École Polytechnique.

1ère Division.

1883-84.

Cours de Mécanique.

M. Sarrau. Professeur.

1ère Leçon.

Le Cours comprendra deux grandes divisions: La Mécanique rationnelle et le Cours de Machines.

La première se subdivise en deux parties: La Dynamique des systèmes de points matériels et en particulier des systèmes invariables; puis, l'étude des Corps naturels où l'on considérera successivement les solides et les fluides.

Première partie.

Dynamique générale.

Chapitre premier.

Équations générales du mouvement d'un système de points libres.

1. Dans un système de points matériels, les points peuvent être libres ou assujettis à des liaisons. On considérera d'abord le cas où les points sont libres.

Soient n leur nombre,

$m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ leurs masses;

$x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2, \dots x_n\ y_n\ z_n$ leurs coordonnées rapportées à des axes rectangulaires; ces coordonnées sont des fonctions inconnues du temps.

Chacun des points peut être considéré comme sollicité par une force unique, résultant de la composition de forces qui lui sont directement appliquées. On remplacera cette force unique par ses composantes prises parallèlement aux trois axes coordonnés. Ces diverses composantes seront représentées par $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots X_n, Y_n, Z_n$.

Enfin, on conviendra de représenter, d'une manière générale, par m la masse, par x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des points du système, et par $X\ Y\ Z$ les composantes de la force qui produit son mouvement.

Les équations du mouvement de chacun des n points matériels s'écrivent immédiatement, et l'on a, pour l'un quelconque d'entre eux

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right.$$

Il y a n systèmes semblables, en tout $3n$ équations.

2. La force qui agit sur l'un des points du système peut dépendre des coordonnées $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n$ c'est-à-dire de la position actuelle du système; c'est en particulier ce qui a lieu dans le cas de l'attraction newtonienne. Alors les quantités X, Y, Z doivent être

considérées comme des fonctions de coordonnées.

La force qui sollicite le point M peut aussi dépendre de l'état actuel du mouvement du système, c'est-à-dire de ses différents points. (Exemple: mouvement d'un projectile dans un milieu résistant.) Dans ce cas, les quantités X, Y, Z sont en même temps fonctions des vitesses

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots \frac{dz_n}{dt}.$$

Dans certaines théories récentes, on a même été conduit à considérer des forces fonctions des accélérations. Les quantités X, Y, Z deviendraient alors des fonctions des dérivées secondes $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, etc.

Enfin, les forces peuvent dépendre directement du temps t.

On regardera donc, d'une manière générale X, Y et Z comme des fonctions du temps t, des coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots z_n$, des vitesses $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots \frac{dz_n}{dt}$ et des accélérations $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \dots \frac{d^2z_n}{dt^2}$

Dans ces conditions, le problème le plus général consistera dans l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées qui seront toutes du second ordre et au nombre de $3n$.

3. On peut aisément ramener le problème à l'intégration d'un système de $6n$ équations du premier ordre. Prenant à cet effet pour inconnues auxiliaires les composantes $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ de la vitesse de chacun des points du système, il est clair que les trois équations du mouvement du point m peuvent être remplacées par les suivantes

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$m\frac{du}{dt} = X, \quad m\frac{dv}{dt} = Y, \quad m\frac{dw}{dt} = Z;$$

elles sont au nombre de 6, de sorte que, pour les n points, il y a $6n$ équations qui sont toutes du premier ordre, si l'on remplace dans les X, Y, Z, les dérivées secondes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ par les dérivées premières $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

Les fonctions inconnues sont alors les x, y, z, u, v, w et sont au nombre de $6n$.

4. D'après les théories développées dans le Cours d'Analyse, ces $6n$ inconnues sont fonctions du temps t et de $6n$ constantes arbitraires,

de sorte que l'on peut écrire

$$x = f\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$y = f_1\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$z = f_2\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$u = f'\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$v = f_1'\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$w = f_2'\ (t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

attendu que $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$.

5. Par suite de la présence des $6\,n$ constantes arbitraires, les équations précédentes représentent une infinité de mouvements différents qui satisfont tous au même système d'équations différentielles. Celles-ci ne tiennent compte que de l'effet actuel des forces appliquées aux divers points matériels et nullement du mouvement intérieur, de sorte qu'elles correspondent non seulement au mouvement considéré, mais encore à tous ceux qui en diffèrent par l'état initial.

Dans chaque cas particulier, les constantes sont déterminées par la connaissance de l'état initial, laquelle implique celle des valeurs de $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, z_0$ qui correspondent à l'instant $t = 0$. On a alors pour chaque point 6 équations

$$x_0 = f\ (0, C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$y_0 = f_1\ (0\ C_1, C_2, \ldots C_{6n}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

etc, en tout pour les n points $6\,n$ équations, d'où l'on pourra tirer les valeurs des $6\,n$ constantes.

Si l'une de ces équations était la conséquence des autres, elles ne pourraient suffire à déterminer les constantes. On serait assuré que l'on n'est pas parvenu à la solution générale du système d'équations différentielles.

6. Application. — Etude des petits mouvements d'un système matériel très-peu écarté de sa position d'équilibre. — L'intégration peut s'effectuer complètement quand il s'agit des petits mouvements exécutés par un système de points matériels libres autour d'une position d'équilibre stable.

L'équilibre d'un système est stable lorsqu'après l'avoir écarté très-peu de sa position d'équilibre et avoir communiqué à ses différents points des vitesses très-petites, le mouvement du système est tel que les déplacements des points par rapport à la position d'équilibre restent constamment très-petits.

On se bornera à traiter le cas où les quantités X, Y, Z sont fonctions des Coordonnées seulement. Les 3 n équations du mouvement sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots\ldots) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \chi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots\ldots) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \psi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots\ldots) \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on appelle a, b, c, les Coordonnées d'un point quelconque dans sa position d'équilibre, α, β, γ les très-petites variations de ses coordonnées à l'instant t, on a

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma$$

d'où en substituant dans les équations du mouvement

$$\left\{\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \varphi_1(a_1+\alpha_1,\ b_1+\beta_1,\ c_1+\gamma_1,\ a_2+\alpha_2,\ \ldots\ldots) \\ m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \chi_1(a_1+\alpha_1,\ b_1+\beta_1,\ c_1+\gamma_1,\ a_2+\alpha_2,\ \ldots\ldots) \\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= \psi\,(a_1+\alpha_1,\ b_1+\beta_1,\ c_1+\gamma_1,\ a_2+\alpha_2,\ \ldots\ldots) \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= \varphi_2(a_1+\alpha_1,\ b_1+\beta_1,\ c_1+\gamma_1,\ a_2+\alpha_2,\ \ldots\ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres peuvent, en général être développés par la formule de Taylor.

On s'arrêtera dans les développements aux termes qui renferment α, β, γ, à la première puissance, négligeant ainsi à cause de la petitesse des déplacements, les termes qui contiennent en facteur des quantités de la forme α_1^2, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1\alpha_2$. Remarquant en outre que, dans la position d'équilibre, les forces qui sollicitent les divers points sont nulles, de sorte que les fonctions φ, χ et ψ sont nulles quand on y remplace les x, y, z par a, b, c, les $3n$ équations du mouvement deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
m_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} &= \frac{d\varphi_1}{da_1}\alpha_1 + \frac{d\varphi_1}{db_1}\beta_1 + \frac{d\varphi_1}{dc_1}\gamma_1 + \frac{d\varphi_1}{da_2}\alpha_2 + \cdots \\
m_1\frac{d^2\beta_1}{dt^2} &= \frac{d\chi_1}{da_1}\alpha_1 + \frac{d\chi_1}{db_1}\beta_1 + \frac{d\chi_1}{dc_1}\gamma_1 + \frac{d\chi_1}{da_2}\alpha_2 + \cdots \\
m_1\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} &= \frac{d\psi_1}{da_1}\alpha_1 + \frac{d\psi_1}{db_1}\beta_1 + \frac{d\psi_1}{dc_1}\gamma_1 + \frac{d\psi_1}{da_2}\alpha_2 + \cdots \\
m_2\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} &= \frac{d\varphi_2}{da_1}\alpha_1 + \frac{d\varphi_2}{db_1}\beta_1 + \frac{d\varphi_2}{dc_1}\gamma_1 + \frac{d\varphi_2}{da_2}\alpha_2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

7. Toutes les équations sont linéaires; les seconds membres sont des fonctions linéaires, homogènes et à coefficients constants des déplacements. C'est de la linéarité des équations que résulte le principe de la <u>superposition des petits mouvements</u> dont on fait un si grand usage en physique. — Soient en effet

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ \beta &= \beta' \\ \gamma &= \gamma' \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \alpha'' \\ \beta' &= \beta'' \\ \gamma' &= \gamma'' \end{aligned}\right.$$

deux systèmes de solutions, on voit immédiatement que

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \alpha'' \\ \beta &= \beta' + \beta'' \\ \gamma &= \gamma' + \gamma'' \end{aligned}\right.$$

est aussi un système de solutions. — Or, ajouter les projections de deux déplacements, c'est les composer à la manière des forces, d'où cette conséquence :

Le mouvement résultant de la superposition de deux mouvements compatibles avec l'état du système est aussi compatible.

L'expression de superposition est empruntée au langage des physiciens. On entend par là que dans le mouvement résultant, on obtient à un instant quelconque la vitesse et le déplacement d'un point en composant à la manière des forces les vitesses et les déplacements qu'il aurait dans chacun des mouvements considérés.

Ce qui est vrai à un instant quelconque est encore vrai à l'instant initial ; remarquant d'ailleurs que le mouvement du système est complètement déterminé par l'état initial, il est clair que le principe de la superposition peut encore être énoncé de la manière suivante :

La superposition de plusieurs états initiaux particuliers détermine un mouvement tel que le déplacement des points, à une époque quelconque, résulte de la superposition de ceux qui, à la même époque, s'observeraient dans les mouvements correspondants aux états initiaux particuliers.

Si l'on considère par exemple les ondes produites à la surface d'un liquide par plusieurs centres d'ébranlement, le déplacement vertical d'un point sera la somme de ceux qui sont dus à chaque ébranlement considéré isolément. En particulier, la marée s'obtient en composant les marées qui sont dues respectivement à l'action du soleil et à celle de la lune.

8. Pour effectuer l'intégration des équations des petits mouvements, on cherchera d'abord un système d'intégrales particulières en posant

$$\alpha_1 = A_1 \sin(rt + \varepsilon),$$

$$\beta_1 = B_1 \sin(rt + \varepsilon),$$

$$\gamma_1 = C_1 \sin(rt + \varepsilon),$$

$$\alpha_2 = A_2 \sin(rt + \varepsilon),$$

Portant ces valeurs dans les $3n$ équations différentielles, il vient:

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{d\varphi_1}{da_1} + m_1 r^2\right)A_1 + \frac{d\varphi_1}{db_1}B_1 + \frac{d\varphi_1}{dc_1}C_1 + \frac{d\varphi_1}{da_2}A_2 + \cdots = 0 \\
\frac{d\chi_1}{da_1}A_1 + \left(\frac{d\chi_1}{db_1} + m_1 r^2\right)B_1 + \frac{d\chi_1}{dc_1}C_1 + \frac{d\chi_1}{da_2}A_2 + \cdots = 0 \\
\frac{d\psi_1}{da_1}A_1 + \frac{d\psi_1}{db_1}B_1 + \left(\frac{d\psi_1}{dc_1} + m_1 r^2\right)C_1 + \frac{d\psi_1}{da_2}A_2 + \cdots = 0 \\
\frac{d\varphi_2}{da_1}A_1 + \frac{d\varphi_2}{db_1}B_1 + \frac{d\varphi_2}{dc_1}C_1 + \left(\frac{d\varphi_2}{da_2} + m_2 r^2\right)A_2 + \cdots = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - - -
\end{array}\right.$$

Les équations sont homogènes et linéaires en A, B, C. Le nombre de ces quantités étant d'ailleurs égal à celui des équations, leur élimination se fait en égalant à zéro le déterminant, ce qui fournit une équation du degré $3n$ en r^2, de la forme $F(r^2) = 0$.

Portant dans le système précédent une valeur de r^2 fournie par cette équation, on en déduit des quantités proportionnelles aux A, B, C, de sorte que l'on a

$$\frac{A_1}{P_1} = \frac{B_1}{Q_1} = \frac{C_1}{R_1} = \frac{A_2}{P_2} = - - - - - -$$

Désignant par K la valeur commune de ces rapports, le système de solutions particulières devient

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha_1 = K P_1 \sin(rt + \varepsilon) \\
\beta_1 = K Q_1 \sin(rt + \varepsilon) \\
\gamma_1 = K R_1 \sin(rt + \varepsilon) \\
\alpha_2 = K P_2 \sin(rt + \varepsilon) \\
- - - - - - - - - - - -
\end{array}\right.$$

Ce système renferme deux constantes arbitraires K et ε.

On appelle les mouvements correspondants à chaque solution particulière <u>mouvements simples</u>. Dans chaque mouvement simple les trajectoires sont rectilignes. On a en effet

$$\frac{\alpha_1}{P_1} = \frac{\beta_1}{Q_1} = \frac{\gamma_1}{R_1} .$$

Donc le point a_1, b_1, c_1, se déplace sur une droite passant par la position qu'il occupe dans l'état d'équilibre et dont les cosinus directeurs sont proportionnels à P_1, Q_1, R_1.

On voit aisément aussi que le mouvement de chaque point, ainsi que le mouvement du système admet une période τ donnée par l'équation $r\tau = 2\pi$ d'où $\tau = \frac{2\pi}{r}$.

Solution générale. — La solution générale se déduit de ces solutions particulières. Celles-ci sont au nombre de $6n$, car l'équation $F(r^2)=0$ donne $6n$ valeurs de r qui sont deux à deux égales et de signes contraires. Mais ces solutions ne sont pas toutes distinctes et on voit aisément qu'elles se réduisent à $3n$. Les deux solutions qui correspondent à $+r$ et à $-r$ ne diffèrent en effet que par la valeur de la constante ε, car pour que $\sin(rt+\varepsilon)$ et $\sin(-rt+\varepsilon')$ soient égaux, il suffit de prendre $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$.

Si l'on compose les $3n$ mouvements simples distincts, on obtiendra une autre solution qui contiendra $6n$ constantes arbitraires. On aura ainsi les intégrales <u>générales</u> du mouvement.

Soient donc $K_1, \varepsilon_1, P_{1,1}, Q_{1,1}, R_{1,1}, P_{2,1}$, etc, les constantes correspondant à une racine r_1. On a les mouvements simples.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = K_1 P_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) \\ \beta_1 = K_1 Q_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) \\ \gamma_1 = K_1 R_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) \\ \alpha_2 = K_1 P_{2,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = K_2 P_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) \\ \beta_1 = K_2 Q_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) \\ \gamma_1 = K_2 R_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) \\ \alpha_2 = K_2 P_{2,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \end{array}\right.$$

etc, d'où la solution

la plus générale:

$$\begin{cases} \alpha_1 = K_1 P_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) + K_2 P_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) + \cdots \\ \beta_1 = K_1 Q_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) + K_2 Q_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) + \cdots \\ \gamma_1 = K_1 R_{1,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) + K_2 R_{1,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) + \cdots \\ \alpha_2 = K_1 P_{2,1} \sin(r_1 t + \varepsilon_1) + K_2 R_{2,2} \sin(r_2 t + \varepsilon_2) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \end{cases}$$

chaque ligne renfermant $3n$ termes.

Il est à remarquer que, dans les hypothèses admises, les valeurs de r seront toutes réelles. En effet, s'il en était autrement, les sinus de quantités imaginaires s'exprimeraient par des exponentielles réelles; les déplacements pourraient croître indéfiniment avec le temps, et l'équilibre ne serait pas stable.-

II.

Chapitre II.

Théorèmes généraux relatifs aux Systèmes de points libres.

I. Définitions.

On va rappeler d'abord quelques notions comprises dans le Cours de première Année.

