directrices.

Nous allons appliquer les considérations générales que nous venons d'exposer à la recherche des équations de quelques surfaces.

Surfaces cylindriques.

78. Définition — *On appelle surface cylindrique ou cylindre une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à une direction donnée* D *et en satisfaisant à une autre condition quelconque.*

Soient

$$P=0 \qquad Q=0$$

les équations de la droite D ; les équations d'une génératrice G seront de la forme

$$G \qquad P=\alpha \qquad Q=\beta.$$

La droite G devant engendrer une surface, les paramètres α et β seront liés par une relation

$$(3) \qquad \varphi(\alpha, \beta)=0.$$

On aura l'équation de la surface en éliminant α et β entre les équations (G) et (3), ce qui donne l'équation

$$\varphi(P, Q)=0.$$

De cette équation on déduit le théorème suivant :

Théorème I. — *Le premier membre de l'équation générale d'un cylindre est une fonction de deux fonctions du premier degré.*

79. Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$(4) \qquad \varphi(P, Q) = 0$$

représente en général un cylindre.

Considérons en effet la droite G ayant pour équations

$$G \qquad P = \alpha \qquad Q = \beta;$$

si l'on assujettit les paramètres α, β à satisfaire à l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

cette droite G engendrera un cylindre dont les génératrices seront tout entières situées sur la surface Σ représentée par l'équation (4); ce cylindre fera donc partie de la surface Σ.

Maintenant le cylindre compose toute la surface Σ. Soient en effet P', Q' les valeurs que prennent les fonctions P et Q quand on y remplace x, y, z par les coordonnées x', y', z' d'un point *quelconque* M' de la surface Σ, on aura

$$\varphi(P', Q') = 0,$$

et en prenant $\alpha = P'$, $\beta = Q'$, la droite G' qui a pour équations

$$P = P' \qquad Q = Q'$$

passera par le point M'. Le point M' est donc sur le cylindre.

80. Théorème II. — *Le plan tangent en un point d'une génératrice d'un cylindre est tangent en tous les points de cette génératrice.*

Pour faciliter la démonstration, prenons l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre, l'équation de cette surface sera

$$f(x, y) = 0,$$

et celle du plan tangent au point $M(x, y, z)$ sera

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0.$$

Cette équation ne changeant pas quand le point M se déplace sur la génératrice passant par ce point, car x et y restent alors constants, la proposition est démontrée.

Théorème III. — *Le cylindre qui a pour directrice une courbe plane d'ordre m est une surface du même ordre.*

Car si l'on prend le plan de cette courbe pour plan des xy et l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre, l'équation

$$f(x, y) = 0$$

de la courbe plane sera aussi celle du cylindre.

81. Marche à suivre pour trouver l'équation d'un cylindre. — Soient

$$\text{D} \qquad f = 0 \qquad f_1 = 0$$

les équations de la directrice du cylindre. Nous prendrons les équations de la génératrice sous la forme

$$\text{G} \qquad \frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c} = \rho,$$

où a, b, c sont des constantes.

Pour exprimer que la génératrice rencontre la directrice, on remplacera X, Y, Z, dans les équations (D), par leurs valeurs en fonction de ρ tirées des équations G, et l'on éliminera ρ entre les deux équations ainsi obtenues. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

le résultat de cette élimination ; l'équation précédente sera celle du cylindre, car x, y, z sont les coordonnées d'un point *quelconque* de la génératrice G.

Exemple. — *Trouver l'équation du cylindre ayant pour section droite la courbe représentée par les équations*

$$\text{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1 \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \end{array} \right. .$$

Nous supposerons les coordonnées rectangulaires.

La génératrice qui est perpendiculaire au plan représenté par la deuxième des équations (D) a pour équations

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma}=\rho,$$

α, β, γ désignant les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes de coordonnées.

En exprimant que la génératrice rencontre la directrice D, on obtient les deux relations de condition

$$\frac{(x+\rho\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+\rho\beta)^2}{b^2}-\frac{(z+\rho\gamma)^2}{c^2}-1=0$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\rho=0,$$

entre lesquelles il faut éliminer ρ.

L'équation du cylindre est donc

$$\frac{(x-P\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-P\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-P\gamma)^2}{c^2}-1=0$$

en posant

$$P=\alpha x+\beta y+\gamma z.$$

Surfaces coniques.

82. Définition. — *On appelle surface conique ou cône une surface engendrée par une droite qui se meut en passant constamment par un point fixe* S *et en satisfaisant à une autre condition quelconque.*

Le point fixe S *est le sommet du cône.*

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du sommet S ; les équations d'une génératrice G seront de la forme

$$G \qquad x-x_0=\alpha(z-z_0) \qquad y-y_0=\beta(z-z_0).$$

La droite G étant encore assujettie à une condition, les paramètres α, β seront liés par une relation

$$(5) \qquad \varphi(\alpha, \beta)=0.$$

On aura l'équation du cône en éliminant α et β entre les équations (G) et (5), ce qui donne l'équation

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.$$

De cette équation on déduit le théorème suivant :

Théorème I. — *Le premier membre de l'équation générale d'un cône ayant pour sommet le point* S(x_0, y_0, z_0), *est une fonction homogène des différences* $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$.

83. Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{6}$$

représente en général un cône.

Considérons en effet la droite G ayant pour équations

$$\text{G} \qquad x-x_0=\alpha(z-z_0) \qquad y-y_0=\beta(z-z_0);$$

si l'on assujettit les paramètres α et β à satisfaire à l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta)=0,$$

cette droite G engendrera un cône dont les génératrices seront tout entières situées sur la surface Σ représentée par l'équation (6) : ce cône fera donc partie de la surface Σ.

On démontrera, comme dans le cas du cylindre, que ce cône compose toute la surface Σ.

84. Remarques. — 1° Quand le sommet du cône est à l'origine, l'équation (6) devient

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0;$$

elle est homogène par rapport aux coordonnées x, y, z.

2° Soient

$$\text{P}=0 \qquad \text{Q}=0 \qquad \text{R}=0$$

les équations de trois plans formant un véritable trièdre dont nous désignerons le sommet par S ; l'équation

$$f(P, Q, R) = 0$$

homogène par rapport aux fonctions P, Q, R représentera un cône ayant pour sommet le point S.

On démontrera ce théorème comme au paragraphe 83, en posant

$$P = \alpha R \qquad Q = \beta R$$

et assujettissant α, β à satisfaire à la relation

$$f(\alpha, \beta, 1) = 0.$$

85. Théorème II. — *Le plan tangent en un point d'une génératrice d'un cône est tangent en tous les points de cette génératrice.*

Pour faciliter la démonstration, nous prendrons le sommet du cône pour origine ; l'équation de cette surface sera

$$f(x, y, z) = 0,$$

la fonction f étant homogène par rapport aux coordonnées x, y, z.

L'équation du plan tangent au point $M(x, y, z)$ du cône est

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0 ;$$

comme les coefficients f'_x, f'_y, f'_z sont des fonctions homogènes de x, y, z, l'équation du plan tangent ne change pas quand le point M se meut sur la génératrice oM, car les coordonnées x, y, z varient proportionnellement ; la proposition est donc démontrée.

86. Marche à suivre pour trouver l'équation d'un cône. — Soient

$$D \qquad f(X, Y, Z) = 0 \qquad f_1(X, Y, Z) = 0$$

les équations de la directrice du cône. Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du sommet S ; X, Y, Z celles d'un point A de la courbe D, et x, y, z celles d'un point quelconque M de la génératrice SA ; on aura

$$\frac{X}{\lambda x_0 + x} = \frac{Y}{\lambda y_0 + y} = \frac{Z}{\lambda z_0 + z} = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

En remplaçant, dans les équations (D), les quantités X, Y, Z par leurs valeurs tirées des relations précédentes, on obtiendra les deux équations

$$(7)\quad \begin{aligned} &f\left(\frac{\lambda x_0+x}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_0+y}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_0+z}{\lambda+1}\right)=0 \\ &f_1\left(\frac{\lambda x_0+x}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_0+y}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_0+1}{\lambda+1}\right)=0. \end{aligned}$$

Pour avoir l'équation du cône, il restera à éliminer λ entre les équations (7).

Remarque. — Quand le sommet du cône est à l'origine, les équations (7) deviennent

$$f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)=0$$
$$f_1\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)=0,$$

en posant $t=\lambda+1$.

On peut donc énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour trouver l'équation d'un cône ayant son sommet à l'origine, on rend homogènes les équations de la directrice en y remplaçant* X, Y, Z *par* $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, *et l'on élimine le paramètre t entre les équations ainsi obtenues.*

Cas particulier. — Supposons que, le sommet étant toujours à l'origine, la directrice du cône soit la courbe d'intersection d'une surface d'ordre m par un plan.

Dans l'équation de la surface groupons ensemble les termes du même degré ; les équations de la directrice seront

$$\text{D}\quad \begin{cases} \varphi_m+\varphi_{m-1}+\cdots+\varphi_0=0 \\ ux+vy+wz=1. \end{cases}$$

En appliquant la règle précédente, on obtient pour représenter le cône l'équation

$$\varphi_m+(ux+vy+wz)\varphi_{m-1}+(ux+vy+wz)^2\varphi_{m-2}+\cdots=0.$$

On voit que, pour obtenir l'équation du cône, il suffit de multiplier les termes de l'équation de la surface par des puissances de $ux+vy+wz$ telles, qu'après cette multiplication tous les termes soient du même degré.

Corollaire. — *Le cône ayant pour directrice une courbe plane d'ordre m est une surface du même ordre.*

Exemple. — *Trouver l'équation du cône ayant pour sommet un point* $S(x_0, y_0, z_0)$ *et pour directrice la section d'une sphère par un plan* P.

Nous prendrons pour axes de coordonnées trois diamètres rectangulaires de la sphère, le plan xoz étant perpendiculaire au plan P.

Les équations de la directrice du cône rendues homogènes seront

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2T^2$$
$$\alpha X+\gamma Z+hT=0.$$

En appelant X, Y, Z les coordonnées d'un point A de la directrice, et x, y, z celles d'un point quelconque M de la génératrice SA, on aura

$$\frac{X}{\lambda x_0+x}=\frac{Y}{\lambda y_0+y}=\frac{Z}{\lambda z_0+z}=\frac{T}{\lambda t_0+t}.$$

Substituons ces valeurs de X, Y, Z, T dans les équations de la directrice et posons $t=t_0=1$, nous aurons les deux équations

$$(\lambda x_0+x)^2+(\lambda y_0+y)^2+(\lambda z_0+z)^2=R^2(\lambda+1)^2$$
$$\lambda(\alpha x_0+\gamma z_0+h)+\alpha x+\gamma z+h=0$$

entre lesquelles il faut éliminer λ.

On trouve ainsi, pour représenter le cône, l'équation

$$[\gamma(xz_0-zx_0)+h(x-x_0)]^2+[\alpha(yx_0-xy_0)+\gamma(yz_0-zy_0)+h(y-y_0)]^2$$
$$+[\alpha(zx_0-xz_0)+h(z-z_0)]^2=R^2[\alpha(x-x_0)+\gamma(z-z_0)]^2$$

Surfaces conoïdes.

87. Définition. — *On appelle surface conoïde ou simplement conoïde une surface engendrée par une droite qui se meut en restant* *parallèle à un plan fixe, s'appuyant sur une droite donnée et en satisfaisant à une autre condition quelconque.*

Le plan fixe est le plan *directeur* du conoïde ; quand la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, le conoïde est *droit ;* il est *oblique* dans le cas contraire.

Soient

$$P=0 \qquad Q=0$$

les équations de la directrice rectiligne A et

$$R=0$$

celle du plan directeur.

Les équations de la génératrice G seront de la forme

$$P=\alpha Q \qquad R=\beta.$$

La droite G étant encore assujettie à une condition, les paramètres α, β sont liés par une relation

$$\varphi(\alpha, \beta)=0,$$

et le conoïde aura pour équation

$$\varphi\left(\frac{P}{Q}, R\right)=0.$$

De cette équation on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Le premier membre de l'équation générale d'un conoïde est une fonction de trois fonctions linéaires* P, Q, R *dont deux n'entrent que par leur rapport* $\frac{P}{Q}$.

Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$\varphi\left(\frac{P}{Q}, R\right)=0 \tag{8}$$

représente un conoïde.

Considérons en effet la droite G ayant pour équations

$$P=\alpha Q \qquad R=\beta;$$

si l'on assujettit les paramètres α et β à satisfaire à l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

cette droite engendrera un conoïde dont les génératrices seront tout entières situées sur la surface Σ représentée par l'équation (8); ce conoïde fera donc partie de la surface Σ.

On démontrera, comme dans le cas du cylindre, que le conoïde compose toute la surface Σ.

Remarque. — Quand on prend la directrice rectiligne A pour axe des z et le plan directeur pour plan des xy, l'équation du conoïde prend la forme

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0.$$

Exemple. — *Trouver l'équation du conoïde droit circonscrit à une sphère.*

Nous prendrons pour axes de coordonnées trois diamètres rectangulaires de la sphère, l'axe oz étant parallèle à la directrice rectiligne A et l'axe ox perpendiculaire à cette droite.

Si a représente la distance de l'origine à la directrice A, les équations de cette droite seront

$$x - a = 0 \qquad y = 0.$$

La génératrice G a pour équations

$$y = \alpha(x - a) \qquad z = \gamma.$$

En exprimant que cette droite rencontre en deux points confondus la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

on obtient la relation de condition

$$\alpha^2(a^2 + \gamma^2 - R^2) + \gamma^2 - R^2 = 0.$$

Le conoïde est donc représenté par l'équation

$$(z^2 + a^2 - R^2)y^2 + (z^2 - R^2)(x - a)^2 = 0.$$

On démontre facilement que la projection de la courbe de contact du conoïde et de la sphère sur le plan directeur xoy est un cercle double décrit sur oA comme diamètre et que sa projection sur le plan zox est une parabole.

Surfaces de révolution.

88. Définition. — *On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'une courbe autour d'un axe fixe auquel elle est liée invariablement.*

Tout plan passant par l'axe de révolution est un *plan méridien ;* ces plans coupent la surface suivant des courbes évidemment égales entre elles et appelées *méridiennes.*

Tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface suivant des cercles ayant leur centre sur cet axe et qu'on appelle des *parallèles*.

De cette propriété résulte un nouveau mode de génération qui se prête plus facilement que le précédent à la recherche de l'équation générale des surfaces de révolution.

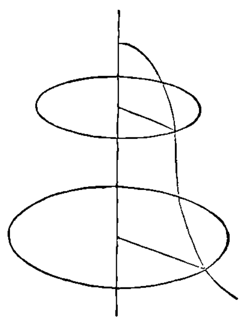


Fig. 22.

Une surface de révolution peut être considérée comme engendrée par un cercle de rayon variable, dont le centre décrit une droite, dont le plan reste perpendiculaire à cette droite et dont la circonférence s'appuie sur une directrice donnée.

Dans la recherche de l'équation d'une surface de révolution, nous distinguerons deux cas.

89. Premier cas. — *Les coordonnées sont rectangulaires et l'axe de révolution coïncide avec oz.* — Un parallèle se projette sur le plan xoy suivant un cercle ayant pour centre l'origine ; ses équations seront donc de la forme

$$\text{G} \qquad x^2+y^2=\alpha^2 \qquad z=\gamma$$

En exprimant que le parallèle rencontre la directrice donnée, on obtiendra la relation de condition

$$\varphi(\alpha, \gamma) = 0.$$

Si l'on élimine α et γ entre cette équation et celles de la génératrice on aura, pour représenter la surface de révolution, l'équation

$$\varphi(x^2 + y^2, z) = 0.$$

Cas particulier. — Supposons que la directrice soit une courbe plane située dans le plan méridien zox, ses équations seront

$$y = 0 \qquad f(x, z) = 0.$$

En exprimant que le parallèle G rencontre cette courbe, on obtient la relation

$$f(\sqrt{\alpha}, \gamma) = 0\,;$$

l'équation de la surface de révolution est donc

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

On voit que, dans le cas particulier que nous examinons, il suffit, pour avoir l'équation de la surface de révolution, de remplacer x par $\sqrt{x^2 + y^2}$ dans l'équation de la méridienne.

Exemple. — *Trouver l'équation du tore, c'est-à-dire de la surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan.*

Prenons pour plan des zx un plan méridien qui coupera la surface suivant deux cercles égaux C, C'; l'axe des z sera l'axe de révolution, l'axe des x la droite CC' et l'axe des y une perpendiculaire au plan zox menée par le milieu o de CC'.

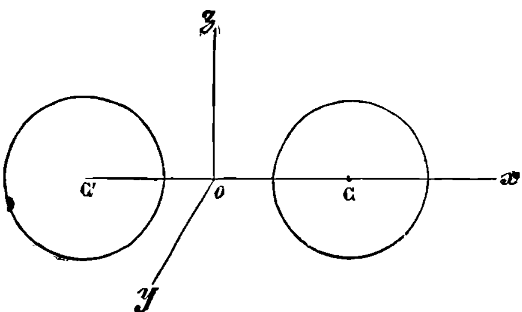


Fig. 23.

Les équations du cercle C seront

$$y=0 \qquad (x-c)^2+z^2=R^2,$$

et celle du tore

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2=R^2,$$

ou bien

$$(x^2+y^2+z^2+c^2-R^2)^2=4c^2(x^2+y^2).$$

Le tore est donc une surface du quatrième ordre.

90. Deuxième cas. — *Les axes de coordonnées et l'axe de révolution sont quelconques.* — Soient

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

les équations de l'axe de révolution.

Pour représenter un parallèle nous le regarderons comme la courbe d'intersection d'une sphère ayant son centre au point $A(x_0, y_0, z_0)$ de l'axe de révolution, par un plan perpendiculaire à cet axe.

Posons

$$\varphi=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu\,;$$

les cosinus des angles que l'axe de révolution fait avec les axes de coordonnées seront respectivement proportionnels à

$$\varphi'_a \qquad \varphi'_b \qquad \varphi'_c$$

et la direction d'un plan perpendiculaire à cet axe sera définie par l'équation

$$P=x\varphi'_a+y\varphi'_b+z\varphi'_c=0.$$

Les équations d'un parallèle sont donc

$$S=\alpha \qquad P=\beta\,;$$

S représentant le premier membre de l'équation d'une sphère ayant son centre au point A de l'axe de révolution.

En exprimant que le parallèle rencontre la directrice donnée, on obtiendra la relation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

et l'équation de la surface de révolution sera

$$f(S, P) = 0.$$

De cette équation on déduit le théorème suivant :

Théorème I. — *Le premier membre de l'équation générale d'une surface de révolution est une fonction d'une fonction linéaire* P *et du premier membre* S *de l'équation d'une sphère.*

91. Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$f(S, P) = 0 \tag{9}$$

représente une surface de révolution, S *et* P *ayant les significations indiquées plus haut.*

Considérons en effet la courbe G ayant pour équations

$$G \qquad S = \alpha \qquad P = \beta.$$

Quand α et β varient la première des équations (G) représente des sphères ayant un centre commun A et la seconde des plans parallèles à celui qui a pour équation $P = 0$. Il résulte de là que les équations G représenteront des cercles ayant leurs centres sur la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P, c'est-à-dire sur une *droite fixe;* les plans de ces cercles sont d'ailleurs perpendiculaires à la droite fixe.

Cela posé, assujettissons les paramètres α et β à satisfaire à l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

les cercles G engendreront une surface de révolution dont les parallèles seront tout entiers situés sur la surface Σ représentée par l'équation (9) ; cette surface de révolution fera donc partie de la surface Σ.

On démontrera, comme dans le cas du cylindre, qu'elle compose toute la surface Σ.

92. Théorème II. — 1° *Les normales à une surface de révolution rencontrent l'axe de révolution.*

2° *Les normales aux différents points d'un même parallèle rencontrent cet axe au même point.*

1° Prenons pour axe des z l'axe de révolution ; les coordonnées étant rectangulaires, l'équation de la surface pourra être mise sous la forme

$$f = z - \varphi(u) = 0$$

en posant $u = x^2 + y^2$.

On a

$$f_x = -2x\varphi'(u) \qquad f'_y = -2y\varphi'(u) \qquad f'_z = 1\,;$$

les équations d'une normale au point $M(x, y, z)$ de la surface sont donc

$$\frac{X - x}{2x\varphi'(u)} = \frac{Y - y}{2y\varphi'(u)} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Cette droite rencontre l'axe des z, car si l'on fait $X = Y = 0$ dans ses équations, elles donnent pour Z la même valeur

$$Z_1 = z + \frac{1}{2\varphi'(u)}.$$

2° Quand le point M se déplace sur le parallèle $Z = z$, le point de rencontre de la normale avec l'axe oz ne change pas, car z reste constant ainsi que u qui représente le carré du rayon du parallèle.

Réciproquement, *toute surface telle que ses normales rencontrent une même droite* L *est de révolution.*

Soient C la section de la surface par un plan P perpendiculaire à la droite L, et O le point où ce plan rencontre L.

Par hypothèse, la normale à la surface en un point M de la courbe C rencontre la droite L en un point A. Cette normale MA est perpendiculaire à la tangente MT à la courbe C, et AO est perpendiculaire sur le plan de cette courbe ; donc, d'après le théorème des trois perpendiculaires, OM sera normal au point M à la courbe C.

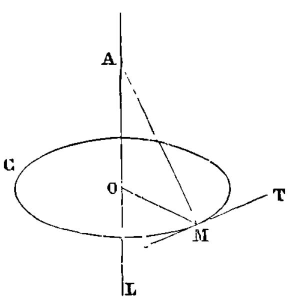


Fig. 24.

Il résulte de là que la courbe C est un cercle, car les normales en ses différents points passent par un même point O.

La surface qu'on peut considérer comme engendrée par les cercles C est donc de révolution.

Pour compléter cette démonstration, il faut faire voir qu'une courbe C dont les normales passent par un point fixe O est un cercle.

Prenons le point fixe O pour origine des coordonnées rectangulaires ; l'équation d'une normale au point $M(x, y)$ de la courbe C sera

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x).$$

Cette droite devant passer par l'origine, on aura la relation

$$yy'_x + x = 0,$$

d'où l'on déduit l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

qui représente un cercle.

93. **Surface gauche de révolution.** — *Cette surface est engendrée par une droite* L *tournant autour d'un axe auquel elle est liée invariablement.*

Soit D une position particulière de la droite mobile ; nous prendrons pour axe des z l'axe de révolution, pour axe des x la perpendiculaire commune oA aux deux droites oz, D, et pour axe des y une perpendiculaire au plan zox.

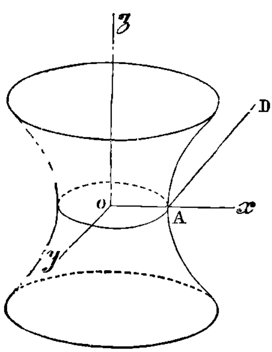


Fig. 25.

Les équations de la droite D seront

$$D \qquad x = a \qquad y = mz ;$$

a désignant la plus courte distance des droites oz et D.

Un parallèle de la surface a pour équations

$$G \qquad z = \gamma \qquad x^2 + y^2 = \alpha.$$

En exprimant que ce parallèle rencontre la directrice D, on obtiendra la relation

$$a^2 + m^2\gamma^2 = \alpha\,;$$

il restera à éliminer α et γ entre cette relation et les équations G, ce qui donne l'équation

$$x^2 + y^2 - m^2z^2 = a^2.$$

La surface est du second ordre et a pour méridienne une hyperbole ayant ox pour axe réel et oz pour axe imaginaire ; elle peut être considérée comme engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe *imaginaire*. On la désigne sous le nom de *surface gauche de révolution* ou *d'hyperboloïde de révolution à une nappe*.

94. Équation générale des cônes de révolution. — Soient $S(x_0, y_0, z_0)$ le sommet du cône et

$$\frac{X - x_0}{a} = \frac{Y - y_0}{b} = \frac{Z - z_0}{c}$$

les équations de l'axe de révolution SA. Sur la génératrice SG prenons un point quelconque $M(x, y, z)$, les paramètres directeurs de cette droite seront respectivement proportionnels aux différences

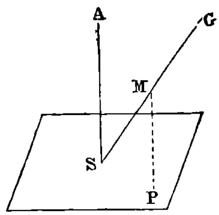


Fig. 26

$$x - x_0 \qquad y - y_0 \qquad z - z_0.$$

En exprimant que l'angle ASG a une valeur constante θ, on obtiendra pour représenter le cône l'équation

$$[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]\cos^2\theta = \frac{[a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Interprétée géométriquement, cette équation donne le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un cône de révolution le rapport des distances d'un point de la surface au sommet et à un plan mené par le sommet perpendiculairement à l'axe, est constant.*

95. Équation générale des cylindres de révolution. — En exprimant que la distance d'un point quelconque du cylindre à l'axe de révolution a une valeur constante R, on obtient immédiatement, pour représenter le cylindre, l'équation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\frac{[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]^2}{a^2+b^2+c^2}=R^2;$$

les équations de l'axe de révolution étant

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Remarque. — Dans les deux paragraphes précédents on a supposé les axes de coordonnées *rectangulaires*.

SURFACES RÉGLÉES.

96. Définition. — *On appelle surfaces réglées les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite.*

On distingue les surfaces réglées en deux classes, *les surfaces développables* et *les surfaces gauches.*

Une surface réglée est dite *développable*, lorsque toutes ses génératrices sont tangentes à une même courbe que l'on appelle *l'arête de rebroussement* de la surface.

La surface est dite *gauche* quand ses génératrices ne sont pas tangentes à une même courbe.

Soient

$$(L) \qquad x=\alpha+a\rho \qquad y=\beta+b\rho \qquad z=\gamma+c\rho$$

les équations d'une droite ; elle engendrera une surface si les paramètres α, β, γ, a, b, c sont fonctions d'une même variable ω.

On obtiendra l'équation de la surface en éliminant ρ et ω entre les équations (L).(*)

Si d'un point fixe S on mène des parallèles aux génératrices d'une surface réglée, on forme un cône appelé le *cône directeur* de la surface.

Quand toutes les génératrices sont parallèles à un même plan, le cône directeur devient un plan et prend le nom de *plan directeur*.

97. Condition pour qu'une surface réglée soit développable. — Posons

$$(10) \qquad \rho=\varphi(\omega);$$

si, entre les équations (L) et (10) on élimine ρ et ω, on obtiendra entre les coordonnées x, y, z deux équations qui représenteront une courbe C située sur la surface. Pour que cette surface soit développable, il faut et il suffit qu'on puisse choisir la fonction φ de manière que les droites L soient tangentes à la courbe C.

En prenant les dérivées des deux membres des équations L par rapport à ω et considérant ρ comme une fonction de ω on a

$$\begin{aligned} x' &= \alpha' + a'\rho + a\rho' \\ y' &= \beta' + b'\rho + b\rho' \\ z' &= \gamma' + c'\rho + c\rho', \end{aligned}$$

et les équations de la tangente au point $M(x, y, z,)$ de la courbe C seront

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}. \tag{11}$$

Cette droite se confondra avec L si x', y', z' sont respectivement proportionnels à a, b, c. En appelant μ une quantité auxiliaire, on aura donc

$$\begin{aligned} a(\rho' - \mu) + a'\rho + \alpha' &= 0 \\ b(\rho' - \mu) + b'\rho + \beta' &= 0 \\ c(\rho' - \mu) + c'\rho + \gamma' &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Ces trois équations du premier degré entre les quantités ρ et $\rho' - \mu$ ne sont pas compatibles en général; pour qu'elles le soient, c'est-à-dire pour que la surface soit développable, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & a' & \alpha' \\ b & b' & \beta' \\ c & c' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous désignerons par U le premier membre de cette égalité.

Cette condition étant remplie, on tire des deux premières équations (12)

$$(ab' - ba')\rho + a\beta' - b\alpha' = 0 \tag{13}$$

Cette équation fait connaître la valeur de ρ qui correspond au point où la génératrice L touche l'arête de rebroussement.

98. Équation du plan tangent à une surface réglée. — Soient $M(x, y, z)$ un point quelconque de la surface et θ la valeur de la variable ω qui correspond à la génératrice G passant par ce point; nous appellerons t la valeur de ρ relative au point M.

Si nous posons encore

$$\rho = \varphi(\omega),$$

la fonction φ étant seulement assujettie à prendre la valeur t pour $\omega = \theta$, nous obtiendrons, en faisant varier φ, une infinité de courbes C passant par le point M et situées sur la surface réglée.

L'équation du plan tangent au point M est de la forme

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0;$$

ce plan devant contenir la tangente au point M de la courbe C, tangente qui est représentée par les équations (11), on aura

$$lx' + my' + nz' = 0,$$

c'est-à-dire

$$l(\alpha' + a't + at') + m(\beta' + b't + bt') + n(\gamma' + c't + ct') = 0$$

Comme cette relation doit être satisfaite quand on fait varier φ dans les conditions indiquées plus haut, elle aura lieu quel que soit t', et l'on aura

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{array}{c} l(\alpha' + a't) + m(\beta' + b't) + n(\gamma' + c't) = 0 \\ la + mb + nc = 0. \end{array} \right.$$

L'équation du plan tangent cherché est donc

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} X - \alpha - at & Y - \beta - bt & Z - \gamma - ct \\ \alpha' + a't & \beta' + b't & \gamma' + c't \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan contient la génératrice G, car un point quelconque de cette génératrice a ses coordonnées de la forme

$$\alpha + a\rho \qquad \beta + b\rho \qquad \gamma + c\rho.$$

Après qu'on a substitué ces valeurs des coordonnées dans l'équation du plan tangent, la première ligne et la troisième ne diffèrent que par le facteur $\rho - t$.

99. La direction de ce plan tangent variera en général avec la position du point de contact sur la génératrice. On voit en effet que l'équation du plan tangent dépend de t.

Cherchons si, pour certaines surfaces, ce plan tangent peut être le même en tous les points d'une génératrice.

Ajoutons aux éléments de la première ligne du déterminant (14) ceux de la troisième multipliés par t, l'équation du plan tangent deviendra

$$\begin{vmatrix} X - \alpha & Y - \beta & Z - \gamma \\ \alpha' + a't & \beta' + b't & \gamma' + c't \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

En écrivant que, dans cette équation, les coefficients de $Y - \beta$ et de $Z - \gamma$ divisés par celui de $X - \alpha$ donnent des quotients indépendants de t, on obtient les relations

$$\frac{c\beta' - b\gamma'}{cb' - bc'} = \frac{a\gamma' - c\alpha'}{ac' - ca'} = \frac{b\alpha' - a\beta'}{ba' - ab'},$$

ou, en chassant les dénominateurs, les relations

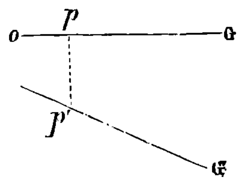
$$a\mathrm{U} = 0 \qquad b\mathrm{U} = 0 \qquad c\mathrm{U} = 0.$$

comme a, b, c ne sont pas nuls à la fois, on doit avoir $U = 0$ et la surface est *développable*.

Théorème. — *Un plan tangent à une surface développable est tangent en tous les points de la génératrice rectiligne qui passe par le point de contact.*

Paramètre de distribution. — Plan central. — Point central. Ligne de striction.

100. Paramètre de distribution. — Soient G et G′ deux génératrices d'une surface réglée qui correspondent aux valeurs ω et $\omega + \Delta\omega$ de la variable indépendante ; leurs équations seront



$$\text{G} \quad x = \alpha + a\rho \quad y = \beta + b\rho \quad z = \gamma + c\rho$$

et

$$\text{G}' \quad \begin{aligned} x &= \alpha + \Delta\alpha + (a + \Delta a)\rho \\ y &= \beta + \Delta\beta + (b + \Delta b)\rho \\ z &= \gamma + \Delta\gamma + (c + \Delta c)\rho. \end{aligned}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} A_1 = b\Delta c - c\Delta b & B_1 = c\Delta a - a\Delta c & C_1 = a\Delta b - b\Delta a \\ a_1 = a + \Delta a & b_1 = b + \Delta b & c_1 = c + \Delta c \end{array}$$

la plus courte distance $d = pp'$ des deux génératrices G, G′ et le sinus de leur angle φ auront pour expressions

$$d = \frac{A_1\Delta\alpha + B_1\Delta\beta + C_1\Delta\gamma}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Remarquons maintenant que, quand $\Delta\omega$ tend vers zéro, les rapports

$$\frac{A_1}{\Delta\omega} \quad \frac{B_1}{\Delta\omega} \quad \frac{C_1}{\Delta\omega}$$

ont respectivement pour limites les mineurs du premier ordre A, B, C du déterminant U relatifs aux éléments α', β', γ' ; il en résultera

$$\lim \frac{d}{\Delta\omega} = \frac{A\alpha' + B\beta' + C\gamma'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{U}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

et

$$\lim \frac{\sin\varphi}{\Delta\omega} = \lim \frac{\varphi}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{a^2+b^2+c^2}.$$

On déduit de là

$$p = \lim \frac{d}{\varphi} = \frac{a^2+b^2+c^2}{A^2+B^2+C^2}\,U.$$

La quantité p est appelée *le paramètre de distribution relatif à la génératrice* G.

Quand la surface est *gauche*, p n'est ni nul ni infini, excepté pour certaines génératrices particulières. Cette quantité est nulle quand la surface est *développable.*

101. Plan central. — Considérons le plan R qui passe par la génératrice G et la perpendiculaire commune pp' ; il est perpendiculaire au plan P parallèle aux génératrices G, G'. Quand G' vient coïncider avec G, ce dernier plan a pour position limite le plan tangent au cône directeur de la surface suivant la génératrice g parallèle à G ; le plan R a donc aussi une position limite qui est appelée *le plan central relatif à la génératrice* G.

102. Point central. — En cherchant le point de rencontre de G avec le plan S mené par G' perpendiculairement au plan P, on obtient pour déterminer la valeur de ρ qui correspond au pied p de la perpendiculaire commune pp' l'équation

$$\begin{vmatrix} a\rho-\Delta\alpha & b\rho-\Delta\beta & c\rho-\Delta\gamma \\ a+\Delta a & b+\Delta b & c+\Delta c \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on tire

$$\left(A_1^2+B_1^2+C_1^2\right)\rho = \begin{vmatrix} \Delta\alpha & \Delta\beta & \Delta\gamma \\ a+\Delta a & b+\Delta b & c+\Delta c \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

Divisons par $(\Delta\omega)^2$ les deux membres de la relation précédente et faisons tendre $\Delta\omega$ vers zéro, la quantité ρ tendra vers une valeur r donnée par l'équation

$$(A^2+B^2+C^2)r = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} \tag{15}$$

On voit que, quand G' tend vers G, le point p tend vers un point limite o; ce point o est appelé *le point central* relatif à la génératrice G.

103. Ligne de striction. — Chaque génératrice a un point central ; le lieu de ces points est *la ligne de striction* de la surface réglée.

On aura les équations de la ligne de striction en éliminant r et ω entre l'équation (15 et les équations de la génératrice G.

Remarque I. — Quand la surface est développable on a

$$U = A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0.$$

Si de cette relation et de l'identité

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

on tire les valeurs de γ' et de c pour les porter dans la relation (15), on obtient, après la suppression du facteur commun $A^2 + B^2 + C^2$, l'équation

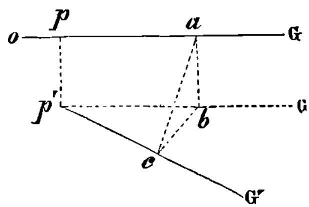
$$Cr + a\beta' - b\alpha' = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (13). Le point central est donc alors le point où G touche l'arête de rebroussement, et cette courbe devient la ligne de striction de la surface.

Remarque II. — Lorsqu'une surface réglée a un plan directeur D, les projections des génératrices G, G′ sur ce plan se coupent au point où il est rencontré par la perpendiculaire commune pp' ; donc la projection de la ligne de striction sur le plan directeur est *l'enveloppe* des projections des génératrices sur le même plan.

104. Nous avons vu que, dans une surface gauche, la direction du plan tangent varie quand le point de contact se déplace sur une génératrice ; nous allons chercher la loi de cette variation.

Soient G une génératrice d'une surface réglée et G′ la génératrice infiniment voisine. Menons la perpendiculaire commune pp' à G et à G′ ; posons $pp' = d$ et désignons par o le point central relatif à la génératrice G.



Par le point p' menons une parallèle G_1 à G, puis, par le point a de G un plan perpendiculaire à cette droite. Ce plan rencontrera G_1 au point b et G′ au point c. La droite ac est une corde de la courbe d'intersection de la surface par le plan abc ; donc, quand G′ se confond avec G, cette corde devient la tangente à cette courbe au point a, et le plan Gac devient le plan tangent au point a de la surface réglée. Quant au plan Gpp', il devient le plan central relatif à G ; l'angle cab aura donc pour limite l'angle θ que fait avec ce plan central le plan tangent au point a.

Les triangles abc, cbp' rectangles au point b donnent

$$\text{tang}\, cab = \frac{bc}{ab} = \frac{bc}{d} \qquad bc = ap \,\text{tang}\, \varphi,$$

φ désignant toujours l'angle des deux droites G et G′.

On tire de ces deux relations l'équation

$$\text{tang}\, cab = \frac{\dfrac{ap}{d}}{\text{tang}\, \varphi},$$

ou, en passant à la limite, l'équation

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{x}{p},$$

en représentant par x la distance du point a au point central o et par p le paramètre de distribution relatif à G.

La relation (16) due à Chasles résout la question proposée.

Quand x est nul le plan tangent coïncide avec le plan central. Quand x varie de 0 à $+\infty$, l'angle θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et le plan tangent dont le point de contact est à l'infini est perpendiculaire au plan central.

Quand x varie de 0 à $-\infty$ on trouve des plans tangents qui sont, par rapport au plan central, symétriques de ceux que l'on a obtenus en faisant varier x de 0 à $+\infty$.

Lorsque la surface est développable, p est nul et l'angle θ est droit; le plan tangent en un point quelconque de la génératrice G est donc perpendiculaire au plan central; ce plan reste le même pour tous les points de la génératrice.

Nous retrouvons ainsi le théorème établi au paragraphe (99).

105. Considérons deux surfaces réglées Σ, Σ_1 ayant une génératrice G commune. Soient o, o_1 les deux points centraux de ces deux surfaces relatifs à la génératrice G; nous désignerons par a la distance oo_1, par α l'angle que le plan central R_1 de la surface Σ_1 fait avec le plan central R de la surface Σ. Nous nous proposons de déterminer les points M de la génératrice G pour lesquels les deux surfaces ont le même plan tangent.

Si θ est l'angle que ce plan tangent commun fait avec le plan central R, il fera avec le plan central R_1 l'angle $\theta - \alpha$, et, en posant $oM = x$, on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{p} \qquad \operatorname{tang}(\theta - \alpha) = \frac{x - a}{p_1},$$

p et p_1 étant les paramètres de distribution des deux surfaces relatifs à la génératrice G.

L'élimination de θ entre les deux équations précédentes donne pour déterminer x une équation du second degré

$$(17) \qquad x^2 \operatorname{tang}\alpha - (a \operatorname{tang}\alpha + p_1 - p)x + p(p_1 \operatorname{tang}\alpha - a) = 0.$$

On en conclut que les deux surfaces ont le même plan tangent en deux points de la génératrice G.

Si les deux surfaces se touchent en *trois* points de cette génératrice, elles sont tangentes en chacun de ses points; en effet, l'équation (17) ayant trois racines devient une identité. On dit alors que les deux surfaces *se raccordent* suivant la droite G.

Pour qu'il y ait raccordement, il faut et il suffit que les points centraux et les plans centraux coïncident; il faut en outre que les paramètres de distribution soient égaux.

106. Remarque. — Lorsque les surfaces réglées ont le même cône directeur ou le même plan directeur, l'angle α est nul et l'équation (17) s'abaisse au premier degré.

Dans ce cas, les surfaces ont le même plan tangent en *un seul* point à distance finie de la génératrice commune G ; elles se raccordent quand elles sont tangentes en deux points de cette génératrice. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les points centraux coïncident et que les deux paramètres de distribution p, p_1 soient égaux.

Les surfaces de raccordement sont fréquemment employées en Géométrie descriptive.

CHAPITRE III

SURFACES ENVELOPPES.

107. Soit $f(x, y, z, a)$ une fonction des coordonnées x, y, z et d'un paramètre variable a ; l'équation

$$f(x, y, z, a) = 0$$

dans laquelle on fera varier a, représentera une *famille* de surfaces.

Donnons au paramètre variable les valeurs a et $a + h$, les équations

$$f(x, y, z, a) = 0 \qquad f(x, y, z, a + h) = 0$$

représenteront des surfaces Σ, Σ' se coupant suivant une courbe c définie par ces équations considérées *simultanément*.

Les coordonnées des points de cette courbe satisferont aussi à l'équation

$$\frac{f(x, y, z, a + h) - f(x, y, z, a)}{h} = 0\,;$$

si l'on fait tendre h vers zéro, la courbe c tendra vers une courbe C représentée par les équations

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0 \qquad (2) \qquad f'_a(x, y, z, a) = 0\,;$$

nous dirons que la courbe C, appelée par Monge la *caractéristique*, est l'intersection de la surface Σ avec la surface *infiniment voisine* de la même famille.

Définition. — *On appelle enveloppe d'une surface Σ dont l'équation contient un paramètre variable la surface engendrée par les caractéristiques.*

D'après ce qui précède, on aura l'équation de l'enveloppe en éliminant le paramètre a entre les équations (1) et (2).

La surface variable Σ est appelée *la surface enveloppée.*

108. Théorème. — *Chaque surface enveloppée Σ est tangente à la surface enveloppe* E *en tous les points de la caractéristique correspondante.*

Donnons au paramètre a une valeur A, ce qui définit une enveloppee Σ_1 et une caractéristique C_1 ; soit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un point quelconque de cette caractéristique, le plan tangent au point M_1 de la surface Σ_1 aura pour équation

$$l(X-x_1)+m(Y-y_1)+n(Z-z_1)=0,$$

en posant

$$\begin{aligned} l &= f'_{x_1}(x_1, y_1, z_1, A) \\ m &= f'_{y_1}(x_1, y_1, z_1, A) \\ n &= f'_{z_1}(x_1, y_1, z_1, A). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on peut prendre l'équation (1) pour celle de l'enveloppe, pourvu qu'on y regarde a non plus comme une constante, mais comme une fonction de x, y, z définie par l'équation (2).

L'equation du plan tangent au point $M(x, y, z)$ de l'enveloppe sera donc

$$L(X-x)+M(Y-y)+N(Z-z)=0,$$

en posant

$$\begin{aligned} L &= f'_x(x, y, z, a)+a'_x f'_a(x, y, z, a) \\ M &= f'_y(x, y, z, a)+a'_y f'_a(x, y, z, a) \\ N &= f'_z(x, y, z, a)+a'_z f'_a(x, y, z, a). \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (2), les relations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} L &= f'_x(x, y, z, a) \\ M &= f'_y(x, y, z, a) \\ N &= f'_z(x, y, z, a). \end{aligned}$$

Cela posé, faisons coïncider le point M avec le point M_1 qui est situé sur l'enveloppe, alors x, y et z deviendront x_1, y_1 et z_1 ; de plus, a prendra une valeur numérique justement égale à A ; donc on aura

$$L=l \qquad M=m \qquad N=n,$$

et l'enveloppée Σ_1 touchera l'enveloppe E au point M_1 qui est *quelconque* sur la caractéristique C_1.

La surface Σ_1 touchera donc E en tous les points de la courbe C_1.

109. Généralisation. — Supposons que l'enveloppée soit représentée par une équation

$$f(x, y, z, a, b)=0 \tag{3}$$

contenant deux paramètres variables liés par une relation

$$\varphi(a, b)=0. \tag{4}$$

On démontrera, comme dans la Géométrie plane, que l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (3), (4) et l'équation

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b}.$$

110. — Soit maintenant une famille de surfaces dont l'équation

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{5}$$

contient *deux paramètres arbitraires* a et b.

Supposons un instant a et b liés par une relation

$$b = \psi(a)$$

l'équation (5) ne contiendra plus qu'un paramètre arbitraire a, et les équations de la caractéristique seront

$$f = 0 \qquad f'_a + b'_a f'_b = 0.$$

Quelle que soit la fonction ψ, cette caractéristique passera par les points M_i définis par les équations

$$f = 0 \qquad f'_a = 0 \qquad f'_b = 0. \tag{6}$$

Le lieu décrit par les points M_i quand a et b varient d'une manière arbitraire est l'enveloppe des surfaces considérées.

On obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant a et b entre les équations (6).

On démontre, comme au paragraphe 108, le théorème suivant :

111. Théorème. — *Chaque surface enveloppée* Σ *est tangente à la surface enveloppe* E *en tous les points* M_i *qui correspondent à cette surface* Σ.

Il y a une différence qui mérite d'être signalée entre l'enveloppe des surfaces à *un seul* paramètre et celle des surfaces à *deux* paramètres.

Dans le premier cas, l'enveloppe et chaque enveloppée ont *une courbe de contact.*

Dans le second cas, ces deux surfaces sont seulement tangentes en un ou plusieurs points.

112. Généralisation. — Supposons que l'enveloppée soit représentée par une équation

$$f(x, y, z, a, b, c) = 0 \tag{7}$$

contenant trois paramètres variables liés par une relation

$$\varphi(a, b, c) = 0. \tag{8}$$

On démontrera, comme dans la Géométrie plane, que l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a, b et c entre les équations (7), (8) et les équations

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{f'_c}{\varphi'_c}.$$

Applications.

113. Exemple I. — *Trouver l'enveloppe d'un plan qui se meut suivant une loi déterminée.*

L'équation du plan ne contiendra qu'un seul paramètre arbitraire ω ; en prenant pour paramètre le coefficient de x, elle sera de la forme

$$z = \omega x + y f(\omega) + F(\omega). \tag{9}$$

L'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant ω entre l'équation (9) et l'équation

$$0 = x + y f'(\omega) + F'(\omega). \tag{10}$$

On voit que les *caractéristiques* sont des droites et que la surface est réglée. D'un autre côté, le plan représenté par l'équation (9) est tangent en tous les points de la caractéristique ; donc la surface est *développable.*

On peut encore vérifier ce résultat de la manière suivante :

Des équations (9) et (10) on tire

$$x = -y f'(\omega) - F'(\omega) \qquad z = [f(\omega) - \omega f'(\omega)]\, y + F(\omega) - \omega F'(\omega)$$

puis

$$\frac{x + F'(\omega)}{f'(\omega)} = \frac{y}{-1} = \frac{z + \omega F'(\omega) - F(\omega)}{\omega f'(\omega) - f(\omega)}.$$

Le déterminant que nous avons désigné par U au paragraphe 97, est ici

$$U = \begin{vmatrix} f'(\omega) & f''(\omega) & -F''(\omega) \\ -1 & 0 & 0 \\ \omega f'(\omega) - f(\omega) & \omega f''(\omega) & -\omega F''(\omega) \end{vmatrix}$$

ou bien

$$U = -\begin{vmatrix} f''(\omega) & F''(\omega) \\ \omega f''(\omega) & \omega F''(\omega) \end{vmatrix}.$$

On voit que le déterminant U est nul ; donc la surface est développable.

114. De ce qui précède il résulte qu'on peut définir une surface développable comme l'enveloppe d'un plan dont l'équation ne contient qu'un seul paramètre.

Cette nouvelle définition a sur celle qui a eté donnée au paragraphe 96, l'avantage d'embrasser les surfaces coniques et cylindriques.

Exemple II. — *Trouver l'enveloppe des sphères* S *qui passent par un point donné* A *et dont le centre décrit une sphère* Σ.

Prenons pour axes de coordonnées trois diamètres rectangulaires de la sphère Σ, l'axe des x passant par le point A. Si l'on pose $oA = d$ et si l'on désigne par R le rayon de la sphère Σ, l'équation de la sphère S sera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x-d) - 2by - 2cz - d^2 = 0, \tag{11}$$

et les coordonnées de son centre seront liées par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2. \tag{12}$$

On aura l'équation de l'enveloppe en éliminant a, b, c entre les équations (11), (12) et la relation

$$\frac{x-d}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \tag{13}$$

ce qui donne

$$(x^2 + y^2 + z^2 - d^2)^2 = 4R^2[(x-d)^2 + y^2 + z^2].$$

Cette équation étant de la forme

$$f(x, y^2 + z^2) = 0$$

représente une surface de révolution ayant pour axe la droite ox.

La méridienne située dans le plan des zx a pour équation

$$(x^2 + z^2 - d^2)^2 = 4R^2[(x-d)^2 + z^2].$$

Cette méridienne est un limaçon de Pascal, car, en transportant l'origine au point A et passant aux coordonnées polaires, l'axe polaire étant Ax, l'équation précédente devient

$$\rho = -2d\cos\omega \pm 2R.$$

EXERCICES.

1° Trouver l'équation du plan passant par un point M d'une surface et la coupant suivant une courbe pour laquelle le point M est double. (Plan tangent.)

2° Démontrer que les surfaces représentées par les équations

$$xy = \alpha z \qquad \sqrt{z^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + y^2} = \beta \qquad \sqrt{z^2 + x^2} - \sqrt{z^2 + y^2} = \gamma$$

se coupent à angle droit. Interpréter géométriquement les deux dernières équations.

3° Trouver l'équation d'une courbe tracée sur un cylindre de révolution et qui se transforme en une ligne droite, quand on développe le cylindre sur un plan. (**Hélice.**)

La portion d'une génératrice du cylindre comprise entre deux points de rencontre consécutifs de cette droite avec l'hélice est appelée le *pas* de cette courbe.

4° Trouver la trace, sur le plan de base d'une hélice, du cylindre ayant pour directrice cette hélice et dont les génératrices sont parallèles à la tangente en un point donné de cette courbe. (**Cycloïde.**)

(Le plan de base de l'hélice est celui d'une section droite du cylindre sur lequel elle est tracée.)

5° Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de l'axe d'un cylindre de révolution sur les tangentes à toutes les hélices de même pas que l'on peut tracer sur ce cylindre.

6° Trouver la surface engendrée par les tangentes à une hélice. (**Hélicoïde développable.**)

7° Dans un plan tangent à un cylindre de révolution dont l'axe est oz on trace une ellipse dont un des axes $BB' = 2b$ coïncide avec la génératrice de contact ; soit D la courbe obtenue en enroulant le plan tangent sur le cylindre.

Trouver l'équation du conoïde droit ayant pour directrices la droite oz et la courbe D.

On coupe ce conoïde par un tore dont l'axe est oz et dont le cercle générateur a pour diamètre l'axe $2b$ de l'ellipse. Ce cercle situé dans le plan des deux droites oz, BB' touche BB' au centre de l'ellipse.

Trouver la projection de la courbe d'intersection des deux surfaces sur un plan perpendiculaire à l'axe oz. (**Spirales d'Archimède.**)

8° Trouver le lieu géométrique des sommets des cônes ayant pour directrice un cercle tracé sur une sphère donnée et coupés par un plan donné suivant des cercles, des hyperboles équilatères ou des paraboles

9° La projection d'une section plane d'un cône de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet est une conique ayant pour l'un de ses foyers le sommet et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan de projection.

10° Trouver l'équation de la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe d'un cône de révolution, d'une courbe tracée sur ce cône et qui se transforme en une ligne droite quand on développe le cône sur un plan.

11° Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites rectangulaires données D, D' et fait avec D un angle donné.

Étudier les sections de la surface par des plans parallèles aux droites D, D' ou perpendiculaires à la droite D.

12° Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites rectangulaires données D et D', et sur la circonférence d'un cercle dont le centre est sur la droite D et dont le plan est perpendiculaire à cette droite.

Étudier les sections de la surface par des plans perpendiculaires à D.

13° Soient deux cônes de révolution ayant leurs axes parallèles, l'intersection de ces cônes projetée sur un plan perpendiculaire à leurs axes est un ovale de Descartes. (**Quételet.**)

Remarque. — Un ovale de Descartes est le lieu des points tels qu'entre leurs distances r, r' à deux points fixes F, F' appelés foyers on a la relation

$$r + \alpha r' = 2a.$$

La courbe a un troisième foyer situé sur la droite FF'.

En prenant pour pôle un foyer, l'équation de la courbe en coordonnées polaires est

$$\rho^2 - 2(a\cos\omega + b\sin\omega + c)\,\rho + d = 0.$$

14° Soient A, B deux coniques focales, les cônes ayant même sommet et ces focales respectivement pour directrices se coupent à angle droit.

15° Étant données une sphère et deux droites rectangulaires touchant la sphère aux extrémités d'un même diamètre, trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur les deux droites données et reste tangente à la sphère.

16° Trouver la surface engendrée par une ellipse variable qui a pour centre un point donné o, pour sommet un point donné A et dont un autre sommet décrit une droite D.

17° Trouver l'équation de la surface engendrée par un cercle passant par deux points donnés et dont la circonférence s'appuie sur une droite donnée.

18° La surface qui a pour équation

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2xyz = 0$$

est coupée suivant quatre cercles par la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

9° La surface ayant pour équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

est de révolution. (**Coordonnées rectangulaires.**)

20° La section d'un tore par un plan bi-tangent se compose de deux cercles égaux. (**Yvon Villarceau.**)

21° La section d'un tore par une sphère bi-tangente se compose de deux cercles.

22° La surface engendrée par une ellipse tournant autour d'une droite située dans son plan est coupée suivant deux ellipses par un plan bi-tangent. Les projections de ces ellipses sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution ont pour foyer commun le point où ce plan rencontre l'axe.

23° Étant donnés un plan P et un point o, on joint le point o aux différents points M du plan et, par le point M, on mène un plan Q perpendiculaire sur oM ; trouver l'enveloppe des plans Q.

Même question, en remplaçant le plan P par une sphère n'ayant pas son centre au point o.

24° Démontrer que le lieu des centres des sphères S tangentes à trois sphères données ayant pour centres les points m, m', m'' est une conique A.

L'expression des distances des centres M des sphères S aux trois points m, m', m'' est une fonction linéaire des coordonnées du point M ; il en résulte que les trois points m, m', m'' sont situés sur une des focales de la conique A.

Le lieu des points de contact des sphères S avec chacune des sphères données est un cercle.

L'enveloppe des sphères S est appelée la *cyclide de M. Dupin ;* le problème suivant permet de trouver facilement l'équation de cette enveloppe.

25° On donne trois axes rectangulaires et une ellipse A ayant pour équations

$$z = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Sur cette ellipse on prend un point quelconque M ayant pour abscisse x, et, sur sa focale hyperbolique B, on prend un point m ayant pour abscisse α.

Cela posé, on considère la sphère S ayant son centre au point M et pour rayon

$$R = \pm\left(\frac{c}{a}x - h\right),$$

h étant une constante et la sphère s ayant son centre au point m et pour rayon

$$r = \pm\left(h - \frac{a}{c}\alpha\right).$$

Trouver la surface enveloppe des sphères S, le point M décrivant l'ellipse A.

Si l'on prend trois sphères s, s_1, s_2 ayant respectivement pour centres des points m, m_1, m_2 de l'hyperbole B, ces sphères sont tangentes à la sphère variable S ; il en résulte que l'enveloppe des sphères S est la cyclide de M. Dupin.

Quand le point m décrit l'hyperbole B, les sphères s enveloppent la *même* cyclide.

Les caractéristiques de l'enveloppe des sphères S sont des cercles dont les plans passent par une même droite ; les plans des cercles, caractéristiques de l'enveloppe des sphères s, passent aussi par une même droite.

Démontrer que les sphères S passent par deux points fixes situés sur la focale B ; quand ces points sont imaginaires les sphères S coupent orthogonalement la circonférence d'un cercle doublement tangent à l'ellipse A.

Les sphères s jouissent de propriétés analogues.

26° Les normales à une surface réglée aux différents points d'une génératrice sont sur un paraboloïde hyperbolique. — *On fera usage de la formule de Chasles* (104).

27° Deux surfaces gauches ayant une génératrice commune sont telles que les deux plans tangents passant par cette génératrice et qui leur sont communs se coupent à angle droit. Démontrer que, pour la génératrice commune, le plan central de l'une des surfaces touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première. (Mannheim.)

LIVRE IV

CHAPITRE PREMIER

CLASSIFICATION DES QUADRIQUES.

115. L'équation générale du second degré à trois variables est de la forme.

$$(1) \qquad \begin{aligned} f = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0; \end{aligned}$$

nous nous proposons de classer les surfaces représentées par cette équation et de déterminer leur forme.

Nous représenterons par Δ le discriminant de la fonction homogène à *trois* variables

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

et par H celui de la fonction homogène à *quatre* variables

$$\begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2. \end{aligned}$$

Nous poserons donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Pour fixer les caractères analytiques des différentes classes de surfaces que nous aurons à considérer, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une fonction homogène et du second degré de n variables soit la somme des carrés de n fonctions linéaires homogènes et distinctes de ces variables, il faut et il suffit que le discriminant de cette fonction ne soit pas nul.*

Pour que cette fonction soit la somme des carrés de $n-p$ fonctions linéaires homogènes et distinctes des mêmes variables, il faut et il suffit que tous les mineurs de son discriminant soient nuls, jusqu'à ceux de l'ordre $p-1$ inclusivement.

Ce théorème que l'on démontre en Algèbre peut être établi par les considérations employées en Géométrie plane (G.P. 109).

Division des quadriques en cinq classes.

Nous examinerons les deux hypothèses suivantes :

I. — *Les coefficients des carrés x^2, y^2, z^2 dans la fonction f ne sont pas nuls à la fois.*

II. — *Les coefficients de ces carrés sont nuls à la fois.*

Les coefficients des carrés x^2, y^2 et z^2 ne sont pas nuls à la fois.

116. Pour fixer les idées, supposons $A \gtrless 0$. On a identiquement.

$$(2) \quad f = \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z + C)^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$
$$+ 2C'y + 2C''z + D - \frac{1}{A}(B''y + B'z + C)^2;$$

nous désignerons par P la fonction $Ax + B''y + B'z + C$, qui n'est pas autre chose que la demi-dérivée $\frac{1}{2}f'_x$.

L'expression qui suit le terme $\frac{1}{A}P^2$, dans le second membre de la relation (2), est une fonction de *deux* variables au plus qui pourra être du second degré, du premier degré ou se réduire à une constante.

Si elle est du second degré, on a vu en Géométrie plane (G. P. 104), qu'elle peut être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$\beta Q^2 + \gamma R^2 + h$$
$$\beta Q^2 + R$$
$$\beta Q^2 + h.$$

Si elle est du premier degré, on la représentera par Q ; si elle est constante, on la représentera par h.

En résumé, dans l'hypothèse considérée, la fonction f pourra être ramenée, par des transformations simples, à l'une des formes suivantes :

I	$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + h$
II	$\alpha P^2 + \beta Q^2 + R$
III	$\alpha P^2 + \beta Q^2 + h$
IV	$\alpha P^2 + Q$
V	$\alpha P^2 + h.$

Dans ces formes α, β, γ, h sont des constantes et P, Q, R représentent des fonctions linéaires des variables x, y, z contenant la première trois variables, la deuxième deux variables et la troisième une seule variable.

De cette remarque, il résulte que les plans représentés par les équations

$$P = 0 \qquad Q = 0 \qquad R = 0$$

forment un véritable trièdre.

Les coefficients des carrés x^2, y^2 et z^2 sont nuls à la fois.

On a alors

$$f = 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D.$$

Les trois coefficients B, B′, B″ ne peuvent pas être nuls en même temps ; pour fixer les idées nous supposerons $B \gtrless 0$.

On a identiquement

$$(3) \quad f = \frac{2}{B}(Bz + B''x + C')(By + B'x + C'') + 2Cx + D$$
$$- \frac{2}{B}(B''x + C')(B'x + C'').$$

Nous désignerons par P et par Q les fonctions $Bz + B''x + C'$ et $By + B'x + C''$ qui ne sont pas autre chose que les demi-dérivées $\frac{1}{2}f'_y$, $\frac{1}{2}f'_z$.

L'expression qui suit le terme $\frac{2}{B}$ PQ, dans le second membre de la relation (3), est une fonction d'une seule variable qui pourra être du second degré, du premier degré, ou se réduire à une constante.

Si elle est du second degré on la ramènera à la forme $\gamma R^2 + h$.

Si elle est du premier degré on la représentera par R ; si elle est constante on la représentera par h.

En résumé, dans cette seconde hypothèse, la fonction f pourra être ramenée, par des transformations simples, à l'une des formes suivantes :

I	$PQ + \gamma R^2 + h$
II	$PQ + R$
III'	$PQ + h$.

Remarque I. — On a identiquement

$$PQ = \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 = P_1^2 - Q_1^2;$$

donc les formes I', II', III' reviennent respectivement aux formes I, II, III.

Remarque II. — Les fonctions linéaires P_1, Q_1 peuvent contenir les mêmes variables, mais les plans représentés par les équations

$$P_1 = 0 \qquad Q_1 = 0$$

ou, ce qui est la même chose, par les équations

$$P + Q = 0 \qquad P - Q = 0,$$

ne sont ni parallèles entre eux, ni rejetés à l'infini, ni parallèles au plan des yz.

En effet ces plans passent par l'intersection des plans P et Q qui est à distance finie; de plus B n'est pas nul.

D'un autre côté la fonction linéaire R ne contient que la variable x; de cette double remarque il résulte que les plans représentés par les équations

$$P_1 = 0 \qquad Q_1 = 0 \qquad R = 0$$

forment un véritable trièdre.

117. De tout ce qui précède il résulte que l'équation d'une quadrique peut être ramenée à l'une des cinq formes suivantes :

$$(G) \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + h = 0 \\ \text{II} & \alpha P^2 + \beta Q^2 + R = 0 \\ \text{III} & \alpha P^2 + \beta Q^2 + h = 0 \\ \text{IV} & \alpha P^2 + R \qquad\quad = 0 \\ \text{V} & \alpha P^2 + h \qquad\quad = 0. \end{array}$$

Ces formes sont évidemment distinctes ; on est donc conduit à diviser les quadriques en cinq classes.

La première classe comprend toutes les quadriques dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + h = 0.$$

La deuxième classe comprend toutes celles dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + R = 0.$$

La troisième classe comprend toutes celles dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + h = 0.$$

La quatrième classe comprend toutes celles dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + R = 0.$$

Enfin la cinquième classe comprend toutes celles dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + h = 0.$$

Caractères analytiques des différentes classes de quadriques.

118. Deux remarques très simples nous permettront de trouver immédiatement les caractères analytiques des différentes classes de quadriques.

Première remarque. — Pour fixer les idées, considérons les quadriques de la première classe.

Posons.

$$P = p + l \qquad Q = q + m \qquad R = r + n,$$

l, m, n désignant des constantes et p, q, r des fonctions linéaires et homogènes des variables x, y, z.

Groupons en outre ensemble les termes de même degré dans la fonction f, nous aurons

$$f = \varphi + \varphi_1 + \varphi_0.$$

Si l'on rend homogènes la fonction f et la fonction

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + h,$$

on obtiendra l'identité

$$\varphi + t\varphi_1 + t^2\varphi_0 \equiv \alpha(p + lt)^2 + \beta(q + mt)^2 + \gamma(r + nt)^2 + ht^2;$$

d'où l'on déduit la nouvelle identité

$$\varphi \equiv \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2.$$

On verra de même que, pour les quadriques de la deuxième et de la troisième classe, on a

$$\varphi \equiv \alpha p^2 + \beta q^2,$$

et que, pour celles de la quatrième et de la cinquième classe, on a

$$\varphi \equiv \alpha p^2.$$

Deuxième remarque. — Rendons homogènes la fonction f et les premiers membres des équations du groupe (G) ; remplaçons ensuite Rt par

$$\left(\frac{R+t}{2}\right)^2-\left(\frac{R-t}{2}\right)^2;$$

on vérifiera, sans difficulté, les propriétés suivantes :

1° Pour les quadriques de la première classe, la fonction f rendue homogène est la somme des carrés de quatre fonctions linéaires, homogènes et distinctes. Ce nombre se réduit à trois si h est nul.

2° Pour les quadriques de la deuxième classe, cette fonction f est la somme des carrés de quatre fonctions linéaires.

3° Pour les quadriques de la troisième classe, cette fonction f est la somme des carrés de trois fonctions linéaires. Ce nombre se réduit à deux si h est nul.

4° Pour les quadriques de la quatrième classe, cette fonction f est la somme des carrés de trois fonctions linéaires.

5° Pour les quadriques de la cinquième classe, cette fonction f est la somme des carrés de deux fonctions linéaires ; elle est carré parfait si h est nul.

Ces deux remarques étant faites, si l'on applique aux fonctions φ et f le théorème rappelé au paragraphe 115, on formera immédiatement le tableau suivant faisant connaître les caractères analytiques des différentes classes de quadriques :

Première classe.	$\Delta \gtrless 0$. $H \gtrless 0$ ou $H = 0$. Cone
Deuxième classe.	$\Delta = 0$ tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls. $H \gtrless 0$.
Troisième classe.	$\Delta = 0$ tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls. $H = 0$.
Quatrième classe.	$\Delta = 0$ tous les mineurs du premier ordre sont nuls. $H = 0$ tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls.
Cinquième classe.	$\Delta = 0$ tous les mineurs du premier ordre sont nuls. $H = 0$ tous les mineurs du premier ordre sont nuls.

DIVISION DES QUADRIQUES EN GENRES.

Première classe.

119. L'équation des quadriques de la première classe peut être ramenée à la forme

$$\text{I} \qquad \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + h = 0 ;$$

nous prendrons pour nouveaux axes de coordonnées le trièdre OXYZ formé par les trois plans P, Q, R.

Quand on passe des anciens axes $oxyz$ aux nouveaux, la fonction linéaire P des variables x, y, z devient une fonction *linéaire* des nouvelles variables X, Y, Z, qui, égalée à zéro, doit représenter le plan YOZ dans le nouveau système d'axes.

De cette remarque, qui s'applique également aux fonctions Q et R, il résulte que l'on peut poser

$$P = lX \qquad Q = mY \qquad R = nZ,$$

l, m, n étant des constantes.

L'équation des quadriques de la première classe rapportées aux axes OXYZ sera donc

$$\alpha l^2 X^2 + \beta m^2 Y^2 + \gamma n^2 Z^2 + h = 0.$$

Nous distinguerons deux cas principaux qui correspondent au **genre ellipsoïde** et au **genre hyperboloïde.**

120. Genre ellipsoïde. — *Les coefficients* α, β, γ *sont de même signe.* — Nous pouvons supposer que ces trois coefficients sont positifs ; ce cas se subdivise en trois autres.

1° $h < 0$. — Posons

$$a'^2 = -\frac{h}{\alpha l^2} \qquad b'^2 = -\frac{h}{\beta m^2} \qquad c'^2 = -\frac{h}{\gamma n^2},$$

l'équation de la surface deviendra

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} + \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0.$$

Prenons sur l'axe des X de part et d'autre de l'origine des longueurs $OA = OA' = a'$; sur l'axe des Y des longueurs $OB = OB' = b'$; sur l'axe des Z des longueurs $OC = OC' = c'$, la surface passera par les points (A, A'), (B, B'), (C, C').

Les sections de la surface par les plans de coordonnées ont respectivement pour équations

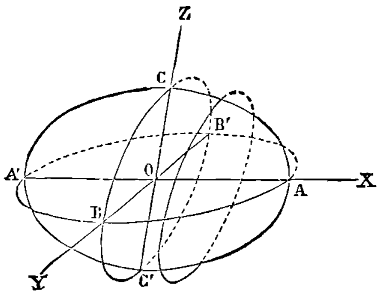


Fig. 29.

$$X = 0 \qquad \frac{Y^2}{b'^2} + \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

$$Y = 0 \qquad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

$$Z = 0 \qquad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Ces sections sont des ellipses rapportées à deux diamètres conjugués et passant respectivement par les points (A, A'), (B, B'), (C, C').

Maintenant la section de cette surface par un plan parallèle au plan ZOY a pour équations

$$X = d \qquad \frac{Y^2}{b'^2} + \frac{Z^2}{c'^2} = 1 - \frac{d^2}{a'^2};$$

cette section est une ellipse réelle quand d est compris entre $-a'$ et $+a'$. De plus les points où elle rencontre les deux ellipses ABA', ACA' sont, par rapport à elle, les extrémités de deux diamètres conjugués.

La surface peut donc etre considérée comme engendrée par une ellipse dont le plan reste parallèle au plan YOZ et qui rencontre les ellipses ABA', ACA' en des points qui sont, par rapport à l'ellipse mobile, les extrémités de deux diamètres conjugués.

On voit que la surface est limitée dans tous les sens ; on la désigne sous le nom *d'ellipsoïde*.

2° $h = 0$. — L'équation

$$\alpha l^2 X^2 + \beta m^2 Y^2 + \gamma n^2 Z^2 = 0$$

admet seulement la solution

$$X = Y = Z = 0.$$

Elle représente un point ; on dit que *l'ellipsoïde se réduit à un point.*

3° $h > 0$. — L'équation (I) n'admet aucune solution réelle ; on dit qu'elle représente un *ellipsoïde imaginaire.*

121. Genre hyperboloïde. — *Les coefficients* α, β, γ *n'ont pas le même signe.* — Nous pouvons toujours supposer que α et β sont positifs et que γ est négatif ; ce cas se subdivise en trois autres.

1° $h < 0$. — Posons

$$a'^2 = -\frac{h}{\alpha l^2} \qquad b'^2 = -\frac{h}{\beta m^2} \qquad c'^2 = +\frac{h}{\gamma n^2},$$

l'équation de la surface deviendra

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0.$$

Prenons sur l'axe des X de part et d'autre de l'origine des longueurs $OA = OA' = a'$; sur l'axe des Y des longueurs $OB = OB' = b'$; sur l'axe des Z des longueurs $OC = OC' = c'$, la surface passera par les points (A, A'), (B, B') et sera rencontrée par OZ en deux points imaginaires.

Les sections de la surface par les plans coordonnés ont respectivement pour équations.

$$X = 0 \qquad \frac{Y^2}{b'^2} - \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

$$Y = 0 \qquad \frac{X^2}{a'^2} - \frac{Z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

$$Z = 0 \qquad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

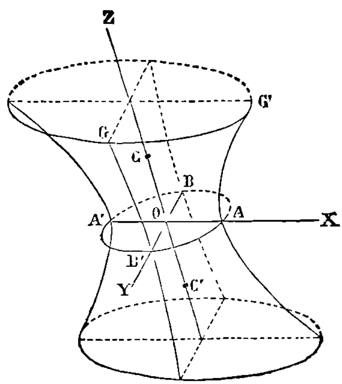


Fig. 30.

Les deux premières sections sont des hyperboles G, G' ayant CC' pour diamètre imaginaire ; les diamètres conjugués de CC' sont respectivement BB′ et AA′. La troisième section est une ellipse dont AA′ et BB′ sont deux diamètres conjugués.

La section de la surface par un plan parallèle au plan XOY a pour équations

$$Z = d \qquad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1 + \frac{d^2}{c'^2};$$

cette section est une ellipse qui reste réelle quand d varie de $-\infty$ à $+\infty$. De plus, les points où elle rencontre les hyperboles G et G′ sont, par rapport à cette ellipse, les extrémités de deux diamètres conjugués. Il est important de remarquer que les extrémités d'un même diamètre sont sur des branches différentes des hyperboles G, G′.

La surface peut donc être considérée comme engendrée par une ellipse dont le plan reste parallèle au plan XOY et qui rencontre les hyberboles G, G′ en des points qui sont, par rapport à l'ellipse mobile, les extrémités de deux diamètres conjugués; deux extrémités d'un même diamètre étant d'ailleurs situées sur des branches différentes des hyperboles directrices.

On voit que la surface est formée d'une seule nappe indéfinie dans tous les sens; on la désigne sous le nom *d'hyperboloïde à une nappe*.

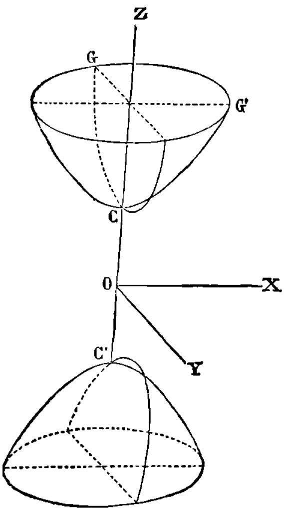


Fig. 31.

2° $h > 0$. — Posons

$$a'^2 = \frac{h}{\alpha l^2} \quad b'^2 = \frac{h}{\beta m^2} \quad c'^2 = -\frac{h}{\gamma n^2},$$

l'équation de la surface deviendra

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - \frac{Z^2}{c'^2} + 1 = 0.$$

Les axes OX, OY rencontrent la surface en des points imaginaires et l'axe OZ la rencontre en deux points réels C, C′, tels que $OC = OC' = c'$.

Les sections de la surface par les plans coordonnés ont respectivement pour équations

$$X=0 \qquad \frac{Y^2}{b'^2}-\frac{Z^2}{c'^2}+1=0,$$

$$Y=0 \qquad \frac{X^2}{a'^2}-\frac{Z^2}{c'^2}+1=0,$$

$$Z=0 \qquad \frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}+1=0.$$

Les deux premières sections sont des hyperboles G, G′ ayant CC′ pour diamètre réel ; les diamètres conjugués de CC′ sont respectivement OY et OX. La troisième section est une ellipse imaginaire.

La section de la surface par un plan parallèle au plan XOY a pour équations

$$Z=d \qquad \frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}=\frac{d^2}{c'^2}-1\,;$$

cette section est une ellipse qui n'est réelle que pour les valeurs de d non comprises entre $-c'$ et $+c'$.

De plus, les points où elle rencontre les hyperboles G, G′ sont, par rapport à cette ellipse, les extrémités de deux diamètres conjugués. Il est important de remarquer que les extrémités d'un même diamètre sont sur la même branche d'hyperbole.

La surface peut donc être considérée comme engendrée par une ellipse dont le plan reste parallèle au plan XOY et qui rencontre les hyperboles G, G′ en des points qui sont, par rapport à l'ellipse mobile, les extrémités de deux diamètres conjugués; deux extrémités d'un même diamètre étant d'ailleurs sur la même branche des hyperboles directrices.

On voit que la surface se compose de deux nappes séparées et indéfinies l'une dans le sens des cotes positives, l'autre dans le sens des cotes négatives ; on la désigne sous le nom *d'hyperboloïde à deux nappes.*

3° $h=0$. — L'équation de la surface, en mettant en évidence les signes des coefficients, prend la forme

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}-\frac{Z^2}{c'^2}=0.$$

Tout plan parallèle au plan XOY coupe la surface suivant une ellipse réelle ; de plus, l'équation précédente est homogène par rapport aux coordonnées X, Y, Z ; la surface est donc *un véritable cône.*

Deuxième classe.

122. L'équation des quadriques de la deuxième classe peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + R = 0.$$

Cette équation devient

$$\alpha l^2 Y^2 + \beta m^2 Z^2 + n X = 0,$$

si l'on prend les plans P, Q, R pour les plans de coordonnées ZOX, XOY, ZOY.

Nous distinguerons deux cas.

123. 1° Paraboloïde elliptique. — *Les coefficients* α *et* β *sont de même signe.* — On peut toujours supposer que les coefficients α et β sont positifs et que le coefficient n est négatif. Si ce dernier coefficient était positif, on changerait le sens des abscisses positives.

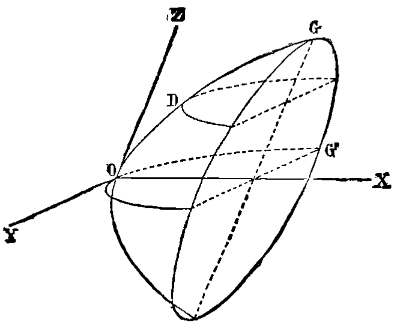


Fig. 32.

Posons

$$2p' = -\frac{n}{\alpha l^2} \quad 2q' = -\frac{n}{\beta m^2},$$

l'équation de la surface deviendra

$$\frac{Y^2}{p'} + \frac{Z^2}{q'} - 2X = 0.$$

Les sections de la surface par les plans coordonnés ont respectivement pour équations

$$X = 0 \qquad \frac{Y^2}{p'} + \frac{Z^2}{q'} = 0,$$

$$Y = 0 \qquad \frac{Z^2}{q'} - 2X = 0,$$

$$Z = 0 \qquad \frac{Y^2}{p'} - 2X = 0.$$

La première section est une ellipse réduite à un point; le plan YOZ touche donc la surface à l'origine.

Les deux autres sections sont des paraboles G, G′ ayant OX pour diamètre commun, respectivement tangentes aux axes OZ, OY et s'étendant toutes les deux à l'infini dans le sens des abscisses positives.

La section de la surface par un plan parallèle au plan XOY a pour équations

$$Z = d \qquad \frac{Y^2}{p'} - 2X + \frac{d^2}{q'} = 0\,;$$

cette section est une parabole égale à la parabole G′ et qui n'est pas autre chose que cette parabole *transportée* de manière que le point O de cette courbe vienne en un point D de la parabole G.

La surface peut donc être considérée comme engendrée par la parabole G′ qui se transporte de manière que le point O décrive la parabole G.

On voit que la surface est formée d'une seule nappe limitée dans le sens des abscisses négatives et illimitée dans le sens des abscisses positives, on la désigne sous le nom de *paraboloïde elliptique*.

Les sections par des plans parallèles au plan tangent YOZ sont des ellipses.

124. 2° **Paraboloïde hyperbolique.** — *Les coefficients* α *et* β *sont de signes contraires.* — On peut toujours supposer $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $n < 0$.

Posons

$$2p' = -\frac{n}{\alpha l^2} \quad 2q' = +\frac{n}{\beta m^2},$$

l'équation de la surface deviendra

$$\frac{Y^2}{p'} - \frac{Z^2}{q'} - 2X = 0.$$

Les sections de la surface par les plans coor-

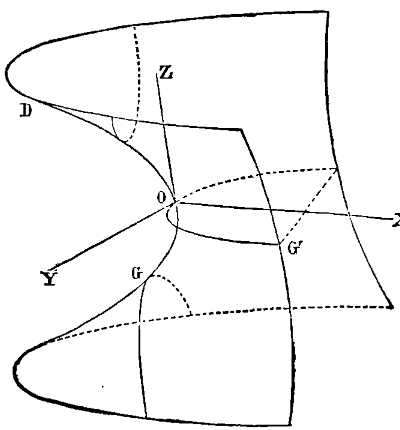


Fig. 33.

donnés ont respectivement pour équations

$$X=0 \qquad \frac{Y^2}{p'}-\frac{Z^2}{q'}=0,$$

$$Y=0 \qquad \frac{Z^2}{q'}+2X=0,$$

$$Z=0 \qquad \frac{Y^2}{p'}-2X=0.$$

La première section se compose de deux droites passant par l'origine ; le plan YOZ touche donc la surface en ce point.

Les deux autres sections sont des paraboles G, G′ ayant OX pour diamètre commun, respectivement tangentes aux axes OZ, OY et s'étendant à l'infini la première dans le sens des abscisses négatives, la seconde dans le sens des abscisses positives.

La section de la surface par un plan parallèle au plan XOY a pour équations

$$Z=d \qquad \frac{Y^2}{p'}-2X-\frac{d^2}{q'}=0;$$

cette section est une parabole égale à la parabole G′ et qui n'est pas autre chose que cette parabole transportée de manière que le point O de cette courbe vienne en un point D de la parabole G.

La surface peut donc être considérée comme engendrée par la parabole G′ qui se transporte de manière que le point O décrive la parabole G.

On voit que la surface est formée d'une seule nappe illimitée dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives ; on la désigne sous le nom de *paraboloïde hyperbolique.*

Les sections par des plans parallèles au plan tangent YOZ sont des hyperboles dont deux diamètres conjugués sont parallèles l'un à OY, l'autre à OZ. Quand le plan sécant rencontre la parabole G′, les extrémités du diamètre réel sont sur cette parabole ; quand il rencontre la parabole G, les extrémités du diamètre réel sont sur cette parabole.

Troisième classe.

125. L'équation des quadriques de la troisième classe peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2+\beta Q^2+h=0.$$

Quand h n'est pas nul, cette équation représente un *cylindre* ayant pour directrice une *ellipse réelle ou imaginaire, ou une hyperbole.*

Quand h est nul, l'équation représente *deux plans sécants réels ou imaginaires conjugués* dont l'intersection est une droite réelle.

Remarque. — Il résulte de là que, pour que l'équation du second degré à trois variables représente deux plans sécants réels ou imaginaires, il faut et il suffit que Δ soit nul, tous les mineurs du premier ordre ne l'étant pas, et qu'en outre H soit nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre.

Quatrième classe.

126. L'équation des quadriques de la quatrième classe peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + R = 0;$$

elle représente un *cylindre parabolique.*

Cinquième classe.

L'équation des quadriques de la cinquième classe peut être ramenée à la forme

$$\alpha P^2 + h = 0;$$

elle représente *deux plans parallèles réels ou imaginaires* si h n'est pas nul, et *deux plans confondus* si h est nul.

Dans ce dernier cas la fonction f est un carré parfait, donc H est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux du second ordre inclusivement.

127. La méthode suivie pour diviser les quadriques en classes et subdiviser les classes en genres, donne un moyen facile pour déterminer la nature d'une quadrique représentée par une équation donnée.

Il suffira pour cela de ramener, par les transformations indiquées précédemment, l'équation de la surface aux formes I, II, III, IV, V.

Comme la nature de la surface de chaque classe ne dépend que des signes des coefficients α, β, γ, h, il sera inutile, dans les applications, de mettre en évidence les coordonnées X, Y, Z.

Discussion de quelques équations numériques du second degré.

Exemple I. — Soit l'équation

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+\lambda=0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes :

$$(x+y-1)^2+2y^2+2z^2-4y-4z+\lambda-(y-1)^2=0$$
$$P^2+y^2+2z^2-2y-4z+\lambda-1=0$$
$$P^2+(y-1)^2+2z^2-4z+\lambda-2=0$$
$$P^2+Q^2+2(z-1)^2+\lambda-4=0.$$

L'équation peut donc être ramenée à la forme

$$P^2+Q^2+R^2+\lambda-4=0.$$

Donc

$\lambda<4$	*Ellipsoïde.*
$\lambda=4$	*Un point.*
$\lambda>4$	*Ellipsoïde imaginaire.*

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+2z^2+4yz-2zx-2xy+2y+\lambda=0.$$

On peut la ramener à la forme

$$P^2+Q^2-R^2+\lambda+1=0$$

en posant

$$P=x-y-z \qquad Q=y+z \qquad R=y-1.$$

Donc

$\lambda<-1$	*Hyperboloïde à une nappe.*
$\lambda=-1$	*Cône.*
$\lambda>-1$	*Hyperboloïde à deux nappes.*

Exemple III. — Soit l'équation

$$x^2+3y^2+2z^2+4yz+2xy-3x-4y-3z=0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes :

$$\left(x+y-\frac{3}{2}\right)^2+3y^2+2z^2+4yz-4y-3z-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

$$P^2+2y^2+2z^2+4yz-y-3z-\frac{9}{4}=0$$

$$P^2+\frac{1}{2}\left(2y+2z-\frac{1}{2}\right)^2+2z^2-3z-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\left(2z-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$P^2+Q^2-2z-\frac{19}{8}=0.$$

L'équation peut donc être ramenée à la forme

$$P^2+Q^2+R=0\,;$$

elle représente un paraboloïde elliptique.

Exemple IV. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx+2xy-2x-2y+2z+\lambda=0.$$

On peut la ramener à la forme

$$P^2+Q^2+\lambda-5=0,$$

en posant

$$P=x+y+z-1 \qquad Q=z+2.$$

Donc

$\lambda<5$	*Cylindre elliptique.*
$\lambda=5$	*Deux plans imaginaires conjugués.*
$\lambda>5$	*Cylindre elliptique imaginaire.*

Exemple V. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx+2xy+4x-2z+2=0.$$

On la ramène immédiatement à la forme

$$(x+y-z+2)^2-2(2y-z+1)=0;$$

elle représente un cylindre parabolique.

Exemple VI. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+9z^2-6yz+6xz-2xy-x+y-3z+\lambda=0.$$

On la ramène immédiatement à la forme

$$\left(x-y+3z-\frac{1}{2}\right)^2+\lambda-\frac{1}{4}=0.$$

Donc

$\lambda<\frac{1}{4}$ *Deux plans parallèles réels.*

$\lambda=\frac{1}{4}$ *Deux plans confondus.*

$\lambda>\frac{1}{4}$ *Deux plans parallèles imaginaires.*

Exemple VII. — Soit l'équation

$$2yz+4xz-2xy-2x-1=0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes :

$$2(z-x)(y+2x)-2x-1+4x^2=0$$

$$2(z-x)(y+2x)+\frac{1}{4}(4x-1)^2-\frac{5}{4}=0,$$

L'équation peut donc être ramenée à la forme

$$PQ+R^2-\frac{5}{4}=0,$$

c'est-à-dire à la forme

$$\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2-\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2+R^2-\frac{5}{4}=0.$$

Elle représente un hyperboloïde à une nappe.

128. Remarque. — Lorsque, par les transformations que nous avons fait connaître, on a donné à l'équation du second degré l'une des formes du groupe G, on est certain que les plans P, Q, R forment un véritable trièdre : on peut alors prendre ces plans pour plans coordonnés.

Il n'en est plus de même quand on donne a priori l'équation de la surface sous l'une des formes du groupe G.

Dans ce cas il faudra toujours commencer par examiner si les trois plans P, Q, R forment un véritable trièdre. S'il en est ainsi, tout ce qui a été dit précédemment reste vrai.

Si les trois plans P, Q, R ne forment pas un véritable trièdre, on aura entre les fonctions P, Q, R une relation de la forme

$$aP + bQ + cR + d = 0.$$

L'une d'entre elles est donc une fonction linéaire des deux autres et l'équation de la surface deviendra

$$f(P, Q) = 0,$$

Cette surface est donc un *cylindre ;* l'étude de la section par un des plans de coordonnées fera connaître la nature du cylindre.

Exemple. — Soit l'équation

$$(x + y - z)^2 + (x + y + 2z - 1)(2x + 2y + z) = 0.$$

Elle est de la forme

$$P^2 + QR = 0,$$

et elle représentera un cône si les trois plans P, Q, R forment un véritable trièdre.

Ces trois plans ont pour équations

$$\begin{aligned} P &= x + y - z = 0 \\ Q &= x + y + 2z - 1 = 0 \\ R &= 2x + 2y + z = 0 \end{aligned}$$

et l'on voit facilement qu'ils ne se coupent pas ; la surface considérée est donc un cylindre.

La section par le plan yoz a pour équation

$$3y^2 + 3z^2 + 3yz - 2y - z = 0.$$

Cette section est une véritable ellipse et la surface est un cylindre elliptique.

CHAPITRE II

CENTRE. — CONE ASYMPTOTE. — PLANS DIAMÉTRAUX DES QUADRIQUES.

Centre.

129. **Définition.** — *On appelle centre d'une surface un point par rapport auquel tous les points de la surface sont symétriques deux à deux.*

Théorème. — *Pour que l'origine des coordonnées soit centre d'une surface algébrique, il faut et il suffit que, dans son équation, mise sous forme entière, tous les termes soient de même parité.*

En groupant ensemble les termes de même degré, l'équation de la surface prendra la forme suivante :

$$\varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_0(x, y, z) = 0.$$

Une droite passant par l'origine est représentée par les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho,$$

dans lesquelles α, β, γ sont les coordonnées d'un point déterminé D de la droite, x, y et z celles d'un point variable M de cette droite ; quant à la quantité ρ, elle est égale au rapport $\frac{o\mathrm{M}}{o\mathrm{D}}$ pris positivement si les deux directions oM, oD sont de même sens, et négativement dans le cas contraire.

Les valeurs de ρ qui correspondent aux points où la sécante rencontre la surface sont données par l'équation

$$\rho^m \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots + \varphi_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

On démontrera comme en géométrie plane (G. P. 115) que, pour que l'origine soit centre, il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient α, β et γ,

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad \varphi_{m-3}(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \ldots ;$$

l'équation de la surface ne peut donc contenir que des termes des degrés m, $m-2$, $m-4$...

Recherche du centre. — Pour trouver le centre d'une surface on transportera l'origine en un point indéterminé $A(x_0, y_0, z_0)$, et l'on cherchera s'il est possible, en profitant de l'indétermination des coordonnées x_0, y_0, z_0, de faire disparaître tous les termes de degré pair si la surface est d'ordre impair, et tous les termes de degré impair si cette surface est d'ordre pair.

Application aux quadriques. — En transportant l'origine des coordonnées au point $A(x_0, y_0, z_0)$, l'équation générale $f(x, y, z) = 0$ des quadriques devient

$$\varphi(x, y, z) + xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$\varphi(x, y, z,)$ représentant, suivant une convention déjà faite, l'ensemble des termes du second degré dans la fonction f. Pour que la nouvelle origine soit centre, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$(1) \qquad f'_{x_0} = 0 \qquad f'_{y_0} = 0 \qquad f'_{z_0} = 0.$$

Ces trois équations sont appelées les *équations du centre.*

Règle. — *On obtient les équations du centre d'une quadrique en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de son équation.*

Discussion. — Si l'on considère x_0, y_0 et z_0 comme des coordonnées courantes, chacune des équations (1) représente un plan, et le centre est au point d'intersection de ces trois plans.

Les équations du centre développées sont, en supprimant les indices,

$$(2) \qquad \begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0 \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0 \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Nous distinguerons plusieurs cas :

1° *Les trois plans du centre forment un véritable trièdre.* — La surface a alors un centre unique à distance finie.

2° *Les trois plans du centre sont parallèles à une même droite.*— La surface a un centre unique rejeté à l'infini.

Remarque. — Dans ce cas, l'un des plans du centre peut être rejeté à l'infini.

3° *Les trois plans du centre passent par une même droite.* — La surface a alors une ligne de centres à distance finie.

Remarque. — *Dans ce cas, l'équation d'un des plans du centre peut se réduire à une identité.*

4° *Les trois plans du centre sont parallèles.* — La surface a une ligne de centres rejetée à l'infini.

Remarque. — Dans ce cas, l'un des plans du centre peut être rejeté à l'infini et un autre indéterminé.

5° *Les trois plans du centre sont confondus.* — La surface a un plan de centres.

Remarque. — Dans ce cas, un ou deux plans du centre peuvent être indéterminés.

De la discussion précédente, il résulte que les quadriques peuvent être divisées en cinq classes.

Première classe. — *Quadriques ayant un centre unique à distance finie ;*

Deuxième classe. — *Quadriques ayant un centre unique à distance infinie ;*

Troisième classe. — *Quadriques ayant une ligne de centres à distance finie ;*

Quatrième classe. — *Quadriques ayant une ligne de centres à distance infinie ;*

Cinquième classe. — *Quadriques ayant un plan de centres.*

Nous allons démontrer que cette classification est au fond identique avec celle que nous avons donnée au paragraphe 115.

Montrons, par exemple, que, dans les deux classifications, la première classe comprend les mêmes quadriques.

Dans la première classification les quadriques de la première classe sont représentées par l'équation

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + h = 0,$$

et l'on voit immédiatement que toutes les surfaces de cette classe ont un centre unique à distance finie. Ces surfaces appartiennent donc à la première classe, dans la deuxième classification.

Réciproquement, toutes les quadriques de la première classe (*deuxième classification*) appartiennent à la première classe (*première classification*).

En effet, s'il en était autrement leur équation pourrait être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$\beta Y^2 + \gamma Z^2 + 2X = 0 \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 + h = 0$$
$$\alpha X^2 + 2Y = 0 \qquad \alpha X^2 + h = 0$$

et la surface considérée n'aurait pas *un centre unique à distance finie*.

Le même raisonnement s'applique à la comparaison des quadriques des autres classes, dans les deux classifications.

Ces classifications sont donc identiques.

Équation des quadriques de la première classe rapportées au centre.

130. Quand on prend pour origine le centre des quadriques de la première classe, leur équation se simplifie et devient

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B yz + 2B' zx + 2B'' xy + D_1 = 0.$$

Calcul de D_1. — On a

$$D_1 = f(x_0, y_0, z_0),$$

x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées du centre, coordonnées qui satisfont aux équations (1). Si l'on rend homogène la fonction $f(x, y, z)$, le théorème d'Euler donne l'identité

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} + t_0 f'_{t_0} = 2 f(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Lorsque, dans cette identité, on fait $t_0 = 1$, les coefficients de x_0, de y_0 et de z_0 s'annulent d'après les équations (1); quant au terme $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$, il devient égal à D_1.

En résumé, pour avoir D_1, il faudra éliminer x_0, y_0 et z_0 entre les équations

$$\frac{1}{2}f'_{x_0} = 0 \qquad \frac{1}{2}f'_{y_0} = 0 \qquad \frac{1}{2}f'_{z_0} = 0 \qquad \frac{1}{2}f'_{t_0} - D_1 = 0,$$

où l'on aura posé $t_0 = 1$, c'est-à-dire entre les équations

$$\begin{array}{l} A\ x_0 + B''y_0 + B'\,z_0 + C\ = 0 \\ B''x_0 + A'\,y_0 + B\ z_0 + C' = 0 \\ B'\,x_0 + B\ y_0 + A''z_0 + C'' = 0 \\ C\ x_0 + C'\,y_0 + C''z_0 + D - D_1 = \end{array}$$

On obtient ainsi la relation

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

131. Nous terminerons l'étude du centre par quelques remarques, souvent utiles, sur les quadriques n'ayant pas un centre unique à distance finie.

Théorème I. — *Quand l'équation du second degré représente un cylindre parabolique, les termes du second degré forment un carré parfait.*

En effet, on a alors identiquement (116)

$$f(x, y, z) \equiv \alpha P^2 + Q,$$

P et Q étant des fonctions linéaires des variables x, y, z.

Théorème II. — *Quand l'équation du second degré représente deux plans parallèles, l'ensemble des termes du second degré est, à un facteur constant près, le carré de l'ensemble des termes du premier degré.*

En effet on a alors identiquement (116)

$$f(x, y, z) \equiv \alpha P^2 + h \equiv \alpha(ax + by + cz + d)^2 + h$$

ou bien

$$f(x, y, z) \equiv \alpha(ax + by + cz)^2 + 2d\alpha(ax + by + cz) + g.$$

Cone des directions asymptotiques. — Cone asymptote.

132. Points à l'infini. — Lorsqu'on coupe une surface algébrique d'ordre m par une droite *quelconque,* l'équation aux abscisses des points d'intersection est du degré m ; il peut arriver que, pour certaines positions de la sécante, cette équation s'abaisse au degré $m - p$. Dans ce cas, la droite ne rencontre plus en réalité la surface qu'en $m - p$ points, mais on *convient* de dire qu'elle la rencontre en m points dont p se sont éloignés à l'infini.

Définition. — *Quand toute droite parallèle à une direction* D *rencontre une surface en des points dont l'un est rejeté à l'infini, on dit que la direction* D *est une direction asymptotique.*

Le cône qui a pour génératrices les parallèles, menées par un point de l'espace, à toutes les directions asymptotiques est appelé le cône des directions asymptotiques de la surface.

Théorème. — *On obtient l'équation du cône des directions asymptotiques d'une surface algébrique en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans son équation mise sous forme entière.*

Groupons ensemble les termes du même degré, l'équation de la surface prendra la forme

$$\varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots = 0.$$

Soient α, β, γ les coefficients de direction d'une droite D ; une parallèle à cette droite aura pour équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho.$$

Les valeurs de ρ qui correspondent aux points où cette parallèle rencontre la surface sont données par l'équation

$$\rho^m \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) + A\rho^{m-1} + \ldots = 0 ;$$

l'un des points de rencontre sera rejeté à l'infini si l'on a

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

On aura l'équation du cône des directions asymptotiques, le sommet étant à l'origine, en éliminant α, β, γ entre la relation précédente et les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

de la direction D.

L'équation de ce cône est donc

$$\varphi_m(x, y, z) = 0.$$

En appliquant le théorème précédent aux quadriques et prenant les équations de ces surfaces sous les formes réduites trouvées au paragraphe 116, on vérifie immédiatement les propriétés indiquées dans le tableau suivant :

Le cône des directions asymptotiques est	Réduit à un point	*Si la surface est un*	Ellipsoïde.
	Réel.		Hyperboloïde.
	Réduit à une droite.		Paraboloïde ou un cylindre elliptiques.
	Formé de deux plans sécants.		Paraboloïde ou un cylindre hyperboliques.
	Formé d'un plan double.		Cylindre parabolique ou formée de deux plans parallèles.

Cone asymptote.

133. Définition. — *On appelle cône asymptote d'un hyperboloïde le cône lieu des droites menées par le centre parallèlement aux directions asymptotiques.*

L'hyperboloïde étant rapporté à son centre a pour équation

$$\varphi(x, y, z) + \frac{H}{\Delta} = 0;$$

l'équation du cône asymptote est donc alors

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

On voit que chaque génératrice de ce cône rencontre la surface en deux points rejetés à l'infini; par suite, on peut regarder le cône asymptote de l'hyperboloïde comme *le lieu des droites passant par son centre et rencontrant la surface en deux points rejetés à l'infini.*

Théorème. — *Le cône asymptote est l'enveloppe des plans tangents à l'hyperboloïde dont le point de contact est rejeté à l'infini.*

Rapportons encore l'hyperboloïde à son centre, et soient

$$\frac{\alpha}{t} \quad \frac{\beta}{t} \quad \frac{\gamma}{t}$$

les coordonnées d'un point M de sa surface. L'équation du plan tangent en ce point sera

$$(3) \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2\frac{H}{\Delta}t = 0,$$

et l'on aura en outre la relation

$$(4) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{H}{\Delta}t^2 = 0.$$

Si l'on fait tendre t vers zéro, le point M s'éloignera à l'infini, sur la surface de l'hyperboloïde, dans la direction G définie par les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

D'un autre côté, les équations (3) et (4) deviennent

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0$$
$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

elles montrent que le plan tangent à l'hyperboloïde, dont le point de contact s'éloigne à l'infini, a pour position limite un plan tangent au cône asymptote en tous les points de la droite G.

Remarque. — Ces plans tangents limites sont aussi appelés les plans *asymptotes* de l'hyperboloïde.

Problème. — *Un hyperboloïde étant rapporté à des axes quelconques, trouver l'équation du cône asymptote.*

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de l'hyperboloïde, les axes de coordonnées étant quelconques.

Si l'on transporte l'origine au centre de la surface, son équation deviendra

$$\varphi(x, y, z) + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

Dans le nouveau système d'axes, le cône asymptote a pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

ou bien

$$\left(\varphi + \frac{H}{\Delta}\right) - \frac{H}{\Delta} = 0.$$

Maintenant, quand on revient aux axes primitifs, la fonction $\varphi + \frac{H}{\Delta}$ se change en f; donc dans le système d'axes primitifs l'équation du cône asymptote est

$$f(x, y, z) - \frac{H}{\Delta} = 0.$$

PLANS DIAMÉTRAUX.

134. Définition. — *On appelle surface diamétrale d'une surface donnée* S *le lieu des milieux des cordes de la surface* S *parallèles à une direction donnée.*

Nous allons démontrer que, dans les quadriques, les surfaces diamétrales sont des plans.

Ces surfaces diamétrales sont alors appelées *plans diamétraux.*

Soient oD une droite passant par l'origine, à laquelle toutes les cordes doivent être parallèles, et α, β, γ ses coefficients de direction. Prenons dans l'espace un point quelconque $P(x, y, z)$, les coordonnées X, Y, Z d'un point variable pris sur la corde passant par le point P seront données par les relations

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma}=\rho.$$

Soit maintenant

$$f(X, Y, Z)=0$$

l'équation de la quadrique, les valeurs de ρ qui correspondent aux points A et B où la corde rencontre la surface sont les racines de l'équation

$$f(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho,\ z+\gamma\rho)=0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$(5)\qquad \rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma)+\rho(\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z)+f(x, y, z)=0.$$

Nous supposerons d'abord que le coefficient $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ *de* ρ^2 *n'est pas nul.* — L'équation (5) donne alors pour ρ deux valeurs finies; par suite, les points A et B ainsi que le milieu M de la corde AB sont situés à distance finie, et l'on peut faire coïncider le point arbitraire P avec le milieu M. Cela étant, les racines de l'équation (5) seront égales et de signes contraires, et l'on aura la relation

$$(6)\qquad \alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y, z du point M milieu de la corde AB.

Cette relation étant du premier degré, on en conclut que, dans les quadriques, les surfaces diamétrales sont des plans.

Remarque. — On vérifie facilement que l'équation des plans diamétraux peut être mise sous la forme suivante :

$$x\frac{\varphi'_\alpha}{2}+y\frac{\varphi'_\beta}{2}+z\frac{\varphi'_\gamma}{2}+C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.$$

Discussion de l'équation des plans diamétraux.

135. Reprenons l'équation générale des plans diamétraux,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0 \tag{6}$$

et cherchons comment ces plans sont placés dans les quadriques des différentes classes.

1° *La quadrique est de la première classe.* — Dans ce cas, tous les plans diamétraux *passent par le centre,* car les coordonnées de ce point annulent à la fois f'_x, f'_y, f'_z.

Réciproquement, *tout plan passant par le centre est un plan diamétral ;* en effet, si l'on donne toutes les valeurs possibles aux coefficients de direction α, β, γ des cordes conjuguées d'un plan diamétral, l'équation (6) pourra représenter un plan quelconque passant par le centre.

Remarque. — *Les réciproques des théorèmes qui vont suivre se démontrant de la même manière, il nous suffira de les énoncer.*

2° *La quadrique est de la seconde classe.*— Dans ce cas, les trois plans du centre sont parallèles à une même droite D, et, par l'intersection de deux d'entre eux, on peut faire passer un plan parallèle au troisième ; on a donc identiquement

$$f'_z \equiv \lambda f'_x + \mu f'_y + \nu,$$

et l'équation du plan diamétral devient

$$(\alpha + \lambda\gamma) f'_x + (\beta + \mu\gamma) f'_y + \nu\gamma = 0.$$

Tous les plans diamétraux sont donc *parallèles à une même droite* D.

Réciproquement, *tout plan parallèle à la droite* D *est un plan diamétral.*

Remarque. — Dans le cas qui nous occupe, il peut arriver que l'un des plans du centre soit rejeté à l'infini ; le premier membre de son équation, f'_z par exemple, se réduit à une constante ν et l'équation du plan diamétral prend la forme

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \nu\gamma = 0.$$

La propriété que nous venons de démontrer subsiste encore.

3° *La quadrique est de la troisième classe.* — Dans ce cas les trois plans du centre passent par une même droite, et l'on a identiquement

$$f'_z \equiv \lambda f'_x + \mu f'_y.$$

L'équation du plan diamétral devient

$$(\alpha + \lambda\gamma) f'_x + (\beta + \mu\gamma) f'_y = 0\,;$$

tous les plans diamétraux *passent donc par la ligne des centres.*

Réciproquement, *tout plan passant par la ligne des centres est un plan diamétral.*

Remarque. — Dans le cas qui nous occupe, il peut arriver que l'un des plans du centre soit indéterminé, la propriété précédente subsiste encore. En effet la fonction f'_z, par exemple, est nulle identiquement, et l'équation du plan diamétral prend la forme

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0.$$

4° *La quadrique est de la quatrième classe.* — Dans ce cas, les trois plans du centre sont parallèles, et l'on a identiquement

$$f'_y \equiv \lambda f'_x + \mu$$
$$f'_z \equiv \lambda' f'_x + \mu'.$$

L'équation du plan diamétral devient

$$(\alpha + \lambda\beta + \lambda'\gamma) f'_x + \mu\beta + \mu'\gamma = 0\,;$$

tous les plans diamétraux *sont parallèles entre eux.*

Réciproquement, *tout plan parallèle aux trois plans du centre est un plan diamétral.*

Remarque. — Dans le cas qui nous occupe, il peut arriver que l'un des plans du centre soit indéterminé et un autre rejeté à l'infini; la propriété précédente subsiste encore. En effet la fonction f'_y, par exemple, étant nulle identiquement et la fonction f'_z se réduisant à une constante μ', l'équation du plan diamétral prend la forme

$$\alpha f'_x + \mu' \gamma = 0.$$

5° *La quadrique est de la cinquième classe.* — Dans ce cas, les trois plans du centre sont confondus, et l'on a identiquement

$$f'_y \equiv \lambda f'_x \qquad f'_z \equiv \lambda' f'_x.$$

L'équation du plan diamétral devient

$$(\alpha + \lambda\beta + \lambda'\gamma) f'_x = 0;$$

tous les plans diamétraux *sont confondus.*

Remarque. — Dans le cas qui nous occupe, il peut arriver que deux des plans du centre soient indéterminés; la propriété précédente subsiste encore. En effet les fonctions f'_y, f'_z, par exemple, étant nulles identiquement, l'équation du plan diamétral se réduit à

$$\alpha f'_x = 0.$$

Plans diamétraux singuliers.

136. Nous allons maintenant examiner le cas où les coefficients de direction de la droite oD satisfont à la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

c'est-à-dire le cas où oD est une direction asymptotique de la quadrique.

Dans cette hypothèse, l'équation (5) a une racine infinie, et l'un des deux points A ou B est rejeté à l'infini ; le milieu M de la corde AB est donc lui-même, en général, rejeté à l'infini, et l'on ne peut plus, comme dans la première hypothèse, faire coïncider le point P avec le point M.

Assujettissons les coordonnées du point P à satisfaire à l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation

$$x\frac{\varphi'_\alpha}{2} + y\frac{\varphi'_\beta}{2} + z\frac{\varphi'_\gamma}{2} + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, cette équation représentera un plan Q ; pour toutes les positions du point P dans le plan Q, le coefficient de ρ, dans l'équation (5), sera nul et les cordes menées parallèlement à oD rencontreront la surface en deux points rejetés à l'infini.

Maintenant il est facile de démontrer que toutes ces cordes sont situées dans le plan Q ; pour cela, il suffira de faire voir qu'elles sont parallèles à ce plan, car elles ont avec lui un point commun P.

Or on a identiquement

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma = 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) ;$$

mais, par hypothèse, le second membre de cette identité est nul, on a donc la relation

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma = 0,$$

qui exprime que la direction oD est parallèle au plan Q.

En résumé, *le plan* Q *est le lieu des droites parallèles à la direction asymptotique* oD *et rencontrant la quadrique en deux points rejetés à l'infini.*

Remarque. — Le plan Q coupe la quadrique suivant une conique C ; si le point P coïncide avec un point de cette conique, l'équation (5) devient une identité et la corde correspondante est située sur la surface.

Ainsi toutes les cordes menées par un point de la conique C parallèlement à la direction asymptotique oD sont situées sur la quadrique ; cette conique se compose donc, en général, de deux droites réelles ou imaginaires parallèles à oD.

Nous verrons plus loin que, pour certaines quadriques, l'une des droites et même les deux droites peuvent être rejetées à l'infini.

Dans tous les cas, le plan Q coupant la quadrique suivant deux droites dont le point de rencontre est à l'infini, est un plan *asymptote.*

137. Nous allons maintenant faire connaître les principales propriétés des plans diamétraux singuliers dans les différentes quadriques.

Nous remarquerons d'abord que l'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique et le cylindre elliptique n'ont pas, en réalité, de plans diamétraux singuliers, car ces surfaces n'admettent pas de cône asymptote.

1° *La surface est un hyperboloïde.* — Les plans diamétraux singuliers étant des plans asymptotes, on en conclut le théorème suivant (133) :

Théorème. — *Les plans diamétraux singuliers d'un hyperboloïde sont tangents au cône asymptote.*

2° *La surface est un paraboloïde hyperbolique.* — Dans ce qui va suivre nous représenterons par P et Q deux fonctions linéaires et homogènes des variables x, y, z ; et par P_1, Q_1 les valeurs que prennent ces fonctions quand on y remplace x, y, z respectivement par α, β, γ.

Nous poserons donc

$$P = ax + by + cz \qquad Q = a'x + b y + c'z$$

et

$$P_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma \qquad Q_1 = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

La quadrique étant un paraboloïde hyperbolique, la fonction φ est une différence de deux carrés que l'on pourra mettre sous la forme $2PQ$. L'équation générale des plans diamétraux singuliers est

$$PQ_1 + QP_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0, \quad (1)$$

et l'on a la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 2P_1Q_1 = 0.$$

On voit que les plans diamétraux singuliers forment deux séries ; l'équation des plans d'une série est

$$PQ_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \qquad \text{avec} \quad P_1 = 0,$$

et celle des plans de l'autre série est

$$QP_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \qquad \text{avec} \quad Q_1 = 0.$$

En combinant l'équation des plans de la première série, par exemple, avec celle de la surface

$$2PQ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

on obtient, pour représenter la section de la surface par ce plan, les deux équations du premier degré

$$\begin{gathered} PQ_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \\ \frac{2Q}{Q_1} = \frac{2Cx + 2C'y + 2C''z + D}{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}. \end{gathered}$$

La section est donc formée de deux droites dont l'une est rejetée à l'infini.

Théorème. — *Les plans diamétraux singuliers d'un paraboloïde hyperbolique forment deux séries; les plans de chaque série sont parallèles entre eux et coupent la surface suivant deux droites dont l'une est rejetée à l'infini.*

3° *La surface est un cylindre hyperbolique.* — L'équation du cylindre pouvant être mise sous la forme

$$PQ + h = 0,$$

celle des plans diamétraux singuliers sera

$$PQ_1 + QP_1 = 0;$$

et l'on aura la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = P_1 Q_1 = 0.$$

Il y a donc deux plans diamétraux singuliers déterminés ayant respectivement pour équation

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0;$$

ils coupent le cylindre suivant deux droites rejetées à l'infini.

Les plans diamétraux singuliers sont indéterminés si α, β, γ annulent à la fois P_1 et Q_1.

Théorème. — *Le cylindre hyperbolique admet deux plans diamétraux singuliers déterminés coupant chacun la surface suivant deux droites rejetées à l'infini, et des plans diamétraux singuliers indéterminés.*

4° *La surface est un cylindre parabolique.* — L'équation du cylindre pouvant être mise sous la forme

$$P^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

celle des plans diamétraux singuliers sera

$$PP_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0;$$

et l'on aura la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = P_1^2 = 0.$$

Les plans diamétraux singuliers sont donc, en général, rejetés à l'infini; ils sont indéterminés quand les coefficients de direction α, β, γ satisfont en outre à la relation

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

c'est-à-dire quand oD est parallèle aux génératrices du cylindre.

Théorème. — *Les plans diamétraux singuliers d'un cylindre parabolique sont rejetés à l'infini ou indéterminés.*

5° *La surface se compose de deux plans parallèles.* — L'équation de la surface pouvant être mise sous la forme

$$P^2 + h = 0,$$

celle des plans diamétraux singuliers sera

$$PP_1 = 0\,;$$

et l'on aura la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma,) = P_1^2 = 0.$$

Les plans diamétraux singuliers sont donc indéterminés.

Théorème. — *Les plans diamétraux singuliers d'une quadrique formée de deux plans parallèles sont indéterminés.*

138. Pour compléter l'étude des plans diamétraux singuliers, nous allons montrer qu'on peut les considérer, à un certain point de vue, comme des plans diamétraux.

Afin de faciliter la démonstration, nous prendrons le plan diamétral singulier Q comme plan des xoy, l'axe des x étant parallèle à la direction asymptotique correspondante.

Reprenons l'équation générale des quadriques

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{gathered}$$

L'axe des x coupant la surface en deux points rejetés à l'infini, on a

$$A = C = 0.$$

Maintenant la section de la surface par le plan xoy, qui a pour équations

$$z = 0 \qquad A'y^2 + 2B''xy + 2C'y + D = 0,$$

doit représenter deux droites parallèles à ox, les deux droites ou une seule d'entre elles pouvant d'ailleurs être rejetées à l'infini ; par suite B″ doit être nul et l'équation de la quadrique devient

$$f = A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Cela posé par un point $P(x, y, o)$ du plan xoy menons une corde parallèle a une direction oD faisant avec ox un angle ω, les coordonnées d'un point quelconque de cette corde seront données par les relations

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \rho.$$

Les valeurs de ρ qui correspondent aux points A et B où la corde rencontre la surface sont les racines de l'équation

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho(\beta f'_y + \gamma f'_z) + f(x, y, 0) = 0,$$

car on a ici

$$f'_z = 2B'z = 0.$$

Quant aux coordonnées X, Y, Z du milieu M de la corde AB elles sont fournies par les équations

$$\frac{X-x}{\alpha} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = -\frac{\beta f'_y + \gamma f'_z}{2\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}. \tag{7}$$

Si l'on fait tendre ω vers zéro, la corde devient parallèle à ox; par suite β et γ tendent vers zéro.

Assujettissons β et γ à satisfaire à la relation

$$\beta = m\gamma,$$

alors, si l'on fait tendre γ vers zéro, les équations (7) montrent que X, Y, Z ont respectivement pour limites

$$X = x - \frac{mf'_y + f'_z}{4B'} \qquad Y = y \qquad Z = 0;$$

comme m est quelconque, on voit que le point M a pour limite tel point que l'on voudra de la parallèle menée à ox par le point P.

Il résulte de là que chaque point du plan xoy peut être regardé comme le milieu d'une corde parallèle à ox et située dans ce plan; ce plan peut donc être considéré comme un plan diamétral.

CHAPITRE III

ÉQUATION EN S. — PLANS PRINCIPAUX.

Étude algébrique de l'équation en S.

139. La recherche des plans principaux d'une quadrique conduit à considérer l'équation du troisième degré

$$(1)\qquad \Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0\,;$$

nous commencerons par étudier cette équation que l'on appelle *l'équation en S*.

Cette étude a été faite par plusieurs géomètres ; nous allons exposer successivement les méthodes de Cauchy et de Jacobi qui permettent de montrer que l'équation en S a ses racines réelles et de séparer les racines (1).

Nous modifierons les analyses de ces deux géomètres, ce qui nous permettra d'en présenter les résultats par des considérations ayant entre elles une assez grande analogie.

Représentons par a, a', a'' les mineurs principaux du déterminant $\Delta(S)$ et par b, b', b'' ses mineurs secondaires, ce qui revient à poser

$$\begin{aligned} a &= (A' - S)(A'' - S) - B^2 & \qquad b &= B'B'' - B\,(A - S) \\ a' &= (A'' - S)(A - S) - B'^2 & b' &= B''B - B'\,(A' - S) \\ a'' &= (A - S)(A' - S) - B''^2 & b'' &= B\,B' - B''(A'' - S) \end{aligned}$$

(1) CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, t. III, p. 1 ; t. IV, p. 140. JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XII. — *Jacobi's Gesammelte Werke*, Bd. III, p. 190.

Nous aurons les identités suivantes, qui sont faciles à vérifier :

$$
(2)\quad \begin{cases} (A\ -S)\Delta(S)=a'a''-b^2 \\ (A'\ -S)\Delta(S)=a''a\ -b'^2 \\ (A''-S)\Delta(S)=a\,a'\ -b''^2 \end{cases}
\qquad
(3)\quad \begin{cases} B\,\Delta(S)=b'b''-b\,a \\ B'\Delta(S)=b''b\ -b'a' \\ B''\Delta(S)=b\,b'\ -b''a''. \end{cases}
$$

La considération des identités (2) nous conduira à la méthode de Cauchy, et celle des identités (3) à la méthode de Jacobi.

Méthode de Cauchy.

140. Nous distinguerons quatre cas.

Premier cas. $BB'B''\gtrless 0$. — Considérons l'équation $a=0$, c'est-à-dire l'équation

$$(A'-S)(A''-S)-B^2=0.$$

Si, dans la fonction a, on remplace successivement S par $-\infty$, A'', A' et $+\infty$, en supposant, pour fixer les idées, A'' moindre que A', les résultats auront les signes indiqués dans le tableau suivant :

$$
\begin{array}{ll} S & \left\{ \begin{array}{cccc} -\infty & A'' & A' & +\infty \\ + & -B^2 & -B^2 & +. \end{array} \right. \\ a & \end{array}
$$

On voit que l'équation $a=0$ a deux racines réelles, inégales et différentes des quantités A'' et A'. L'une des racines s_1 est comprise entre $-\infty$ et A'', l'autre s_2 entre A' et $+\infty$.

Supposons d'abord qu'aucune des racines s_1, s_2 n'annule b', ce qui revient à dire qu'aucune d'elles n'est égale à $A'-\dfrac{B''B}{B'}$.

Si, dans la seconde des identités (2), on remplace S successivement par s_1 et par s_2, le second membre se réduira à la quantité $-b'^2$ qui n'est pas nulle. Il résulte de là que les produits $(A'-s_1)\Delta(s_1)$, $(A'-s_2)\Delta(s_2)$ sont négatifs ; mais le facteur $A'-s_1$ est positif, et le facteur $A'-s_2$ est négatif, donc on aura

$$\Delta(s_1)<0 \qquad \Delta(s_2)>0.$$

Cela posé, dans la fonction $\Delta(S)$, remplaçons successivement S par $-\infty$, s_1, s_2, $+\infty$, les résultats auront les signes indiqués dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|cccc} S & -\infty & s_1 & s_2 & +\infty \\ \Delta(S) & + & - & + & -. \end{array}$$

On voit que l'équation $\Delta(S)=0$ a trois racines réelles S_1, S_2, S_3 et nécessairement inégales.

Supposons maintenant que s_1 annule b', la seconde des identités (2) montre que $\Delta(s_1)$ est nul.

L'équation $\Delta(S)=0$ admet donc la racine s_1 et comme elle a encore une racine S_3 comprise entre s_2 et $+\infty$, ses trois racines sont réelles.

Remarque. — Quand s_1 annule b', cette quantité annule anssi b''; cela résulte de la troisième des identités (2). On a donc

$$s_1 = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Maintenant en formant la dérivée de $\Delta(S)$, on trouve

$$\Delta'(S) = -(a + a' + a'');$$

d'où l'on déduit facilement

$$\Delta'(s_1) = \frac{B'^2 + B''^2}{B'B''}\, b(s_1).$$

Cette relation montre que, si $b(s_1)$ n'est pas nul, les trois racines S_1, S_2, S_3 sont distinctes.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand on a

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

la valeur commune de ces trois rapports est une racine double.

Deuxième cas. $B''=0$, $BB' \gtrless 0$. — L'équation en S devient

$$(A-S)(A'-S)(A''-S) - B^2(A-S) - B'^2(A'-S) = 0.$$

Si l'on suppose d'abord $A < A'$, on pourra former le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} S & \left\{ \begin{array}{cccc} -\infty & A & A' & +\infty \\ + & - & + & -. \end{array} \right. \\ \Delta(S) & \end{array}$$

Il montre que l'équation $\Delta(S) = 0$ a ses trois racines réelles et inégales.

Supposons maintenant $A = A'$; l'équation $\Delta(S) = 0$ se décompose en deux

$$A - S = 0 \qquad (A - S)(A'' - S) - B^2 - B'^2 = 0.$$

La première donne $S = A$, et l'on montrera, comme on l'a fait précédemment pour l'équation $a = o$, que la seconde équation a ses deux racines réelles, distinctes et qu'elles diffèrent de A. L'équation $\Delta(S) = 0$ a donc ses trois racines réelles et distinctes.

Ainsi, *quand un seul des coefficients* B, B', B'' *est nul, l'équation* $\Delta(S) = 0$ *a ses trois racines réelles et inégales.*

Troisième cas. $B' = B'' = 0, B \gtrless 0$. — L'équation $\Delta(S) = 0$ devient

$$(A - S)[(A' - S)(A'' - S) - B^2] = 0;$$

elle admet la racine A et les deux racines *distinctes* de l'équation

$$a = (A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0.$$

Cette équation a donc encore ses trois racines réelles et généralement distinctes.

Pour que l'équation ait une racine double, il faut que A annule a, ou que l'on ait

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0.$$

Quatrième cas. $B = B' = B'' = 0$. — L'équation $\Delta(S) = 0$ devient

$$(A - S)(A' - S)(A'' - S) = 0.$$

Quand les coefficients A, A', A'' sont inégaux, les trois racines de cette équation sont réelles et inégales ; quand deux de ces coefficients sont égaux, l'équation a une racine double; enfin ses trois racines sont égales, quand les trois coefficients A, A′, A″ sont égaux.

En résumé, *l'équation* $\Delta(S) = 0$ *a ses trois racines réelles et généralement distinctes.*

Elle a une racine double quand on a

$$BB'B'' \gtrless 0 \qquad A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

(1) *ou bien quand on a*

$$B' = B'' = 0 \qquad (A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0.$$

Elle a une racine triple quand on a

$$B = B' = B'' = 0 \qquad A = A' = A''.$$

Méthode de Jacobi.

141. On a encore à distinguer quatre cas; nous examinerons seulement l'hypothèse $BB'B'' \gtrless 0$, les trois autres cas se traitant comme dans la méthode de Cauchy.

Nous nous servirons ici des identités (3).

Désignons par λ, λ', λ'' les racines des équations

$$b = 0 \qquad b' = 0 \qquad b'' = 0,$$

c'est-à-dire posons

$$\lambda = A - \frac{B'B''}{B} \qquad \lambda' = A' - \frac{B''B}{B'} \qquad \lambda'' = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

nous aurons

$$b = B(S - \lambda) \qquad b' = B'(S - \lambda') \qquad b'' = B''(S - \lambda'').$$

Remplaçons S par λ dans la première des identités (3), par λ

dans la deuxième et par λ'' dans la troisième, il en résultera

$$\Delta(\lambda) = \frac{B'B''}{B}(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')$$

$$\Delta(\lambda') = \frac{B''B}{B'}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda)$$

$$\Delta(\lambda'') = \frac{BB'}{B''}(\lambda'' - \lambda)(\lambda'' - \lambda').$$

Supposons d'abord les trois quantités $\lambda, \lambda', \lambda''$ inégales, et soit $\lambda < \lambda' < \lambda''$. Deux cas peuvent se présenter.

1° $BB'B'' > 0$. — Dans la fonction $\Delta(S)$ remplaçons successivement S par $-\infty, \lambda, \lambda', \lambda'', +\infty$, les résultats de ces substitutions auront les signes indiqués dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} S & \left\{\begin{array}{lllll} -\infty & \lambda & \lambda' & \lambda'' & +\infty \\ + & + & - & + & -. \end{array}\right. \\ \Delta(S) & \end{array}$$

Il montre que l'équation $\Delta(S) = 0$ a ses trois racines réelles, inégales et séparées par la suite

$$\lambda \qquad \lambda' \qquad \lambda'' \qquad +\infty.$$

2° $BB'B'' < 0$. — Le tableau précédent est alors remplacé par le suivant :

$$\begin{array}{ll} S & \left\{\begin{array}{lllll} -\infty & \lambda & \lambda' & \lambda'' & +\infty \\ + & - & + & - & -. \end{array}\right. \\ \Delta(S) & \end{array}$$

Il montre que l'équation $\Delta(S) = 0$ a ses trois racines réelles, inégales et séparées par la suite

$$-\infty \qquad \lambda \qquad \lambda' \qquad \lambda''.$$

Supposons maintenant que deux des trois quantités $\lambda, \lambda', \lambda''$ soient égales ; soit, par exemple, $\lambda' = \lambda''$.

Pour $S = \lambda' \pm \varepsilon$ la première des identités (3) donne

$$\Delta(\lambda' \pm \varepsilon) = \pm \frac{B}{B'B''}(B'^2 + B''^2)(\lambda' - \lambda)\varepsilon + h\varepsilon^2 + l\varepsilon^3.$$

On peut prendre le nombre positif ε assez petit pour que $\Delta(\lambda' \pm \varepsilon)$ ait le signe de son premier terme ; donc les racines de l'équation $\Delta(S) = 0$ sont séparées par l'une des deux suites

$$\begin{array}{llll} \lambda & \lambda' - \varepsilon & \lambda' + \varepsilon & +\infty \\ -\infty & \lambda & \lambda' - \varepsilon & \lambda' + \varepsilon \end{array}$$

suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif. Elles sont réelles et distinctes; mais l'une d'elles est égale à λ', car ε est aussi petit que l'on voudra.

Supposons enfin $\lambda = \lambda' = \lambda''$; chacune des identités (3) donne

$$\Delta(S) = -(S-\lambda)^2\left(S - \lambda - \frac{B'B''}{B} - \frac{B''B}{B'} - \frac{BB'}{B''}\right).$$

L'équation $\Delta(S) = 0$ a une racine double $S = \lambda$, et l'on a

$$\lambda = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

142. L'étude complète des méthodes de Cauchy et de Jacobi nous a fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en S ait des racines multiples; nous allons traiter directement cette question et démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour qu'un nombre σ soit racine double de l'équation en* S, *il faut et il suffit que ce nombre annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant* $\Delta(S)$, *sans annuler tous ses éléments.*

1° *Ces conditions sont nécessaires.* — En effet, σ étant supposé racine double annule d'abord $\Delta(S)$ et par suite, d'après les identités (2), satisfait aux équations

$$a'a'' = b^2 \qquad a''a = b'^2 \qquad aa' = b''^2.$$

On conclut de là que, pour $S = \sigma$, les trois mineurs principaux a, a', a'' sont *nuls ou de même signe.*

Maintenant σ doit annuler aussi la dérivée $\Delta'(S)$, c'est-à-dire la somme

$$a + a' + a'';$$

donc les trois mineurs principaux sont nuls pour $S = \sigma$, et par suite aussi les trois mineurs secondaires b, b', b''.

Je dis maintenant que le nombre σ n'annule pas tous les éléments du déterminant $\Delta(S)$; car, s'il en était ainsi, la dérivée seconde

$$\Delta''(S) = 2(A - S + A' - S + A'' - S)$$

s'annulerait et σ serait racine triple.

2° *Les conditions sont suffisantes.* — En effet, tous les mineurs du premier ordre étant nuls pour $S=\sigma$, on a à la fois

$$\Delta(\sigma)=0 \qquad \Delta'(\sigma)=0.$$

D'un autre côté, des égalités

$$(A'-\sigma)(A''-\sigma)=B^2 \quad (A''-\sigma)(A-\sigma)=B'^2 \quad (A-\sigma)(A'-\sigma)=B''^2,$$

il résulte que les quantités $A-\sigma$, $A'-\sigma$, $A''-\sigma$ sont *nulles ou de même signe.* Elles ne sont pas toutes nulles, car, s'il en était ainsi, on aurait $B=B'=B''=0$, et tous les éléments du déterminant $\Delta(S)$ seraient nuls, ce qui est contre l'hypothèse ; on a donc $\Delta''(\sigma)\gtrless 0$, et σ est seulement racine double.

Développement des conditions précédentes. — On doit avoir, à la fois,

(4) $$a=0 \qquad a'=0 \qquad a''=0$$

(5) $$b=0 \qquad b'=0 \qquad b''=0.$$

Nous distinguerons quatre cas.

Premier cas. $BB'B''\gtrless 0$. — Des équations (5) on tire

$$S=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''};$$

comme ces valeurs de S satisfont aux équations (4), les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en S ait une racine double sont

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

Deuxième cas. $B''=0$, $BB'\gtrless 0$. — La fonction b'' se réduisant à BB' n'est pas nulle ; donc l'équation en S ne peut pas alors avoir de racines multiples.

Troisième cas. $B'=B''=0$, $B\gtrless 0$. — Les équations $b'=0$, $b''=0$ sont satisfaites d'elles-mêmes, et l'équation $b=0$

donne $S = A$; en portant cette valeur dans les équations (4), on trouve la relation de condition

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0.$$

Quatrième cas. $B = B' = B'' = 0$. — Les équations (5) sont satisfaites identiquement ; quant aux équations (4), elles exigent que deux des coefficients A, A', A'' soient égaux.

Théorème II. — *Pour qu'un nombre* σ *soit racine triple de l'équation en* S, *il faut et il suffit que ce nombre annule tous les éléments du déterminant* $\Delta(S)$.

1° *Ces conditions sont nécessaires.* — En effet, d'après le théorème I, σ doit annuler a, a', a'', et par suite satisfaire aux égalités

$$(A' - \sigma)(A'' - \sigma) = B^2 \quad (A'' - \sigma)(A - \sigma) = B'^2 \quad (A - \sigma)(A' - \sigma) = B''^2.$$

On voit que les trois quantités $A - \sigma$, $A' - \sigma$, $A'' - \sigma$ sont *nulles ou de même signe ;* elles sont nécessairement nulles, car on doit avoir

$$\Delta''(\sigma) = 2(A - \sigma + A' - \sigma + A'' - \sigma) = 0.$$

Les quantités $A - \sigma$, $A' - \sigma$, $A'' - \sigma$ étant nulles, il en est de même de B, B', B''.

2° *Ces conditions sont suffisantes.* — En effet, quand elles sont remplies, on a à la fois,

$$\Delta(\sigma) = 0 \qquad \Delta'(\sigma) = 0 \qquad \Delta''(\sigma) = 0.$$

Corollaire. — *L'équation en* S *ne peut pas avoir trois racines nulles.* — En effet on aurait alors à la fois

$$A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0,$$

et l'équation de la surface ne serait plus du second degré.

Remarque. — Cette propriété peut être établie directement.

L'équation en S développée est

$$S^3 - MS^2 + PS - \Delta = 0$$

en posant

$$A + A' + A'' = M$$

$$A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2 = P.$$

Pour que cette équation admette trois racines nulles, il faut et il suffit que l'on ait

$$M = 0 \qquad P = 0 \qquad \Delta = 0.$$

Si du carré du premier membre de la première égalité on retranche le double du premier membre de la seconde, on obtient la relation

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0.$$

On devrait donc avoir

$$A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0.$$

PLANS PRINCIPAUX.

143. Définition. — *On appelle plan principal d'une quadrique un plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales.*

Ces cordes sont dites *principales.*

Dans ce qui suit nous supposerons les axes de coordonnées *rectangulaires.*

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction oD, les équations de cette direction et celle du plan diamétral correspondant seront respectivement

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

et

$$(6) \qquad x\frac{\varphi'_\alpha}{2} + y\frac{\varphi'_\beta}{2} + z\frac{\varphi'_\gamma}{2} + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Le plan diamétral sera principal s'il est perpendiculaire à la direction oD, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_\gamma}{\gamma}.$$

Désignons par S la valeur commune des trois rapports précédents, le problème sera ramené à la résolution des équations suivantes :

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\varphi'_{\alpha} - S\alpha = 0 \qquad \frac{1}{2}\varphi'_{\beta} - S\beta = 0 \qquad \frac{1}{2}\varphi'_{\gamma} - S\gamma = 0$$

$$(8) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

où les inconnues sont S, α, β, γ.

Les équations (7) développées deviennent

$$(7') \qquad \begin{aligned} &(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0 \\ &B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0 \\ &B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ces équations linéaires et homogènes par rapport à α, β, γ doivent être vérifiées par des valeurs de ces inconnues dont l'une au moins n'est pas nulle, car la somme de leurs carrés est égale à l'unité ; le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues doit donc être nul, et l'on a pour déterminer l'inconnue auxiliaire S l'équation

$$\begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation précédente n'est pas autre chose que l'équation $\Delta(S) = 0$ étudiée au commencement de ce chapitre.

Il nous reste maintenant à faire l'étude du plan principal et de la direction principale en tenant compte de la nature des racines de l'équation en S.

Remarquons auparavant qu'en vertu des relations (7) l'équation (6) du plan principal prend la forme

$$(9) \qquad S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Étude du plan principal et de la direction principale

144. Théorème I. — *A une racine simple de l'équation en* S *correspondent une direction principale déterminée et un seul plan principal.*

En effet, cette racine simple n'annulant pas tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, les équations (7') se réduisent à *deux distinctes* et donnent des valeurs uniques et déterminées pour les rapports de deux des quantités α, β, γ à la troisième.

A cette racine simple correspondent donc une seule direction principale et un seul plan principal.

Théorème II. — *A une racine double de l'équation en* S *correspondent une infinité de directions principales parallèles à un même plan et une infinité de plans principaux passant par une même droite.*

En effet, cette racine double annulant tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, les équations (7') se réduisent à une.

Si l'on suppose d'abord que $BB'B''$ n'est pas nul, la racine double a pour valeur

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

et les équations (7') se réduisent à l'équation unique

$$\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{B'} + \frac{\gamma}{B''} = 0;$$

à la racine double correspond donc une infinité de directions principales parallèles au plan qui a pour équation

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Si l'on suppose ensuite $B' = B'' = 0$, la racine double a pour valeur $S = A$, et l'on a en outre la relation

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0.$$

La première des équations (7') devient une identité, et les deux autres se réduisent à l'équation unique

$$(A' - A)\beta + B\gamma = 0.$$

A la racine double $S = A$ correspond encore une infinité de directions principales parallèles au plan qui a pour équation

$$(A' - A)y + Bz = 0.$$

Dans les deux hypothèses l'équation du plan principal prend la forme

$$P + \lambda Q = 0,$$

P et Q étant deux fonctions linéaires déterminées et λ un paramètre arbitraire ; à une racine double correspond donc une infinité de plans principaux passant par une même droite.

Théorème III. — *A une racine triple de l'équation en* S *correspondent comme directions principales toutes les directions de l'espace et une infinité de plans principaux passant par un même point.*

En effet, la racine triple annulant tous les éléments du déterminant $\Delta(S)$, les équations (7') se réduisent à des identités ; toute direction de l'espace peut donc être considérée comme principale.

D'un autre côté, l'équation (9) du plan principal contient deux paramètres arbitraires $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ au premier degré ; il y a donc une infinité de plans principaux passant par un même point ayant pour coordonnées

$$x = -\frac{C}{S} \qquad y = -\frac{C'}{S} \qquad z = -\frac{C''}{S}.$$

La quadrique est alors une sphère.

Théorème IV. — *Les directions principales qui correspondent à deux racines différentes de l'équation en* S *sont perpendiculaires entre elles.*

Soient en effet (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les cosinus des angles que font avec les axes de coordonnées les directions principales qui correspondent aux racines *différentes* S, S'. On a, en vertu des équations (7), les relations

$$S\alpha = \frac{1}{2}\varphi'_\alpha \qquad S'\alpha' = \frac{1}{2}\varphi'_{\alpha'}$$
$$S\beta = \frac{1}{2}\varphi'_\beta \qquad S'\beta' = \frac{1}{2}\varphi'_{\beta'}$$
$$S\gamma = \frac{1}{2}\varphi'_\gamma \qquad S'\gamma' = \frac{1}{2}\varphi'_{\gamma'}$$

d'où l'on déduit

$$(S - S')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \frac{1}{2}\left(\alpha'\varphi'_\alpha + \beta'\varphi'_\beta + \gamma'\varphi'_\gamma - \alpha\varphi'_{\alpha'} - \beta\varphi'_{\beta'} - \gamma\varphi'_{\gamma'}\right)$$

Le second membre de la dernière relation est nul, car la fonction φ étant homogène et du second degré, on a

$$\alpha'\varphi'_\alpha + \beta'\varphi'_\beta + \gamma'\varphi'_\gamma = \alpha\varphi'_{\alpha'} + \beta\varphi'_{\beta'} + \gamma\varphi'_{\gamma'}.$$

Le premier membre de la même relation est donc également nul, et comme le facteur $S - S'$ est différent de zéro, il en résulte

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0;$$

les deux directions principales considérées sont donc perpendiculaires entre elles.

145. Des théorèmes précédents on déduit un corollaire important.

Corollaire. — *Dans toute quadrique il y a toujours au moins trois directions principales formant un trièdre trirectangle.*

En effet, si l'équation en S a ses trois racines inégales, les trois directions principales qui leur correspondent sont perpendiculaires deux à deux.

Si l'équation en S a une racine double et une racine simple, les directions principales, en nombre infini, qui correspondent à la racine double sont dans un plan P perpendiculaire à la direction principale D qui correspond à la racine simple. On prendra pour arêtes du trièdre trirectangle la direction D et deux droites rectangulaires parallèles au plan P.

Si l'équation en S a une racine triple, on pourra prendre pour arêtes du trièdre trirectangle trois directions quelconques perpendiculaires deux à deux.

Remarque. — Pour compléter l'étude des plans principaux, il reste à examiner ce qui arrive quand l'équation en S a une ou deux racines nulles.

Tout ce que nous avons dit des directions principales reste vrai dans cette hypothèse, mais les plans principaux présentent des particularités qui méritent d'être signalées.

Nous distinguerons deux cas principaux :

1° *La racine nulle est simple.* — L'équation (9) du plan principal se réduit à

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Supposons d'abord que la quantité $C\alpha + C'\beta + C''\gamma$ ne soit pas nulle, le plan principal est alors rejeté à l'infini ; d'un autre côté, les équations (7'), où l'on doit faire $S = 0$, deviennent

$$(10) \qquad \begin{aligned} A\,\alpha + B''\beta + B'\,\gamma &= 0 \\ B''\alpha + A'\beta + B\,\gamma &= 0 \\ B'\alpha + B\,\beta + A''\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Ces relations expriment que les trois plans du centre, transportés à l'origine, passent par une même droite ; la quadrique appartient donc à la deuxième classe ; elle est un **Paraboloïde.**

Supposons maintenant que l'on ait

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

le plan principal est alors indéterminé.

D'un autre côté, la relation précédente jointe aux relations (10) exprime que les trois plans du centre passent par une même droite ; la quadrique appartient donc à la troisième classe, elle est un **cylindre elliptique ou hyperbolique.**

2° *La racine nulle est double.* — Dans ce cas les équations (10) se réduisent à une.

Supposons d'abord que *toutes* les valeurs de α, β, γ qui satisfont aux équations (10) n'annulent pas la quantité $C\alpha + C'\beta + C''\gamma$, le plan principal est alors rejeté à l'infini.

D'un autre côté, les équations (10) se réduisant à une, les trois plans du centre transportés à l'origine se confondent ; la quadrique appartient donc à la quatrième classe, elle est un **cylindre parabolique.**

Remarque. — Parmi les systèmes de valeurs de α, β, γ qui satisfont aux équations (10), il y en a un pour lequel on a

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

le plan principal correspondant est indéterminé.

Supposons maintenant que pour *toutes* les valeurs de α, β, γ satisfaisant aux équations (10) on ait

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0, \tag{11}$$

le plan principal est alors indéterminé.

D'un autre côté, les équations (10) et (11) se réduisant à *une seule*, la quadrique a un plan de centres, elle appartient à la cinquième classe.

CHAPITRE IV

DIAMÈTRES ET AXES.

146. Définition. — *On appelle diamètre d'une quadrique la droite intersection de deux plans diamétraux.*

Il résulte de cette définition qu'un diamètre est représenté par les équations

$$(1) \qquad \begin{aligned} m f'_x + n f'_y + p f'_z &= 0 \\ m_1 f'_x + n_1 f'_y + p_1 f'_z &= 0 \end{aligned}$$

de deux plans diamétraux, considérées simultanément, l'équation de la quadrique étant

$$f(x, y, z) = 0.$$

Des équations (1) on tire

$$\frac{f'_x}{np_1 - pn_1} = \frac{f'_y}{pm_1 - mp_1} = \frac{f'_z}{mn_1 - nm_1};$$

les dénominateurs des trois rapports précédents représentent des constantes arbitraires α, β, γ; donc les équations d'un diamètre quelconque d'une quadrique peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f_z}{\gamma}.$$

Si l'on se reporte aux propriétés des plans diamétraux dans les différentes classes de quadriques, on en conclut immédiatement les propriétés suivantes :

1° *Dans les quadriques de la première classe tous les diamètres passent par le centre.*

2° *Dans les quadriques de la deuxième classe tous les diamètres sont parallèles à une même droite.*

3° *Dans les quadriques de la troisième classe tous les diamètres sont confondus avec la ligne des centres.*

4° *Dans les quadriques de la quatrième classe tous les diamètres sont rejetés à l'infini.*

5° *Dans les quadriques de la cinquième classe toute droite située dans le plan des centres est un diamètre.*

147. Théorème I. — *Le lieu des centres des sections d'une quadrique par des plans parallèles entre eux est un diamètre.*

Remarque. — On prend quelquefois cette propriété comme définition des diamètres.

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la quadrique et,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + h = 0 \tag{2}$$

celle d'un plan sécant, dans laquelle α, β, γ sont des constantes et h un paramètre variable.

Si, dans l'équation de la surface, on remplace z par sa valeur

$$z = -\frac{\alpha x + \beta y + h}{\gamma} \tag{3}$$

tirée de l'équation du plan, on obtient l'équation de la projection de la section sur le plan des xy. Maintenant, le centre de cette projection est évidemment la projection du centre de la section ; il résulte de là que, pour déterminer ce centre, il suffira de joindre à l'équation (2) les équations obtenues en égalant à zéro les dérivées par rapport à x et à y de l'équation de la section projetée.

On peut obtenir ces dérivées sans faire la substitution dont nous avons parlé ; il suffit d'appliquer le théorème des fonctions composées à la fonction $f(x, y, z)$ en regardant z comme une fonction de x et de y définie par la relation (3).

On obtient ainsi les deux équations

$$f'_x - \frac{\alpha}{\gamma} f'_z = 0 \qquad f'_y - \frac{\beta}{\gamma} f'_z = 0. \tag{4}$$

Pour avoir l'équation du lieu des centres des sections, il faudrait éliminer h entre les équations (4) et (2) ; comme les équations (4) ne contiennent pas h, elles représentent le lieu des centres.

Ce lieu est donc un diamètre D défini par les équations

$$\frac{f'_x}{\alpha}=\frac{f'_y}{\beta}=\frac{f'_z}{\gamma}.$$

Nous dirons que le diamètre D est *conjugué* du plan P qui a pour équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0.$$

Remarque I. — Quand le plan P est défini par deux droites ayant pour équations

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p} \qquad \frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1},$$

le diamètre D peut être représenté par les équations

$$(5) \qquad \begin{aligned} m\, f'_x+n\, f'_y+p\, f'_z&=0 \\ m_1 f'_x+n_1 f'_y+p_1 f'_z&=0 \end{aligned}$$

des deux plans diamétraux partageant en deux parties égales les cordes parallèles à ces deux droites.

En effet, l'équation du plan P est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0,$$

et celles du diamètre D sont

$$\frac{f'_x}{np_1-pn_1}=\frac{f'_y}{pm_1-mp_1}=\frac{f'_z}{mn_1-nm_1};$$

de ces équations on tire facilement les équations (5).

Remarque II. — *Quand la surface a un centre unique, le diamètre* D *est parallèle aux cordes que le plan diamétral parallèle au plan* P *divise en deux parties égales.*

En effet, soient (a, b, c) les coefficients de direction de ces cordes, le plan diamétral aura pour équation

$$x\frac{\varphi'_a}{2}+y\frac{\varphi'_b}{2}+z\frac{\varphi'_c}{2}+Ca+C'b+C''c=0.$$

Comme il est parallèle au plan P, on aura les relations

$$(6)\qquad \frac{\varphi'_a}{\alpha}=\frac{\varphi'_b}{\beta}=\frac{\varphi'_c}{\gamma};$$

elles expriment que le point (a, b, c) est situé sur la droite ayant pour équations

$$\frac{\varphi'_x}{\alpha}=\frac{\varphi'_y}{\beta}=\frac{\varphi'_z}{\gamma},$$

c'est-à-dire sur le diamètre D transporté à l'origine : ce diamètre est donc bien parallèle à la direction définie par les coefficients de direction a, b, c.

148. Droites et plan conjugués en direction. — *On dit qu'une droite* D *et un plan* P *sont conjugués en direction quand les cordes que le plan diamétral parallèle au plan* P *divise en deux parties égales sont parallèles à* D.

Soient

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

et

$$ux+vy+wz=0$$

les équations qui définissent les directions de la droite D et du plan P ; la relation qui exprime que cette droite et ce plan ont des directions conjuguées est

$$\frac{\varphi'_\alpha}{u}=\frac{\varphi'_\beta}{v}=\frac{\varphi'_\gamma}{w}.$$

En effet, les cordes que le plan diamétral parallèle au plan P divise en deux parties égales sont définies par les équations

$$\frac{\varphi'_x}{u}=\frac{\varphi'_y}{v}=\frac{\varphi'_z}{w};$$

elles seront parallèles à la droite D si les équations précédentes sont satisfaites pour $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, c'est-à-dire si l'on a

$$(7)\qquad \frac{\varphi'_\alpha}{u}=\frac{\varphi'_\beta}{v}=\frac{\varphi'_\gamma}{w}.$$

Théorème II. — *Si, par le sommet du cône asymptote d'une quadrique, on mène une droite* D *et un plan* P *conjugués en direction, le point d où la droite* D *rencontre le plan* Q *d'une conique* Γ *située sur ce cône est le pôle, par rapport à cette conique, de la droite p intersection des plans* P *et* Q.

Soient en effet

$$\varphi(X, Y, Z)=0$$

l'équation du cône asymptote de la quadrique, l'origine étant au sommet, et

$$\frac{X}{\alpha}=\frac{Y}{\beta}=\frac{Z}{\gamma}$$
$$uX+vY+wZ=0$$

celles de la droite D et du plan P.

Les directions des axes de coordonnées étant quelconques, on peut supposer que l'on a pris le plan des xy parallèle au plan Q ; soient $o'x'$, $o'y'$ les traces des plans zox, zoy sur le plan Q.

Par rapport aux axes $o'x'$, $o'y'$, les coordonnées du point d sont

$$x=\frac{\alpha}{\gamma}h \qquad y=\frac{\beta}{\gamma}h,$$

et l'équation de la droite p et celle de la conique Γ sont respectivement

$$uX+vY+wh=0$$
$$\varphi(X, Y, h)=0.$$

La polaire du point d par rapport à la conique Γ a pour équation

$$X\varphi'_x(x, y, h) + Y\varphi'_y(x, y, h) + h\varphi'_h(x, y, h) = 0.$$

Si, après avoir remplacé x, y par leurs valeurs, on multiplie les deux membres de cette équation par $\frac{\gamma}{h}$, elle devient

$$X\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) + Y\varphi'_\beta(\alpha, \beta, \gamma) + h\varphi'_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ou bien

$$uX + vY + wh = 0$$

en tenant compte des relations (7). La polaire du point d coïncide donc avec la droite p.

149. Plans diamétraux conjugués. — *On dit que deux plans diamétraux d'une quadrique sont conjugués quand les cordes que l'un d'eux divise en deux parties égales sont parallèles à l'autre.*

Pour établir la relation exprimant que deux plans diamétraux d'une quadrique sont conjugués, nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — *La quadrique appartient à la première classe.* — En prenant son centre pour origine, l'équation de la quadrique sera

$$\varphi(x, y, z) + D = 0,$$

et les équations

$$ux + vy + wz = 0 \qquad u'x + v'y + w'z = 0$$

représenteront deux plans diamétraux P, P'.

La direction des cordes que le premier plan P divise en deux parties égales est définie par les équations

$$\frac{\varphi'_x}{u} = \frac{\varphi'_y}{v} = \frac{\varphi'_z}{w}.$$

Il faut exprimer que ces cordes sont parallèles au plan P', ou bien que la droite représentée par les équations précédentes est située dans le plan P'.

Pour cela il suffira d'éliminer x, y, z et λ entre les quatre équations

$$\tfrac{1}{2}\varphi'_x + \lambda u = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'_y + \lambda v = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'_z + \lambda w = 0$$
$$u'x + v'y + w'z = 0,$$

ce qui donne la relation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u' & v' & w' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation dont nous désignerons le premier membre par Φ est symétrique par rapport à (u, v, w), (u', v', w') ; donc chacun des plans P, P′ est parallèle aux cordes que l'autre divise en deux parties égales.

En désignant par a, a', a'' les mineurs principaux du déterminant Δ et par b, b', b'' ses mineurs secondaires, la relation $\Phi = 0$ développée prend la forme

$$auu' + a'vv' + a''ww' + b(wv' + vw') + b'(uw' + wu') + b''(vu' + uv') = 0.$$

Deuxième cas. — *La quadrique appartient à la deuxième classe.* — Dans ce cas, la relation $\Phi = 0$ n'exprime plus que les plans P et P′ sont conjugués, mais que l'un d'eux est un plan diamétral.

En effet, on sait que le déterminant Δ est nul sans que tous les mineurs du premier ordre le soient ; il en résulte que tous les mineurs principaux ne sont pas nuls, car les identités

$$(8) \qquad \begin{aligned} A\,\Delta &= a'a'' - b^2 & B\,\Delta &= b'b'' - ab \\ A'\,\Delta &= a''a - b'^2 & B'\,\Delta &= b''b - a'b' \\ A''\,\Delta &= aa' - b''^2 & B''\,\Delta &= bb' - a''b'' \end{aligned}$$

montrent que les égalités $a = a' = a'' = 0$ entraînent les suivantes : $b = b' = b'' = 0$.