10- **Résultante de translation d'un système de forces.** Soit un système quelconque de forces $F_1, F_2, F_3 \ldots$. Par un point arbitraire de l'espace, menons une droite représentant en grandeur et en direction la force F_1; puis par l'extrémité de cette droite, une seconde droite représentant en grandeur et en direction la force F_2, et ainsi de suite. La résultante géométrique de ces droites représente, en grandeur et en direction, la <u>résultante de translation</u> du système des forces.-

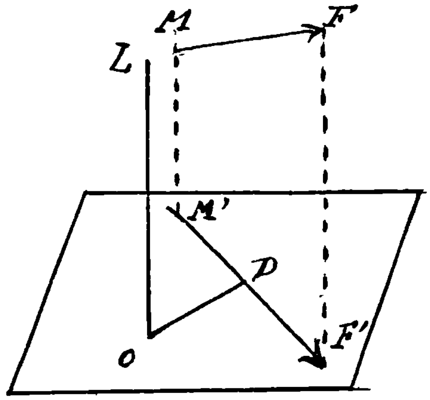
Si l'on représente par X, Y, Z les projections sur les axes de l'une quelconque des forces F, et par P, Q, R les projections de la résultante de translation, on a, par le théorème des projections.

$$P = \Sigma X$$

$$Q = \Sigma Y$$

$$R = \Sigma Z$$

11. — Moments. — On appelle moment d'une force MF par rapport à un axe OL dont le sens est déterminé le produit de la projection $M'F'$ de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la distance OD de cette projection au pied de l'axe. On donne un signe à ce moment. Ce signe est $+$ lorsque la projection de la force tend à faire tourner OD de gauche à droite pour un observateur ayant ses pieds en O et sa tête en L. Ce signe est $-$ dans le cas contraire.



12 — Considérons trois axes rectangulaires et un axe quelconque OL passant par l'origine.

Désignons par

α, β, γ les cosinus directeurs de OL,

X, Y, Z les composantes d'une force quelconque F.

x, y, z les coordonnées du point d'application de F.

il est aisé de vérifier que le moment de la force F par rapport à l'axe OL est représenté en grandeur et en signe par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire par $\alpha A + \beta B + \gamma C$, où l'on pose où l'on pose

$$A = yZ - zY$$

$$B = zX - xZ$$

$$C = xY - yX$$

Les quantités A, B, C sont les moments de la force F par rapport aux trois axes de Coordonnées.

13 – Considérant une droite OK dont les cosinus directeurs a, b, c soient respectivement proportionnels à A, B, C de sorte que l'on ait

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{1}{D}$$

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

l'expression du moment devient.

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = D(\alpha a + \beta b + \gamma c) = D \cos V$$

V étant l'angle KOL.

Par suite, le moment est <u>maximum</u> lorsque la direction OL se confond avec OK, et D est la valeur de ce moment maximum ou principal.

On peut représenter géométriquement le moment principal d'une force par un vecteur ayant A, B, C pour projections sur les trois axes; ce vecteur est ce que l'on appelle l'axe représentatif du moment principal.

14 – Moment résultant d'un système de forces. — Soit un système quelconque de forces. On appelle <u>moment résultant</u> de ce système la résultante de translation des moments principaux des diverses forces qui constituent ce système.

En désignant par L, M, N les projections sur les axes du moment résultant, on a, d'après la définition:

$$L = \Sigma A \quad M = \Sigma B \quad N = \Sigma C$$

ou en remplaçant A, B, C par leurs valeurs

$$L = \sum (yZ - zY)$$

$$M = \sum (zX - xZ)$$

$$N = \sum (xY - yX)$$

15 – Les notions précédentes peuvent être étendues à toute grandeur susceptible d'être représentée, comme une force, par une longueur portée dans une direction.

II – Équations fondamentales.

16 – L'intégration des équations du mouvement d'un système quelconque de points constitue un problème difficile, pour lequel, il ne peut être donné, dans l'état actuel de l'Analyse, aucune règle générale. Mais on peut déduire des équations certaines intégrales, qui sont, dans certains cas, la formule équivalente de véritables principes généraux dont la connaissance suffit pour résoudre un grand nombre de questions.

Définissons d'abord ce que l'on doit entendre par intégrale d'un problème de Dynamique.

17 – Nous avons mis précédemment la solution la plus générale des équations différentielles de n points sous la forme de $6n$ équations exprimant les coordonnées et les composantes des vitesses en fonction du temps et de $6n$ constantes arbitraires. Ces $6n$ constantes sont distinctes, ce qui signifie qu'il est possible de résoudre les $6n$ équations par rapport aux constantes. En opérant ainsi on met les équations finies du mouvement sous la forme de $6n$ nouvelles équations qui expriment les constantes en fonction du temps t, des coordonnées x, y, z et des composantes u, v, w des vitesses:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = F_1(t, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots u_1, v_1, w_1, u_2 \ldots\ldots) \\ C_2 = F_2(t, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots u_1, v_1, w_1, u_2 \ldots\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Chacune des fonctions F est dite une intégrale du problème. On peut, dans des cas d'ailleurs fort rares, obtenir toutes les intégrales, ainsi qu'on en a donné un exemple dans l'étude des petits mouvements; mais, en général, on doit se contenter d'un nombre restreint d'intégrales à chacune d'elles correspond une propriété du mouvement étudié.

On va donc reprendre les équations du mouvement et chercher à en déduire quelques théorèmes généraux conduisant dans certains cas à des intégrales du problème.

18 - En combinant les 3 n équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

on obtient immédiatement les trois groupes suivants d'équations fondamentales:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X \\ \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \\ \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum (yZ - zY) \\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum (zX - xZ) \\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (xY - yX) \end{cases}$$

$$(3)\quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

19 – Il est essentiel de remarquer que les forces intérieures n'interviennent pas dans les groupes (1) et (2).

En effet, si l'on considère l'une des équations (1), on voit que le Σ du second membre s'étend à toutes les forces qui agissent sur les différents points du système. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs projections sont égales et de signes contraires et par conséquent disparaissent dans la sommation.

Considérons maintenant la première des équations (2) ; l'expression $yZ - zY$ est le moment d'une des forces par rapport à l'axe des x. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs moments sont égaux et de signes contraires ; par conséquent ces moments se détruisent encore dans la sommation.

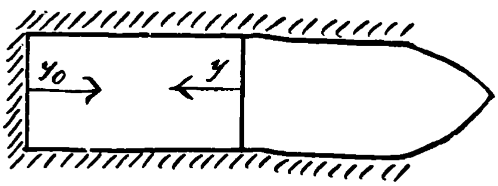
Au contraire, comme nous le verrons ultérieurement, les forces intérieures figurent en général dans l'équation (3).

III – Théorèmes résultant des équations (1).

19 – Montrons d'abord, par un exemple, l'usage qui peut être fait des équations (1).

Il résulte immédiatement de ces équations que la somme des projections des forces extérieures d'un système sur un axe quelconque est égale à la somme des accélérations des divers points projetées sur cet axe multipliées par les masses de ces points.

Considérons dans un canon, le système matériel formé par les produits de la combustion de la poudre.



En appelant ω la section droite de l'âme et en désignant par y_0 et y les pressions par unité de surface respectivement exercées par les gaz sur la culasse et sur le projectile, les seules forces extérieures qui agissent sur le système parallèlement à la direction du mouvement sont les réactions ωy_0 et ωy.

Soit $d\mu$ la masse d'un élément gazeux que l'on assimile à un point matériel et w son accélération estimée suivant l'axe du Canon. On aura :

$$\varpi(y_0 - y) = \int w \, d\mu.$$

L'intégrale $\int w \, d\mu$ devant être considérée comme différente de zéro, y_0 est différent de y.

De plus, on peut poser $\int w \, d\mu = w_0 \mu$, μ étant la masse totale de la charge et w_0 une valeur moyenne de w. Il vient ainsi :

$$\varpi(y_0 - y) = w_0 \mu.$$

D'autre part, en représentant par m la masse de projectile, son accélération est $\frac{\varpi y}{m}$. Par suite, si l'on désigne par θ le rapport de w_0 à l'accélération du projectile, on peut écrire :

$$y_0 - y = \theta \frac{\mu y}{m}$$

ou bien

$$y_0 = y\left(1 + \theta \frac{\mu}{m}\right).$$

Ainsi y_0 est plus grand que y et le rapport $\frac{y_0}{y}$ dépend essentiellement du rapport du poids de la charge au poids du projectile.

20 – **Théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe.** — Les équations (1) peuvent s'écrire :

$$(4). \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt} &= \sum X \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dy}{dt} &= \sum Y \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dz}{dz} &= \sum Z \end{aligned}$$

Elles expriment que <u>la dérivée, par rapport au temps, de somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des forces extérieures sur ce même axe.</u>

21 – On peut mettre l'une des équations (4), la première par exemple,

sous la forme

$$d \sum m \frac{dx}{dt} = \sum X \, dt$$

On sait que $X\,dt$ est l'impulsion élémentaire de la force X, d'où cet énoncé :

Sur un axe quelconque, la variation élémentaire de la somme des quantités de mouvement projetées est égale à la somme des impulsions élémentaires des projections des forces extérieures.

Enfin, en intégrant la relation ci-dessus, entre deux valeurs quelconques de t, on a :

$$\Delta \sum m \frac{dx}{dt} = \sum \int X \, dt.$$

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

L'accroissement total de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe fixe quelconque, pendant un temps aussi quelconque, est égal à la somme des impulsions totales des forces extérieures projetées sur cet axe, pendant le même temps.

Ce dernier énoncé constitue le **Théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe.**

Il est à remarquer que le théorème sera rarement applicable à l'étude des circonstances du mouvement d'un système ; il sera, en effet, généralement impossible de calculer les impulsions totales $\int X dt$, à moins que les quantités X ne dépendent uniquement du temps.

21 - Corollaire. — Si la somme des forces extérieures projetées sur un axe, est constamment nulle, la somme des quantités de mouvement projetées sur cet axe est constante.

Application : Considérons le système formé par le canon, le projectile et la charge. Ce système n'est soumis à aucune force extérieure si l'on néglige le frottement sur le sol. On est donc en droit d'appliquer le corollaire.

Soient :

m, v la masse et la vitesse du projectile.
m', v' la masse et la vitesse du canon.
$d\mu$, u la masse et la vitesse projetée d'un élément de la charge.

La somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe du canon est $mv+m'v'+\int u\,d\mu$. Cette somme est constante ; elle était d'ailleurs nulle à l'origine du mouvement. Il en résulte

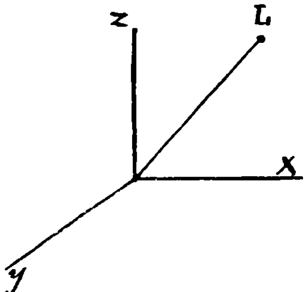
$$mv+mv'+\int u\,d\mu=0$$

Si la masse totale de la charge est assez faible pour que l'on puisse négliger $\int u\,d\mu$, la relation ci-dessus se réduit à :

$$mv+m'v'=0$$

mais dans les conditions actuelles du tir, la somme $\int u\,d\mu$ est rarement négligeable.

22 – M. Résal a donné des équations (4), un énoncé géométrique élégant.



Il est facile de voir que si OL représente la <u>résultante de translation</u> des quantités de mouvement, $\sum m\frac{dx}{dt}$ est la projection de OL sur OX, c'est-à-dire l'x du point L. Dès lors la dérivée de $\sum m\frac{dx}{dt}$ est la composante suivant OX de la vitesse du point L, et cette dérivée est égale d'après la première équation (4) à la projection de la résultante de translation des forces extérieures.

Par suite, <u>la vitesse de l'extrémité de la résultante de translation des quantités de mouvement est représentée, en grandeur et en direction, par la résultante de translation des forces extérieures.</u>

Dans le cas particulier où la résultante de translation des forces extérieures se réduit à zéro, la résultante de translation des quantités de mouvement est constante en grandeur et en direction.

Les relations

$$\sum m\frac{dx}{dt}=c$$

$$\sum m\frac{dy}{dt}=c'$$

$$\sum m\frac{dz}{dt}=c''$$

fournissent alors trois intégrales du mouvement. –

23. Théorème du mouvement du centre de gravité.

Les équations (1) peuvent encore s'écrire

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\sum m x &= \sum X \\
\frac{d^2}{dt^2}\sum m y &= \sum Y \\
\frac{d^2}{dt^2}\sum m z &= \sum Z
\end{aligned}
$$

Soit $M = \sum m$, et désignons par a, b, c, les coordonnées du centre de gravité, de sorte que

$$
\begin{aligned}
Ma &= \sum m x \\
Mb &= \sum m y \\
Mc &= \sum m z
\end{aligned}
$$

Les équations (5) peuvent être mises sous la forme :

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2a}{dt^2} &= \sum X \\
M\frac{d^2b}{dt^2} &= \sum Y \\
M\frac{d^2c}{dt^2} &= \sum Z
\end{aligned}
$$

d'où cet énoncé :

<u>Le mouvement du centre de gravité est le même que, si la masse entière du système étant concentrée en ce point, on y appliquait la résultante de translation des forces extérieures.</u>

Il ne faut pas s'exagérer l'importance de ce théorème dans le cas général. En effet, il arrivera bien rarement que l'on puisse déterminer par ce théorème, le mouvement du centre de gravité, indépendamment des mouvements individuels de tous les points du système. Il faudrait, pour cela que les projections de la résultante de translation des forces extérieures dépendissent uniquement du temps t et des coordonnées a, b, c ;

or, elles seront en général des fonctions des coordonnées de tous les points et peut-être même des vitesses et des accélérations.

On peut toutefois déduire de ce théorème certaines conséquences importantes relativement au mouvement étudié.

Soit, par exemple, une planète dont le centre de gravité décrit sensiblement une ellipse. Supposons qu'une explosion intérieure vienne à la briser; l'explosion n'introduit aucune nouvelle extérieure (si l'on néglige toutefois les faibles variations que la dispersion des fragments fait subir à l'attraction solaire); par suite, le centre de gravité continuera à décrire la même ellipse.

La même remarque s'applique à l'éclatement d'un obus en mouvement quand on néglige la résistance de l'air.

IV - Théorèmes résultant des équations (2).

24 - Théorème des moments des quantités de mouvement.

Désignons par $L\ M\ N$ les seconds membres des équations (2). Ces équations peuvent s'écrire:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= L \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= M \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= N \end{aligned}$$

Elles expriment que <u>la dérivée par rapport au temps, de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments, par rapport au même axe, des forces extérieures.</u>

25 - On peut mettre l'une d'elles, la première par exemple, sous la forme:

$$d\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum (yZ - zY)\,dt.$$

et on conclut que, la différentielle de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe, est égale à la somme des moments des impulsions élémentaires des forces extérieures par rapport au même axe.

Enfin en intégrant les deux membres de la relation précédente, on arrive à cet énoncé qui constitue spécialement le théorème des moments des quantités de mouvement:

L'accroissement total de la somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à un axe fixe quelconque, pendant un temps aussi quelconque, est égal à la somme des moments, par rapport à cet axe, de toutes les impulsions élémentaires des forces extérieures.

Il est à remarquer que, si les composantes des forces extérieures, ne dépendent pas exclusivement du temps, il sera impossible de calculer directement l'intégrale des moments de leurs impulsions élémentaires, et le théorème sera, par suite, sans utilité immédiate.

26 - Corollaire. _ Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe est nulle, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est constante.

Dans ce cas particulièrement important, le théorème fournit une intégrale du mouvement.

28 - On peut enfin donner une interprétation géométrique des équations (6).

Considérons l'axe représentatif du moment résultant des quantités de mouvement du système. Les premiers membres des équations (6) sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées de l'extrémité de cet axe représentatif. On en conclut immédiatement cet énoncé dû à M. Résal:

La vitesse de l'extrémité de l'axe représentatif du moment résultant des quantités de mouvement, est représentée, en grandeur et en direction, par le moment résultant des forces extérieures.

Le moment résultant des forces extérieures relatif à un point de l'espace se réduit à zéro lorsque les forces extérieures ont une résultante passant constamment par ce point. Dans ce cas, il résulte de ce qui précède, que le moment résultant des quantités de mouvement conserve constamment la même grandeur et la même direction.

Les équations

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = C$$

$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = C'$$

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C''$$

qui expriment analytiquement ce fait, donnent alors trois intégrales du mouvement.