Soit, par exemple, $a \gtrless 0$. On a

$$a\Phi = (au + b''v + b'w)(au' + b''v' + b'w')$$
$$+ (aa' - b''^2)vv' + (aa'' - b'^2)ww' + (ab - b'b'')(wv' + vw'),$$

ou bien

$$a\Phi = (au + b''v + b'w)(au' + b''v' + b'w'),$$

car les coefficients $aa' - b''^2$, $aa'' - b'^2$, $ab - b'b''$ sont nuls en vertu des identités (8).

L'équation $\Phi = 0$ se sépare donc en deux

$$\begin{aligned} au + b''v + b'w &= 0 \\ au' + b''v' + b'w' &= 0. \end{aligned}$$

Ces dernières expriment que les plans P ou P' sont parallèles à la droite ayant pour équations

$$\varphi'_y = 0 \qquad \varphi'_z = 0,$$

c'est-à-dire que l'un de ces plans est diamétral.

Pour trouver, dans l'hypothèse considérée, la relation qui exprime que deux plans diamétraux sont conjugués, remarquons que l'équation de la quadrique est alors de la forme

$$X^2 + \varepsilon Y^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et

$$X = lx + my + nz \qquad Y = l'x + m'y + n'z.$$

Les équations

$$uX + vY + h = 0 \qquad u'X + v'Y + h' = 0$$

représenteront deux plans diamétraux quelconques P, P'.

Soient α, β, γ les coefficients de direction des cordes que le plan P divise en deux parties égales, ce plan sera aussi représenté par l'équation

$$XX_1 + \varepsilon YY_1 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$$

en posant

$$X_1 = l\alpha + m\beta + n\gamma \qquad Y_1 = l'\alpha + m'\beta + n'\gamma;$$

on a donc les relations

$$\frac{X_1}{u}=\frac{\varepsilon Y_1}{v}=\frac{C\alpha+C'\beta+C''\gamma}{h}.$$

Les cordes devant être parallèles au plan P′, on a aussi

$$u'X_1+v'Y_1=0\,;$$

la relation cherchée est donc

$$\varepsilon uu'+vv'=0.$$

Remarque. — Cette relation convient aussi aux surfaces de la troisième classe ; quant aux surfaces de la quatrième et de la cinquième classe, elles n'ont pas de plans diamétraux conjugués, car pour les premières tous les plans diamétraux sont parallèles, et pour les deuxièmes les plans diamétraux se confondent.

Théorème III. — *Deux plans diamétraux conjugués* P, P′ *d'une quadrique à centre déterminent sur un plan quelconque* Q *deux droites* p, p' *qui sont conjuguées par rapport à la section* Γ *du cône asymptote de la surface par le plan* Q.

Le centre étant pris pour origine, les équations du cône asymptote de la quadrique et celles des deux plans P, P′ seront respectivement

$$\varphi(x, y, z)=0$$
$$ux+vy+wz=0 \qquad u'x+v'y+w'z=0.$$

On peut supposer que le plan des xy est parallèle au plan Q, alors les équations de la conique Γ et des droites p, p' rapportées aux traces $o'x'$, $o'y'$ du plan Q sur les plans zox, zoy seront

$$\varphi(x, y, h)=0$$
$$ux+vy+wh=0 \qquad u'x+v'y+w'h=0.$$

La relation exprimant que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique Γ est (G. P. 250).

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B'h & u \\ B'' & A' & Bh & v \\ B'h & Bh & A''h^2 & wh \\ u' & v' & w'h & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ou bien $\Phi=0$; le théorème est donc démontré.

150. Droites conjuguées en direction. — *On dit que deux droites* D, D' *ont des directions conjuguées quand l'une d'elles est parallèle au plan diamétral divisant en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Soient

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'}$$

les équations des droites D, D', la relation qui exprime que ces droites ont des directions conjuguées est

$$(9) \qquad \alpha'\varphi'_\alpha+\beta'\varphi'_\beta+\gamma'\varphi'_\gamma=0.$$

En effet, le plan diamétral divisant en parties égales les cordes parallèles à D, transporté à l'origine, a pour équation

$$x\varphi'_\alpha+y\varphi'_\beta+z\varphi'_\gamma=0\,;$$

en exprimant que ce plan est parallèle à D' on obtient la relation (9).

Remarque. — Cette relation pouvant être écrite de la manière suivante :

$$\alpha\varphi'_{\alpha'}+\beta\varphi'_{\beta'}+\gamma\varphi'_{\gamma'}=0,$$

la droite D est aussi parallèle au plan diamétral divisant en deux parties égales les cordes parallèles à D'.

Théorème IV. — *Si, par le sommet du cône asymptote d'une quadrique, on mène deux droites* D, D' *conjuguées en direction, les points* d, d' *où ces droites rencontrent le plan* Q *d'une conique* Γ *située sur ce cône sont conjugués par rapport à la conique.*

En effet, le plan mené par le sommet du cône asymptote parallèlement au plan diamétral partageant en deux parties égales les cordes parallèles à D, contient la droite D' ; il passe donc par le point d'. D'un autre côté, sa trace sur le plan Q est la polaire du point d par rapport à la conique Γ (Théorème II) ; donc les deux points d, d' sont conjugués par rapport à Γ.

Définition. — *On dit que trois droites* D, D', D'' *forment un* *système triplement conjugué, quand elles sont deux à deux conjuguées en direction.*

Théorème V. — *Si, par le sommet du cône asymptote d'une quadrique, on mène trois droites* D, D′, D″ *conjuguées en direction, les points d, d′, d″ où ces droites rencontrent le plan* Q *d'une conique* **Γ** *située sur ce cône déterminent un triangle conjugué par rapport à cette conique.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème IV.

151. Diamètres conjugués. — *Deux diamètres d'une quadrique à centre sont dits conjugués quand leurs directions sont conjuguées; ces droites sont telles que chacune d'elles est située dans le plan diamétral partageant en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Les coefficients de direction (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ de deux diamètres conjugués sont liés par la relation

$$\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta + \gamma' \varphi'_\gamma = 0. \tag{9}$$

Quand ces deux diamètres coïncident, la relation précédente devient

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

les deux diamètres se confondent donc avec une génératrice du cône asymptote.

Théorème VI. — *Deux diamètres conjugués d'une quadrique à centre sont aussi deux diamètres conjugués de la section de la surface par le plan qui les contient.*

On vérifie immédiatement cette proposition en prenant les deux diamètres conjugués pour axes des x et des y. On a, en effet,

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \qquad \text{et} \qquad \alpha' = 0, \quad \gamma' = 0;$$

la relation (9) devient

$$\beta' \varphi'_\beta(\alpha, 0, 0) = 0,$$

ou bien

$$B'' \alpha \beta' = 0,$$

et il en résulte $B'' = 0$. L'équation de la section de la surface par le plan xoy est donc

$$Ax^2 + A'y^2 + D = 0;$$

ce qui montre que cette section est rapportée à deux diamètres conjugués.

Définition. — *Trois diamètres d'une quadrique à centre sont dits conjugués quand ils sont conjugués deux à deux ; ces droites sont telles que chacune d'elles est située dans les plans diamétraux partageant respectivement en deux parties égales les cordes parallèles aux deux autres.*

Les coefficients de direction (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de trois diamètres conjugués sont liés par les relations

$$\begin{aligned}
\alpha\varphi'_{\alpha'} + \beta\varphi'_{\beta'} + \gamma\varphi'_{\gamma'} &= 0 \\
\alpha'\varphi'_{\alpha''} + \beta'\varphi'_{\beta''} + \gamma'\varphi'_{\gamma''} &= 0 \\
\alpha''\varphi'_{\alpha} + \beta''\varphi'_{\beta} + \gamma''\varphi'_{\gamma} &= 0.
\end{aligned}$$

Si l'équation de la quadrique est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ces relations deviennent

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} &= 0 \\
\frac{\alpha'\alpha''}{a^2} + \frac{\beta'\beta''}{b^2} + \frac{\gamma'\gamma''}{c^2} &= 0 \\
\frac{\alpha''\alpha}{a^2} + \frac{\beta''\beta}{b^2} + \frac{\gamma''\gamma}{c^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Théorème VII. — *Dans une quadrique à centre il y a une infinité de systèmes de diamètres conjugués.*

En effet, la conique Γ section du cône asymptote par un plan Q admet une infinité de triangles conjugués et les droites qui joignent le centre de la quadrique aux sommets de l'un de ces triangles forment un système de diamètres conjugués (Théorème V).

On peut encore démontrer cette proposition de la manière suivante :

Soit OC un diamètre quelconque de la quadrique; dans le plan diamétral P conjugué de OC, menons deux diamètres OA, OB conjugués par rapport à la section de la quadrique par le plan P; ces deux diamètres seront conjugués par rapport à cette quadrique (Théorème VI).

D'un autre côté, les diamètres OA, OB sont respectivement conjugués de OC, car ils sont situés dans le plan diamétral P conjugué de OC ; donc les trois droites OA, OB, OC forment un système de trois diamètres conjugués.

152. Problème. — *Étant données deux quadriques, trouver une direction de cordes telle que les plans diamétraux correspondants dans les deux surfaces soient parallèles.*

La direction d'un plan diamétral ne dépendant que des coefficients des termes du second degré dans l'équation d'une quadrique, le problème revient à chercher une direction de cordes telle que les plans diamétraux correspondants dans les cônes asymptotes des deux quadriques données coïncident, ces deux cônes ayant le même sommet O.

Soient Γ, Γ' les sections des deux cônes asymptotes par un même plan Q, et OD une direction de cordes telle que les plans diamétraux correspondants, dans les cônes asymptotes des deux quadriques données, coïncident avec un même plan P.

Le point d où OD rencontre le plan Q aura pour polaire, par rapport aux coniques Γ, Γ', la droite p intersection des plans P et Q (Théorème II). Le problème est ainsi ramené à trouver les points qui ont la même polaire par rapport à ces coniques.

On sait que ces points sont les points doubles des couples de sécantes communes aux coniques Γ, Γ'.

Le problème a trois solutions réelles quand les deux coniques Γ, Γ' se coupent en quatre points distincts et réels ou en quatre points imaginaires ; il n'a plus qu'une solution réelle quand les deux coniques se coupent en deux points réels et en deux points imaginaires, c'est-à-dire quand les cônes asymptotes des deux quadriques transportés de manière à avoir le même sommet, se coupent suivant deux génératrices réelles et deux génératrices imaginaires.

En particulier, le problème a toujours trois solutions réelles si l'une des quadriques est un ellipsoïde ; car les deux coniques Γ, Γ' se coupent alors en quatre points imaginaires, puisque l'une d'elles est imaginaire.

Remarque. — Les droites OA, OB, OC joignant le sommet commun des deux cônes asymptotes aux trois sommets A, B, C du triangle conjugué commun aux deux coniques Γ, Γ' forment un système de trois directions triplement conjuguées.

Si les deux quadriques appartiennent à la première classe et ont le point O pour centre commun, les droites OA, OB, OC forment un système de diamètres conjugués communs.

Quand l'une des quadriques est un ellipsoïde, ces trois diamètres sont réels, et l'on peut les prendre pour axes de coordonnées ; les équations des surfaces ont alors les formes suivantes :

$$A\,x^2 + A'\,y^2 + A''z^2 + D = 0$$
$$A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + D_1 = 0.$$

153. Nous allons maintenant considérer le cas où l'une des quadriques est une sphère, l'autre étant quelconque.

Nous savons qu'il existe un système réel de trois directions OA, OB, OC triplement conjuguées par rapport aux deux quadriques ; comme l'une des quadriques est une sphère, ces trois directions sont *principales* et forment un trièdre trirectangle. Nous retrouvons ainsi le théorème suivant démontré au paragraphe 145.

Théorème. — *Dans toute quadrique il y a toujours au moins trois directions principales formant un trièdre trirectangle.*

Les axes étant rectangulaires, soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

les équations des cônes asymptotes de la quadrique et de la sphère, le sommet commun étant à l'origine.

Si l'on coupe ces deux cônes par un plan Q parallèle au plan xoy les équations des sections Γ, Γ' rapportées aux traces $o'x'$, $o'y'$

des plans zox, zoy sur le plan Q seront

$$\Gamma = Ax^2 + A'y^2 + A''h^2 + 2Bhy + 2B'hx + 2B''xy = 0$$
$$\Gamma' = x^2 + y^2 + h^2 = 0.$$

Considérons l'équation

$$(10) \qquad \Gamma - S\Gamma' = 0$$

qui représente toutes les coniques passant par les points communs aux courbes Γ, Γ' ; puisque l'une d'elles est imaginaire, l'équation

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0$$

obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $\Gamma - S\Gamma'$ aura ses trois racines réelles et généralement distinctes.

L'équation précédente est l'équation en S de la quadrique considérée ; la réalité des racines de cette équation se trouve donc démontrée de nouveau.

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en S ait une racine double.

Il faut pour cela que les coniques Γ, Γ' soient simplement tangentes ou doublement tangentes.

La conique Γ' étant imaginaire, le contact ne peut pas être simple, car le point de contact serait *réel.*

Le contact étant double, l'équation (10) représente une droite double, après qu'on y a remplacé S par la racine double de l'équation en S ; cette racine doit donc annuler tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$.

Cherchons enfin les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en S ait une racine triple.

Cela ne peut avoir lieu que dans les trois hypothèses suivantes :

1° Les coniques Γ, Γ' ont un contact du deuxième ordre.

2° Ces coniques ont un contact du troisième ordre.

3° Ces coniques se confondent.

Les deux premières hypothèses doivent être écartées ; car, dans chacune d'elles, le point de contact est *réel.*

Les coniques doivent donc se confondre, et la fonction $\Gamma - S\Gamma'$ est identiquement nulle quand on y remplace S par la racine triple de l'équation en S. On a donc

$$S = A = A' = A'' \qquad B = B' = B'' = 0.$$

On voit que la racine triple annule tous les éléments de $\Delta(S)$.

Nous retrouvons ainsi les deux théorèmes démontrés au paragraphe 142.

154. Remarque. — L'analyse exposée dans le paragraphe précédent subsiste quand les coordonnées sont obliques ; l'équation du cône asymptote de la sphère est alors

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu = 0,$$

et l'équation en S de la quadrique devient

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' - S\cos\nu & B' - S\cos\mu \\ B'' - S\cos\nu & A' - S & B - S\cos\lambda \\ B' - S\cos\mu & B - S\cos\lambda & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles et généralement distinctes.

Pour qu'un nombre σ soit racine double, il faut et il suffit que ce nombre annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, sans annuler tous ses éléments.

Pour qu'un nombre σ soit racine triple, il faut et il suffit que ce nombre annule tous les éléments du déterminant $\Delta(S)$.

Axes. — Sommets.

155. Définition. — *On appelle axe d'une quadrique la droite intersection de deux plans principaux ; les points où les axes rencontrent la surface sont les sommets.*

Les quadriques de la première classe ont en général trois axes.

Les quadriques de la deuxième classe ont un seul axe.

Dans les quadriques de la troisième classe la ligne des centres est un axe ainsi que les axes de symétrie d'une section droite quelconque du cylindre.

La ligne des centres est plus particulièrement considérée comme étant l'axe du cylindre.

Dans les quadriques de la quatrième classe les axes de symétrie de chaque parabole principale peuvent être considérés comme un axe de la surface.

Enfin dans les quadriques de la cinquième classe chaque perpendiculaire commune aux deux plans qui la composent et chacune des droites situées dans le plan des centres est un axe de la surface.

CHAPITRE V

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION D'UNE QUADRIQUE PAR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

156. On sait que, dans toute quadrique, il y a toujours au moins trois directions de cordes principales formant un trièdre trirectangle.

Nous nous proposons de trouver la forme que prend l'équation de la surface quand on choisit les axes de coordonnées parallèles à ces directions principales et de simplifier ensuite l'équation ainsi obtenue.

Nous supposerons la quadrique donnée rapportée à des axes de coordonnées *rectangulaires* ox, oy, oz ; son équation est

$$(1) \qquad f = \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

en posant

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Soient

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{aligned}$$

les formules qui permettent de passer des anciens axes aux nouveaux ox', oy', oz' formés par trois directions principales perpendiculaires deux à deux.

Après ce changement d'axes l'équation de la quadrique deviendra

$$A_1 x'^2 + A'_1 y'^2 + A''_1 z'^2 + 2B_1 y'z' + 2B'_1 z'x' + 2B''_1 x'y' \\ + 2C_1 x' + 2C' y' + 2C''_1 z' + D = 0$$

en posant

$$\begin{aligned} C_1 &= C\alpha \;\, + C'\beta \;\, + C''\gamma \\ C_1' &= C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma' \\ C_1'' &= C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma''. \end{aligned}$$

On peut donner des formes très simples aux expressions des coefficients A_1, A_1', A_1'', B_1, B_1', B_1''.

Pour obtenir A_1, par exemple, il faut chercher le coefficient de x'^2 dans le développement de la fonction

$$\varphi(\alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',\ \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',\ \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'),$$

et l'on peut évidemment, pour simplifier les calculs, supposer $y' = z' = 0$. On trouve immédiatement

$$A_1 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

De même, pour obtenir $2B_1''$ coefficient de $x'y'$ on pourra poser $z' = 0$ et développer la fonction

$$\varphi(\alpha x' + \alpha' y',\ \beta x' + \beta' y',\ \gamma x' + \gamma' y')$$

en se bornant aux termes qui contiennent $x'y'$ en facteur.

On trouve facilement

$$2B_1'' = \alpha' \varphi_\alpha' + \beta' \varphi_\beta' + \gamma' \varphi_\gamma'.$$

On obtient des expressions analogues pour A_1', A_1'', et pour B_1, B_1'.

Soient S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation en S auxquelles correspondent respectivement les directions principales ox', oy', oz' ; en considérant en particulier la racine S_1, on aura

$$\frac{\varphi_\alpha'}{\alpha} = \frac{\varphi_\beta'}{\beta} = \frac{\varphi_\gamma'}{\gamma} = 2S_1.$$

On déduit de là

$$A_1 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha\varphi_\alpha' + \beta\varphi_\beta' + \gamma\varphi_\gamma') = S_1$$

$$2B_1'' = \alpha'\varphi_\alpha' + \beta'\varphi_\beta' + \gamma'\varphi_\gamma' = 2S_1(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0.$$

En résumé, quand on rapporte une quadrique à trois axes respectivement parallèles à trois directions principales formant un trièdre trirectangle, les termes en $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ disparaissent, et les coefficients des carrés des variables ont respectivement pour valeurs

$$A_1 = S_1 \qquad A'_1 = S_2 \qquad A''_1 = S_3.$$

L'équation de la quadrique devient donc

$$(2) \quad S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + S_3 z'^2 + 2C_1 x' + 2C'_1 y' + 2C''_1 z' + D = 0.$$

Si l'on transporte l'origine au point (x_0, y_0, z_0), l'équation (2) devient à son tour

$$(3) \quad S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + 2C_2 X + 2C'_2 Y + 2C''_2 Z + D_1 = 0$$

en posant

$$(4) \quad C_2 = S_1 x_0 + C_1 \qquad C'_2 = S_2 y_0 + C'_1 \qquad C''_2 = S_3 z_0 + C''_1$$

$$D_1 = S_1 x_0^2 + S_2 y_0^2 + S_3 z_0^2 + 2C_1 x_0 + 2C'_1 y_0 + 2C''_1 z_0 + D.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1° *La quadrique appartient à la première classe.* — Le déterminant Δ n'est pas nul, et, par suite, l'équation en S n'a pas de racine nulle ; on peut alors poser

$$x_0 = -\frac{C_1}{S_1} \qquad y_0 = -\frac{C'_1}{S_2} \qquad z_0 = -\frac{C''_1}{S_3},$$

et l'équation (3) devient

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1 = 0.$$

2° *La quadrique appartient à la deuxième classe.* — Le déterminant Δ est nul, mais tous ses mineurs du premier ordre ne sont pas nuls ; l'équation en S a donc une racine nulle, mais cette racine est *simple*. Supposons par exemple $S_1 = 0$; on aura en même temps $C_1 \gtrless 0$, car, s'il en était autrement, la quadrique aurait une ligne de centres.

On peut déterminer y_0, z_0, x_0 par les équations

$$S_2 y_0 + C_1' = 0 \qquad S_3 z_0 + C_1'' = 0$$
$$S_2 y_0^2 + S_3 z_0^2 + 2C_1 x_0 + 2C_1' y_0 + 2C_1'' z_0 + D = 0,$$

et l'équation (3) devient

$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + 2C_1 X = 0.$$

3° *La quadrique appartient à la troisième classe.* — Le déterminant Δ est encore nul, mais tous ses mineurs du premier ordre ne sont pas nuls ; l'équation en S a une racine nulle, et cette racine est *simple*. Supposons par exemple $S_1 = 0$; on aura en même temps $C_1 = 0$, car la quadrique a une ligne de centres à distance finie.

On peut déterminer y_0 et z_0 par les équations

$$S_2 y_0 + C_1' = 0 \qquad S_3 z_0 + C_1'' = 0$$

et le coefficient D_1 aura pour valeur

$$D_1 = S_2 y_0^2 + S_3 z_0^2 + 2C_1' y_0 + 2C_1'' z_0 + D ;$$

l'équation (3) devient donc

$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1 = 0.$$

4° *La quadrique appartient à la quatrième classe.* — Le déterminant Δ est nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre ; l'équation en S a donc une racine nulle et cette racine est *double*. Supposons par exemple $S_1 = S_2 = 0$; on n'aura pas à la fois

$$C_1 = C_1' = 0,$$

car la surface aurait un plan de centres : soit, pour fixer les idées, $C_1' \gtrless 0$.

On peut prendre $x_0 = 0$ et déterminer z_0 et y_0 par les équations

$$S_3 z_0 + C_1'' = 0$$
$$S_3 z_0^2 + 2C_1' y_0 + 2C_1'' z_0 + D = 0,$$

et l'équation (3) devient

$$S_3Z^2+2C_1X+2C'_1Y=0. \tag{5}$$

Maintenant, à la racine double $S_1=S_2=0$ correspondent une infinité de directions principales parallèles à un même plan ; les axes OX, OY parallèles à ox', oy' sont deux droites rectangulaires quelconques parallèles à ce plan.

Les cosinus α, β, γ qui définissent la direction OX satisfont aux équations

$$\varphi'_\alpha=0 \quad \varphi'_\beta=0 \quad \varphi'_\gamma=0$$

qui *se réduisent à une ;* pour déterminer ces cosinus, nous joindrons à l'une des équations précédentes la relation

$$C_1=C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.$$

L'équation (5) de la quadrique deviendra alors

$$S_3Z^2+2C'_1Y=0.$$

5° *La quadrique appartient à la cinquième classe.* — L'équation en S a encore deux racines nulles ; nous supposerons $S_1=S_2=0$. Comme la surface a un plan de centres, on aura

$$C_1=C'_1=0.$$

On peut prendre $x_0=y_0=0$ et déterminer z_0 par l'équation

$$S_3z_0+C''_1=0;$$

le coefficient D_1 aura pour valeur

$$D_1=S_3z_0^2+2C''_1z_0+D,$$

et l'équation (3) deviendra

$$S_3Z^2+D_1=0.$$

157. En résumé, nous voyons que l'équation d'une quadrique peut être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
\text{I} & S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+D_1=0 \\
\text{II} & S_2Y^2+S_3Z^2+2C_1X=0 \\
\text{III} & S_2Y^2+S_3Z^2+D_1=0 \\
\text{IV} & S_3Z^2+2C_1'Y=0 \\
\text{V} & S_3Z^2+D_1=0.
\end{array}
$$

L'équation I représente des quadriques ayant un centre unique à distance finie et rapportées à trois plans principaux ; les axes de coordonnées sont des axes de symétrie de la surface.

On peut appliquer à cette équation tout ce qui a été dit aux paragraphes 120 et 121 ; en mettant en évidence les signes des coefficients et la grandeur des *axes de symétrie*, on obtient les six formes suivantes :

$$
\textbf{Genre ellipsoïde.}\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}-1=0 & \textit{ellipsoïde réel.} \\
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}=0 & \textit{un point.} \\
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2}+1=0 & \textit{ellipsoïde imaginaire.}
\end{array}\right.
$$

$$
\textbf{Genre hyperboloïde.}\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}-1=0 & \textit{hyperboloïde à 1 nappe.} \\
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=0 & \textit{cône.} \\
\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}+1=0 & \textit{hyperboloïde à 2 nappes.}
\end{array}\right.
$$

Remarque. — La quantité D_1 qui est le terme tout connu dans l'équation de la quadrique rapportée à son centre, a pour valeur (130)

$$D_1=\frac{H}{\Delta}.$$

L'équation II représente des quadriques ayant un centre unique à l'infini ; ces surfaces sont rapportées à deux plans principaux YOX, ZOX et au plan tangent ZOY au sommet O de la surface.

On peut appliquer à cette équation tout ce qui a été dit aux paragraphes 123 et 124 ; en mettant en évidence les signes des coefficients et la grandeur des paramètres des *paraboles principales,* sections de la quadrique par les plans principaux, on obtient les deux formes suivantes :

Genre paraboloïde.
$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{Y^2}{p}+\dfrac{Z^2}{q}-2X=0 & \textit{paraboloïde elliptique.} \\ \dfrac{Y^2}{p}-\dfrac{Z^2}{q}-2X=0 & \textit{paraboloïde hyperbolique.} \end{array}\right.$$

L'équation III représente des quadriques ayant une ligne de centres à distance finie ; ces surfaces sont rapportées à deux plans principaux YOX, ZOX, et le plan ZOY est le plan d'une section droite quelconque.

En mettant en évidence les signes des coefficients et la grandeur des axes de la section droite, on obtient les cinq formes suivantes :

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0 \quad \textit{cylindre elliptique.}$$
$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \textit{une droite.}$$
$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}+1=0 \quad \textit{cylindre imaginaire.}$$
$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}-1=0 \quad \textit{cylindre hyperbolique.}$$
$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \textit{deux plans sécants.}$$

L'équation IV représente des quadriques ayant une ligne de centres à l'infini ; ces surfaces sont rapportées à un plan principal XOY, au plan ZOY d'une section droite quelconque et au plan ZOX touchant la surface en tous les points de l'arête OX suivant laquelle elle est coupée par le plan principal.

En mettant en évidence la grandeur du paramètre de la *parabole,* section droite de la surface par le plan ZOY, on obtient la forme unique suivante :

$$Z^2-2pY=0 \quad \textit{cylindre parabolique.}$$

L'équation V représente des quadriques ayant un plan de centres ; le plan XOY est le plan des centres, les deux autres plans de coordonnées sont deux plans perpendiculaires entre eux et au plan XOY.

En mettant en évidence les signes des coefficients, on obtient les trois formes suivantes :

$$Z^2 - h^2 = 0 \quad \textit{deux plans parallèles réels.}$$
$$Z^2 \qquad = 0 \quad \textit{deux plans confondus.}$$
$$Z^2 + h^2 = 0 \quad \textit{deux plans parallèles imaginaires.}$$

Conditions pour qu'une quadrique soit de révolution.

158. La considération des formes réduites obtenues dans le paragraphe précédent permet d'établir immédiatement le théorème suivant qui résout la question proposée.

Théorème. — *Pour qu'une quadrique soit de révolution, il faut et il suffit que l'équation en* S *ait une racine double.*

En effet, quand une quadrique est de révolution, l'axe de révolution est *un axe de symétrie* de la surface ; de plus, les sections par des plans perpendiculaires à cet axe sont des cercles.

En exprimant cette propriété à l'aide des équations réduites

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1 = 0$$
$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + 2 C_1 X = 0$$
$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1 = 0$$

des quadriques de la première, de la deuxième et de la troisième classe, on vérifie immédiatement le théorème énoncé.

Les quadriques de la quatrième et de la cinquième classe ne sont pas en réalité des surfaces de révolution, bien que l'équation en S qui leur correspond admette une racine double $S_1 = S_2 = 0$. Cependant on peut, à la rigueur, regarder un système de deux plans parallèles (*quadrique de la cinquième classe*) comme une surface de révolution autour d'une quelconque des perpendiculaires communes à ces deux plans.

159. Le théorème précédent peut être établi sans recourir aux formes réduites, en s'appuyant sur la proposition suivante :

Théorème. — *Pour qu'une quadrique soit de révolution, il faut* *et il suffit qu'il existe une valeur de* S *telle que la fonction*

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

soit un carré parfait. (**Coordonnées rectangulaires.**)

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, la quadrique étant de révolution, son équation est de la forme

$$f(\Sigma, P) = 0$$

en posant

$$\Sigma = S(x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + d)$$
$$P = ux + vy + wz + h.$$

Cette équation devant être du second degré ne pourra contenir P qu'au second degré au plus, Σ qu'au premier degré, et ne renfermera pas le produit $P\Sigma$; on aura donc identiquement

$$\varphi(x, y, z) \equiv S(x^2 + y^2 + z^2) + (ux + vy + wz)^2 ;$$

d'où

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (ux + vy + wz)^2.$$

Cette relation montre que, pour une valeur convenablement choisie de S, la différence

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

est un carré parfait.

2° *La condition est suffisante.* — En effet, si elle est remplie, on a identiquement

$$\varphi(x, y, z) \equiv S(x^2 + y^2 + z^2) + (ux + vy + wz)^2,$$

et l'équation de la quadrique prend la forme

$$S(x^2 + y^2 + z^2) + (ux + vy + wz)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Son premier membre étant une fonction du premier membre de l'équation d'une sphère Σ et du premier membre de l'équation d'un plan, la quadrique est de révolution.

L'axe est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan qui a pour équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Maintenant, d'après un théorème connu, on exprimera que la forme quadratique

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

est un carré parfait en écrivant que tous les mineurs du premier ordre de son discriminant $\Delta(S)$ sont nuls; donc S doit être une racine double de l'équation en S.

Pour l'expression analytique de cette condition nous renverrons au paragraphe 142.

160. Équations de l'axe. — Nous distinguerons plusieurs cas.

1° $BB'B'' \gtrless 0$. — On sait qu'on a alors

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''};$$

on en déduit

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv BB'B'' \left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right)^2.$$

Les coordonnées du centre de la sphère Σ sont d'ailleurs

$$-\frac{C}{S} \quad -\frac{C'}{S} \quad -\frac{C''}{S};$$

donc les équations de l'axe sont

$$B\left(x + \frac{C}{S}\right) = B'\left(y + \frac{C'}{S}\right) = B''\left(z + \frac{C''}{S}\right).$$

2° $B' = B'' = 0$. — On sait qu'on a alors

$$S = A \qquad (A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0;$$

on en déduit

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{A' - A}[(A' - A)y + Bz]^2.$$

Les équations de l'axe sont donc

$$x + \frac{C}{S} = 0 \qquad \frac{y + \frac{C'}{S}}{A' - A} = \frac{z + \frac{C''}{S}}{B}.$$

3° $B = B' = B'' = 0$. — On sait qu'on a alors

$$S = A' = A'';$$

on en déduit

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = (A - A')x^2.$$

Les équations de l'axe sont donc

$$y + \frac{C'}{S} = 0 \qquad z + \frac{C''}{S} = 0.$$

CHAPITRE VI

INVARIANTS.

161. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'appliquer la théorie des invariants aux quadriques.

Nous représenterons toujours par H le discriminant de la fonction

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2\,;$$

par Δ celui de la fonction

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy\,;$$

enfin nous désignerons par $-M$, P les coefficients de S^2 et de S dans l'équation en S développée.

Cela revient à écrire cette équation de la manière suivante :

$$S^3 - MS^2 + PS - \Delta = 0,$$

ou bien à poser

$$M = A + A' + A''$$
$$P = A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2.$$

Théorème. — *Une quadrique étant rapportée à des axes rectangulaires, quand on passe de ce système d'axes à tout autre système d'axes rectangulaires, les fonctions*

$$M \qquad P \qquad \Delta \qquad H$$

conservent les mêmes valeurs.

Considérons d'abord les trois fonctions

$$M \qquad P \qquad \Delta$$

qui ne dépendent que des coefficients des termes de la fonction φ.

Quand on transporte les axes, ces coefficients ne changent pas; donc les trois fonctions précédentes conservent les mêmes valeurs.

Reste à démontrer qu'il en est encore de même quand on change la direction des axes en conservant l'origine, ces axes restant d'ailleurs rectangulaires.

L'équation en S s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la fonction

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2),$$

et l'on a démontré (G. P. 132) que les coefficients de cette équation sont des invariants.

Il en résulte que les fonctions

$$M \quad P \quad \Delta$$

conservent les mêmes valeurs, car le carré du module de la substitution linéaire définie par les formules de transformation

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{aligned}$$

est égal à l'unité (14).

Corollaire. — *Une quadrique étant rapportée à des axes rectangulaires; quand on passe de ce système à tout autre système d'axes également rectangulaires, les racines de l'équation en* S *conservent les mêmes valeurs*.

En effet, les coefficients de cette équation conservent les mêmes valeurs.

Considérons maintenant la fonction H; comme elle dépend des coefficients de tous les termes de la fonction f, on devra changer à la fois l'origine et la direction des axes. Cette transformation revient à faire, dans la fonction f, la substitution linéaire définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= x_0 T + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y &= y_0 T + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z &= z_0 T + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \\ t &= T. \end{aligned}$$

Le carré du module de cette substitution étant égal à l'unité, il en résulte que H, qui est un invariant, conserve la même valeur après la transformation complète des coordonnées.

162. Nous allons appliquer le théorème précédent à la réduction d'une quadrique aux formes les plus simples, les deux systèmes d'axes de coordonnées anciens et nouveaux étant supposés *rectangulaires*.

Le problème se compose de deux parties :

1° *Trouver la forme des équations réduites ;*

2° *Calculer les coefficients qui entrent dans les formes réduites et trouver les équations qui fixent la position des nouveaux axes par rapport aux premiers.*

163. Pour trouver la forme des équations réduites, nous nous appuierons sur le théorème suivant qui résulte de ce que l'équation en S ne peut pas avoir trois racines nulles (142).

Théorème. — *Toute quadrique admet au moins un plan principal situé à distance finie.*

Prenons ce plan principal pour plan des $x'y'$, l'équation de la quadrique prendra la forme

$$A''_1 Z^2 + \psi(x', y') = 0.$$

La section de la surface par le plan des $x'y'$ est une conique C ayant pour équations

$$Z = 0 \qquad \psi(x', y') = 0.$$

En déplaçant les axes $o'x'$, $o'y'$ dans le plan $x'oy'$, *ce qui n'altère pas* Z, on ramènera l'équation de cette conique à la forme

$$A_1 X^2 + A'_1 Y^2 + D_1 = 0,$$

si elle est du genre ellipse ou du genre hyperbole.

On la ramènera à la forme

$$A'_1 Y^2 + 2C_1 X = 0,$$

si elle est une parabole.

On la ramènera à la forme

$$A_1'Y^2 + D_1 = 0,$$

si elle se compose de deux droites parallèles

On la ramènera à la forme

$$2C_1'Y = 0,$$

si elle se compose de deux droites dont l'une est rejetée à l'infini.

Enfin, l'équation de cette conique pourra se réduire à une constante D_1.

De ce qui précède il résulte que l'équation d'une quadrique peut toujours être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & A_1X^2 + A_1'Y^2 + A_1''Z^2 + D_1 = 0 \\
\text{II} & A_1'Y^2 + A_1''Z^2 + 2C_1X = 0 \\
\text{III} & A_1'Y^2 + A_1''Z^2 + D_1 = 0 \\
\text{IV} & A_1''Z^2 + 2C_1'Y = 0 \\
\text{V} & A_1''Z^2 + D_1 = 0.
\end{array}$$

164. Pour résoudre la seconde partie du problème, nous nous appuierons sur ce que la fonction H et les racines S_1, S_2, S_3 de l'équation en S ne changent pas de valeur, quand on passe de la forme primitive f à l'une des formes réduites que nous désignerons par F. Nous aurons à distinguer cinq cas.

1° *La quadrique appartient à la première classe.* — La forme réduite est

$$F = A_1X^2 + A_1'Y^2 + A_1''Z^2 + D_1 = 0,$$

et l'équation en S qui correspond à F est

$$(A_1 - S)(A_1' - S)(A_1'' - S) = 0;$$

on a donc

$$A_1 = S_1 \qquad A_1' = S_2 \qquad A_1'' = S_3.$$

Pour calculer D_1, égalons les discriminants des fonctions f et F ; nous aurons

$$H = D_1 S_1 S_2 S_3 = D_1 \Delta;$$

d'où

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

L'équation de la quadrique est donc

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + \frac{H}{\Delta} = 0;$$

la surface est rapportée à trois axes de symétrie.

Reste à trouver les équations de ces axes CX, CY, CZ par rapport aux axes primitifs ox, oy, oz.

Pour cela, transportons d'abord l'origine au centre C $(x_0\, y_0\, z_0)$, ce qui revient à rapporter la quadrique aux axes Cx', Cy', Cz' respectivement parallèles aux axes primitifs ; l'équation $f = 0$ deviendra

$$\varphi(x', y', z') + D_1 = 0.$$

La forme de cette équation montre que, quand on passe des axes Cx', Cy', Cz' aux axes CX, CY, CZ, la fonction

$$u = \varphi(x', y', z') - S(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

devient

$$u_1 = (S_1 - S) X^2 + (S_2 - S) Y^2 + (S_3 - S) Z^2.$$

La fonction u_1 égalée à zéro représente deux plans quand on y remplace S par une des racines S_1, S_2, S_3.

Pour $S = S_1$, ces plans se coupent suivant la droite CX.

Pour $S = S_2$, ils se coupent suivant la droite CY.

Pour $S = S_3$, ils se coupent suivant la droite CZ.

Les axes de coordonnées sont ici CX, CY, CZ.

Il résulte de cette remarque que l'équation $u = 0$, pour les mêmes valeurs de S, représente des couples de plans se coupant suivant les mêmes droites, les axes de coordonnées étant maintenant Cx', Cy', Cz'.

Si l'on veut avoir les équations des droites CX, CY, CZ rapportées aux axes primitifs ox, oy, oz, il suffira de remplacer x', y', z' par $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ dans deux des équations

$$u'_{x'}=0 \qquad u'_{y'}=0 \qquad u'_{z'}=0$$

et d'y faire ensuite successivement

$$S=S_1, \qquad S=S_2, \qquad S=S_3.$$

2° *La quadrique appartient à la deuxième classe.* — La forme réduite est

$$F=A'_1 Y^2+A''_1 Z^2+2C_1 X=0.$$

On a ici $\Delta=0$, une des racines S_1 de l'équation en S est nulle et les deux autres S_2, S_3 sont données par l'équation

$$(1) \qquad S^2-MS+P=0.$$

On trouve, comme dans le cas précédent,

$$A'_1=S_2 \qquad A''_1=S_3\,;$$

puis en égalant les discriminants des fonctions f et F on obtient, pour déterminer C_1, la relation

$$H=-C_1^2 S_2 S_3=-PC_1^2.$$

L'équation réduite de la quadrique est donc

$$S_2Y^2+S_3Z^2\pm 2X\sqrt{-\frac{H}{P}}=0.$$

Remarque. — On trouve pour C_1 deux valeurs égales et de signes contraires ; on démontrera, comme en géométrie plane (G. P. 134), que, donner à C_1 le signe du coefficient S_2, revient à prendre pour axe des abscisses positives X la portion de la droite X'CX *extérieure* à la parabole principale située dans le plan YCX.

La quadrique est rapportée à deux plans principaux et au plan tangent au sommet C ; l'axe CX est l'axe de symétrie de la surface et les axes CY, CZ sont les tangentes au sommet C des deux paraboles principales.

On obtiendra les équations de l'axe de symétrie CX en le considérant comme l'intersection des deux plans principaux.

L'intersection de cette droite avec la surface fera connaître les coordonnées x_0, y_0, z_0 du sommet C.

Pour avoir les équations des droites CY, CZ rapportées aux axes primitifs ox, oy, oz, il suffira, comme dans le cas précédent, de remplacer x', y', z' par $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ dans deux des équations

$$u'_{x'}=0 \qquad u'_{y'}=0 \qquad u'_{z'}=0$$

obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles de la fonction

$$u=\varphi(x', y', z')-S(x'^2+y'^2+z'^2),$$

et d'y faire ensuite successivement $S=S_2$, $S=S_3$.

3° *La quadrique appartient à la troisième classe.* — La forme réduite est

$$F=A'_1Y^2+A''_1Z^2+D_1=0\,;$$

l'équation en S a encore une racine nulle, et les deux autres S_2, S_3 sont données par l'équation (1).

On a comme précédemment

$$A'_1=S_2 \qquad A''_1=S_3.$$

Dans le cas qui nous occupe, l'invariant H étant nul ne peut plus servir à calculer le coefficient D_1.

Pour déterminer cette inconnue, remarquons que, quand on passe des anciens axes aux nouveaux, la fonction f devient

$$S_2Y^2+S_3Z^2+D_1\,;$$

donc la fonction $f-D_1$ devient

$$S_2Y^2+S_3Z^2.$$

Cette fonction étant égale à la somme des carrés de deux fonctions linéaires, tous les mineurs du premier ordre de son discriminant

$$H_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D - D_1 \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Égalons, par exemple, à zéro le mineur relatif à l'élément A, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D - D_1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

d'où l'on déduit

$$(A'A'' - B^2) D_1 = H'_A\,;$$

cette relation fait connaître D_1.

La quadrique qui est un cylindre à base elliptique ou hyperbolique, est rapportée à deux plans principaux et au plan d'une section droite.

La droite CX, qui est la ligne des centres du cylindre, est déterminée par deux des équations suivantes :

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0.$$

Quant aux droites CY, CZ, on obtiendra leurs équations comme dans le cas précédent; seulement x_0, y_0, z_0 désigneront ici les coordonnées d'un point quelconque de la ligne des centres.

Invariant particulier aux cylindres. — En égalant à zéro les mineurs du déterminant H_1 relatifs aux éléments A, A', A'', on a les relations

$$(A'A'' - B^2)\, D_1 = H'_A$$
$$(A''A - B'^2)\, D_1 = H'_{A'}$$
$$(AA' - B''^2)\, D_1 = H'_{A''},$$

d'où l'on déduit par addition

$$PD_1 = H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}.$$

Maintenant, si l'on désigne par b^2, c^2 les carrés des demi-axes de la section droite du cylindre, on a

$$b^2 = -\frac{D_1}{S_2} \qquad c^2 = -\frac{D_1}{S_3};$$

d'où

$$b^2 c^2 = \frac{D_1^2}{S_2 S_3} = \frac{D_1^2}{P},$$

et, par suite,

$$bcP\sqrt{P} = H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}.$$

Comme P est un invariant, on voit que, pour les cylindres elliptiques ou hyperboliques, la somme

$$H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}$$

est un invariant.

Cette proposition s'étend au cylindre parabolique, en regardant cette surface comme la limite d'un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Nous désignerons cet invariant particulier par L ; on a alors

$$D_1 = \frac{L}{P},$$

et l'équation réduite des cylindres elliptiques ou hyberboliques devient

$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + \frac{L}{P} = 0.$$

4° *La quadrique appartient à la quatrième classe.* — La forme réduite est

$$A''_1 Z^2 + 2 C'_1 Y = 0.$$

Dans ce cas, Δ est nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre ; donc, deux des racines S_1, S_2 de l'équation en S sont nulles, et la troisième S_3 est donnée par l'équation

(2) $$S - M = 0.$$

On a

$$A_1'' = S_3 = M.$$

Pour calculer C_1', nous nous servirons de l'invariant L ; en le calculant pour la fonction F, nous aurons la relation

$$L = -C_1'^2 A_1'' = -C_1'^2 M.$$

L'équation réduite de la quadrique est donc

$$MZ^2 \pm 2Y\sqrt{-\frac{L}{M}} = 0.$$

Remarque. — On trouve pour C_1' deux valeurs égales et de signes contraires ; on démontrera, comme en géométrie plane (G. P. 134), que, donner à C_1' le signe du coefficient M, revient à prendre pour axe des ordonnées positives Y la portion de la droite Y'CY extérieure à la parabole, section droite du cylindre.

Ce cylindre est rapporté au plan principal XCY, au plan ZCX tangent le long de la génératrice CX située dans ce plan principal et à un plan quelconque ZCY perpendiculaire à CX.

La recherche des équations de ces trois plans ne présente aucune difficulté.

5° *La quadrique appartient à la cinquième classe.* — La forme réduite est

$$A_1'' Z^2 + D_1 = 0 ;$$

l'équation en S a encore deux racines nulles, et la troisième S_3 est donnée par l'équation (2).

On a donc

$$A_1'' = S_3 = M.$$

Les invariants précédemment trouvés étant nuls ne peuvent pas servir au calcul de D_1. Pour déterminer cette inconnue, remarquons que, quand on passe des anciens axes aux nouveaux, la fonction f devient

$$MZ^2 + D_1 ;$$

donc la fonction $f - D_1$ devient

$$MZ^2,$$

et tous les mineurs du second ordre de son discriminant H_1 sont nuls.

Égalons, par exemple, à zéro les mineurs obtenus en supprimant les lignes et les colonnes qui renferment les éléments A', A″, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & D - D_1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$AD_1 = AD - C^2;$$

cette relation fait connaître D_1.

La quadrique qui se compose de deux plans parallèles est rapportée au plan des centres XCY et à deux autres plans perpendiculaires entre eux et au précédent.

La recherche des équations de ces plans ne présente aucune difficulté.

Remarque. — On a les trois relations

$$AD_1 = AD - C^2 \quad A'D_1 = A'D - C'^2 \quad A''D_1 = A''D - C''^2;$$

d'où l'on déduit par addition

$$MD_1 = MD - C^2 - C'^2 - C''^2.$$

Maintenant, si l'on appelle $2d$ la distance des deux plans parallèles, on a

$$Md^2 + D_1 = 0$$

et, par suite,

$$M^2d^2 = C^2 + C'^2 + C''^2 - MD.$$

Comme M est un invariant, on voit que, pour un système de deux plans parallèles, la fonction

$$MD - C^2 - C'^2 - C''^2$$

est un invariant. En le désignant par N, l'équation réduite sera

$$MZ^2 + \frac{N}{M} = 0.$$

165. De ce qui précède il résulte que la nature d'une quadrique rapportée à des axes rectangulaires quelconques dépend des six quantités

$$M \quad P \quad \Delta \quad H \quad L \quad N.$$

Les quatre premières M, P, Δ, H sont des invariants *pour toutes les quadriques;* la cinquième L est un invariant *pour les quadriques de la quatrième et de la cinquième classe,* enfin la sixième N est un invariant *pour les quadriques de la cinquième classe.*

APPLICATIONS DIVERSES DES INVARIANTS D'UNE QUADRIQUE.

166. Soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + D_1 = 0$$

l'équation d'une quadrique à centre unique rapportée à trois diamètres rectangulaires quelconques, et A, B, C les points où ces diamètres rencontrent la surface. On a

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} = -\frac{A}{D_1} \qquad \frac{1}{\overline{OB}^2} = -\frac{A'}{D_1} \qquad \frac{1}{\overline{OC}^2} = -\frac{A''}{D_1},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2} = -\frac{1}{D_1}(A + A' + A'').$$

Quand on fait tourner les axes de coordonnées autour du centre O, en les laissant rectangulaires, les quantités D_1 et $A + A' + A''$ ne changent pas de valeur ; donc la somme

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$$

reste constante. De là résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Dans toute quadrique à centre unique la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est constante.*

Corollaire. — *L'enveloppe des plans passant par les extrémites de trois diamètres rectangulaires d'une quadrique à centre unique est une sphère concentrique.*

En effet, menons la hauteur OH du tétraèdre OABC, on sait que l'on a

$$\frac{1}{\overline{OH}^2}=\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2};$$

donc OH reste constant quand le trièdre trirectangle OABC se déplace en tournant autour de son sommet.

Condition pour qu'on puisse placer un trièdre trirectangle sur un cône du second ordre.

167. Théorème I. — *Pour qu'on puisse placer un trièdre trirectangle sur un cône du second ordre ayant pour équation*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0,$$

il faut et il suffit que l'invariant

$$M=A+A'+A''$$

soit nul. (**Coordonnées rectangulaires.**)

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons en effet qu'on puisse placer un trièdre trirectangle sur le cône ; si l'on prend les arêtes du trièdre pour axes de coordonnées, l'équation du cône sera

$$B_1yz+B_1'zx+B_1''xy=0.$$

Pour ce système d'axes particulier, l'invariant M est nul ; donc il est également nul pour le système primitif.

2° *La condition est suffisante* — Prenons pour axe des z une génératrice *quelconque* oC du cône ; son équation sera

$$A_1x^2+A_1'y^2+2B_1yz+2B_1'zx+2B_1''xy=0.$$

La section du cône par le plan xoy, dont les équations sont

$$z=0 \qquad A_1x^2+A'_1y^2+2B''_1xy=0,$$

est une hyperbole équilatère ; car, par hypothèse, $A_1+A'_1$ est nul. Cette section se compose donc de deux droites rectangulaires oA, oB, et les trois génératrices oA, oB, oC du cône forment un trièdre trirectangle.

Remarque. — La génératrice oC étant *quelconque*, on voit que si, sur un cône du second ordre, on peut placer *un* trièdre trirectangle, on peut alors en placer *une infinité*.

Un pareil cône est dit *équilatère* et tous les hyperboloïdes dont il est le cône asymptote sont également dits *équilatères*.

Condition pour qu'on puisse circonscrire un trièdre trirectangle à un cône du second ordre.

168. Théorème II. — *Pour qu'on puisse circonscrire un trièdre trirectangle à un cône du second ordre ayant pour équation*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0,$$

il faut et il suffit que l'invariant

$$P=A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2$$

soit nul. (**Coordonnées rectangulaires.**)

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons en effet qu'il existe un trièdre trirectangle circonscrit au cône, et soit

$$A_1x^2+A'_1y^2+A''_1z^2+2B_1yz+2B'_1zx+2B''_1xy=0$$

l'équation de cette surface, quand on prend les trois faces du trièdre pour plans de coordonnées.

On aura

$$A'_1A''_1-B_1^2=0 \qquad A''_1A_1-B'^2_1=0 \qquad A_1A'_1-B''^2_1=0;$$

l'invariant P étant nul pour ce système d'axes particulier, il est également nul pour le système primitif.

2° *La condition est suffisante.* — Prenons pour plan des xy un plan T tangent au cône, on aura

$$AA' - B''^2 = 0;$$

comme, par hypothèse, l'invariant P est nul, on aura aussi

$$A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 = 0.$$

Cette relation montre que, si les plans zox, zoy ne coupent pas le cône suivant deux droites confondues, l'une des sections sera du genre ellipse et l'autre du genre hyperbole.

Faisons tourner d'un angle droit le plan zox autour de oz, le genre de la section du cône par ce plan changera de nature ; donc il y a, dans l'intervalle, une position du plan mobile pour laquelle la section sera du genre parabole, c'est-à-dire composée d'une droite double.

Prenons cette position S du plan pour plan des zox, alors $A''A - B'^2$ sera nul et par suite aussi $A'A'' - B^2$; le plan R des zoy sera donc tangent au cône. On voit que les trois plans R, S, T forment un trièdre trirectangle circonscrit au cône.

Remarque. — Le plan tangent T étant quelconque, il en résulte que, si l'on peut circonscrire *un* trièdre trirectangle à un cône du second ordre, on peut en circonscrire *une infinité.*

Il ne sera pas inutile de montrer que les deux théorèmes précédents sont corrélatifs ; cette proposition résulte de la considération des cônes supplémentaires.

Cônes supplémentaires.

169. Définition. — *Étant donné un cône* C, *le lieu des normales menées par le sommet* S *aux plans tangents est un cône* C' *qui est dit supplémentaire du cône* C.

Réciproquement, *le cône* C *est supplémentaire du cône* C'.

Soient en effet P, P' deux plans tangents au cône C, et SA, SA' les normales correspondantes ; la droite SD intersection des plans P, P′ sera perpendiculaire au plan ASA′.

Si le plan P′ vient se confondre avec le plan P, la droite SD a pour limite la droite Sα génératrice de contact du plan P avec le cône C et le plan ASA′ a pour limite un plan Π tangent au cône C′.

Le cône C peut donc être considéré comme le lieu des normales menées par le sommet S aux plans tangents du cône C′.

Problème. — *Étant donnée l'équation*

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

d'un cône du second ordre C, *trouver l'équation du cône supplémentaire* C′. (**Coordonnées rectangulaires.**)

La relation exprimant que le plan P ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0$$

touche le cône C, est

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0\ ;$$

a, a', a'' représentant les mineurs principaux et b, b', b'' les mineurs secondaires du déterminant Δ.

D'un autre côté, les équations de la normale, menée au plan P par le sommet du cône C, sont

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}\,;$$

l'équation du cône C′ est donc

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0.$$

Il est aisé de vérifier analytiquement que le cône C est de son côté supplémentaire du cône C′, en se servant des identités

$$
\begin{array}{ll}
A\,\Delta = a'a'' - b^2 & B\,\Delta = b'b'' - a\,b \\
A'\Delta = a''a - b'^2 & B'\Delta = b''b - a'b' \\
A''\Delta = a\,a' - b''^2 & B''\Delta = b\,b' - a''b''.
\end{array}
$$

Remarque. — Il est évident que si l'on peut placer un trièdre trirectangle sur l'un des cônes, on peut circonscrire à l'autre un trièdre trirectangle ; les théorèmes I et II sont donc corrélatifs (167, 168).

On pourra placer sur le cône C′ un trièdre trirectangle si la somme $a + a' + a''$ est nulle ; donc, dans la même hypothèse, on pourra circonscrire au cône C un trièdre trirectangle. La relation exprimant que le cône C jouit de cette propriété est donc

$$A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2 = 0\,;$$

on retrouve ainsi un résultat obtenu précédemment à l'aide des invariants.

170. Problème. — *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan* P, *passant par le sommet d'un cône du second ordre* C, *coupe la surface suivant deux droites rectangulaires.* (**Coordonnées rectangulaires.**)

Soient

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

et

$$ux + vy + wz = 0$$

l'équation du cône C et celle du plan P, l'origine étant au sommet du cône.

L'équation du cylindre qui a pour section droite la section du cône C par le plan P s'obtiendra en éliminant ρ entre les deux équations

$$
\begin{gathered}
\rho^2 \varphi(u, v, w) + \rho\,(u\varphi'_x + v\varphi'_y + w\varphi'_z) + \varphi(x, y, z) = 0 \\
ux + vy + wz + (u^2 + v^2 + w^2)\,\rho = 0.
\end{gathered}
$$

En remarquant que l'on a identiquement

$$u\varphi'_x + v\varphi'_y + w\varphi'_z \equiv x\varphi'_u + y\varphi'_v + z\varphi'_w,$$

on obtient l'équation

$$\left(\frac{ux+vy+wz}{u^2+v^2+w^2}\right)^2 \varphi(u,v,w) - \frac{ux+vy+wz}{u^2+v^2+w^2}(x\varphi'_u+y\varphi'_v+z\varphi'_w)$$
$$+\varphi(x,y,z)=0.$$

Il faut exprimer que les deux plans représentés par cette équation sont rectangulaires; pour cela il suffira d'exprimer que, sur ces deux plans, on peut placer un trièdre trirectangle.

On obtient ainsi la relation

$$\varphi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2).$$

171. Problème. — *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les plans tangents menés à un cône du second ordre* C *par une droite* D *passant par son sommet soient rectangulaires.* (**Coordonnées rectangulaires.**)

Soient

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

les équations de la droite D, l'origine étant au sommet du cône. A cette droite correspondra, dans le cône C' supplémentaire du cône C, un plan P passant par son sommet et, aux deux plans tangents au cône C passant par D, correspondront les deux génératrices intersection du cône C' par le plan P. Si les deux plans tangents sont rectangulaires, les deux génératrices seront rectangulaires et réciproquement.

Pour résoudre le problème proposé, il suffit donc d'appliquer au cône C' le résultat obtenu dans le problème précédent.

En représentant par

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

l'équation du cône C', la relation cherchée sera

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = (a + a' + a'')(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS D'UNE QUADRIQUE A CENTRE

172. La théorie des invariants, étendue aux coordonnées obliques, va nous permettre d'établir, pour les quadriques à centre unique, des théorèmes analogues aux théorèmes d'Apollonius démontrés en géométrie plane.

Supposons, pour fixer les idées, que la quadrique soit un ellipsoïde. Soient

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0$$

l'équation de cette surface rapportée à ses axes de symétrie, et

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1=0$$

son équation quand elle est rapportée à trois diamètres conjugués faisant entre eux des angles λ, μ, ν.

Quand on passe des axes oX, oY, oZ aux axes ox, oy, oz, le terme constant -1 ne change pas ; donc la fonction

$$\Phi=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2},$$

devient

$$\varphi=\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}.$$

D'un autre côté la fonction

$$X^2+Y^2+Z^2$$

devient

$$x^2+y^2+z^2+2\,yz\cos\lambda+2\,zx\cos\mu+2\,xy\cos\nu.$$

Maintenant, d'après un théorème démontré (G. P. 132), les équations en S obtenues en égalant à zéro les discriminants des deux fonctions

$$\Phi-\frac{1}{S}(X^2+Y^2+Z^2)$$

$$\varphi-\frac{1}{S}(x^2+y^2+z^2+2\,yz\cos\lambda+2\,zx\cos\mu+2\,xy\cos\nu)$$

sont identiques.

Ces deux équations sont

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{S}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{c'^2}-\frac{1}{S}\right)-2\frac{\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}{S^3}$$
$$-\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{S}\right)\frac{\cos^2\lambda}{S^2}-\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{S}\right)\frac{\cos^2\mu}{S^2}-\left(\frac{1}{c'^2}-\frac{1}{S}\right)\frac{\cos^2\nu}{S^2}=0,$$

ou bien

$$(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)=0$$
$$S^3-(a'^2+b'^2+c'^2)S^2+(b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu)S$$
$$-a'^2b'^2c'^2\Omega=0.$$

En les identifiant, on obtient les relations

$$(3)\left\{\begin{array}{c} a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2 \\ b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \\ a'b'c'\sqrt{\Omega}=abc, \end{array}\right.$$

d'où résulte le théorème suivant :

Théorème I. — *Dans un ellipsoïde : 1° la somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante ; 2° la somme des carrés des faces du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constante; 3° le volume de ce parallélipipède est constant.*

Remarque. — Pour interpréter la troisième des relations (3), on s'est servi de la signification géométrique de la quantité Ω donnée au paragraphe 9.

173. Diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde. — Si l'ellipsoïde admet des diamètres conjugués égaux, en désignant par $2a'$ leur longueur commune, on aura

$$3a'^2=a^2+b^2+c^2;$$

les extrémités des diamètres conjugués égaux se trouveront donc à l'intersection de l'ellipsoïde avec la sphère ayant pour rayon

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

En retranchant de l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

celle de la sphère mise sous la forme suivante

$$\frac{3x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3z^2}{a^2+b^2+c^2}-1=0,$$

on obtient l'équation

$$\frac{2a^2-b^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{2b^2-c^2-a^2}{b^2}y^2+\frac{2c^2-a^2-b^2}{c^2}z^2=0.$$

Elle représente un véritable cône, car on a

$$2a^2-b^2-c^2>0 \qquad \text{et} \qquad 2c^2-a^2-b^2<0$$

en supposant, ce qui est permis, $a>b>c$.

Les génératrices de ce cône Γ sont des diamètres de l'ellipsoïde ayant pour longueur $2\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Reste à démontrer qu'on peut associer trois à trois les génératrices du cône de manière à former un système de trois diamètres conjugués.

Soit OC′ une génératrice *quelconque* du cône et C′ le point où elle rencontre l'ellipsoïde; le plan diamétral conjugué de OC′ coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse qui admet deux diamètres conjugués égaux OA′, OB′. Les trois diamètres OA′, OB′, OC′ forment d'ailleurs un système conjugué par rapport à l'ellipsoïde; on a donc

$$2\overline{OA'}^2+\overline{OC'}^2=a^2+b^2+c^2,$$

d'où

$$\overline{OA'}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Cette relation montre que les diamètres OA', OB' sont des génératrices du cône Γ. En résumé les trois droites OA', OB', OC' forment un système de diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde.

La génératrice OC' étant *quelconque*, il y a, dans l'ellipsoïde, une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux.

Remarque. — On pourra vérifier dans la suite que le cône Γ est *homocyclique* à l'ellipsoïde, c'est-à-dire que les deux surfaces sont coupées suivant des cercles par les mêmes plans.

174. Pour passer du cas de l'ellipsoïde à celui de l'hyperboloïde à une nappe, il suffit de changer c et c' en ci et $c'i$; les relations (3) deviennent

$$a'^2+b'^2-c'^2=a^2+b^2-c^2$$
$$b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu-a'^2b'^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2$$
$$a'b'c'\sqrt{\Omega}=abc.$$

Pour passer du cas de l'ellipsoïde à celui de l'hyperboloïde à deux nappes, il suffira de changer a, a', b, b', en ai, $a'i$, bi, $b'i$, ce qui donne des relations analogues aux précédentes.

L'interprétation géométrique de ces deux groupes de relations ne présente aucune difficulté.

175. On peut démontrer les propriétés des diamètres conjugués d'une quadrique à centre sans s'appuyer sur la théorie des invariants, en se servant des relations qui expriment que trois diamètres sont conjugués (151).

Nous supposerons d'abord que la quadrique est un ellipsoïde.

Soient OA', OB', OC' trois diamètres conjugués, a', b', c' leurs demi-longueurs et (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de leurs extrémités A', B', C', la surface étant rapportée à ses axes de symétrie.

On aura les relations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=0$$
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}+\frac{z_2z}{c^2}=0$$
$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1 \qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0$$

qui deviennent

$$(4)\quad \begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1 \end{aligned} \qquad (5)\quad \begin{aligned} \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0\\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma&=0\\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0 \end{aligned}$$

en posant

$$(6)\quad \begin{matrix} \dfrac{x}{a}=\alpha & \dfrac{y}{b}=\beta & \dfrac{z}{c}=\gamma \\ \dfrac{x_1}{a}=\alpha' & \dfrac{y_1}{b}=\beta' & \dfrac{z_1}{c}=\gamma' \\ \dfrac{x_2}{a}=\alpha'' & \dfrac{y_2}{b}=\beta'' & \dfrac{z_2}{c}=\gamma''. \end{matrix}$$

Les relations (4) et (5) sont justement celles qui lient les neuf cosinus que trois directions rectangulaires font avec trois axes de coordonnées supposés rectangulaires ; donc les neuf quantités

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \qquad (\alpha',\ \beta',\ \gamma') \qquad (\alpha'',\ \beta'',\ \gamma'')$$

satisfont aux relations obtenues en appliquant au tableau

α	β	γ
α'	β'	γ'
α''	β''	γ''

le théorème démontré au paragraphe 14.

Chaque diamètre de l'ellipsoïde détermine, à partir du centre, deux directions opposées ; nous supposerons que l'on a choisi les directions OA', OB', OC', de telle sorte que le trièdre trirectangle défini par les neuf cosinus (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ et le trièdre formé par les axes des coordonnées positives soient de même sens.

nous aurons alors les relations

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1$$
$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1$$
$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

$$\frac{\alpha}{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''}=\frac{\alpha'}{\beta''\gamma-\gamma''\beta}=\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=1$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}=1,$$

ou, en tenant compte des égalités (6), les relations

$$x^2+x_1^2+x_2^2=a^2$$
$$y^2+y_1^2+y_2^2=b^2$$
$$z^2+z_1^2+z_2^2=c^2$$

II $\quad y_1z_2-z_1y_2=\frac{bc}{a}x \quad y_2z-z_2y=\frac{bc}{a}x_1 \quad yz_1-zy_1=\frac{bc}{a}x_2$

III $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=abc.$$

Les relations (I) donnent le théorème suivant :

Théorème II. — *La somme des carrés des projections des longueurs de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde sur un axe de la surface est constante et égale au carré de cet axe.*

En ajoutant membre à membre les relations (I) et désignant toujours par a', b', c' les longueurs OA', OB', OC', on obtient l'équation

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$$

qui démontre la première partie du théorème I (172).

Pour interpréter les relations (II), représentons par S_x, S'_x, S''_x les projections, sur le plan principal yoz, des faces du parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués OA', OB', OC' ; en ajoutant membre à membre les relations (II), après les avoir élevées au carré, nous aurons l'équation

$$S_x^2 + S_x'^2 + S_x''^2 = b^2c^2$$

qui donne le théorème suivant :

Théorème III. — *La somme des carrés des projections, sur un plan principal, des faces d'un parallelipipède construit sur trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde est constante.*

Si l'on ajoute membre à membre les relations obtenues en appliquant le théorème précédent aux trois plans principaux, on a, entre les faces S, S', S'' du parallélipipède, l'équation

$$S^2 + S'^2 + S''^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$

qui démontre la deuxième partie du théorème I (172).

Enfin la relation (III) démontre la troisième partie du même théorème.

176. Quelques considérations préliminaires sont nécessaires pour permettre d'appliquer l'analyse précédente aux hyperboloïdes.

Hyperboloïdes conjugués. — *Deux hyperboloïdes sont dits conjugués, lorsque chacun d'eux a pour sommets réels les sommets imaginaires de l'autre.*

L'équation d'un hyperboloïde G rapporté à ses axes étant

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

celle de l'hyperboloïde conjugué G' sera

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Problème. — *Étant donnée l'équation $f(x, y, z) = 0$ d'un hyperboloïde G rapporté à des axes quelconques, trouver celle de l'hyperboloïde conjugué G'.*

L'hyperboloïde G' a le même cône asymptote que l'hyperboloïde G ; donc son équation ne différera de celle de l'hyperboloïde G que par un terme constant et sera de la forme

$$f+D_1=0.$$

Pour déterminer D_1, remarquons que, H étant le discriminant de la fonction f, et H_1 celui de la fonction $f+D_1$, on a

$$H_1=H+\Delta D_1,$$

en représentant par Δ le discriminant commun des fonctions formées par les termes du second degré dans les fonctions f et $f+D_1$.

D'un autre côté, quand on rapporte les deux hyperboloïdes à leurs axes de symétrie, les fonctions f et $f+D_1$ deviennent respectivement

$$\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}-1\right) \qquad \lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}+1\right),$$

et les discriminants de ces fonctions sont

$$\frac{\lambda^4}{a^2b^2c^2} \qquad -\frac{\lambda^4}{a^2b^2c^2}.$$

Appelons M le module de la substitution linéaire par laquelle on passe des axes primitifs ox, oy, oz aux nouveaux axes OX, OY, OZ ; le discriminant d'une fonction du second degré étant un invariant (G. P. 131), nous aurons les relations

$$\frac{\lambda^4}{a^2b^2c^2}=M^2H \qquad -\frac{\lambda^4}{a^2b^2c^2}=M^2(H+\Delta D_1),$$

d'où l'on déduit

$$D_1=-\frac{2H}{\Delta}.$$

Règle. — *Pour former l'équation de l'hyperboloïde conjugué* G', *il suffit d'ajouter la quantité* $-\dfrac{2H}{\Delta}$ *au premier membre de l'équation de l'hyperboloïde* G.

Diamètres imaginaires d'un hyperboloïde. — Parmi les diamètres d'un hyperboloïde, il y en a qui sont imaginaires, c'est-à-dire qui rencontrent la surface en des points imaginaires.

Nous nous proposons de définir l'*extrémité et la longueur* d'un pareil diamètre.

Soient

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}+\varepsilon=0$$

l'équation d'un hyperboloïde rapporté à ses axes, la quantité ε étant égale à ± 1 ; et

$$\frac{X}{\alpha}=\frac{Y}{\beta}=\frac{Z}{\gamma}$$

celles d'un diamètre imaginaire OC'.

En cherchant les solutions communes aux équations précédentes, on obtiendra pour X, Y, Z des valeurs *purement* imaginaires, c'est-à-dire de la forme

$$X=ui \qquad Y=vi \qquad Z=wi.$$

Le point réel C' ayant pour coordonnées u, v, w est sur le diamètre considéré, car les équations

$$\frac{ui}{\alpha}=\frac{vi}{\beta}=\frac{wi}{\gamma}$$

donnent

$$\frac{u}{\alpha}=\frac{v}{\beta}=\frac{w}{\gamma}.$$

Ce point C' est appelé l'*extrémité* du diamètre imaginaire, et sa distance au centre de la surface est la *demi-longueur* de ce diamètre.

En exprimant que les quantités ui, vi, wi satisfont à l'équation de l'hyperboloïde, on obtient l'équation

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}-\varepsilon=0;$$

d'où résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Les extrémités des diamètres imaginaires d'un hyperboloïde sont sur l'hyperboloïde conjugué.*

177. Revenons maintenant à l'étude des propriétés des diamètres conjugués d'un hyperboloïde, et, pour fixer les idées, supposons que la surface soit un hyperboloïde à une nappe.

Si OA', OB', OC' sont trois diamètres conjugués, l'un d'eux, OC', sera imaginaire, et les coordonnées (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) de leurs extrémités A', B', C' satisferont aux relations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}-\frac{z_1z_2}{c^2}=0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}-\frac{z_2z}{c^2}=0$$

$$-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1 \qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=0.$$

Si l'on pose

$$\frac{x}{a}=\alpha \qquad \frac{y}{b}=\beta \qquad \frac{z}{c}=\gamma i$$

$$\frac{x_1}{a}=\alpha' \qquad \frac{y_1}{b}=\beta' \qquad \frac{z_1}{c}=\gamma' i$$

$$\frac{ix_2}{a}=\alpha'' \qquad \frac{iy_2}{b}=\beta'' \qquad \frac{z_2}{c}=\gamma''$$

es neuf quantités (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ satisferont aux relations (4) et (5).

On achèvera le reste du calcul comme dans le cas de l'ellipsoïde.

EXERCICES.

1° Trouver la nature des quadriques représentées par les équations suivantes :

$$x^2 - z^2 + 2yz - 2zx + 2xy - 2x + 2y + \lambda = 0$$
$$x^2 + z^2 - 2xy - 2y - 2x + \lambda = 0$$
$$(\lambda + 1)x^2 + y^2 + \lambda z^2 - 2\lambda zx + 2xy + 2\lambda x - 2(\lambda + 1)z + \lambda + 1 = 0$$
$$x^2 + \lambda y^2 + (\lambda + 1)z^2 - 2\lambda yz - 2xz + 2x - 2z + \lambda = 0$$
$$(2\lambda^2 - 2\lambda + 3)x^2 + \lambda(\lambda + 1)y^2 + (\lambda + 1)z^2 - 2(\lambda + 1)yz + 2(\lambda^2 - 1)xy + 2(\lambda - 2)x$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 11$$
$$(\lambda - 1)x^2 + (\lambda^2 - \lambda - 1)y^2 + \lambda(\lambda - 2)z^2 - 2\lambda(\lambda - 2\ yz + 2(\lambda - 1)xy + 2(\lambda + 1)x = 0$$
$$2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy + \mathrm{D} = 0$$
$$(x + y)^2 - (3x + y + z)^2 + 8x + 4y + 2z - 7 = 0$$
$$(x + y + z - 1)^2 + (3x - 2y + z - 2)^2 + (x - 4y - z)^2 - 1 = 0$$
$$(3x + 2y - z)^2 - (x + 2y + z)^2 + (x + y - 1)^2 - 1 = 0$$
$$(x + y - z)^2 - 3(2x + z)^2 + (3x + y)^2 = 1$$
$$(2x - 6y + 8z - 1)^2 - (x - 3y + 4z)^2 + (4x - 12y + 1)^2 = 0$$
$$(x + y)(3x - y + z) + 2x - 2y + z = 0.$$

2° Étant donné un tétraèdre OABC dans lequel l'angle trièdre O est droit, trouver l'equation générale des quadriques qui, passant par ses sommets, sont coupées par la face OAB suivant une circonférence de cercle et par les faces OBC, OAC suivant des hyperboles équilatères. — Trouver le lieu des centres de ces quadriques et, sur ce lieu, séparer les parties qui correspondent à des hyperboloïdes à une nappe de celles qui correspondent à des hyperboloïdes à deux nappes.

3° Étant données deux quadriques, trouver, par l'analyse, une direction de cordes telle que les plans diamétraux correspondants dans les deux surfaces soient parallèles.

Démontrer que si la courbe d'intersection des deux quadriques a quatre asymptotes, ou n'en a aucune, le problème a trois solutions.

Si la courbe d'intersection a seulement deux asymptotes, le problème n'a plus qu'une solution.

4° Si l'on considère, dans une quadrique à centre, deux systèmes de diamètres conjugués, le volume du parallélipipède construit sur deux diamètres du premier système et un diamètre du second est égal au volume du parallélipipède construit sur les trois autres diamètres.

5° Étant donnés deux ellipsoïdes la somme des carrés de trois diamètres conjugués du premier, divisés par les carrés des diamètres du second, qui leur sont respectivement parallèles, est constante. — Examiner le cas où l'un des deux ellipsoïdes devient une sphère.

6° La somme algébrique des carrés des projections de trois diamètres conjugués d'une quadrique à centre sur une droite quelconque D, parallèlement à un plan quelconque P, est constante. — Cas où le plan P est parallèle à un plan tangent du cône asymptote.

(On pourra rapporter la quadrique à trois diamètres conjugués dont l'un coïncidera avec la droite D.)

7° La somme algébrique des carrés des projections des faces du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués d'une quadrique à centre sur un plan quelconque P, parallèlement à une droite quelconque D, est constante. — Cas où la droite D est parallèle à une génératrice du cône asymptote.

(On pourra rapporter la quadrique à trois plans diamétraux conjugués dont l'un coïncidera avec le plan P.)

8° Les plans tangents à une quadrique, aux extrémités de trois demi-diamètres conjugués, rencontrent un diamètre fixe en trois points dont les distances au centre de la surface ont la somme des carrés de leurs valeurs inverses constante.

9° Les faces du parallélipipède construit sur trois demi-diamètres conjugués d'une quadrique à centre, rencontrent un plan fixe suivant six droites parallèles deux à deux, et qui, prises quatre à quatre, déterminent trois parallélogrammes. La somme des valeurs inverses des carrés de ces trois parallélogrammes a une valeur constante, quel que soit le système des trois diamètres conjugués.

10° Trouver les plans principaux des surfaces suivantes :

$$z^2 - 2mxy \pm 1 = 0.$$
$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 1 = 0.$$
$$P^2 \pm Q^2 = a^2,$$

P et Q étant des fonctions linéaires. (On pourra chercher les plans bissecteurs des plans asymptotes réels ou imaginaires de ces dernières surfaces.)

$$(ax + by + cz)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

(On pourra procéder de la manière suivante : on mettra l'équation de la surface sous la forme

$$(ax + by + cz + \lambda)^2 + 2(C - \lambda a)x + 2(C' - \lambda b)y + 2(C'' - \lambda c)z + D - \lambda^2 = 0$$

et l'on exprimera que les plans ayant pour équations

$$ax + by + cz = 0 \qquad (C - \lambda a)x + (C' - \lambda b)y + (C'' - \lambda c)z = 0$$

sont perpendiculaires).

11° Trouver les équations de l'axe d'un paraboloïde.

(Les trois plans du centre sont parallèles à une même droite D qui donne la direction de l'axe ; on aura les équations de cet axe en le considérant comme le diamètre conjugué du plan perpendiculaire à la droite D.)

12° Les directions principales d'une quadrique sont définies par les équations

$$\frac{\varphi'_x}{x} = \frac{\varphi'_y}{y} = \frac{\varphi'_z}{z}$$

qui, associées deux à deux, représentent trois cônes.

Démontrer, sans faire usage d'une inconnue auxiliaire S, que ces cônes ont trois génératrices communes formant un trièdre trirectangle.

Retrouver par la considération de ces trois cônes, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique admette plus de trois directions principales.

(Pour résoudre la première partie de cette question, on montrera d'abord que les trois cônes ont au moins une génératrice commune réelle et ensuite que l'on peut prendre cette génératrice pour un des axes de coordonnées.)

13° Démontrer que les racines des équations en S qui correspondent à deux cônes du second ordre et supplementaires, sont liées par la relation

$$Ss = \Delta.$$

Appliquer ce résultat à la vérification analytique de la propriété suivante. Les deux cônes supplémentaires ont les mêmes plans principaux.

14° Les équations

$$(ax + by + cz)^2 + (a'x + b'y + c'z)^2 + (a''x + b''y + c''z)^2 = d^2$$
$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + (cx + c'y + c''z)^2 = d^2$$

représentent des ellipsoïdes égaux. (Coordonnées rectangulaires.)

15° Étant donné dans l'espace un système de n points $A_i(x_i, y_i, z_i)$ à chacun desquels correspond un paramètre m_i, et rapportés à des axes rectangulaires ox, oy, oz; démontrer que, pour chaque point o de l'espace, il existe trois axes rectangulaires oX, oY, oZ tels que l'on a

$$\Sigma m YZ = 0 \qquad \Sigma m ZX = 0 \qquad \Sigma m XY = 0.$$

(Les formules qui permettent de passer des axes ox, oy, oz aux axes oX, oY, oZ étant

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z$$
$$z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z;$$

si l'on pose

$$A = \Sigma m x^2 \qquad A' = \Sigma m y^2 \qquad A'' = \Sigma m z^2$$
$$B = \Sigma m yz \qquad B' = \Sigma m zx \qquad B'' = \Sigma m xy$$
$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

on trouvera les relations de condition

$$\Sigma m YZ = \frac{1}{2}\left(\alpha'' \varphi'_{\alpha'} + \beta'' \varphi'_{\beta'} + \gamma'' \varphi'_{\gamma}\right) = 0$$

$$\Sigma m ZX = \frac{1}{2}\left(\alpha\, \varphi'_{\alpha''} + \beta\, \varphi'_{\beta''} + \gamma\, \varphi'_{\gamma''}\right) = 0$$

$$\Sigma m XY = \frac{1}{2}\left(\alpha' \varphi'_{\alpha} + \beta' \varphi'_{\beta} + \gamma' \varphi'_{\gamma}\right) = 0.$$

En joignant à ces relations celles qui lient les neuf cosinus (α, β, γ),

$(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on obtiendra les équations

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{\varphi'_{\alpha'}}{\alpha'} = \frac{\varphi'_{\beta'}}{\beta'} = \frac{\varphi'_{\gamma'}}{\gamma'}$$

$$\frac{\varphi'_{\alpha''}}{\alpha''} = \frac{\varphi'_{\beta''}}{\beta''} = \frac{\varphi'_{\gamma''}}{\gamma''}.$$

On sera ramené à considérer l'équation en S.)

Nota. — Dans tous les exercices relatifs aux plans principaux, on supposera les axes de coordonnées rectangulaires.

16° Le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection d'une surface algébrique avec une sécante quelconque parallèle à une direction donnée est un plan que nous appellerons **plan diamétral.**

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que, quelle que soit la direction donnée, ces plans diamétraux soient parallèles à une même droite ; parallèles entre eux ou confondus.

17° Dans une surface algébrique d'ordre m, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une surface de l'ordre $\frac{m(m-1)}{2}$, que l'on appelle **surface diamétrale.**

Quand la surface est du troisième ordre, la surface diamétrale est du même ordre ; pour que cette surface diamétrale se décompose en un plan et une quadrique, il faut et il suffit que la surface donnée se décompose elle-même en un plan et une quadrique quand les cordes ne sont pas parallèles à une direction asymptotique.

Examiner le cas où les cordes sont parallèles à une direction asymptotique.

18° Quand on passe d'un système d'axes obliques à un autre système d'axes également obliques, les quantités

$$\frac{M}{\Omega} \quad \frac{P}{\Omega} \quad \frac{\Delta}{\Omega} \quad \frac{H}{\Omega}$$

conservent les mêmes valeurs. (M et P sont les coefficients de $-S^2$ et S dans l'équation S.)

19° Appliquer la théorie des invariants à l'équation

$$\frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} = \pm 1$$

qui représente un hyperboloïde rapporté à trois génératrices du cône asymptote et en déduire les propriétés suivantes :

Dans un hyperboloïde à deux nappes, si l'on considère toutes les pyramides ayant pour sommet le centre de la surface et pour base un triangle inscrit dans le cône asymptote et circonscrit à une des nappes de la surface : 1° La somme des carrés des arêtes latérales diminuée de la somme des carrés des côtés de la base est constante ; 2° la somme des carrés des faces latérales diminuée du carré de la base est constante ; 3° le volume de ces pyramides est constant.

Les propriétés précédentes restent vraies pour un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour base des pyramides un triangle inscrit dans l'hyperboloïde et circonscrit au cône asymptote.

Remarque. — On devra commencer par démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans un hyperboloïde à deux nappes, il existe une infinité de plans coupant la surface et le cône asymptote suivant des ellipses* E, E_1 *telles qu'on peut circonscrire à l'ellipse* E *des triangles inscrits dans l'ellipse* E_1.

Théorème II. — *Dans un hyperboloïde à une nappe, il existe une infinité de plans coupant la surface et le cône asymptote suivant des ellipses* E, E_1, *telles qu'on peut inscrire à l'ellipse* E *des triangles circonscrits à l'ellipse* E_1.

20° Pour qu'on puisse placer sur le cône ayant pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

trois droites parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 = 0.$$

Pour qu'on puisse circonscrire au même cône un trièdre dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués du même ellipsoïde, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\frac{A'A'' - B^2}{a^2} + \frac{A''A - B'^2}{b^2} + \frac{AA' - B''^2}{c^2} = 0.$$

Montrer que, si l'une ou l'autre de ces deux propriétés est vraie pour un seul trièdre, elle est vraie pour une infinité de trièdres.

21° Un trièdre trirectangle tourne autour de son sommet O ; trouver l'enveloppe du plan P qui passe par les points A, B, C où ses arêtes rencontrent une quadrique donnée.

Quand le sommet O est sur la quadrique, le plan P passe par un point fixe M situé sur la normale à la quadrique, au point O. — Trouver le lieu des points M, le point O se déplaçant sur la quadrique.

22° Résoudre les questions précédentes en substituant au trièdre trirectangle un trièdre dont les arêtes sont parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde donné.

23° Démontrer les deux théorèmes suivants qui ramènent certaines questions de géométrie dans l'espace à des questions analogues de géométrie plane.

Théorème I. — *Si un théorème vrai pour trois axes rectangulaires* OA, OB, OC *subsiste encore quand on remplace deux des axes* OA, OB *par deux autres aussi rectangulaires et situés dans le plan perpendiculaire sur* OC; *alors le théorème est vrai pour tous les axes rectangulaires passant par le point* O.

Théorème II. — *Si un théorème vrai pour trois diamètres conjugués* OA, OB, OC *d'une quadrique subsiste encore quand on remplace deux de ces diamètres* OA, OB *par deux autres également conjugués et situés dans le plan diamétral conjugué de* OC; *alors le théorème est vrai pour trois diamètres conjugués quelconques.*

Application à la démonstration des propriétés des diamètres conjugués, à la solution des questions 21 et 22 et à la démonstration de la propriété suivante :

Théorème. — *Dans une quadrique la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires est constante.*

24° Lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour base une conique donnée.

25° Étant donné un ellipsoïde de révolution allongé, le cône qui a pour sommet un des foyers de l'ellipse méridienne et pour base une section plane quelconque est de révolution.

26° Étant donné un ellipsoïde de révolution aplati, le cône qui a pour sommet un des foyers d'une ellipse méridienne et pour base une section de la surface par un plan passant par la directrice qui correspond à ce foyer est de révolution.

27° Étant donné un cylindre parabolique, le cône qui a pour sommet le foyer d'une section droite et pour base une section de la surface par un plan passant par la directrice de cette section droite est de révolution.

28° Une quadrique dont l'équation est symétrique par rapport aux coordonnées x, y, z, est de révolution, pourvu que les axes de coordonnées fassent entre eux des angles égaux.

LIVRE V

ÉTUDE DES QUADRIQUES SUR LES ÉQUATIONS RÉDUITES

CHAPITRE PREMIER

DES SECTIONS PLANES EN GÉNÉRAL.

178. Les sections planes d'une quadrique sont des coniques; nous allons d'abord chercher le *genre* de la conique pour les différentes quadriques et les différentes positions du plan sécant.

Il suffira pour cela de déterminer le genre de la projection de la section sur un des plans de coordonnées, car une conique et sa projection sur un plan sont évidemment du même genre.

1° **Ellipsoïde.** — L'équation de la surface rapportée à ses axes de symétrie est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\ ;$$

si l'on coupe la surface par le plan

$$ux+vy+wz+h=0,$$

la projection de la section sur le plan xoy aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(ux+vy+h)^2}{c^2w^2}-1=0.$$

Le genre de cette projection dépend du signe de la quantité

$$k=-a^2u^2-b^2v^2-c^2w^2$$

qui est toujours négative.

Les sections planes d'un ellipsoïde sont donc toutes du *genre ellipse.*

2° **Hyperboloïdes.** — L'équation de ces surfaces rapportées aux axes de symétrie est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\mp 1=0.$$

On a alors

$$k=a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2\,;$$

cette quantité pouvant être négative, nulle ou positive, les sections planes d'un hyperboloïde pourront être du genre ellipse, du genre parabole ou du genre hyperbole.

3° **Paraboloïdes.** — L'équation de ces surfaces rapportées aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet est

$$\frac{y^2}{p}\pm\frac{z^2}{q}-2x=0.$$

Supposons d'abord le plan sécant non parallèle à l'axe de la surface, son équation sera

$$ux+vy+wz+h=0,$$

et la projection de la section sur le plan yoz aura pour équation

$$\frac{y^2}{p}\pm\frac{z^2}{q}+2\,\frac{vy+wz+h}{u}=0.$$

On voit que tout plan, non parallèle à l'axe, coupe le paraboloïde elliptique suivant des courbes du *genre ellipse* et le paraboloïde hyperbolique suivant des courbes du *genre hyperbole.*

Supposons maintenant le plan sécant parallèle à l'axe de la surface, son équation sera

$$vy+wz+h=0$$

et la projection de la section sur le plan xoy aura pour équation

$$\left(\frac{w^2}{p}\pm\frac{v^2}{q}\right)y^2\pm 2\,\frac{vh}{q}\,y-2w^2x\pm\frac{h^2}{q}=0.$$

Cette projection est une parabole ; donc tout plan parallèle à l'axe d'un paraboloïde coupe la surface suivant une *parabole.*

Le paramètre de la parabole projetée a pour expression

$$p' = \frac{w^2}{\frac{w^2}{p} \pm \frac{v^2}{q}},$$

il est indépendant de h ; donc tous les plans parallèles entre eux et à l'axe d'un paraboloïde coupent la surface suivant des *paraboles égales.*

Remarque. — Ce qui précède cesse d'être vrai quand, la surface étant un paraboloïde hyperbolique, on a

$$\frac{w}{\sqrt{p}} \pm \frac{v}{\sqrt{q}} = 0 ;$$

la section se compose alors d'une seule droite et le plan sécant est un plan diamétral singulier (137).

179. Nous allons maintenant faire connaître deux propriétés des sections planes d'une quadrique, qui nous seront souvent utiles.

Théorème I. — *Les sections d'une quadrique par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.*

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la quadrique rapportée à des axes *quelconques.*

Les axes étant quelconques, on peut, sans particulariser la question, supposer le plan sécant parallèle au plan xoy. Si son équation est

$$z = h,$$

celle de la projection de la section sur le plan xoy, projection qui est égale à la section, sera

$$f(x, y, h) = 0.$$

Quand h varie, les coefficients des termes du second degré, dans l'équation précédente, ne changent pas; donc toutes les sections ainsi obtenues sont des courbes homothétiques.

Théorème II. — *Si l'on coupe un hyperboloïde et son cône asymptote par un même plan :*

1° *Les sections sont des courbes homothétiques;*

2° *Si ces sections sont à centre, elles sont concentriques;*

3° *Si ces sections sont du genre parabole, leurs paramètres sont égaux.*

Supposons encore, comme dans le théorème précédent, les axes quelconques et le plan sécant P parallèle au plan xoy; les projections, sur ce plan, des sections de l'hyperboloïde et de son cône asymptote par le plan P seront égales aux sections correspondantes, et auront pour équations

$$f(x, y, h)=0$$
$$f(x, y, h)-\frac{H}{\Delta}=0.$$

Ces deux équations ne différant que par les termes indépendants des coordonnées, le théorème est démontré.

On sait, en effet, que les coordonnées du centre d'une conique du genre ellipse ou du genre hyperbole, ainsi que le paramètre d'une parabole ne dépendent pas du terme tout connu qui entre dans leur équation.

180. Le théorème II permet de déterminer facilement la nature de la section d'un hyperboloïde par un plan P.

Transportons le plan P au centre de la surface, les sections du cône asymptote par le plan P et le plan transporté P_1 seront homothétiques (Théorème I). Donc, la section de l'hyperboloïde par le plan P sera du genre ellipse si le plan P_1 coupe le cône asymptote suivant deux génératrices imaginaires.

Elle sera du genre hyperbole si le plan P_1 coupe le cône asymptote suivant deux génératrices réelles.

Elle sera du genre parabole si le plan P_1 est tangent au cône asymptote.

Ce même théorème donne la solution du problème suivant :

Problème I. — *Trouver les plans qui coupent un hyperboloïde suivant deux droites parallèles.*

L'ensemble de ces deux droites parallèles forme une parabole dont le paramètre est nul ; le plan inconnu doit donc couper le cône asymptote de l'hyperboloïde suivant une parabole de paramètre nul, c'est-à-dire suivant deux droites parallèles qui seront nécessairement confondues.

Ainsi les plans cherchés touchent le cône asymptote ; ils sont donc les plans asymptotes de l'hyperboloïde.

Problème II. — *Trouver les plans qui coupent un hyperboloïde suivant une hyperbole équilatère.* (**Coordonnées rectangulaires.**)

Ces plans transportés au centre de la surface devront couper le cône asymptote suivant deux droites rectangulaires ; donc, si leur direction est représentée par l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

on aura entre les coefficients u, v, w la relation (170)

$$\varphi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2).$$

Si l'hyperboloïde est rapporté à ses axes de symétrie, cette relation devient

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)u^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)w^2 = 0.$$

181. Nous terminerons ces généralités sur les sections planes d'une quadrique par la recherche des axes et la détermination des paramètres de grandeur d'une section plane.

Problème III. — *Un plan* P *coupant une quadrique suivant une conique à centre* C, *trouver les équations des axes de cette conique et leurs longueurs.* (**Coordonnées rectangulaires.**)

Équations des axes. — Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la quadrique, et

$$ux + vy + wz + h = 0$$

celle du plan sécant **P**.

Considérons l'équation

$$f(x, y, z) - \frac{1}{\lambda}(ux + vy + wz + h)^2 = 0,$$

qui, comme on le verra plus loin, représente une quadrique Σ circonscrite à la quadrique donnée, le plan P étant celui de la courbe de contact.

Nous allons chercher les plans principaux de la quadrique Σ, puis nous ferons tendre λ vers zéro; ce qui revient à supposer que la quadrique Σ s'aplatit de plus en plus jusqu'à se confondre avec la portion du plan P limitée par la section correspondante C.

Nous démontrerons que l'un des plans principaux de cette quadrique a pour limite le plan P ; d'où il résultera que les traces des deux autres plans principaux Q, R sur le plan P seront les axes de symétrie de la section C.

L'équation d'un plan principal de la quadrique Σ est de la forme

$$\text{(1)} \qquad S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma - \frac{h}{\lambda}p = 0,$$

en posant

$$\text{(2)} \qquad p = u\alpha + v\beta + w\gamma.$$

Pour former l'équation qui donne l'inconnue S, il faut éliminer α, β, γ entre les équations

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\varphi'_\alpha - S\alpha - \frac{u}{\lambda}p = 0 \\ &\frac{1}{2}\varphi'_\beta - S\beta - \frac{v}{\lambda}p = 0 \\ &\frac{1}{2}\varphi'_\gamma - S\gamma - \frac{w}{\lambda}p = 0. \end{aligned}$$

Cela revient à considérer p comme une nouvelle inconnue et à éliminer α, β, γ, p entre les équations (3) et l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma - p = 0.$$

On obtient ainsi l'équation

$$\text{(4)} \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & u \\ B'' & A' - S & B & v \\ B' & B & A'' - S & w \\ u & v & w & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Quand λ tend vers zéro, cette équation s'abaisse au second degré et devient

$$\text{(5)} \qquad \begin{vmatrix} A - S & B' & B' & u \\ B'' & A' - S & B & v \\ B' & B & A'' - S & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

deux des racines de l'équation (4) ont donc des limites finies S_1, S_2, dont les valeurs satisfont à l'équation (5).

La troisième racine S_3 devient infinie, mais le produit λS_3 reste fini. Posons en effet $\lambda S = \sigma$, l'équation (4) deviendra

$$\begin{vmatrix} A\lambda - \sigma & B''\lambda & B'\lambda & u \\ B''\lambda & A'\lambda - \sigma & B\lambda & v \\ B'\lambda & B\lambda & A''\lambda - \sigma & w \\ u & v & w & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et, pour $\lambda = 0$, elle se réduira à

$$\sigma^3 + (u^2 + v^2 + w^2)\sigma^2 = 0.$$

Cette dernière équation admet deux racines nulles, et la troisième racine a pour valeur

$$\sigma_3 = -(u^2 + v^2 + w^2);$$

donc, quand λ tend vers zéro, S_3 devient bien infini, mais le produit λS_3 reste fini.

Pour la racine infinie, les équations (3) deviennent

$$(6) \qquad \sigma_3\alpha + up = 0 \qquad \sigma_3\beta + vp = 0 \qquad \sigma_3\gamma + wp = 0$$

et donnent

$$\frac{\alpha}{u} = \frac{\beta}{v} = \frac{\gamma}{w} = -\frac{p}{\sigma_3}.$$

D'un autre côté, quand λ tend vers zéro, l'équation (1) se réduit à

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

en tenant compte des relations (6); l'un des plans principaux a donc bien pour limite le plan P.

Les deux autres plans principaux Q et R sont dès lors perpendiculaires au plan de la conique C et la coupent suivant ses deux axes de symétrie.

Tout revient maintenant à former les équations des plans Q et R.

Les cordes principales qui correspondent à ces plans sont parallèles au plan P; on a donc $p = 0$, et, dans l'équation (1), le coefficient $\frac{p}{\lambda}$ prend la forme $\frac{0}{0}$.

Pour lever cette difficulté, ajoutons les équations (3), après les avoir multipliées respectivement par u, v, w; nous aurons

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{u\varphi'_\alpha + v\varphi'_\beta + w\varphi'_\gamma}{u^2 + v^2 + w^2},$$

et l'équation du plan principal prendra la forme

$$(7)\qquad S(\alpha x+\beta y+\gamma z)+C\alpha+C'\beta+C''\gamma-\frac{h}{2}\,\frac{u\varphi'_\alpha+v\varphi'_\beta+w\varphi'_\gamma}{u^2+v^2+w^2}=0.$$

On obtiendra les équations des plans Q, R en remplaçant, dans l'équation (7), S par les racines de l'équation (5) et α, β, γ par les valeurs proportionnelles à ces quantités tirées des équations

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi'_\alpha-S\alpha}{u}=\frac{\frac{1}{2}\varphi'_\beta-S\beta}{v}=\frac{\frac{1}{2}\varphi'_\gamma-S\gamma}{w}.$$

On obtient ces équations en éliminant $\frac{p}{\lambda}$ entre les équations (3).

En associant aux équations des plans Q et R celle du plan P, on aura les équations qui déterminent *en position* les axes de la section C.

Longueurs des axes. — Pour déterminer les longueurs des axes, nous nous appuierons sur les propriétés suivantes :

1° *Les fonctions*

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{ccc:c} & \Delta & & u\\ & & & v\\ \cdots & \cdots & \cdots & w\\ u & v & w & 0\end{array}\right| \qquad H_1=\left|\begin{array}{cccc:c} & & H & & u\\ & & & & v\\ & & & & w\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h\\ u & v & w & h & 0\end{array}\right|$$

sont des invariants.

En effet, elles sont respectivement les discriminants des fonctions

$$\varphi(x,y,z)+2t(ux+vy+wz)$$
$$f(x,y,z,t)+2\omega(ux+vy+wz+ht).$$

2° *Les coefficients et par suite aussi les racines de l'équation*

$$\Delta_1(S)=\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u\\ B'' & A'-S & B & v\\ B' & B & A''-S & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix}=0$$

sont des invariants.

En effet, elle est l'équation en S relative aux deux fonctions

$$\varphi(x,y,z)+2t(ux+vy+wz)\qquad\text{et}\qquad x^2+y^2+z^2.$$

Remarquons immédiatement que l'équation $\Delta_1(S)=0$ développée prend la forme

$$(8)\quad \Delta_1+[(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2)-\varphi(u,v,w)]S-(u^2+v^2+w^2)S^2=0.$$

Cela posé, prenons pour nouveaux axes de coordonnées OX, OY, OZ les axes de symétrie de la section C et la perpendiculaire OZ élevée à son plan par le centre O ; l'équation de la quadrique Σ sera

$$(9)\qquad A_1X^2 + A'_1Y^2 + A''_1Z^2 + 2B_1YZ + 2B'_1ZX + 2C''_1Z + D_1 = 0,$$

et les carrés des axes de la section auront pour valeurs

$$\alpha^2 = -\frac{D_1}{A_1} \qquad \beta^2 = -\frac{D_1}{A'_1}.$$

Le problème est donc ramené au calcul des constantes A_1, A'_1, D_1.

Si nous formons d'abord l'équation (5) pour le nouveau système d'axes, en remarquant, que, dans ce système, l'équation du plan P est $w_1 Z = 0$, nous obtiendrons l'équation

$$(A_1 - S)(A'_1 - S) = 0.$$

On a donc

$$A_1 = S_1 \qquad A'_1 = S_2,$$

en représentant toujours par S_1, S_2 les racines de l'équation (5).

Les valeurs des invariants Δ_1, H_1 pour les deux systèmes d'axes sont égales, car le carré du module de la transformation est l'unité ; on a donc les deux équations

$$\Delta_1 = -w_1^2 A_1 A'_1 \qquad H_1 = -w_1^2 A_1 A'_1 D_1,$$

d'où

$$D_1 = \frac{H_1}{\Delta_1}.$$

En résumé, les carrés des axes de la section C ont pour expressions

$$\alpha^2 = -\frac{H_1}{\Delta_1 S_1} \qquad \beta^2 = -\frac{H_1}{\Delta_1 S_2}.$$

182. Problème IV. — *Un plan* P *coupant une quadrique suivant une parabole, trouver les équations de l'axe de cette parabole et la grandeur de son paramètre.*

Équations de l'axe. — La méthode suivie dans la première partie du problème précédent est encore applicable : seulement, le plan sécant P transporté au sommet du cône asymptote est tangent à ce cône, et le déterminant Δ_1 est nul. Il résulte de là que l'équation (5) a une racine nulle S_2 et une racine S_1 différente de zéro.

A cette racine S_1 correspond un plan principal Q qui, par son intersection avec le plan P, détermine l'axe de la section.

Paramètre de la section. — Prenons pour nouveaux axes de coordonnées OX, OY, OZ l'axe de la section, la tangente en son sommet O et une perpendiculaire OZ élevée à son plan par le sommet O ; l'équation de la quadrique Σ sera

$$A'_1 Y^2 + A''_1 Z^2 + 2B_1 YZ + 2B'_1 ZX + 2C_1 X + 2C''_1 Z = 0,$$

et le paramètre p de la section aura pour valeur

$$p = -\frac{C_1}{A'_1}.$$

Le problème est donc ramené au calcul des constantes A'_1, C_1.

Formons encore l'équation (5) pour le nouveau système d'axes, *en ayant soin ici de ne pas supprimer le facteur commun* w_1^2, nous obtiendrons l'équation

$$A'_1 w_1^2 S - w_1^2 S^2 = 0.$$

Elle nous donne d'abord

$$A'_1 = S_1.$$

Si maintenant on se rappelle que les coefficients de l'équation (5) ne changent pas de valeur quand on passe du premier système d'axes au deuxième, on aura

$$w_1^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Enfin, en égalant les valeurs de l'invariant H_1 pour les deux systèmes d'axes, on obtient la relation

$$H_1 = w_1^2 A'_1 C_1^2 ;$$

donc

$$C_1 = \pm \sqrt{\frac{H_1}{(u^2 + v^2 + w^2) S_1}},$$

et, par suite,

$$p = \pm \frac{1}{S_1} \sqrt{\frac{H_1}{(u^2 + v^2 + w^2) S_1}},$$

avec

$$S_1 = A + A' + A'' - \frac{\varphi(u, v, w)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

183. Nous allons appliquer les résultats obtenus au paragraphe 181 à la détermination en grandeur et en position des axes de la section d'un ellipsoïde par le plan P dont l'équation est

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

la surface étant rapportée aux trois plans principaux.

On a

$$\Delta_1 = -\frac{u^2}{b^2c^2} - \frac{v^2}{c^2a^2} - \frac{w^2}{a^2b^2} \qquad H_1 = -\frac{h^2}{a^2b^2c^2} - \Delta_1.$$

former l'équation (5), il suffira de remplacer dans Δ_1 les quantités $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ par $\frac{1}{a^2} - S$, $\frac{1}{b^2} - S$, $\frac{1}{c^2} - S$ et d'égaler le résultat à zéro, ce qui donne

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2} - S} + \frac{v^2}{\frac{1}{b^2} - S} + \frac{w^2}{\frac{1}{c^2} - S} = 0. \tag{10}$$

On obtiendra les carrés des demi-axes de la section en substituant successivement à S les racines de l'équation (10), dans la relation

$$\rho^2 = \frac{1}{S}\left(1 - \frac{h^2}{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}\right).$$

L'equation (7) du paragraphe 181, pour le cas particulier qui nous occupe, est

$$S\ \alpha x + \beta y + \gamma z) - \frac{h}{u^2 + v^2 + w^2}\left(\frac{u\alpha}{a^2} + \frac{v\beta}{b^2} + \frac{w\gamma}{c^2}\right) = 0, \tag{11}$$

α, β, γ satisfaisant aux relations

$$\frac{\frac{1}{a^2} - S}{u}\alpha = \frac{\frac{1}{b^2} - S}{v}\beta = \frac{\frac{1}{c^2} - S}{w}\gamma.$$

En tenant compte de ces relations, l'équation (11) devient

$$S\left(\frac{ux}{\frac{1}{a^2} - S} + \frac{vy}{\frac{1}{b^2} - S} + \frac{wz}{\frac{1}{c^2} - S}\right)$$
$$-\frac{h}{u^2 + v^2 + w^2}\left[\frac{u^2}{a^2\left(\frac{1}{a^2} - S\right)} + \frac{v^2}{b^2\left(\frac{1}{b^2} - S\right)} + \frac{w^2}{c^2\left(\frac{1}{c^2} - S\right)}\right] = 0.$$

Si du coefficient de $\frac{h}{u^2 + v^2 + w^2}$ on retranche le premier membre de l'équation (10) multiplié par S, la dernière équation se simplifie et devient

$$\frac{ux}{\frac{1}{a^2} - S} + \frac{vy}{\frac{1}{b^2} - S} + \frac{wz}{\frac{1}{c^2} - S} - \frac{h}{S} = 0. \tag{12}$$

C'est dans l'équation (12) qu'on devra remplacer S successivement par les racines de l'équation (10) pour avoir les équations des plans Q, R.

184. Un ellipsoïde étant rapporté aux trois plans principaux, on peut déterminer en grandeur et en position les axes d'une section plane par la méthode suivante, qui ne nécessite pas l'emploi des invariants. Nous examinerons deux cas.

Premier cas. — *Le plan sécant* P′ *passe par le centre.* — L'équation du plan P′ et celle de l'ellipsoïde seront respectivement

$$ux + vy + wz = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soient A′ (x', y', z') un des sommets de la section C′ de l'ellipsoïde par le plan P′, et

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$$

l'équation de la sphère ayant même centre o que l'ellipsoïde et pour rayon le demi-axe oA′ de la section. Le plan P′ et les plans

$$(13) \qquad \begin{cases} xx' + yy' + zz' = \mathrm{R}^2 \\ \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} + \dfrac{zz'}{c^2} = 1 \end{cases}$$

qui touchent l'un la sphère et l'autre l'ellipsoïde au point A′, se couperont suivant une même droite A′T′ tangente à la section en ce point A′.

Des équations (13) on tire

$$xx'\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) + yy'\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) + zz'\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) = 0,$$

et cette équation, qui représente un plan passant par le centre o et la tangente A′T′, devra être identique avec celle du plan P′. En faisant cette identification, on obtient entre les coordonnées du sommet A′ les relations

$$(14) \qquad \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{x'}{u} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{y'}{v} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{z'}{w}.$$

Substituons ces valeurs des coordonnées x', y', z' dans la relation

$$ux' + vy' + wz' = 0,$$

qui exprime que le sommet A′ est dans le plan P′, nous aurons, pour déterminer la grandeur des axes de la section, l'équation

$$(15)\qquad \frac{u^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}}+\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}}=0.$$

L'axe oA' est représenté par les équations

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'},$$

qui, en tenant compte des relations (14), deviennent

$$(16)\qquad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\frac{x}{u}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)\frac{y}{v}=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)\frac{z}{w}.$$

En remplaçant, dans les équations (16), R^2 par les racines de l'équation (15), on aura les équations des deux axes de symétrie oA', oB' de la section C′.

Deuxième cas. — *Le plan sécant* P *est quelconque.* — Son équation est alors

$$ux+vy+wz+h=0.$$

On sait que les sections de l'ellipsoïde par les plans parallèles P, P′ sont des courbes homothétiques ; donc, les axes de symétrie de ces sections sont parallèles, et le rapport de leurs longueurs est égal au rapport d'homothétie.

Pour trouver ce rapport d'homothétie, rapportons l'ellipsoïde à trois plans diamétraux conjugués, dont l'un XoY coïncide avec le plan P′ ; les équations des sections C, C′ seront

$$Z=l \qquad \frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}=1-\frac{l^2}{c'^2},$$

$$Z=0 \qquad \frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}=1.$$

Sous cette forme, on voit que le rapport des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués parallèles, c'est-à-dire le carré du rapport d'homothétie, a pour valeur $1-\frac{l^2}{c'^2}$.

D'un autre côté $\frac{l}{c'}$ est égal à $\frac{d}{\mathrm{D}}$, en représentant par d et D les distances du centre de l'ellipsoïde au plan P et au plan tangent qui lui est parallèle ; donc, si 2ρ et $2\mathrm{R}$ sont les longueurs de deux axes parallèles des sections C et C', on aura

$$\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}=1-\frac{d^2}{\mathrm{D}^2},$$

ou bien

$$\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}=1-\frac{h^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

En remplaçant, dans cette relation, R par les racines de l'équation (15), on aura les longueurs des axes de la section C.

Reste à trouver les équations de ces axes ; ils sont parallèles à ceux de la section C' et passent par le centre I de la section C. Les coordonnées de ce centre, situé dans le plan P et sur le diamètre qui lui est conjugué, sont données par les relations

$$\frac{x_1}{a^2u}=\frac{y_1}{b^2v}=\frac{z_1}{c^2w}=\frac{-h}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

Il restera à remplacer, dans les équations (16), les coordonnées courantes par $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$.

CHAPITRE II

SECTIONS RECTILIGNES DES QUADRIQUES.

185. Nous nous proposons de rechercher si, parmi les quadriques autres que les cônes et les cylindres, il y en a quelqu'une sur laquelle on puisse appliquer une droite.

Une droite D étant située tout entière sur une quadrique, tout plan passant par cette droite coupera la surface suivant une seconde droite D′, et la section sera du genre hyperbole.

Il résulte de là que l'ellipsoïde et le paraboloïde elliptique dont aucune des sections planes n'est du genre hyperbole, n'admettront pas de sections rectilignes.

Je dis qu'il en est de même de l'hyperboloïde à deux nappes.

Pour le démontrer, rapportons la surface à trois plans diamétraux conjugués ; son équation sera

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}+1=0.$$

On peut regarder le plan yoz comme parallèle au plan d'une section hyperbolique *quelconque;* donc, si la surface admet des sections rectilignes, un des plans parallèles au plan yoz devra la couper suivant deux droites. Or, si, dans l'équation de la surface, on fait $x=d$, les équations

$$x=d \qquad \frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}+\frac{d^2}{a'^2}+1=0$$

de la section montrent que cette section est toujours une *véritable* hyperbole.

En résumé, nous n'aurons à considérer que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique.

Sections rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

186. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

de l'hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes peut être écrite de la manière suivante :

$$(1) \qquad \left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

On obtient l'équation (1) en éliminant λ entre les équations

$$(\lambda) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right) \\ &\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{aligned}\right.$$

ou en éliminant μ entre les équations

$$(\mu) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ &\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{a}\right). \end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que, si l'on fait varier λ ou μ, les deux systèmes de droites représentées par les équations (λ) ou (μ) seront situés sur l'hyperboloïde.

Nous dirons que les droites représentées par les équations (λ) forment le *système* λ, et que les droites représentées par les équations (μ) forment le *système* μ.

Théorème I. — *Par chaque point* M (x', y', z') *de l'hyperboloïde passent une droite du système* λ *et une droite du système* μ.

En effet, pour qu'une droite du système λ, par exemple, passe par le point M, il faut et il suffit que les équations

$$\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}=\lambda\left(1+\frac{x'}{a}\right)$$

$$\frac{y'}{b}-\frac{z'}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x'}{a}\right),$$

donnent pour λ la même valeur.

Or, en égalant les deux valeurs de λ tirées des équations précédentes, on obtient la relation

$$\left(\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}\right)\left(\frac{y'}{b}-\frac{z'}{c}\right)=\left(1+\frac{x'}{a}\right)\left(1-\frac{x'}{a}\right),$$

qui est satisfaite, puisque le point M est sur l'hyperboloïde.

Théorème II. — *Deux droites d'un même système ne sont pas situées dans un même plan.*

Soient

$$(\lambda)\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\\[2mm] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}$$

et

$$(\lambda')\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda'\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\\[2mm] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda'}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}$$

les équations de deux droites du système λ par exemple.

L'équation générale des plans P passant par la droite λ est

$$(2)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)+h\left[\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]=0.$$

Pour que ce plan contienne la droite λ', il faut et il suffit que l'équation

$$(\lambda'-\lambda)\left(1+\frac{x}{a}\right)+h\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=0$$

soit satisfaite quel que soit x. On devrait donc avoir à la fois

$$\lambda' - \lambda + h\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda' - \lambda - h\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Les droites λ, λ' étant distinctes, par hypothèse, le facteur $\lambda' - \lambda$ n'est pas nul ; après la suppression de ce facteur, les deux équations précédentes donnent pour h des valeurs égales et de signes contraires ; elles sont donc *incompatibles*.

Théorème III. — *Deux droites de systèmes différents sont situées dans un même plan.*

En effet, pour que le plan P qui passe par une droite λ contienne une droite du système μ, il faut et il suffit que l'équation

$$\mu\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \lambda\left(1 + \frac{x}{a}\right) + h\left[\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] = 0$$

soit satisfaite quel que soit x. On doit donc avoir à la fois

$$(3) \quad \mu - \lambda + h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{et} \quad -(\mu + \lambda) + h\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\right) = 0;$$

ces deux équations sont compatibles, car chacune d'elles donne pour h la même valeur

$$h = \lambda\mu.$$

Remarque I. — Pour tirer cette valeur de h des équations (3) on a supposé que les deux quantités $\mu - \lambda$, $\mu + \lambda$ n'étaient pas nulles ; notre conclusion subsiste encore quand l'une d'elles, $\mu - \lambda$ par exemple, est nulle.

En effet, dans cette hypothèse, la première des équations (3) est satisfaite identiquement et la seconde détermine le paramètre h.

Remarque II. — Si, dans l'équation (2), on remplace h par $\lambda\mu$, elle devient

$$(4) \quad (\mu - \lambda)\frac{x}{a} + (1 + \lambda\mu)\frac{y}{b} + (1 - \lambda\mu)\frac{z}{c} - (\lambda + \mu) = 0.$$

Cette équation représente le plan passant par les deux droites λ, μ, c'est-à-dire le plan touchant l'hyperboloïde au point de rencontre de ces deux droites.

187. Nous avons montré qu'on peut appliquer sur l'hyperboloïde à une nappe deux systèmes de droites, en employant une méthode particulière qui consiste à mettre l'équation de la surface sous la forme

$$PQ = RS,$$

P, Q, R, S désignant quatre fonctions du premier degré. Il faut faire voir maintenant que, par cette méthode, on a obtenu tous les systèmes de droites susceptibles d'être placées sur cette surface.

Soit D une droite située sur un hyperboloïde ; je dis qu'elle appartiendra soit au système λ, soit au système μ.

En effet, s'il en était autrement, on pourrait, par un point A de D, faire passer une droite λ, et, par un point B de D, faire passer une droite μ. On sait que les droites λ, μ sont dans un même plan qui contiendrait D ; ce plan couperait donc l'hyperboloïde suivant trois droites, c'est-à-dire suivant une courbe du troisième ordre.

188. Nous allons maintenant continuer l'étude des propriétés des sections rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

Théorème IV. — *Il y a sur l'hyperboloïde une droite* D' *et une seule parallèle à une droite donnée* D *située sur la surface.*

Les droites D et D' étant dans un même plan appartiendront l'une au système λ, l'autre au système μ. L'abscisse du point où une droite λ est rencontrée par une droite μ est donnée par l'équation

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

on en tire

$$\frac{x}{a}=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Les deux droites seront parallèles si l'on a $\mu+\lambda=0$; cette relation étant du premier degré par rapport à λ et à μ, le théorème est démontré.

Cependant pour compléter la démonstration il faut encore montrer qu'aucune des deux droites λ ou μ n'est rejetée à l'infini. Cela résulte de ce que toutes les droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe rencontrent l'ellipse principale ; en effet, les plans parallèles à celui de cette ellipse coupant la surface suivant des courbes du genre ellipse, aucune de ces droites ne peut être parallèle au plan de l'ellipse principale.

Remarque. — Le plan qui contient deux droites parallèles situées sur l'hyperboloïde à une nappe est un plan asymptote ; on aura son équation en faisant $\mu = -\lambda$ dans l'équation (4), ce qui donne

$$2\lambda\frac{x}{a} - (1-\lambda^2)\frac{y}{b} - (1+\lambda^2)\frac{z}{c} = 0. \tag{5}$$

On vérifie facilement que ces plans ont pour enveloppe le cône asymptote.

Théorème V. — *Toutes les droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe sont respectivement parallèles aux génératrices du cône asymptote.*

En effet, si entre les équations

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \lambda\dfrac{x}{a} \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{x}{a} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = -\mu\dfrac{x}{a} \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{x}{a} \end{cases}$$

qui représentent les premières une droite du système λ, les deuxièmes une droite du système μ transportées au centre de la surface, on élimine λ ou μ, on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

du cône asymptote.

Corollaire. — *Trois droites d'un même système ne sont pas parallèles à un même plan.*

En effet, deux de ces droites ne sont pas parallèles ; donc, transportées au centre de la surface, elles devront coïncider avec trois génératrices *distinctes* du cône asymptote. Si les trois droites considérées étaient parallèles à un même plan Q, le plan q mené par le centre du cône asymptote parallèlement à Q couperait ce cône suivant trois droites, ce qui est impossible.

Théorème VI. — *La projection, sur un plan principal, d'une droite* D *située sur un hyperboloïde à une nappe est tangente à la section principale correspondante.*

Supposons d'abord que l'on projette la droite D sur le plan de l'ellipse principale. Nous savons que cette droite n'est pas parallèle à ce plan principal ; elle rencontrera donc l'ellipse en un point A. Le plan déterminé par la droite D et la tangente AT à cette ellipse au point A touchera la surface au même point. Comme le point A est dans un plan principal, le plan tangent DAT lui est perpendiculaire ; donc la tangente AT est la projection de la droite D sur le plan principal.

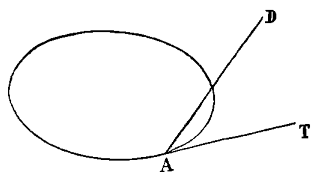


Fig. 34.

La même démonstration s'applique aux projections de la droite D sur les plans des deux hyperboles principales, quand cette droite rencontre ces hyperboles.

Reste à examiner le cas où la droite D est parallèle au plan de l'une de ces hyperboles.

L'équation de la surface rapportée à ses axes étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

celles de la section par un plan $y=\beta$ parallèle au plan principal xoz seront

$$y=\beta \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\beta^2}{b^2}$$

Cette section se composera de deux droites si β est égal à $\pm b$; les deux couples de droites correspondantes ont pour équations

$$y=\pm b \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

On voit que leurs projections sur le plan principal xoz sont tangentes à l'hyperbole principale correspondante, car elles coïncident avec ses asymptotes.

Génération de l'hyperboloïde à une nappe par le mouvement d'une droite.

189. Soient A, A′, A″ trois droites situées sur un hyperboloïde à une nappe et appartenant au même système λ. Assujettissons une droite G à rencontrer les droites A, A′, A″; la loi de son mouvement sera complètement déterminée. En effet, cette droite est assujettie à *trois conditions simples*, et, en mettant ses équations sous la forme

$$x = az + p \qquad y = bz + q,$$

on voit qu'elles contiennent *quatre* paramètres arbitraires.

Dans chacune de ses positions, la droite G aura avec l'hyperboloïde trois points communs; elle sera donc tout entière située sur cette surface et coïncidera successivement avec chaque droite du système μ.

Ainsi, *l'hyperboloïde à une nappe peut être engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois droites non parallèles à un même plan*

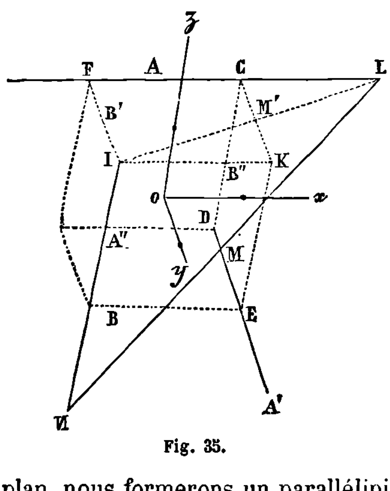


Fig. 35.

Réciproquement, *la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois droites* A, A′, A″ *non parallèles à un même plan est un hyperboloïde à une nappe.*

Par chacune des droites A, A′, A″ menons des plans respectivement parallèles aux deux autres; ces droites n'étant pas parallèles à un même plan, nous formerons un parallélipipède.

Nous prendrons pour origine le centre o de ce parallélipipède, les axes ox, oy, oz étant respectivement parallèles aux droites A, A′, A″.

Cela posé, si nous désignons par $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs des arêtes du parallélipipède précédent, les équations des trois directrices rectilignes seront

$$\mathrm{A}\left\{\begin{array}{l} z-c=0 \\ y+b=0 \end{array}\right. \quad \mathrm{A}'\left\{\begin{array}{l} x-a=0 \\ z+c=0 \end{array}\right. \quad \mathrm{A}''\left\{\begin{array}{l} y-b=0 \\ x+a=0. \end{array}\right.$$

La génératrice G rencontrant les droites A, A′, ses équations seront de la forme

$$(\mathrm{G}) \qquad \left\{\begin{array}{l} z-c+\alpha(y+b)=0 \\ z+c+\beta(x-a)=0. \end{array}\right.$$

En exprimant que cette génératrice rencontre la droite A″, on a la relation

$$(6) \qquad a\beta+b\alpha-c=0. \quad (\times)$$

On obtiendra l'équation de la surface engendrée par G, en éliminant α et β entre les équations (G) et la relation (6), ce qui donne

$$\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}+1=0.$$

Le lieu est une surface réglée du second ordre ayant un centre unique, l'origine ; elle n'est pas un cône, car elle ne passe pas par ce centre ; donc elle est un hyperboloïde à une nappe.

Remarque. — Les arêtes B, B′, B″ du parallélipipède opposées aux arètes A, A′, A″ appartiennent à la surface, car elles sont trois positions particulières de la génératrice. Ainsi, par exemple, la droite B rencontre les directrices A′, A″ en deux sommets du parallélipipède, et la directrice A à l'infini ; elle est donc bien une position particulière de la génératrice.

Il résulte de là que les trois directrices et les trois arêtes opposées forment un hexagone gauche situé sur l'hyperboloïde, et que les faces du parallélipipède auxiliaire touchent l'hyperboloïde, les points de contact étant les sommets de cet hexagone.

Ajoutons que les axes de coordonnées sont trois génératrices du cône asymptote.

190. Étant donné un hyperboloïde à une nappe, soient A, A′ deux droites du même système λ situées sur cette surface, et B″ une droite du second système μ rencontrant les deux premières aux points C, D ; il y aura sur la surface une droite A″ parallèle à B″. Construisons comme précédemment un parallélipipède à l'aide des droites A, A′, A″, et soit G une droite quelconque du système μ, rencontrant aux points L, M, N les droites A, A′, A″.

Cette génératrice mobile aura décrit sur les droites A, A′, à partir de sa position initiale B″, des segments CL, DM que nous désignerons par α et β, en les regardant comme positifs quand ils seront portés le premier dans le sens CF, le second dans le sens DE, et comme négatifs quand ils seront portés en sens contraires.

La projection de G sur le plan CFI sera une droite IM′L passant par le sommet I du parallélipipède. Si l'on rapporte cette projection aux droites CF, CK prises comme axes de coordonnées, son équation sera

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0;$$

et, en exprimant que la projection passe par le point I $(2a, 2b)$, on aura la relation

$$\frac{2a}{\alpha}+\frac{2b}{\beta}-1=0.$$

Cette relation exprime que les deux points mobiles L, M déterminent sur A et A′ deux divisions homographiques (G. P. 278). De là résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné un hyperboloïde à une nappe, une droite mobile du système μ détermine sur deux droites fixes du système λ, à partir d'une quelconque de ses positions, deux divisions homographiques.*

Réciproquement, *quand une droite* G *détermine sur deux droites fixes* A, A′ *à partir d'une de ses positions* CD, *deux divi-*

sions homographiques, cette droite engendre un hyperboloïde à une nappe.

Soient L, M les points où la droite G rencontre les directrices rectilignes A, A′ ; par le point C menons la droite CK parallèle à A′ et désignons encore par α, β les segments CL, DM affectés de signes fixés par la convention indiquée précédemment.

Par hypothèse, on aura entre α et β une relation de la forme

$$2a\beta + 2b\alpha = \alpha\beta$$

ne contenant pas de terme indépendant des variables, car, pour $\alpha = 0$, on doit avoir $\beta = 0$.

Cette relation exprime que la droite G projetée sur le plan FCK parallèlement à CD passe par un point fixe. En effet, par rapport aux axes CF, CK, cette projection a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

et cette équation est satisfaite par les coordonnées du point $I(2a, 2b)$.

Il résulte de là que la droite G rencontre la parallèle A″ menée par le point I à CD ; rencontrant trois droites A, A′, A″ non parallèles à un même plan, cette droite engendre un hyperboloïde à une nappe.

Il est bon d'observer que nous avons supposé que la relation qui définit ici les deux divisions homographiques contient le produit $\alpha\beta$.

Sections rectilignes du paraboloïde hyperbolique.

191. L'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

du paraboloïde hyperbolique rapporté aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet peut être écrite de la manière suivante :

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x. \tag{7}$$

On obtient l'équation (7) en éliminant λ entre les équations

$$(\lambda)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\lambda x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right.$$

ou en éliminant μ entre les équations

$$(\mu)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\mu x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\mu}.\end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que si l'on fait varier λ ou μ, les deux systèmes de droites représentées par les équations (λ) ou (μ) seront situés sur le paraboloïde.

Nous dirons que les droites représentées par les équations (λ) forment *le système* λ, et que les droites représentées par les équations (μ) forment le système μ.

Plans directeurs. — Les droites de chaque système sont respectivement parallèles aux plans qui ont pour équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0.$$

Ces plans sont *les plans directeurs* du paraboloïde; leur ensemble est représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0.$$

Quand on rapporte la surface à des axes quelconques, la fonction $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}$ devient $\varphi(X, Y, Z)$; donc, on obtient l'équation des plans directeurs d'un paraboloïde hyperbolique en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré dans l'équation de cette surface.

Théorème I. — *Par chaque point* M (x', y', z') *du paraboloïde hyperbolique passent une droite du système* λ *et une droite du système* μ.

La démonstration est la même que dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe.

Théorème II. — *Deux droites d'un même système ne sont pas situées dans un même plan.*

Soient

$$(\lambda)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x\\ &\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right.$$

et

$$(\lambda')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda' x\\ &\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda'}\end{aligned}\right.$$

les équations de deux droites du système λ par exemple.

L'équation générale des plans P passant par la droite λ est

$$(8)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}-2\lambda x+h\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-\frac{1}{\lambda}\right)=0.$$

Pour que ce plan contienne la droite λ', il faut et il suffit que l'équation

$$2(\lambda'-\lambda)x+h\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}\right)=0$$

soit satisfaite quel que soit x. Cela est impossible, car on n'a pas $\lambda=\lambda'$.

Théorème III. — *Deux droites de systèmes différents sont situées dans un même plan.*

En effet, pour que le plan P qui passe par la droite λ, contienne une droite du système μ, il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{1}{\mu} - 2\lambda x + h\left(2\mu x - \frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

soit satisfaite quel que soit x. On doit donc avoir à la fois

$$\frac{1}{\mu} - \frac{h}{\lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad -\lambda + h\mu = 0;$$

ces deux équations sont compatibles, car chacune d'elles donne pour h la même valeur

$$h = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Remarque. — Si, dans l'équation (8), on remplace h par $\frac{\lambda}{\mu}$, elle devient

$$(\lambda + \mu)\frac{y}{\sqrt{p}} - (\lambda - \mu)\frac{z}{\sqrt{q}} - 2\lambda\mu x - 1 = 0.$$

Cette équation représente le plan tangent au paraboloïde au point de rencontre des deux droites λ et μ.

192. Nous avons montré qu'on peut placer sur le paraboloïde hyperbolique deux systèmes de droites, en employant une méthode particulière qui consiste à mettre l'équation de la surface sous la forme

$$PQ = R,$$

P, Q, R désignant trois fonctions du premier degré. On fera voir, comme dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, que, par cette méthode, on a obtenu tous les systèmes de droites susceptibles d'être placées sur le paraboloïde hyperbolique.

Théorème IV. — *Il n'y a pas sur le paraboloïde hyperbolique de droite* D' *parallèle à une droite donnée* D *située sur la surface.*

Les droites D et D' étant dans un même plan devraient appartenir l'une au système λ, l'autre au système μ. L'abscisse du point où une droite λ est rencontrée par une droite du système μ est donnée par l'équation

$$x = \frac{1}{2\lambda\mu},$$

et, pour que cette abscisse soit infinie, il faut que μ soit nul. Dans cette hypothèse, l'une des équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}$$

de la droite μ représente un plan rejeté à l'infini ; cette droite n'est donc pas parallèle à la droite λ mais *rejetée à l'infini.*

Théorème V. — *La projection, sur un plan principal, d'une droite* D *située sur un paraboloïde hyperbolique, est tangente à la section principale correspondante.*

La démonstration est la même que dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe.

Génération du paraboloïde hyperbolique par le mouvement d'une droite.

193. Soient A, A′, A″ trois droites situées sur un paraboloïde hyperbolique et appartenant au même système λ. Si l'on assujettit une droite G à se mouvoir en rencontrant A, A′, A″, cette droite mobile aura, dans chacune de ses positions, trois points communs avec le paraboloïde ; elle sera donc tout entière située sur cette surface et coïncidera successivement avec chaque droite du système μ. Si nous nous rappelons que les trois droites A, A′, A″ sont ici parallèles à un même plan, nous en conclurons que *le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois droites parallèles à un même plan.*

Les trois directrices rectilignes appartenant au système λ, la droite mobile coïncidera successivement avec les droites du système μ et, par suite, restera parallèle à un même plan. D'un autre côté, le mouvement d'une droite est déterminé quand on l'assujettit à rencontrer deux droites fixes et à rester parallèle à un plan donné; il résulte de là que *le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur deux droites données et en restant parallèle à un plan donné.*

On voit que le paraboloïde appartient à la famille des conoïdes.

194. Les réciproques des deux propriétés que nous venons de signaler sont vraies.

1° *La surface engendrée par une droite* G *qui se meut en s'appuyant sur trois droites* A, A', A'' *parallèles à un même plan est un paraboloïde hyperbolique.*

Prenons pour axe des z une position de la génératrice G, et soient o, C', C'' les points où elle rencontre les directrices A, A', A''.

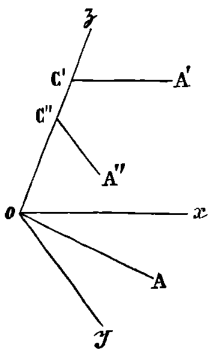


Fig. 36.

L'axe des x sera la droite ox parallèle à A' et l'axe des y la droite oy parallèle à A''; la droite A sera dans le plan xoy, puisque les trois directrices sont parallèles à un même plan.

Les équations des trois directrices sont

$$\text{A}\begin{cases} z=0 \\ y=mx \end{cases} \qquad \text{A}'\begin{cases} z=c' \\ y=0 \end{cases} \qquad \text{A}''\begin{cases} z=c'' \\ x=0. \end{cases}$$

La génératrice G rencontrant les droites A', A'', ses équations seront de la forme

$$\text{G} \qquad y=\alpha(z-c') \qquad x=\beta(z-c''). \quad (\times)$$

En exprimant que cette génératrice rencontre la droite A, on a la relation

$$(9) \qquad \alpha c' = m\beta c''.$$

On obtiendra l'équation de la surface engendrée par G, en éliminant α et β entre les équations (G) et la relation (9), ce qui donne

$$(10) \qquad c'y(z-c'')-mc''x(z-c')=0.$$

La surface est donc une quadrique; on voit facilement qu'elle a un centre unique rejeté à l'infini ; comme d'ailleurs cette surface est réglée, elle est un paraboloïde hyperbolique.

Remarque. — Quand c' est égal à c'', la surface a une ligne de centres et se compose de deux plans : le plan des deux droites A', A'' qui se coupent alors au point C' et le plan $C'o$A.

Ce résultat qu'on vérifie immédiatement à l'aide de l'équation (10), est facile à expliquer par la géométrie.

2° *La surface engendrée par une droite* G *qui se meut en s'appuyant sur deux droites* A, A' *et en restant parallèle à un plan donné* P *est un paraboloïde hyperbolique.*

Soient a, a' les points où les droites A, A' rencontrent le plan P. Nous prendrons aa' pour axe des x et le point o milieu de aa' pour origine.

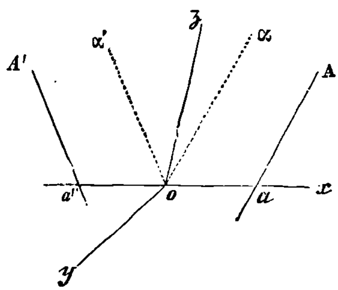


Fig. 37.

Par ce point o menons les droites $o\alpha$, $o\alpha'$ parallèles à A et à A' ; nous prendrons pour axe des y la trace du plan $\alpha o \alpha'$ sur le plan P, et pour axe des z la droite oz conjuguée harmonique de oy par rapport à $o\alpha$ et $o\alpha'$.

Posons $aa' = 2d$, les équations des deux directrices seront

$$\mathrm{A}\begin{cases} x = d \\ y = mz \end{cases} \qquad \mathrm{A'}\begin{cases} x = -d \\ y = -mz. \end{cases}$$

La génératrice G rencontrant les droites A, A', ses équations seront de la forme

$$\mathrm{G} \qquad \begin{aligned} y - mz &= \alpha(x - d) \\ y + mz &= \beta(x + d). \end{aligned}$$

Il faut exprimer que G est parallèle au plan des xy ou bien que le point où elle rencontre ce plan est rejeté à l'infini. On obtient ainsi la relation

$$\alpha = \beta ; \quad (x)$$

la surface a donc pour équation

$$(y - mz)(x + d) = (y + mz)(x - d),$$

ou, en réduisant,

$$mzx = dy.$$

La surface est donc une quadrique ; on voit facilement qu'elle a un centre unique rejeté à l'infini ; comme d'ailleurs cette surface est réglée, elle est un paraboloïde hyperbolique.

Remarque. — On vérifie facilement que le paraboloïde est ici rapporté à deux génératrices rectilignes ox, oz et au diamètre oy passant par leur point de rencontre.

195. Étant donné un paraboloïde hyperbolique, soient A, A′ deux droites du même système λ situées sur cette surface. Considérons deux droites déterminées du système μ rencontrant A, A′ aux points (a, a'), (b, b'), et une droite quelconque G du même système les rencontrant aux points c, c'.

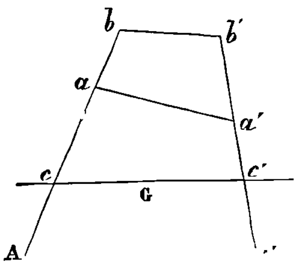


Fig. 38.

Par chacune des droites aa', bb', cc' on peut mener un plan parallèle au plan directeur correspondant; on aura ainsi trois plans parallèles entre eux coupant A, A′ aux points (a, a'), (b, b'), (c, c').

Un théorème connu de géométrie donne alors la relation

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{ab}{a'b'},$$

d'où résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné un paraboloïde hyperbolique, une droite mobile du système* μ *décrit sur deux droites fixes de l'autre système, à partir d'une de ses positions* aa', *des segments proportionnels.*

Réciproquement, *quand une droite* G *décrit sur deux droites fixes* A, A′, *à partir d'une de ses positions* aa', *des segments proportionnels, elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

En effet, soient bb' une position déterminée de G, et cc' une position quelconque, on aura par hypothèse

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{ab}{a'b'};$$

mais si c'_1 est le point d'intersection de A' avec le plan mené par c parallèlement aux deux droites aa', bb', on aura aussi

$$\frac{ac}{a'c'_1} = \frac{ab}{a'b'}.$$

On voit que le point c'_1 coïncide avec c', et la droite mobile cc' reste parallèle au plan P parallèle aux deux droites aa', bb' ; elle engendre donc un paraboloïde hyperbolique (*fig.* 38).

196. De cette réciproque on déduit la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donné un quadrilatère gauche $aa'bb'$, si ces droites* G, G' *glissent respectivement sur deux côtés opposés de manière à partager ces côtés en parties proportionnelles, ces droites engendrent le même paraboloïde.*

D'abord, de cette réciproque, il résulte que les droites G, G' engendrent des paraboloïdes P, P'.

Maintenant si cc' est une position de G et df une position de G', on aura

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c'a'}{c'b'} \qquad \frac{fb}{fb'} = \frac{da}{da'},$$

d'où

$$\frac{ca}{cb} \cdot \frac{fb}{fb'} \cdot \frac{c'b'}{c'a'} \cdot \frac{da'}{da} = +1 ;$$

donc les droites cc', df sont dans un même plan et se coupent en un point i.

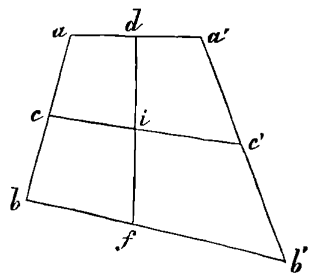


Fig. 39.

La droite df ayant avec le paraboloïde P trois points communs d, i, f, est tout entière sur cette surface, et les deux paraboloïdes P, P' se confondent.

C'est en se fondant sur cette propriété que l'on construit, à l'aide de fils, des modèles représentant le paraboloïde hyperbolique.

Imaginons un cadre solide ayant la forme d'un quadrilatère gauche $aa'b'b$; si l'on divise les côtés opposés aa', bb' en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils tendus les points de division de même rang, après les avoir numérotés les uns à partir de a, les autres à partir de b, ces fils représenteront l'un des systèmes de génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique.

En opérant de la même manière pour les côtés opposés ab, $a'b'$, on obtiendra le deuxième système de génératrices rectilignes (*fig.* 39).

197. Nous terminerons cette étude des génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique en démontrant une propriété souvent utile en Géométrie descriptive.

Théorème. — *Quand les droites du système λ sont parallèles au plan horizontal de projection, les projections verticales des droites du système μ passent par un même point.*

En effet, on peut toujours construire une droite D perpendiculaire au plan vertical de projection et rencontrant deux droites du système μ ; la droite D étant d'ailleurs parallèle au plan horizontal appartiendra au système λ.

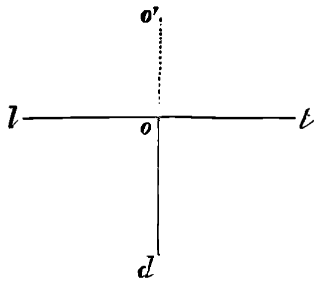


Fig. 40.

Comme toutes les droites du système μ rencontrent celles du système λ, leurs projections verticales passeront par le point o' projection verticale de la droite D.

198. Nous allons maintenant appliquer les propriétés des génératrices rectilignes d'une quadrique à la résolution du problème suivant :

Problème. — *Trouver, sur une quadrique, le lieu des points de rencontre des génératrices rectilignes se coupant à angle droit.*

1° *La surface est un hyperboloïde à une nappe.* — Soient M(x, y, z) le point de rencontre de deux génératrices rectilignes MD, MD' se coupant à angle droit, et

$$y = m x \qquad z = \mu x,$$
$$y = m' x \qquad z = \mu' x$$

les équations de ces droites transportées à l'origine, la surface étant rapportée à ses axes de symétrie.

Les deux droites MD, MD' étant perpendiculaires, on aura la relation

$$(11)\qquad 1 + mm' + \mu\mu' = 0.$$

Les projections des droites MD, MD' sur le plan principal xoy sont les tangentes menées du point $m(x, y)$ à l'ellipse principale correspondante ; donc m et m' sont les racines de l'équation

$$(x^2 - a^2)m^2 - 2xym + y^2 - b^2 = 0,$$

et l'on a

$$mm' = \frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2}.$$

En projetant les deux droites MD, MD' sur le plan principal zox, on verra que μ et μ' sont les racines de l'équation

$$(x^2 - a^2)\mu^2 - 2zx\mu + z^2 + c^2 = 0\,;$$

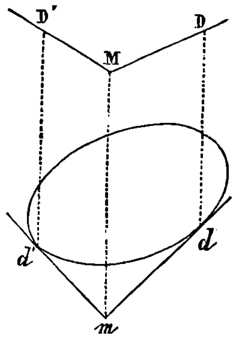


Fig. 141.

on aura donc

$$\mu\mu' = \frac{z^2 + c^2}{x^2 - a^2}.$$

En portant ces valeurs dans la relation (11), on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Ainsi le lieu cherché est la courbe d'intersection de l'hyperboloïde à une nappe avec une sphère concentrique ayant pour rayon

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Cette sphère est souvent appelée la sphère de Monge.

Discussion. — Nous supposerons $b > a$. Pour que le lieu existe, il faut et il suffit que le rayon de la sphère soit réel et plus grand que a ; on doit donc avoir à la fois

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0$$
$$a^2 + b^2 - c^2 > a^2.$$

La seconde de ces inégalités donne $b > c$, et la première est alors satisfaite.

En résumé, pour qu'il y ait sur l'hyperboloïde des génératrices rectilignes se coupant à angle droit, il faut et il suffit que le plus grand des axes réels surpasse l'axe imaginaire.

Si l'on a $b = c$, la sphère de Monge touche l'hyperboloïde aux extrémités A, A′ du plus petit des axes réels et n'a avec lui aucun autre point commun ; le lieu se réduit aux points A, A′.

Dans ce cas, la section principale perpendiculaire au plus petit des axes réels, est une hyperbole équilatère.

Supposons maintenant que l'on ait $a = c$; la sphère de Monge touchera l'hyperboloïde aux extrémités B, B′ du plus grand des axes réels. Le lieu est alors défini par les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} = 1 ;$$

on en tire

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

Cette équation représente deux plans passant par l'axe BB′ ; le lieu se compose donc de deux circonférences de cercles ayant BB′ pour diamètre commun.

Dans ce deuxième cas, la section principale perpendiculaire au plus grand des axes réels est une hyperbole équilatère.

Remarque. — Quand la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, les propriétés des diamètres conjugués donnent immédiatement la solution du problème que nous venons de résoudre.

Lemme. — *Dans une quadrique à centre, le plan tangent à l'extrémité* M(x, y, z) *d'un diamètre* OM *est parallèle au plan diamétral conjugué de ce diamètre.*

En effet, la quadrique étant rapportée à son centre, l'équation du plan tangent au point M est

$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z + 2D = 0,$$

et celle du plan diamétral conjugué de OM ne diffère de la précédente que par la suppression du terme 2D.

Cela posé, soient MD, MD′ deux génératrices rectilignes se coupant à angle droit; le plan diamétral conjugué du diamètre OM sera parallèle au plan DMD′ qui touche la surface au point M, et coupera l'hyperboloïde suivant une conique homothétique aux deux droites MD, MD′, c'est-à-dire suivant une hyperbole équilatère.

Deux diamètres conjugués de cette hyperbole ont la même longueur $2b'$ et forment avec OM un système de trois diamètres conjugués de l'hyperboloïde ; on a donc la relation

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 + b'^2 - b'^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Le point M est donc sur la courbe, intersection de l'hyperboloïde avec la sphère de Monge.

2° *La surface est un paraboloïde hyperbolique.* — Rapportons la surface à ses deux plans principaux et au plan tangent au sommet. Si nous conservons les mêmes notations que dans le cas précédent, nous aurons encore la relation (11), mais (m, m'), (μ, μ') seront respectivement les racines des équations

$$m^2x - my + \frac{p}{2} = 0$$

$$\mu^2x - \mu z - \frac{q}{2} = 0.$$

On en déduit

$$mm' = \frac{p}{2x} \qquad \mu\mu' = -\frac{q}{2x},$$

et ces valeurs, portées dans la relation (11), donnent l'équation

$$x = \frac{q-p}{2}.$$

Le lieu est donc l'hyperbole intersection du paraboloïde par un plan P perpendiculaire à l'axe.

Remarque. — Quand on a $p = q$, le plan P devient le plan tangent au sommet, et le lieu se compose des deux génératrices rectilignes passant par ce sommet.

Dans ce cas, les plans directeurs du paraboloïde sont rectangulaires ; on dit qu'il est *équilatère*.

Méthode générale pour trouver les droites situées sur une surface.

199. Nous allons indiquer une méthode générale pour trouver les droites situées sur une surface algébrique d'ordre m.

Soient

$$x = \alpha z + l \qquad y = \beta z + h$$

les équations d'une droite. Si, entre ces équations et celle de la surface, on élimine x et y, on obtiendra une équation du degré m par rapport à z. Pour que la droite soit située sur la surface, il faut et il suffit que cette équation se réduise à une identité.

On obtiendra ainsi $m + 1$ relations entre les *quatre* paramètres α, β, l, h.

Ainsi, en général, il est impossible de placer une droite sur une surface algébrique dont l'ordre est supérieur à trois.

Les surfaces du troisième ordre admettent, en général, un nombre fini de droites et les quadriques en admettent une infinité en se plaçant au point de vue analytique. Il ne faut pas en effet oublier que, dans le cas des quadriques, toutes ces droites peuvent être imaginaires.

Nous allons appliquer cette méthode aux quadriques.

1° *Hyperboloïde à une nappe.* — L'équation de cette surface rapportée à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Il y aura avantage à prendre ici les équations de la droite sous la forme

$$\frac{x}{a} = \alpha \frac{z}{c} + l \qquad \frac{y}{b} = \beta \frac{z}{c} + h.$$

L'équation donnant les cotes des points où la droite perce la surface est

$$(\alpha^2+\beta^2-1)\frac{z^2}{c^2}+2(\alpha l+\beta h)\frac{z}{c}+l^2+h^2-1=0.$$

En exprimant qu'elle se réduit à une identité, on a les trois relations de condition

$$\alpha^2+\beta^2=1 \qquad l^2+h^2=1$$

$$\alpha l+\beta h=0.$$

On satisfait aux deux premières relations en posant

$$\alpha=\cos\varphi \quad \beta=\sin\varphi \qquad \text{et} \qquad l=\cos\psi \quad h=\sin\psi.$$

La troisième devient alors $1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi=0$ et montre que les directions définies par les angles φ, ψ sont rectangulaires; d'où il résulte que l'on doit prendre $\psi=\varphi\pm\frac{\pi}{2}\cdot$

L'hyperboloïde à une nappe admet donc deux systèmes de droites réelles représentés par les équations

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\varphi\mp\sin\varphi$$

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi\pm\cos\varphi.$$

Le même calcul appliqué à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde à deux nappes montre que ces surfaces n'admettent pas de sections rectilignes réelles.

2° *Paraboloïde hyperbolique.* — L'équation de cette surface rapportée aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet est

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0.$$

Pour mettre en évidence certaines propriétés des génératrices rectilignes, il y aura avantage à prendre les équations de la droite sous la forme

$$y=\alpha x+l \qquad z=\beta y+h$$

L'équation donnant les ordonnées des points où la droite perce la surface est

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta^2}{q}\right)y^2-2\left(\frac{\beta h}{q}+\frac{1}{\alpha}\right)y-\frac{h^2}{q}+2\frac{l}{\alpha}=0.$$

En exprimant qu'elle se réduit à une identité, on a les trois relations de condition

$$\frac{\beta^2}{q}=\frac{1}{p} \qquad \frac{\beta h}{q}+\frac{1}{\alpha}=0 \qquad 2\frac{l}{\alpha}=\frac{h^2}{q}.$$

On en tire

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{q}{p}} \qquad h=\mp\frac{q}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{q}} \qquad l=\frac{p}{2\alpha}.$$

Le paraboloïde hyperbolique admet donc deux systèmes de droites réelles représentés par les équations

$$y=\alpha x+\frac{p}{2\alpha}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\left(y-\frac{p}{\alpha}\right).$$

La première montre que les projections de ces droites sur le plan principal xoy sont tangentes à la parabole principale correspondante ; la seconde montre que les droites de chaque système sont respectivement parallèles à un même plan.

Pour appliquer ce calcul au paraboloïde elliptique, il faut changer q en $-q$; on n'obtient que des droites imaginaires.

200. **Remarque.** — Pour trouver les équations des droites que l'on peut placer sur une quadrique, la surface étant rapportée à des axes quelconques, il sera préférable, au lieu d'appliquer la méthode générale exposée au paragraphe 199, de décomposer le premier membre de son équation en une somme de carrés.

L'équation de la surface prendra l'une des formes suivantes :

$$P^2+Q^2-R^2=1 \qquad \text{ou} \qquad P^2-Q^2=R,$$

et l'on pourra appliquer la méthode suivie aux paragraphes 186 et 191.

CHAPITRE III

SECTIONS CIRCULAIRES DES QUADRIQUES.

Nous nous proposons de rechercher s'il existe des plans coupant une quadrique suivant des cercles; ces plans sont appelés les *plans cycliques.*

Nous n'aurons à considérer ni le paraboloïde ni le cylindre hyperboliques, ni le cylindre parabolique; car ces surfaces n'admettent pas de sections du genre ellipse.

Première solution.

201. Cette solution, presque exclusivement géométrique, repose sur le lemme suivant :

Lemme. — *Si une quadrique admet des plans cycliques, ils sont perpendiculaires à un plan principal.*

Soit P un plan coupant une quadrique suivant un cercle; les plans qui lui sont parallèles la couperont également suivant des cercles dont les centres seront situés sur le diamètre OA conjugué du plan P.

Le plan mené par OA perpendiculairement au plan P, divisant tous ces cercles en deux parties qui sont symétriques par rapport à lui, partagera la surface en deux parties symétriques; il est donc un plan principal.

Nous allons maintenant considérer les différentes quadriques en laissant de côté le paraboloïde et le cylindre hyperboliques ainsi que le cylindre parabolique.

202. Ellipsoïde. — Soient AA', BB', CC' les axes de symétrie de l'ellipsoïde et $2a$, $2b$, $2c$ leurs longueurs; nous supposerons $a > b > c$.

Les sections de la surface par des plans parallèles étant homothétiques, il suffira de chercher les plans diamétraux donnant des sections circulaires; ces plans étant, d'après le lemme, perpendiculaires à un plan principal, passeront par un des axes de symétrie.

Les plans cycliques inconnus ne peuvent pas passer par l'axe majeur AA'; en effet, un pareil plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse ayant pour axes AA' et le diamètre, trace du plan sécant, sur le plan principal BOC. La longueur de ce diamètre étant comprise entre $2b$ et $2c$, ne pourra devenir égale à $2a$ pour aucune position du plan sécant.