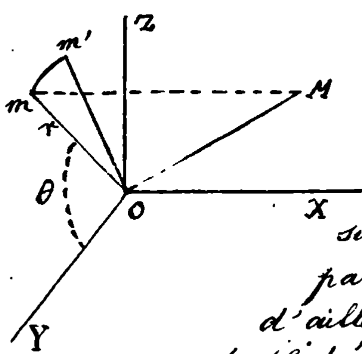
III.

Théorème des Aires.

29 - Les équations du groupe (2)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = L \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = M \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = N \end{cases}$$

sont susceptibles d'une autre interprétation géométrique.



A cet effet, on va introduire dans ces équations les aires décrites par les projections sur les plans des coordonnées des rayons vecteurs joignant l'origine aux divers points du système.

Soit OM un de ces rayons vecteurs qui se projette en Om sur le plan YOZ. Représentant par $d\omega$ l'aire mOm' décrite par Om dans un temps infiniment petit et considérant d'ailleurs cette aire comme positive si le vecteur Om s'est déplacé dans le sens direct, c'est-à-dire de Y vers Z, on aura

$$\frac{d}{w} = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Or,

$$\tan\theta = \frac{z}{y}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{y}, \quad d\theta = \frac{y\,dz - z\,dy}{r^2}$$

de sorte que

$$y\,dz - z\,dy = 2\,dw$$

On trouverait de même deux équations analogues, de sorte que l'on obtient en divisant par dt

$$\begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = 2\dfrac{dw}{dt} \\[2mm] z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = 2\dfrac{dw'}{dt} \\[2mm] x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{dw''}{dt}, \end{cases}$$

ω, ω', ω'' étant les aires décrites par le rayon vecteur OM projeté sur les trois plans des coordonnées et comptées à partir de certaines directions déterminées.

En ajoutant les équations relatives aux n points du système, posant d'ailleurs

$$\vartheta = \Sigma m\omega, \quad \vartheta' = \Sigma m\omega', \quad \vartheta'' = \Sigma m\omega'',$$

on obtient

$$\begin{cases} \Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = 2\dfrac{d\vartheta}{dt} \\[2mm] \Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = 2\dfrac{d\vartheta'}{dt} \\[2mm] \Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = 2\dfrac{d\vartheta''}{dt} \end{cases}$$

et par suite, les équations du groupe (2) deviennent

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = \dfrac{1}{2}L \\[2mm] \dfrac{d^2\vartheta'}{dt^2} = \dfrac{1}{2}M \\[2mm] \dfrac{d^2\vartheta''}{dt^2} = \dfrac{1}{2}N \end{cases}$$

30 – Supposant qu'il existe un axe par rapport auquel la somme des moments des forces extérieures soit nulle, on aura en prenant cet axe pour axe des x

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0$$

d'où

$$\frac{d\vartheta}{dt} = C$$

C représentant une constante. Ainsi

Dans des temps égaux, la somme des produits obtenus en multipliant les masses des points par les accroissements des aires décrites en projection sur un plan perpendiculaire à cet axe, est constante.

Tel est le principe de la conservation des aires, dont on peut encore donner un autre énoncé.

L'intégration donne en effet

$$\vartheta = Ct,$$

à condition que l'on choisisse convenablement l'origine du temps. – Donc

La somme des produits obtenus en multipliant la masse des points par les aires décrites en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, est proportionnelle au temps.

Si le théorème a lieu pour trois axes rectangulaires passant par un point O, c'est-à-dire si le moment résultant des forces extérieures du système est nul, le théorème sera vrai pour un axe quelconque passant par le point O. On a alors

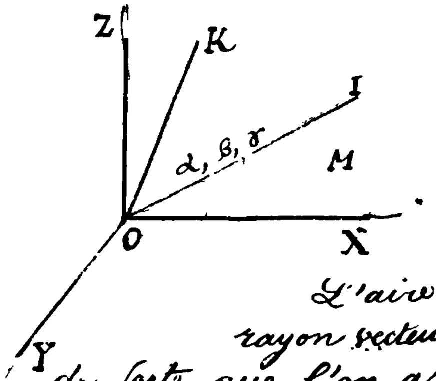
$$\vartheta = Ct, \qquad \vartheta' = C't, \qquad \vartheta'' = C''t$$

et ces trois relations sont trois intégrales du problème.

31 – Application. — Le théorème de la conservation des aires joint à celui du mouvement du centre de gravité, exprime une propriété importante du mouvement d'un système lorsque les forces extérieures sont nulles.

Soit par exemple, un être animé, soustrait à toute action extérieure. Son centre de gravité restera immobile, ou bien il se trouvera animé d'un mouvement rectiligne et uniforme qui ne pourra être modifié par les mouvements des muscles. En outre les efforts de cet être ne pourront le faire tourner tout entier autour d'un axe, du moins si on le suppose primitivement au repos. En effet, la somme des masses de ses points par les aires que décrivent les rayons vecteurs projetés sur un plan perpendiculaire à l'axe, est toujours la même dans des temps élémentaires égaux. Or, elle était nulle lorsque l'être était au repos; par suite elle reste toujours nulle, de sorte que les aires décrites dans un sens sont rigoureusement compensées par celles qui sont décrites en sens contraire.

32 – **Plan du maximum des aires.** — Il existe, à un instant quelconque, un plan tel que la somme des aires décrites en projection sur ce plan, dans un temps infiniment petit, multipliées par les masses, soit un maximum.



Soient en effet, OI la normale à un plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ mené par l'origine, $d\Omega$ l'aire décrite, en projection sur ce plan, pendant un temps dt, par un rayon vecteur OM; enfin soient $d\omega$, $d\omega'$, $d\omega''$ les aires élémentaires, décrites par ce même vecteur sur les plans de projection.

L'aire élémentaire décrite dans l'espace par le rayon vecteur OM peut être assimilée à un triangle plan, de sorte que l'on a

$$d\Omega = \alpha\, d\omega + \beta\, d\omega' + \gamma\, d\omega'';$$

et, en ajoutant les n équations semblables qui correspondent aux différents points du système,

$$\Sigma m\, d\Omega = \alpha \Sigma m\, d\omega + \beta \Sigma m\, d\omega' + \gamma \Sigma m\, d\omega''$$

ou, en introduisant les quantités ϑ, ϑ', ϑ''

$$\Sigma m\, d\Omega = \alpha\, d\vartheta + \beta\, d\vartheta' + \gamma\, d\vartheta''.$$

$\Sigma m\, d\Omega$ est donc une fonction linéaire et homogène de α, β, γ.

Considérant dès lors une droite OK dont les cosinus directeurs a, b, c sont donnés par la formule

$$\frac{a}{d\vartheta} = \frac{b}{d\vartheta'} = \frac{c}{d\vartheta''} = \frac{1}{K}, \text{ avec } K^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + d\vartheta''^2,$$

l'égalité précédente devient en désignant par V l'angle IOK

$$\sum m\, d\Omega = K(a\alpha + b\beta + c\gamma) = K \cos$$

On voit que la quantité $\sum m\, d\Omega$ est maximum pour $V = 0$, et le plan pour lequel la somme des produits des masses par la projection des aires est un maximum, est le plan perpendiculaire à OK.

Les quantités $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\vartheta''$, qui figurent dans les équations ci-dessus ne sont autre chose que les produits par le temps élémentaire dt des dérivées $\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\vartheta'}{dt}, \frac{d\vartheta''}{dt}$. Ces dernières ne dépendent que du mouvement du système à l'instant considéré et de la position des axes. Ainsi, les différentielles $d\vartheta$, $d\vartheta'$ et $d\vartheta''$ doivent être considérées comme déterminées à un facteur constant près.

33 — Il est facile de montrer que la droite OK n'est autre chose que l'axe du moment résultant des quantités de mouvement. En effet, les quantités a, b, c, égales à ses cosinus directeurs, sont proportionnelles à $\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\vartheta'}{dt}, \frac{d\vartheta''}{dt}$. Or, on a

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \sum m \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right).$$

D'ailleurs $\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ est la somme des moments, par rapport à OX, des quantités de mouvement, et, par suite, la projection de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

34 — Corollaire. — Si les forces appliquées au système ont une résultante passant par un point fixe, on peut prendre ce point pour origine. On a alors $L = M = N = 0$, de sorte que $\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\vartheta'}{dt}, \frac{d\vartheta''}{dt}$ sont constants et que le plan du maximum des aires a une direction constante. On l'appelle alors le plan invariable.

Si les forces extérieures ont une résultante nulle, le plan du maximum des aires a une direction constante, quelle que soit l'origine des coordonnées.

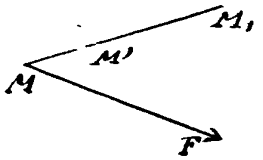
V. Théorème des forces vives.

35 – Il reste à étudier l'équation (3) savoir :

$$(3)\ \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\sum{}'(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz);$$

mais il n'est pas inutile de rappeler préalablement deux définitions.

On appelle force vive d'un point la quantité $\frac{1}{2}mv^2$, c'est-à-dire la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Quant à la force vive θ d'un système, c'est la somme des forces vives de tous ses points, de sorte que $\theta=\frac{1}{2}\sum mv^2$.



Étant donnée une force F appliquée en un point M, on appelle travail élémentaire de la force, relatif au déplacement infiniment petit MM' = ds, le produit $ds\times F\cos(F,ds)$, et travail relatif au déplacement fini MM_1, la somme des travaux élémentaires correspondants. –

36 – Théorème des forces vives. — Le premier membre de l'équation (3) n'est autre que la différentielle de la force vive θ du système. En effet

$$\theta=\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

d'où

$$d\theta=\sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right]dt=\sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right]$$

Quant au second membre, on peut aussi l'interpréter aisément. Soient a, b, c les cosinus directeurs de la force F dont les composantes sont X, Y, et Z,

$$a=\frac{X}{F},\quad b=\frac{Y}{F},\quad c=\frac{Z}{F};$$

Soient de même α, β, γ les cosinus directeurs de l'élément ds décrit par le point,

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds},$$

il est visible que

$$X dx + Y dy + Z dz = F ds \cos(F, ds),$$

de sorte que l'équation (3) prend la forme

$$d\theta = \sum F \cos(F, ds) \times ds$$

<u>La différentielle de la force vive correspondant à un déplacement infiniment petit est égale à la somme des travaux élémentaires des forces appliquées au système.</u>

37 – Il est essentiel de remarquer que les forces extérieures ne disparaissent pas des équations précédentes. Soient en effet m et m' deux points qui ont une action réciproque. Les termes que cette action introduit dans le second membre de l'équation (3) sont

$$(X dx + Y dy + Z dz) + (-X dx' - Y dy' - Z dz')$$

ou

$$X(dx - dx') + Y(dy - dy') + Z(dz - dz')$$

Cette quantité n'est évidemment pas nulle en général.

38 – En intégrant l'expression de $d\theta$, on obtient

$$\Delta\theta = \sum \int F \cos(F, ds) \times ds,$$

<u>La variation de la force vive du système est égale à la somme des travaux des forces</u>, de sorte qu'en désignant par $\mathcal{T}F$ le travail de la force F, on peut poser

$$\Delta\theta = \sum \mathcal{T}F$$

Mais en général, ce théorème n'est d'aucune utilité pour la détermination du mouvement du système, attendu que pour évaluer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_0+t} F \cos(F, ds) \times ds \quad \text{ou} \quad \int_{t_0}^{t_0+t} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{t_0}^{t_0+t} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) dt$$

il faudrait savoir exprimer en fonction du temps les quantités X, Y, Z $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ $\frac{dz}{dt}$ afin de ramener le problème à une quadrature, en d'autres termes, il faudrait connaître préalablement la solution complète du problème de Dynamique.–

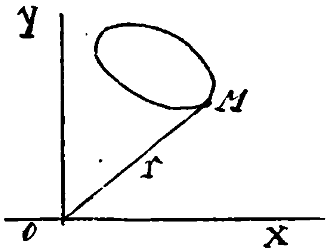
39 - **Fonction des forces.** — Mais il est un cas où le théorème des forces vives est d'une importance capitale. C'est quand la quantité $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ est la différentielle exacte d'une fonction $f(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots)$ des coordonnées des points. Cette fonction s'appelle la fonction des forces.

Les cas où il existe une fonction de ce genre sont évidemment des cas particuliers. Si, par exemple, il n'y a que deux termes $Xdx + Ydy$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction des forces est $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$. Le nombre des conditions est de trois quand il y a trois termes et ce nombre croît très rapidement avec celui des termes.

Mais la fonction des forces paraît exister dans tous les phénomènes naturels; de là l'importance de ce cas particulier.

40 - Lorsqu'un système de forces admet une fonction f et que cette fonction est uniforme, c'est-à-dire bien déterminée, le travail correspondant au passage d'un état $x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, \ldots$ à un autre état $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ est évidemment $f - f_0$. Dès lors, ce travail ne dépend que des états extrêmes du système et est indépendant des états intermédiaires. Si, en particulier, le système revient à son état primitif, on a $f = f_0$ et le travail est nul.

41 - Voici un exemple qui montre que ce dernier résultat pourrait cesser d'être exact, si la fonction des forces était mal déterminée.



Soient M un point mobile dans un plan et $f = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ la fonction des forces. On a

$$X = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{x}{x^2+y^2},$$

et le travail élémentaire est $Xdx + Ydy$

On a d'ailleurs identiquement

$$Xx + Yy = 0, \quad X^2 + Y^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}$$

Donc la force appliquée au point M est perpendiculaire à OM et égale à l'inverse du rayon vecteur.

Supposant que le point M décrive un cycle; il est visible que f n'est autre chose que l'angle polaire MOX du point M. Si donc le contour laisse le point O à l'extérieur du cycle, la fonction des forces reprendra sa valeur primitive quand le point M sera revenu à son point de départ, et le travail sera nul, tandis que si le contour enveloppe l'origine, la fonction aura varié de 2π, et le travail de la force sera lui-même égal à 2π.

42 – Intégrale des forces vives. — Lorsque toutes les forces appliquées appliquées à un Système de points admettent une fonction f, le théorème des forces vives donne la relation

$$\theta - \theta_0 = f - f_0$$

ou

$$\theta \; f = \text{Constante},$$

c'est à dire qu'il fournit une intégrale du problème.

43 – Principe de la Conservation des forces vives. —

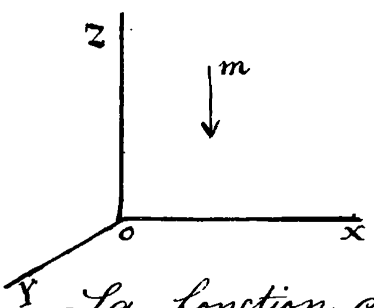
Si, en particulier, le Système revient à son état initial, de sorte que $f = f_0$, la variation de la force vive est nulle; ainsi

La force vive redevient la même toutes les fois que le Système repasse par le même état.

C'est en cela que consiste le principe de la Conservation des forces vives.

44 – On va donner quelques exemples de forces dont on peut évaluer le travail. –

Soit d'abord le Cas de la pesanteur.



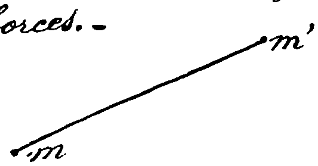
L'axe OZ étant vertical et dirigé de bas en haut, Soient M un point du Système, x, y, z ses coordonnées. La pesanteur donne une force parallèle à OZ et égale à $-mg$ et son travail élémentaire est $-m\,g\,dz$ et pour tous les points $-g\Sigma m\,dz$, ou, en introduisant les coordonnées a, b, c du centre de gravité, $-g\,M\,dc$.

La fonction des forces est ainsi $-gMc$, et on a ce théorème:

Le travail de la pesanteur est égal au produit du poids total par l'abaissement vertical du centre de gravité.

45 – Cas où il existe entre les points des actions mutuelles dirigées suivant les distances et fonctions de ces distances. —

Dans un semblable Système, les forces extérieures admettent une fonction des forces. –



Soit r la distance de deux points m et m', $\varphi(r)$ l'action de m sur m' supposée dirigée dans le sens $m\,m'$.

On a

$$X = \varphi(r)\frac{x'-x}{r} \qquad X' = -\varphi(r)\frac{x'-x}{r}$$

$$Y = \varphi(r)\frac{y'-y}{r} \qquad Y' = -\varphi(r)\frac{y'-y}{r}$$

$$Z = \varphi(r)\frac{z'-z}{r} \qquad Z' = -\varphi(r)\frac{z'-z}{r}$$

Le travail élémentaire dû aux deux forces est donc

$$\frac{\varphi(r)}{r}\left[(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)\right]$$

D'ailleurs

$$r\,dr = (x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)$$

L'expression précédente se réduit ainsi à $-\varphi(r)\,dr$.
Posant

$$\psi(r) = \int \varphi(r)\,dr,$$

on a

$$-\varphi(r) = -d\,\psi(r)$$

Dès lors le travail élémentaire correspondant au déplacement de tous les points du système est $-\Sigma\, d\psi(r)$ ou $-d\,\Sigma\,\psi(r)$, en étendant le signe Σ à toutes les combinaisons deux à deux des points du système.

On voit qu'en posant

$$u = \Sigma\,\psi(r),$$

la fonction des forces est égale à $-u$, puisque sa différentielle représente le travail élémentaire.

Dans le cas particulier où $\varphi(r) = \frac{K}{r^2}$, on a

$$\psi(r) = \int \frac{K}{r^2}\,dr = -\frac{K}{r}$$

et

$$u = \Sigma\frac{K}{r}$$

est la fonction des forces. — On reconnaît le potentiel de l'électricité. —

IV.

46 — Il existe une relation importante entre la force vive d'un système et celle de son mouvement rapporté à des axes de direction constante passant par son centre de gravité.

Cette relation résulte du théorème suivant :

<u>La force vive d'un système est égale à la force vive de la masse entière supposée concentrée à son centre de gravité, plus la force vive de ce système dans son mouvement relatif à son centre de gravité.</u>

Soient en effet :

x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système par rapport à des axes fixes,

x', y', z' les coordonnées du même point par rapport à des axes parallèles menés par le centre de gravité,

a, b, c les coordonnées du centre de gravité.

On a :

$$x = a + x' \qquad y = b + y' \qquad z = c + z'$$

La force vive du système a pour expression

$$\theta = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs :

$$\theta = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \sum m\left[\frac{da}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{dz'}{dt}\right].$$

Désignons par

V la vitesse du centre de gravité,

M la masse du système,

θ' la force vive relative ;

On voit que la première ligne de la valeur de θ se réduit à $\frac{1}{2}mV^2$; la seconde ligne est égale à θ'.

De plus, si l'on observe que l'on a

$$\sum m\frac{dx'}{dt}=0 \quad \sum m\frac{dy'}{dt}=0 \quad \sum m\frac{dz'}{dt}=0.$$

on trouve que la troisième ligne se réduit à zéro. On obtient, par suite, conformément à l'énoncé du théorème :

$$\theta=\frac{1}{2}MV^2+\theta'.$$

Chapitre III.

Mouvement d'un système dans lequel on imagine des liaisons.

47 – On entend par liaisons dans un système des conditions que le système doit nécessairement remplir, et que nous supposerons rentrer dans les trois suivantes :

1° certains points du système restent à des distances invariables les uns des autres.

2° certains points sont obligés de rester sur des courbes ou sur des surfaces, sans éprouver de frottement de la part de ces courbes ou de ces surfaces.

3° Certaines parties du système considérées comme des solides invariables sont assujetties à rester en contact les unes avec les autres, sans qu'il se développe de frottement entre leurs surfaces.

48 – On peut concevoir que les liaisons soient remplacées par des forces capables d'obliger le système à satisfaire aux mêmes conditions.

1° Dans le cas où deux points doivent rester à une distance invariable l'un de l'autre, des forces égales, contraires et d'une intensité convenable appliquées à ces deux points, pourront maintenir l'invariabilité de la distance.

2° Dans le cas où un point est obligé de rester sur une courbe, ou sur une surface, sans frottement, une force égale à la réaction normale de la courbe ou de la surface sur le point peut produire le même effet.

3° Dans le cas où deux parties du système, considérées comme invariables, sont assujetties à rester en contact, sans qu'il y ait de frottement entre leurs surfaces, le même effet pourrait être produit en appliquant aux points qui sont en contact sur les deux surfaces deux forces d'une intensité égale, convenablement choisie, agissant suivant la normale commune et en sens contraires.

49 - En substituant aux liaisons les forces qui peuvent en tenir lieu, on fait rentrer le système dans le cas général des systèmes libres, mais les forces de liaison sont inconnues à priori.

Lagrange a montré comment on pouvait à l'aide du principe du travail virtuel, déterminer les conditions d'équilibre d'un système sans connaître les forces de liaison, et déterminer ensuite ces forces de liaison si on le juge convenable.

D'autre part, il existe un autre principe général (principe de d'Alembert) au moyen duquel toute question de mouvement se ramène immédiatement à une question d'équilibre.

Par suite le principe du travail virtuel et le principe de d'Alembert fournissent la solution complète de l'équilibre et du mouvement des systèmes où l'on imagine des liaisons.

Nous allons rappeler brièvement le principe du travail virtuel, dont la démonstration a été donnée en première année, et établir le principe de d'Alembert.

50 - Principe du travail virtuel.

1° **Définition.** — Soit M un point auquel on applique une force F. Concevons un déplacement élémentaire fictif δs du point M. A ce déplacement correspond un travail élémentaire que l'on appelle travail virtuel et qui a pour expression

$$F.\delta s.\cos(F, \delta s)$$

Désignons par

X, Y, Z les projections de la force F sur trois axes de coordonnées,

$\delta x, \delta y, \delta z$ les projections, sur les mêmes axes, du déplacement virtuel δs.

On établit aisément que le travail virtuel de la force F a aussi pour expression

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Enfin, on sait que le travail de la résultante de forces appliquées à un point, est égal à la somme des travaux de ces forces.

2° Equilibre d'un Système de points libres.

Théorème. — Pour l'équilibre d'un système de points libres, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées soit nulle pour tout déplacement des points d'application.

Soient, en effet, X, Y, Z les projections sur les axes de la résultante des forces appliquées à un point quelconque du système. Si le système est en équilibre, on a : $X=0$ $Y=0$ $Z=0$ et par suite :

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

quels que soient δx, δy, δz.

Inversement, si l'équation ci-dessus est identiquement satisfaite pour des valeurs arbitraires de δx, δy, δz, il en résulte nécessairement $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et par suite, un point quelconque du Système est en équilibre.

3° Equilibre d'un Système à liaisons.

Lemme. — Pour tout système de déplacements virtuels compatible avec les liaisons d'un système de points, le travail virtuel des forces de liaison est nul. (Voir pour la démonstration, les feuilles du Cours de première Année.)

Théorème. — Pour l'équilibre d'un système à liaisons, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels soit nulle, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons.

Supposons le Système en équilibre; soit F l'une des forces appliquées et L l'une des forces de liaison. Si l'on considère ces dernières forces comme appliquées au système, celui-ci peut être considéré comme libre, et on a pour tout déplacement virtuel

$$\sum \mathcal{C} F + \sum \mathcal{C} L = 0.$$

Si on ne considère que des déplacements compatibles avec les liaisons, le second terme est nul d'après le lemme, et on a $\sum \mathcal{C} F = 0$. La condition est donc nécessaire.

Elle est, de plus suffisante. En effet, si cette condition remplie, il n'y avait pas équilibre, certains points prendraient des déplacements compatibles avec les liaisons. On pourrait alors rétablir l'équilibre en appliquant à ces points des forces tendant à produire des déplacements inverses. Soit Q l'une de ces forces additionnelles. L'équilibre ayant lieu par l'action des forces F et Q, l'on aurait, pour tout déplacement compatible avec les liaisons

$$\sum \mathcal{C} F + \sum \mathcal{C} Q = 0.$$

Mais $\sum \mathcal{C} F = 0$, donc $\sum \mathcal{C} Q = 0$. Or, choisissons pour déplacement virtuel du système le déplacement effectif qu'il aurait pris sous l'action des forces F seules. Le déplacement est alors, pour chaque point d'application d'une force Q en sens inverse de la direction de cette force ; le travail de chaque force Q est donc négatif, et la somme $\sum \mathcal{C} Q$ est aussi négative ; ce qui est absurde, puisqu'il a été démontré qu'elle est nulle. Donc, il y a équilibre.

51 — Principe de d'Alembert.

1° Définitions. — a) forces effectives. — Quand un système soumis à des liaisons se meut sous l'action de forces quelconques, on appelle force effective pour un point quelconque du système, la force qu'il faudrait appliquer à ce point supposé libre pour produire le mouvement qu'il a effectivement.

Quand il n'y a pas de liaisons, la force effective se réduit, pour chaque point du système, à la résultante des forces appliquées à ce point. Quand il y a des liaisons, l'effet de ces liaisons peut être remplacé, pour le point considéré par une force convenablement déterminée, et la force effective s'obtient en composant cette force par la résultante des forces appliquées.

Dans tous les cas, la force effective relative à un point du système est dirigée suivant l'accélération du mouvement de ce point, et sa valeur est égale au produit de cette accélération par la masse du mobile.

b) — forces d'inertie. — On désigne sous le nom de force d'inertie d'un point en mouvement une force égale et contraire à celle qui devrait agir sur ce point supposé libre pour lui faire prendre le mouvement qu'il possède.

La force d'inertie est donc égale et contraire à la force effective.

Il importe de se rappeler que la force d'inertie n'agit pas sur le point considéré ; mais elle représente en grandeur et en direction la réaction que subirait un point extérieur tellement lié au point mobile considéré que, par le seul effet de la liaison, celui-ci fut obligé de prendre le mouvement qu'il a réellement.

2e Théorème. — Considérons un système à liaisons se mouvant sous l'action de forces quelconques.

Soient, pour un point quelconque,

F la résultante des forces appliquées,
L la force tenant lieu des liaisons,
P la force effective.

P est la résultante de F et L.

Soit, maintenant, Q la force d'inertie. Q est, par définition, égale et contraire à P. Donc Q, F et L sont en équilibre.

Il en est de même pour tout autre point du système.

On en conclut cet énoncé : Quand un système quelconque de points, est en mouvement, il y a équilibre à chaque instant, au moyen des liaisons, entre les forces d'équilibre et les forces d'inertie.

Cet énoncé constitue le principe de d'Alembert.

52 — Voici maintenant comment on peut déduire de ce principe les équations du mouvement d'un système quelconque de points.

Soient, m la masse ; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système ; X, Y, Z les composantes des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui sont appliquées à ce point.

Les composantes, pour ce point, de la force d'inertie, sont

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad -m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Si l'on exprime alors, à l'aide du principe du travail virtuel, qu'il y a équilibre entre les forces X, Y, Z et les forces d'inertie, on obtient l'équation suivante qui doit être regardée comme l'équation fondamentale de la Dynamique.

$$(7). \qquad \Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0.$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ représentent dans cette équation, les projections sur les axes, du déplacement virtuel du point x, y, z.

Il importe de se rappeler que les variations δx, δy, δz ne sont pas quelconques, les déplacements dont les variations sont les projections, devant être essentiellement compatibles avec les liaisons du système.

53 — Supposons que les liaisons puissent être exprimées par K équations entre les $3n$ coordonnées des points et le temps t :

$$(8). \qquad f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, f_K = 0$$

Les δx, δy, δz devant satisfaire aux équations différentielles de liaison, à l'époque t, on a les K relations :

$$(9). \qquad \begin{array}{l} \Sigma \left[\dfrac{df_1}{dx} \delta x + \dfrac{df_1}{dy} \delta y + \dfrac{df_1}{dz} \delta z \right] = 0 \\ \Sigma \left[\dfrac{df_2}{dx} \delta x + \dfrac{df_2}{dy} \delta y + \dfrac{df_2}{dz} \delta z \right] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Des équations (9), au nombre de K, on peut tirer les valeurs de K variations en fonction des $3n-K$ autres, et porter ces valeurs dans l'équation (7) ; ces $3nK$ variations étant arbitraires, on devra égaler leurs coefficients à zéro.

On obtiendra ainsi $3n-K$ équations, et en y adjoignant les K équations (8), on a définitivement $3n$ équations différentielles, auxquelles doivent satisfaire les $3n$ coordonnées des points du système. Ces équations sont celles du mouvement de ce système.

54 — Méthode des multiplicateurs. — On peut faire l'élimination des variations par la méthode des multiplicateurs. (Lagrange).

A cet effet, multiplions les équations (9) respectivement par λ_1, λ_2, . . . λ_{12}, et ajoutons, membre à membre, les résultats ainsi obtenus avec l'équation (7). Il vient

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \left[\left(X + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dx} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_K \dfrac{df_K}{dx} - m \dfrac{d^2x}{dt^2} \right] \delta x \right. \\ + \Sigma \left[Y + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dy} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_K \dfrac{df_K}{dy} - m \dfrac{d^2y}{dt^2} \right] \delta y \\ + \Sigma \left[Z + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dz} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dz} + \ldots\ldots + \lambda_K \dfrac{df_K}{dz} - m \dfrac{d^2z}{dt^2} \right] \delta z \end{array} \right\} = 0.$$

On peut profiter de l'indétermination des K multiplicateurs λ pour annuler les Coefficients de K des 3 n variations qui entrent dans cette équation. Il reste alors 3 n - K variations, et ces variations étant arbitraires, leurs coefficients doivent être nuls. En résumé, on est ainsi conduit à annuler les 3 n coefficient de l'équation précédente. Il en résulte un système de 3 n équations, dont trois quelconques peuvent s'écrire :

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dx} \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{df_1}{dy} + \lambda_2 \frac{df_2}{dy} + \cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dy} \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{df_1}{dz} + \lambda_2 \frac{df_2}{dz} + \cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dz}
\end{aligned}
$$

On a de plus les K équations de liaison

$$(11) \qquad f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \;\cdots\cdots\; f_K = 0$$

soit en tout, 3 n + K équations auxquelles doivent satisfaire les 3 n + K inconnues constituées par les 3 n coordonnées et les K multiplicateurs λ.

Il est remarquable que cette méthode donne les forces de liaison. En effet, les équations (10) sont celles d'un point libre pour lequel on adjoindrait à la force directement appliquée (X, Y, Z) une force ayant pour composantes suivant les axes :

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dx} \\
&\lambda_1 \frac{df_1}{dy} + \lambda_2 \frac{df_2}{dy} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dy} \\
&\lambda_1 \frac{df_1}{dz} + \lambda_2 \frac{df_2}{dz} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_K \frac{df_K}{dz}
\end{aligned}
$$

Ces expressions sont donc les composantes de la force totale de liaison qui agit sur le point x, y, z.

Les termes $\lambda_1 \frac{df_1}{dx}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dy}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dz}$ représentent les Composantes de la force de liaison qui agit sur le point considéré par suite de la liaison f_1; et de même pour les termes suivants qui représentent particulièrement les forces qui émanent de toutes les liaisons.

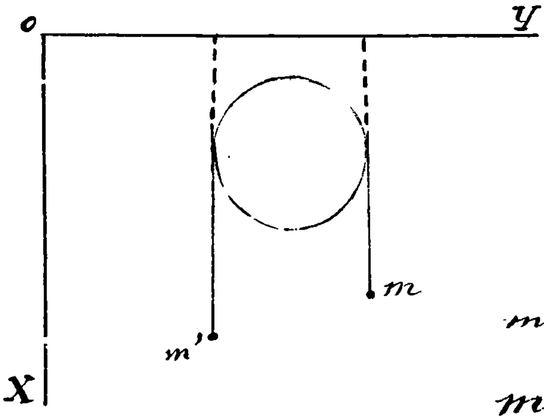
V.

55 — Applications du principe de d'Alembert.

Pour le premier des problèmes qui suivent, on obtient la solution en écrivant immédiatement d'après la règle précédemment établie, le système des équations que fournit la méthode des multiplicateurs.

Pour les deux autres problèmes, on parvient directement aux équations du mouvement en exprimant que la somme des travaux virtuels des forces appliquées et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

1er Problème. — Mouvement de deux masses pesantes suspendues aux extrémités d'un fil qui s'enroule sur la demi-section droite d'un cylindre horizontal. — On néglige le frottement et la masse du fil.



Soient m m' les deux masses supposées réduites à des points.

Désignons par x, x' les abcisses de ces points qui sont les extrémités du fil, estimées suivant un axe vertical OX dirigé dans le sens de la pesanteur.