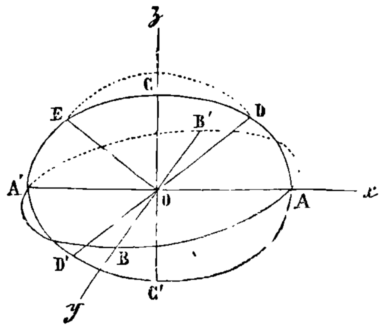


Fig. 42.

Pour une raison analogue, les plans cycliques ne peuvent pas passer par l'axe mineur CC'.

Considérons donc un plan passant par l'axe moyen BB' et soit DD' sa trace sur le plan AOC. La longueur du diamètre DD' étant comprise entre $2a$ et $2c$ pourra devenir égale à $2b$, et alors la section de l'ellipsoïde par le plan sera un cercle.

Du point O comme centre avec un rayon égal à b, décrivons, dans le plan de l'ellipse principale ACA', un arc de cercle coupant cette ellipse aux points D, E; les plans diamétraux DOB, EOB et ceux qui leur sont parallèles seront des plans cycliques.

Ainsi, *l'ellipsoïde à trois axes inégaux admet deux séries de plans cycliques parallèles à l'axe moyen et symétriquement placés par rapport au plan de l'axe majeur et de l'axe moyen.*

Equation des plans cycliques. — Dans le plan AOC, les équations de l'ellipse principale ACA' et du cercle ODE sont

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+z^2}{b^2}=1.$$

On en déduit par soustraction

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0;$$

cette équation représente deux plans passant par l'axe moyen OB et, respectivement, par les diamètres OD, OE, c'est-à-dire les plans cycliques.

Quand l'ellipsoïde est de révolution, les deux directions de plans cycliques se confondent avec celle du plan principal perpendiculaire à l'axe de révolution.

Remarque. — Le cylindre elliptique ayant pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

peut être considéré comme un ellipsoïde dont le grand axe $2a$ est devenu infini ; le cylindre elliptique admet donc deux directions de plans cycliques parallèles au plus grand des axes d'une section droite.

203. *Hyperboloïde à une nappe.* — Les plans cycliques diamétraux ne peuvent pas passer par l'axe imaginaire, car les sections faites par les plans passant par cet axe sont des hyperboles.

Considérons donc un plan passant par l'axe réel OB et coupant la surface suivant une courbe du genre ellipse ; sa trace sur le plan principal COA devra être un diamètre *réel* OD de l'hyperbole principale correspondante. Les longueurs des axes de cette ellipse sont $2b$ et $2OD$; comme OD est plus grand que $OA = a$, il faut et il suffit, pour que la section puisse devenir un cercle, que l'on ait $b > a$.

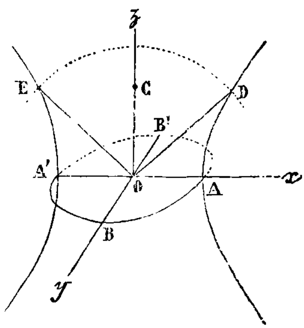


Fig. 43.

Cette condition étant remplie, on décrira du point O comme centre avec un rayon égal à b, dans le plan de l'hyperbole principale COA, un arc de cercle coupant cette hyperbole aux points D, E ; les plans diamétraux DOB, EOB et ceux qui leur sont parallèles seront des plans cycliques.

Ainsi, *l'hyperboloïde à une nappe admet deux séries de plans cycliques parallèles au plus grand des axes réels et symétriquement placés par rapport au plan des deux axes réels.*

Équation des plans cycliques. — On l'obtient en retranchant les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+z^2}{b^2}=1,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)z^2=0.$$

Quand l'hyperboloïde est de révolution, les deux directions de plans cycliques se confondent avec celle du plan principal perpendiculaire à l'axe de révolution

Remarque. — Un cône du second ordre admet aussi deux séries de plans cycliques. En effet, son équation et celle de l'hyperboloïde dont il est le cône asymptote ne diffèrent que par le terme tout connu (133); il en résulte que les sections de ces deux surfaces par un même plan sont des coniques homothétiques (179).

204. *Hyperboloïde à deux nappes.* — Notre méthode n'est plus directement applicable, car toutes les sections diamétrales du genre ellipse sont imaginaires, quand la quadrique est un hyperboloïde à deux nappes.

Pour lever la difficulté, il suffit d'associer à l'hyperboloïde à deux nappes considéré H_2, l'hyperboloïde à une nappe H_1 qui lui est conjugué (176). Les équations de ces deux surfaces ne différant que par le terme tout connu, les plans cycliques de l'hyperboloïde H_1 coupent aussi l'hyperboloïde H_2 suivant des cercles.

Ainsi, *l'hyperboloïde à deux nappes admet deux séries de plans cycliques parallèles au plus grand des deux axes imaginaires et symétriquement placés par rapport au plan de ces deux axes.*

Quand l'hyperboloïde est de révolution, les deux directions de plans cycliques se confondent.

205. *Paraboloïde elliptique.* — L'équation de cette surface rapportée aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet est

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0;$$

elle a les mêmes termes du second degré que l'équation

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=h$$

qui représente un cylindre elliptique. Ce cylindre admettant deux séries de plans cycliques (202. REMARQUE), il en est de même du paraboloïde elliptique.

Supposons $p>q$, le grand axe de la section droite du cylindre auxiliaire sera dirigé suivant oy et aura pour longueur $2\sqrt{ph}$.

Du point O comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{ph}$ décrivons, dans le plan zOx, un arc de cercle coupant la génératrice DE aux points D, E. Les plans parallèles aux plans DOB, EOB seront des plans cycliques pour le cylindre et, par suite, pour le paraboloïde.

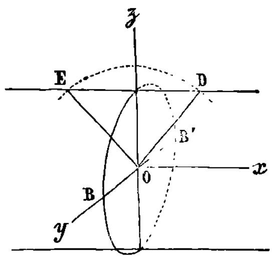


Fig. 44.

Ainsi, *le paraboloïde elliptique admet deux séries de plans cycliques qui sont perpendiculaires au plan de la parabole principale de moindre paramètre et symétriquement placés par rapport au plan de l'autre parabole principale.*

Équation des plans cycliques. — On l'obtient en retranchant les deux équations

$$\frac{z^2}{qh}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+z^2}{ph}=1,$$

ce qui donne

$$\frac{x^2}{p}-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)z^2=0.$$

Quand le paraboloïde est de révolution, les deux directions de plans cycliques se confondent.

206 Ombilics. — *On appelle ombilics d'une quadrique les points où le diamètre conjugué d'un plan cyclique rencontre la surface.*

On voit facilement que l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes ont quatre ombilics ; le paraboloïde elliptique en a deux et l'hyperboloïde à une nappe n'a pas d'ombilic réel.

Deuxième solution.

207. Nous allons maintenant chercher *analytiquement* les plans cycliques d'une quadrique rapportée à des axes quelconques que nous supposerons cependant *rectangulaires.*

Nous établirons d'abord deux lemmes dont on fait très souvent usage.

Lemme I. — *Quand, dans l'intersection de deux quadriques, la courbe d'entrée est plane, la courbe de sortie est également plane.*

Prenons pour plan des xy celui de la courbe d'entrée, les équations des deux quadriques seront

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy\\&\quad+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}=0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}_1''z^2+2\mathrm{B}_1yz+2\mathrm{B}_1'zx+2\mathrm{B}''xy\\&\quad+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}_1''z+\mathrm{D}=0,\end{aligned}$$

car on doit obtenir le même résultat quand on pose $z=0$ dans chacune d'elles.

De ces deux équations, on tire par soustraction

$$\{(\mathrm{A}''-\mathrm{A}_1'')z+2(\mathrm{B}-\mathrm{B}_1)y+2(\mathrm{B}'-\mathrm{B}_1')x+2(\mathrm{C}''-\mathrm{C}_1'')\}z=0.$$

Cette équation représente deux plans dont l'un est celui de la courbe d'entrée ; le théorème est donc démontré.

Lemme II. — *L'équation générale des quadriques passant par l'intersection de deux quadriques ayant pour équations*

$$\mathrm{U}=0 \qquad \mathrm{V}=0$$

est

$$\mathrm{U}+\lambda\mathrm{V}=0. \tag{1}$$

D'abord, quand λ varie, l'équation (1) représente un faisceau de quadriques passant par l'intersection des quadriques données; car pour un point de cette intersection on a à la fois $U = V = 0$.

En second lieu l'équation (1) représente toutes les quadriques passant par cette intersection.

Soit en effet A une quadrique *quelconque* passant par cette intersection; prenons sur elle un point $M(x_1, y_1, z_1)$ non situé sur l'intersection des quadriques U, V.

En exprimant que l'équation (1) est satisfaite par les coordonnées du point M, on aura la relation $U_1 + \lambda V_1 = 0$; en désignant par U_1 et V_1 les valeurs que prennent les fonctions U, V pour $x = x_1$, $y = y_1$ et $z = z_1$.

En tenant compte de cette relation, l'équation (1) devient

$$\frac{U}{U_1} = \frac{V}{V_1};$$

je dis que la quadrique B qu'elle représente se confond avec A.

Pour le démontrer, menons par le point M un plan *quelconque* P; il coupe les surfaces A et B suivant les mêmes coniques. En effet, ces coniques ont *cinq* points communs, savoir le point M et les quatre points où le plan P rencontre la courbe d'intersection des quadriques U, V.

Tous les plans passant par M coupant les quadriques A, B suivant la même conique, elles se confondent.

208. Ces deux lemmes vont nous servir à démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Les plans cycliques d'une quadrique sont parallèles aux plans que représente l'équation*

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

quand on y remplace S *par une racine de l'équation en* S.

Soit C un cercle situé sur une quadrique dont l'équation est $f = 0$; par ce cercle faisons passer une sphère Σ; la courbe d'entrée de l'intersection des deux surfaces étant plane, la courbe de sortie sera également plane.

Il résulte de là que, si $\Sigma = 0$ est l'équation de la sphère, l'équation

$$f - S\Sigma = 0$$

qui représente toutes les quadriques passant par l'intersection de f et de Σ, devra se décomposer en un produit de deux facteurs pour une valeur convenablement choisie de S. Pour cette valeur S_i on aura identiquement

$$f - S_i\Sigma \equiv (P + \alpha)(Q + \beta),$$

P, Q étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z et α, β des constantes.

En ne prenant, dans cette identité, que les termes du second degré, on en déduit la nouvelle identité

$$\varphi - S_i(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PQ$$

qui montre que S_i est une racine de l'équation en S, et que le plan du cercle C est parallèle à l'un de ceux que représente l'équation (2), pour $S = S_i$.

Réciproquement, *toutes les directions de plans ainsi obtenus correspondent à des plans cycliques.*

En effet, de l'identité

$$\varphi - S_i(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PQ$$

on déduit l'identité

$$\varphi \equiv S_i(x^2 + y^2 + z^2) + PQ,$$

et l'équation de la quadrique prend la forme

$$S_i(x^2 + y^2 + z^2) + PQ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Les intersections de la surface par des plans parallèles aux plans P ou Q sont situées sur des sphères ; donc ces plans sont bien des plans cycliques.

209. A chacune des racines S_1, S_2, S_3 de l'équation en S correspond un *système* de deux directions de plans cycliques ; nous allons démontrer que le système qui correspond à la racine moyenne est *seul* formé de deux directions réelles.

Nous supposerons $S_1 > S_2 > S_3$.

Quand on passe des axes ox, oy, oz aux axes de symétrie CX, CY, CZ du cône asymptote de la quadrique, la fonction $\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2)$ devient

$$(S_1 - S)X^2 + (S_2 - S)Y^2 + (S_3 - S)Z^2.$$

Sous cette forme on voit que cette fonction égalée à zéro ne peut représenter deux plans réels qu'autant que l'on y remplace S par la racine moyenne S_2.

210. De la même forme on déduit également les propriétés suivantes :

Quand les trois racines S_1, S_2, S_3 sont distinctes, la quadrique n'admet que *deux* directions de plans cycliques réels.

Si deux de ces racines sont égales, les deux directions de plans cycliques réels se confondent.

Enfin si les trois racines sont égales, un plan quelconque coupe la quadrique suivant des cercles ; la surface est alors une sphère.

Il résulte de cette discussion qu'une quadrique admettant plus de deux directions de plans cycliques réels, est nécessairement une sphère.

211. Remarque. — La méthode donnée par Cauchy pour séparer les racines de l'équation en S permet aussi de montrer que, pour avoir des plans cycliques réels, il faut dans l'équation

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{2}$$

remplacer S par la racine moyenne de l'équation en S.

En effet, cette équation représentera deux plans réels si leur intersection par le plan yoz, par exemple, est formée de deux droites réelles. Les équations de cette intersection sont

$$x = 0 \qquad (A' - S)y^2 + (A'' - S)z^2 + 2Byz = 0 ;$$

elle se composera de deux droites réelles, si l'on a

$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 < 0$$

c'est-à-dire si S est compris entre les deux racines s_1, s_2 de l'équation

$$a = (A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0.$$

Or les racines de l'équation en S sont séparées par la suite

$$-\infty \qquad s_1 \qquad s_2 \qquad +\infty;$$

donc on doit remplacer S par la racine moyenne S_2 de cette équation.

Si S_2 annulait a, on couperait les deux plans représentés par l'équation (2) par un autre plan de coordonnées ; dans le cas où la nouvelle section serait encore formée d'une droite double, les deux plans cycliques seraient confondus et la surface serait de révolution.

212. Nous terminerons l'étude des sections circulaires d'une quadrique par la démonstration du théorème suivant dû à Hachette.

Théorème. — *Deux sections cycliques appartenant au même système mais situées dans des plans non parallèles sont sur une même sphère.*

Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations qui définissent les directions des deux plans cycliques d'un *même système*, c'est-à-dire celles qui correspondent à une *même* racine S_i de l'équation en S ; on aura identiquement

$$\varphi(x, y, z) - S_i(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PQ,$$

et l'équation de la quadrique prendra la forme

$$S_i(x^2 + y^2 + z^2) + PQ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Deux sections cycliques de ce système, situées dans des plans non parallèles, ont respectivement pour équations

$$P = \alpha \qquad S_i(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha Q + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

et

$$Q = \beta \qquad S_i(x^2 + y^2 + z^2) + \beta P + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

On voit immédiatement que ces deux sections sont situées sur la sphère dont l'équation est

$$S_i(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha Q + \beta P + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D - \alpha\beta = 0.$$

CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS. — PLAN POLAIRE. — NORMALES.

Plans tangents.

213. Les quadriques de la première classe étant rapportées à leurs plans principaux, l'équation du plan tangent en fonction des coordonnées x, y, z du point de contact M est

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0 \tag{1}$$

si la surface est un *ellipsoïde ;*

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}-1=0$$

si elle est un *hyperboloïde à une nappe*, et

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}+1=0$$

si cette surface est un *hyperboloïde à deux nappes.*

Les quadriques de la deuxième classe étant rapportées aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet, l'équation du plan tangent en fonction des coordonnées x, y, z du point de contact est

$$\frac{Yy}{p}+\frac{Zz}{q}-(X+x)=0 \tag{2}$$

si la surface est un *paraboloïde elliptique*, et

$$\frac{Yy}{p}-\frac{Zz}{q}-(X+x)=0$$

si elle est un *paraboloïde hyperbolique.*

214. Application. — *Trouver le lieu des sommets des parallélipipèdes construits sur trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

Considérons trois demi-diamètres conjugués rencontrant l'ellipsoïde aux points A′ (x, y, z), B′ (x_1, y_1, z_1), C′ (x_2, y_2, z_2) ; l'un des sommets M du parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués considérés se trouvant à l'intersection des plans tangents aux points A′, B′, C′, ses coordonnées satisferont aux équations

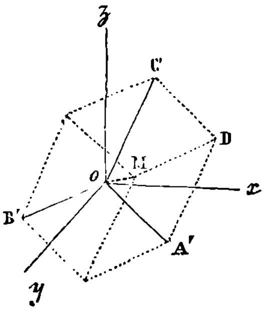


Fig. 45.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}+\dfrac{Zz}{c^2}-1=0 \\ \dfrac{Xx_1}{a^2}+\dfrac{Yy_1}{b^2}+\dfrac{Zz_1}{c^2}-1=0 \\ \dfrac{Xx_2}{a^2}+\dfrac{Yy_2}{b^2}+\dfrac{Zz_2}{c^2}-1=0. \end{cases}$$

Projetons orthogonalement, sur les axes de coordonnées, les deux chemins oM, oA′DM, en remarquant que les arêtes A′D, DM du parallélipipède ont respectivement les mêmes projections que oC′ et oB′, nous aurons les relations

$$(4)\quad \begin{cases} X=x+x_1+x_2 \\ Y=y+y_1+y_2 \\ Z=z+z_1+z_2. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (3) en tenant compte des relations (4), nous obtiendrons, pour représenter le lieu des points M, l'équation

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=3.$$

Le lieu est donc un ellipsoïde ayant les mêmes plans principaux que l'ellipsoïde donné; les longueurs des axes étant

$$2a\sqrt{3} \qquad 2b\sqrt{3} \qquad 2c\sqrt{3}.$$

215. Équation du plan tangent parallèle à un plan donné.—

Proposons-nous d'exprimer que le plan ayant pour équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - d = 0 \tag{5}$$

est tangent à une quadrique; α, β, γ étant des constantes données.

Si cette quadrique est un ellipsoïde, on identifiera cette équation avec l'équation (1), ce qui donne les relations

$$\frac{x}{a^2\alpha} = \frac{y}{b^2\beta} = \frac{z}{c^2\gamma} = \frac{1}{d}.$$

On en tire

$$\frac{x}{a} = \frac{a\alpha}{d}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{b\beta}{d}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{c\gamma}{d}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde à laquelle satisfont les coordonnées x, y, z du point de contact M du plan tangent, on a la relation

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = d^2;$$

l'équation du plan tangent est donc

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}.$$

On passera de l'ellipsoïde à l'hyperboloïde à une nappe en changeant c^2 en $-c^2$, et de la même surface à l'hyberboloïde à deux nappes, en changeant a^2 et b^2 en $-a^2$ et $-b^2$.

Si la quadrique est un paraboloïde elliptique, on identifiera l'équation (5) avec l'équation (2), ce qui donne les relations

$$\frac{y}{p\beta} = \frac{z}{q\gamma} = -\frac{1}{\alpha} = \frac{x}{d}.$$

On en tire

$$x = -\frac{d}{\alpha}, \qquad y = -\frac{p\beta}{\alpha}, \qquad z = -\frac{q\gamma}{\alpha};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation du paraboloïde, on a la relation

$$d = -\frac{1}{2\alpha}(p\beta^2 + q\gamma^2).$$

L'équation cherchée du plan tangent est donc

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = -\frac{1}{2\alpha}(p\beta^2 + q\gamma^2).$$

Pour passer du paraboloïde elliptique au paraboloïde hyperbolique, on changera q en $-q$.

216. Application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à une quadrique donnée.*

Supposons que la quadrique soit un ellipsoïde, les équations des trois faces d'un des trièdres seront

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha X + \beta Y + \gamma Z = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2} \\ \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = \sqrt{a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2} \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z = \sqrt{a^2\alpha_2^2 + b^2\beta_2^2 + c^2\gamma_2^2}. \end{cases}$$

Ces trois plans étant perpendiculaires deux à deux, on a entre les *neuf* cosinus (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les six relations

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 = 0 \\ \alpha\,\alpha_2 + \beta\,\beta_2 + \gamma\,\gamma_2 = 0 \\ \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma = 0. \end{cases}$$

Comme on a en tout *neuf* équations, il semble que par chaque point de l'espace on peut mener à un ellipsoïde trois plans tangents formant un trièdre trirectangle ; il n'en est pas ainsi cependant.

En effet, les neuf cosinus vérifient les relations (III) et (IV) du paragraphe 14, dans lesquelles la lettre a doit être remplacée par α, la lettre b par β et la lettre c par γ.

Si l'on ajoute alors les équations (6) après les avoir élevées au carré, on obtient l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

le sommet du trièdre doit donc se trouver sur la sphère de Monge.

217. Nous avons obtenu *une* relation entre les coordonnées X, Y, Z ; mais il n'est pas prouvé qu'en combinant d'une autre manière les équations (6), on ne pourra pas obtenir une seconde relation entre ces coordonnées.

Pour avoir le droit de dire que la sphère de Monge est *le lieu* des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde, il faut faire voir que les coordonnées de chacun de ces sommets ne doivent être liées que par *une seule* relation.

Il y aura aussi à expliquer pourquoi ces coordonnées sont liées par une relation et pourquoi on n'a trouvé cependant que *neuf* relations entre les neuf cosinus.

Soit M le sommet d'un trièdre dont les faces touchent l'ellipsoïde ; imaginons le cône C circonscrit à l'ellipsoïde et dont le sommet est en M. Ce cône touchera les trois faces du trièdre, et nous verrons plus loin qu'il est du second ordre.

Maintenant, il a été démontré (168) qu'il n'est pas en général possible de circonscrire un trièdre trirectangle à un cône du second ordre ; pour qu'il en soit ainsi, *une* relation de condition et *une seule* est nécessaire.

Cette propriété du cône du second ordre montre : 1° que le sommet d'un trièdre trirectangle dont les faces touchent un ellipsoïde n'est pas arbitraire ; 2° que les coordonnées de ce sommet doivent vérifier *une seule* relation ; ce sommet décrit donc une surface qui est dès lors la sphère de Monge.

Quand le point M est situé sur la sphère de Monge, on peut supprimer une des équations (6), (7) et (8) ; mais il y a *une infinité* de trièdres trirectangles circonscrits au cône auxiliaire C ; donc, après la suppression de cette relation, les neuf cosinus ne doivent pas être déterminés. On comprend dès lors qu'en mettant le problème proposé en équation, on ait été conduit seulement à *neuf* relations de condition.

218. Remarque. — La considération du cône C permet de donner une autre solution du problème que nous venons de résoudre.

Il faut, comme nous l'avons dit plus haut, exprimer que l'on peut circonscrire au cône C un trièdre trirectangle, ou bien exprimer que l'on peut placer les arêtes d'un trièdre trirectangle sur le cône C′ supplémentaire du cône C.

Nous allons chercher l'équation du cône C′ lieu des perpendiculaires abaissées du centre de l'ellipsoïde sur les plans tangents passant par le point M (x, y, z), et nous exprimerons que l'on peut placer sur ce cône les arêtes d'un trièdre trirectangle.

Soit

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}$$

l'équation d'un plan tangent à l'ellipsoïde ; en écrivant qu'il passe par le point M on a la relation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}.$$

L'équation du cône C′ s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre cette relation et les équations

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$$

de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent, ce qui donne l'équation

$$(Xx + Yy + Zz)^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2.$$

En égalant à zéro la somme des coefficients de X^2, Y^2, Z^2, on retrouve l'équation de la sphère de Monge.

219. Supposons maintenant que la quadrique soit un paraboloïde. La surface étant rapportée aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet, les équations des trois faces d'un des trièdres seront

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = -\frac{1}{2\alpha}(p\beta^2 \pm q\gamma^2),$$

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = -\frac{1}{2\alpha_1}(p\beta_1^2 \pm q\gamma_1^2)$$

$$\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z = -\frac{1}{2\alpha_2}(p\beta_2^2 \pm q\gamma_2^2).$$

Ajoutons ces trois équations, multipliées respectivement par α, α_1, α_2, et tenons compte des relations qui résultent de ce que les trois plans tangents sont perpendiculaires deux à deux, nous obtiendrons l'équation

$$X = -\frac{1}{2}(p \pm q).$$

Le lieu est alors un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde ; ce plan se confond avec le plan tangent au sommet quand le paraboloïde est hyperbolique et équilatère.

220. Remarque. — Du problème que nous venons de résoudre on peut déduire le lieu des points de rencontre des génératrices rectilignes d'une quadrique qui se coupent à angle droit.

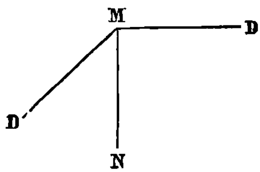


Fig. 46.

Soient en effet MD, MD' deux génératrices d'une quadrique se coupant à angle droit ; menons la normale MN au point M. Le plan DMD' sera tangent à la quadrique et il en sera de même des plans NMD, NMD' qui passent chacun par une génératrice rectiligne de la quadrique. Comme le trièdre MDD'N est trirectangle, le point M est sur la sphère de Monge si la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, et sur le plan qui a pour équation

$$x = -\frac{p - q}{2},$$

si cette surface est un paraboloïde hyperbolique. Dans ce dernier cas, le lieu des points M est une hyperbole ; pour la discussion du même lieu dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, nous renverrons au paragraphe 198.

POLE ET PLAN POLAIRE.

221. Théorème. — *Par un point donné p (x_0, y_0, z_0) on mène une sécante qui rencontre en a et a' une quadrique donnée ; le point p' conjugué harmonique du point p par rapport aux points a et a' décrit un plan, quand la sécante tourne autour du point p.*

Soient

$$f(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation rendue homogène de la quadrique, et x, y, z les coordonnées du point p'.

Pour avoir les coordonnées des points a, a', où la sécante pp' rencontre la quadrique, il faudra résoudre, par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$, l'équation

$$(9) \quad \lambda^2 f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda\mu\left(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0}\right) + \mu^2 f(x, y, z, t) = 0;$$

puis substituer les valeurs obtenues dans les formules

$$\alpha = \frac{\lambda x_0 + \mu x}{\lambda + \mu} \qquad \beta = \frac{\lambda y_0 + \mu y}{\lambda + \mu} \qquad \gamma = \frac{\lambda z_0 + \mu z}{\lambda + \mu}.$$

après avoir fait $t = t_0 = 1$.

Pour que les points p, p' soient conjugués harmoniques par rapport aux points a et a', il faut et il suffit que l'équation (9) donne pour $\frac{\mu}{\lambda}$ deux valeurs égales et de signes contraires ; les coordonnées x, y, z du point p' satisfont donc à l'équation

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf' + tf'_{t_0} = 0$$

dans laquelle on fait $t = t_0 = 1$; or, cette équation représente un plan.

Ce plan est appelé le *plan polaire* du point p, et le point p est dit le *pôle* du plan.

222. Discussion. — L'équation du plan polaire du point p peut être écrite sous l'une des deux formes suivantes :

$$x\, f'_{x_0} + y\, f'_{y_0} + z\, f'_{z_0} + t\, f'_{t_0} = 0$$
$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t = 0.$$

Nous allons chercher si le plan polaire d'un point est toujours déterminé.

Ce plan ne sera indéterminé que si l'on a à la fois

$$f'_{x_0} = 0 \qquad f'_{y_0} = 0 \qquad f'_{z_0} = 0 \qquad f'_{t_0} = 0$$

pour $t_0 = 1$; on voit que la quadrique, doit avoir un *point double* et que le point p doit coïncider avec *un des points doubles.*

De cette remarque il résulte qu'en général le plan polaire d'un point p est déterminé.

La même remarque montre encore que deux points

$$p\,(x_0, y_0, z_0) \qquad p_1\,(x_1, y_1 z_1)$$

n'ont pas, en général, le même plan polaire.

En effet, si les deux équations

$$\begin{aligned} x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t &= 0 \\ x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z + t_1 f'_t &= 0 \end{aligned}$$

représentent le même plan, il existera des constantes λ et μ telles que l'on aura identiquement

$$(\lambda x_0 + \mu x_1) f'_x + (\lambda y_0 + \mu y_1) f'_y + (\lambda z_0 + \mu z_1) f'_z + (\lambda t_0 + \mu t_1) f'_t \equiv 0$$

Cette identité montre que le point q de la droite pp_1, dont les coordonnées sont

$$\frac{\lambda x_0 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \qquad \frac{\lambda y_0 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \qquad \frac{\lambda z_0 + \mu z_1}{\lambda + \mu},$$

a un plan polaire *indéterminé ;* par conséquent la quadrique devra admettre le point q pour *point double.*

Ainsi *deux points auront toujours des plans polaires distincts, à moins qu'ils ne soient situés sur une droite passant par un point double de la quadrique.*

Cette quadrique sera alors un cône, un cylindre ou formée d'un système de deux plans.

223. Problème. — *Trouver le pôle du plan qui a pour équation*

$$uX + vY + wZ + lT = 0.$$

En identifiant cette équation avec celle du plan polaire d'un point quelconque $p\,(x, y, z)$, on obtient les relations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{l},$$

qui déterminent le pôle du plan.

Représentons par 2λ la valeur commune des rapports précédents, les équations qui déterminent le pôle seront

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
A\,x + B''y + B'\,z + C\,\,t &= \lambda u\\
B''x + A'\,y + B\,\,z + C'\,t &= \lambda v\\
B'x + B\,\,y + A''z + C''t &= \lambda w\\
C\,x + C'y + C''z + D\,\,t &= \lambda l.
\end{aligned}
$$

De ces équations on tirera $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda}$, $\frac{t}{\lambda}$; en posant ensuite $t = 1$, on aura λ et les coordonnées x, y, z du pôle inconnu.

Représentons toujours par H le discriminant de la fonction f; nous aurons à distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — H *n'est pas nul.* — En posant

$$
\begin{aligned}
\varphi = u^2 H'_A + v^2 H'_{A'} + w^2 H'_{A''} + vw H'_B + wu H'_{B'} + uv H'_{B''}\\
+ ul H'_C + vl H'_{C'} + wl H'_{C''} + l^2 H'_D,
\end{aligned}
$$

on verra comme en géométrie plane (G. P. 247) que les coordonnées du pôle inconnu sont déterminées par les équations

$$
\frac{x}{\varphi'_u} = \frac{y}{\varphi'_v} = \frac{z}{\varphi'_w} = \frac{1}{\varphi'_l}.
$$

Ainsi, quand H n'est pas nul, un plan n'a qu'un seul pôle.

Deuxième cas. — H *est nul.* — On pourrait, comme on l'a fait en géométrie plane, discuter les équations (10) par la méthode de M. Rouché; nous pensons qu'il ne sera pas inutile d'exposer une autre méthode de discussion qui s'applique également à la détermination du pôle d'une droite en géométrie plane.

Remarquons d'abord que, H étant nul, la quadrique aura un point double, une ligne de points doubles ou un plan de points doubles. Nous allons examiner successivement ces trois hypothèses.

1° *La quadrique a un seul point double; elle est un cône ou un cylindre.* — Pour abréger l'écriture nous représenterons par U, V, W, L les premiers membres des équations

$$
(11)\qquad f'_x - 2\lambda u = 0 \qquad f'_y - 2\lambda v = 0 \qquad f'_z - 2\lambda w = 0 \qquad f'_t - 2\lambda l = 0
$$

qui déterminent le pôle du plan donné.

Soient

$$
\frac{\alpha}{\theta} \qquad \frac{\beta}{\theta} \qquad \frac{\gamma}{\theta}
$$

les coordonnées du point double A; des équations (11) on tire

$$
\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z + \theta f'_t - 2\lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma + l\theta) = 0.
$$

La partie indépendante de λ est nulle, car elle est identiquement égale à

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma + tf'_\theta,$$

et les coefficients de x, y, z, t sont nuls, puisque A est un point double.

On a donc la relation

$$\lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma + l\theta) = 0. \tag{12}$$

Deux cas peuvent se présenter.

Supposons d'abord que le plan P ne passe pas par le point double ; la relation (12) donne $\lambda = 0$ et les équations (11) deviennent

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0 \qquad f'_t = 0;$$

le pôle coïncide avec le point double de la quadrique.

Supposons maintenant que le plan P passe par le point double ; on aura identiquement

$$\alpha U + \beta V + \gamma W + \theta L \equiv 0,$$

les quantités α, β, γ, θ n'étant pas toutes nulles. On voit que les équations (11) se réduisent à trois distinctes, qui seront les trois premières par exemple. L'élimination de λ entre ces trois équations donne les deux équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w};$$

le plan P *a une ligne de pôles et cette ligne passe par le point double.*

2° *La quadrique a une ligne de points doubles ; elle est formée d'un système de deux plans distincts.* — Soient

$$\frac{\alpha}{\theta} \qquad \frac{\beta}{\theta} \qquad \frac{\gamma}{\theta}$$

les coordonnées d'un point A de la ligne des points doubles ; on aura encore la relation (12).

Deux cas peuvent se présenter.

Supposons d'abord que le plan P ne passe pas par la ligne des points doubles. On peut choisir pour le point A un point autre que celui où cette ligne est rencontrée par le plan P, alors λ sera nul et les équations (11) deviendront

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0 \qquad f'_t = 0;$$

tous les points de la ligne des points doubles sont des pôles du plan P.

Supposons maintenant que le plan P passe par la ligne des points doubles. Prenons sur cette ligne deux points

$$A\left(\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\theta}, \frac{\gamma}{\theta}\right) \qquad A'\left(\frac{\alpha'}{\theta'}, \frac{\beta'}{\theta'}, \frac{\gamma'}{\theta'}\right);$$

nous aurons les relations

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + l\theta = 0$$
$$u\alpha' + v\beta' + w\gamma' + l\theta' = 0,$$

et par suite les deux identités

$$(13) \qquad \begin{aligned} \alpha\,U + \beta\,V + \gamma\,W + \theta\,L &\equiv 0 \\ \alpha' U + \beta' V + \gamma' W + \theta' L &\equiv 0 \end{aligned}$$

Les deux points A, A étant distincts, tous les déterminants du second ordre que l'on peut former en prenant deux colonnes dans le tableau rectangulaire suivant

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \theta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \theta' \end{Vmatrix}$$

ne sont pas nuls à la fois. Soit par exemple $\alpha\beta' - \beta\alpha' \gtrless 0$; on pourra résoudre les identités (13) par rapport à U et V ; les équations (11) se réduiront à deux distinctes $W = 0$, $L = 0$. L'élimination de λ entre ces deux équations donne l'équation

$$\frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{l};$$

le plan P *a une infinité de pôles situés dans un plan passant par la ligne des points doubles.*

3° *La quadrique a un plan de points doubles ; elle est formée de deux plans confondus.* — Deux cas peuvent se présenter.

Supposons d'abord que le plan P ne coïncide pas avec le plan des points doubles. Prenons sur ce dernier plan un point A n'appartenant pas au plan P ; on aura encore la relation (12) qui exige que λ soit nul. Les équations (11) deviendront

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0 \qquad f'_t = 0;$$

tous les points du plan des points doubles sont des pôles du plan P.

Supposons maintenant que le plan P coïncide avec le plan des points doubles. Prenons sur ce plan trois points

$$A\left(\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\theta}, \frac{\gamma}{\theta}\right) \qquad A'\left(\frac{\alpha'}{\theta'}, \frac{\beta'}{\theta'}, \frac{\gamma'}{\theta'}\right) \qquad A''\left(\frac{\alpha''}{\theta''}, \frac{\beta''}{\theta''}, \frac{\gamma''}{\theta''}\right)$$

non en ligne droite, nous aurons les identités

$$(14) \qquad \begin{aligned} \alpha\,U + \beta\,V + \gamma\,W + \theta\,L &\equiv 0 \\ \alpha' U + \beta' V + \gamma' W + \theta' L &\equiv 0 \\ \alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W + \theta'' L &\equiv 0. \end{aligned}$$

Le plan qui passe par A, A', A'' étant déterminé, tous les déterminants du troisième ordre obtenus en prenant trois colonnes dans le tableau rectangulaire suivant

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \theta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \theta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \theta'' \end{Vmatrix}$$

ne sont pas nuls à la fois. Soit par exemple $(\alpha\beta'\gamma'') \gtrless 0$; on pourra résoudre les identités (14) par rapport à U, V, W ; les équations (11) se réduiront donc à une seule

$$L = \frac{1}{2} f'_t - 2\lambda l = 0,$$

qui représente un plan quelconque parallèle au plan des points doubles, car λ reste arbitraire.

Ainsi *tous les points de l'espace sont alors des pôles du plan* P.

Propriétés du plan polaire d'un point.

224. Théorème I. — *Le plan polaire d'un point p est parallèle au plan conjugué du diamètre qui passe par ce point.*

1° *La quadrique appartient à la première classe.* — Prenons pour axe des x le diamètre op et pour axes des y et des z deux diamètres formant avec op un système triplement conjugué; l'équation de la quadrique sera

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0,$$

et le plan polaire du point $p(x_0, 0, 0)$ aura pour équation

$$Axx_0 + D = 0.$$

On voit que ce plan est parallèle au plan yoz conjugué de op.

Le choix d'axes de coordonnées que nous venons de faire n'est plus possible quand le point p est sur le cône asymptote de la quadrique. Si l'on rapporte alors la surface à trois génératrices du cône asymptote dont l'une ox passe par le point p, son équation sera

$$2Byz + 2B'zx + 2B''xy + D = 0,$$

et celle du plan polaire du point p sera

$$x_0(B'z + B''y) + D = 0.$$

Ce plan est parallèle à celui qui touche le cône asymptote suivant ox, c'est-à-dire au plan diamétral conjugué de ox.

Remarque. — Quand le pôle est à l'infini, le plan polaire passe par le centre ; quand le pôle coïncide avec le centre, le plan polaire est à l'infini.

2° *La quadrique appartient à la deuxième classe.* — Prenons pour plans des xoy et des xoz deux plans diamétraux conjugués se coupant suivant le diamètre op qui passe par le point p, et, pour plan des yoz, celui qui touche la quadrique au point o extrémité de ce diamètre : l'équation de cette surface sera

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Cx = 0,$$

et celle du plan polaire du point $p(x_0, 0, 0)$ sera

$$x + x_0 = 0.$$

Ce plan est donc encore parallèle au plan conjugué du diamètre op.

Théorème II. — *Lorsque plusieurs plans passent par un même point p, leurs pôles sont situés sur le plan polaire du point p.*

Soit

$$uX + vY + wZ + lT = 0$$

l'équation d'un plan mobile assujetti à passer par le point $p\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \frac{z_0}{t_0}\right)$; on aura la relation

$$(15) \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 + lt_0 = 0.$$

Le pôle de ce plan sera déterminé par les équations

$$(16) \qquad \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{l} ;$$

on obtiendra le lieu des pôles en éliminant u, v, w, l entre les équations (15) et (16), ce qui donne l'équation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t = 0$$

qui représente le plan polaire du point p.

Théorème III. — *Les plans polaires de tous les points d'un plan passent par le pôle de ce plan.*

Supposons qu'un point $m\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \frac{z_0}{t_0}\right)$ décrive un plan P ayant pour équation

$$uX + vY + wZ + lT = 0,$$

on aura la relation

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + lt_0 = 0. \tag{17}$$

Le plan polaire du point m a pour équation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t = 0. \tag{18}$$

En éliminant t_0 entre les équations (17) et (18), l'équation du plan polaire devient

$$x_0 (l f'_x - u f'_t) + y_0 (l f'_y - v f'_t) + z_0 (l f'_z - w f'_t) = 0.$$

Sous cette forme, on voit que les plans polaires des points m du plan P passent par un point fixe défini par les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{l}$$

c'est-à-dire par le pôle du plan P.

Théorème IV. — *Les plans polaires des points d'une droite* D *passent par une même droite* D'.

Prenons sur la droite D deux points

$$A_1\left(\frac{x_1}{t_1}, \frac{y_1}{t_1}, \frac{z_1}{t_1}\right) \qquad A_2\left(\frac{x_2}{t_2}, \frac{y_2}{t_2}, \frac{z_2}{t_2}\right);$$

un point quelconque M de cette droite aura pour coordonnées

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{t_1+\lambda t_2}, \quad \frac{y_1+\lambda y_2}{t_1+\lambda t_2}, \quad \frac{z_1+\lambda z_2}{t_1+\lambda t_2},$$

et l'équation de son plan polaire sera

$$(x_1+\lambda x_2)f'_x+(y_1+\lambda y_2)f'_y+(z_1+\lambda z_2)f'_z+(t_1+\lambda t_2)f'_t=0.$$

Sous cette forme, on voit que ce plan passe par la droite D′ définie par les deux équations

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{cases} x_1 f'_x+y_1 f'_y+z_1 f'_z+t_1 f'_t=0 \\ x_2 f'_x+y_2 f'_y+z_2 f'_z+t_2 f'_t=0. \end{cases}$$

Réciproquement, *les plans polaires d'un point quelconque de la droite* D′ *passent par la droite* D.

En effet, le plan polaire d'un point M′ $\left(\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}\right)$ de la droite D′ a pour équation

$$xf'_{x'}+yf'_{y'}+zf'_{z'}+tf'_{t'}=0.$$

Ce plan passe par le point A_1 de la droite D, car le point M′ étant situé sur la droite D′, on a la relation

$$x_1 f'_{x'}+y_1 f'_{y'}+z_1 f'_{z'}+t_1 f'_{t'}=0.$$

On verrait de même que ce plan passe par le point A_2 et par uiste par la droite D.

Les droites D et D′ sont appelées *droites polaires ou conjuguées.*

Ainsi *deux droites sont dites polaires ou conjuguées quand les plans polaires des points de chacune d'elles passent par l'autre.*

Corollaire. — *Quand un plan* P *tourne autour d'une droite* D, *son pôle p décrit la droite* D′ *conjuguée de* D(*)

En effet, les plans polaires des points de D passant à la fois par la droite D′ et par le pôle *p*, ce pôle est sur la droite D′.

Théorème V. — *Si* D *et* D' *sont deux droites conjuguées, chacune d'elles est dans le plan diamétral conjugué de l'autre.*

En effet, le plan polaire du point situé à l'infini sur la droite D passe par la droite D' ; or, ce plan est le plan diamétral conjugué de D.

Théorème VI. — *Si une transversale rencontre deux droites conjuguées* D, D' *aux points* α, α', *les points* m, m' *où elle perce la surface sont conjugués harmoniques par rapport aux points* α, α'.

Cela résulte de ce que le plan polaire du point α passe par le point α'.

Théorème VII. — *Les points de contact des plans tangents menés à une quadrique par une droite* D *sont situés sur sa conjuguée* D'.

En effet, chaque point de contact est le pôle du plan tangent correspondant.

La droite D' ne rencontrant la quadrique qu'en deux points, on ne peut mener à cette surface que deux plans tangents réels ou imaginaires passant par une droite donnée D.

NORMALES.

Comme on passe facilement de l'ellipsoïde aux hyperboloïdes et du paraboloïde elliptique au paraboloïde hyperbolique, il suffira de supposer successivement que la quadrique est un *ellipsoïde*, puis un *paraboloïde elliptique*.

225. La quadrique est un ellipsoïde. — Si l'on rapporte la surface à ses axes, les équations d'une normale dont le point d'incidence est M (x, y, z), sont

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Problème. — *Par un point donné* P (x_1, y_1, z_1) *mener une normale à un ellipsoïde.*

Nous prendrons pour inconnues les coordonnées x, y, z du point d'incidence. En exprimant que la normale passe par le point P et désignant par λ une inconnue auxiliaire, on aura les relations

$$\frac{a^2(x_1-x)}{x}=\frac{b^2(y_1-y)}{y}=\frac{c^2(z_1-z)}{z}=\lambda,$$

d'où l'on tire

$$(19)\qquad x=\frac{a^2x_1}{\lambda+a^2}\qquad y=\frac{b^2y_1}{\lambda+b^2}\qquad z=\frac{c^2z_1}{\lambda+c^2}.$$

Substituons, dans l'équation de l'ellipsoïde, ces valeurs des coordonnées du point d'incidence, nous aurons, pour déterminer l'inconnue auxiliaire λ, l'équation du sixième degré

$$(20)\qquad f(\lambda)=\frac{a^2x_1^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{b^2y_1^2}{(\lambda+b^2)^2}+\frac{c^2z_1^2}{(\lambda+c^2)^2}-1=0.$$

A chaque racine réelle de cette équation correspond pour x, y, z un seul système de valeurs réelles données par les formules (19); donc, d'un point P, on peut mener à un ellipsoïde six normales. Deux d'entre elles sont toujours réelles, car l'équation (20) a au moins deux racines réelles comprises l'une entre $-\infty$ et $-a^2$, l'autre entre $-c^2$ et $+\infty$.

226. Théorème. — *Les points d'incidence des six normales menées d'un point* P *à un ellipsoïde sont sur une cubique gauche qui passe par le centre de la surface, par le point* P *et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de cette surface.*

En effet, si l'on regarde λ comme un paramètre variable, les équations (19) représentent une courbe passant par les points d'incidence des six normales.

Cette courbe n'est coupée qu'en trois points par un plan; car, si entre les équations (19) et celle d'un plan on élimine x, y, z, on obtient, pour déterminer λ, une équation du *troisième* degré; la courbe est donc une *cubique gauche.*

En remplaçant successivement λ par $\pm\infty$ et 0, dans les formules (19), on voit que la cubique passe par le centre de l'ellipsoïde et par le point P. Enfin les directions asymptotiques de cette cubique sont parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde, car les formules (19) donnent pour x, y ou z des valeurs infinies, quand on y remplace λ par $-a^2$, par $-b^2$ ou par $-c^2$. Ces directions asymptotiques forment un trièdre trirectangle.

On voit que la cubique gauche a une grande analogie avec l'hyperbole équilatère qui passe par les points d'incidence des normales menées d'un point à une conique.

227. Considérons le cône ayant pour sommet un point S de la cubique gauche et pour directrice cette courbe ; ce cône sera du second ordre. En effet, un plan *quelconque* mené par le point S ne rencontrant la cubique qu'en deux points autres que S, coupe le cône suivant deux droites.

De cette remarque résulte le théorème suivant dû à Chasles.

Théorème. — *Les six normales menées d'un point* P *à un ellipsoïde sont sur un cône du second ordre* C.

En effet le point P est sur la cubique gauche.

228. *Équation du cône* C. — Les équations d'une droite passant par le point P sont

$$\frac{X-x_1}{\alpha}=\frac{Y-y_1}{\beta}=\frac{Z-z_1}{\gamma}. = \frac{1}{\rho}.$$

En exprimant que cette droite rencontre la cubique gauche, on obtient, après avoir supprimé la solution $\lambda=0$ qui correspond au point P, les relations

$$\frac{x_1}{\alpha(\lambda+a^2)}=\frac{y_1}{\beta(\lambda+b^2)}=\frac{z_1}{\gamma(\lambda+c^2)}=-\frac{1}{\rho},$$

que l'on peut écrire comme il suit :

$$\frac{x_1}{\alpha}\rho+\lambda+a^2=0 \qquad \frac{y_1}{\beta}\rho+\lambda+b^2=0 \qquad \frac{z_1}{\gamma}\rho+\lambda+c^2=0.$$

L'élimination de λ et de ρ donne la relation de condition

$$(c^2-b^2)\frac{x_1}{\alpha}+(a^2-c^2)\frac{y_1}{\beta}+(b^2-a^2)\frac{z_1}{\gamma}=0\,;$$

l'équation du cône C est donc

$$\frac{(c^2-b^2)x_1}{X-x_1}+\frac{(a^2-c^2)y_1}{Y-y_1}+\frac{(b^2-a^2)z_1}{Z-z_1}=0.$$

229. Théorème. — *Les points d'incidence des six normales menées d'un point* P *à un ellipsoïde ne sont jamais situés sur une sphère.*

Le théorème est évident quand le point P est dans un plan principal ; en effet, quatre des points d'incidence sont sur la section principale correspondante, et l'on sait que ces quatre points ne peuvent pas être situés sur la circonférence d'un cercle. Nous pouvons donc écarter ce cas particulier, ce qui revient à supposer qu'aucune des quantités $\lambda+a^2$, $\lambda+b^2$, $\lambda+c^2$ n'est égale à zéro.

Cette restriction étant faite, nous pourrons même démontrer que les points d'incidence de *cinq* des six normales ne sont pas situés sur une sphère.

Soit

$$x^2+y^2+z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

l'équation d'une sphère. Exprimons que l'un des points d'incidence est sur cette sphère, nous aurons l'équation

$$\frac{a^4x_1^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{b^4y_1^2}{(\lambda+b^2)^2}+\frac{c^4z_1^2}{(\lambda+c^2)^2}$$
$$+2C\frac{a^2x_1}{\lambda+a^2}+2C'\frac{b^2y_1}{\lambda+b^2}+2C''\frac{c^2z_1}{\lambda+c^2}+D=0.$$

Pour que les points d'incidence de cinq des six normales soient situés sur la sphère, il faudrait que cette équation et l'équation (20) aient cinq racines communes.

Ajoutons, à l'équation précédente, l'équation (20) multipliée par λ ; les deux termes des trois premières fractions, dans cette somme, seront respectivement divisibles par $\lambda+a^2$, $\lambda+b^2$, $\lambda+c^2$. Après la suppression de ces trois diviseurs qui ne sont pas nuls par hypothèse, on obtient l'équation

$$\frac{a^2x_1(x_1+2C)}{\lambda+a^2}+\frac{b^2y_1(y_1+2C')}{\lambda+b^2}+\frac{c^2z_1(z_1+2C'')}{\lambda+c^2}+D-\lambda=0.$$

Cette équation est du *quatrième* degré, elle ne peut pas se réduire à une identité, car le coefficient de λ^4 est égal à -1 ; elle ne peut donc pas avoir *cinq* racines communes avec l'équation (20).

230. La quadrique est un paraboloïde elliptique. — Si l'on rapporte la surface aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet, les équations d'une normale dont le point d'incidence est $M(x, y, z)$ sont

$$\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{\frac{y}{p}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{q}}.$$

Problème. — *Par un point donné* $P(x_1, y_1, z_1)$ *mener une normale à un paraboloïde elliptique.*

Les coordonnées x, y, z du point d'incidence s'obtiendront en remplaçant, dans les formules

$$x=x_1+\lambda \qquad y=\frac{py_1}{\lambda+p} \qquad z=\frac{qz_1}{\lambda+q},$$

l'inconnue auxiliaire λ par les racines de l'équation du cinquième degré

$$\frac{py_1^2}{(\lambda+p)^2}+\frac{qz_1^2}{(\lambda+q)^2}-2x_1-2\lambda=0.$$

Ainsi d'un point P on peut mener à un paraboloïde cinq normales dont *une au moins* est réelle.

231. On démontrera, comme dans le cas de l'ellipsoïde, les théorèmes suivants :

Théorème. — *Les points d'incidence des cinq normales menées d'un point* P *à un paraboloïde elliptique sont sur une cubique gauche qui passe par le point* P, *qui est asymptote à l'axe de la surface et dont les deux autres asymptotes sont perpendiculaires aux deux plans principaux.*

Théorème. — *Les cinq normales menées d'un point* P *à un* *paraboloïde elliptique et la parallèle menée par ce point à l'axe de la surface sont sur un cône du second ordre.*

L'équation de ce cône est

$$\frac{p-q}{X-x_1}+\frac{y_1}{Y-y_1}-\frac{z_1}{Z-z_1}=0.$$

Théorème. — *Les points d'incidence des cinq normales menées d'un point* P *à un paraboloïde ne sont jamais situés sur une sphère.*

Remarque. — *Il y a exception quand le point* P *est dans un plan principal.*

232. — Nous terminerons cette étude des normales aux quadriques en démontrant quelques propriétés qui permettent de résoudre la plupart des problèmes relatifs aux normales.

Ces propriétés ont été établies pour la première fois par M. Desboves dans un opuscule ayant pour titre : *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre.*

Nous supposerons encore successivement que la quadrique est un ellipsoïde puis un paraboloïde elliptique.

1° *La quadrique est un ellipsoïde.* — Nous avons vu (225) que les coordonnées des points d'incidence des six normales menées à la surface par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ s'obtiennent en remplaçant dans les formules

$$(\mathrm{I}) \qquad x=\frac{a^2x_1}{\lambda+a^2} \qquad y=\frac{b^2y_1}{\lambda+b^2} \qquad z=\frac{c^2z_1}{\lambda+c^2}$$

la quantité λ par les racines de l'équation

$$(20) \qquad f(\lambda)=\frac{a^2x_1^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{b^2y_1^2}{(\lambda+b^2)^2}+\frac{c^2z_1^2}{(\lambda+c^2)^2}-1=0.$$

Soient Q le plan passant par les points d'incidence de trois de ces normales et Q' le plan qui passe par les points d'incidence des trois autres normales. Désignons par α, β, γ et par α', β', γ' les coordonnées des pôles des plans Q et Q' ; trois des racines de l'équation (20) appartiendront à l'équation

$$\frac{\alpha x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma z_1}{\lambda+c^2}-1=0$$

et les trois autres à l'équation

$$\frac{\alpha' x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta' y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma' z_1}{\lambda+c^2}-1=0.$$

Il résulte de là que les six racines de l'équation (20) appartiendront à l'équation

$$F(\lambda)=\left(\frac{\alpha x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma z_1}{\lambda+c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta' y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma' z_1}{\lambda+c^2}-1\right)=0.$$

Les deux fonctions $f(\lambda)$, $F(\lambda)$ mises sous forme de fractions rationnelles ont les mêmes dénominateurs ; comme leurs numérateurs ont les mêmes racines, ces fonctions ne diffèrent que par un facteur constant.

Cela étant, les résultats obtenus en décomposant les fonctions $f(\lambda)$ et $F(\lambda)$ en éléments simples ne différeront aussi que par un facteur constant.

La fonction $f(\lambda)$ est décomposée en éléments simples ; si l'on décompose $F(\lambda)$ en éléments simples on a

$$F(\lambda)=\frac{\alpha\alpha' x_1^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{\beta\beta' y_1^2}{(\lambda+b^2)^2}+\frac{\gamma\gamma' z_1^2}{(\lambda+c^2)^2}+\frac{A x_1}{\lambda+a^2}+\frac{B y_1}{\lambda+b^2}+\frac{C z_1}{\lambda+c^2}+1,$$

en posant

$$A=\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{b^2-a^2}y_1+\frac{\alpha\gamma'+\gamma\alpha'}{c^2-a^2}z_1-\alpha-\alpha'$$

$$B=\frac{\beta\gamma'+\gamma\beta'}{c^2-b^2}z_1+\frac{\beta\alpha'+\alpha\beta'}{a^2-b^2}x_1-\beta-\beta'$$

$$C=\frac{\gamma\alpha'+\alpha\gamma'}{a^2-c^2}x_1+\frac{\gamma\beta'+\beta\gamma'}{b^2-c^2}y_1-\gamma-\gamma'.$$

Identifions les deux fonctions, nous aurons les relations

$$\alpha\alpha'=-a^2 \qquad \beta\beta'=-b^2 \qquad \gamma\gamma'=-c^2$$

et

$$\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{b^2-a^2}y_1+\frac{\alpha\gamma'+\gamma\alpha'}{c^2-a^2}z_1=\alpha+\alpha'$$

$$\frac{\beta\gamma'+\gamma\beta'}{c^2-b^2}z_1+\frac{\beta\alpha'+\alpha\beta'}{a^2-b^2}x_1=\beta+\beta'$$

$$\frac{\gamma\alpha'+\alpha\gamma'}{a^2-c^2}x_1+\frac{\gamma\beta'+\beta\gamma'}{b^2-c^2}y_1=\gamma+\gamma'.$$

On en tire par l'élimination de α', β', γ' les équations

$$(21)\qquad \begin{aligned}
&\frac{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{y_1}{\beta}+\frac{c^2\alpha^2+a^2\gamma^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{z_1}{\gamma}=a^2-\alpha^2\\
&\frac{c^2\beta^2+b^2\gamma^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{z_1}{\gamma}+\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{x_1}{\alpha}=b^2-\beta^2\\
&\frac{a^2\gamma^2+c^2\alpha^2}{a^2-c^2}\cdot\frac{x_1}{\alpha}+\frac{b^2\gamma^2+c^2\beta^2}{b^2-c^2}\cdot\frac{y_1}{\beta}=c^2-\gamma^2,
\end{aligned}$$

qui deviennent

$$(21')\qquad \begin{aligned} -\nu\frac{y_1}{\beta}+\mu\frac{z_1}{\gamma}&=a^2-\alpha^2\\ -\rho\frac{z_1}{\gamma}+\nu\frac{x_1}{\alpha}&=b^2-\beta^2\\ -\mu\frac{x_1}{\alpha}+\rho\frac{y_1}{\beta}&=c^2-\gamma^2,\end{aligned}$$

en posant

$$\rho=\frac{b^2\gamma^2+c^2\beta^2}{b^2-c^2}\qquad \mu=\frac{c^2\alpha^2+a^2\gamma^2}{c^2-a^2}\qquad \nu=\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2-b^2}.$$

Les équations (21′) sont en général incompatibles, car le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -\nu & \mu\\ \nu & 0 & -\rho\\ -\mu & \rho & 0\end{vmatrix}$$

des inconnues $\frac{x_1}{\alpha}$, $\frac{y_1}{\beta}$, $\frac{z_1}{\gamma}$ est nul.

Ainsi il n'est pas en général possible de trouver sur une section plane d'un ellipsoïde trois points tels que les normales en ces points concourent.

La section ne jouira de cette propriété que si les équations (21′) peuvent présenter une indétermination.

Les mineurs du premier ordre du déterminant D ne sont nuls à la fois que si l'on a $\rho=\mu=\nu=0$, ou bien $\alpha=\beta=\gamma=0$; mais alors les équations (21′) sont incompatibles.

Pour fixer les idées supposons $\nu \gtrless 0$; pour que les équations (21′) présentent une indétermination, il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -\nu & a^2-\alpha^2\\ \nu & 0 & b^2-\beta^2\\ -\mu & \rho & c^2-\gamma^2\end{vmatrix}$$

soit nul, ou que l'on ait

$$\rho(\alpha^2-a^2)+\mu(\beta^2-b^2)+\nu(\gamma^2-c^2)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{b^2\gamma^2+c^2\beta^2}{b^2-c^2}(\alpha^2-a^2)+\frac{c^2\alpha^2+a^2\gamma^2}{c^2-a^2}(\beta^2-b^2)+\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2-b^2}(\gamma^2-c^2)=0.$$

On voit que le pôle du plan Q doit être situé sur une surface du quatrième ordre que M. Desboves a signalée le premier et qu'il a appelée la surface **Normopolaire.**

Quand le pôle du plan Q est sur cette surface, les équations (21) où l'on regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes se réduisent à *deux* et représentent une droite L.

Si, de chaque point de cette droite, on mène des normales à l'ellipsoïde, les points d'incidence de trois d'entre elles seront dans le plan Q et ceux des trois autres dans le plan Q' dont le pôle a pour coordonnées

$$\alpha' = -\frac{a^2}{\alpha} \qquad \beta' = -\frac{b^2}{\beta} \qquad \gamma' = -\frac{c^2}{\gamma}.$$

De cette analyse résulte le théorème suivant, qui est vrai pour les deux hyperboloïdes.

Théorème. — *Étant donné un plan* Q *coupant une quadrique à centre suivant une conique* C ; *il est en général impossible de trouver sur cette conique trois points tels que les normales en ces points à la surface soient concourantes.*

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que le pôle (α, β, γ) *du plan* Q *soit situé sur une certaine surface du quatrième ordre.*

Quand le pôle du plan Q *est sur cette surface, il existe une infinité de groupes de trois normales concourantes et dont les points d'incidence sont sur la conique* C ; *les points de concours des normales de ces différents groupes sont sur une même droite ; enfin, pour chaque groupe, les points d'incidence des trois autres normales sont situés sur une même conique* C' *intersection de la quadrique par le plan* Q' *dont le pôle a pour coordonnées* $-\frac{a^2}{\alpha}, -\frac{b^2}{\beta}, -\frac{c^2}{\gamma}$.

Remarque. — L'équation du plan Q' est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + 1 = 0 ;$$

ce plan passe donc par les projections, sur les trois axes principaux de la quadrique, du point symétrique du pôle du plan Q par rapport au centre de cette quadrique.

Cette propriété est due à Joachimsthal.

2° *La quadrique est un paraboloïde elliptique.* — On pourrait appliquer à cette surface la méthode exposée dans le cas de l'ellipsoïde ; en désignant par α, β, γ les coordonnées du pôle du plan Q qui passe par les points d'incidence de trois des cinq normales issues du point P, il faudrait adjoindre à ce plan un autre plan Q' parallèle à l'axe du paraboloïde et passant par les points d'incidence des deux autres normales.

On peut aussi déduire, des équations trouvées pour l'ellipsoïde, celles qui conviennent au paraboloïde, en s'appuyant sur le lemme suivant :

Lemme. — *Le paraboloïde elliptique peut être considéré comme la limite d'un ellipsoïde dont le grand axe* $2a$ *augmente indéfiniment, les rapports* $\frac{b^2}{a}, \frac{c^2}{a}$ *conservant des valeurs constantes* p, q, *tandis que le grand axe et l'un de ses sommets* A *restent fixes.* (*)

Ce lemme se démontre comme le théorème analogue relatif à la parabole (G. P. 232).

Nous allons chercher ce que deviennent les équations (21) quand l'ellipsoïde se transforme en un paraboloïde.

Pour cela nous y remplacerons x_1 et α par $x_1 - a$ et $\alpha - a$, puis b^2 et c^2 par ap et bq, et nous ferons ensuite croître a indéfiniment.

On voit immédiatement que la première des équations (21) devient

$$p\frac{y_1}{\beta} + q\frac{z_1}{\gamma} + 2\alpha = 0.$$

Quelques précautions sont nécessaires pour trouver les limites des deux autres.

La seconde équation par exemple, après qu'on y a fait les substitutions indiquées plus haut, devient

$$\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{q-p}\cdot\frac{z_1}{\gamma} + \frac{a\beta^2 + p(\alpha^2 - 2a\alpha + a^2)}{a-p}\cdot\frac{x_1 - a}{\alpha - a} = ap - \beta^2,$$

ou bien

$$\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{q-p}\cdot\frac{z_1}{\gamma} + \frac{a(\beta^2 - 2p\alpha) + p\alpha^2}{a-p}\cdot\frac{x_1 - a}{\alpha - a} = ap\left[1 + \frac{a(x_1 - \alpha)}{(a-p)(a-\alpha)}\right] - \beta^2,$$

ou encore

$$\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{q-p}\cdot\frac{z_1}{\gamma} + \frac{a(\beta^2 - 2p\alpha) + p\alpha^2}{a-p}\cdot\frac{x_1 - a}{\alpha - a} = ap\frac{a(x_1 - \alpha - p) + p\alpha}{(a-p)(a-\alpha)} - \beta^2.$$

Si l'on fait croître a indéfiniment, cette dernière équation devient

$$\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{q-p}\cdot\frac{z_1}{\gamma} - px_1 + 2\beta^2 - p\alpha + p^2 = 0.$$

Le même calcul est applicable à la troisième des équations (21).

En résumé, ces trois équations, dans le cas du paraboloïde, sont remplacées par les suivantes :

$$\begin{gathered}
p\frac{y_1}{\beta} + q\frac{z_1}{\gamma} + 2\alpha = 0 \\
\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{q-p}\cdot\frac{z_1}{\gamma} - px_1 + 2\beta^2 - p\alpha + p^2 = 0 \\
\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{p-q}\cdot\frac{y_1}{\beta} - qx_1 + 2\gamma^2 - q\alpha + q^2 = 0.
\end{gathered}$$

On vérifiera facilement que ces équations sont en général incompatibles, et qu'elles se réduisent à deux quand le pôle du plan Q est situé sur une surface du troisième ordre ayant pour équation

$$2\alpha\frac{q\beta^2 + p\gamma^2}{p-q} + 2(q\beta^2 - p\gamma^2) + pq(p-q) = 0.$$

Enfin l'équation du plan Q' qui, dans le cas de l'ellipsoïde, est

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+1=0$$

devient ici

$$\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+2=0.$$

On a donc le théorème suivant, qui est vrai pour les deux paraboloïdes.

Théorème. — *Étant donné un plan* Q *coupant un paraboloïde suivant une conique* C, *il est en général impossible de trouver sur cette conique trois points tels que les normales en ces points à la surface soient concourantes.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le pôle (α, β, γ) *du plan* Q *soit situé sur une certaine surface du troisième ordre.*

Quand le pôle du plan Q *est sur cette surface, il existe une infinité de groupes de trois normales concourantes et dont les points d'incidence sont sur la conique* C ; *les points de concours des normales de ces différents groupes sont sur une même droite ; enfin, pour chaque groupe, les points d'incidence des deux autres normales sont situés sur une même parabole* C', *intersection du paraboloïde par le plan* Q' *qui a pour équation*

$$\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+2=0.$$

EXERCICES.

1° Etant donné un ellipsoïde, on mène des plans diamétraux qui coupent la surface suivant des ellipses d'aire constante ; trouver le lieu des diamètres perpendiculaires à ces plans ; — trouver le lieu des diamètres conjugués des mêmes plans. — Démontrer que les plans tangents à l'ellipsoide, parallèles à ces plans diamétraux, sont à la même distance du centre de la surface.

2° Un cône a pour sommet le centre d'un ellipsoïde et pour base la courbe d'intersection de la surface avec une sphère concentrique ; tout plan tangent au cône coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont l'arête de contact est l'un des axes.

Surface des ondes.

La surface des ondes, qui joue un rôle important en Optique, a été considérée pour la première fois par Fresnel ; elle est susceptible de plusieurs définitions géométriques que nous allons faire connaître.

3° Si, par le centre d'un ellipsoïde E ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on élève une perpendiculaire à chaque plan diamétral, et qu'on porte sur cette perpendiculaire, à partir du centre, des longueurs égales aux demi-axes de la section diamétrale correspondante, le lieu des extrémités de ces longueurs est une surface du quatrième ordre que l'on appelle la *surface des ondes*.

Étudier les sections de cette surface par les plans principaux de l'ellipsoïde.

4° Si, à chaque plan diamétral d'un ellipsoïde E' ayant pour équation

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1,$$

on mène des plans parallèles à des distances égales aux inverses des demi-axes de la section diamétrale correspondante, l'enveloppe de ces plans est la surface des ondes.

Remarque. — Cette définition est celle qui a été donnée par Fresnel.

On peut enfin regarder la surface des ondes comme un cas particulier des *surfaces apsidales*.

Surfaces apsidales.

5° D'un point fixe O, on mène à un point quelconque M d'une surface donnée Σ un rayon vecteur OM ; par le point M, on mène la normale MN à la surface Σ, et par le point O, dans le plan OMN, une droite OM_1 perpendiculaire sur OM et égale à OM.

Le lieu des points M_1 est une surface Σ_1 qui est dite la *surface apsidale* de Σ.

La normale au point M_1 de la surface Σ_1 est la perpendiculaire abaissée de ce point sur MN.

En prenant le point O pour origine des coordonnées rectangulaires, et représentant par x, y, z les coordonnées du point M, par x_1, y_1, z_1 celles du point M_1 et par

$$f(x, y, z)=0 \tag{1}$$

l'équation de la surface Σ, les formules qui expriment x, y, z en fonction de x_1, y_1, z_1 seront

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ xx_1+yy_1+zz_1=0; \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Soit $\varphi(x_1, y_1, z_1)$ ce que devient $f(x, y, z)$ quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (2) et (3), on aura

$$f(x, y, z) = \varphi(x_1, y_1, z_1). \tag{4}$$

Regardons x, y, z comme des fonctions d'une variable t assujetties seulement à vérifier l'équation (1) quel que soit t ; x_1, y_1, z_1 seront également des fonctions de t dont deux seront arbitraires.

En prenant les dérivées, par rapport à t, des deux membres des relations (2) et (4), et tenant compte de ce qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments des colonnes du déterminant (3), on démontrera la relation

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{x_1} & \varphi'_{y_1} & \varphi'_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

qui avec les relations (2) permet de passer de la surface Σ_1 à la surface Σ.

La forme de cette relation fait voir que Σ est la surface apsidale de Σ_1.

6° La surface des ondes est la surface apsidale d'un ellipsoïde, par rapport au centre de cette dernière surface.

En partant de cette troisième définition, construire la normale en un point de la surface des ondes.

Appliquer cette construction aux points de la surface des ondes qui correspondent aux points de l'ellipsoïde situés sur une section circulaire diamétrale ; en conclure que cette surface admet quatre *points coniques*.

Appliquer la même construction aux points de la surface des ondes qui correspondent aux points de l'ellipsoïde situés sur les deux ellipses lieu des points de contact des plans tangents P situés à une distance du centre égale au demi-axe moyen b.

En conclure que la surface des ondes admet quatre cercles de contact, c'est-à-dire en tous les points desquels le plan tangent à la surface est le même.

Pour démontrer cette dernière propriété on remarquera que les plans P enveloppent deux cylindres de révolution C, C' circonscrits à l'ellipsoïde, les courbes de contact étant deux ellipses ε, ε'.

On montrera que les points de la surface des ondes qui correspondent aux points de l'ellipse ε, par exemple, sont sur deux circonférences de cercles situées dans des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre C à des distances du centre de l'ellipsoïde égales à b, et que les normales à la surface des ondes en ces points sont parallèles à l'axe du cylindre C.

7° Dans l'hyperboloïde à une nappe, chaque couple de génératrices parallèles détermine sur deux génératrices fixes OD, OD' de systèmes différents deux segments OP, OP' dont le produit est constant. (Chasles.)

8° Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont situées sur un hyperboloïde à une nappe.

Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, le centre de gravité du tétraèdre et le centre de l'hyperboloïde sont en ligne droite. (Joachimsthal.)

9° Déterminer la ligne de striction pour chacun des systèmes de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique.

10° Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le centre d'un hyperboloïde à une nappe et pour directrices les lignes de striction des deux systèmes de génératrices.

11° Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui rencontre sous des angles égaux entre eux deux droites données.

12° Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur une conique donnée C et sur deux droites rencontrant cette conique.

13° Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites tangentes à une quadrique donnée en restant elle-même tangente à cette quadrique.

14° Une droite se meut de telle sorte que trois de ses points décrivent les faces d'un trièdre donné, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde. (**Dupin.**)

Le produit des longueurs des axes de cet ellipsoïde est indépendant des angles du trièdre.

15° Une droite se meut de telle sorte que quatre de ses points décrivent les faces d'un tétraèdre, un point quelconque de la droite décrit une ellipse et la droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution. (**Mannheim.**)

Les centres des ellipses décrites par les différents points de la droite mobile sont en ligne droite. (**Halphen.**)

16° Étant donnés deux droites D, D′ et un point A, trouver l'équation de la surface engendrée par une droite G qui se meut en rencontrant D, D′, de telle sorte que le segment compris entre les deux points de rencontre soit vu du point A sous un angle droit.

Cette surface est une quadrique dont on déterminera la nature pour les diverses positions du point A dans l'espace.

Trouver le lieu que doit décrire le point A pour que la quadrique soit de révolution.

17° La projection d'une section plane quelconque d'un paraboloïde de révolution sur le plan tangent au sommet est un cercle.

18° La projection de la section d'une sphère et d'un ellipsoïde sur un des plans cycliques, parallèlement à l'axe majeur ou à l'axe mineur, est un cercle; le centre de la sphère est dans le plan principal conjugué de l'un de ces axes.

19° Une sphère tangente à une quadrique en un des ombilics coupe cette surface suivant une courbe plane dont le plan conserve une direction fixe quand le rayon de la sphère varie.

20° Trouver la surface engendrée par l'arête d'un dièdre droit dont les faces passent respectivement par deux droites données non situées dans un même plan. — Déterminer les plans cycliques de cette surface.

Définition. — *Deux cônes du second ordre qui ont même sommet et mêmes plans cycliques sont dits homocycliques.*

21° Démontrer que, lorsqu'un plan mené par le sommet commun de deux cônes homocycliques, coupe ces deux surfaces suivant quatre génératrices les deux génératrices de l'un font respectivement deux angles égaux avec les deux génératrices de l'autre. — Cas où le plan touche l'un des cônes.

22° Quand un plan touche deux cônes homocycliques, les deux arêtes de contact sont rectangulaires.

23° Soient SA, SB deux génératrices rectangulaires prises sur deux cônes homocycliques, le plan ASB coupe les deux cônes suivant deux autres génératrices SA′, SB′ qui sont encore perpendiculaires entre elles ; les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents au premier cône suivant SA et SA′, et les plans tangents au second cône suivant SB et SB′, appartiennent à un troisième cône homocyclique avec les deux premiers. Ce troisième cône reste le même quelles que soient les deux arêtes rectangulaires primitives SA, SB.

24° Quand deux cônes sont homocycliques, deux plans tangents au premier coupent l'autre cône suivant quatre arêtes appartenant à un cône de révolution dont l'axe est normal aux arêtes de contact des deux plans tangents.

25° Trouver le lieu des arêtes des angles dièdres droits circonscrits à un cône du second ordre.

26° Étant données deux quadriques à centre concentriques et homothétiques, trouver le lieu des centres des sections faites dans l'une par des plans tangents à l'autre.

27° On sait que les six normales menées d'un point P à une quadrique à centre sont sur un cône du second ordre ; démontrer que ce cône passe par les parallèles menées du point P aux axes de la quadrique, par la droite joignant le point P au centre et par les axes principaux du cône circonscrit dont le sommet est au point P. (Chasles.)

Trouver les positions du point P pour lesquelles le cône des six normales est de révolution.

28° Les normales menées d'un point P à des quadriques concentriques et homothétiques sont sur un cône du second ordre. (Chasles.)

29° Étant données une sphère et une quadrique, les normales menées du centre de la sphère aux quadriques qui passent par l'intersection de ces deux surfaces, sont sur un cône du second ordre.

30° Si des points d'une droite on abaisse des normales sur des quadriques concentriques et homothétiques, les points d'incidence sont sur un hyperboloïde à une nappe.

31° Pour que deux normales à une quadrique concourent, il faut et il suffit que la droite qui joint les points d'incidence soit perpendiculaire à sa conjuguée.

32° Une courbe située sur un ellipsoïde est telle que la surface réglée formée par les normales à l'ellipsoïde, en ses différents points, coupe un plan principal suivant un cercle de rayon donné ; démontrer que la projection de cette courbe sur ce plan principal est une ellipse dont l'aire reste constante quand le centre du cercle se déplace dans le plan principal.

33° Le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leurs distances à une quadrique donnée a une valeur constante est une autre quadrique.

34° Aux différents points d'une section plane d'une quadrique on mène des normales à la surface et, par un point S de l'espace, des parallèles à ces normales ; sur chaque parallèle on prend, à partir du point S, des longueurs égales à la portion de normale correspondante comprise entre le point d'incidence et un plan principal ; leurs extrémités sont sur une conique. (**Laguerre**.)