Les équations de la méthode des multiplicateurs sont, dans ce cas particulier :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg + \lambda$$

$$(12). \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g + \lambda$$

$$x + x' = a$$

La troisième de ces équations où a désigne une constante, exprime la liaison des deux points.

Le facteur λ représente la force de liaison, c'est-à-dire la tension du fil.

En résumé, on a trois équations auxquelles doivent satisfaire x, x' et λ. En éliminant x' et λ, il vient

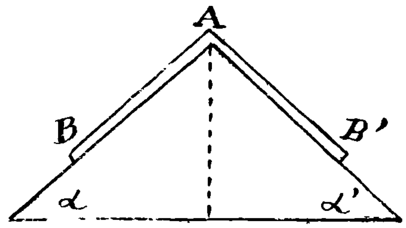
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m-m'}{m+m'}g$$

Cette valeur montre que l'accélération du point m est constante, le mouvement de ce point est uniformément varié.

Enfin, en portant la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ dans la première équation (12), on trouve pour la tension du fil

$$\lambda = -\frac{2mm'}{m+m'}\, g.$$

2e Problème. — Chaîne homogène pesante glissant, sans frottement ni résistance due à la raideur suivant les lignes de la plus grande pente de deux plans inclinés adossés.



Désignons par

α, α' les inclinaisons des deux plans sur l'horizon

x, x' les longueurs des parties AB et AB' de la chaîne,

l la longueur totale de la chaîne

ρ la masse de l'unité de longueur de la chaîne;

Considérons la partie AB; sa masse et son poids sont respectivement ρx et $\rho g x$. Imaginons qu'on lui imprime une translation virtuelle suivant la ligne de plus grande pente du plan et cherchons le travail correspondant des forces appliquées et des forces d'inertie.

Pour chaque élément de AB, la force appliquée se réduit à la pesanteur; le travail pour l'ensemble des éléments, s'obtient en multipliant le poids total $\rho g x$ par l'abaissement vertical du centre de gravité égal à $\sin\alpha\, \delta x$.

La force d'inertie d'un élément de AB est égale au produit de la masse de cet élément par $-\frac{d^2x}{dt^2}$; elle est dirigée suivant la ligne de plus grande pente, et en la multipliant par δx, on a le travail virtuel correspondant. Par suite, pour la partie AB, le travail des forces d'inertie est $-\rho x \frac{d^2x}{dt^2}\, \delta x$.

En résumé, le travail virtuel des forces appliquées et des forces d'inertie est, pour AB

$$\rho\left(g x \sin\alpha - x\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x$$

On a une expression analogue

$$\rho\left(g x' \sin\alpha' - x'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'$$

pour le travail des forces appliquées et des forces d'inertie correspondant à une translation virtuelle de $\delta x'$ de AB', suivant la ligne de plus grande pente du second plan.

Par suite, le principe de d'Alembert donne pour la chaîne entière en supprimant le facteur commun f

$$(13)\qquad \left(gx\sin\alpha - x\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(gx'\sin\alpha' - x'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

et cette équation doit avoir lieu pour tout déplacement du système compatible avec les liaisons des deux parties de la chaîne exprimée par l'équation de condition

$$x + x' = l$$

On tire de cette équation :

$$\delta x' = -\delta x, \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad x' = l - x$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (13), celle-ci devient :

$$(14)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g(\sin\alpha + \sin\alpha')}{l}\,x = -g\sin\alpha'$$

L'intégrale générale de l'équation (14) est :

$$x = \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'} + Ae^{at} + Be^{-at}$$

en posant :

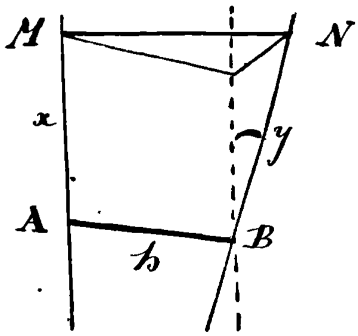
$$a^2 = \frac{g(\sin\alpha + \sin\alpha')}{l}$$

Les constantes A et B se détermineront par l'état initial. On trouvera en faisant $t = 0$,

$$x_0 = \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'} + A + B \qquad v_0 = a(A - B)$$

d'où l'on tirera A, B, si x_0 et v_0 sont donnés.

3e Problème. — Mouvement de deux points assujettis à rester sur deux droites fixes et exerçant l'un sur l'autre une action dirigée suivant leur distance et fonction de cette distance.



Désignons par

- m, n les masses des points M et N,
- h la plus courte distance AB des deux droites fixes,
- x, y les distances MA et NB,
- θ l'angle des droites,
- r la distance M et N,
- $\varphi(r)$ l'action mutuelle des deux points.

Menons BP parallèle à AM et MP parallèle à AB. On établit aisément à l'aide de la figure, l'équation résultant de la liaison. Cette équation est la suivante :

$$(15)\qquad r^2 = b^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta .$$

Le travail virtuel de l'action mutuelle des deux points est $-\varphi(r)\delta r$; le travail des forces d'inertie est

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - n\frac{d^2y}{dt^2}\delta y .$$

On doit donc avoir, pour tout déplacement virtuel compatible avec la liaison,

$$(16)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + n\frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \varphi(r)\,\delta r = 0$$

Or, on tire de (15)

$$r\delta r = (x - y\cos\theta)\,\delta x + (y - x\cos\theta)\,\delta y$$

Substituant à δr sa valeur, dans l'équation (16), et égalant à zéro les coefficients de δx et δy, on a les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\varphi(r)}{r}(x - y\cos\theta) = 0$$

$$n\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\varphi(r)}{r}(y - x\cos\theta) = 0.$$

Soit en particulier, $\varphi(r) = Kr$. Les équations ci-dessus deviennent

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + K(x - y\cos\theta) = 0$$

$$n\frac{d^2y}{dt^2} + K(y - x\cos\theta) = 0$$

et elles sont intégrables à l'aide de la méthode exposée dans la première leçon (N° 8).

56 — Application du principe de d'Alembert aux systèmes de points libres. — L'équation

$$(17)\qquad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

qui est l'expression analytique du principe de d'Alembert et du principe du travail virtuel, peut être considérée comme la formule générale de la Dynamique.

Elle doit renfermer, comme cas particuliers, les théorèmes que nous avons établis pour un système de points libres.

Soit un système de n points libres ; la relation (17) renferme alors $3n$ variations δx, δy, δz complètement arbitraires et elle équivaut par suite aux $3n$ équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

que l'on pouvait écrire immédiatement. Dans ce cas, le théorème de d'Alembert ne présente aucune utilité réelle, et c'est pour ce motif que la démonstration de ce théorème n'a été présentée que dans l'étude des systèmes à liaisons.

On peut toutefois déduire très-simplement de l'équation (17) les trois groupes d'équations qui ont servi à établir les théorèmes généraux relatifs au mouvement des systèmes libres.

1° Prenons pour mouvement virtuel du système une translation élémentaire, parallèle à l'axe des x, ce qui revient à prendre les δx égaux entre eux et les δy et δz égaux à zéro ; l'équation (17) devient

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$$

ou

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X$$

Cette équation est la première du groupe (1) d'où résulte le théorème des quantités de mouvement projetées (ou du mouvement du centre de gravité).

2° Donnons au système un mouvement virtuel de rotation autour de l'axe des x ; c'est-à-dire, posons (x)

$$\delta x = 0 \qquad \delta y = -z\,\delta\theta \qquad \delta z = y\,\delta\theta$$

$\delta\theta$ désignant le déplacement angulaire. Nous trouverons

$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum\left(yZ - zY\right)$ et cette équation est la première du groupe (2) qui a servi à établir le théorème des moments des quantités de mouvement (ou des aires).

3° Enfin, dans l'équation (17), prenons les déplacements δx, δy, δz égaux aux déplacements dx, dy, dz effectifs du système pendant le temps dt, il vient alors

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

et cette équation est celle d'où résulte le <u>théorème des forces vives.</u>

57 - <u>Extension des théorèmes généraux au cas des systèmes dans lesquels on imagine des liaisons.</u>

(x) Si l'on pose $x = \text{const.}$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, et si l'on suppose que r reste constant, le système ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe des x ; alors on aura

$$\delta x = 0 \qquad \delta y = r\sin\theta\,\delta\theta \qquad \delta z = r\cos\theta\,\delta\theta$$

c'est-à-dire

$$\delta x = 0 \qquad \delta y = -z\,\delta\theta \qquad \delta z = y\,\delta\theta$$

Si l'on remplace les liaisons par des forces capables d'en tenir lieu, le système peut être traité comme un système libre et, par suite, les théorèmes généraux peuvent lui être appliqués. Il reste à voir quel est le rôle que jouent alors ces forces que l'on a substituées aux liaisons et qui ne sont pas connues à priori.

Dans le théorème des projections des quantités de mouvement (ou du mouvement du centre de gravité), ainsi que dans le théorème des moments des quantités de mouvement (ou des aires) les forces extérieures du système disparaissent d'elles-mêmes. Il s'en suit que toutes les forces de liaison qui sont des forces intérieures disparaissent également dans ces théorèmes en sorte que l'on peut en faire abstraction sans qu'il en résulte aucune erreur.

Ainsi toutes les fois qu'on suppose que certains points du système sont assujettis à rester à des distances invariables les uns des autres, ou bien que certaines parties du système, considérées comme des solides invariables, sont assujetties à rester en contact les unes avec les autres, sans frottement, on peut appliquer les théorèmes des projections et des moments des quantités de mouvement.

Mais il n'en serait plus de même si l'on supposait que certains points sont obligés de rester sur des courbes ou sur des surfaces : les forces qui peuvent remplacer les courbes et les surfaces dont il s'agit, sont des forces extérieures et elles doivent être prises en considération.

Quant au théorème des forces vives, il est applicable au système, quand il est permis de remplacer, dans l'équation (17) les déplacements virtuels δx, δy, δz par les déplacements effectifs dx, dy, dz ; c'est-à-dire quand le mouvement dont le système est animé pendant un temps infiniment petit dt, à partir d'un instant quelconque t, est compatible avec les liaisons du système à cet instant.

Cette condition n'est pas toujours réalisée. En effet, pour qu'un déplacement élémentaire désigné par δ soit compatible avec les liaisons à une époque t, il faut que l'une quelconque $f = 0$ des équations de liaison soit satisfaite quand on y change x, y, z en $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, la valeur de t étant considérée comme une constante. On doit donc avoir $\delta f = 0$, c'est-à-dire

$$\sum \left(\frac{\delta f}{dx} dx + \frac{\delta f}{dy} dy + \frac{\delta f}{dz} dz \right) = 0.$$

Si maintenant on désigne par d le déplacement effectif que prend le système dans le temps dt, l'équation $f = 0$ devra être encore satisfaite quand on change t en $t + dt$, x en $x + dx$, y en $y + dy$ .... de sorte que l'on a $df = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dt} dt + \sum \left(\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz \right) = 0.$$

δx, δy, δz et dx, dy, dz ne satisfont donc pas en général aux mêmes équations et l'on ne pourra prendre $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$ que si l'on a

$$\frac{df_1}{dt} = 0 . \quad \frac{df_2}{dt} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

c'est-à-dire que si aucune des équations de liaison ne renferme le temps d'une manière explicite.

Quand il en est ainsi, le théorème des forces vives s'applique à un système à liaisons comme à un système libre, en tenant compte des forces appliquées tant intérieures qu'extérieures, et sans avoir égard aux forces de liaison.

Comme exemple d'équations de liaisons renfermant explicitement le temps, on peut citer celles qui exprimeraient que certains points sont assujettis à rester sur des lignes ou des surfaces qui changent à chaque instant de forme ou de position.

VI.

Chapitre IV.

Percussions.

58 - On appelle percussion une force agissant avec une grande intensité pendant un temps très court, de manière à imprimer à son point d'application une vitesse finie. Nous admettrons, que pendant l'action d'une percussion, son point d'application n'éprouve qu'un déplacement insensible et négligeable.

Un exemple simple montre que ces hypothèses sont conciliables.

L'expression $F = A\frac{t}{\theta}$ représente une force croissant uniformément de 0 à A lorsque t varie de 0 à θ. Supposons que cette force de direction constante soit appliquée à un point au repos. La quantité de mouvement acquise après le temps θ est

$$mv = \int_0^\theta F dt = \frac{1}{2} A\theta$$

on conçoit que A soit très-grand et θ très-petit de manière que $A\theta$ ait une valeur finie quelconque.

L'espace parcouru dans le même temps est donné par la relation

$$me = \frac{1}{6} A\theta^2$$

et il est par suite très-petit.

59 - Calcul de l'effet produit par des percussions sur un système quelconque. — Considérons l'équation générale qui résulte de l'application du principe de d'Alembert à un système quelconque.

$$\Sigma \cdot \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right] = 0.$$

Soit θ la durée totale de l'action des percussions, dont les unes peuvent cesser avant les autres.

Si d'autres forces sont appliquées en même temps au système, on peut les négliger car elles sont infiniment petites par rapport aux percussions. De plus, pendant le temps θ, on peut considérer comme constantes les coordonnées x, y, z de l'un quelconque des points d'application.

L'équation précédente ayant lieu à un instant quelconque, on peut la multiplier par dt et intégrer entre les limites $t=0$ et $t=\theta$.

Les δx, δy, δz peuvent être considérés comme des facteurs invariables pendant la durée θ. En effet, ces variations satisfont aux équations différentielles imposées par les liaisons, équations dont les coefficients ne dépendent que des coordonnées et du temps. Ces variables ne changeant qu'infiniment peu, dans l'intervalle de temps que l'on considère, les variations non indépendantes ne peuvent changer que de quantités infiniment petites par rapport à elles mêmes et doivent par conséquent être considérées comme des constantes.

Intégrons maintenant et désignons par $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$, $\Delta\frac{dz}{dt}$ les intégrales de $\frac{d^2x}{dt^2}dt$, $\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\frac{d^2z}{dt^2}dt$ qui sont les accroissements de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ quand t varie de 0 à θ, nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\Sigma\left[\left(\int_0^\theta X\,dt-\Delta m\frac{dx}{dt}\right)\delta x+\left(\int_0^\theta Y\,dt-\Delta m\frac{dy}{dt}\right)\delta y+\left(\int_0^\theta Z\,dt-\Delta m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right]=0$$

Cette équation jointe aux relations résultant des liaisons

$$\begin{cases}\Sigma\left(\frac{df_1}{dx}\delta x+\frac{df_1}{dy}\delta y+\frac{df_1}{dz}\delta z\right)=0\\ \Sigma\left(\frac{df_2}{dx}\delta x+\frac{df_2}{dy}\delta y+\frac{df_2}{dz}\delta z\right)=0\\ \text{- - - - - - - - - - - - -}\end{cases}$$

permet de calculer les Δ; il suffit d'éliminer K variations δ et d'annuler les coefficients des $3n-K$ autres.

Les équations précédentes sont principalement celles qui exprimeraient l'équilibre, sur le système considéré, de deux systèmes de forces dont les composantes seraient

$$\int_0^\theta X\,dt \qquad \int_0^\theta Y\,dt \qquad \int_0^\theta Z\,dt$$

et

$$-\Delta m\frac{dx}{dt} \qquad -\Delta m\frac{dy}{dt} \qquad -\Delta m\frac{dz}{dt}$$

pour l'un des points du système. On en conclut cet énoncé:

Théorème. — <u>Quand un système est soumis à des percussions, il y a équilibre, en vertu des liaisons du système, entre les impulsions totales des percussions et les accroissements des quantités de mouvement pris en sens contraire.</u>

60 — Les accroissements des quantités de mouvement pris en sens contraire représentent les impulsions des forces d'inertie ; on voit donc que tous les théorèmes relatifs aux forces ordinaires, se transforment dans le cas des percussions, en remplaçant les forces par les impulsions totales de ces forces relatives à la durée des percussions.

C'est par suite de cette circonstance que l'on considère l'impulsion

$$P = \int_0^\theta F\,dt$$

d'une percussion F comme mesurant l'intensité de cette percussion. Souvent même on dit percussion au lieu d'impulsion de la percussion ; cette dénomination ne présente aucun inconvénient quand elle est bien comprise, mais il importe de se rappeler que le terme percussion cesse alors de désigner une force. Il n'y a même pas homogénéité entre ces deux sortes de quantités, puisque la percussion se mesure par une impulsion totale dont l'élément est le produit d'une force par un temps.