35° Le centre de la sphère qui contient les points d'incidence de quatre des six normales que l'on peut abaisser d'un point donné P sur une quadrique est le milieu du segment qui joint le point P au centre du plan qui contient les deux autres normales. (**Laguerre**.)

Remarque. — M. Laguerre appelle centre d'un plan ayant pour équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}+1=0$$

le point dont les coordonnées sont p, q, r.

36° Les points d'incidence des six normales menées d'un point P à une quadrique sont sur une cubique gauche passant par le point P et le centre O de la quadrique.

Cela rappelé, si par le point O on mène un plan parallèle au plan de deux des normales issues du point P, ce plan coupe la cubique en deux autres points qui sont situés sur la sphère passant par les points d'incidence des quatre autres normales. (**Laguerre**.)

LIVRE VI

CHAPITRE PREMIER

DISCUSSION DE L'ÉQUATION D'UNE QUADRIQUE.

233. Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être énoncé de la manière suivante :

Problème. — *Étant donnée une équation du second degré à trois variables, déterminer la nature de la quadrique qu'elle représente.*

Ce problème a déjà été résolu (livre IV, chapitre Ier) ; nous allons faire connaître d'autres méthodes qui en donnent de nouvelles solutions.

PREMIÈRE MÉTHODE.

234. On appliquera à l'équation donnée la méthode de réduction exposée au chapitre V du livre IV.

Comme la nature de la quadrique ne dépend pas des valeurs mêmes des racines de l'équation en S, mais seulement de leurs *signes,* il sera inutile de résoudre cette équation.

On sait en effet que l'équation en S a ses trois racines réelles ; dès lors le théorème de Descartes fera connaître immédiatement les signes de ces racines.

Il y a plusieurs cas à distinguer.

Premier cas. — *L'équation en* S *n'a pas de racine nulle.* — L'équation de la quadrique peut être ramenée à la forme

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+\frac{H}{\Delta}=0\,;$$

pour déterminer sa nature, il suffira de chercher les signes des quantités

$$S_1 \qquad S_2 \qquad S_3 \qquad \frac{H}{\Delta}.$$

Remarque. — La quadrique a un centre unique ; si l'on désigne par x_0, y_0, z_0 ses coordonnées, on pourra calculer la quantité $\frac{H}{\Delta}$ à l'aide de la relation

$$\frac{H}{\Delta} = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

Deuxième cas. — *L'équation en* S *a une racine nulle.* — Ce cas se subdivise en deux autres.

1° *La quadrique a un centre unique rejeté à l'infini.* — Son équation peut être ramenée à la forme

$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + 2C_1 X = 0 ;$$

elle représentera un *paraboloïde elliptique* si S_2 et S_3 ont le même signe, et un *paraboloïde hyperbolique* si S_2 et S_3 sont de signes contraires ;

2° *La quadrique a une ligne de centres.* — Son équation peut être ramenée à la forme

$$S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1 = 0 ;$$

elle représentera un *cylindre elliptique ou hyperbolique.* On déterminera la nature du cylindre en cherchant les signes des quantités

$$S_2 \qquad S_3 \qquad D_1.$$

Remarque. — Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de la ligne des centres, on aura

$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

On choisit ordinairement l'un des points où la ligne des centres rencontre les plans de coordonnées.

Troisième cas. — *L'équation en* S *a deux racines nulles.* — Ce cas se subdivise en deux autres.

1° *La quadrique a une ligne de centres rejetée à l'infini.* — Son équation peut être ramenée à la forme

$$S_3Z^2 + 2C_1X = 0\,;$$

elle représente un *cylindre parabolique.*

2° *La quadrique a un plan de centres.* — Son équation peut être ramenée à la forme

$$S_3Z^2 + D_1 = 0\,;$$

elle représente deux plans parallèles qui peuvent être réels et distincts, confondus ou imaginaires.

On distinguera ces différents cas en cherchant les signes des quantités

$$S_3 \qquad D_1.$$

Remarque. — Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point du plan des centres, on aura

$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

On choisit ordinairement l'un des points où le plan des centres rencontre les axes de coordonnées.

235. Remarque.—La méthode que nous venons d'exposer étant fondée sur l'existence de trois directions principales formant un trièdre trirectangle, suppose que les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Elle s'applique cependant au cas où les coordonnées sont *obliques*.

Soit en effet

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une quadrique U rapportée à des axes obliques ox, oy, oz.

Prenons sur cette surface un point quelconque M (x, y, z), dont nous construirons le contour des coordonnées oARM.

Faisons tourner RM autour du point R jusqu'à ce que cette cote occupe la position RM′ perpendiculaire sur le plan xoy.

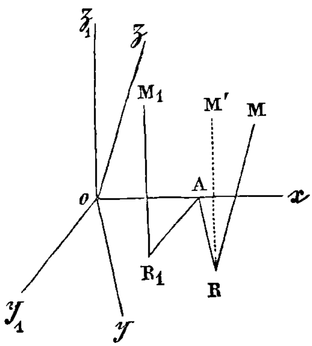


Fig. 47.

Faisons ensuite tourner la ligne brisée ARM′ autour du point

A jusqu'à ce que AR occupe, dans le plan xoy, la position AR_1 perpendiculaire sur ox. Après ces deux déplacements, le point M sera venu en M_1.

Menons les droites oy_1, oz_1 respectivement parallèles à AR_1 et à R_1M_1 ; par rapport aux axes rectangulaires ox, oy_1, oz_1, le point M_1 aura pour coordonnées x, y, z, et le lieu des points M_1 sera une quadrique Σ_1 dont l'équation, par rapport aux mêmes axes, sera justement l'équation (1).

Les surfaces Σ, Σ_1 sont de même nature.

En effet, elles appartiennent évidemment à la même classe; en second lieu elles seront en même temps limitées dans tous les sens, ou composées d'une seule nappe, ou enfin composées de deux nappes séparées.

Il résulte de là que la méthode précédente, que l'on peut appliquer à la surface Σ_1, fera connaître la nature de la surface Σ.

Exemple I. — Soit l'équation

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+\lambda=0.$$

L'équation en S développée est

$$S^3-5S^2+7S-2=0;$$

elle n'a pas de racine nulle et présente trois variations; la quadrique appartient donc au genre ellipsoïde.

Les coordonnées du centre sont $x_0=0$, $y_0=z_0=1$; donc

$$\frac{H}{\Delta}=Cx_0+C'y_0+C''z_0+D=\lambda-4.$$

L'équation réduite est de la forme

$$P^2+Q^2+R^2+\lambda-4=0.$$

Donc

$\lambda<4$ *Ellipsoïde.*
$\lambda=4$ *Un point.*
$\lambda>4$ *Ellipsoïde imaginaire.*

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^2+3y^2+2z^2+4yz+2xy-3x-4y-3z=0.$$

L'équation en S est

$$S^3-6S^2+6S=0;$$

elle a une racine nulle et présente deux variations.

D'un autre côté, les équations du centre sont incompatibles; la quadrique est donc un paraboloïde dont l'équation réduite est de la forme

$$P^2+Q^2+R=0.$$

La surface est un *paraboloïde elliptique.*

Exemple III. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx+2xy-2x-2y+2z+\lambda=0.$$

L'équation en S est

$$S^3-4S^2+2S=0;$$

elle a une racine nulle et présente deux variations.

D'un autre côté les équations du centre

$$\begin{aligned} x+y+\ \ z-1&=0\\ x+y+\ \ z-1&=0\\ x+y+2z+1&=0 \end{aligned}$$

se réduisant à deux, la quadrique est un cylindre.

Le point où la ligne des centres rencontre le plan des yz a pour coordonnées $x_0=0$, $y_0=3$, $z_0=-2$; il en résulte

$$D_1=\lambda-5,$$

et l'équation réduite est de la forme

$$P^2+Q^2+\lambda-5=0.$$

Donc

$\lambda<5$ *Cylindre elliptique.*
$\lambda=5$ *Deux plans imaginaires conjugués.*
$\lambda>5$ *Cylindre elliptique imaginaire.*

Exemple IV. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+9z^2-6yz+6xz-2xy-x+y-3z+\lambda=0.$$

L'équation en S est

$$S^3 - 11 S^2 = 0;$$

elle a deux racines nulles et présente une variation.

D'un autre côté, les équations du centre

$$\begin{aligned} x - y + 3z - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ -x + y - 3z + \tfrac{1}{2} &= 0 \\ 3x - 3y + 9z - \tfrac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

se réduisent à une; la quadrique se compose donc de deux plans parallèles.

Le point où le plan des centres rencontre l'axe des z a pour coordonnées $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{1}{6}$; il en résulte

$$D_1 = \lambda - \frac{1}{4},$$

et l'équation réduite est de la forme

$$P^2 + \lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

Donc

$\lambda < \frac{1}{4}$	*Deux plans parallèles réels.*
$\lambda = \frac{1}{4}$	*Deux plans confondus.*
$\lambda > \frac{1}{4}$	*Deux plans parallèles imaginaires.*

DEUXIÈME MÉTHODE.

236. Dans cette méthode, on commence par chercher, en formant les équations du centre, la classe à laquelle appartient la quadrique représentée par l'équation donnée. Nous aurons donc à examiner cinq cas.

Quadriques de la première classe.

On transporte d'abord l'origine au centre; après cette transformation, l'équation de la quadrique prend la forme

$$(2)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+D_1=0.$$

Quand D_1 est nul, la quadrique est un point ou un cône. Pour décider la question, on coupe la surface par un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées; si la section est *imaginaire,* le lieu est *un point;* si elle est *réelle,* le lieu est *un cône.*

Pour étudier le cas où D_1 n'est pas nul, nous nous appuierons sur des propriétés que mettent immédiatement en évidence les formes de l'équation d'une quadrique à centre rapportée à trois diamètres conjugués.

Ces formes sont

$$\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}-1=0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}+1=0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}-\dfrac{z^2}{c'^2}-1=0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}-\dfrac{z^2}{c'^2}+1=0 \end{array} \quad \begin{array}{c}\textbf{si la}\\ \textbf{quadrique}\\ \textbf{est un}\end{array} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Ellipsoïde réel ;} \\[2ex] \textit{Ellipsoïde imaginaire ;} \\[2ex] \textit{Hyperboloïde à une nappe ;} \\[2ex] \textit{Hyperboloïde à deux nappes.} \end{array} \right.$$

On en déduit les propriétés suivantes :

1° *Dans l'ellipsoïde réel, les trois diamètres conjugués de chaque système sont réels ;*

2° *Dans l'ellipsoïde imaginaire, les trois diamètres conjugués de chaque système sont imaginaires ;*

3° *Dans l'hyperboloïde à une nappe, de trois diamètres conjugués d'un même système deux seulement sont réels ;*

4° *Dans l'hyperboloïde à deux nappes, de trois diamètres conjugués d'un même système un seul est réel.*

Cela posé, nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — *Les trois coefficients* A, A', A'' *sont différents de zéro.* — En résolvant l'équation (2) par rapport à z, on a

$$(3)\quad A''z = -(B'x + By) \pm \sqrt{-a'x^2 - ay^2 + 2b''xy - A''D_1}\,;$$

a, a', b'' désignant les mineurs du premier ordre du déterminant Δ relatifs aux éléments A, A', B''.

Le plan P qui a pour équation

$$A''z = -(B'x + By)$$

est le plan diamétral conjugué des cordes parallèles à oz, et la droite oz est le diamètre conjugué de ce plan.

L'équation

$$-a'x^2 - ay^2 + 2b''xy - A''D_1 = 0$$

représente une conique C_1, projection, sur le plan xoy, de la section C de la quadrique par le plan diamétral P.

Cette conique admet un centre unique, car on a

$$aa' - b''^2 = A''\Delta,$$

et, par hypothèse, A'' et Δ ne sont pas nuls.

Plusieurs cas peuvent se présenter.

1° *La courbe* C_1 *est une ellipse réelle.* — Prenons dans la section C, qui est elle-même une ellipse réelle, deux diamètres conjugués oA, oB ; ils seront réels et formeront avec oz un système de trois diamètres conjugués.

Si oz est un diamètre *réel,* la quadrique est *un ellipsoïde réel.*

Si oz est un diamètre *imaginaire,* la quadrique est *un hyperboloïde à une nappe.*

2° *La courbe* C_1 *est une ellipse imaginaire.* — Prenons dans la section C, qui est elle-même une ellipse imaginaire, deux diamètres conjugués oA, oB ; ils seront imaginaires et formeront avec oz un système de trois diamètres conjugués.

Si oz est un diamètre *réel,* la quadrique est *un hyperboloïde à eux nappes.*

Si oz est un diamètre *imaginaire,* la quadrique est *un ellipsoïde imaginaire.*

3° *La courbe* C_1 *est une hyperbole.* — Prenons dans la section C, qui est elle-même une hyperbole, deux diamètres conjugués oA, oB ; ils seront l'un réel, l'autre imaginaire, et formeront avec oz un système de trois diamètres conjugués.

Si oz est un diamètre *réel*, la quadrique est *un hyperboloïde à une nappe*.

Si oz est un diamètre *imaginaire*, la quadrique est un *hyperboloïde à deux nappes*.

Remarque. — On voit que l'on est ramené à chercher si le diamètre oz est réel ou imaginaire, c'est-à-dire à examiner le signe de $-A''D_1$, car pour $x=y=0$, l'équation (3) donne

$$A''z = \pm\sqrt{-A''D_1}.$$

Deuxième cas. — *L'un, au moins, des coefficients* A, A', A'' *est nul.* — Supposons $A''=0$; l'équation de la quadrique, rapportée à son centre, est

$$2(By+B'x)z+Ax^2+A'y^2+2B''xy+D_1=0,$$

et celle du cône asymptote est

$$2(By+B'x)z+Ax^2+A'y^2+2B''xy=0.$$

Ce cône est un véritable cône, car il contient l'axe oz ; la quadrique est donc un des deux hyperboloïdes.

Si cette quadrique est *un hyperboloïde à une nappe*, on pourra placer sur la surface deux droites *réelles* parallèles à l'axe oz ; ces droites seront *imaginaires*, si la quadrique est *un hyperboloïde à deux nappes*.

Les équations d'une droite parallèle à oz sont

$$x=\alpha \qquad y=\beta\,;$$

et la cote du point où elle rencontre la surface est donnée par l'équation

$$2(B\beta+B'\alpha)z+A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+D_1=0.$$

Pour que la droite soit située sur la surface, il faut et il suffit que l'équation précédente soit vérifiée quel que soit z, c'est-à-dire que l'on ait

$$B\beta + B'\alpha = 0 \qquad A\alpha^2 + A'\beta^2 + 2B''\alpha\beta + D_1 = 0 ;$$

d'où

$$\beta = -\frac{B'}{B}\alpha \qquad \alpha^2 = -\frac{B^2 D_1}{AB^2 + A'B'^2 - 2BB'B''} .$$

La quadrique est *un hyperboloïde à une nappe* si l'expression de α^2 est *positive,* et *un hyperboloïde à deux nappes* si cette expression est *négative.*

Quadriques de la deuxième classe.

La quadrique est un des deux paraboloïdes ; l'un au moins des plans de coordonnées n'étant pas parallèle à l'axe, coupera la surface suivant une conique n'appartenant pas au genre parabole.

La quadrique sera un *paraboloïde elliptique* si cette section est du *genre ellipse.*

La quadrique sera un *paraboloïde hyperbolique* si cette section est du *genre hyperbole.*

Quadriques de la troisième classe.

La quadrique est un *cylindre elliptique ou hyperbolique ;* l'un au moins des plans de coordonnées n'étant pas parallèle à l'axe, la section du cylindre par ce plan déterminera sa nature.

Quadriques de la quatrième classe.

La quadrique est un *cylindre parabolique.*

Quadriques de la cinquième classe.

La quadrique se compose de deux plans parallèles qui peuvent être *réels et distincts, confondus ou imaginaires.* L'un au moins des trois axes de coordonnées n'étant pas parallèle au plan des centres, la section de la surface par cet axe déterminera complètement sa nature.

237. Nous allons maintenant indiquer rapidement la marche à suivre pour déterminer la nature d'une quadrique représentée par une équation résolue par rapport à l'une des variables.

Si l'équation renferme les carrés des trois variables, elle sera de la forme

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \pm \sqrt{ax^2 + cy^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f}.$$

Le plan P ayant pour équation

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

est un plan diamétral conjugué des cordes parallèles à oz.

L'équation

$$\psi(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

représente une conique C_1, projection sur le plan xoy, de la section de la quadrique par le plan diamétral P.

Plusieurs cas peuvent se présenter.

1° C_1 *est une conique à centre.* — La quadrique appartient à la *première classe ;* pour déterminer sa nature, on cherchera si le diamètre parallèle à oz est réel ou imaginaire.

Les équations de ce diamètre sont

$$\psi'_x = 0 \qquad \psi'_y = 0.$$

Remarque. — Quand la conique C_1 se compose de deux droites qui se coupent, réelles ou imaginaires, la quadrique est un cône ou se réduit à un point. Pour décider la question, on coupe la surface par un plan parallèle au plan P et l'on examine si cette section est réelle ou imaginaire.

2° *La conique* C_1 *est une parabole.* — La quadrique est *un paraboloïde ;* la section par un des plans de coordonnées zox, zoy déterminera sa nature.

3° *La conique* C_1 *se compose de deux droites parallèles.* — La quadrique est *un cylindre elliptique ou hyperbolique ;* la section par un des plans de coordonnées zox, zoy déterminera sa nature.

4° **La conique C_1 se compose d'une seule droite.** — La quadrique est *un cylindre parabolique.*

5° *La fonction ψ se réduit à une constante.* — La quadrique est formée de deux plans parallèles qui sont *réels et distincts, confondus ou imaginaires,* suivant que cette constante est *positive, nulle* ou *négative.*

238. Supposons maintenant que l'équation ne renferme pas le carré de la variable z, par exemple, elle sera de la forme

$$z = \frac{f(x, y)}{P}, \tag{4}$$

$f(x, y)$ étant une fonction du second degré des variables x et y, et P une fonction du premier degré des mêmes variables.

L'équation

$$f(x, y) = 0$$

représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à oz et dont la trace sur le plan xoy est une conique C située sur la quadrique.

Le plan P coupe ce cylindre suivant deux droites D, D' parallèles à oz et situées sur la quadrique.

Si la trace L du plan P sur le plan xoy coupe la conique C en deux points *réels,* la quadrique admet deux génératrices rectilignes réelles et parallèles ; elle est *un hyperboloïde à une nappe.*

Si la trace L touche la conique C, la quadrique est *un cône.*

Si la trace L ne coupe pas la conique C, la quadrique est *un hyperboloïde à deux nappes.*

Si la trace L coupe la conique C en deux points dont l'un est rejeté à l'infini, la quadrique est *un paraboloïde hyperbolique.*

En effet, la fonction f est alors de la forme $aPQ + bR + c$ et l'équation (4) devient

$$P(z - aQ) = bR + c.$$

P, Q, R désignent des fonctions du premier degré et a, b, c des constantes.

Si la droite L est une asymptote de la conique C, la quadrique est *un cylindre hyperbolique.*

En effet, la fonction f est alors de la forme $a\mathrm{PQ}+c$ et l'équation (4) devient

$$\mathrm{P}(z-a\mathrm{Q})=c.$$

Enfin, si la trace L fait partie de la conique C, la quadrique se compose de *deux plans sécants.*

En effet, la fonction f est alors de la forme $a\mathrm{PQ}$, et l'équation (4) devient

$$\mathrm{P}(z-a\mathrm{Q})=0.$$

Il reste à examiner le cas où, P se réduisant à une constante, l'équation de la quadrique est de la forme

$$z=f(x, y).$$

Cette équation prendra l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} z&=\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2+h \\ z&=\mathrm{Q}^2-\mathrm{R}^2+h \\ z&=\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}\ \ +h \end{aligned}$$

suivant que la conique C sera du genre ellipse, du genre hyperbole ou du genre parabole.

Dans le premier cas, la quadrique est *un paraboloïde elliptique.*

Dans le deuxième cas, la quadrique est *un paraboloïde hyperbolique.*

Dans le troisième cas, la quadrique est *un cylindre parabolique.*

CHAPITRE II

DÉTERMINATION DES QUADRIQUES.

239. On appelle *paramètres* les constantes qui déterminent la grandeur et la position d'une surface.

Les paramètres de grandeur sont les constantes qui déterminent les dimensions de la surface, et les paramètres de position celles qui fixent sa position dans l'espace.

Pour une surface quelconque Σ, le nombre des paramètres de position est égal à six.

En effet, soient $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ trois axes qui sont connus quand a surface Σ est connue ; pour fixer la position de cette surface dans l'espace, il suffira de fixer celles des axes $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ par rapport à trois autres axes rectangulaires ox, oy, oz tracés dans l'espace. Or, pour cela, il suffit de connaître *six* constantes : savoir, les coordonnées de l'origine o' et les trois angles d'Euler (19).

De ce qui précède il résulte que, si l'équation d'une surface rapportée à des axes *quelconques* contient p paramètres arbitraires, le nombre des paramètres de grandeur sera $p - 6$.

Remarque. — Il y a exception quand la surface Σ est de révolution ; le nombre des paramètres de position se réduit alors à *cinq*. En effet, pour fixer la position de la surface, il suffit alors de connaître, par rapport aux axes ox, oy, oz, la direction de l'axe de révolution et un point de cet axe qui soit *connu* quand la surface est *connue*.

Cette exception tient à ce qu'une surface de révolution ne cesse pas de coïncider avec elle-même quand on la fait tourner autour de l'axe de révolution.

Il en est de même quand la surface est un cylindre ; parce que cette surface ne cesse pas de coïncider avec elle-même quand on la transporte le long d'une de ses génératrices.

Quand la surface est une sphère, le nombre des paramètres de position se réduit à *trois* ; cela tient à ce qu'une sphère ne cesse pas de coïncider avec elle-même quand on la fait tourner autour de son centre.

240. Nous allons considérer en particulier les quadriques ; leur équation la plus générale contient dix coefficients et, par conséquent, *neuf* paramètres. En effet, on peut diviser les deux membres de l'équation par l'un des coefficients.

Cherchons le nombre de conditions *simples* nécessaires pour déterminer les quadriques des différentes classes.

Quadriques de la première classe. — Il faut *neuf* conditions simples pour les déterminer ; cependant, quand la quadrique est un cône, *huit* conditions suffisent, car on a alors $H = 0$.

Quadriques de la deuxième classe. — Il faut *huit* conditions simples pour les déterminer, car Δ est nul.

Quadriques de la troisième classe. — Il faut *sept* conditions simples pour les déterminer, car Δ et H sont nuls.

Quadriques de la quatrième classe. — Il faut *six* conditions simples pour les déterminer, car les trois plans du centre étant parallèles on a les *trois* relations

$$A - \frac{B'B''}{B} = 0 \qquad A' - \frac{B''B}{B'} = 0 \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} = 0.$$

Quadriques de la cinquième classe. — Il faut *quatre* conditions simples pour les déterminer, car les trois plans du centre étant confondus, on a les *cinq* relations

$$A - \frac{B'B''}{B} = 0 \qquad A' - \frac{B''B}{B'} = 0 \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} = 0$$

$$BC = B'C' = B''C'.$$

Enfin il faut sept conditions simples pour déterminer une quadrique de révolution, car on a alors deux relations entre les coefficients de l'équation générale du second degré à trois variables.

241. Il est important de savoir trouver le nombre des conditions simples auxquelles équivaut la connaissance d'un point, d'un plan, d'une droite ou de toute autre ligne ou surface liés à une surface donnée.

Considérons d'abord le cas où l'on donne un point ou un plan, c'est-à-dire des éléments dont on fixe la position dans l'espace à l'aide de *trois* paramètres ; la règle suivante permettra de résoudre facilement la question proposée.

Règle. — *La connaissance d'un point ou d'un plan donne une condition triple si, la surface étant supposée tracée, le point ou le plan sont complètement déterminés ; elle donne une condition double ou une condition simple quand, la surface étant supposée tracée, il faut encore une ou deux conditions pour déterminer le point ou le plan.*

En effet, dans le premier cas, il y a *trois* relations entre les paramètres de la surface et les constantes qui déterminent le point ou le plan ; dans le deuxième cas, il y a *deux* relations, et, dans le troisième cas, *une seule* relation entre ces constantes et ces paramètres.

En appliquant cette règle, on voit immédiatement qu'on assujettit une quadrique à une condition triple, en donnant l'un des éléments suivants : *Le centre, un sommet, un plan principal, un plan tangent au sommet.*

On l'assujettit à une condition double en donnant *un point situé sur une section principale ou sur une section circulaire diamétrale,* ou encore en donnant *un plan asymptote.*

On l'assujettit à une condition simple en donnant un *point de la surface ou un plan tangent.*

Remarque. — La connaissance d'un plan tangent et du point de contact équivaut à une condition triple, car cela revient à donner trois points de la quadrique et à supposer que ces trois points se confondent ensuite en un seul.

On peut le voir encore en prenant le point de contact pour origine et le plan tangent pour plan des xoy ; l'équation de la quadrique est alors

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C''z = 0.$$

Elle ne contient que *six* paramètres arbitraires ; elle est donc assujettie à *trois* conditions.

Considérons maintenant le cas où l'on donne une droite liée à une surface ; la détermination de la droite dépendant de *quatre* paramètres, sa connaissance équivaudra à *quatre*, *trois*, *deux ou une* conditions. On distinguera ces différents cas en appliquant la règle suivante :

Règle. — *La connaissance d'une droite donne une condition quadruple si, la surface étant supposée tracée, la droite est complètement déterminée; elle donne une condition triple, double ou simple quand, la surface étant supposée tracée, il faut encore une, deux ou trois conditions pour déterminer la droite.*

Ainsi on assujettit une quadrique à une condition quadruple en donnant *un axe de symétrie en position;* on l'assujettit à une condition triple en donnant *une génératrice du cône asymptote;* on l'assujettit à une condition double en donnant *un diamètre quelconque;* enfin on l'assujettit à une condition simple en donnant *une droite tangente à la quadrique.*

D'une manière plus générale, considérons une courbe C ou une surface U dont la détermination dépend de p paramètres ; cette courbe ou cette surface étant liées à une surface Σ, pour savoir le nombre des conditions auxquelles Σ est assujettie, on appliquera la règle suivante :

Règle. — *La connaissance de la courbe* C *ou de la surface* U *donne une condition d'ordre p, si, la surface Σ étant supposée tracée, la courbe* C *ou la surface* U *sont complètement déterminées; elle donne une condition d'ordre $p-r$, si, la surface Σ étant supposée tracée, il faut encore r conditions pour déterminer la courbe* C *ou la surface* U.

En appliquant cette règle, on voit qu'on assujettit une quadrique à huit conditions, en donnant l'un des éléments suivants : « *Le cône asymptote*, une *section principale.* »

On l'assujettit à quatre conditions en donnant *la sphère de Monge;* à cinq conditions en donnant le *cône des directions asymptotiques.*

Remarque. — Quand on donne simultanément des points, des lignes ou des surfaces liés à une autre surface, il ne faut pas toujours, pour avoir le nombre total des conditions imposées à la surface, additionner le nombre de celles que ces éléments imposent lorsqu'on les considère *isolément;* le résultat ainsi obtenu n'est exact qu'autant que ces éléments n'ont entre eux aucune relation.

Par exemple, dans le cas des quadriques, la connaissance de *deux sommets* équivaut à *six* conditions.

Au contraire, la connaissance *du centre et d'un axe de symétrie* équivaut à *cinq* conditions ; car le centre et un axe de symetrie ne sont pas des éléments indépendants, puisque l'axe passant par le centre, il suffit de donner sa direction pour le déterminer.

242. Pour connaître le nombre des conditions simples auxquelles équivaut la connaissance d'un point, d'un plan, d'une ligne ou d'une surface liés à une quadrique, on peut encore procéder de la manière suivante :

On cherche l'équation générale des quadriques satisfaisant aux conditions données, et l'on retranche de *neuf* le nombre des paramètres contenus dans cette équation générale.

Ainsi, par exemple, la connaissance de trois diamètres conjugués en *position* équivaut à *six* conditions ; car, en prenant ces droites pour axes de coordonnées, l'équation de la quadrique est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0 ;$$

elle contient *trois* paramètres arbitraires.

La connaissance d'une section plane équivaut à *cinq* conditions ; en effet, si l'on prend le plan de cette section pour plan des xy, ses équations seront

$$z = 0 \qquad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + D = 0.$$

La section étant donnée, les rapports de cinq des coefficients A, A′, B″, C, C′, D au sixième sont connus.

243. Pour terminer, nous allons chercher à combien de conditions simples équivaut la connaissance d'une droite située sur une surface d'ordre m.

Si, entre les équations

$$x = az + p \qquad y = bz + q$$

de la droite et celle de la surface, on élimine x et y, on obtiendra, pour déterminer les cotes des points de rencontre, une équation d'ordre m, qui devra être identique. La surface est donc assujettie à $m + 1$ conditions.

Dans le cas des quadriques, la connaissance d'une droite située sur la surface équivaut à une condition *triple.*

La connaissance de deux droites d'un même système équivaut à *six* conditions.

La connaissance de deux droites de systèmes différents équivaut à *cinq* conditions ; en effet, la droite du système λ donne trois conditions, mais la droite du système μ n'en donne plus que *deux,* car elle a déjà en commun avec la quadrique le point où elle rencontre la droite du système λ.

La connaissance de trois droites d'un même système équivaut à *neuf* conditions ; la quadrique est déterminée.

La connaissance de trois droites dont deux appartiennent au système λ et la troisième au système μ équivaut à *sept* conditions. En effet, les droites du système λ donnent chacune trois conditions ; mais la droite du système μ n'en donne plus qu'*une seule,* car elle a déjà en commun avec la quadrique les deux points où elle rencontre respectivement les droites du système λ.

Enfin la connaissance de quatre droites, dont deux appartiennent au système λ et les deux autres au système μ, équivaut à *huit* conditions. En effet, les deux droites du système λ donnent six conditions ; mais chacune des droites du système μ n'en donne qu'*une seule,* car ces droites rencontrent les deux premières.

244. Nous allons maintenant faire connaître quelques théorèmes concernant les quadriques assujetties à passer par des points donnés.

Théorème I. — *Par neuf points on peut faire passer une quadrique et une seule, pourvu que les neuf points ne soient pas situés sur la courbe d'intersection de deux quadriques.*

Soient, d'une manière générale, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées d'un quelconque des neuf points donnés ; pour qu'une quadrique ayant pour équation

$$(1)\qquad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \end{aligned}$$

passe par ces neuf points, il faut et il suffit qu'on puisse satisfaire aux neuf équations obtenues en remplaçant i par les neuf premiers nombres entiers, dans la relation

$$(2)\qquad \begin{aligned} &Ax_i^2 + A'y_i^2 + A''z_i^2 + 2By_iz_i + 2B'z_ix_i + 2B''x_iy_i \\ &\quad + 2Cx_i + 2C'y_i + 2C''z_i + D = 0. \end{aligned}$$

On a vu en Algèbre que ces neuf équations homogènes et du premier degré par rapport aux *dix* inconnues A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, D ne sont jamais incompatibles ; elles admettent toujours une solution dans laquelle toutes les inconnues ne sont pas nulles.

Cependant, pour pouvoir conclure de là que, par neuf points donnés, on peut faire passer au moins une quadrique, il faut encore montrer que, dans aucun cas, il n'y a nécessité, pour satisfaire aux équations (2), de donner *simultanément* la valeur zéro aux six inconnues A, A', A'', B, B', B'' ; car, s'il en était ainsi, l'équation (1) ne serait plus du second degré.

D'abord, si l'on peut satisfaire aux équations (2) en prenant à la fois $A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0$, ces équations se réduiront à

$$2Cx_i + 2C'y_i + 2C''z_i + D = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);$$

les neuf points devraient donc être situés sur un même plan P.

Mais, dans ce cas, les équations (2) admettront encore une *infinité* d'autres solutions dans lesquelles les inconnues A, A', A'', B, B', B'' ne seront plus nulles à la fois ; en effet, en associant au plan P un autre plan quelconque, on obtiendra une infinité de quadriques passant par les neuf points.

On voit donc que le problème ne sera jamais impossible ; nous allons chercher dans quelles conditions il aura plusieurs solutions.

Si le problème a plusieurs solutions, on pourra, par les neuf points donnés, faire passer *au moins* deux quadriques *distinctes* U, V. Les neuf points donnés seront donc situés sur la courbe d'intersection des deux quadriques.

Dans ce cas, le problème est indéterminé, car l'équation

$$\lambda U + \mu V = 0$$

représente une infinité de quadriques passant par les neuf points donnés (207)

Théorème II. — *Par huit points donnés on peut faire passer une infinité de quadriques ; elles ont en commun une courbe gauche du quatrième ordre.*

En effet, en exprimant que la quadrique passe par les huit points donnés, on a, entre les coefficients de l'équation (1) huit relations linéaires et homogènes ; huit de ces coefficients sont donc des fonctions linéaires et homogènes de deux d'entre eux que nous désignerons par λ et μ, c'est-à-dire des fonctions de la forme $a\lambda + b\mu$.

L'équation (1) devient donc

$$\lambda U + \mu V = 0, \tag{3}$$

U, V étant des fonctions du second degré des coordonnées x, y, z.

Les quadriques ayant pour équations $U = 0$, $V = 0$ passent par les huit points donnés, car on obtient ces équations en posant $\mu = 0$ ou $\lambda = 0$ dans l'équation (3).

On voit que les huit points donnés sont situés sur une courbe gauche du quatrième ordre par laquelle passent toutes les quadriques définies par l'équation (3).

Remarque. — Le raisonnement précédent suppose que les huit équations obtenues en exprimant que la quadrique passe par les huit points donnés sont distinctes. Si ces équations se réduisent à sept, elles donnent pour sept des coefficients de l'équation (1) des valeurs qui sont des fonctions linéaires et homogènes de trois d'entre eux que nous désignerons par λ, μ et ν, c'est-à-dire des fonctions de la forme $a\lambda + b\mu + c\nu$.

L'équation (1) devient alors

$$(4) \qquad \lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

U, V, W étant des fonctions du second degré des coordonnées x, y, z.

Les quadriques ayant pour équations $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ passent encore par les huit points donnés, car on les déduit de l'équation (4) en particularisant les constantes λ, μ, ν.

Les huit points donnés sont donc alors les points d'intersection de trois quadriques ne se coupant pas suivant la même courbe gauche du quatrième ordre.

Théorème III. — *Toutes les quadriques passant par sept points ont en commun un huitième point.* (Lamé.)

En effet on a alors, entre les coefficients de l'équation (1), sept relations linéaires et homogènes ; sept de ces coefficients sont donc des fonctions linéaires et homogènes de trois d'entre eux que nous désignerons par λ, μ, ν, c'est-à-dire des fonctions de la forme $a\lambda + b\mu + c\nu$.

L'équation (1) devient donc

$$(5) \qquad \lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

U, V, W étant des fonctions du second degré des coordonnées x, y, z.

Les quadriques ayant pour équations $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ passent par les sept points donnés ; comme elles ont un huitième point commun, le théorème est démontré.

Remarque. — Le raisonnement précédent suppose que les sept équations de condition sont distinctes. Si ces équations se réduisent à six, elles donnent pour six des coefficients de l'équation (1) des valeurs qui sont des fonctions linéaires et homogènes de quatre d'entre eux que nous désignerons par λ, μ, ν, ρ, c'est-à-dire des fonctions de la forme $a\lambda + b\mu + c\nu + d\rho$.

L'équation (1) devient alors

$$(6) \qquad \lambda U + \mu V + \nu W + \rho L = 0.$$

Cherchons quelle est, dans ce cas, la disposition des sept points donnés que nous désignerons par des numéros d'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Par les points 1, 2, 3 faisons passer une conique C sur laquelle nous prendrons deux points M, M'. En exprimant que les coordonnées de ces points satisfont à l'équation (6), on obtiendra deux relations de la forme

$$\lambda = \alpha\nu + \beta\rho$$
$$\mu = \alpha'\nu + \beta'\rho,$$

et l'équation (6) deviendra

$$(7) \qquad \nu(\alpha U + \alpha' V + W) + \rho(\beta U + \beta' V + L) = 0.$$

Si l'on fait varier les paramètres ν, ρ, l'équation (7) représentera une infinité de quadriques passant par la conique C et par les points 4, 5, 6, 7 ; ces quatre derniers points sont donc dans un même plan P (207).

En remplaçant la conique C par une conique passant par les points 1, 2, 4, puis par une conique passant par les points 1, 4, 5, on verra que les points 3, 5, 6, 7 sont dans un même plan Q, et les points 2, 3, 6, 7 dans un même plan R.

Les trois plans P, Q, R ayant deux à deux trois points communs se confondent ; donc *six* des sept points donnés doivent être situés dans un même plan P.

Si ces six points 2, 3, 4, 5, 6, 7 ne sont pas sur une même conique, la quadrique se composera du plan P et d'un plan quelconque passant par le septième point 1 ; son équation contiendra *deux* paramètres arbitraires et rentrera dans la forme (5). Les sept relations de condition seront distinctes.

Si ces six points sont sur une même conique, la quadrique devant passer par cette conique et par le point 1 sera assujettie à *six* conditions ; son équation contiendra *trois* paramètres arbitraires et rentrera dans la forme (6). Dans ce dernier cas, les sept relations de condition ne seront plus distinctes.

Corollaire. — *L'équation générale des quadriques passant par sept points donnés est*

$$(5) \qquad \lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

U, V, W *représentant les premiers membres des équations de trois quadriques particulières passant par ces sept points.*

Soit en effet A une quadrique *quelconque* passant par les sept points ; en profitant de l'indétermination des paramètres λ, μ, ν, on pourra assujettir l'une des quadriques représentées par l'équation (5) à passer par deux points M, M′ pris *arbitrairement* sur A. Si B désigne cette quadrique particulière, les deux quadriques A et B se confondront, car elles auront neuf points communs ; de plus, ces points ne seront pas situés sur une même courbe gauche du quatrième ordre, puisque les points M, M′ ont été pris *arbitrairement* sur A.

Remarque I. — L'équation (5) représente aussi l'équation générale des quadriques passant par les points communs à trois quadriques données U, V, W.

Remarque II. — Le corollaire précédent suppose que six des sept points donnés ne sont pas situés sur une même conique.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES QUADRIQUES SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS

245. Nous rappellerons d'abord que l'équation générale des quadriques passant par l'intersection de deux quadriques données U, V est (207)

$$\lambda U + \mu V = 0.$$

Quadriques passant par une conique et une droite.

Lemme. — *Quand une droite et une conique sont situées sur une véritable quadrique, la droite rencontre la conique.*

En effet, supposons d'abord que la droite D ne soit pas parallèle au plan P de la conique C, elle le rencontrera en un point A; ce point est situé sur la conique, car, s'il en était autrement, toute droite menée dans le plan P par le point A, rencontrerait la conique C en deux points B, B′, et la quadrique en trois points A, B, B′.

Supposons maintenant que la droite soit parallèle au plan de la conique; le plan P et le plan parallèle mené par la droite D couperont la quadrique suivant des courbes homothétiques; la droite D sera donc parallèle à l'une des asymptotes de la conique C, et dès lors elle rencontrera cette courbe en un point rejeté à l'infini.

De ce lemme, il résulte qu'une quadrique qui doit passer par une conique C et une droite D est assujettie à *sept* conditions.

Soient $P=0$, $Q=0$ les équations de la droite D et $R=0$ l'équation du plan R de la conique C; P, Q, R désignent trois fonctions linéaires des coordonnées x, y, z. Le plan R et un plan quelconque passant par D représentent *une première* quadrique passant par la conique C et la droite D; son équation est

$$(aP + bQ)R = 0.$$

Le cylindre ayant pour directrice la conique C et dont les génératrices sont parallèles à D est *une deuxième* quadrique satisfaisant aux conditions proposées; si $f = 0$ est l'équation de ce cylindre, l'équation générale des quadriques passant par la conique C et par la droite D sera

$$f + (aP + bQ)R = 0.$$

Remarque I. — Dans la pratique, on prend ordinairement la droite D pour axe des z et le plan R de la conique pour plan des xy, l'équation précédente devient alors

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + (ax + by)z = 0.$$

Remarque II. — On assujettit une quadrique à *neuf* conditions en donnant une conique et deux droites situées sur cette surface. En effet, la donnée d'une conique située sur la surface équivaut à *cinq* conditions et la donnée de chacune des deux droites à *deux* conditions, puisque ces droites rencontrent la conique.

Examinons en particulier le cas où les deux droites D et D' rencontrent la conique au même point A. Dans ce cas, il n'est pas toujours possible de faire passer une *véritable* quadrique par la conique et les deux droites; il faut pour cela que les deux droites D, D' et la tangente AT au point A de la conique C soient dans un même plan.

En effet, le plan DAD' touchant la quadrique au point A doit contenir la tangente AT.

La conique et la droite D donnent *sept* conditions, mais la droite D' n'en donne plus qu'*une seule,* car, comme elle passe par le point A et se trouve dans le plan DAT, il suffira d'exprimer qu'un de ses points est sur la quadrique.

La quadrique, qui doit passer par la conique C et les droites D, D', est donc, dans ce cas particulier, assujettie à *huit* conditions

Quadriques passant par deux coniques données.

246. Lemme. — *Pour que, par deux coniques situées dans des plans différents, on puisse faire passer une quadrique, il faut et il suffit que ces deux coniques aient deux points communs.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soient, en effet, C, C' deux coniques situées sur une quadrique ; si les plans de ces deux courbes ne sont pas parallèles, leur intersection percera la surface en deux points A, B qui appartiendront aux coniques C, C'.

Si les plans des deux coniques sont parallèles, ces deux courbes seront homothétiques et pourront être considérées comme se coupant en deux points rejetés à l'infini.

2° *La condition est suffisante.* — Nous allons démontrer que, par deux coniques situées dans des plans différents et se coupant en deux points A, B, on peut faire passer une infinité de quadriques.

En effet, si, sur chacune des deux coniques on prend trois points, ils formeront avec les deux points A, B un groupe de huit points par lesquels on pourra faire passer une infinité de quadriques dont l'équation générale contiendra *un* paramètre arbitraire. Toutes ces quadriques passeront par les deux coniques données, car elles auront avec chacune d'elles cinq points communs.

Dans la pratique, on prend ordinairement les plans des deux coniques données pour deux des plans de coordonnées zox, yox; l'équation générale des quadriques passant par ces deux coniques s'obtiendra en considérant B comme un paramètre arbitraire et les autres coefficients comme connus dans l'équation

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy\\+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.\end{gathered}$$

En effet, si, dans cette équation on pose successivement $y=0$, puis $z=0$, on obtient deux équations qui représentent deux coniques déterminées, situées l'une dans le plan zox, l'autre dans le plan yox et coupant l'axe des x aux mêmes points.

Quadriques doublement tangentes.

247. Lemme. — *Si deux quadriques se touchent en deux points a, b non situés sur une droite commune aux deux surfaces, elles se coupent suivant deux courbes planes.*

En effet, soit c un troisième point commun aux deux quadriques ; le plan cab coupera ces surfaces suivant des coniques ayant trois points communs a, b, c et les mêmes tangentes aux deux points a, b, c'est-à-dire suivant la même conique. La courbe d'intersection des deux quadriques étant formée d'une première courbe plane, se compose de deux courbes planes.

La démonstration précédente suppose que les plans tangents en a et en b ne se coupent pas suivant la droite ab, ou que la droite ab n'est pas située sur les deux quadriques.

Dans ce cas, l'intersection des deux surfaces se compose de la droite ab et d'une courbe gauche du troisième ordre, que l'on appelle *cubique gauche*.

Réciproquement, *si deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes, elles sont doublement tangentes.*

En effet, soient a, b les deux points communs à ces courbes planes (246), et (at, at'), (bs, bs') les tangentes respectives à ces courbes ; les plans tat', sbs' toucheront les deux quadriques aux points a et b.

Ce lemme étant démontré, soit $U = 0$ l'équation d'une des quadriques ; une autre quadrique la touchant en deux points la coupera suivant deux courbes planes. Si $P = 0$, $Q = 0$ représentent les équations des plans de ces deux courbes, l'équation générale des quadriques doublement tangentes à U sera

$$U + \lambda PQ = 0,$$

les équations de la corde de contact étant

$$P = 0 \qquad Q = 0.$$

Quadriques touchant deux plans donnés en deux points donnés.

248. Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations des deux plans donnés A, B que les quadriques doivent toucher aux points a, b ; soient de plus $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations de la droite ab.

Les deux plans A, B et deux plans *quelconques* passant par ab formeront deux quadriques particulières touchant les plans donnés en a et en b ; l'équation générale des quadriques jouissant de la même propriété est donc

$$\alpha\beta+\lambda\gamma^2+2\mu\gamma\delta+\nu\delta^2=0. \quad (\kappa)$$

Remarque. — Dans la pratique, il est souvent avantageux de prendre la corde de contact ab pour axe des z, son milieu o pour origine, une parallèle à l'intersection D des deux plans tangents donnés pour axe des y et pour axe des x une droite quelconque oC située dans le plan passant par D et par le point o.

Posons $ab=2c$, $o\mathrm{C}=a$, les équations des plans tangents donnés seront

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-1=0$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-1=0,$$

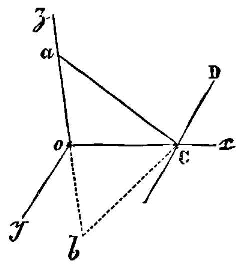


Fig. 48

et l'équation générale des quadriques qui les touchent aux points a, b sera

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-1\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-1\right)+\lambda x^2+2\mu xy+\nu y^2=0.$$

Quadriques inscrites ou circonscrites.

249. **Lemme.** — *Quand deux quadriques se touchent en trois points, a, b, c, elles se raccordent généralement en tous les points d'une courbe plane.*

En effet, le plan abc coupe les deux quadriques suivant des coniques qui se touchent aux points a, b, c et, par suite, se confondent. Maintenant, les deux quadriques n'ont pas de points communs en dehors du plan abc; car, si elles avaient un point commun d en dehors de ce plan, chacun des plans dab, dbc, dca les couperait suivant la même conique.

L'intersection des deux quadriques se composerait donc de *quatre* coniques.

Cela posé, soient $\mathrm{U}=0$, $\mathrm{V}=0$ les équations des deux quadriques et $\mathrm{P}=0$ celle du plan abc; puisque, par l'intersection de ces quadriques, on peut faire passer un plan double abc, on aura identiquement

$$\lambda U - V \equiv P^2$$

pour une valeur convenablement choisie de λ.

Les équations de deux quadriques se touchant en trois points a, b, c seront donc

$$U = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda U - P^2 = 0.$$

Sur la conique C qui leur est commune dans le plan abc, prenons un point quelconque $m\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$, et représentons par p ce que devient la fonction P quand on y remplace X, Y, Z, T par x, y, z, t; les équations des plans tangents aux deux quadriques au point m seront respectivement

$$XU'_x + YU'_y + ZU'_z + TU'_t = 0$$
$$\lambda\left(XU'_x + YU'_y + ZU'_z + TU'_t\right) - 2Pp = 0.$$

Ces deux équations représentent le même plan, car p est nul; les deux quadriques se touchent donc en tous les points de la conique C.

Quand deux quadriques se touchent en tous les points d'une courbe qui, d'après ce que l'on vient de voir, est nécessairement plane, on dit qu'elles sont *circonscrites* ou *inscrites* l'une à l'autre.

L'équation générale des quadriques circonscrites ou inscrites à une quadrique donnée U est

$$\lambda U - P^2 = 0;$$

$P = 0$ représentant le plan de la courbe de contact.

Si *un seul* des côtés du triangle abc est commun aux deux quadriques, la conique de raccordement C se compose de la droite ab et d'une droite passant par le point c. Le plan P touche la quadrique U.

Le lemme et ses conséquences ne subsistent plus si deux côtés ab, ac du triangle abc sont communs aux quadriques, ou si les points a, b, c sont en ligne droite.

Dans le premier cas, les quadriques se coupent suivant les droites ab, ac et une conique passant par les points b, c.

Dans le second, elles se touchent en tous les points de la droite abc

Remarque. — Soit V une quadrique inscrite dans une quadrique U, les coniques, intersection des deux surfaces par un plan Q se toucheront aux points où ce plan rencontre leur courbe de contact.

Si le plan Q touche V en un ombilic, il coupera U suivant une conique ayant cet ombilic pour foyer et pour directrice la trace du plan Q sur le plan de la courbe de contact.

Si la surface V est une sphère, chaque plan tangent coupera U suivant une conique ayant pour foyer le point de contact du plan avec la sphère.

Dans ce cas, la quadrique U est de révolution.

Cônes et cylindres circonscrits à une quadrique.

250. Cône circonscrit. — Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la quadrique et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du sommet S d'un cône qui lui est circonscrit.

Sur la courbe de contact des deux surfaces, prenons un point quelconque M (x, y, z); l'équation du plan touchant la quadrique en ce point sera

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + f'_t = 0.$$

Ce plan touchant également le cône passera par son sommet S, et l'on aura la relation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + f'_t = 0,$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + f'_{t_0} = 0.$$

Quand on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, cette équation représente le plan polaire du point S.

Ainsi, la courbe de contact d'une quadrique et d'un cône circonscrit coïncide avec l'intersection de la quadrique par le plan polaire du sommet du cône.

Cela posé, l'équation générale des quadriques touchant la quadrique donnée en tous les points de son intersection par le plan polaire du point S, est

$$\lambda f(x, y, z) - \left(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + f'_{t_0}\right)^2 = 0.$$

Comme *une seule* de ces surfaces passe par le point S, si l'on détermine λ de manière que l'équation précédente soit vérifiée par les coordonnées du point S, elle représentera le cône circonscrit à la quadrique. On obtient ainsi la relation

$$\lambda = 4f(x_0, y_0, z_0);$$

l'équation du cône circonscrit est donc

$$4f(x_0, y_0, z_0)\, f(x, y, z) = (x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} + f'_{t_0})^2.$$

Cylindre circonscrit. — Soient α, β, γ les coefficients qui définissent la direction D des génératrices du cylindre circonscrit. En exprimant que le plan touchant la quadrique au point M (x, y, z) est parallèle à cette direction, on obtient la relation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Quand on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, cette équation représente le plan diamétral conjugué de la direction D.

Ainsi, la courbe de contact d'une quadrique et d'un cylindre circonscrit coïncide avec l'intersection de la quadrique par le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices de ce cylindre.

Cela posé, l'équation générale des quadriques touchant la quadrique donnée en tous les points de son intersection par ce plan diamétral est

$$\begin{gathered}\lambda\,[\varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D] \\ = [x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)]^2.\end{gathered}$$

Comme *une seule* de ces surfaces a pour direction asymptotique la direction D, si l'on détermine λ de manière que l'ensemble des termes du second degré dans l'équation précédente s'annulent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, elle représentera le cylindre circonscrit à la quadrique.

On obtient ainsi la relation

$$\lambda = 4\varphi(\alpha, \beta, \gamma);$$

l'équation du cylindre circonscrit est donc

$$4\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, f(x, y, z) = (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2.$$

251. Problème. — *Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique.*

Nous considérerons successivement les quadriques de la première classe et celles de la deuxième classe.

Quadriques de la première classe. — Nous supposerons, pour fixer les idées, que cette quadrique est un ellipsoïde que nous rapporterons à ses plans principaux.

L'équation d'un cône circonscrit ayant pour sommet le point $S(x_0, y_0, z_0)$ est

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2.$$

Cette équation représente un plan double quand le sommet du cône est sur l'ellipsoïde ; ce plan double pouvant être considéré comme une surface de révolution, nous devrons trouver la solution

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0.$$

Il y a donc avantage à laisser en évidence, dans tous les calculs qui vont suivre, le premier membre de l'équation précédente ; pour éviter de le réduire avec d'autres termes, nous poserons

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=h.$$

L'équation du cône développée, en ne prenant que les termes du second degré, est

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(h-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(h-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}+\left(h-\frac{z_0^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2}\\ &\qquad -2\frac{y_0z_0}{b^2c^2}yz-2\frac{z_0x_0}{c^2a^2}zx-2\frac{x_0y_0}{a^2b^2}xy=0\,;\end{aligned}\right.$$

pour exprimer qu'elle représente une surface de révolution, nous distinguerons deux cas principaux :

1° *Le produit $x_0y_0z_0$ n'est pas nul.* — Dans ce cas, le sommet du cône n'est pas situé dans un des plans principaux de l'ellipsoïde ; il sera de révolution, si l'on a

$$\frac{h}{a^2}=\frac{h}{b^2}=\frac{h}{c^2}.$$

On a d'abord la solution $h=0$ déjà interprétée, puis les relations de condition $a=b=c$ qui expriment que l'ellipsoïde est une sphère ; tous les cônes circonscrits sont alors de révolution.

2° L'*une des coordonnées* x_0, y_0 *ou* z_0 *est nulle.* — Supposons par exemple $x_0=0$; le sommet du cône est alors dans le plan principal yoz.

L'équation (1) devient

$$h\frac{x^2}{a^2}+\left(h-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}+\left(h-\frac{z_0^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2}-2\frac{y_0z_0}{b^2c^2}yz=0;$$

elle représentera une surface de révolution si l'on a

$$\frac{y_0^2z_0^2}{b^4c^4}=\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)h-\frac{y_0^2}{b^4}\right]\left[\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)h-\frac{z_0^2}{c^4}\right],$$

ou bien

$$(b^2-a^2)(c^2-a^2)\frac{h^2}{a^2}+\left[(c^2-a^2)\frac{y_0^2}{b^2}+(b^2-a^2)\frac{z_0^2}{c^2}\right]h=0.$$

Nous retrouvons encore la solution $h=0$; supprimons le facteur h et remplaçons ensuite h par sa valeur $\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$, nous obtiendrons enfin l'équation

$$\frac{y_0^2}{b^2-a^2}+\frac{z_0^2}{c^2-a^2}-1=0.$$

Les résultats qui correspondent aux hypothèses $y_0=0$ ou $z_0=0$ se déduisent du précédent par des permutations de lettres évidentes.

En résumé, le lieu cherché se compose de trois coniques U, V, W situées dans les plans principaux de l'ellipsoïde et ayant respectivement pour équations

$$(\mathrm{U}) \qquad x_0 = 0 \qquad \frac{y_0^2}{b^2 - a^2} + \frac{z_0^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$(\mathrm{V}) \qquad y_0 = 0 \qquad \frac{z_0^2}{c^2 - b^2} + \frac{x_0^2}{a^2 - b^2} = 1$$

$$(\mathrm{W}) \qquad z_0 = 0 \qquad \frac{x_0^2}{a^2 - c^2} + \frac{y_0^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Ces trois courbes sont appelées les focales de l'ellipsoïde ; on vérifie facilement que chaque focale a les mêmes foyers que la section principale dans le plan de laquelle elle est située, et que ses sommets sont des foyers des deux autres sections principales.

Ajoutons que les focales passent par les ombilics réels ou imaginaires situés dans leur plan.

Nous supposerons toujours que l'on a : $a > b > c$.

Dans ces conditions, la focale U dont le plan est perpendiculaire à l'axe majeur est une *ellipse imaginaire ;*

La focale V dont le plan est perpendiculaire à l'axe moyen est une *hyperbole ;*

Enfin la focale W dont le plan est perpendiculaire à l'axe mineur est une *ellipse réelle* placée à l'intérieur de l'ellipsoïde.

De ce qui précède il résulte, qu'en ne considérant que les cônes de révolution réels circonscrits à l'ellipsoïde, le lieu se compose des arcs de la focale hyperbolique V extérieurs à cette surface.

Axe de révolution. — Soit S un point de ces arcs, le plan CoA sera un plan principal du cône circonscrit ayant pour sommet le point S. Les génératrices situées dans ce plan principal sont les tangentes St, St' menées du point S à la section principale AoC; de plus, la section du cône par le plan mené par tt' perpendiculairement au plan AoC est une ellipse; donc l'axe de révolution est la bissectrice de l'angle tSt'. L'hyperbole V et la section principale AoC ayant les mêmes foyers réels φ, φ',

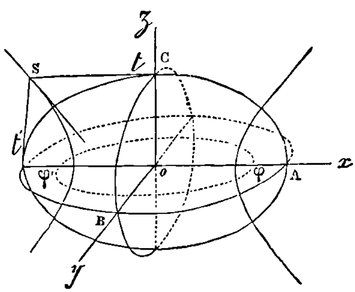


Fig. 49.

il en résulte que l'axe est aussi la bissectrice de l'angle $\varphi S \varphi'$; il coïncide donc avec la tangente au point S de l'hyperbole V.

252. Si la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, les équations des trois focales sont

$$(\mathrm{U}) \qquad x_0=0 \qquad \frac{y_0^2}{b^2-a^2}-\frac{z_0^2}{c^2+a^2}=1$$

$$(\mathrm{V}) \qquad y_0=0 \qquad -\frac{z_0^2}{c^2+b^2}+\frac{x_0^2}{a^2-b^2}=1$$

$$(\mathrm{W}) \qquad z_0=0 \qquad \frac{x_0^2}{a^2+c^2}+\frac{y_0^2}{b^2+c^2}=1.$$

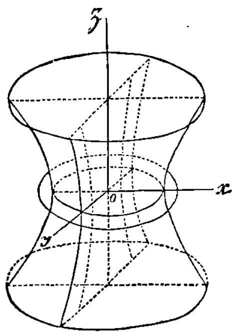


Fig. 50.

On les obtient en changeant c^2 en $-c^2$ dans les équations des focales de l'ellipsoïde.

Nous supposerons $b > a$.

Dans ces conditions la focale U, dont le plan est perpendiculaire au plus petit des axes réels, est une *hyperbole ;*

La focale V, dont le plan est perpendiculaire au plus grand des axes réels, est une *ellipse imaginaire ;*

Enfin la focale W, dont le plan est perpendiculaire à l'axe imaginaire, est une *ellipse réelle.*

253. Si la quadrique est un hyperboloïde à deux nappes, les équations des trois focales sont

$$(\mathrm{U}) \qquad x_0=0 \qquad \frac{y_0^2}{a^2-b^2}+\frac{z_0^2}{c^2+a^2}=1$$

$$(\mathrm{V}) \qquad y_0=0 \qquad \frac{z_0^2}{c^2+b^2}+\frac{x_0^2}{b^2-a^2}=1$$

$$(\mathrm{W}) \qquad z_0=0 \qquad -\frac{x_0^2}{a^2+c^2}-\frac{y_0^2}{b^2+c^2}=1.$$

On les obtient en changeant a^2 et b^2 en $-a^2$ et en $-b^2$ dans les équations des focales de l'ellipsoïde.

Nous supposerons encore $b > a$.

Dans ces conditions, la focale U, dont le plan est perpendiculaire au plus petit des axes imaginaires, est une *hyperbole;*

La focale V, dont le plan est perpendiculaire au plus grand des axes imaginaires est une *ellipse réelle;*

Enfin la focale W, dont le plan est perpendiculaire à l'axe réel, est une *ellipse imaginaire.*

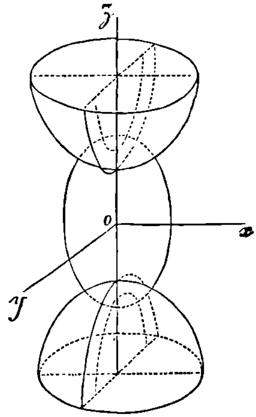


Fig. 51.

254. Quadriques de la deuxième classe. — Nous supposerons pour fixer les idées que cette quadrique est un paraboloïde elliptique que nous rapporterons aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet.

En posant

$$h = \frac{y_0^2}{p} + \frac{z_0^2}{q} - 2x_0$$

l'équation du cône circonscrit développée et réduite aux termes du second degré est

$$-x^2 + \left(h - \frac{y_0^2}{p}\right)\frac{y^2}{p} + \left(h - \frac{z_0^2}{q}\right)\frac{z^2}{q} - 2\frac{y_0 z_0}{pq}yz + 2\frac{z_0}{q}zx + 2\frac{y_0}{p}xy = 0.$$

Il faut exprimer que cette équation représente une surface de révolution.

Si le sommet du cône n'est situé ni dans l'un des deux plans principaux ni dans le plan tangent au sommet, on ne trouve que la solution $h = 0$.

Quand le sommet du cône est dans l'un des plans principaux, on obtient les deux solutions suivantes :

(××) $\quad y_0 = 0 \qquad z_0^2 + (p-q)(2x_0 - p) = 0$

et

$$z_0 = 0 \qquad y_0^2 + (q-p)(2x_0 - q) = 0.$$

Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, les équations précédentes deviennent

$$y_0 = 0 \qquad z_0^2 + (p+q)(2x_0 - p) = 0$$

et

$$z_0 = 0 \qquad y_0^2 - (p+q)(2x_0 + q) = 0.$$

On voit que les paraboloïdes admettent deux courbes focales et que ces courbes sont des paraboles.

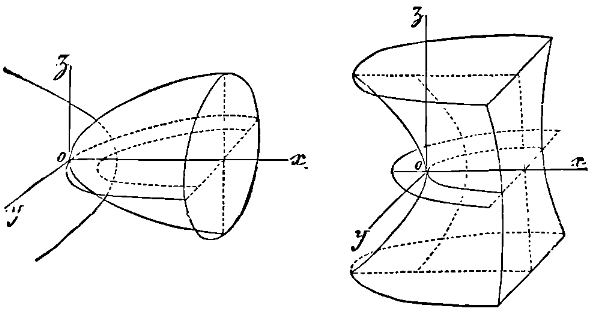


Fig. 52.

Quadriques passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

255. Soit $A_1A_2A_3A_4$ le quadrilatère gauche; si l'on mène les deux diagonales A_1A_2, A_3A_4 on formera un tétraèdre. Nous représenterons par

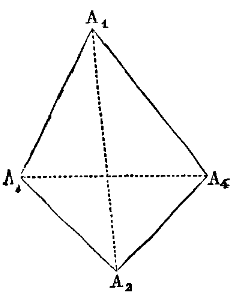


Fig. 53.

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 0$$

les équations des faces respectivement opposées aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4.

Les faces qui se coupent suivant la diagonale A_1A_2 et celles qui se coupent suivant la diagonale A_3A_4 forment deux quadriques particulières passant par les quatre côtés du quadrilatere gauche; l'équation générale des quadriques jouissant de cette propriété est donc

$$x_1x_2 + \lambda x_3x_4 = 0.$$

Quadriques passant par deux droites données.

256. Soient

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 0$$

les équations des deux droites données D, D'.

L'équation générale des quadriques pourra être mise sous la forme

$$(2) \qquad \mathrm{A}_{11}x_1^2 + \mathrm{A}_{22}x_2^2 + \mathrm{A}_{33}x_3^2 + \mathrm{A}_{44}x_4^2$$
$$+ 2\mathrm{A}_{12}x_1x_2 + 2\mathrm{A}_{13}x_1x_3 + 2\mathrm{A}_{14}x_1x_4 + 2\mathrm{A}_{23}x_2x_3 + 2\mathrm{A}_{24}x_2x_4 + 2\mathrm{A}_{34}x_3x_4 = 0,$$

avec

$$\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji}.$$

La surface passant par la droite D l'équation

$$\mathrm{A}_{33}x_3^2 + \mathrm{A}_{44}x_4^2 + 2\mathrm{A}_{34}x_3x_4 = 0$$

obtenue en faisant $x_1 = x_2 = 0$ dans l'équation (2), devra être satisfaite identiquement. On aura donc

$$\mathrm{A}_{33} = 0 \qquad \mathrm{A}_{44} = 0 \qquad \mathrm{A}_{34} = 0.$$

En exprimant que la quadrique passe par la droite D', on trouvera de même

$$\mathrm{A}_{11} = 0 \qquad \mathrm{A}_{22} = 0 \qquad \mathrm{A}_{12} = 0.$$

L'équation générale des quadriques passant par les droites D, D' est donc

$$\mathrm{A}_{13}x_1x_3 + \mathrm{A}_{14}x_1x_4 + \mathrm{A}_{23}x_2x_3 + \mathrm{A}_{24}x_2x_4 = 0.$$

Quadriques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

257. Considérons encore le tétraèdre formé en menant les deux diagonales $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ du quadrilatère donné $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ (*fig.* 53) ; conservons en outre les notations du paragraphe 255; une quadrique quelconque sera encore representée par l'équation (2). Quant aux côtés du quadrilatère, ils auront pour équations

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

En exprimant que ces côtés sont tangents à la quadrique on obtient les relations

$$A_{13}^2 = A_{11}A_{33} \qquad A_{14}^2 = A_{11}A_{44} \qquad A_{23}^2 = A_{22}A_{33} \qquad A_{24}^2 = A_{22}A_{44}.$$

Elles montrent que les coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} sont de même signe; on peut donc poser

$$A_{11} = a^2 \qquad A_{22} = b^2 \qquad A_{33} = c^2 \qquad A_{44} = d^2\,;$$

il en résulte

$$A_{13} = \pm\, ac \qquad A_{14} = \pm\, ad \qquad A_{23} = \pm\, bc \qquad A_{24} = \pm\, bd.$$

Si l'on combine les signes de toutes les manières possibles, on obtient pour représenter les quadriques cherchées seize équations qui rentrent dans les deux formes suivantes :

$$(3) \qquad a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 + d^2x_4^2$$
$$+ 2acx_1x_3 + 2adx_1x_4 + 2bdx_2x_4 + 2bcx_2x_3 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{34}x_3x_4 = 0$$

et

$$(4) \qquad a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 + d^2x_4^2$$
$$+ 2acx_1x_3 + 2adx_1x_4 + 2bdx_2x_4 - 2bcx_2x_3 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{34}x_3x_4 = 0.$$

Toutes les formes renfermant un nombre *pair* de signes $+$ se déduisent de l'équation (3), et toutes les formes renfermant un nombre *impair* de signes — se déduisent de l'équation (4), en changeant, dans l'une ou l'autre de ces deux équations, les signes d'une ou plusieurs des quantités a, b, c, d. Ainsi, il faut deux équations pour représenter toutes les quadriques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

Remarque. — Les équations (3) et (4) peuvent être écrites comme il suit :

$$(3') \qquad (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)^2 + 2(\lambda x_1x_2 + \mu x_3x_4) = 0$$

$$(4') \qquad (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)^2 - 4bcx_2x_3 + 2(\lambda x_1x_2 + \mu x_3x_4) = 0.$$

De l'équation (3') on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Quand une quadrique touche les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, les quatre points de contact sont dans un même plan.*

Cette propriété n'est vraie que pour une seule des deux séries de quadriques tangentes aux côtés du quadrilatère.

Quadriques tangentes aux six arêtes d'un tétraèdre.

258. Soient $A_1A_2A_3A_4$ le tétraèdre donné et

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 0$$

les équations des quatre faces.

Les quadriques représentées par les équations (3'), (4') touchent quatre des arêtes du tétraèdre ; en exprimant que l'une ou l'autre est tangente aux deux arêtes A_1A_2, A_3A_4, on obtient les relations

$$\lambda(\lambda + 2ab = 0 \qquad \mu(\mu + 2cd) = 0,$$

qui conduisent aux quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -2cd \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2ab \\ \mu = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2ab \\ \mu = -2cd. \end{cases}$$

Si l'on considère d'abord l'équation (3'), la première solution donne des plans doubles, la deuxième et la troisième donnent des cônes ; enfin la quatrième solution donne des quadriques ayant pour équation

$$(5) \qquad \begin{gathered} a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 + d^2x_4^2 \\ - 2abx_1x_2 + 2acx_1x_3 + 2adx_1x_4 + 2bcx_2x_3 + 2bdx_2x_4 - 2cdx_3x_4 = 0. \end{gathered}$$

Si l'on considère maintenant l'équation (4') les quatre solutions donnent des cônes. Cela est évident pour les trois premières; on voit qu'il en est ainsi pour la quatrième en remarquant que l'équation (4') peut alors être mise sous la forme

$$(ax_1 - bx_2 + cx_3)^2 + d(2ax_1 + 2bx_2 - 2cx_3 + dx_4)x_4 = 0.$$

En résumé, si on laisse de côté les cas particuliers, les quadriques angentes aux arêtes du tétraèdre sont représentées par l'équation (5). Si l'on y change c en $-c$ et d en $-d$, cette équation prend une forme plus symétrique et devient

$$\Sigma a^2x_1^2 - 2\Sigma abx_1x_2 = 0;$$

le symbole Σ indiquant la somme des termes obtenus en permutant les lettres (a, b, c, d), (x_1, x_2, x_3, x_4) dans les termes mis en évidence.

Quadriques circonscrites à un tétraèdre.

259. En conservant les mêmes notations qu'au paragraphe 255, et exprimant que la quadrique passe par les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, on obtient immédiatement, pour représenter les quadriques circonscrites au tétraèdre, l'équation

$$A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 + A_{14}x_1x_4 + A_{23}x_2x_3 + A_{24}x_2x_4 + A_{34}x_3x_4 = 0.$$

Quadriques inscrites dans un tétraèdre.

260. Conservons encore les mêmes notations qu'au paragraphe 255 ; un plan quelconque P sera représenté par une équation de la forme

$$(C) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Ce plan sera tangent à une quadrique si ses coefficients sont liés par une équation du second degré

$$\Sigma a_1^2 u_1^2 + 2 \Sigma a_{12} u_1 u_2 = 0, \tag{7}$$

dans laquelle on a

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

La quadrique touchant la face $A_2A_3A_4$ du tétraèdre donné, l'équation (7) devra être satisfaite si l'on y pose $u_2 = u_3 = u_4 = 0$; on aura donc $a_{11} = 0$.

En exprimant que la quadrique touche les autres faces du tétraèdre, on trouvera de même les relations

$$a_{22} = 0 \qquad a_{33} = 0 \qquad a_{44} = 0.$$

L'équation (7) devient donc

$$a_{12} u_1 u_2 + a_{13} u_1 u_3 + a_{14} u_1 u_4 + a_{23} u_2 u_3 + a_{24} u_2 u_4 + a_{34} u_3 u_4 = 0. \tag{8}$$

Le problème est ramené a chercher l'enveloppe des plans P, les coefficients des variables satisfaisant à l'équation (8).

En appliquant la méthode exposée au paragraphe 112, on obtient pour représenter les quadriques inscrites dans le tétraèdre l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quadriques conjuguées à un tétraèdre.

261. Définition. — *On dit qu'une quadrique est conjuguée à un tétraèdre quand, par rapport à cette surface, chaque sommet du tétraèdre est le pôle de la face opposée.*

Conservons encore les notations du paragraphe 255.

On démontre comme en Géométrie plane (G. P. 334) que l'équation d'une quadrique étant

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

le plan polaire d'un point M défini par les quantités x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 a pour équation

$$x'_1 f'_{x_1} + x'_2 f'_{x_2} + x'_3 f'_{x_3} + x'_4 f'_{x_4} = 0.$$

(Les quantités x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 sont respectivement proportionnelles aux distances du point M aux faces du tétraèdre.)

En partant de ce résultat on trouve facilement, pour représenter les quadriques conjuguées à un tétraèdre, l'équation

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

262. **Remarque.** — Dans le paragraphe 255 et dans les suivants, nous avons en réalité fait usage des coordonnées homogènes; nous n'avons pas cru nécessaire d'étudier d'une manière particulière ce système de coordonnées. Il sera en effet facile d'étendre à la Géométrie dans l'espace les développements donnés sur cette question en Géométrie plane (G. P., Livre VII, Chapitre IV).

CHAPITRE IV

FOYERS DANS LES QUADRIQUES.

263. Définition. — *On appelle foyer d'une surface le centre d'une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface.*

Cette définition est analogue à celle qu'a donnée Plücker pour les foyers d'une courbe plane.

Détermination des foyers d'une quadrique. — Soient

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

l'équation de la quadrique rapportée à des axes quelconques mais cependant rectangulaires, et

$$\Sigma = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

l'équation de la sphère de rayon nul.

Ces deux surfaces doivent être doublement tangentes, et, pour cela, il faut et il suffit qu'elles se coupent suivant deux courbes planes (247).

L'équation générale des quadriques passant par l'intersection des deux surfaces considérées est

$$f - S\Sigma = 0;$$

rendons cette équation homogène par l'introduction d'une quatrième variable t, elle représentera deux plans si les plans ayant pour équations

$$(1) \qquad f'_x - S\Sigma'_x = 0 \quad f'_y - S\Sigma'_y = 0 \quad f'_z - S\Sigma'_z = 0 \quad f'_t - S\Sigma'_t = 0.$$

passent par une même droite.

En effet, cette quadrique aura alors une ligne de centres et passera par cette ligne de centres.[*]

Posons, pour abréger l'écriture,

$$c = C + S\alpha \qquad c' = C' + S\beta \qquad c'' = C'' + S\gamma \\ d = D - S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

les équations (1) développées deviendront

$$(2)\qquad \begin{cases} (A-S)x + B''y + B'z + c = 0 \\ B''x + (A'-S)y + Bz + c' = 0 \\ B'x + By + (A''-S)z + c'' = 0 \end{cases}$$

$$(3)\qquad cx + c'y + c''z + d = 0.$$

Les plans représentés par les équations (2) devant passer par une même droite, il faut déjà que le déterminant $\Delta(S)$ formé par les coefficients des inconnues x, y, z soit nul ; donc S est une racine de l'équation en S.

Nous distinguerons maintenant deux cas.

1° *L'équation en* S *n'a pas de racine multiple.* — On sait qu'une racine simple S ne peut pas annuler à la fois les trois mineurs principaux a, a', a'' du déterminant $\Delta(S)$ (142).

Pour fixer les idées, nous supposerons $a'' \gtrless 0$. D'apres le théorème de M. Rouché, pour que les équations (2) se réduisent à deux, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & c \\ B'' & A'-S & c' \\ B' & B & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation exprime que le déterminant formé par les coefficients des inconnues x, y, z, dans l'équation (3) et les deux premières des équations (2), a une valeur nulle ; ces trois équations devant se réduire à *deux*, on aura la relation

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & c \\ B'' & A'-S & c' \\ c & c' & d \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — Aux hypothèses $a \gtrless 0$ ou $a' \gtrless 0$ correspondent deux couples d'équations que l'on déduit facilement des équations (I), (II).

En remplaçant dans les équations (I) et (II) ou dans les équations analogues S par les racines de l'équation en S, on aura trois groupes de deux équations déterminant les foyers de la quadrique. L'équation (I) représente un plan et l'équation (II) une surface du second ordre ; donc une quadrique a en général une infinité de foyers situés sur trois coniques.

Remarque. — Quand on remplace S par une racine de l'équation en S et α, β, γ par les coordonnées d'un des foyers correspondants, on a identiquement

$$f - S\Sigma \equiv PQ,$$

P et Q étant des fonctions linéaires.

Les plans P et Q sont évidemment parallèles aux plans cycliques d'un même système de la quadrique donnée.

Si les plans P et Q sont réels, on dit que les foyers correspondants sont de *première espèce;* ces foyers correspondent à la racine moyenne de l'équation en S.

Si les plans P et Q sont imaginaires, on dit que les foyers correspondants sont de *deuxième espèce.*

L'intersection des plans P et Q qui est une droite toujours réelle est la *directrice* du foyer dont les coordonnées sont α, β, γ.

La directrice est représentée par deux des équations (2) considérées simultanément.

2° *L'équation en* S *a une racine double.* — On sait que cette racine double annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$; pour cette valeur de S, les équations (2) représentent donc trois plans parallèles, c'est-à-dire se coupant suivant une droite rejetée à l'infini. Cette droite devant être située dans le plan représenté par l'équation (3), ce plan sera parallèle aux précédents. On aura donc

$$\frac{c}{A-S}=\frac{c'}{B''}=\frac{c''}{B'},$$

ou bien

$$B\left(\alpha+\frac{C}{S}\right)=B'\left(\beta+\frac{C'}{S}\right)=B''\left(\gamma+\frac{C''}{S}\right),$$

en remplaçant c, c', c'' par leurs valeurs et se rappelant que l'on a

$$A-S=\frac{B'B''}{B}.$$

La surface est, comme on l'a vu, de révolution; *tous les points de l'axe sont des foyers.*

Ce qui précède suppose qu'aucun des trois coefficients B, B', B'' n'est égal à zéro; quand deux ou trois de ces coefficients sont nuls on retrouve le même résultat.

Nous allons appliquer ces généralités à la recherche des foyers des quadriques de la première et de la deuxième classe.

QUADRIQUES DE LA PREMIÈRE CLASSE.

264. L'équation de ces surfaces rapportées aux trois plans principaux est

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-D=0;$$

et les racines de l'équation en S ont pour valeurs

$$\frac{1}{A},\quad \frac{1}{B},\quad \frac{1}{C}.$$

Considérons la racine $\frac{1}{C}$ qui n'annule pas le mineur a''; pour cette valeur de S l'équation (I) donne $c'' = 0$, c'est-à-dire $\gamma = 0$. Les foyers correspondants sont dans le plan principal xoy.

Pour la même valeur de S, l'équation (II) devient

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} - D = 0.$$

On voit que les foyers sont situés sur la focale placée dans le plan principal xoy.

Aux deux autres racines de l'équation en S correspondent les deux autres focales.

Nous avons fait connaître aux paragraphes 251, 252, 253 la nature des focales pour les différentes quadriques de la première classe.

Directrice. — Considérons en particulier la focale W placée dans le plan principal xoy, les équations de la directrice correspondante s'obtiendront en égalant à zéro les dérivées par rapport à x et à y de la fonction

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - D - \frac{1}{C}[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2].$$

On obtient ainsi les deux équations

$$x = \frac{A\alpha}{A - C} \qquad y = \frac{B\beta}{B - C}.$$

Théorème I. — *La directrice d'un foyer* F *est la droite polaire par rapport à la quadrique de la tangente à la ligne focale menée par ce foyer.* (*)

En effet, l'équation d'un plan quelconque passant par la directrice est

$$(4) \qquad \lambda\left(X - \frac{A\alpha}{A - C}\right) + \mu\left(Y - \frac{B\beta}{B - C}\right) = 0;$$

le pôle de ce plan, par rapport à la quadrique, est déterminé par les relations

$$\frac{x}{A\lambda} = \frac{y}{B\mu} = \frac{D}{A\lambda\frac{\alpha}{A - C} + B\mu\frac{\beta}{B - C}} \qquad z = 0.$$

L'élimination de λ et de μ donne les équations

$$\frac{\alpha x}{A - C} + \frac{\beta y}{B - C} - D = 0 \qquad z = 0$$

qui représentent la tangente menée par le foyer F à la focale W.

Théorème II. — *Le plan qui passe par un foyer* F *et la directrice correspondante* I *est normal à la focale ; il coupe la quadrique suivant une conique qui admet ce point* F *pour foyer et cette droite pour directrice.*

Si l'on exprime que l'équation (4) est satisfaite par les coordonnées du foyer F, on obtient la relation

$$\lambda \frac{\alpha}{A-C} + \mu \frac{\beta}{B-C} = 0;$$

l'équation du plan considéré est donc

$$(A-C)\frac{X}{\alpha} - A = (B-C)\frac{Y}{\beta} - B.$$

On voit que sa trace sur le plan xoy est normale au point F à la focale W.

Le même plan coupe la quadrique suivant une conique, et la sphère de rayon nul F suivant un cercle de rayon nul ayant avec cette conique un double contact aux points où I rencontre la quadrique. Le point F est donc un foyer de la conique et I est la directrice correspondante.

QUADRIQUES DE LA DEUXIÈME CLASSE.

265. On rapportera la surface aux deux plans principaux et au plan tangent au sommet ; on retrouve encore les focales déjà obtenues au paragraphe 254.

Les théorèmes I et II sont encore vrais pour les quadriques de la deuxième classe.

LIGNES FOCALES D'UN CONE.

266. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

l'équation du cône rapporté aux trois plans principaux; nous devrons poser

$$A = a^2 \qquad B = b^2 \qquad C = -c^2 \qquad D = 0.$$

Les équations des lignes focales sont

$$\alpha = 0 \qquad \frac{\beta^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 + a^2} = 0$$

$$\beta = 0 \qquad \frac{\gamma^2}{c^2 + b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2 - b^2} = 0$$

$$\gamma = 0 \qquad \frac{\alpha^2}{a^2 + c^2} + \frac{\beta^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Ces lignes sont des droites dont deux seulement sont réelles. Si l'on suppose $b > a$, les focales réelles sont situées dans le plan yoz, c'est-à-dire dans le plan des génératrices principales qui font entre elles le plus grand angle.

Théorème. — *Les lignes focales du cône asymptote d'un hyperboloïde sont les asymptotes de l'hyperbole focale de la surface.*

La vérification de cette propriété ne présente aucune difficulté.

Théorème. — *Les lignes focales d'un cône Γ sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône supplémentaire Γ'.*

En effet, l'équation du cône Γ étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

celle du cône supplémentaire Γ' sera

$$a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0.$$

La direction des plans cycliques du cône Γ' est définie par l'équation

$$(b^2-a^2)y^2-(c^2+a^2)z^2=0;$$

on voit que ces plans sont perpendiculaires aux focales du cône Γ.

LIGNES FOCALES D'UN CYLINDRE.

267. On voit facilement que les lignes focales réelles d'un cylindre du second ordre sont les parallèles aux génératrices menées par les foyers d'une section droite.

268. Reprenons l'équation

$$f-S\Sigma=0$$

du paragraphe 263.

Quand on y remplace S par une racine de l'équation en S, et α, β, γ par les coordonnées d'un point F de la focale correspondante, cette équation représente deux plans; on a donc identiquement, pour cette valeur de S,

$$f-S\Sigma\equiv PQ,$$

P et Q étant des fonctions linéaires.

Il résulte de là que l'équation d'une quadrique peut toujours être mise sous la forme

$$S\Sigma+PQ=0. \tag{5}$$

Nous nous proposons de chercher la signification géométrique de cette équation.

Nous distinguerons deux cas.

1° *Le foyer* F *est de première espèce.* — Les plans P et Q sont alors réels et l'on obtient immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *La distance d'un point quelconque d'une quadrique à un foyer de première espèce est dans un rapport constant avec la moyenne proportionnelle des distances de ce point aux plans menés par la directrice correspondante, parallèlement aux plans cycliques réels de la quadrique.*

Remarque. — La focale pour les points de laquelle les plans P et Q sont réels est celle qui correspond à la racine moyenne de l'équation en S ; elle passe par les ombilics réels de la surface.

Le théorème précédent ne concerne ni l'hyperboloïde à une nappe, ni le paraboloïde hyperbolique qui n'ont pas de foyers réels de première espèce.

2° *Le foyer* F *est de deuxième espèce.* — Les plans P et Q sont alors imaginaires conjugués, et se coupent suivant une droite réelle I qui est la directrice relative au foyer F.

Nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer F et pour plan des xy le plan mené par F perpendiculairement sur la directrice I.

Soient

$$x = x_1 \qquad y = y_1$$

les équations de cette directrice, l'équation (5) prendra la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2(x - x_1)^2 + \mu^2(y - y_1)^2. \tag{6}$$

Par un point $M(x, y, z)$ de la surface, menons un plan R parallèle au plan défini par l'équation

$$Z = mX,$$

son équation sera

$$Z - z = m(X - x).$$

Le plan R rencontre la droite I en un point A dont les coordonnées sont

$$x' = x_1 \qquad y' = y_1 \qquad z' = z + m(x_1 - x).$$

Le carré de la distance du point M au point A a pour expression

$$\overline{MA}^2 = (1 + m^2)(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Supposons $\lambda > \mu$, on pourra poser

$$1 + m^2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2},$$

et l'équation (6) donnera la relation

$$\overline{MF}^2 = \mu^2 \overline{MA}^2.$$

Le rapport $\frac{MF}{MA}$ reste donc constant pour tous les points de la quadrique.

Il est facile de montrer que le plan R est un des plans cycliques réels de la surface.

En effet, pour tous les points de la section de la quadrique par le plan R, le point A reste le même ; d'un autre côté, le lieu des points de l'espace tels que le rapport $\frac{MF}{MA}$ de leurs distances à deux points fixes F et A reste constant est une sphère ; donc la section considérée est un cercle.

Cette conclusion est en défaut quand μ est égal à l'unité; la sphère devient alors un plan, et la section de la quadrique par le plan R est une droite. Cette quadrique est un paraboloïde hyperbolique dont le plan R est un plan directeur.

De ce qui précède résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Dans une quadrique la distance d'un point quelconque de la surface à un foyer de deuxième espèce est proportionnelle à la distance de ce point à la directrice correspondante, cette distance étant comptée parallèlement à l'un des plans cycliques réels de la quadrique.*

Quand la surface est un paraboloïde hyperbolique, chacun de ses points est également distant du foyer et de la directrice correspondante, la distance à la directrice étant comptée parallèlement à un plan directeur.

Le nombre μ, valeur constante du rapport $\frac{MF}{MA}$, est appelé le *module* de la quadrique. Pour cette raison, les foyers de deuxième espèce sont aussi appelés *foyers modulaires,* et les focales, lieux géométriques de ces foyers, sont appelées *focales modulaires.*

L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique ont deux focales modulaires.

L'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique, l'hyperboloïde à deux nappes, le cône admettent une seule focale modulaire.

QUADRIQUES HOMOFOCALES.

269. Définition. — *On dit que deux quadriques sont homofocales quand elles ont les mêmes lignes focales.*

Nous ne considérerons que les quadriques de la première classe ; la définition montre que deux quadriques homofocales ont les mêmes plans principaux et que la différence des carrés des axes est la même pour chacune d'elles.

Soient

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0$$
$$\frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}-1=0$$

les équations de deux quadriques de la première classe rapportées aux plans principaux qui sont communs par hypothèse. Si ces surfaces sont homofocales, on aura

$$A - A' = B - B' = C - C'.$$

Désignons par λ la valeur commune de ces trois différences, il en résultera

$$A' = A - \lambda \qquad B' = B - \lambda \qquad C' = C - \lambda\,;$$

l'équation des quadriques homofocales entre elles et avec la première des deux quadriques considérées sera donc

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} - 1 = 0. \tag{7}$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que l'on a

$$C < B < A.$$

270. Nous allons chercher la nature des quadriques représentées par l'équation (7) quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

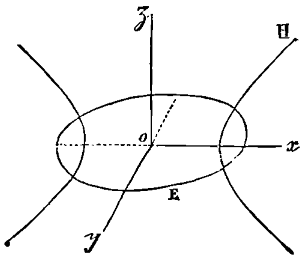


Fig. 54.

Traçons dans le plan des xy la focale elliptique E dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 1$$

et dans le plan des xz la focale hyperbolique H dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A-B} - \frac{z^2}{B-C} = 1\,;$$

désignons en outre par ε une quantité *positive* moindre que toute quantité donnée.

Quand λ varie de $-\infty$ à $C-\varepsilon$, l'équation (7) représente un ellipsoïde dont les axes d'abord infiniment grands diminuent constamment.

Pour $\lambda = C - \varepsilon$ les longueurs des axes dirigés suivant ox et oy diffèrent infiniment peu l'un de $2\sqrt{A-C}$, l'autre de $2\sqrt{B-C}$; quant à l'axe dirigé suivant oz, il est infiniment petit. L'ellipsoïde, infiniment aplati dans les sens oz et oz', a pour trace sur le plan xoy une ellipse extérieure à la focale E, mais qui en est partout infiniment voisine ; cet ellipsoïde se réduit donc à la portion du plan des xy intérieure à la focale elliptique E, quand ε tend vers zéro.

Quand λ varie de $C+\varepsilon$ à $B-\varepsilon$, la quadrique devient un hyperboloïde à une nappe dont l'axe imaginaire coïncide avec oz.

La trace de la surface sur le plan xoy est une ellipse intérieure à la focale elliptique E ; sa trace sur le plan zox est une hyperbole intérieure à la focale hyperbolique H.

Pour $\lambda = C + \varepsilon$, l'axe imaginaire est infiniment petit, et la surface diffère infiniment peu de la portion du plan xoy extérieure à la focale E.

La quantité λ augmentant, l'hyperboloïde s'écarte du plan des xy dans le sens des cotes positives et négatives, et, pour $\lambda = B - \varepsilon$, l'axe dirigé suivant oy est infiniment petit. Dans la même hypothèse, la section de l'hyperboloïde par le plan zox diffère infiniment peu de la focale H ; la surface est donc infiniment voisine de la portion du plan zox extérieure à l'hyperbole H.

Quand λ varie de $B + \varepsilon$ à $A - \varepsilon$, la quadrique devient un hyperboloïde à deux nappes dont l'axe réel coïncide avec ox.

La trace de la surface sur le plan zox est une hyperbole extérieure à la focale hyperbolique H.

Pour $\lambda = B + \varepsilon$, l'axe imaginaire dirigé suivant oy est infiniment petit et la section de la surface par le plan zox diffère infiniment peu de la focale H ; l'hyperboloïde est donc infiniment voisin de la portion du plan zox intérieure à l'hyperbole H.

La quantité λ augmentant, l'hyperboloïde s'écarte du plan zox dans le sens des ordonnées positives et négatives, et, pour $\lambda = A - \varepsilon$, l'axe dirigé suivant ox est infiniment petit ; la surface est donc infiniment voisine du plan zoy avec lequel elle se confond quand ε tend vers zéro.

Quand λ varie de $A + \varepsilon$ à $+\infty$, la quadrique devient imaginaire.

Remarque. — Si l'on suit attentivement la loi de déformation des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une ou à deux nappes représentés par l'équation (7), on voit que, par chaque point de l'espace, passent un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Cette proposition qui a une grande importance peut être démontrée analytiquement.

Théorème. — 1° *Par un point* M (x_0, y_0, z_0) *de l'espace, passent un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes homofocaux ;* 2° *les trois surfaces se coupent mutuellement à angle droit.*

1° En exprimant que les coordonnées du point M satisfont à l'équation (7), on obtient la relation

$$\frac{x_0^2}{A-\lambda} + \frac{y_0^2}{B-\lambda} + \frac{z_0^2}{C-\lambda} - 1 = 0, \tag{8}$$

qui est analogue à l'équation en S, l'inconnue étant la quantité λ.

L'équation (8) a donc ses trois racines réelles et séparées par la suite

$$-\infty \qquad C \qquad B \qquad A.$$

Nous appellerons ρ la racine comprise entre $-\infty$ et C, à laquelle correspondent des ellipsoïdes ; ρ_1, la racine comprise entre C et B, à laquelle correspondent des hyperboloïdes à une nappe ; enfin nous appellerons ρ_2, la racine comprise entre B et A, à laquelle correspondent des hyperboloïdes à deux nappes.

2° Soient

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} - 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{A-\mu} + \frac{y^2}{B-\mu} + \frac{z^2}{C-\mu} - 1 = 0$$

les équations de deux quadriques de nature différente passant par le point M ; on en tire, par soustraction,

$$\frac{x^2}{(A-\lambda)(A-\mu)}+\frac{y^2}{(B-\lambda)(B-\mu)}+\frac{z^2}{(C-\lambda)(C-\mu)}=0.$$

Cette relation exprime que les plans tangents aux deux quadriques, en chacun des points de leur courbe d'intersection, sont perpendiculaires entre eux.

COORDONNÉES ELLIPTIQUES.

271. D'après la première partie du théorème précédent, les quadriques représentées par les équations

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{A-\rho}+\frac{y^2}{B-\rho}+\frac{z^2}{C-\rho}-1=0\\ &\frac{x^2}{A-\rho_1}+\frac{y^2}{B-\rho_1}+\frac{z^2}{C-\rho_1}-1=0\\ &\frac{x^2}{A-\rho_2}+\frac{y^2}{B-\rho_2}+\frac{z^2}{C-\rho_2}-1=0\end{aligned}\right.$$

se couperont en un point quelconque de l'espace, quand on fera varier ρ de $-\infty$ à C, ρ_1 de C à B, et ρ_2 de B à A. On peut donc fixer la position d'un point quelconque M de l'espace en choisissant convenablement les valeurs des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2.

Ces paramètres sont appelés les *coordonnées elliptiques* du point M.

Il est facile d'exprimer les coordonnées rectilignes x, y, z du point M en fonction des coordonnées elliptiques ρ, ρ_1, ρ_2.

Pour cela, remarquons que les relations (9) expriment que la fonction

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}-1$$

est nulle pour $\lambda=\rho$, $\lambda=\rho_1$ et $\lambda=\rho_2$; on a donc identiquement

$$(10)\qquad \frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}-1=\frac{(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}.$$

En décomposant le second membre en éléments simples, il en résulte

$$x^2=\frac{(A-\rho)(A-\rho_1)(A-\rho_2)}{(B-A)(C-A)},$$
$$y^2=\frac{(B-\rho)(B-\rho_1)(B-\rho_2)}{(A-B)(C-B)},$$
$$z^2=\frac{(C-\rho)(C-\rho_1)(C-\rho_2)}{(A-C)(B-C)}.$$

Nous allons donner encore deux autres relations remarquables entre les coordonnées rectilignes et les coordonnées elliptiques d'un point M.

Si l'on ordonne par rapport à λ l'équation

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}-1=0$$

elle devient

$$\lambda^3-(A+B+C-x^2-y^2-z^2)\lambda^2+\ldots=0.$$

Cette équation a pour racines ρ, ρ_1, ρ_2, on a donc la relation

$$\rho+\rho_1+\rho_2=A+B+C-x^2-y^2-z^2$$

Pour trouver l'autre relation, prenons la dérivée par rapport à λ des deux membres de l'identité (10), nous aurons

$$\frac{x^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(B-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(C-\lambda)^2}=\frac{d}{d\lambda}\cdot\left[\frac{(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}\right].$$

Le second membre de cette identité est de la forme $(\lambda-\rho)f(\lambda)$; donc sa dérivée par rapport à λ est de la forme

$$f(\lambda)+(\lambda-\rho)f'(\lambda);$$

en faisant $\lambda=\rho$, on obtient la relation

$$\frac{x^2}{(A-\rho)^2}+\frac{y^2}{(B-\rho)^2}+\frac{z^2}{(C-\rho)^2}=\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{(A-\rho)(B-\rho)(C-\rho)}.$$

Il est aisé de vérifier que le premier membre de cette relation est égal au carré de l'inverse de la distance p du centre de la surface de paramètre ρ au plan qui la touche au point $M(x, y, z)$.

En appelant p_1, p_2 les distances du même centre aux plans qui touchent en M les surfaces de paramètres ρ_1, ρ_2, on a en résumé les trois relations

$$p^2=\frac{(A-\rho)(B-\rho)(C-\rho)}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)},$$
$$p_1^2=\frac{(A-\rho_1)(B-\rho_1)(C-\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho)},$$
$$p_2^2=\frac{(A-\rho_2)(B-\rho_2)(C-\rho_2)}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)},$$

272. Nous terminerons cette étude des quadriques homofocales en démontrant quelques propriétés qui mettront bien en évidence les analogies qui existent entre les focales d'une quadrique et les foyers d'une conique.

Pour rendre cette comparaison plus facile à saisir, nous énoncerons d'abord la propriété relative aux coniques, puis nous démontrerons la propriété correspondante des quadriques.

Théorème. — *Les tangentes menées d'un point* P *à une famille de coniques homofocales ont pour bissectrices les normales aux deux coniques de la famille qui passent par le point* P.

Théorème correspondant. — 1° *Les cônes de même sommet* $P(x_0, y_0, z_0)$ *circonscrits à une famille de quadriques homofocales ont pour axes de symétrie les normales aux trois quadriques de cette famille qui passent par le point* P ; 2° *ces cônes sont homofocaux ;* 3° *leurs lignes focales sont les couples de droites suivant lesquelles les quadriques de la famille qui passent par le point P sont coupées par les plans qui les touchent au point* P.

1° Soit

$$\frac{x^2}{A-u}+\frac{y^2}{B-u}+\frac{z^2}{C-u}=1 \tag{11}$$

l'équation d'une famille de quadriques homofocales.

Posons

$$h=\frac{x_0^2}{A-u}+\frac{y_0^2}{B-u}+\frac{z_0^2}{C-u}-1$$

$$R=\frac{xx_0}{A-u}+\frac{yy_0}{B-u}+\frac{zz_0}{C-u};$$

l'équation du cône circonscrit à l'une des quadriques et qui a pour sommet le point P, sera

$$h\left(\frac{x^2}{A-u}+\frac{y^2}{B-u}+\frac{z^2}{C-u}-1\right)-(R-1)^2=0.$$

Désignons par α, β, γ les paramètres qui définissent une direction principale de ce cône ; pour les déterminer, il faut d'abord former l'équation en S relative au cône. Pour cela, on pourra éliminer α, β, γ, r entre les équations

$$\left\{\begin{aligned}\left(\frac{h}{A-u}-S\right)\alpha&=r\frac{x_0}{A-u}\\ \left(\frac{h}{B-u}-S\right)\beta&=r\frac{y_0}{B-u}\\ \left(\frac{h}{C-u}-S\right)\gamma&=r\frac{z_0}{C-u};\end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\frac{\alpha x_0}{A-u}+\frac{\beta y_0}{B-u}+\frac{\gamma z_0}{C-u}=r. \tag{13}$$

On obtient un résultat plus simple, en remplaçant l'équation (13) par l'équation

$$-S(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)=r, \tag{14}$$

obtenue en ajoutant les équations (12) et (13) après avoir multiplié les trois premières respectivement par x_0, y_0, z_0 et la quatrième par $-h$.

Des équations (12) on tire

$$\alpha = -r\frac{x_0}{(A-u)S-h} \qquad \beta = -r\frac{y_0}{(B-u)S-h} \qquad \gamma = -r\frac{z_0}{(C-u)S-h}$$

en portant ces valeurs dans l'équation (14) on a, pour déterminer l'inconnue auxiliaire S, l'équation.

$$\frac{x_0^2}{A-u-\frac{h}{S}}+\frac{y_0^2}{B-u-\frac{h}{S}}+\frac{z_0^2}{C-u-\frac{h}{S}}=1 \tag{15}$$

qui devient

$$\frac{x_0^2}{A-\lambda}+\frac{y_0^2}{B-\lambda}+\frac{z_0^2}{C-\lambda}=1 \tag{16}$$

en posant

$$\lambda = u+\frac{h}{S}.$$

Aux racines ρ, ρ_1, ρ_2 de l'équation (16) correspondent les trois quadriques de la famille qui passent par le point P.

D'un autre côté, si l'on considère en particulier la racine ρ, les paramètres α, β, γ qui définissent la direction principale correspondante dans le cône circonscrit, sont proportionnels aux quantités

$$\frac{x_0}{A-\rho}, \quad \frac{y_0}{B-\rho}, \quad \frac{z_0}{C-\rho},$$

c'est-à-dire aux cosinus directeurs de la normale menée par le point P à la quadrique dont le paramètre est ρ.

La première partie du théorème est donc démontrée.

2° Si l'on désigne par S, S_1, S_2 les racines de l'équation (15), l'équation du cône circonscrit rapporté à ses axes de symétrie sera

$$SX^2+S_1Y^2+S_2Z^2=0,$$

ou bien

$$\frac{X^2}{\rho-u}+\frac{Y^2}{\rho_1-u}+\frac{Z^2}{\rho_2-u}=0; \tag{17}$$

car

$$S=\frac{h}{\rho-u} \qquad S_1=\frac{h}{\rho_1-u} \qquad S_2=\frac{h}{\rho_2-u}.$$

On aura tous les cônes circonscrits aux quadriques représentées par l'équation (11) en faisant varier u; la forme de l'équation (17) montre que tous ces cônes sont homofocaux.

3° Considérons en particulier les quadriques de la famille qui passent par le point P, la quadrique ρ par exemple; le pian qui la touche au point P sera un plan principal pour tous les cônes ayant leur sommet au point P et circonscrits aux quadriques de la famille. Désignons par PF, PF′ les focales de ces cônes situées dans ce plan principal.

Pour la quadrique particulière ρ le cône circonscrit se réduira à un plan double confondu avec ce plan principal, ou plutôt avec la portion de ce plan principal limitée par les droites PF, PF′.

De cette remarque il résulte qu'un plan *quelconque* passant par l'une de ces droites est tangent à ce cône particulier et par suite à la quadrique ρ, puisque le cône lui est circonscrit.

Tout plan passant par les droites PF, PF′ touchant la quadrique ρ, ces droites coïncident avec celles suivant lesquelles la surface est coupée par le plan qui la touche au point P.

Les focales *réelles* des cônes circonscrits sont situées sur l'hyperboloïde à une nappe ρ_1 de la famille, qui passe par le point P.

273. Considérons deux quadriques homofocales λ, μ et une droite D touchant la première au point P ; cette droite sera dans l'un des plans principaux du cône C ayant pour sommet le point P et circonscrit à la quadrique μ.

Maintenant il est facile de vérifier que les plans tangents à un cône du second ordre qui se coupent suivant une droite située dans un plan principal, sont également inclinés sur ce plan principal.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si par une tangente en un point quelconque d'une quadrique* λ *on mène deux plans tangents à une deuxième quadrique* μ *homofocale à la première ; ils seront également inclinés sur le plan tangent à la première quadrique, mené par sa tangente.*

Cette proposition correspond à la propriété suivante des coniques.

Théorème. — *Les tangentes menées d'un point* P *d'une conique à une deuxième conique homofocale à la première sont également inclinées sur la tangente menée par le point* P *à cette première conique.*

274. On peut remplacer la quadrique μ par une des focales de la quadrique λ; on a alors le théorème suivant :

Théorème. — *Si par une tangente en un point quelconque d'une quadrique on mène deux plans tangents à l'une des focales, ils seront également inclinés sur le plan tangent à la quadrique, mené par sa tangente.*

Cette propriété est analogue à celle qui concerne les angles qu'une tangente à une conique fait avec les rayons vecteurs du point de contact.

275. Remarque. — Les propriétés des cônes de même sommet circonscrits à une famille de quadriques homofocales ont une grande importance ; nous allons en signaler quelques conséquences.

1° *Dans une famille de quadriques homofocales, il y en a deux qui touchent une droite donnée* D ; *les plans tangents à ces surfaces en leur point de contact avec la droite sont rectangulaires.*

En effet, les cônes circonscrits à cette famille de quadriques et dont le sommet est en un point P de la droite D sont homofocaux. Maintenant l'équation

$$\frac{X^2}{\rho - u} + \frac{Y^2}{\rho_1 - u} + \frac{Z^2}{\rho_2 - u} = 0$$

de ces cônes rapportés à leurs axes principaux montre que deux d'entre eux seulement passent par la droite D ; donc *deux* quadriques de la famille touchent la droite D.

Si a, a' sont les points de contact, les plans touchant respectivement les deux quadriques en ces points toucheront les cônes circonscrits correspondants ; ils sont donc perpendiculaires entre eux, puisque les deux cônes sont homofocaux.

2° ***Les axes de symétrie de la section d'une quadrique par un plan diamétral sont parallèles aux normales aux deux surfaces homofocales à la proposée qui passent par l'une des extrémités*** P ***du diamètre conjugué du plan sécant.***

Soient ρ_1, ρ_2 les quadriques homofocales à la quadrique donnée ρ et qui passent par le point P. Les normales menées par ce point aux quadriques ρ_1, ρ_2 sont dans le plan Q qui touche au même point la quadrique ρ ; de plus, elles sont deux axes de symétrie des cônes dont le sommet est en P et qui sont circonscrits aux quadriques homofocales avec ρ.

Parmi ces cônes, celui qui est circonscrit à la quadrique ρ se réduit à l'une des portions du plan Q limitées par les deux focales PF, PF' des cônes circonscrit , situées dans le plan Q. Les deux normales aux quadriques ρ_1, ρ_2 sont donc les axes de symétrie de la conique formée par les droites PF, PF', et par suite parallèles aux axes de *toutes* les coniques, intersection de la quadrique ρ par des plans parallèles au plan Q.

276. Il est facile d'obtenir les longueurs des axes de la section faite dans la quadrique ρ par le plan diamétral parallèle au plan Q.

Soit

$$\frac{x^2}{A - \rho} + \frac{y^2}{B - \rho} + \frac{z^2}{C - \rho} = 1$$

l'équation de la quadrique ρ ; en appelant $2r$ la longueur du diamètre de cette surface faisant avec ses axes de symétrie les angles α, β, γ, on aura

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\alpha}{A - \rho} + \frac{\cos^2\beta}{B - \rho} + \frac{\cos^2\gamma}{C - \rho}.$$

Les longueurs cherchées sont celles des diametres faisant avec les axes de symétrie des angles dont les cosinus ont pour expressions

$$p_1 \frac{x_1}{A - \rho_1} \qquad p_1 \frac{y_1}{B - \rho_1} \qquad p_1 \frac{z_1}{C - \rho_1}$$

et

$$p_2 \frac{x_1}{A - \rho_2} \qquad p_2 \frac{y_1}{B - \rho_2} \qquad p_2 \frac{z_1}{C - \rho_2};$$

(x_1, y_1, z_1) désignant les coordonnées de l'une des extrémités du diamètre conjugué du plan sécant.

La longueur d'un des axes de la section satisfait donc à la relation

$$\frac{1}{r_1^2} = p_1^2 \left[\frac{x_1^2}{(A-\rho)(A-\rho_1)^2} + \frac{y_1^2}{(B-\rho)(B-\rho_1)^2} + \frac{z_1^2}{(C-\rho)(C-\rho_1)^2}\right].$$

Maintenant on a (271)

$$\frac{x_1^2}{(A-\rho_1)^2} + \frac{y_1^2}{(B-\rho_1)^2} + \frac{z_1}{(C-\rho_1)^2} = \frac{1}{p_1^2}$$

$$\frac{x_1^2}{(A-\rho)(A-\rho_1)} + \frac{y_1^2}{(B-\rho)(B-\rho_1)} + \frac{z_1^2}{(C-\rho)(C-\rho_1)} = 0;$$

la dernière relation exprime que les quadriques ρ, ρ_1 se coupent à angle droit.

De ces deux relations on tire, par soustraction,

$$\frac{x_1^2}{(A-\rho)(A-\rho_1)^2} + \frac{y_1^2}{(B-\rho)(B-\rho_1)^2} + \frac{z_1^2}{(C-\rho)(C-\rho_1)^2} = \frac{1}{(\rho_1-\rho)p_1^2};$$

donc

$$r_1^2 = \rho_1 - \rho,$$

et de même

$$r_2^2 = \rho_2 - \rho.$$

277. Revenons maintenant à la comparaison entre les propriétés des foyers d'une conique et celles des focales d'une quadrique.

Théorème. — *Le produit des distances des foyers d'une conique à ses tangentes est constant.*

Menons par les foyers de la conique deux droites parallèles à une tangente, et regardons-les comme des tangentes à la conique ayant pour grand axe la distance des deux foyers et dont le petit axe est nul ; nous serons conduits à la propriété suivante des quadriques.

Théorème correspondant. — *Pour chaque plan tangent à une quadrique le produit de ses distances aux deux points d'une des focales de la surface, pour lesquels les tangentes à cette courbe sont parallèles à ce plan, est constant.*

Soit

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} = 1$$

l'équation de la quadrique donnée ; celles de la focale située dans le plan xoy, par exemple, seront

$$z = 0 \qquad \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 1.$$

Les plans parallèles Q, R dont les équations sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sqrt{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - \lambda}$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sqrt{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - C}$$

toucheront le premier la quadrique, et le second la focale en un point f.

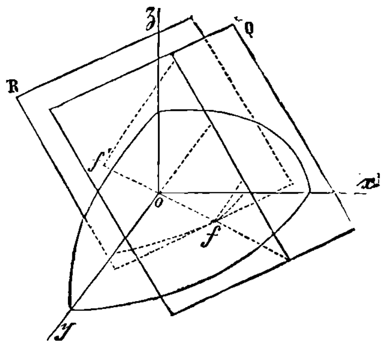


Fig. 53.

Les tangentes à la focale au point f et au point diamétralement opposé f' seront parallèles au plan Q.

Désignons par δ, δ' les distances du centre de la quadrique aux plans Q, R et par d, d' les distances des points f, f' au plan Q ; nous aurons

$$\delta^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - \lambda$$

et

$$\delta'^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - C,$$

d'où

$$\delta^2 - \delta'^2 = C - \lambda.$$

Maintenant on a

$$\delta = \frac{d + d'}{2} \qquad \delta' = \frac{d' - d}{2},$$

et la relation précédente devient

$$dd' = C - \lambda.$$

278. Théorème. — *Le sommet d'un angle droit dont un côté glisse sur une conique et dont l'autre côté passe par un foyer, engendre la circonférence du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.*

Théorème correspondant. — *Le sommet d'un angle trièdre trirectangle dont une des faces glisse sur une quadrique et dont les deux autres faces glissent respectivement sur les deux focales réelles de cette surface, engendre la sphère décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Soit toujours

$$\frac{x^2}{A - \lambda} + \frac{y^2}{B - \lambda} + \frac{z^2}{C - \lambda} = 1$$

l'équation de la quadrique donnée ; celles des trois plans touchant respectivement cette quadrique et les deux focales réelles seront

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sqrt{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - \lambda}$$
$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \sqrt{A\alpha_1^2 + B\beta_1^2 + C\gamma_1^2 - B}$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \sqrt{A\alpha_2^2 + B\beta_2^2 + C\gamma_2^2 - C}.$$

Ajoutons ces trois équations après les avoir élevées au carré, et tenons compte des relations qui résultent de ce que les trois plans sont perpendiculaires deux à deux, nous obtiendrons l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = A - \lambda$$

qui représente la sphère décrite sur le grand axe de la quadrique comme diamètre.

CHAPITRE V

FIGURES POLAIRES RÉCIPROQUES.

279. Étant données une quadrique D et une surface Σ ; le lieu des pôles par rapport à D, des plans tangents à la surface Σ sera une certaine surface Σ'.

Réciproquement, les points de la surface Σ sont les pôles des plans tangents à la surface Σ', par rapport à la même quadrique D.

Soient en effet a', b', c' trois points de la surface Σ' ; leurs plans polaires A, B, C, par rapport à la quadrique D, sont tangents à la surface Σ, et le point de rencontre I de ces plans tangents est le pôle du plan $a'b'c'$.

Quand les points b', c' viennent se confondre avec le point a', le plan $a'b'c'$ a pour limite le plan P' qui touche Σ' au point a' ; en même temps, le point I tend vers le point p, où le plan A touche la surface Σ.

Il résulte de là que le point p est le pôle, par rapport à la quadrique D, du plan tangent P' à la surface Σ'.

Les surfaces Σ, Σ', dont chacune est à la fois le lieu des pôles des plans tangents de l'autre, et l'enveloppe des plans polaires des points de l'autre, par rapport à la quadrique D, sont dites *polaires réciproques*.

Définition. — *On dit qu'une surface est de la classe m, quand on peut lui mener m plans tangents passant par une droite donnée.*

Théorème. — *Deux surfaces polaires réciproques Σ, Σ' sont telles que l'ordre de chacune d'elles est égal à la classe de l'autre.*

En effet, aux m points où une droite A rencontre la surface Σ correspondent m plans tangents à la surface Σ', passant par la droite A' conjuguée de A ; la surface Σ étant d'ordre m, la surface Σ' est de la classe m et inversement.

Corollaire. — *La polaire réciproque d'une quadrique est une quadrique.*

280. Les figures polaires réciproques jouissent d'un grand nombre de propriétés ; nous allons faire connaître les principales.

1° *A une droite correspond une droite.*

2° *A des plans passant par un même point p correspondent des points situés dans un même plan, le plan polaire du point p.*

3° *A des points situés dans un même plan* P *correspondent des plans passant par un même point, le pôle du plan* P, 4° *A des plans passant par une même droite* A *correspondent des points situés sur la droite* A' *conjuguée de* A.

5° *A des points situés sur une droite* A *correspondent des plans passant par la droite* A' *conjuguée de* A.

6° *A une courbe quelconque* C *correspond une surface développable, enveloppe des plans polaires des points de la courbe* C.

Remarque. — *Quand la courbe* C *est plane, la surface enveloppe est un cône ayant pour sommet le pôle du plan de la courbe* C.

Réciproquement, *à un cône correspond une courbe plane située dans le plan polaire du sommet du cône.*

7° *A deux surfaces* Σ, Σ', *se coupant suivant une courbe plane, correspondent deux surfaces* Σ_1, Σ'_1, *inscrites dans le cône qui correspond à la courbe plane commune.*

8° *A une surface réglée correspond une surface réglée.*

281. La théorie des polaires réciproques permet, quand on a trouvé une propriété d'une surface, d'en déduire immédiatement, pour la surface correspondante, une autre propriété qui est dite *corrélative* de la premiere.

Ainsi, par exemple, les théorèmes I, II, III démontrés au paragraphe 244 donnent lieu aux propriétés suivantes.

Théorème. — *On peut construire une quadrique et une seule tangente à neuf plans; le problème a une infinité de solutions si ces neuf plans sont tangents à deux quadriques données.*

Théorème. — *Il y a une infinité de quadriques touchant huit plans donnés; toutes les quadriques sont inscrites dans une même surface développable circonscrite à deux quadriques.*

Théorème. — *Toutes les quadriques touchant sept plans donnés, touchent un huitième plan fixe.*

282. — Dans tout ce qui suit, nous supposerons que la quadrique directrice est une sphère de rayon R, dont nous désignerons le centre par O.

On a alors les propriétés suivantes :

1° *Les distances du centre* O *à un point* p' *et au plan correspondant* P *sont réciproques.*

2° *L'angle de deux plans* P, Q *d'une figure* Σ *est égal à l'angle sous lequel on voit, du point* O, *les pôles* p', q' *de ces plans.*

3° *Les distances de deux points* p, q *au centre* O *sont proportionnelles aux distances de chacun de ces points au plan polaire de l'autre.*

Les démonstrations de ces propriétés sont les mêmes que celles des propriétés analogues de la Géométrie plane (G.P. 256).

Théorème. — *La polaire réciproque d'une sphère* Σ, *par rapport à une sphère* D, *est une quadrique de révolution engendrée par une conique tournant autour de son axe focal; le centre* O *de la sphère* D *est un foyer de cette conique, et le plan engendré par sa directrice est le plan polaire, par rapport à* D, *du centre de la sphère* Σ.

Cela résulte du théorème relatif à la polaire d'un cercle par rapport à un cercle démontré en Géométrie plane (G.P. 256).

On peut ajouter que la quadrique de révolution, polaire réciproque de Σ, est un ellipsoïde, un paraboloïde elliptique ou un hyperboloïde à deux nappes, suivant que le centre O de la sphère D est intérieur à la sphère Σ, sur cette sphère ou à l'extérieur.

Corollaire. — *Des sphères concentriques ont pour polaires réciproques des quadriques de révolution ayant un foyer commun, les directrices des méridiennes qui correspondent à ce foyer étant aussi dans un même plan.*

Du théorème précédent il résulte qu'aux propriétés de la sphère correspondent des propriétés des quadriques engendrées par la révolution d'une conique autour de son axe focal.

Exemple. — Théorème. — *Un trièdre de grandeur constante se déplace de manière que ses faces restent tangentes respectivement à trois sphères concentriques* : 1° *le sommet décrit une sphère concentrique aux sphères données;* 2° *le plan passant par les points de contact des faces et des sphères roule sur une sphère qui leur est également concentrique.*

Théorème corrélatif. — *Étant données trois quadriques de révolution engendrées par la révolution autour de l'axe focal, de trois coniques ayant en commun un foyer* F *et la directrice correspondante* D; *un angle trièdre de grandeur constante tourne autour de son sommet placé au foyer commun* F : 1° *le plan passant par les points d'intersection respectifs des trois arêtes du trièdre mobile avec les quadriques roule sur une quadrique de révolution* Σ; 2° *le point de concours des plans tangents en ces points, aux trois quadriques, décrit une quadrique de révolution* Σ_1.

Les coniques qui en tournant autour de leur axe focal engendrent les quadriques Σ, Σ_1 *ont pour foyer le point* F *et pour directrice correspondante la droite* D.

283. **Théorème.** — *La polaire réciproque* Σ' *d'une quadrique* Σ, *par rapport à une sphère ayant pour centre un des foyers* O *de la surface est une quadrique de révolution; l'axe de révolution est la droite conjuguée, par rapport à la sphère, de la directrice* D *qui correspond à ce foyer.*

Soient en effet m un point quelconque de la quadrique Σ, et ma, mb ses distances aux plans cycliques P, R qui passent par la directrice D, on aura

$$(1) \qquad \overline{Om}^2 = \mu\, ma.mb.$$

Au point m correspond un plan M tangent à la quadrique Σ'.

Soient p, r les pôles des plans P, R par rapport à la sphère directrice et pp', rr' les distances de ces points au plan M, on aura (282)

$$\frac{Om}{Op} = \frac{ma}{pp'} \qquad \frac{Om}{Or} = \frac{mb}{rr'},$$

d'où

$$\frac{\overline{Om}^2}{Op.Or} = \frac{ma.mb}{pp'.rr'}. \tag{2}$$

En tenant compte de la relation (1), la dernière relation prend la forme

$$pp'.rr' = \frac{Op.Or}{\mu}.$$

Le produit des distances des points p, r aux plans tangents de la surface Σ' ayant une valeur constante, cette surface est de révolution autour de la droite pr. De plus, cette droite joignant les pôles des plans P, R par rapport à la sphère directrice, est conjuguée, par rapport à cette sphère, de la droite d'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire de la directrice D.

Quand le foyer O est de première espèce, les plans P, R sont *réels* ainsi que leurs pôles p, r ; la quadrique Σ' est de révolution *autour de l'axe focal d'une section méridienne.*

Quand le foyer O est de deuxième espèce, les plans P, R sont imaginaires conjugués ainsi que leurs pôles p, r ; la quadrique Σ' est de révolution *autour de l'axe non focal d'une section méridienne.*

Réciproquement, *la polaire réciproque d'une quadrique de révolution* Σ', *par rapport à une sphère de centre* O, *est une quadrique quelconque* Σ ; *le point* O *est un foyer de la quadrique* Σ, *et la directrice correspondante est la conjuguée, par rapport à la sphère, de l'axe de révolution de la quadrique* Σ'.

Soient en effet p, r les foyers réels ou imaginaires d'une section méridienne de la surface Σ', *situés sur l'axe de révolution.* Si pp', rr' sont les distances de ces foyers à un plan tangent M de la surface Σ', on aura la relation

$$pp'.rr' = h,$$

h étant une constante.

Cette relation associée à la relation (2), dans laquelle m est le pôle du plan M par rapport à la sphère et ma, mb les distances de ce point m aux plans polaires P, R des foyers p, r par rapport à cette même sphère, donne l'égalité (1).

La réciproque est donc démontrée.

Remarque. — Une partie du théorème précédent est une conséquence de la propriété suivante qui est souvent utile dans les applications de la théorie des figures polaires réciproques.

Théorème. — *Le cône des directions asymptotiques d'une quadrique* Σ', *polaire réciproque d'une quadrique* Σ *par rapport à une sphère de centre* O, *est le cône* C' *supplémentaire du cône* C *qui a son sommet en* O *et qui est circonscrit à la surface* Σ.

En effet, les pôles des plans tangents au cône C sont à l'infini sur les diamètres de la sphère directrice, perpendiculaires à ces plans tangents.

Pour que la quadrique Σ' soit de révolution, il faut et il suffit que le cône C' et par suite le cône C soient de révolution ; le point O doit donc être un *foyer* de la quadrique Σ.

284. Du théorème démontré au paragraphe précédent et de sa réciproque il résulte que, des propriétés d'une quadrique de révolution, on peut déduire des propriétés d'une quadrique quelconque, relatives à un foyer.

Exemple. — Théorème. — *Le cône* C *circonscrit à une quadrique de révolution* Σ *et dont le sommet* a *est sur l'axe, est lui-même de révolution ; ses plans tangents font des angles égaux avec le plan* P *de la courbe de contact ; enfin le plan de cette courbe est perpendiculaire à l'axe de révolution.*

Théorème corrélatif. — *Le cône ayant pour sommet un foyer* O *d'une quadrique* Σ' *et pour base une section dont le plan passe par la directrice correspondante* D, *est de révolution ; l'axe est la droite joignant le foyer au pôle, par rapport à la quadrique, du plan de la section; il est perpendiculaire au plan qui passe par le foyer et la directrice correspondante.*

En effet, prenons la figure polaire réciproque de Σ par rapport à une sphère de centre O, nous obtiendrons une quadrique Σ' ayant pour foyer le point O ; la directrice correspondante étant la droite D conjuguée de l'axe de révolution ab de la surface Σ, par rapport à la sphère.

Au cône C correspondra, sur la surface Σ', une courbe plane c' située dans le plan polaire A', par rapport à la sphère, du sommet a de ce cône ; le point a étant sur l'axe de révolution ab, son plan polaire A' passera par la directrice D qui est conjuguée de ab.

A la courbe de contact du cône C correspondra un cône circonscrit à la surface Σ', ayant pour sommet le pôle p, par rapport à la sphère, du plan P de cette courbe de contact, et pour base, la section c'; le point p est donc le pôle du plan A' *par rapport à* Σ'.

Maintenant le pôle, par rapport à la sphère, d'un plan M tangent au cône C est un point m de c' ; l'angle du plan M avec le plan P restant constant quand le plan M roule sur le cône C, il en est de même de l'angle mOp. Le cône qui a pour sommet le foyer O et pour base la section c' est donc bien de révolution autour de la droite Op joignant le foyer O au pôle p, par rapport à la quadrique Σ', du plan de la section c'.

Enfin les plans passant par l'axe ab ont leurs pôles, par rapport à la sphère, sur la directrice D ; comme ces plans sont perpendiculaires sur le plan P, les droites joignant le foyer O aux différents points de D sont perpendiculaires sur Op, et cette droite est perpendiculaire sur le plan passant par le foyer O et la directrice D.

EXERCICES.

1° Soient C la section d'une quadrique par un plan P et M, M' les points où le diametre conjugué du plan P rencontre cette quadrique ; démontrer qu'on peut déterminer la nature de la surface en étudiant la nature de la section C, celle des points M, M' et leur position par rapport au plan P.

Cette méthode est surtout avantageuse quand on a à discuter une équation du second degré représentant des quadriques variables mais ayant *une meme* section plane C.

Application. — On donne une quadrique, un point A et un plan P ; une transversale, tournant autour du point A, rencontre le plan en un point B, trouver le lieu des points M où la transversale est rencontrée par le plan polaire du point B, par rapport à la quadrique.

Le point A se déplaçant dans l'espace, discuter ce lieu qui est une quadrique passant par le point A, par le pôle du plan P, par la section de la quadrique donnée avec le plan P, enfin par la courbe de contact du cône circonscrit à cette quadrique et dont le sommet est au point A.

2° Les plans polaires d'un point donné par rapport aux quadriques ayant huit points communs, passent par une même droite.

Corollaire. — Les plans diamétraux de ces quadriques, conjugués d'une direction donnée, passent par une même droite. (**Lamé.**)

Les droites conjuguées d'une droite donnée par rapport aux mêmes quadriques, engendrent un hyperboloïde à une nappe.

Énoncer les propriétés corrélatives.

3° Les plans polaires d'un point donné par rapport aux quadriques ayant sept points communs passent par un point fixe.

Corollaire. — Les plans diamétraux de ces quadriques, conjugués d'une direction donnée, passent par un même point. (**Lamé.**)

Énoncer les propriétés corrélatives.

4° Une quadrique étant assujettie à passer par un point M et par deux ellipses données, non situées dans un même plan mais admettant une corde commune ; déterminer les régions de l'espace où se trouve le point M, quand la quadrique est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un cône ou un hyperboloïde à deux nappes.

5° Trouver le lieu des centres des quadriques de révolution passant par deux droites données ; trouver le lieu des axes de révolution de ces quadriques.

6° Lorsque deux quadriques passent par deux droites non situées dans un même plan, l'intersection de ces surfaces se compose de ces droites et de deux autres droites réelles ou imaginaires.

7° **Trouver le** lieu des pôles d'un plan P par rapport aux quadriques passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche. — Lieu des centres de ces surfaces.

8° Il existe un ellipsoïde touchant chacune des faces d'un tétraèdre en leur centre de gravité ; le centre de la surface est au centre de gravité du tétraèdre.

9° Il existe un ellipsoïde touchant les arêtes d'un tétraèdre en leur milieu ; le centre de la surface est au centre de gravité du tétraèdre.

10° La somme des carrés des longueurs des axes d'une quadrique à centre est égale à la puissance du centre de la surface par rapport à la sphère circonscrite à l'un quelconque de ses tétraèdres conjugués. (**Painvin**, *Nouvelles Annales ;* année 1860, page 290.)

11° Le lieu des centres des quadriques tangentes à six plans, et dont les carrés des longueurs des axes conservent une somme constante est une sphère. (**J. Mention**, *Nouvelles Annales*, année 1857, page 228.)

12° Les normales menées par le point M aux trois quadriques homofocales à une quadrique donnée S, qui passent par ce point, rencontrent l'un des plans principaux de cette quadrique en trois points qui sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport à la focale située dans ce plan principal.

13° Un cylindre étant circonscrit à une quadrique ; si, par l'une des focales de la surface, on fait passer un second cylindre ayant ses arêtes parallèles à celles du premier, les sections droites de ces deux cylindres sont des coniques homofocales.

Corollaire. — Les projections orthogonales des deux focales réelles d'une quadrique sur un plan quelconque sont des coniques homofocales.

14° Quand deux quadriques sont homofocales, de quelque point de l'espace qu'on les considère, leurs contours apparents semblent se couper à angle droit.

15° Quand un ellipsoïde et un hyperboloïde sont homofocaux, les plans tangents à l'ellipsoïde parallèles aux plans asymptotes de l'hyperboloïde sont à la même distance du centre commun des deux surfaces.

16° Les pôles d'un plan, par rapport a des quadriques homofocales, sont situés sur une même droite perpendiculaire à ce plan.

17° Les normales abaissées d'un point sur des quadriques homofocales sont sur un cône du second ordre.

18° Si d'un point pris dans un des plans principaux on abaisse des normales sur des quadriques homofocales, toutes ces normales seront situées dans deux plans, dont l'un sera le plan principal, et l'autre sera perpendiculaire à ce plan principal ;

Les points d'incidence des normales situées dans le plan principal sont sur la **focale à nœud** de Quetelet ;

Les points d'incidence des normales situées dans le second plan sont sur une circonférence de cercle, qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la polaire de ce point par rapport à la focale située dans le plan principal où ce point est placé ;

Enfin les plans tangents aux surfaces menées par les points d'incidence des premières normales enveloppent un cylindre parabolique ; et les plans tangents menés par les points d'incidence des autres normales passent tous par une même droite située dans le plan principal.

19° Si l'on mène, à des quadriques homofocales, des normales parallèles à une direction D, leurs points d'incidence sont sur une hyperbole équilatère dont une asymptote est parallèle à D.

20° Si, par une droite D, on mène des plans tangents à des quadriques homofocales. les normales à ces surfaces menées par leurs points de contact avec ces plans formeront un paraboloïde hyperbolique.

Si la droite D est normale à l'une des surfaces, le paraboloïde se réduira à une conique.

Si la droite D est située dans un des plans principaux des surfaces, les points de contact des plans tangents menés par cette droite seront sur une circonférence de cercle.

21° Étant donnés trois cônes du second ordre homofocaux représentés par les équations obtenues en remplaçant λ successivement par ρ, ρ_1, ρ_2 dans l'équation

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=0;$$

pour qu'on puisse mener par un point de l'espace trois plans perpendiculaires deux à deux et tangents respectivement aux trois cônes, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$A+B+C=\rho+\rho_1+\rho_2.$$

Quand cette relation a lieu, le problème, pour chaque point de l'espace, admet une infinité de solutions.

22° Lieu des sommets des angles trièdres trirectangles dont les faces sont respectivement tangentes à trois quadriques homofocales.

Expliquer pourquoi, en mettant le problème en équation, on obtient autant d'équations que l'on a introduit de paramètres arbitraires.

23° Étant donnée une figure formée par un plan P et une droite D perpendiculaire à ce plan, en un point M, trouver le lieu que décrit le point M quand cette figure se déplace de manière que le plan P touche une quadrique Σ et que la droite D touche respectivement deux autres quadriques homofocales à la précédente.

Cas où les deux dernières quadriques sont les focales réelles de la quadrique Σ. Déduire de ce cas particulier les corollaires suivants :

Corollaire I. — Le lieu des pieds des perpendiculaires menées aux plans tangents d'une quadrique de manière que ces perpendiculaires rencontrent les deux focales réelles, est la sphère décrite sur le grand axe de la quadrique comme diamètre.

Corollaire II. — Le lieu des points d'intersection des projections orthogonales des deux focales réelles d'une quadrique sur les plans tangents est la sphère décrite sur le grand axe de la quadrique comme diamètre.

24° Démontrer qu'il existe trois séries de sphères doublement tangentes à un ellipsoïde ; leurs centres sont situés respectivement dans les plans principaux.

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces sphères soient réelles ; pour que deux sphères de deux séries différentes coïncident.

Parmi les sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde, celles qui touchent la surface aux ombilics sont appelées **sphères focales.**

La somme ou la différence des tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à deux sphères focales est constante pour tous les points de l'intersection de l'ellipsoïde par une quadrique homofocale.

Les plans tangents à l'ellipsoïde en tous les points de la même courbe d'intersection coupent les deux sphères focales sous des angles dont la somme ou la différence est constante.

25° Si deux surfaces Σ, Σ_1 sont polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O, leurs apsidales Σ', Σ'_1 relatives au point O sont polaires réciproques par rapport à la même sphère.

Déduire de là que la surface des ondes relatives à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

a pour équation, en coordonnées tangentielles,

$$\frac{u^2}{a^2 l^2-1}+\frac{v^2}{b^2 l^2-1}+\frac{w^2}{c^2 l^2-1}=0.$$

On a posé

$$l^2=u^2+v^2+w^2,$$

et un plan tangent à la surface des ondes a une équation de la forme

$$ux+vy+wz+1=0.$$

26° La surface des ondes qui correspond à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

est sa propre polaire réciproque par rapport aux quadriques représentées par l'équation

$$\pm\frac{x^2}{bc}\pm\frac{y^2}{ca}\pm\frac{z^2}{ab}=1.$$

PRINCIPAUX SUJETS DE COMPOSITIONS PROPOSÉS DANS LES CONCOURS.

École Polytechnique.

1855. Trouver les droites situées sur la surface qui a pour équation

$$x^3+y^3+z^3=a^3;$$

étudier les sections faites dans cette surface par des plans passant par l'une de ces droites.

1856. Discuter l'équation

$$\rho^2 = a + b\sin\omega + c\sin^2\omega,$$

quand on fait varier les paramètres a, b, c.

1858. Déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2 + (2m^2+1)(y^2+z^2) - 2(yz+zx+xy) = 2m^2 - 3m + 1,$$

lorsque le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

1860. On donne une parabole P ; soient A et B deux points mobiles sur cette courbe, mais tels que les normales en A et en B se coupent en un point C de la parabole P. Trouver le lieu des points M, intersection de la corde AB avec la tangente à la parabole au point C.

1861. Déterminer les diverses surfaces représentées par l'équation

$$a(x^2+2yz) + b(y^2+2zx) + c(z^2+2xy) = 1$$

lorsque les paramètres a, b, c varient de $-\infty$ à $+\infty$. — Exprimer que ces surfaces sont de révolution.

1862. Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0:$$

1° Lorsque p et q varient de toutes les manières possibles ; 2° lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation donnée représente un cône. Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.

1863. On donne sur un plan deux circonférences de cercle O, O' ; d'un point A pris sur O on mène des tangentes à O' et l'on joint les points de contact obtenus. Cette droite coupe au point M la tangente au point A du cercle O ; trouver le lieu décrit par le point M.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relatives des cercles O et O' ; indiquer le cas où il se décompose. Faire voir que le lieu des points M est tangent à la circonférence du cercle O en chacun des points qui lui sont communs avec cette circonférence.

1864. On considère le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

et la parabole qui est représentée par l'équation

$$(\beta x - \alpha y)^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2},$$

où α et β désignent des paramètres variables. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le point P (α, β) pour que les deux courbes aient successivement : 1° quatre points communs réels ; 2° quatre points communs imaginaires ; 3° deux points réels et deux points imaginaires communs.

On construira les courbes qui séparent les différentes régions.

1865. On donne dans un plan une parabole P et l'on considère une circonférence de cercle C passant par le foyer de P. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre du cercle C, pour que sa circonférence ait successivement avec la parabole P : 1° quatre points communs réels ; 2° quatre points communs imaginaires ; 3° deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare ces différentes régions.

1866. On considère la parabole et l'hyperbole équilatère qui correspondent, respectivement, aux équations

$$y^2 - 2px = 0 \qquad xy - m^2 = 0.$$

On propose : 1° de former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des points d'incidence des normales communes à ces deux courbes ;

2° De déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins égal à *un* et au plus égal à *trois* ;

3° De démontrer qu'en supposant

$$7p^4 > 2m^4,$$

il n'y a qu'une normale commune réelle.

1867. Étant donnés un triangle AOB rectangle en O et une droite D située dans le plan de ce triangle, on propose : 1° de former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AOB ; 2° de trouver l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des droites parallèles à D ; 3° d'examiner les différentes formes du lieu L qui correspondent aux directions diverses de la droite D.

1868. Soient deux paraboles P_1, P_2 ayant toutes deux pour foyer le point fixe O et, pour axes respectifs, les droites fixes OX, OY, droites que l'on suppose rectangulaires. On mène à ces paraboles une tangente commune dont les points de contact sont M_1, M_2 ; trouver le lieu décrit par le milieu de $M_1 M_2$, sachant que la tangente commune passe par un point fixe.

1869. On donne un triangle rectangle isoscèle AOB et l'on demande : 1° l'équation générale des paraboles P tangentes aux trois côtés du triangle AOB ; 2° l'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles ; 3° l'équation et la forme du lieu des projections du point O, sommet de l'angle droit AOB, sur les axes des paraboles P.

1872. On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites

A, B respectivement parallèles à ces axes, et l'on demande : 1° de former l'équation générale des coniques qui ont pour centre l'origine et qui admettent comme normales les droites données A, B ; 2° de démontrer que, par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir : deux ellipses et une hyperbole ; 3° de faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

1873. On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A, et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

1874. Étant donné un triangle, on sait que, par un point M de son plan, il passe, en général, deux paraboles circonscrites au triangle.

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu du point M pour lequel les axes des deux paraboles correspondantes forment entre eux un angle donné.

1875. Trouver le lieu géométrique de l'intersection des deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont la même grandeur $2l$.

Que devient le lieu, quand on fait tendre l vers zéro.

Revenant au cas général, on propose de déterminer les ordonnées des points d'incidence des normales menées à la parabole par un point du lieu. — Application aux points du lieu pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe de la parabole.

1875 (*Question retirée, sauf pour l'Algérie*). Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun des foyers reste sur une droite donnée. A cette conique, parallèlement à l'une des droites données, on mène une tangente ; trouver le lieu des points de contact.

1876. On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe.

A chacun des cercles on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact avec le cercle variable du point d'incidence de la normale, sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.

Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle, on la rendra rationnelle.

En second lieu, on exprimera en fonction du rayon du cercle les coordonnées du point d'incidence de la normale, en s'attachant à spécifier les solutions réelles distinctes.

1877. Soient $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes ; ξ, η les coordonnées d'un point M du plan de l'hyperbole. Par le point M on mène, à la courbe, deux tangentes ; soient A et B les points de contact.

Trouver l'équation du cercle passant par les points A, B et par le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C, D distincts de A et de B; trouver l'équation de la droite CD.

Trouver le lieu des projections du centre de l'hyperbole sur la droite CD, le point M décrivant une droite.

1878. On donne une droite D dont l'équation, par rapport à deux axes ox, oy, est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

et l'on considère les différentes coniques qui, ayant pour axes les droites ox, oy, sont normales à la droite D.

Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points, par lesquels on mène des tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Démontrer que ce lieu est une parabole et que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du point o à la droite D.

On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

1879. On donne une conique rapportée à ses axes et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,$$

et un point M sur cette courbe. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la conique et par le point M on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par le centre o de la conique donnée.

Si autour de ce centre o on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points ; prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points à cette conique est la droite perpendiculaire au segment oM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point o on peut mener, indépendamment de la normale dont le point d'incidence est en o, trois autres normales à la conique K ; trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les points d'incidence de ces trois normales.

Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a : $a=1$, $b=-1$, montrer qu'une seule de ces trois normales est réelle, et calculer les coordonnées de son point d'incidence.

1880. Soient M, N les points où l'axe des x rencontre le cercle ayant pour équation

$$x^2+y^2=R^2\,;$$

Considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N, et soient A, B les points où le cercle rencontre la corde de contact des tangentes menées d'un point Q de sa circonférence à cette hyperbole.

Démontrer que, des deux droites QA, QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points M et N est déterminée. On construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets.

Le point P décrivant la droite $y = x$, trouver le lieu des foyers de l'hyperbole.

1881. 1° On considère une parabole P et une droite AB normale au point A de cette courbe, qui se projette sur l'axe au foyer de la parabole.

Trouver le lieu des sommets des sections faites dans le cylindre ayant la parabole P pour section droite, par des plans passant par AB.

2° On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M, intersection de la seconde asymptote avec la directrice qui correspond au foyer donné.

1882. On donne deux cercles se coupant aux points A et B. Une conique passant par ces points et tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets en deux autres points C et D.

1° Démontrer que la droite CD passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés.

2° Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle E, F.

3° Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences de cercle E ou F ; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent la circonférence de ce cercle en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences de cercle données.

1883. On donne une parabole et une droite. Trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à la parabole forment avec la droite donnée un triangle de surface donnée.

1884. On donne une conique ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1;$$

on joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'.

1° On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

2° Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondants à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le milieu du segment MM'.

3° Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P : on déterminera, en coordonnées polaires, l'équation du lieu décrit par le point P. (*On prendra le foyer* F *pour pôle et l'axe des x pour axe polaire.*)

Nota. — Dans toutes ces questions, il est nécessaire de distinguer le cas où la conique donnée est une ellipse de celui où elle est une hyperbole.

1885. Par les deux foyers d'une ellipse on fait passer une circonférence de cercle variable.

1° A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence du cercle puisse la rencontrer en quatre points réels et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour que les quatre points d'intersection soient réels.

2° En chacun des points d'intersection on mène les tangentes à l'ellipse ; trouver, quand le cercle varie, le lieu des sommets du quadrilatère formé par ces tangentes.

3° Quel est le lieu des points d'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse.

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse ; trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1842. On donne une ellipse ou une hyperbole dont AA' est l'axe focal. Par le sommet A le plus voisin du foyer F, on mène une droite quelconque rencontrant la courbe au point C et on la prolonge d'une quantité CD telle que le rapport $\frac{AD}{AC}$ soit constamment égal à $\frac{m}{n}$; puis on tire les droites A'C, FD qui se coupent au point M. Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AD tourne autour du sommet A.

1847. On donne sur un plan un nombre quelconque de points A, B, C,... ; par une origine fixe O prise arbitrairement dans ce plan, on mène des droites, sur chacune desquelles on prend une longueur OM inversement proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés des distances des points donnés à la droite correspondante, on demande :

1° Le lieu des points M ; 2° si l'on peut toujours, les points donnés restant fixes, choisir l'origine O, de telle sorte que le lieu soit un cercle ; 3° examiner si le lieu est toujours une courbe fermée ; 4° cela étant, trouver où doit être placé le point O, les points donnés restant fixes, pour que l'aire du lieu soit maximum.

1859. 1° On donne dans un plan un nombre quelconque de points : trouver, parmi toutes les droites parallèles à une direction donnée et situées dans ce plan, celle dont la somme des carrés des distances aux points donnés est un minimum.

2° La direction de la droite venant à varier et les points donnés restant les mêmes, prouver que la ligne qui remplit la condition de minimum énoncée plus haut passe par un point fixe.

3° Combien, par un point donné du plan, peut-on faire passer de lignes telles que la somme des carrés de leurs distances aux points donnés soit égale à un carré donné.

4° Il peut arriver que les lignes qui satisfont à la question précédente soient imaginaires ; cela a lieu lorsque le point donné est dans l'intérieur d'une certaine courbe dont on demande l'équation.

5° On peut toujours, quel que soit le nombre des points donnés et de quelque manière qu'ils soient placés, les remplacer par trois autres, tels que la somme des carrés de leurs distances à une droite quelconque du plan soit proportionnelle à la somme des carrés des distances des points donnés à la même droite, ou, en d'autres termes, tels, que le rapport des deux sommes de carrés soit le même pour toutes les droites du plan.

6° Les points définis dans la question précédente sont indéterminés ; trouver la courbe sur laquelle ils sont situés.

7° Le triangle qui a ces trois points pour sommets a une surface constante.

1861. D'un point P extérieur à une conique, on mène une sécante PAB. Aux points A, B où elle rencontre la courbe, on mène des tangentes qui se coupent en M, et l'on projette le point M sur la droite AB ; trouver le lieu de ces projections.

Prouver : 1° Que le lieu passe au point P : tangente en ce point ; 2° que le lieu est le même pour toutes les coniques homofocales ; 3° que le lieu peut être considéré comme le lieu des projections du point P sur certaines droites qui sont tangentes à une courbe dont on demande l'équation.

1863. On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe AB en un point donné C et passant par un point D. D'un point P pris sur AB, on mène des tangentes à chacune de ces hyperboles et l'on demande le lieu des points de contact.

Déterminer la nature du lieu suivant la position du point D.

1864. Étant donnés un triangle ABC et une droite D passant par le point A, il y a une infinité de coniques passant par les points A, B, C et tangentes à la droite AD.

A chacune de ces courbes on mène des tangentes parallèles à AD ; trouver le lieu des points de contact.

Ce lieu est une conique ; on demande la courbe décrite par ses foyers lorsque, les points A, B, C restant fixes, la droite AD tourne autour du point A.

1866. Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA', BB'. Aux sommets de ce parallélogramme on mène les normales à l'ellipse ; elles forment un second parallélogramme MNM'N'.

1° Démontrer que les diagonales de chacun des deux parallélogrammes ABA'B', MNM'N' sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre.

2° Trouver le lieu des sommets du parallélogramme MNM'N' quand on fait varier les diamètres conjugués.

3° Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale NN' et de la tangente en M au lieu précédent.

1867. On donne deux droites rectangulaires AB, CD, et l'on considère les hyperboles ayant la droite AB pour asymptote et touchant la droite CD en un point fixe P. On demande :

1° Le lieu des foyers de toutes ces hyperboles; 2° le lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la directrice; 3° le lieu des points d'intersection de la seconde asymptote avec la droite qui joint le foyer au point d'intersection des deux droites données.

1868. On donne une ellipse et un point P situé dans le plan de la courbe. Déterminer le lieu des sommets des cônes qui ont l'ellipse pour directrice et dont l'un des trois axes de symétrie passe par le point P.

1869. Étant donnés un rectangle et un point P dans son plan, on mène par le point P une droite quelconque PQ et l'on imagine les deux coniques qui passent par les sommets du rectangle et touchent la droite PQ. Soient E, E' les deux points de contact et M le milieu du segment EE'; trouver le lieu décrit par le point M, quand on fait tourner la droite PQ autour du point P.

On construira le lieu dans les hypothèses suivantes : le rectangle se réduit à un carré dont le côté est $2a$, et, si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux côtés du carré menées par son centre, les coordonnées du point P sont $x = y = \frac{a}{4}$.

1870. Par l'axe transverse d'une hyperbole donnée, on mène un plan P faisant un angle α avec le plan de la courbe, puis, dans le plan P, une droite OZ perpendiculaire à cet axe transverse.

Trouver l'équation de la surface de révolution décrite par la rotation de l'hyperbole autour de OZ.

Construire la section méridienne de la surface, en supposant : 1° l'hyperbole équilatère ; 2° la droite OZ menée par l'un des sommets de la courbe ; 3° l'angle α égal à 45°.

1872. Par un point fixe A, pris sur une surface du second ordre donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en A.

1° Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe par le point A.

2° Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement à la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point A.

3° Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en A coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.

1873. Étant donnés une ellipse A et un point P dans son plan, de ce point on mène des normales à l'ellipse et l'on considère la conique B qui passe par le point P et les pieds des quatre normales.

1° Trouver les coordonnées du centre de cette conique B et celles de ses foyers.

2° Trouver le lieu C du centre et le lieu D des foyers de la conique B, lorsque l'ellipse A varie de manière que ses foyers restent fixes.

3° Trouver le lieu des points d'intersection du lieu D et de la droite OP lorsque le point P décrit un cercle de rayon donné et ayant pour centre le centre O de l'ellipse A.

1874. 1° Par les trois sommets d'un triangle rectangle on fait passer des paraboles, auxquelles on mène des tangentes parallèles à l'hypoténuse du triangle donné : 1° On demande le lieu des points de contact.

2° Le lieu cherché est une conique qui coupe chacune des paraboles en quatre points. On demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les sécantes communes qui ne passent pas par l'origine.

1875. On considère une infinité d'ellipses semblables entre elles, ayant un sommet fixe O et la même tangente en ce point ; on demande le lieu des pieds des normales menées, d'un point fixe P, à ces ellipses.

On construira le lieu dans le cas où OP est incliné à 45° sur la tangente fixe donnée et en supposant successivement que le rapport des axes des ellipses considérées est égal à $\sqrt{3}$ ou à 2.

1876. On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires ox, oy et telles que la droite PQ qui joint leurs points de contact P et Q avec ces deux droites passe par un point donné A.

On demande : 1° Le lieu du point d'intersection de la normale en P à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en Q ; 2° de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan ; 4° l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font entre eux un angle donné. On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45° et où le point A est sur la droite ox.

1877. On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC rectangle au point A et telles que les tangentes en B et C à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. On demande : 1° Le lieu du point de concours des normales en B et C à ces coniques ; 2° le lieu du centre de ces coniques : on distinguera les points du lieu qui sont des centres d'ellipses de ceux qui sont des centres d'hyperboles ; 3° le lieu des pôles d'une droite quelconque D ; ce lieu est une conique. On considère toutes les droites D pour lesquelles cette conique est une parabole et l'on demande le lieu des projections du point A sur ces droites.

1878. On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les points A et B rencontre la conique en deux autres points variables C et D ; on mène les droites AC, BD qui se coupent en M, les droites AD, BC qui se coupent en N.

Déterminer : 1° Le lieu des points M et N ; 2° le lieu des points de rencontre de la droite MN avec la circonférence de cercle à laquelle elle correspond.

1879. Étant donné un tétraèdre OABC défini par l'angle trièdre O et les longueurs $4a$, $4b$, $4c$ des trois arêtes OA, OB, OC :

1° Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux, est tangent aux six arêtes du tétraèdre.

2° Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites menées, l'une par le milieu de l'arête OA parallèlement à OB, la deuxième par le milieu de l'arête OB parallèlement à OC, la troisième par le milieu de l'arête OC parallèlement à OA.

3° Par chacun des points où la droite mobile perce la surface de l'ellipsoïde on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point ; démontrer que ces deux plans passent par le centre de l'ellipsoïde et trouver le lieu de l'intersection des deux plans.

1880. Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui lui est perpendiculaire. Par les points a, b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A' et B' de l'autre système ; soient a' et b' les points où les deux droites A' et B' sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points a et b et celui des points a' et b', quand la droite A décrit le paraboloïde.

2° Trouver le lieu des points de rencontre des droites A et B' ou A' et B.

3° Calculer le rapport des longueurs ab et $a'b'$ des perpendiculaires communes et étudier la variation de ces longueurs.

1881. On considère la courbe qui a pour équation $27y^2 = 4x^3$.

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite $y = mx + n$ soit tangente à cette courbe.

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = \mathrm{B}.$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes qui la coupent en deux points variables M et M' ; on demande le lieu du milieu du segment MM'. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points M, M' sont réels.

1882. Soient un point fixe P ayant pour coordonnées a et b par rapport à deux axes rectangulaires ox, oy, et A, B les projections du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B ; du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM, PM'.

1° Trouver l'équation de la droite MM' qui joint les pieds des normales variables et démontrer que cette droite passe par un point fixe.

2° Trouver l'équation de la courbe C lieu des points M et M'. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = 2b$, au moyen de coordonnées polaires, le pôle étant au point o.

1883. On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation

$$(x^2 + y^2)x = ay^2.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former. 1° l'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine o aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que si les trois tangentes sont réelles le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles C_m dont chacun jouit de cette propriété, que les tangentes à la cissoïde, en trois des quatre points où ils la rencontrent, concourent en un même point; soit M ce point pour le cercle C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle C_m et à la cissoïde, pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles C_m par deux points donnés P et Q du plan? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles C_m ?