De même, quand une masse m se met en mouvement avec une vitesse v sous l'action d'une force agissant pendant un temps inappréciable la quantité de mouvement $m\,v$ peut servir de mesure à la percussion subie par le corps ; mais en fait cette quantité de mouvement ne représente que l'impulsion totale de la force. Quant à la force elle-même, tout ce qu'on peut en conclure, c'est sa valeur moyenne, quand on connaît la durée de son action.

Chapitre V.

Sur l'équilibre des systèmes matériels.

61 — Les théorèmes suivants sont relatifs aux systèmes assujettis à des liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces qui admettent une fonction.

Théorème I — Tout état du système pour lequel la fonction des forces est un maximum ou un minimum est un état d'équilibre.

Soient $F(x, y, z, \ldots)$. la fonction des forces, et

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \;\ldots\ldots\; f_K = 0$$

les équations de liaison.

Si un système de valeurs $x, y, z \ldots$ rend F un maximum ou un minimum, on a d'après la règle analytique connue

$$dF = 0$$

et on a aussi, d'après les équations de liaison :

$$df_1 = 0 \qquad df_2 = 0 \ldots\ldots df_K = 0.$$

On obtient ainsi les équations suivantes auxquelles doivent satisfaire les variations des coordonnées :

$$\Sigma\left[\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz\right] = 0$$

$$\Sigma\left[\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz\right] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma\left[\frac{df_K}{dx}dx + \frac{df_K}{dy}dy + \frac{df_K}{dz}dz\right] = 0.$$

Or, ces équations sont précisément celles que l'on obtiendrait en exprimant que le travail élémentaire des forces appliquées au système est nul pour tout déplacement compatible avec les liaisons ; elles expriment donc l'équilibre du système.

62 - Théorème II. — Tout état du système pour lequel la fonction des forces est un maximum est un état d'équilibre stable.

(Théorème de Dirichlet).

Un état d'équilibre est dit stable lorsque, le système étant très-peu dérangé de la position d'équilibre et abandonné à l'action des forces après que l'on a imprimé à ses points des vitesses très-petites, les déplacements restent à une époque quelconque, inférieurs à des limites très-petites données.

Désignons par a, b, c les coordonnées d'un point quelconque dans l'état d'équilibre et par α, β, γ les accroissements de ces coordonnées pour une position quelconque du système. Pour cette position, la valeur de la fonction des forces peut être mise sous la forme :

$$F(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, \ldots\ldots) = F(a, b, c, \ldots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

et par hypothèse, $F(a, b, c, \ldots)$ est un maximum.

Par suite de sa définition, la fonction φ jouit des propriétés suivantes:
1° elle tend vers zéro avec $\alpha, \beta, \gamma \dots$
2° elle reste positive lorsque $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ne dépassent pas, en valeur absolue, des limites $l, m, n \dots$ aussi petites que l'on voudra.

Cela posé, écartons le système de sa position d'équilibre, de manière que les coordonnées d'un point $a+\alpha_0$, $b+\beta_0$, $c+\gamma_0 \dots$, et que la fonction des forces ait pour valeur

$$F(a, b, c \dots) - \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots)$$

de plus donnons à tous les points des vitesses très-petites et soit θ_0 la force vive du système.

Après un certain temps, le système a pris une force vive θ, la fonction des forces est

$$F(a, b, c \dots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

et l'on a, d'après le théorème des forces vives

$$\theta = \theta_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

Désignons maintenant par $\mathbf{A}$ la plus petite valeur que puisse prendre la fonction φ lorsque, l'une au moins des variables $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ayant l'une des deux valeurs qu'elle ne peut dépasser, les autres varient d'une façon quelconque entre les limites qui leur ont été assignées. Disposons enfin de l'état initial de manière que l'on ait

$$\theta_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) < \mathbf{A}$$

Il en résulte que $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ne pourront pas dépasser l, m, n en valeur absolue, car s'il en était ainsi, une ou plusieurs des variables atteindraient leurs valeurs limités, et $\varphi(\alpha, \beta\, \gamma, \dots)$ devenant alors supérieur ou au moins égale à $\mathbf{A}$, la valeur précédente de θ serait négative, ce qui est impossible.

L'état initial peut donc être réglé de manière que les déplacements ne dépassent pas des limites très-petites données, et par suite, l'équilibre est stable.

VII.

Deuxième partie.

Dynamique des solides invariables.

Chapitre premier.

Théorie des moments d'inertie.

63 – Définition. – Représentant par m la masse de l'un des points matériels qui composent un corps solide et par r la distance de ce point à une droite fixe, on appelle moment d'inertie du corps solide par rapport à la droite la quantité $\Sigma m r^2$. – C'est en cherchant la longueur du pendule composé synchrone d'un pendule simple qu'Huyghens a été amené à considérer cet élément.

Prenant la droite pour axe des z, soit ρ la densité du parallélipipède élémentaire construit en un point x, y, z du corps; le moment d'inertie I sera représenté par l'intégrale triple

$$I = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2)$$

étendue à tout le corps.

On peut poser

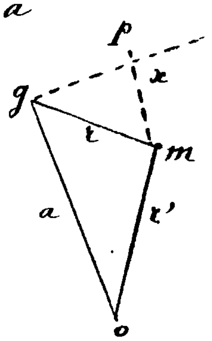
$$I = M K^2,$$

M étant la masse totale du corps. La longueur K prend le nom de rayon de giration du solide par rapport à Oz. C'est la distance à laquelle il faudrait supposer concentrée toute la masse du solide pour que le moment d'inertie restât le même.

I. Propriétés des moments d'inertie.

64 – Relation entre les moments d'inertie pris par rapport à une droite et à une parallèle à la première menée par le centre de gravité.

Le plan de la figure étant perpendiculaire aux droites considérées, soient O le premier axe et g le second, m la projection d'un point du corps. On a



$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \widehat{mgo}$$

$$mr'^2 = mr^2 + ma^2 - 2amr \cos \widehat{mgo}$$

$$I_o = I_g + \Sigma ma^2 - 2a \Sigma mr \cos \widehat{mgo}$$

Menant par l'axe g un plan perpendiculaire à Og et désignant par x la distance mp du point m à ce plan, on a

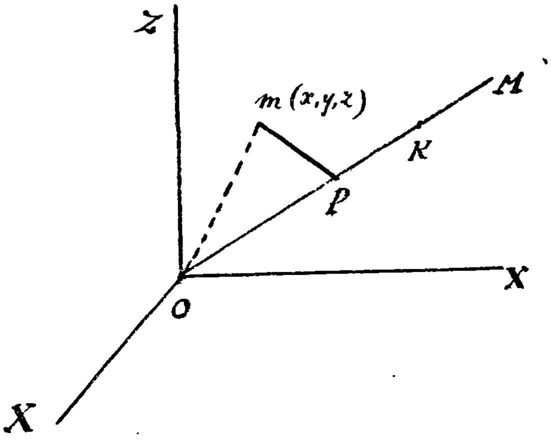
$$x = r \cos \widehat{mgo},$$

$$\Sigma mr \cos \widehat{mgo} = \Sigma mx$$

Or, le second membre est nul puisque l'axe g passe par le centre de gravité du corps. Ainsi

$$(1) \qquad I_o = I_g + Ma^2$$

65 - Soient OM un axe dont les cosinus directeurs sont α, β, γ.



Représentant par A, B, C, les moments d'inertie d'un solide pris par rapport aux trois axes, et par I le moment cherché, il est clair que

$$I = \Sigma m . \overline{mP}^2,$$

$$\overline{mP}^2 = \overline{Om}^2 - \overline{OP}^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

Ou, en vertu de l'identité de Lagrange

$$\overline{mP}^2 = (\beta x - \alpha y)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2$$

$$\overline{mP}^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx.$$

Multipliant par m et faisant la somme étendue à tous les points du corps

$$(2)\quad I = \alpha^2 A_1 + \beta^2 B_1 + \gamma^2 C_1 - 2\alpha\beta \sum m\,xy - 2\beta\gamma \sum m\,yz - 2\gamma\alpha \sum m\,zx.$$

Les quantités $\sum m\,xy$, $\sum m\,yz$, $\sum m\,zx$ sont, comme A_1, B_1, C_1, des constantes dépendant de la nature du corps, de sorte que le moment d'inertie I se trouve exprimé en fonction des cosinus directeurs de l'axe.

66 – **Ellipsoïde central ou d'inertie.** — Si l'on porte sur OM une longueur $OK = \dfrac{1}{\sqrt{I}}$, il est clair que lorsqu'on fait varier la direction de l'axe, le point K décrit une surface. Les coordonnées de ce point sont

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

En tirant de ces équations les valeurs de α, β, γ pour les porter dans l'équation (2), on trouve

$$A_1 X^2 + B_1 Y^2 + C_1 Z^2 - 2YZ \sum m\,yz - 2ZX \sum m\,zx - 2XY \sum m\,xy = 1.$$

Cette équation représente une surface du second ordre ayant l'origine pour centre. D'ailleurs la quantité $I = \sum m r^2$ n'est jamais nulle, excepté dans le cas où le corps se réduit à une droite passant par l'origine. Ainsi, sauf ce cas d'exception, la surface n'a pas de points à l'infini, de sorte que c'est un ellipsoïde. On l'appelle _ellipsoïde central_ ou _ellipsoïde d'inertie relatif au point O_.

Quand on prend pour axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O, l'équation prend la forme

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\sum m\,xy = \sum m\,yz = \sum m\,xz = 0.$$

Le moment I par rapport à une droite ayant α, β, γ pour cosinus directeurs devient alors

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

67 - Axes principaux d'inertie. — On appelle axes principaux d'inertie en un point les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point.

Une droite sera axe principal d'inertie relatif à l'un de ses points tel que O, si prenant le point O pour origine et la droite pour axe des z, on a les relations

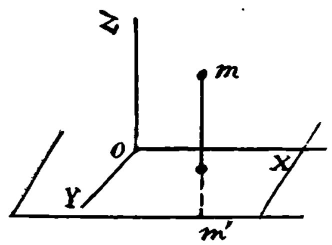
$$\sum mxz = 0 \quad \sum myz = 0,$$

car l'équation de l'ellipsoïde d'inertie se réduit à

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy = 0$$

de sorte que la droite Oz est un axe de cette surface.

Théorèmes. — I. Si un corps a un plan de symétrie, une normale à ce plan est axe principal d'inertie par rapport à son pied dans le plan.



Prenant en effet la droite pour axe des z et deux droites quelconques OX et OY dans le plan de symétrie ; il est clair qu'à chaque point tel que $m(x, y, z)$ correspond de l'autre côté du plan, un point $m'(x, y - z)$ de même masse.

Il en résulte que l'on a

$$\sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0$$

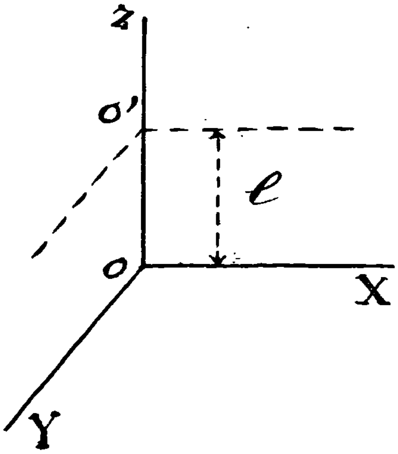
de sorte que Oz est axe principal d'inertie relativement au point O.

II. Si un corps a un axe de symétrie, celui-ci est axe principal d'inertie par rapport à un quelconque de ses points. Prenant encore la droite pour axe des z et un plan perpendiculaire quelconque pour plan des x, y, à un point quelconque de masse m ayant pour coordonnées x, y, z, correspond un autre point de même masse, ayant pour coordonnées $-x, -y$ et z.

On a donc encore

$$\sum mdz = 0, \quad \sum myz = 0.$$

68 - Condition pour qu'une droite soit axe principal d'inertie par rapport à l'un de ses points. - Prenant la droite pour axe des Z, soit O' le point par rapport auquel la droite est axe principal.



Si l'on désigne par l la distance OO', il est clair que l'on doit avoir

$$\sum m x(z-l)=0, \quad \sum m y(z-l)=0$$

ou

$$\sum m x z = l \sum m x = l M a$$

$$\sum m y z = l \sum m y = l M b,$$

en désignant par a, b, c les coordonnées du centre de gravité.

La condition cherchée résulte de l'élimination de l, puisque le point O' est arbitraire ; cette condition est donc

$$\frac{\sum m x z}{\sum m y z} = \frac{a}{b}.$$

Si le centre de gravité est dans le plan XOZ, elle se réduit à $\sum m y z = 0$.

69 - Condition pour qu'une droite soit axe principal par rapport à deux de ses points. Prenant cette droite pour axe des Z et supposant qu'elle soit axe principal par rapport à l'origine, on a

$$\sum m x z = 0, \quad \sum m y z = 0$$

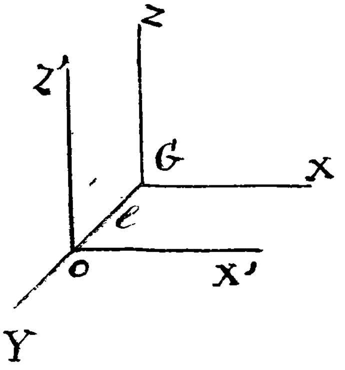
Pour qu'elle soit axe principal par rapport à un autre de ses points, tel que O' on doit avoir

$$\sum m x z = l M a = 0$$

$$\sum m y z = l M b = 0$$

On doit donc avoir $a=0$, $b=0$, de sorte que le centre de gravité se trouve sur la droite ; d'ailleurs la condition a lieu quel que soit l. Ainsi : **Quand une droite passant par le centre de gravité est axe principal par rapport à l'un de ses points, elle l'est aussi pour tous les autres.**

On déduit de ce qui précède que si, par un point de l'un des axes principaux relatifs au centre de gravité, on mène des parallèles aux deux autres axes, on obtient les trois axes principaux relatifs au nouveau point considéré.



Soient en effet GX, GY, GZ les trois axes principaux relatifs au centre de gravité et O un point pris sur OY, OX et OZ' deux parallèles à GX et GZ, OY est axe principal pour le point O et OZ' l'est aussi car le changement des axes GX, GY, GZ dans OX', OY, OZ' n'augmente la quantité $\Sigma m y z$ que du terme $\Sigma m l z$ qui est nul d'après la propriété du centre de gravité.

II – Moments d'inertie de quelques solides.

70 – **Parallélipipède rectangle homogène.** — Menant par le centre trois parallèles aux arêtes et cherchant le moment par rapport à OZ, on a

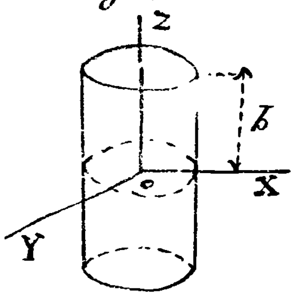
$$I = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2),$$

les limites des intégrations étant

$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ et $-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$. Donc

$$I = c\rho \left[\iint dx \, dy \, x^2 + \iint dx \, dy \, y^2 \right] = \rho \frac{abc}{12} (a^2 + b^2)$$

71 – **Cylindre de révolution.** — Soient A, B, C les moments par rapport à OX, OY, OZ, on a



$$A = \rho \iiint dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2)$$

et décomposant en cylindres annulaires de rayon r

$$A = \rho \int_0^R 2b \, 2\pi r^3 \, dr = \pi \rho b R^4$$

On a aussi

$$B = \rho \iiint dx\, dy\, dz\,(z^2 + x^2)$$

$$C = \rho \iiint dx\, dy\, dz\,(z^2 + y^2)$$

Mais $B = C$, donc

$$B = \frac{1}{2}\rho \iiint dx\, dy\, dz\,(2z^2 + x^2 + y^2) = \frac{1}{2}A + \rho \iiint z^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$B = \frac{1}{2}A + \frac{8}{3}\rho h^3 \iint dx\, dy = \frac{1}{2}A + \frac{16}{3}\rho h^3 \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

La dernière intégrale représente évidemment la surface d'un cercle de rayon R, elle est égale à πR^2, donc

$$B = \frac{1}{2}A + \frac{16}{3}\pi \rho h^3 R^2$$

72 – Sphère. — On a

$$A = B = C = \frac{A + B + C}{3}$$

$$3A = 2\rho \iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Pour évaluer cette intégrale, on considérera des couches sphériques sur lesquelles $x^2 + y^2 + z^2$ est constant et égal à r^2. Soit dV le volume d'une de ces couches, il est clair que $dv = 4\pi r^2 dr$; donc

$$3A = 2\rho \int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{8}{5}\pi \rho R^5$$

$$A = \frac{8}{15}\pi \rho R^5.$$

VIII.