1884. a et b désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est, pour chaque position de ce point, la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0?$$

On construira en particulier le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

1885. Soit une ellipse E dont le grand axe et la distance focale sont respectivement égaux à $2a$ et à $2c$.

D'un des foyers F de cette ellipse comme centre, on décrit une circonférence de cercle C ayant pour rayon

$$\sqrt{2(a^2 + c^2)}.$$

D'un point quelconque P_1 de la circonférence C, on mène une tangente P_1P_2 à l'ellipse; du point P_2 où elle rencontre de nouveau la circonférence C, on mène à l'ellipse une deuxième tangente P_2P_3, enfin du point P_3 où cette deuxième tangente rencontre la circonférence C, on mène à l'ellipse une troisième tangente P_3P_4 rencontrant la circonférence au point P_4.

On demande de démontrer que la deuxième des tangentes à l'ellipse issues du point P_4 passe par le point initial P_1.

CONCOURS GÉNÉRAL.

Mathématiques spéciales.

Étant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est égal au tiers de l'apothème, on le coupe par une sphère de rayon r et dont le centre est situé sur la surface du cône à la distance a du sommet. On développe ensuite la surface convexe du cône sur un plan, ce qui donne un secteur circulaire dont l'angle est égal aux trois quarts d'un angle droit; on demande l'équation de la courbe d'intersection de la sphère et du cône après le développement de cette dernière surface.

Construire cette courbe dans les hypothèses suivantes : $a = 3$, $r = 2$.

1833. Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra le même problème en supposant : 1° que les deux côtés coupés sont égaux; 2° que le triangle est équilatéral.

1844. Étant donnés une ellipse et un point A sur la courbe, on décrit un cercle tangent à l'ellipse en ce point et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celle qui toucherait l'ellipse au point A. On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes quand on fait varier le rayon du cercle.

1845. Étant donnés un cercle et un point situé dans son intérieur, on imagine que, sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par le point donné. On demande : 1° l'équation générale de ces ellipses ; 2° le lieu de leurs foyers ; 3° le lieu des extrémités de leurs petits axes.

1846. Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés de chaque rectangle, on mène deux droites au point de contact M de l'un des deux autres côtés, et l'on demande de prouver : 1° que les droites MN et MQ sont également inclinées sur ce côté AB ; 2° que la somme MN + MQ est constante ; 3° que les droites MN, MQ enveloppent une ellipse homofocale à la proposée.

1847. Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle dont les sommets A, B, C sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle on mène au cercle des tangentes Aa, Bb, Cc qui rencontrent respectivement en a, b, c les côtés opposés à ces sommets. On propose de démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

Examiner si le théorème reste vrai quand on remplace le cercle par une conique quelconque inscrite dans le triangle PQR.

1849. Soient, dans un plan, une ellipse et une droite ne rencontrant pas la courbe. On prend sur la droite deux points N, N′ conjugués par rapport à l'ellipse : 1° prouver qu'il existe dans le plan de l'ellipse deux points O, O′ desquels on voit le segment NN′ sous un angle droit ; 2° trouver le lieu des points O, O′, quand la droite se meut parallèlement à elle-même.

1851. Étant donnée une droite L, on mène, de chacun de ses points M, deux droites à deux points fixes P, P′. Deux autres points fixes O, O′ sont les sommets de deux angles AOB, A′OB′ de grandeurs données, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs de manière que leurs côtés OA, O′A′ soient respectivement perpendiculaires aux deux droites MP, MP′. On demande quelle est la courbe décrite par le point d'intersection N des deux droites OA, O′A′ et la courbe qui est décrite par le point d'intersection des deux droites OB, O′B′, quand le point M glisse sur la droite fixe L.

1860. On donne deux ellipsoïdes A et B, et l'on demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B.

1861. Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est constante.

1862. Deux paraboles de même paramètre ont leurs axes à angle droit ; l'une d'elles est fixe, l'autre est mobile. Une corde commune AB passe constamment par le pied D de la directrice de la parabole fixe ; on demande le lieu décrit par le sommet de la parabole mobile.

1863. Une surface du second degré de révolution pourvue d'un centre se meut de manière que, dans chacune de ses positions, elle rencontre, suivant une circonférence de cercle, une surface du second degré fixe et donnée. On demande le lieu du centre de la surface mobile.

1864. On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA′ leurs rayons vecteurs minima. On fait tourner les rayons vecteurs autour de F, en conservant leur distance angulaire ; soit FC, FC′ une quelconque de leur position. En C et C′ on mène une tangente à chacune des coniques ; trouver le lieu de leur point de rencontre M.

1865. Étant données deux coniques tangentes en un point O, on leur mène la tangente commune OR, ainsi que les tangentes communes extérieures AA′, BB′ qui se coupent au point M.

Cela posé, on propose de démontrer : 1° que la droite PP′ qui joint les points P, P′ diamétralement opposés au point O dans les deux coniques, passe par le point M ; 2° que les droites AB, A′B′ qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes extérieures communes, se coupent en un point R qui est situé sur la tangente commune intérieure OR 3° que les tangentes, menées aux deux coniques par le point R, touchent ces courbes en des points situés sur la droite MO.

On fera voir que généralement le point R ne partage cette propriété avec aucun autre point, et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle, que les tangentes menées par chacun de ses points aux deux coniques donnent quatre points de contact en ligne droite.

1866. 1° Démontrer que les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques inscrites dans un rectangle donné sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à deux directions fixes.

2° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point quelconque du plan à toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné; ou bien des tangentes parallèles à une direction donnée.

3° Trouver le lieu des points de toutes ces coniques où la tangente fait un angle donné avec le diamètre qui aboutit au point de contact.

1867. Un ellipsoïde étant donné, on propose de trouver une droite L dans l'espace et un point P sur l'ellipsoïde, de façon que les cônes qui ont pour sommet le point P et pour bases les sections faites dans l'ellipsoïde par des plans contenant L, soient de révolution. On cherchera en outre, quel est le lieu des positions occupées par la droite L, lorsque le plus grand et le plus petit des axes de l'ellipsoïde restant invariables, on fait varier la longueur de l'axe moyen.

1868. On propose : 1° de trouver le lieu géométrique des points divisant dans un rapport donné les portions des tangentes à une conique fixe qui sont comprises entre deux droites fixes ; 2° de classer méthodiquement, en s'attachant surtout aux cas généraux, les diverses formes que ce lieu géométrique peut affecter ; 3° de trouver les conditions que doivent remplir la conique et les deux droites fixes pour que le lieu géométrique demandé se décompose en lignes du second ordre.

1869. On donne un cercle dont le centre est en O et un point P dans le plan de ce cercle, en dehors de la circonférence ; trouver le lieu décrit par les foyers d'une hyperbole équilatère doublement tangente au cercle et passant par le point P.

On construira le lieu en supposant la distance PO égale au triple du rayon du cercle.

1870. Deux ellipses ont leur centre en un même point et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites.

Déterminer le lieu d'un point tel que les cônes ayant ce point pour sommet commun et les deux ellipses pour directrices, soient égaux.

1872. Étant donné un prisme triangulaire droit, on le coupe par des plans rencontrant les trois arêtes, de manière que les volumes des troncs de prisme obtenus soient dans un rapport donné :

1° Trouver la surface engendrée par le centre de gravité de l'un des troncs de prisme, quand le plan sécant se déplace sans cesser de rencontrer les trois arêtes ; 2° trouver les courbes qui forment les contours de cette surface.

On examinera en particulier le cas où le prisme donné a pour bases des triangles équilatéraux.

1873. Une surface du second degré S étant donnée, ainsi que deux points

A, B sur cette surface, il existe une infinité de surfaces du second degré Σ tangentes à S aux points A et B. On propose de trouver : 1° le lieu geométrique des centres des surfaces Σ ; 2° le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.

1875. Étant donnés un ellipsoïde, un plan P et un point A dans ce plan, trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et tels que la section de chacun de ces cônes, par le plan P, admette pour foyer le point A.

1876. Étant donné un parallélipipède, on considère trois arêtes qui n'ont pas d'extrémités communes; et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes: 1° trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes; 2° chercher les droites réelles situées sur la surface ; 3° étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles aux arêtes du parallélipipède.

1877. Rechercher les surfaces S du second degré sur lesquelles existe une droite D telle que l'hyperboloïde de révolution H qui a pour axe une génératrice quelconque G, de la surface S, et du même système que D, et qui passe par la droite D, coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S, jouissant de la propriété énoncée : 1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F des hyperboloïdes H' conjugués des hyperboloïdes H ; 2° par l'un des foyers F de l'hyperboloïde H', on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G, D, et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait, avec cette même droite, l'axe G de l'hyperboloïde H ; trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan P coupe la droite D à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface S et de l'hyperboloïde H.

1878. Les droites A'OA, B'OB, C'OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$. Déterminer : 1° le lieu des axes des surfaces de révolution du second degré qui passent pas les six points A, A', B, B', C, C' ; 2° le lieu des extrémités D de ces axes.

On construira la projection du lieu des points D sur le plan AOB, en supposant $a > c > b$ et l'on partagera la courbe en arcs tels que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.

1879. On donne un hyperboloïde à une nappe et un point dans le plan du cercle de gorge. Par ce point on mène une droite parallèle à une génératrice de la surface. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution qui passe par la génératrice de l'hyperboloïde. Trouver l'équation de la projection sur le plan des xy de l'intersection des deux surfaces. La projection a un point double dont on demande le lieu lorsque la droite varie.

1880. Sur une courbe donnée du troisieme ordre, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points

$$A_{-n}, \ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant.

1° Étant données les coordonnées du point A_0 on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n}, A_n et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite, lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On examinera comment varient les points d'intersection de ce lieu avec les côtés du triangle P, Q, R, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par O.

1881. Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné, à trois axes inégaux, se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux.

Montrer que, si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème : « mener du point P les normales à l'ellipsoïde » dépend de la réso lution de deux équations du troisième degré.

Discuter ces équations.

1882. Par un point quelconque P pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en O, on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points A, B, C. Les longueurs PA, PB, PC, PO, étant représentées respectivement par a, b, c, l, on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point P dans le plan.

1883. D'un point P pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales dont nous désignerons les points d'incidence par B, C, D et E ; on demande : 1° de trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, E ; 2° de trouver le lieu des centres I de la sphère S quand le point P se déplace sur la normale au point A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

1884. Par le centre d'un ellipsoïde donné, on mène trois diamètres conjugués quelconques ; et, par les points où ces droites rencontrent la sphere circonscrite au parallélipipède formé par les plans tangents aux sommets de l'ellipsoïde, on fait passer des plans : 1° trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P sur ces plans variables ; 2° ce lieu est une surface du quatrième ordre dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + D = 0$$

trouver les sphères telles que chacune d'elles coupe la surface suivant deux cercles ; 3° ces sphères forment cinq séries parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes.

Démontrer que les sphères de la série *double* passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres.

Démontrer que les sphères de chacune des trois autres séries coupent respectivement à angle droit des sphères fixes S_1, S_2, S_3. Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

1885. Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :

1° L'équation du cône lieu géométrique des cordes D qui passent par un point donné S, ainsi que les positions du point S pour lesquelles ce cône est de révolution ;

2° La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes D situées dans un plan donné P, ainsi que les positions du plan P pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

1859. Trouver le lieu géométrique des points dont les distances à deux droites données non situées dans un même plan ont entre elles un rapport constant.

Quelles sont les surfaces du second degré auxquelles s'applique ce mode de génération, et quelle est la situation de ces deux droites à l'égard de ces surfaces ?

1862. Étant données deux droites non situées dans un même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèlement à un plan fixe et donné. On demande le lieu du point de contact.

1864. Sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre, on décrit un cercle dans lequel on trace deux rayons OP, OR faisant entre eux un angle constant, puis des points P et R on abaisse sur le grand axe de l'ellipse des perpendiculaires rencontrant la courbe aux points D, E. Au point D on élève perpendiculairement au plan de l'ellipse une droite de longueur constante h, dont on joint l'extrémité au point E ; trouver le lieu décrit par cette droite quand l'angle constant POR tourne autour de son sommet.

1865. Étant donnés une sphère dont le rayon est pris pour unité, et un cylindre droit ayant pour base une ellipse de même centre que la sphère et dont les longueurs des demi-axes sont $\sin a$ et $\sin b$, démontrer : 1° qu'il existe sur la sphère deux points F, F' tels que la somme des arcs de grands cercles MF et MF′ aboutissant à un point quelconque M de la courbe d'intersection C de la sphère et du cylindre, est constante; 2° que ces deux arcs font des angles égaux avec la tangente au point M à la courbe C.

Construire les deux points F, F′; examiner le cas particulier où la somme MF + MF′ est égale à une demi-circonférence de grand cercle.

1868. Étant données dans un plan deux paraboles du deuxième degré, on les fait tourner autour de leurs sommets supposés fixes, de manière que, dans chacune de leurs positions, leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence de cercle, et l'on demande le lieu du centre de ce cercle.

1869. (*Voir* Exercice 18, p. 383.)

1871. On donne trois points fixes A, B, C ; on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points fixes sont les extrémités de trois diamètres conjugués. (Chasles.)

1872. On donne deux droites fixes Δ, Δ' qui ne se rencontrent pas ; par ces deux droites on fait passer des surfaces du second ordre S, pour lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de ces mêmes longueurs sont des quantités constantes et données.

1° Trouver le lieu des centres des surfaces S.

2° Considérant une quelconque des surfaces S et son centre I, on mène par le point I une droite rencontrant les deux droites fixes en D et D′ : calculer la distance DD′.

3° Par les points D, D′ on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites Δ, Δ'; trouver le lieu des intersections de ces plans.

1873. On donne un hyperboloïde à une nappe sur lequel on prend une génératrice déterminée G. En un point quelconque P de cette génératrice, on mène la normale à la surface, et l'on suppose que cette normale, considérée comme un rayon incident, se réfléchit, suivant la loi connue, sur le plan de l'ellipse de gorge. On demande : 1° la surface engendrée par le rayon réfléchi, lorsque le point P se déplace sur la génératrice G ; 2° l'enveloppe des sphères ayant pour centre le point d'incidence et pour rayon la distance du point d'incidence au point P.

1874. On donne une ellipse et une hyperbole homofocales; on imagine une conique quelconque C doublement tangente à chacune des coniques données. On demande de trouver et de discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique variable C.

1875. A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du second ordre Σ, la courbe de contact étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe P. On circonscrit ensuite à chaque surface Σ un cône ayant pour sommet un point donné A.

1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces Σ.

2° Classer les surfaces qui forment le lieu, quand on suppose le plan P fixe et le point A mobile dans l'espace.

On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point A.

1876. On donne une parabole P et un point H dont la projection orthogonale sur le plan P de la parabole se fait au sommet de cette parabole :

1° Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole P et par le point H.

2° Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point A donné dans le plan Q, qui contient le point H et l'axe de la parabole.

Classer les mêmes surfaces quand le point A se meut dans le plan Q.

1877. On donne un ellipsoïde et un point A ;

1° Trouver un point B tel que, en menant par ce point un plan *quelconque* P, la droite AB soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point A et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan P.

2° Le problème a en général trois solutions : trouver pour quelles positions du point A le nombre des solutions devient infini.

3° Le point A restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que les sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point B.

1878. On donne une sphère S, un plan P et un point A ; par le point A, on mène une droite qui rencontre P en un point B ; puis sur AB comme diamètre on décrit une sphère S' ; le plan radical des sphères S, S' rencontre la droite AB en un point M.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AB tourne autour du point A.

2° Discuter le lieu précédent, en supposant que le point A se déplace dans l'espace, le plan P et la sphère S restant fixes.

1879. On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe en A. Soit M le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par A ; soit Q le point de rencontre de P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde. Le plan P tournant autour de A, on demande :

1° Le lieu du point M ;

2° Le lieu du point Q. — Ce second lieu est une surface du second ordre S, que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace ;

3° Le lieu des points que doit occuper le point A, pour que la surface S soit de révolution.

1880. On donne un ellipsoïde et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur ; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.

1° Le sommet du cône se déplaçant sur un plan donné P, trouver le lieu décrit par le pôle du plan Q par rapport à l'ellipsoïde ;

2° Ce lieu est une surface du second degré Σ ; on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de Σ a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan P se déplaçant de façon que Σ satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans les surfaces Σ par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace parallèlement à lui-même.

1881. Étant donné un ellipsoïde, on considère des droites D telles que si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact M, M' soient dans un même plan : 1° Démontrer que la droite D et la droite des contacts MM' sont rectangulaires ; 2° trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné A ; 3° ce lieu est un cône du second degré ; trouver le lieu des positions du point A pour lesquelles ce cône est de révolution ; 4° trouver l'enveloppe C des droites D qui sont contenues dans un plan donné P, et la surface S engendrée par C quand P se déplace parallèlement à un plan donné Q ; 5° trouver pour quelle direction de Q la surface S est de révolution.

1882. On donne une ellipse et un point P dans son plan :

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passent par le point P ;

2° Trouver, pour chacune des positions du point P, combien de ces cercles sont réels ;

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et des cercles osculateurs sont sur un même cercle C ;

4° Trouver l'enveloppe E des cercles C, quand le point P décrit l'ellipse donnée ;

5° La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique. Chercher de combien de manières différentes la courbe E est susceptible de ce mode de génération.

1883. D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné :

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde ;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution ;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S ;

4° Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.

1884. On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P, Q, et pour chacune desquelles la droite d'intersection des plans P et Q est un axe de symétrie.

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R.

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre.

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

1885. 1° On donne une sphère S, et, sur cette sphère, un cercle C et un point T; démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercle C et tangents à la sphère au point T.

2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan, et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T se meut sur la sphère.

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.

4° Soient T, T' deux points diamétralement opposés sur la sphère. Au point T correspondent deux paraboloïdes P et Q ; au point T' correspondent deux autres paraboloïdes P' et Q'. — Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes P et Q avec chacun des paraboloïdes P' et Q' quand on fait varier la direction du diamètre TT'.

NOTES

NOTE I.

Sur l'équation en S.

1° En exposant, au chapitre III, la méthode de Jacobi pour la séparation des racines de l'équation en S, nous avons modifié l'analyse de ce géomètre, afin d'établir une certaine analogie entre sa méthode et celle de Cauchy.

Toutefois, l'analyse du géomètre allemand a, comme nous le montrerons à la fin de cette note, une importance particulière, quand on lui conserve son caractère, ainsi que l'a fait M. Darboux. (Bourdon, *Application de l'Algèbre à la Géométrie;* note XVII.)

Il nous paraît donc utile de la faire connaître.

Elle repose essentiellement sur ce fait que, dans l'hypothèse $BB'B'' \gtrless 0$, la fonction

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \tag{1}$$

peut être mise sous la forme

$$\varphi = A_1x^2 + A_1'y^2 + A''z_1^2 + \varepsilon\left(a_1x + a_1'y + a_1''z\right)^2; \tag{2}$$

le coefficient ε étant égal à ± 1.

En effet, en identifiant les formes (1) et (2), on trouve

$$\varepsilon a_1^2 = \frac{B'B''}{B} \qquad \varepsilon a_1'^2 = \frac{B''B}{B'} \qquad \varepsilon a_1''^2 = \frac{BB'}{B''}$$

$$A_1 = A - \frac{B'B''}{B} \qquad A_1' = A' - \frac{B''B}{B'} \qquad A_1'' = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Pour que les valeurs de a_1, a_1', a_1'' soient réelles, il suffira de prendre $\varepsilon = +1$ si $BB'B''$ est positif et $\varepsilon = -1$ si ce produit est négatif.

On a, dans les deux hypothèses,

$$\varphi = \left(A - \frac{B'B''}{B}\right)x^2 + \left(A' - \frac{B''B}{B'}\right)y^2 + \left(A'' - \frac{BB'}{B''}\right)z^2$$
$$+ BB'B''\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right)^2.$$

Pour fixer les idées, supposons $BB'B'' > 0$; nous devrons prendre $\varepsilon = +1$.

Les équations qui définissent les directions principales et l'inconnue auxiliaire S sont

$$(3) \qquad (A_1 - S)\alpha + a_1 p = 0 \quad (A'_1 - S)\beta + a'_1 p = 0 \quad (A''_1 - S)\gamma + a''_1 p = 0,$$

en posant

$$(4) \qquad a_1\alpha + a'_1\beta + a''_1\gamma = p.$$

Si l'on élimine α, β, γ entre les équations (3) et (4), on obtient immédiatement, pour déterminer S, l'équation

$$\psi(S) = \frac{a_1^2}{A_1 - S} + \frac{a_1'^2}{A'_1 - S} + \frac{a_1''^2}{A''_1 - S} + 1 = 0.$$

C'est la forme obtenue par Jacobi ; elle permet de montrer facilement que les racines de l'équation en S sont réelles.

Nous supposerons $A_1 < A'_1 < A''_1$.

La dérivée $\psi'(S)$ de la fonction $\psi(S)$ n'étant jamais négative, la fonction ψ est croissante dans les intervalles où elle est continue; par suite, dans chacun d'eux, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois. Mais quand S varie de $A_1 + \varepsilon$ à $A'_1 - \varepsilon$, ou de $A'_1 + \varepsilon$ a $A''_1 - \varepsilon$, ou enfin de $A''_1 + \varepsilon$ à $+\infty$, la fonction ψ croît en passant d'une valeur négative à une valeur positive ; donc l'équation $\psi(S) = 0$ a ses trois racines réelles et séparées par la suite

$$A_1 \qquad A'_1 \qquad A''_1 \qquad +\infty,$$

c'est-à-dire par la suite

$$A - \frac{B'B''}{B} \qquad A' - \frac{B''B}{B'} \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} \qquad +\infty.$$

L'examen du cas où les quantités A_1, A'_1, A''_1 ne sont plus inégales, ne présente pas de difficultés.

2° Il nous reste à mettre en évidence l'importance de l'analyse de Jacobi, telle que nous venons de l'exposer.

Elle s'est présentée à ce géomètre, comme cas particulier, dans un mémoire ayant pour titre :

De binis functionibus homogeneis secundi ordinis simul transformandis et de transformatione et determinatione integralium multiplicium.

Dans ce mémoire, Jacobi se propose le problème suivant, qui a une analogie évidente avec le problème de la réduction d'une quadrique aux formes les plus simples, par la considération des directions principales.

Investigare substitutiones hujusmodi

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha'_1 \; x_1 + \ldots + \alpha'_n \; x_n \\
y_2 &= \alpha''_1 \; x_1 + \ldots + \alpha''_n \; x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= \alpha^{(n)}_1 x_1 + \ldots + \alpha^{(n)}_n x_n
\end{aligned}$$

quibus efficiatur

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

simulque data functio homogenea secundi ordinis variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *transformetur in aliam variabilium* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *de quâ binarum producta evanuerunt.* (Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. III, p. 190).

Après avoir montré que les coefficients de l'équation transformée sont les racines d'une certaine équation du degré n, Jacobi examine quelques cas particuliers.

Il fait voir entre autres que si la fonction donnée V peut être mise sous la forme

$$\text{(4)} \qquad V = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 + \left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n\right)^2,$$

l'équation donnant les coefficients de la fonction transformée peut être mise sous la forme

$$1 + \frac{a_1^2}{A_1 - S} + \frac{a_2^2}{A_2 - S} + \ldots + \frac{a_n^2}{A_n - S} = 0.$$

Jacobi fait observer ensuite (page 222) qu'une fonction homogène du second degré à *trois* variables peut *toujours être ramenée à la forme* (4).

Casu trium variabilium functio V *in formam illam specialem, quam antecedentibus consideravimus, semper redigi potest.*

Ainsi la méthode de séparation des racines de l'équation en S, telle que l'a donnée Jacobi, présente une importance particulière, car elle s'applique à la transformation d'une fonction homogène du second degré d'un nombre *quelconque* de variables, pourvu que cette fonction puisse être ramenée à la forme (4).

Remarque. — Dans le même mémoire, Jacobi a encore examiné le cas où la fonction V est de la forme

$$V = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}) x_n;$$

il montre que les coefficients de la forme réduite sont alors les racines de l'équation

$$\frac{a_1^2}{A_1 - S} + \frac{a_2^2}{A_2 - S} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{A_{n-1} - S} + S - A_n = 0,$$

et que ces racines sont réelles.

En appliquant cette remarque au cas où le nombre des variables est égal à trois, on pourra faire voir que l'équation en S a encore ses racines réelles dans l'hypothèse où l'un au moins des coefficients B, B', B'' a une valeur nulle.

3° Méthode de Sylvester. — Reprenons l'équation en S

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix}, \tag{5}$$

et désignons par (a, a', a''), (b, b', b'') les valeurs que prennent pour $S = u$ les mineurs principaux et les mineurs secondaires du déterminant $\Delta(S)$.

La fonction $\Delta(S)$ ne dépendant que des différences $A - S$, $A' - S$, $A'' - S$ ne changera pas de forme si l'on pose :

$$A = A_1 + u \qquad A' = A'_1 + u \qquad A'' = A''_1 + u$$
$$S = S_1 + u.$$

Après cette transformation, l'équation (5) développée devient

$$\Delta_1(S_1) = \Delta(u) - P_1 S_1 + M_1 S_1^2 - S_1^3 = 0;$$

en posant

$$M_1 = A - u + A' - u + A'' - u$$
$$P_1 = a + a' + a''.$$

Considérons l'équation

$$\Delta_1(S_1) \cdot \Delta_1(-S_1) = 0$$

qui a pour racines celles de l'équation (5) et celles de sa transformée en $-S_1$; elle est de la forme

$$[\Delta(u)]^2 - P_2 S_1^2 + M_2 S_1^4 - S_1^6 = 0, \tag{6}$$

en posant

$$P_2 = P_1^2 - 2M_1 \Delta(u) \qquad M_2 = M_1^2 - 2P_1.$$

Si l'on tient compte des identités dont on a fait usage au paragraphe 139 on trouve facilement

$$(7)\quad \begin{cases} P_2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + 2b^2 + 2b'^2 + 2b''^2 \\ M_2 = (A-u)^2 + (A'-u)^2 + (A''-u)^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2. \end{cases}$$

On voit que le premier membre de l'équation (6) ne présente que des variations ; donc, si l'on regarde S_1^2 comme l'inconnue, cette équation n'aura pas de racine négative.

Il résulte de là que l'équation (5) ne peut pas avoir de racine imaginaire, c'est-à-dire de la forme

$$S = \lambda + \mu i.$$

En effet, en posant $u = \lambda$, il en résulterait que l'équation (6) devrait admettre la racine négative.

$$S_1^2 = (\mu i)^2 = -\mu^2.$$

Remarque. — La même méthode donne immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en S ait des racines multiples.

Soit $S = \sigma$ une racine de l'équation en S ; si l'on pose $u = \sigma$, à cette racine correspondra, pour l'équation (6), la racine $S_1 = 0$.

Cette racine nulle sera double, si la racine σ est simple.

Elle sera quadruple, si la racine σ est double, et les coefficients

$$[\Delta(u)]^2 \qquad P_2$$

seront nuls.

Elle sera sextuple, si la racine σ est triple, et les coefficients

$$[\Delta(u)]^2 \qquad P_2 \qquad M_2$$

seront nuls.

En se reportant aux valeurs (7) des coefficients P_2 et M_2, on voit que :

Pour qu'un nombre σ soit racine double de l'équation en S, *il faut que ce nombre annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant* $\Delta(S)$;

Pour qu'un nombre σ soit racine triple de l'équation en S, *il faut que ce nombre annule tous les éléments du déterminant* $\Delta(S)$.

Ces conditions sont évidemment *suffisantes.*

4° Méthode de Lagrange. — Cette méthode a été donnée par Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II, p. 219).

Supposons que l'équation en S puisse admettre une racine imaginaire S_1, elle en aura une seconde S_2 conjuguée de la précédente.

Si, dans les équations

$$\frac{1}{2}\varphi'_\alpha - S\alpha = 0 \qquad \frac{1}{2}\varphi'_\beta - S\beta = 0 \qquad \frac{1}{2}\varphi'_\gamma - S\gamma = 0,$$

on remplace S successivement par S_1 et par S_2, on obtiendra pour α, β, γ des valeurs de la forme

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = p_1 + ip'_1 & \beta_1 = q_1 + iq'_1 & \gamma_1 = r_1 + ir'_1 \\ \alpha_2 = p_1 - ip'_1 & \beta_2 = q_1 - iq'_1 & \gamma_2 = r_1 - ir'_1 \end{array}$$

conjuguées deux à deux et liées par la relation (*)

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

On aurait donc

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + p_1'^2 + q_1'^2 + r_1'^2 = 0,$$

et par suite $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, ce qui est impossible, car on a aussi

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1.$$

L'équation en S ne peut donc pas avoir de racine imaginaire.

5° Nous terminerons cette note relative à l'équation en S en démontrant la réalité de ses racines par une méthode fondée sur les propriétés des formes quadratiques.

Cette démonstration a été donnée par M. Kronecker (*Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 18 mai 1868, p. 340). M. Walecki l'a retrouvée de son côté (*Nouvelles Annales de mathématiques*, année 1882, p. 401).

Définition. — *On dit qu'une forme quadratique est définie quand elle ne peut s'annuler qu'autant qu'on attribue la valeur zéro à chacune des variables; la forme est indéfinie dans le cas contraire.*

Lemme. — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $\varphi + S\psi$ admet une racine imaginaire, les deux formes φ et ψ sont indéfinies.*

En effet, pour cette racine $S = \lambda + \mu i$, la fonction $\varphi + S\psi$ est la somme des carrés d'au plus $n - 1$ fonctions linéaires et homogènes des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on a donc identiquement

$$\varphi + (\lambda + \mu i)\,\psi \equiv (y_1 + iz_1)^2 + (y_2 + iz_2)^2 + \cdots + (y_{n-1} + iz_{n-1})^2.$$

On déduit de là

$$\mu\psi \equiv 2\,(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_{n-1} z_{n-1}),$$

$y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_{n-1}, z_{n-1}$ étant des fonctions linéaires et homogènes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à coefficients réels.

(*) (144, Théorème IV.)

Maintenant, on sait qu'on peut satisfaire aux $n-1$ équations

$$y_1=0 \qquad y_2=0 \qquad \ldots \qquad y_{n-1}=0$$

par des valeurs des inconnues x_i qui ne sont pas toutes nulles. Ces valeurs annulant la forme ψ, cette forme est indéfinie.

En appliquant le même raisonnement à la fonction $S\varphi+\psi$, on verra que la forme φ est aussi indéfinie.

De ce théorème résulte immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire. — *Quand l'une des formes φ ou ψ est définie, l'équation en* S *obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $\varphi+S\psi$ n'a pas de racine imaginaire.*

L'application de ce corollaire à l'équation en S est immédiate ; car on obtient cette équation en égalant à zéro le discriminant de la forme $\varphi-S\psi$; dans laquelle on a

$$\begin{aligned}\varphi &= Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy\\ \psi &= x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,\end{aligned}$$

et la forme ψ est définie, puisqu'elle ne peut s'annuler qu'autant qu'on pose à la fois $x=y=z=0$.

NOTE II.

Sur les sections circulaires d'une quadrique.

On a vu au paragraphe 181 que, pour obtenir les carrés des axes de la section d'une quadrique par le plan P ayant pour équation

$$ux+vy+wz+h=0,$$

il faut, dans la relation

$$\rho^2=-\frac{H_1}{\Delta_1 S},$$

remplacer S par les racines de l'équation du second degré

$$(1) \qquad \Delta_1(S)=\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u\\ B'' & A'-S & B & v\\ B' & B & A''-S & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix}=0.$$

On exprimera que la section est un cercle en écrivant que l'équation précédente a ses racines égales. La méthode ordinaire conduit à la relation

$$(2) \quad [(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2)-\varphi(u,v,w)]^2+4\Delta_1(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Comme la direction des plans cycliques est déterminée, la relation précédente doit comprendre, en réalité, deux équations distinctes.

M. Otto Hesse est parvenu à mettre le premier membre de l'équation (2) sous la forme de la somme de plusieurs carres ; le nombre de ces carrés a même été réduit à deux par M. Henrici ; enfin M. Souillart est parvenu à obtenir les deux conditions qui expriment que le plan P est un plan cyclique en employant certaines propriétés des déterminants. (*Journal de Crelle*, t. LX, p. 305; t. LXIV, p. 187; t. LXV, p. 320).

Nous nous proposons de montrer, dans cette note, que l'on peut exprimer l'égalité des racines de l'équation (1) par une méthode absolument analogue à celle que l'on a suivie pour l'équation en S, au paragraphe 142.

Représentons par a_1, a_1', a_1'', b_1, b_1', b_1'' les mineurs du déterminant $\Delta_1(\mathrm{S})$ relatifs aux éléments $\mathrm{A}-\mathrm{S}$, $\mathrm{A}'-\mathrm{S}$, $\mathrm{A}''-\mathrm{S}$, B, B', B'', ce qui revient à poser

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\mathrm{A}'-\mathrm{S})w^2-(\mathrm{A}''-\mathrm{S})v^2+2\mathrm{B}\,vw\\
a_1' &= -(\mathrm{A}''-\mathrm{S})u^2-(\mathrm{A}-\mathrm{S})w^2+2\mathrm{B}'\,wu\\
a_1'' &= -(\mathrm{A}-\mathrm{S})v^2-(\mathrm{A}'-\mathrm{S})\,u^2+2\mathrm{B}''uv\\
b_1 &= (\mathrm{A}-\mathrm{S})vw+u(\mathrm{B}u-\mathrm{B}'v-\mathrm{B}''w)\\
b_1' &= (\mathrm{A}'-\mathrm{S})wu+v(-\mathrm{B}u+\mathrm{B}'v-\mathrm{B}''w)\\
b_1'' &= (\mathrm{A}''-\mathrm{S})uv+w(-\mathrm{B}u-\mathrm{B}'v+\mathrm{B}''w)
\end{aligned}$$

nous aurons les identités faciles à vérifier

$$(3)\qquad u^2\Delta_1(\mathrm{S})=b_1^2-a_1'a_1''\quad v^2\Delta_1(\mathrm{S})=b_1'^2-a_1''a_1\quad w^2\Delta_1(\mathrm{S})=b_1''^2-a_1a_1'.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_1'(\mathrm{S})=-(a_1+a_1'+a_1'').$$

Ces relations montrent que l'analyse exposée au paragraphe 142 est immédiatement applicable à l'équation (1), et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'un nombre σ soit racine double de l'équation* (1), *il faut et il suffit que ce nombre annule les mineurs du premier ordre* a_1, a_1', a_1'', b_1, b_1', b_1'' *du déterminant* $\Delta_1(\mathrm{S})$, *relatifs aux éléments* $\mathrm{A}-\mathrm{S}$, $\mathrm{A}'-\mathrm{S}$, $\mathrm{A}''-\mathrm{S}$, B, B', B''.

Il est facile de voir que si les trois mineurs a_1, a_1', a_1'', sont nuls, il en est de même des mineurs b_1, b_1', b_1'' ; les conditions cherchées sont donc

$$(4)\qquad a_1=0\qquad a=0\qquad a=0.$$

En éliminant u, v, w entre les équations (4), on obtiendra une équation qui déterminera S. Si l'on remplace dans les équations (4), S par une des racines de l'équation ainsi obtenue, elles se réduiront à deux, aux deux premières par exemple.

On en tire

$$v = \frac{B + \varepsilon\sqrt{-a}}{A'' - S} w \qquad u = \frac{B' + \varepsilon'\sqrt{-a'}}{A'' - S} w,$$

ε, ε' étant égaux à ± 1, et a, a', a'' désignant les mineurs principaux du déterminant $\Delta(S)$, (139).

On substituera ces valeurs de v et de u dans l'équation $a''_1 = 0$, qui devra être satisfaite ; cette condition permettra de reconnaître comment il faut associer les valeurs de ε et de ε'. On trouve ainsi deux solutions pour chaque valeur de S.

Sans nous arrêter à vérifier ce résultat, nous allons montrer que l'équation obtenue en éliminant u, v, w entre les équations (4) est justement l'équation en S et que les directions de plans trouvées sont parallèles aux plans que représente l'équation

$$(5) \qquad \varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

quand on y remplace S par les racines de l'équation en S.

Pour cela posons

$$(6) \qquad A - S = uu' \qquad A' - S = vv' \qquad A'' - S = ww',$$

les équations (4) donneront

$$(7) \qquad 2B = wv' + vw' \qquad 2B' = uw' + wu' \qquad 2B'' = vu' + uv'.$$

Les relations (6) et (7) expriment justement que le premier membre de l'équation (5) est identiquement égal au produit

$$(ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z),$$

la proposition est donc démontrée.

Remarque. — Les identités (3) résultent de la relation

$$U \frac{d^2U}{da_r^s da_m^p} = \frac{dU}{da_r^s} \cdot \frac{dU}{da_m^p} - \frac{dU}{da_r^p} \cdot \frac{dU}{da_m^s}$$

qui est vraie pour un déterminant quelconque U, et dans laquelle le symbole a_r^s représente un élément appartenant à la ligne de rang r et à la colonne de rang s.

NOTE III.

Détermination des foyers d'une section plane d'une quadrique.

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la quadrique, et

$$P = ux + vy + wz + h = 0$$

celle du plan sécant P.

Considérons, comme au paragraphe 181, l'équation

$$f(x, y, z) - \frac{1}{\lambda} P^2 = 0$$

qui représente une quadrique Σ circonscrite à la quadrique donnée, le plan P étant celui de la courbe de contact.

Nous allons chercher les focales de la quadrique Σ, puis nous ferons tendre λ vers zéro ; les points où les deux focales limites non situées dans le plan sécant P rencontrent ce plan, seront les foyers de la section de la quadrique donnée par le plan P.

Pour obtenir les focales de la quadrique Σ, il faut exprimer que l'équation

$$f(x, y, z) - \frac{1}{\lambda} P^2 - S[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = 0$$

représente deux plans (263); ou bien exprimer que les plans ayant pour équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} f'_x - \frac{u}{\lambda} P - S(x-\alpha) = 0 \\ &\frac{1}{2} f'_y - \frac{v}{\lambda} P - S(y-\beta) = 0 \\ &\frac{1}{2} f'_z - \frac{w}{\lambda} P - S(z-\gamma) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2} f'_t - \frac{h}{\lambda} P + S[\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) + \gamma(z-\gamma)] = 0$$

passent par une même droite.

il y a avantage à regarder P comme une inconnue auxiliaire définie par l'équation

$$(3) \qquad ux + vy + wz + h - P = 0.$$

Pour obtenir les coordonnées du point de rencontre des trois plans représentés par les équations (1), on pourrait éliminer x, y, z entre les équations (1) et l'équation (3), ce qui fera connaître P, puis x, y et z. Les trois plans considérés passeront par une même droite, si l'équation qui donne P est satisfaite quel que soit P.

On obtient ainsi l'équation (4) du paragraphe 181 et l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & c \\ B'' & A' - S & B & c' \\ B' & B & A'' - S & c'' \\ u & v & w & h \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que la droite représentée par les équations (1 est située dans le plan représenté par l'équation (2) ; cela aura lieu si les valeurs de x, y, z, en fonction de P, tirées des équations (1), satisfont à l'équation (2) quel que soit P.

On retrouve ainsi l'équation (I) et une nouvelle équation de condition

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & c \\ B'' & A' - S & B & c' \\ B' & B & A'' - S & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} = 0.$$

On a posé, comme au paragraphe 263,

$$c = C + S\alpha \qquad c' = C' + S\beta \qquad c'' = C'' + S\gamma$$
$$d = D - S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Quand on fait tendre λ vers zéro, les équations (I), (II) ne changent pas, mais l'équation (4) du paragraphe 181, devient

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & u \\ B'' & A' - S & B & v \\ B' & B & A'' - S & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant S successivement par les racines de l'équation (III), les équations (I) et (II) jointes à l'équation du plan P détermineront les foyers de la section de la quadrique donnée par ce plan.

En reprenant les calculs précédents pour le cas où la quadrique est un ellipsoïde rapporté à ses plans principaux, on trouve facilement pour déterminer les foyers d'une section plane les equations

$$\text{(I)} \qquad \frac{u\alpha}{\frac{1}{a^2}-\text{S}}+\frac{v\beta}{\frac{1}{b^2}-\text{S}}+\frac{w\gamma}{\frac{1}{c^2}-\text{S}}-\frac{h}{\text{S}}=0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\alpha^2}{a^2\left(\frac{1}{a^2}-\text{S}\right)}+\frac{\beta^2}{b^2\left(\frac{1}{b^2}-\text{S}\right)}+\frac{\gamma^2}{c^2\left(\frac{1}{c^2}-\text{S}\right)}+\frac{1}{\text{S}}=0$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{u^2}{\frac{1}{a^2}-\text{S}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}-\text{S}}+\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}-\text{S}}=0$$

$$ux+vy+wz+h=0.$$

NOTE IV.

Sur les complexes de droites.

1. Les équations

$$\text{(1)} \qquad x=rz+\rho \qquad y=sz+\sigma$$

d'une droite D contiennent quatre paramètres arbitraires.

Quand ces quatre paramètres sont liés par une seule relation, on dit que les droites forment un *complexe*.

Par chaque point de l'espace, passeront une infinité de droites D formant un cône, appelé le *cône du complexe*.

Les droites D situées dans un plan P envelopperont une courbe Γ, appelée la *courbe du complexe*.

L'équation de la projection de la droite D sur le plan xoy est

$$ry-sx=\eta$$

en posant

$$\eta=r\sigma-s\rho.$$

Si les paramètres r, ρ, s, σ, η sont liés par une équation du degré m, on dit que le complexe est de l'ordre m.

2. Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de deux points M, M_1 de la droite D, on aura

$$\text{(2)} \qquad \left\{\begin{array}{l} r=\dfrac{x-x_1}{z-z_1} \qquad s=\dfrac{y-y_1}{z-z_1} \\ \rho-\dfrac{zx-xz_1}{z-z} \qquad \sigma \qquad z_1 \qquad \eta \qquad z-x_1. \end{array}\right.$$

car on a $\rho = x - \frac{x-x_1}{z-z_1}z \qquad \sigma = y - \frac{y-y_1}{z-z_1}z$

Soient maintenant

$$u x+v y+w z+1=0$$
$$u_1 x+v_1 y+w_1 z+1=0$$

les équations de deux plans P, P_1 passant par la droite D, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & r=-\frac{w v_1-v w_1}{u v_1-v u_1} \qquad s=\frac{w u_1-u w_1}{u v_1-v u_1} \\ & \rho=\frac{v-v_1}{u v_1-v u_1} \qquad \sigma=-\frac{u-u_1}{u v_1-v u_1} \qquad \eta=\frac{w-w_1}{u v_1-v u_1}. \end{aligned}\right.$$

En substituant dans la relation qui lie les paramètres r, s, ρ, σ, η leurs valeurs tirées des formules (2) et regardant x_1, y_1, z_1 comme des constantes, on aura l'équation du cône du complexe.

En substituant, dans la même relation, les valeurs de ces paramètres tirées des formules (3), et regardant u_1, v_1, w_1 comme des constantes, on aura, en coordonnées tangentielles, l'équation de la courbe du complexe.

Les complexes généraux du second ordre ont été étudiés, pour la première fois, par Plücker. (**Neue Geometrie des Raumes.**)

Pour donner une idée de la théorie des complexes du second ordre, nous considérerons un cas particulier déjà étudié par Painvin. (**Nouvelles Annales de Mathématiques**, 2e série, tome XI.)

3. Problème. — *Étudier le complexe formé par des droites telles que, par chacune d'elles, on peut mener deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde donné* E.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes, et D une droite par laquelle on peut mener à la surface deux plans tangents rectangulaires Q_1, Q_2. Un troisième plan tangent Q perpendiculaire sur D aura pour équation

$$rx+sy+z=\sqrt{a^2r^2+b^2s^2+c^2},$$

et rencontrera la droite D en un point S situé sur la sphère de Monge.

Appelons q, q_1, q_2, d les distances du centre o de l'ellipsoïde aux plans Q, Q_1, Q_2 et à la droite D ; on aura

$$q^2=\frac{a^2r^2+b^2s^2+c^2}{r^2+s^2+1} \qquad d^2=\frac{\rho^2+\sigma^2+\eta^2}{r^2+s^2+1}.$$
$$q^2+q_1^2+q_2^2=a^2+b^2+c^2 \qquad d^2=q_1^2+q_2^2.$$

De ces relations on déduit facilement l'équation

$$(4)\qquad \rho^2+\sigma^2+\eta^2=Ar^2+Bs^2+C,$$

q ... on ... e

On a posé

$$A = b^2 + c^2 \qquad B = c^2 + a^2 \qquad C = a^2 + b^2.$$

4. Cône du complexe. — Il a pour équation

$$(5)\quad (yz_1 - zy_1)^2 + (zx_1 - xz_1)^2 + (xy_1 - yx_1)^2 = A(x - x_1)^2 + B(y - y_1)^2 + C(z - z_1)^2.$$

Si l'on pose

$$p^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \qquad L = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

l'équation du cône C du complexe, en transportant l'origine au sommet, prendra la forme

$$(6)\qquad (A - p^2)x^2 + (B - p^2)y^2 + (C - p^2)z^2 + L^2 = 0$$

Axes principaux du cône C. — Les directions principales du cône C sont définies par les équations

$$(7)\quad (A - p^2 - S)\alpha + lx_1 = 0 \quad (B - p^2 - S)\beta + ly_1 = 0 \quad (C - p^2 - S)\gamma + lz_1 = 0$$

$$(8)\qquad \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - l = 0.$$

L'élimination de α, β, γ entre les équations (7) et (8) donnent, pour déterminer l'inconnue auxiliaire S, l'équation

$$(9)\qquad \frac{x_1^2}{A - p^2 - S} + \frac{y_1^2}{B - p^2 - S} + \frac{z_1^2}{C - p^2 - S} + 1 = 0.$$

On voit qu'aux trois racines de cette équation correspondent les trois quadriques passant par le sommet M_1 du cône et *homofocales* à l'ellipsoïde E′ ayant pour équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + 1 = 0,$$

et, par suite, aussi à l'ellipsoïde donné E.

La forme des équations (7) montre en outre que les directions principales du cône C sont les normales menées par le point M_1 aux trois quadriques dont nous venons de parler.

On a donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Les axes principaux du cône du complexe sont les normales aux trois quadriques homofocales à l'ellipsoïde donné, qui passent par son sommet* M_1.

5. Appelons ρ_1, ρ_2, ρ_3 les paramètres de ces trois quadriques dont l'une est un ellipsoïde, la deuxième un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes ; c'est-à-dire les racines de l'équation

$$(10) \qquad \frac{x_1^2}{a^2-\rho}+\frac{y_1^2}{b^2-\rho}+\frac{z_1^2}{c^2-\rho}-1=0;$$

en supposant que $a>b>c$, elles seront séparées par la suite

$$-\infty \qquad c^2 \qquad b^2 \qquad a^2.$$

Maintenant, si l'on pose

$$a^2+b^2+c^2-p^2-S=\rho,$$

l'équation (9) devient l'équation (10).

D'un autre côté, on a

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=a^2+b^2+c^2-p^2,$$

et, par suite,

$$S=\rho_1+\rho_2+\rho_3-\rho.$$

Soient S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation (9) qui correspondent aux racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 de l'équation (10), on aura

$$S_1=\rho_2+\rho_3 \qquad S_2=\rho_3+\rho_1 \qquad S_3=\rho_1+\rho_2;$$

Si M_1X, M_1Y, M_1Z sont respectivement les normales menées par le point M_1 à l'ellipsoïde (ρ_1), à l'hyperboloïde à une nappe (ρ_2) et à l'hyperboloïde à deux nappes (ρ_3), l'équation du cône du complexe, *rapporté à ses axes de symétrie*, sera

$$(11) \qquad (\rho_2+\rho_3)X^2+(\rho_3+\rho_1)Y^2+(\rho_1+\rho_2)Z^2=0.$$

6. *Étude du cône du complexe.* — La nature du cône du complexe dépend des signes des coefficients des carrés des variables X^2, Y^2, Z^2 ; le coefficient $\rho_2+\rho_3$ est toujours positif, car ρ_2 est compris entre c^2 et b^2 et ρ_3 entre b^2 et a^2, mais les deux autres $\rho_1+\rho_2$, $\rho_1+\rho_3$ peuvent être positifs ou négatifs. Ces deux coefficients ne changeant de signe qu'en s'annulant, nous sommes conduits à chercher les positions du point M_1 pour lesquelles l'un ou l'autre de ces coefficients est nul. Dans ces deux hypothèses l'équation (9) a une racine nulle ; le point M_1 est donc alors situé sur la surface Σ ayant pour équation

$$\frac{x_1^2}{A-p^2}+\frac{y_1^2}{B-p^2}+\frac{z_1^2}{C-p^2}+1=0;$$

équation qui devient

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{A}x_1^2}{\mathrm{A}-p^2}+\frac{\mathrm{B}y_1^2}{\mathrm{B}-p^2}+\frac{\mathrm{C}z_1^2}{\mathrm{C}-p^2}=0,$$

en remarquant que l'on a

$$\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{p^2}=1.$$

Cette surface est ***la surface des ondes*** dont l'ellipsoïde directeur a pour équation

$$\frac{x^2}{\mathrm{A}}+\frac{y^2}{\mathrm{B}}+\frac{z^2}{\mathrm{C}}-1=0.$$

Les équations des sections de la surface Σ par les plans de coordonnées sont

$$\begin{array}{ccc} x_1=0 & y_1=0 & z_1=0 \\ y_1^2+z_1^2=\mathrm{A} & z_1^2+x_1^2=\mathrm{B} & x_1^2+y_1^2=\mathrm{C} \\ \dfrac{y_1^2}{\mathrm{C}}+\dfrac{z_1^2}{\mathrm{B}}=1 & \dfrac{z_1^2}{\mathrm{A}}+\dfrac{x_1^2}{\mathrm{C}}=1 & \dfrac{x_1^2}{\mathrm{B}}+\dfrac{y_1^2}{\mathrm{A}}=1. \end{array}$$

Chacun de ces plans coupe donc la surface suivant un cercle et une ellipse; le cercle et l'ellipse situés dans le plan zox se coupent en quatre points tels que I, qui sont les *points coniques* de la surface. (Exercice 6, p. 313.)

Pour nous faire une idée de la forme de la surface, nous allons chercher en combien de points elle rencontre une demi-droite $o\mathrm{D}$ passant par l'origine et faisant avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus sont α, β, γ.

Soient M_1 un point quelconque de la demi-droite $o\mathrm{D}$, p la longueur du rayon vecteur $o\mathrm{M}_1$ et ρ le paramètre de l'une quelconque des trois quadriques homofocales à l'ellipsoïde E, qui passent par le point M_1. On aura la relation

$$(13) \qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2-\rho}+\frac{\beta^2}{b^2-\rho}+\frac{\gamma^2}{c^2-\rho}\right)p^2-1=0.$$

Si, à l'aide de cette équation, on forme la dérivée de ρ considérée comme une fonction de p, on voit que cette dérivée est *négative;* les paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 vont donc en décroissant quand p augmente de zéro à $+\infty$.

Maintenant quand le point M_1 coïncide avec l'origine o, l'équation (13) doit donner $p = 0$ *quelle que soit la direction* oD. En supposant cette direction successivement parallèle aux trois axes de coordonnées, on voit qu'à l'hypothèse $p = 0$, correspondent les valeurs $\rho_1 = c^2$, $\rho_2 = b^2$, $\rho_3 = a^2$.

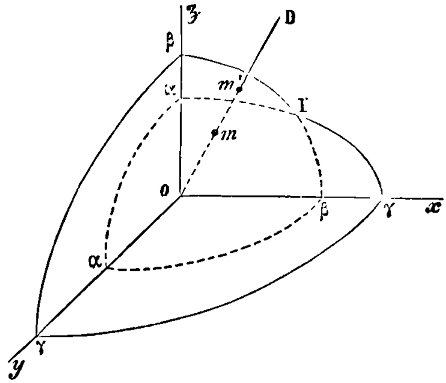


Fig. 56.

Ainsi, quand le point M_1 coïncide avec l'origine, les fonctions $\rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3$ sont *positives;* elles deviennent négatives quand le rayon vecteur oM$_1$ est infiniment grand, car les axes de l'ellipsoïde (ρ_1) qui passent par le point M_1 étant alors infinis, on a $\rho_1 = -\infty$.

Ces deux fonctions décroissant constamment en restant continues, chacune d'elles s'annule *une seule fois*, la première pour une position m, la seconde pour une position m' du point mobile M_1.

On a d'ailleurs

$$\overline{om}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \rho_3$$
$$\overline{om'}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \rho_2,$$

donc ces rayons vecteurs restent *finis* et de plus om est moindre que om'.

On voit que la surface Σ est limitée dans tous les sens et formée de *deux nappes* n'ayant en commun que les points coniques I.

L'une des deux nappes que nous appellerons la nappe *intérieure* a pour équation $\rho_1 + \rho_2 = 0$; elle est engendrée par la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (ρ_1) et de l'hyperboloïde à une nappe (ρ_2) dont les paramètres sont égaux et de signes contraires.

La deuxième que nous appellerons la nappe *extérieure* a pour équation $\rho_1 + \rho_3 = 0$; elle est engendrée par la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (ρ_1) et de l'hyperboloïde à deux nappes (ρ_3) dont les paramètres sont égaux et de signes contraires.

Les considérations précédentes font en outre connaître les signes des coefficients $\rho_1 + \rho_3$, $\rho_1 + \rho_2$ de Y^2 et de Z^2 dans l'équation (11), pour les diverses positions du point M_1 sur la demi-droite oD.

$$\begin{array}{c} \textit{Quand le point } M_1 \\ \textit{est sur} \\ \textit{le segment} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} om \\ mm' \\ m'D \end{array} \right\} \textit{on a} \left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 + \rho_2 > 0 & \rho_1 + \rho_3 > 0 \\ \rho_1 + \rho_2 < 0 & \rho_1 + \rho_3 > 0 \\ \rho_1 + \rho_2 < 0 & \rho_1 + \rho_3 < 0. \end{array} \right.$$

Quand l'un des coefficients $\rho_1 + \rho_2$, ou $\rho_1 + \rho_3$ est nul, le sommet du cône du complexe est sur la surface Σ, et ce cône se réduit à deux plans sécants.

Nous allons montrer que la droite intersection de ces deux plans est tangente à la surface Σ.

Le sommet du cône étant en un point m' de la nappe extérieure, l'équation (11) devient

$$(\rho_3+\rho_2)X^2+(\rho_1+\rho_2)Z^2=0;$$

elle représente deux plans *réels* se coupant suivant la droite $m'Y$. Cette droite étant normale à l'hyperboloïde à une nappe (ρ_2), touche au point m' la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (ρ_1) et de l'hyperboloïde à deux nappes (ρ_3) ; comme cette courbe est sur la nappe extérieure, la droite $m'Y$ souche cette nappe au point m'.

La même démonstration s'applique aux points de la nappe intérieure ; seulement les plans qui forment alors le cône du complexe sont imaginaires conjugués.

Les points pour lesquels le cône du complexe se décompose en deux plans, en sont les points *singuliers ;* nous montrerons plus loin que ces deux plans *touchent* la surface Σ.

Remarquons enfin que le cône du complexe se réduit à un plan *double* quand les deux coefficients $\rho_1+\rho_2$, $\rho_1+\rho_3$ sont nuls ; cela a lieu quand le sommet du cône coïncide avec un des points coniques I.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Théorème II. — *Le lieu des points singuliers du complexe est la surface es ondes Σ dont l'ellipsoïde directeur a pour équation*

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0;$$

l'arête des deux plans qui correspondent à chaque point singulier, touche en ce point la surface Σ.

Les deux plans sont réels pour tout point de la nappe extérieure ; imaginaires pour tout point de la nappe intérieure et confondus pour les points coniques.

Le cône du complexe est réel quand son sommet est situé entre les deux nappes ou en dehors de la nappe extérieure ; il se réduit à un point dans le cas contraire.

7. *Conditions pour que le cône du complexe soit de révolution.* — Pour que le cône du complexe soit de révolution, il faut et il suffit que deux des coefficients des carrés des variables, dans l'équation (11), soient égaux, ou bien que l'équation (10) ait deux racines égales.

En exprimant cette condition, on trouve facilement que le sommet du cône doit se trouver sur les focales de l'ellipsoïde donné E.

Le théorème I montre en outre que l'axe de révolution touche la focale au sommet du cône

8. **Courbe du complexe.** — En éliminant r, s, ρ, σ, η entre les équations (3) et (4), on obtient, pour définir la courbe du complexe, l'équation

$$(14)\quad A(v_1w-w_1v)^2+B(w_1u-u_1w)^2+C(u_1v-v_1u)^2=(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2.$$

Si l'on pose $u = 0$, cette équation devient

$$(15)\quad \left(A w_1^2 + C u_1^2 - 1\right) v^2 + \left(B u_1^2 + A v_1^2 - 1\right) w^2 - 2 A v_1 w_1 v w + 2 v_1 v + 2 w_1 w - d^2 = 0$$

avec

$$d^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2.$$

L'équation (15) représente en coordonnées tangentielles, la projection Γ' de la courbe Γ du complexe sur le plan yoz ; on voit que cette courbe est une conique.

Le discriminant du premier membre de l'équation (15) a pour expression

$$\Delta = -ABC\left(\frac{u_1^2}{A} + \frac{v_1^2}{B} + \frac{w_1^2}{C}\right) d^2 + (B+C) u_1^2 + (C+A) v_1^2 + (A+B) w_1^2 - 1$$

si l'on égale cette fonction à zéro, l'équation ainsi obtenue peut être mise sous la forme

$$\frac{u_1^2}{A d^2 - 1} + \frac{v_1^2}{B d^2 - 1} + \frac{w_1^2}{C d^2 - 1} = 0.$$

Elle représente, en coordonnées tangentielles, la surface des ondes dont l'ellipsoïde directeur a pour équation

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 1 = 0 ;$$

cette surface des ondes coïncide donc avec la surface Σ. (Exercice 4, p. 312; Exercice 25, p. 385.)

La nature de la conique Γ' et par suite celle de la conique Γ dépendent du signe de la quantité $-d^2\Delta$ (G. P. 262) ; cette courbe ne sera jamais une parabole, car d^2 ne peut s'annuler que si le plan P_1 est rejeté à l'infini.

Ainsi, la conique Γ sera du genre ellipse si Δ est négatif, elle sera du genre hyperbole si Δ est positif, se réduira à deux points si Δ est nul et à deux points confondus si le premier membre de l'équation (15) est un carré parfait.

Cherchons quelles sont les positions du plan P_1 dans ces différentes hypothèses.

Quand le plan P_1 est à une distance infiniment grande de l'origine, les paramètres u_1, v_1, w_1 sont infiniment petits, et l'on voit que Δ est *négatif*. Dans les mêmes conditions, l'équation (15) se réduit à

$$v^2 + w^2 = 0,$$

la conique Γ est donc une ellipse imaginaire.

Transportons le plan P_1 de manière à le rapprocher de l'origine ; lorsque ce plan touchera la nappe extérieure de la surface Σ, la fonction Δ sera nulle et la conique Γ se réduira à deux points imaginaires.

Lorsque le plan P_1 passera entre les deux nappes de la surface Σ, la fonction Δ sera positive et la conique Γ deviendra une hyperbole.

Lorsque le plan P_1 touchera la nappe intérieure de la surface Σ, la conique Γ se réduira à deux points réels.

Lorsque le plan P_1 coupera la nappe intérieure de la surface Σ, la conique Γ sera une ellipse réelle.

Reste à trouver les conditions dans lesquelles la conique Γ se compose de deux points confondus.

En exprimant que le premier membre de l'équation (15) est un carré parfait et laissant de côté le cas où l'ellipsoïde donné se réduit à une sphère, on trouve les relations de condition

$$u_1^2 = \frac{B-A}{B(C-A)} \qquad v_1 = 0 \qquad w_1^2 = \frac{C-B}{B(C-A)};$$

il y a donc quatre positions du plan P_1 pour lesquelles la conique Γ se compose de deux points confondus ; ces plans sont parallèles à l'axe oy et leurs traces sur le plan zox sont les tangentes communes au cercle et à l'ellipse, intersection de la surface Σ par le plan zox. Ces plans sont donc ceux qui touchent la surface Σ en tous les points d'un cercle. (Exercice 6, p. 313.)

Prenons par exemple la solution

$$u_1 = -\sqrt{\frac{B-A}{B(C-A)}} \qquad v_1 = 0 \qquad w_1 = -\sqrt{\frac{C-B}{B(C-A)}},$$

l'équation du plan P_1 sera

$$(16) \qquad x\sqrt{B-A} + z\sqrt{C-B} = \sqrt{B(C-A)},$$

et l'équation (15) donnera

$$w = -\sqrt{\frac{C-A}{B(C-B)}}.$$

Les équations des plans projetant sur le plan yoz les tangentes à la conique Γ sont donc

$$vy - z\sqrt{\frac{C-A}{B(C-B)}} + 1 = 0;$$

ces plans passent tous par la droite qui a pour équations

$$y = 0 \qquad z = \sqrt{\frac{B(C-B)}{C-A}}.$$

Le point où cette droite rencontre le plan P_1 défini par l'équation (16) est le point auquel se réduit la conique Γ située dans ce plan P_1 ; il a pour coordonnées

$$x=\sqrt{\frac{B(B-A)}{C-A}} \qquad y=0 \qquad z=\sqrt{\frac{B(C-B)}{C-A}}.$$

On voit facilement qu'il coïncide avec le point où le plan P_1 touche le cercle de la surface Σ, situé dans le plan zox.

Remarque. — Les plans pour lesquels la conique Γ se réduit à deux points sont appelés les plans singuliers du complexe.

De ce qui précède résultent les théorèmes suivants :

Théorème III. — *La surface lieu des points singuliers du complexe coïncide avec la surface enveloppe des plans singuliers.*

Cette proposition reste vraie pour un complexe *quelconque* du second ordre.

Théorème IV. — *La conique du complexe n'est jamais une parabole ; elle est une ellipse réelle quand le plan* P_1 *coupe les deux nappes de la surface* Σ ;

Elle est une hyperbole quand ce plan passe entre les deux nappes ;

Elle est une ellipse imaginaire quand ce plan ne coupe pas la surface Σ.

Elle se réduit à deux points qui sont réels quand le plan P_1 *touche la nappe intérieure ; imaginaires quand il touche la nappe extérieure, et confondus quand il touche la surface* Σ *en tous les points de la circonférence d'un cercle.*

9. Il y a une relation remarquable entre le cône et la conique du complexe.

Nous avons vu que la surface des ondes Σ lieu des points singuliers du complexe coïncide avec la surface des ondes enveloppe des plans singuliers.

Maintenant la surface des ondes Σ est sa propre polaire réciproque par rapport à l'ellipsoïde E_1 ayant pour équation (*)

$$\frac{x^2}{\sqrt{BC}}+\frac{y^2}{\sqrt{CA}}+\frac{z^2}{\sqrt{AB}}-1=0.$$

Cette remarque nous conduit à chercher si la droite D', polaire d'une droite D du complexe par rapport au même ellipsoïde, ne fait pas elle-même partie du complexe.

Prenons sur la droite D deux points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$; la droite D' aura pour équations

$$\frac{Xx}{\sqrt{BC}}+\frac{Yy}{\sqrt{CA}}+\frac{Zz}{\sqrt{AB}}=1 \qquad \frac{Xx_1}{\sqrt{BC}}+\frac{Yy_1}{\sqrt{CA}}+\frac{Zz_1}{\sqrt{AB}}=1\,;$$

en les identifiant avec celles des plans $P(u, v, w)$, $P_1(u_1, v_1, w_1)$, on trouve

$$\begin{array}{lll} x=-u\sqrt{BC} & y=-v\sqrt{CA} & z=-w\sqrt{AB} \\ x_1=-u_1\sqrt{BC} & y_1=-v_1\sqrt{CA} & z_1=-w_1\sqrt{AB}. \end{array}$$

(*) (Exercice 26, page 385.)

Portons ces valeurs dans l'équation (5) qui définit le complexe des droites D, nous retrouvons l'équation (14) qui définit le même complexe.

Ainsi les droites D' polaires des droites D par rapport à la quadrique E_1 appartiennent au complexe des droites D.

Cette remarque a une grande importance; elle montre que le cône du complexe a pour polaire réciproque par rapport à la quadrique E_1 la conique du complexe et inversement. De la nature de ce cône on pourra déduire celle de la conique du complexe et retrouver ainsi le théorème IV

10. Nous allons appliquer cette remarque à la construction des faces du dièdre auquel se réduit le cône du complexe quand son sommet est un point singulier, et à celle des deux points auxquels se réduit la conique du complexe quand son plan est un plan singulier.

Soit m un point singulier ; toutes les droites menées par ce point dans les deux faces du dièdre correspondant appartenant au complexe, les coniques qui correspondent à ces faces se réduisent chacune à deux points dont l'un coïncide avec m. Il en résulte que les faces du dièdre sont *tangentes* à la surface Σ.

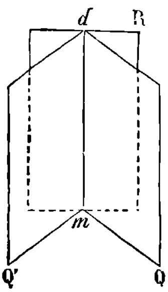


Fig. 57.

Cela posé, le point m appartenant par exemple à la nappe extérieure, on mènera la droite md qui touche au point m la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (ρ_1) et de l'hyperboloïde à deux nappes (ρ_3), qui passent par ce point et sont homofocaux à l'ellipsoïde donné E. Par cette droite, on peut mener à la surface Σ *quatre* plans tangents dont deux se confondent avec le plan R qui touche la surface au point m ; les deux autres plans tangents Q, Q' sont les faces du dièdre relatif au point m.

Pour s'assurer que le plan R n'est pas une des faces de ce dièdre, il suffit de montrer que cela n'a pas lieu pour un point particulier de la surface Σ.

Choisissons le point situé sur l'axe ox et dont les coordonnées sont

$$x_1 = \sqrt{B} \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0.$$

En ce point, le plan tangent à la surface Σ est parallèle au plan yoz, tandis que les faces du dièdre correspondant ont pour équation

$$A(x - \sqrt{B})^2 = (B - C) z^2.$$

11. Occupons-nous maintenant de la construction des points relatifs a un plan singulier.

Prenons, par rapport à l'ellipsoïde E_1, la polaire réciproque de la figure formée par la droite md, le plan tangent R, son point de contact m et les deux autres plans tangents Q, Q' passant par la droite md (*fig.* 57).

Nous obtiendrons d'abord un point r de la surface Σ et le plan M qui la touche au point r.

Au cône du complexe dont le sommet est en m et qui est composé des plans Q, Q', correspondra une conique du complexe située dans le plan M et réduite aux deux points q, q', pôles des plans Q, Q'.

Ces points *seront sur la surface* Σ, puisque les plans Q, Q' touchent cette surface ; ils seront en outre sur la droite rd' polaire de md.

Maintenant, le cône ayant son sommet au point singulier r se réduit à un dièdre dont l'arête est située dans le plan tangent M ; comme la droite rd' *appartient au complexe*, elle sera située sur une des faces de ce dièdre et sera dès lors l'*arête* de ce dièdre.

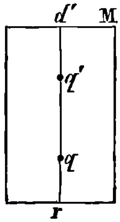


Fig. 58.

On construira, comme dans le cas précédent, l'arête du dièdre relatif au point de contact r du plan singulier M ; *les points q, q' où cette arête rencontrera de nouveau la surface Σ seront les deux points auxquels se réduit la conique du complexe pour le plan singulier* M.

12. Nous terminerons cette note en faisant connaître quelques autres propriétés de la conique du complexe.

Centre de la conique du complexe. — Soient

$$\psi(v,\ w,\ t)=0$$

l'équation tangentielle, rendue homogène, de la conique Γ' projection de la conique Γ sur le plan yoz, et (V, W) les coordonnées tangentielles d'une droite L. L'équation tangentielle du pôle de cette droite par rapport à la conique Γ' sera (G. P. 260)

$$\mathrm{V}\psi'_v+\mathrm{W}\psi_w+\psi'_t=0.$$

Ce pôle deviendra le centre de la conique Γ' si la droite L s'éloigne à l'infini ; l'équation tangentielle du centre est donc

$$\psi_t=0$$

ou, en se reportant à l'équation (15)

$$v_1 v+w_1 w-d^2=0.$$

Les coordonnées cartésiennes y_1, z_1 de ce centre auront pour expressions (G. P. 259)

$$\frac{y_1}{v_1}=\frac{z_1}{w_1}=-\frac{1}{d^2}.$$

On aura le centre de la conique Γ en joignant aux équations précédentes l'équation

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + 1 = 0$$

du plan P_1 ; ses coordonnées sont donc données par les équations

$$\frac{x_1}{u_1} = \frac{y_1}{v_1} = \frac{z_1}{w_1} = -\frac{1}{d^2}.$$

On voit que le *centre de la conique* Γ *coïncide avec le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde* E *sur le plan* P_1.

13. Asymptotes de la conique du complexe. — Les coordonnées tangentielles des asymptotes de la conique projetée Γ' sont déterminées par les équations

$$\psi(v, w, t) = 0 \quad \psi'_t = 0,$$

c'est-à-dire par l'équation (15) et l'équation (*)

$$v_1 v + w_1 w - d^2 = 0,$$

En combinant ces deux équations, on obtient facilement la suivante.

$$\left(A w_1^2 + C u^2 - 1\right) v^2 + \left(B u_1^2 + A v_1^2 - 1\right) w^2 - 2 A v_1 w_1 v w + \frac{(v_1 v + w_1 w)^2}{d^2} = 0,$$

qui devient, en ordonnant,

$$(17) \quad \left(A w_1^2 + C u_1^2 + \frac{v_1^2}{d^2} - 1\right) v^2 + \left(B u_1^2 + A v_1^2 + \frac{w_1^2}{d^2} - 1\right) w^2 - 2\left(A - \frac{1}{d^2}\right) v_1 w_1 v w = 0.$$

Cette équation homogène, par rapport à v et à w, fera connaître les coefficients angulaires des asymptotes de la conique Γ'.

Les droites D enveloppées de la conique Γ étant transportées à l'origine ont pour équations

$$\frac{X}{r} = \frac{Y}{s} = \frac{Z}{1}$$

ou bien

$$(18) \quad \frac{X}{v_1 w - w_1 v} = \frac{Y}{-u_1 w} = \frac{Z}{u_1 v},$$

en tenant compte des formules (3) où l'on a fait $u = 0$.

(*) G. P. [illegible]

Si, dans les équations (18), on remplace $\frac{w}{v}$ par leurs valeurs α, β tirées de l'équation (17), on connaîtra les directions des asymptotes de la conique Γ.

Condition pour que la conique Γ soit une hyperbole équilatère. — En exprimant que les asymptotes de cette conique sont rectangulaires, on obtient la relation

$$(v_1\alpha - w_1)(v_1\beta - w_1) + u_1^2\alpha\beta + u_1^2 = 0,$$

ou, en développant, la relation

$$(u_1^2 + v_1^2)\alpha\beta - v_1w_1(\alpha+\beta) + u_1^2 + w_1^2 = 0.$$

Si, dans cette relation, on remplace $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ par leurs valeurs tirées de l'équation (17), elle devient

$$(B+C)u_1^2 + (C+A)v_1^2 + (A+B)w_1^2 - 2 = 0.$$

Ainsi, *la conique Γ est une hyperbole équilatère lorsque le plan P_1 touche l'ellipsoïde ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{B+C} + \frac{y^2}{C+A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{2} = 0.$$

Conditions pour que la conique du complexe soit un cercle. — La conique Γ sera un cercle si ses asymptotes sont parallèles aux droites isotropes. Pour cela, il suffit d'exprimer que *chacune* des directions définies par les équations (18) où l'on remplace $\frac{w}{v}$ par les racines de l'équation (17) est perpendiculaire sur elle-même.

On obtient ainsi la relation

$$(v_1w - w_1v)^2 + u_1^2w^2 + u_1^2v^2 = 0,$$

c'est-à-dire la relation

$$(19) \qquad (u_1^2 + w_1^2)v^2 + (u_1^2 + v_1^2)w - 2v_1w_1vw = 0,$$

qui doit admettre les mêmes racines que l'équation (17).

Si l'on suppose $u_1v_1w_1 \gtrless 0$, on trouve, en identifiant les équations (17) et (19), les relations de condition

$$a^2 = b^2 = c^2;$$

l'ellip[illegible] e [illegible] a t [illegible] tre u[illegible] sphère.

Écartons ce cas particulier et supposons $v_1 = 0$. Les relations d'identification sont

$$\frac{Aw_1^2 + Cu_1^2 - 1}{u_1^2 + w_1^2} = \frac{Bu_1^2 + \frac{w_1^2}{d^2} - 1}{u_1^2},$$

ou bien

$$\frac{Aw_1^2 + Cu_1^2 - 1}{u_1^2 + w_1^2} = B - \frac{1}{d^2},$$

en remarquant que l'on a ici $d^2 = u_1^2 + w_1^2$.

La condition cherchée est donc

$$(C - B)u_1^2 + (A - B)w_1^2 = 0,$$

ou bien

$$(b^2 - c^2)u_1^2 - (a^2 - b^2)w_1^2 = 0.$$

On voit que *les plans pour lesquels la conique* Γ *est un cercle sont perpendiculaires aux asymptotes de la focale hyperbolique de l'ellipsoïde donné* E.

EXERCICES.

1° Étudier : 1° le complexe des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires respectivement tangents à deux quadriques homofocales données ; 2° le complexe des droites telles que la somme des carrés des distances de chacune d'elles à n points donnés soit égale à une quantité donnée.

2° Étudier : 1° le complexe des droites perpendiculaires à leur polaire par rapport à une quadrique donnée; 2° le complexe des droites normales à une famille de quadriques homofocales ; 3° le complexe des droites rencontrant les faces d'un trièdre trirectangle en des points A, B, C tels que l'on a

$$\frac{AB}{AC} = k,$$

k étant une constante.

3° Étudier le complexe des droites telles que la corde interceptée sur chacune d'elles par une quadrique à centre, soit vue de ce centre sous un angle droit.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

LIVRE II.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

LIVRE III.

SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CRAPITRE III.

LIVRE IV.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

LIVRE V.

ÉTUDE DES QUADRIQUES SUR LES ÉQUATIONS RÉDUITES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

LIVRE VI.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

NOTES.

Remarque. — Les paragraphes imprimés en petits caractères ne font pas partie des programmes des Écoles Normale supérieure et Polytechnique.

Le signe (G. P.) renvoie a un paragraphe de la *Géométrie plane.*

Paris. — Imprimerie PAUL DUPONT (Cl.) 43.3.95