Chapitre II.

Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

74 – Il s'agit de déterminer le mouvement d'un solide soumis à des forces quelconques et lié invariablement avec un axe fixe autour duquel il peut tourner librement.

Soit θ l'angle compris entre deux plans passant par l'axe, dont l'un soit fixe et l'autre lié au corps et mobile avec lui ; le mouvement sera déterminé si l'on connaît θ en fonction de t.

La dérivée première $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ représente la vitesse angulaire ; la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

I. Équation du mouvement.

75 – D'après le principe de d'Alembert, il y a à chaque instant équilibre, en vertu des liaisons, entre les forces d'inertie et les forces appliquées. La condition unique de cet équilibre est, dans le cas actuel, que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe fixe soit égale à zéro.

Prenant l'axe fixe pour axe OZ et désignant par N la somme des moments des forces par rapport à cet axe, l'équation qui exprime l'équilibre est la suivante

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = N$$

ou bien :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = N.$$

Soient r la distance d'un point à l'axe et α l'angle compris entre cette distance et le plan XOZ ; on peut poser

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

Par suite des liaisons la distance r ainsi que la différence entre α et θ

ne varient pas avec le temps, de sorte que $\frac{d\alpha}{dt}$ $\frac{d\theta}{dt}$ quel que soit le point considéré. Il en résulte :

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -r\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = -y\,\frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= r\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = x\,\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve pour l'équation du mouvement :

$$(3)\qquad \mu\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

μ désignant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

76 – On peut arriver directement à l'équation (3) en décomposant chaque force d'inertie en ses composantes normale et tangentielle. Le moment de la composante normale est nul.

L'accélération tangentielle est $\frac{dv}{dt} = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$; son moment est $r^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et le moment de la force d'inertie est $-m\,r^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Donc la somme des moments des forces d'inertie est $-\mu\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et l'on en conclut l'équation (3).

Cette équation donne lieu à cet énoncé :

<u>L'accélération angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe fixe est égale au quotient de la somme des moments des forces extérieures par le moment d'inertie.</u>

77 – **Intégration de l'équation du mouvement.** – Si l'on suppose N exprimé en fonction de θ et t l'intégration de l'équation (3) permet de calculer θ en fonction de t. L'équation différentielle étant du second ordre, l'intégrale générale renferme deux constantes arbitraires que l'on détermine en donnant les valeurs initiales de θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

L'intégration est réductible aux quadratures lorsque N ne dépend pas du temps. Soit, en effet, $N = \varphi(\theta)$; l'équation (3) devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\,\varphi(\theta)$$

multipliant les deux membres par $2\,d\theta$ et intégrant à partir de la valeur initiale θ_0 de θ, on aura

$$(4)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu}\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)\,d\theta + \omega_0^2$$

ω_0 étant la valeur initiale de la vitesse angulaire, on tirera de là

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)\,d\theta + \omega_0^2}}$$

Si l'on peut effectuer cette quadrature, on aura t en fonction de θ, et la constante qui s'introduira sera déterminée en exprimant qu'on a à la fois

$$t = 0 \qquad \theta = \theta_0 .$$

L'intégrale première (4) résulte immédiatement du théorème des forces vives. —

En effet, la vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe étant $r\frac{d\theta}{dt}$, la force vive $\frac{1}{2}\sum m v^2$ aura pour expression

$$\frac{1}{2}\sum m r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sum m r^2.$$

ou bien enfin $\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$.

D'autre part, le travail élémentaire de l'une des forces appliquées est $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ et, d'après les formules (2), on a dans le cas d'un mouvement de rotation

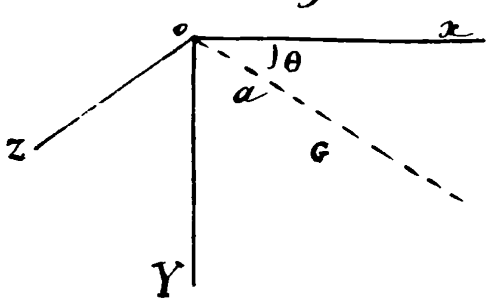
$$dx = -y\,d\theta \qquad dy = x\,d\theta \qquad dz = 0$$

Le travail élémentaire de l'une des forces est donc $(xY - yX)\,d\theta$ et celui du Système des forces appliquées est :

$$\sum (xY - yX)\,d\theta = N\,d\theta .$$

L'équation (4) s'obtient maintenant en exprimant que la variation de force vive est égale au travail total des forces appliquées.

78 — **Pendule composé.** — Un pendule composé est un solide soumis à l'action de la pesanteur et assujetti à tourner autour d'un axe horizontal.



Nous prendrons l'axe de rotation pour axe des Z, l'axe des y vertical dirigé de haut en bas, l'axe des x horizontal ; nous supposerons le centre de gravité G dans le plan XOY.

Soit θ l'angle GOX, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mga\cos\theta}{\mu}$$

en désignant par M la masse du solide et par a la distance du centre de gravité à l'axe de rotation.

Or, K étant le rayon de giration par rapport à l'axe mené par le centre de gravité parallèlement à l'axe de rotation, on a

$$\mu = M(K^2 + a^2)$$

d'où

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\cos\theta}{a + \frac{K^2}{a}}.$$

Pour un pendule simple de longueur l, l'équation précédente devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\cos\theta}{l}$$

et en posant :

(5) $$l = a + \frac{K^2}{a}$$

On voit que les valeurs de θ seront les mêmes à chaque instant, pour les deux pendules pourvu que les valeurs initiales de θ et $\frac{d\theta}{dt}$ soient les mêmes.

Ce pendule simple est dit <u>synchrone</u> du pendule composé. Sa longueur est donnée par la formule ci-dessus que l'on peut aussi mettre sous la forme

(6) $$l = \frac{\mu}{Ma}$$

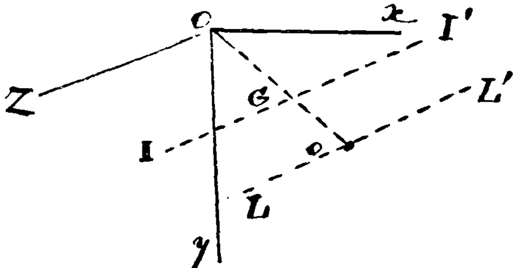
Il en résulte que la durée T des petites oscillations du pendule composé est

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\mu}{Mag}}.$$

Cette formule donne un moyen de déterminer par expérience le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe ; il suffit de rendre cet axe horizontal, de le fixer et de faire effectuer au corps, autour de cet axe, des oscillations dont on mesure la durée.

(Lire à la page suivante les propriétés du pendule composé.)

79 — Propriétés du pendule composé. — Supposons qu'on prolonge OG d'une quantité $GO' = \frac{K^2}{a}$; alors $OO' = l$. Le point O' s'appelle le centre d'oscillation du pendule composé et l'axe LL' parallèle à OZ est l'axe d'oscillation.



Tout point du solide situé sur l'axe d'oscillation se meut comme s'il était isolé et lié directement à l'axe de rotation par un fil inextensible et sans masse.

1° — Les axes de rotation et d'oscillation sont réciproques l'un de l'autre, c'est-à-dire que si l'on prend l'axe d'oscillation pour en faire un axe de rotation du solide, l'axe de rotation primitif devient l'axe d'oscillation. Soit en effet, $O'G = a'$; désignons par l' la nouvelle longueur du pendule synchrone. On a

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'}$$

Or $a' = \frac{K^2}{a}$; par suite en substituant

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

2° — Si l'on cherche, parmi tous les axes de rotation d'un solide pesant, qui sont parallèles à une même droite II' menée par son centre de gravité, quels sont ceux pour lesquels la longueur du pendule synchrone a une même valeur l, on trouve que ces axes sont les génératrices de deux surfaces cylindriques de révolution ayant la droite donnée pour axe commun et que les rayons de ces deux surfaces sont les racines de l'équation

$$a^2 - al + K^2 = 0$$

K étant le rayon de giration du solide par rapport à la droite dont il s'agit.

3° — Pour une direction II' menée par le centre de gravité, il existe une valeur de a pour laquelle la longueur $l = a + \frac{K^2}{a}$ du pendule synchrone est un minimum. Ce minimum a lieu pour $a = K$ et sa valeur est $2K$.

Cette longueur $2K$ varie avec la direction de II' ; sa valeur est la plus petite possible lorsque la direction II' est celle de l'axe principal correspondant au centre de gravité pour lequel le moment d'inertie est le plus petit.

II – Efforts sur les appuis d'un solide qui tourne autour d'un axe fixe.

80 – Pour assujettir un solide à tourner autour d'un axe, il suffit de fixer deux points de l'axe, et en appliquant à chacun de ces points, des forces respectivement égales à F_1 et F_2 de grandeur et de direction convenables, le solide peut être considéré comme libre.

Les efforts exercés sur les appuis sont des forces égales et contraires à F_1 et F_2.

D'ailleurs, d'après le principe de d'Alembert, il y a équilibre entre les forces F_1, F_2, les forces appliquées et les forces d'inertie.

On en conclut que :

1° la résultante de translation des efforts sur les appuis s'obtient en composant la résultante de translation des forces appliquées avec la résultante de translation des forces d'inertie.

2° le moment résultant des efforts sur les appuis s'obtient en composant le moment résultant des forces appliquées avec le moment résultant des forces d'inertie.

Nous allons donc évaluer la résultante de translation et le moment résultant des forces d'inertie de tous les points qui constituent le solide.

81 – Résultante de translation des forces d'inertie.

Il faut calculer les trois sommes

$$-\sum m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\sum m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\sum m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Or, en désignant par ω la vitesse angulaire on a, d'après les formules (2).

$$\frac{dx}{dt} = -y\,\omega \qquad \frac{dy}{dt} = x\,\omega \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

on en déduit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\omega^2 - y\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\omega^2 + x\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

et on en conclut pour les composantes suivant les axes de la résultante de translation des forces d'inertie

$$X' = \omega^2 \sum m x + \frac{d\omega}{dt} \sum m y$$

$$Y' = \omega^2 \sum m y - \frac{d\omega}{dt} \sum m x$$

$$Z' = 0$$

Enfin, en désignant par M la masse du système et par a, b, c les coordonnées du centre de gravité, on trouve définitivement

$$(7) \qquad \begin{aligned} X' &= M a \omega^2 + M b \frac{d\omega}{dt} \\ Y' &= M b \omega^2 - M a \frac{d\omega}{dt} \\ Z' &= 0 \end{aligned}$$

82 – Moment résultant des forces d'inertie.

Écrivons sur deux lignes horizontales les coordonnées d'un point et les composantes de la force d'inertie relative à ce point.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ m x \omega^2 + m y \frac{d\omega}{dt} & m y \omega^2 - m x \frac{d\omega}{dt} & 0 \end{array}$$

On en déduit, pour les composantes du moment résultant des forces d'inertie

$$(8) \qquad \begin{aligned} L' &= \frac{d\omega}{dt} \sum m x z - \omega^2 \sum m y z \\ M' &= \frac{d\omega}{dt} \sum m y z + \omega^2 \sum m x z \\ N' &= - \frac{d\omega}{dt} \sum m r^2 \end{aligned}$$

On voit que ces valeurs dépendent des coefficients de l'ellipsoïde central.

83 – Condition pour que les forces d'inertie se réduisent à un couple.

– Il faut et il suffit que la résultante de translation soit nulle. D'après les valeurs (7) la condition $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0$ devient

$$M(a^2+b^2)\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = 0$$

et on en conclut $a = b = 0$. Par suite, le centre de gravité est sur l'axe de rotation.

84 – Condition pour que les forces d'inertie aient une résultante.

– Soit en général un système de forces dont la résultante de translation est (P, Q, R) et dont le moment résultant est (L, M, N).

Pour que ce système admette une résultante unique (X', Y', Z') appliquée au point x', y', z' ; X', Y', Z' satisfassent aux six conditions d'équivalence

$$(9)\quad X' = P,\quad Y' = Q,\quad Z' = R \qquad (10)\quad y'Z' - z'Y' = L,\quad z'X' - x'Z' = M,\quad x'Y' - y'X' = N$$

Le déterminant des équations (10) en $x' y' z'$ est nul ; ce qui montre que le système est impossible ou indéterminé. Pour qu'il soit indéterminé, il faut que la condition

$$(11)\qquad LP + MQ + NR = 0$$

soit satisfaite. Si elle l'est effectivement les équations (10) se réduisent à 2 qui donnent une droite comme lieu des points d'application de la résultante ; cette droite est évidemment la direction de la résultante.

Appliquons ces considérations au système des forces d'inertie en supposant pour simplifier que le plan XOZ passe par le centre de gravité. Les valeurs (7) deviennent en y faisant $b = 0$

$$(12)\qquad X' = Ma\omega^2 \qquad Y' = -Ma\frac{d\omega}{dt} \qquad Z' = 0$$

et la condition :

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = 0$$

se réduit, en ayant égard aux valeurs (8), à la suivante

$$-Ma\sum myz\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = 0$$

On ne peut pas admettre $a = 0$, car alors comme nous l'avons plus haut (83) les forces d'inertie se réduiraient à un couple. La condition est donc

$$\sum myz = 0.$$

Le centre de gravité étant dans le plan ZOX, cette condition exprime, ainsi qu'on l'a démontré précédemment, que l'axe de rotation est, en un de ses points, un axe principal d'inertie.

Supposons l'origine placée en ce point; alors $\sum m x z$ sera nul aussi et les formules (12) et (8) se réduisent aux suivantes

$$X' = Ma\omega^2 \qquad L' = 0$$

$$Y' = -Ma\frac{d\omega}{dt} \qquad M' = 0$$

$$Z' = 0 \qquad N' = -\mu\frac{d\omega}{dt}$$

Les équations (10) deviennent alors:

$$z' = 0$$

$$x'\frac{d\omega}{dt} + y'\omega^2 = \frac{\mu}{Ma}\cdot\frac{d\omega}{dt}$$

les équations sont celles d'une droite située dans le plan XOY et dont l'abcisse à l'origine est $l = \frac{\mu}{Ma}$.

85 – **Centre de percussion.** — On appelle centre de percussion, (et nous verrons ultérieurement la raison de cette dénomination) un point situé sur OX à la distance l de l'origine.

Ce point est déterminé par les conditions suivantes. Il se trouve
1° dans le plan qui contient l'axe de rotation et le centre de gravité.
2° dans un plan perpendiculaire à l'axe mené par le point où cet axe est un axe principal d'inertie.
3° à une distance de l'axe égale à $\frac{\mu}{Ma}$. La valeur de cette distance est la même que celle de la longueur du pendule synchrone d'un pendule composé.

86 – Les principaux résultats de la réduction des forces d'inertie s'énoncent comme il suit:

Théorème I. <u>Pour que les forces d'inertie admettent une résultante unique, il faut que l'axe de rotation soit principal en un de ses points.</u>

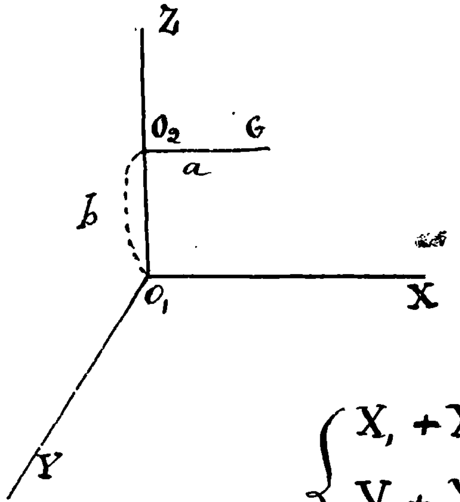
Théorème II. <u>Dans le cas où il existe une résultante unique des forces d'inertie, cette résultante passe au centre de percussion.</u>

IX.

87 – Pressions exercées par un corps tournant sur ses appuis.

Pour fixer l'axe il suffit d'immobiliser deux points. Or, on peut toujours supposer ce résultat obtenu en appliquant en ces deux points considérés comme faisant partie du solide, deux forces F_1 et F_2 qui, prises avec des signes contraires, représenteront les réactions du solide sur les deux points immobilisés.

Pour obtenir les valeurs des réactions, il suffira donc d'exprimer que le solide est à chaque instant en équilibre sous l'action des forces F_1 et F_2, des forces directement appliquées et des forces d'inertie.



Soient O, X, Y, Z les trois axes, le plan des xz contenant le centre de gravité, OZ, étant l'axe de rotation et O_1, O_2 les deux points fixes. Soient encore X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, les composantes de F_1 et F_2, et enfin P, Q, R, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, les composantes de la résultante de translation et du moment résultant des forces appliquées.

Les 6 équations d'équilibre seront :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + P + Ma\omega^2 = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Q - Ma\dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ Z_1 + Z_2 + R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -bY_2 + \mathcal{L} + \dfrac{d\omega}{dt}\sum mxz - \omega^2 \sum myz = 0 \\ bX_2 + \mathcal{M} + \dfrac{d\omega}{dt}\sum myz + \omega^2 \sum mxz = 0 \\ \mathcal{N} - \dfrac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = 0 \end{cases}$$

La 6ᵉ équation a déjà été obtenue précédemment ; c'est elle qui donne la loi du mouvement de rotation autour de l'axe ; son intégration conduit à exprimer ω en fonction du temps. La troisième donne $Z_1 + Z_2$, et les quatre autres fournissent X_1, X_2, Y_1, Y_2 de sorte que la question se trouve résolue dans le cas général.

88 - Cas où les forces appliquées au solide se font équilibre.

Alors les quantités P, Q, R, L, M, N sont nulles.

Cherchons la condition pour que le point O ne supporte aucune pression; il faut que les équations du numéro précédent soient identiquement satisfaites quand on y fait $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$.

La dernière donne ω = constante. La 4e et la 5e exigent que

$$\Sigma m y z = \Sigma m x z = 0$$

Il faut donc que l'axe OZ soit axe principal par rapport au point O.

Les trois premières équations fournissent enfin la valeur de la force F_1; elles se réduisent à

$$X_1 + Ma\omega^2 = 0$$
$$Y_1 = 0$$
$$Z_1 = 0$$

d'où ce théorème:

Quand un solide est susceptible de tourner autour d'un point, et que, par suite d'un certain état initial il se met à tourner autour d'un axe principal d'inertie par rapport à ce point, il continue à tourner autour du même axe avec une vitesse constante, sans qu'il soit nécessaire de fixer un autre point de cet axe.

Il est à remarquer que si $a = 0$, on a $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, d'où ce théorème:

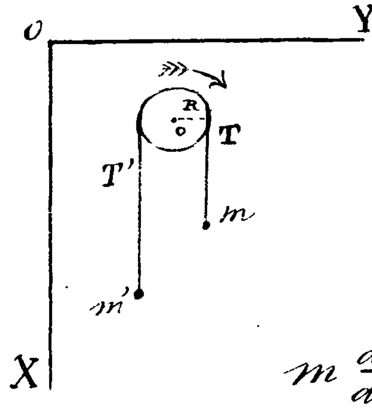
Si un solide soustrait à l'action de toute force extérieure, tourne à un moment donné, autour d'un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité, il continue indéfiniment à tourner autour du même axe, avec une vitesse constante, sans qu'il soit nécessaire d'en fixer aucun point.

C'est à cause de cette propriété que les trois axes de l'ellipsoïde relatif au centre de gravité, ont reçu le nom d'axes naturels de rotation.

90 - Cas où les forces appliquées au solide se réduisent à un couple perpendiculaire à l'axe de rotation. - Dans ce cas, P, Q, R sont nuls ainsi que L et M; mais N est différent de zéro. Donc la sixième équation est la seule qui ne se simplifie pas, comme dans le cas précédent, mais les deux théorèmes subsistent; toutefois la vitesse de rotation n'est plus constante.

III - Machine d'Atwood.

91 - La machine d'Atwood se compose d'une poulie que l'on supposera parfaitement mobile et sur laquelle passe un fil de masse négligeable sans raideur, supportant deux masses inégales m et m'. On suppose que le fil entraîne la poulie sans glissement.



Prenant des axes OX et OY dans le sens vertical des deux masses x et x' les distances de m et m' à OY, ω la vitesse angulaire de la poulie, T et T' les tensions des deux brins du fil. On a les équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g - T'$$

$$\mu\frac{d\omega}{dt} = R(T-T')$$

pour exprimer les mouvements des deux points et de la poulie. De plus

$$x + x' = \text{Const},$$

$$R\omega = \frac{dx}{dt}$$

cette dernière relation exprime que le fil entraîne la poulie.

Les cinq équations précédentes renferment cinq inconnues x, x', T, T' et ω.

La quatrième donne $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}$ et, par suite en retranchant la seconde de la première

$$(m+m')\frac{d^2x}{dt^2} = (m-m')g - (T-T')$$

Or,

$$T-T' = \frac{\mu}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{R^2}\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ donc}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m-m')g}{m+m'+\frac{\mu}{R^2}}$$

Ainsi l'accélération est constante et proportionnelle à g; il en résulte $\frac{d\omega}{dt}$ = Constante.

Les tensions des fils ont pour valeurs

$$T = mg - \frac{mg(m-m')}{m+m'+\frac{\mu}{R^2}} = \frac{m(2m'+\frac{\mu}{R^2})}{m+m'+\frac{\mu}{R^2}}\, g$$

$$T' = m'g + \frac{mg(m-m')}{m+m'+\frac{\mu}{R^2}} = \frac{m'(2m+\frac{\mu}{R^2})}{m+m'+\frac{\mu}{R^2}}\, g.$$

On voit que les deux tensions sont différentes.

IV. Mouvement d'un Solide autour d'un axe sous l'action de percussions.

92 - Equation du mouvement. — On sait que lorsqu'un système à liaisons est soumis à des percussions, il y a équilibre en vertu des liaisons entre les percussions ou plutôt entre leurs impulsions totales et les accroissements de quantités de mouvement prises en sens contraire.

Soit ω la vitesse angulaire du corps. L'accroissement de la quantité de mouvement d'un point est $m r \Delta\omega$ et le moment de cette quantité de mouvement est $m r^2 \Delta\omega$. Soient X, Y, Z les composantes de la percussion. Dans le cas actuel, il suffit pour l'équilibre, d'égaler à zéro la somme des moments par rapport à l'axe de rotation, de sorte que l'on a

$$-\Delta\omega \sum m r^2 + \sum (xY - yX) = 0$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum (xY - yX)}{\sum m r^2}$$

93 — Percussions exercées sur les appuis de l'Axe. — Supposant encore que l'on immobilise deux points de l'axe en leur appliquant des percussions convenables F_1 et F_2, il faut exprimer qu'il y a équilibre entre les percussions appliquées au solide, les percussions F_1 et F_2 et les variations des quantités de mouvement prises en sens contraire.

Il est donc nécessaire de calculer tout d'abord les composantes de la résultante de translation et du moment résultant des quantités de mouvement.

Posant

$$x = r \cos\theta,$$

$$y = r \sin\theta,$$

On a

$$\frac{dx}{dt} = -y\,\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\,\omega, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

d'où

$$X'' = \Sigma m \frac{dx}{dt} = -\omega \Sigma my = -\omega M b$$

$$Y'' = \Sigma m \frac{dy}{dt} = \omega \Sigma mx = \omega M a$$

$$Z'' = \Sigma m \frac{dz}{dt} = 0$$

Pour former le moment résultant, on écrira

$$\begin{matrix} x & y & z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{matrix}$$

et en calculant les mineurs correspondants, on obtiendra

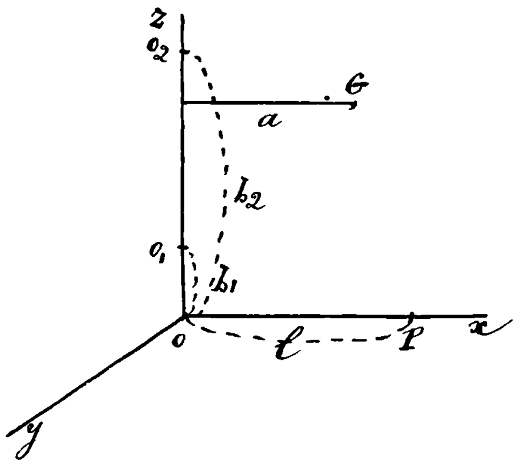
$$L'' = -\omega \Sigma m x z$$

$$M'' = -\omega \Sigma m y z$$

$$N'' = \omega \Sigma m r^2$$

Cette dernière équation exprime que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de rotation s'obtient en multipliant la vitesse angulaire par le moment d'inertie.

Revenant à la question proposée, on supposera qu'il n'y ait qu'une seule percussion.



Soit OZ l'axe de rotation et XOZ passant par le centre de gravité. On fera passer l'axe OX par le point P où la percussion rencontre le plan XOZ. Soient O_1, O_2 les deux points de l'axe que l'on immobilise.

Nous représenterons par X, Y, Z, les composantes de la percussion extérieure et par X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 celle des percussions appliquées aux points O_1 et O_2. – On aura les six équations d'équilibre.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X = 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y - Ma\omega = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -h_1 Y_1 - h_2 Y_2 + \omega \sum m x z = 0 \\ h_1 X_1 + h_2 X_2 - \ell z + \omega \sum m y z = 0 \\ \ell Y - \omega \sum m r^2 = 0 \end{cases}$$

La 6ᵉ équation donne la vitesse angulaire que la percussion imprime au corps. La 3ᵉ donne $Z_1 + Z_2$ et les quatre autres fournissent les valeurs de X_1, X_2, Y_1, Y_2.

94 – Condition pour que l'axe ne subisse aucun effort. Il faut, pour que l'axe ne subisse aucun effort, que les six équations précédentes soient satisfaites quand on y fait $X_1 = Y_1 = Z_1 = X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$.

Elles se réduisent à

$$\begin{cases} X = 0, & \sum m x z = 0 \\ Y = Ma\omega & \sum m y z = 0 \\ Z = 0, & Y = \dfrac{\omega \sum m r^2}{\ell} \end{cases}$$

Les conditions $X = 0$ $Z = 0$, expriment que la percussion doit être normale au plan des xz, les équations $\sum m x z = 0$, $\sum m y z = 0$, que l'axe OZ est axe principal d'inertie par rapport au point O.

Quant aux deux autres équations,

$$Y = Ma\omega, \quad Y = \frac{\omega \sum m r^2}{\ell},$$

elles déterminent la valeur angulaire ω et donnent de plus, par l'élimination simultanée de Y et de ω la relation

$$M = \frac{\sum m r^2}{\ell a} = \frac{\mu}{\ell a}$$

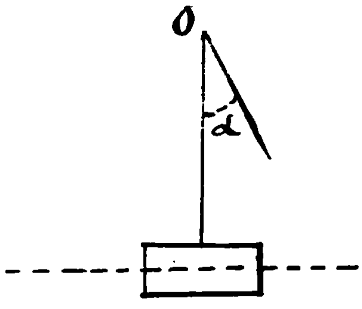
Cette dernière exprime que le point P n'est autre que le centre de percussion.

C'est au reste, de cette propriété que provient le nom de ce point.
En résumé, pour qu'il n'y ait pas de choc sur les appuis, il faut
1° que la percussion soit perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation et le centre de gravité.
2° que l'axe de rotation soit axe principal d'inertie par rapport au point, où il coupe le plan perpendiculaire mené par la direction de la percussion.
3° que la direction de la percussion passe au centre de percussion.

Remarque. – La distance OP n'est autre que la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé formé par le corps tournant autour de l'axe des Z.

V – Pendule balistique.

95 – Le pendule balistique est destiné à mesurer la vitesse des projectiles lancés par les armes à feu ou les canons. Il se compose d'un récepteur mobile autour d'un axe fixe et rempli d'une matière plastique qui arrête le projectile pendant un temps assez court pour que le déplacement du récepteur soit insensible, mais au bout duquel ce récepteur prend une vitesse angulaire sensible de sorte qu'il exécute une série d'oscillations dont on mesure l'amplitude maximum.



Soient V la vitesse du projectile à son entrée dans le récepteur α l'angle d'écart mesuré, l la distance de l'axe O à la direction du projectile, ω la vitesse angulaire communiquée au récepteur par le choc.

Nous appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement au système formé par le projectile et le récepteur. La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de rotation doit être la même avant et après le choc, puisqu'on considère la durée de ce choc comme assez petite pour négliger l'action de la pesanteur.

Le moment de la quantité de mouvement du projectile est, avant le choc, $m V l$. Après le choc, le projectile et le récepteur ont pris une vitesse angulaire commune ω et la somme des moments des quantités de mouvement s'obtient, comme on l'a démontré au n° 93, en multipliant ω par le moment d'inertie total du système, lequel a pour valeur $\mu + m l^2$, en désignant par μ le moment d'inertie du récepteur pris isolément. On a donc l'équation

$$mV\times b = \omega\,(\mu + mb^2)$$

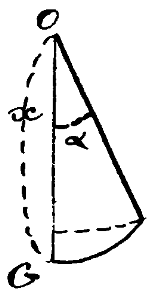
$$V = \frac{\omega\,(\mu + mb^2)}{mb}.$$

Il reste à déterminer ω. – Appliquant à cet effet le théorème des forces vives entre la position initiale jusqu'à celle qui correspond à l'angle α, il est clair que la variation de force vive est $-\frac{1}{2}(\mu+mb^2)\,\omega^2$. Quant au travail de la pesanteur, il est égal à $-Ph$, P désignant le poids total et h l'élévation du centre de gravité. Donc

$$\frac{1}{2}(\mu + mb^2)\,\omega^2 = Ph,$$

d'où

$$V = \frac{1}{mb}\sqrt{2Ph(\mu+mb^2)}$$



Or, en désignant par x la distance OG du centre de gravité à l'axe,

$$h = x\,(1-\cos\alpha) = 2x\sin\frac{2\alpha}{2}$$

et, par suite,

$$V = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{mb}\sqrt{Px\,(\mu+mb^2)}$$

Soient p' et p'' les poids du pendule et du projectile, a la distance de l'axe O au centre de gravité du pendule seul, b est la distance de l'axe au centre de gravité du projectile, donc

$$Px = p'a + p''b$$

d'où

$$V = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{mb}\sqrt{(p'a+p''b)(\mu+mb^2)}$$

Soit encore l la longueur du pendule simple, synchrone du pendule balistique

$$l = \frac{\mu}{Ma} = \frac{\mu g}{p'a}$$

ou

$$\mu = \frac{p'al}{g}.$$

Il vient dès lors

$$V = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{m b} \sqrt{(p'a + p''b)\left(\frac{p'al}{g} + \frac{p''b^2}{g}\right)}$$

ou, comme $m = \dfrac{p''}{g}$,

$$V = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{p'' b} \sqrt{(p'a + p''b)\, p'al + p''b^2)\, g}.$$

C'est la formule employée ; elle détermine V quand on a mesuré α.

96 – Pour éviter que le choc du projectile ne détériore l'appareil, on fait en sorte qu'il frappe le pendule au centre de percussion. L'axe de rotation de l'appareil est en effet axe principal par rapport au point où il rencontre le plan milieu de l'appareil, car ce plan est un plan de symétrie. Il suffit donc que le projectile arrive normalement au plan vertical passant par l'axe, dans le plan milieu de l'appareil, et à une distance de l'axe égale au centre de percussion, c'est-à-dire que l doit être égal à b.

On arrivera, par l'addition de poids successifs à réaliser cette condition. On se donne en effet la valeur de b, et l est lié à la durée des petites oscillations de l'appareil par la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Chapitre III.

Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

I - Préliminaires.

97 - **Axe instantané de rotation.** — Quand un solide tourne autour d'un point O, il existe à chaque instant une droite passant par ce point O dont tous les points ont des vitesses nulles. Dans un temps infiniment petit les déplacements des points de cette droite sont du second ordre et on peut dire, par suite, que le déplacement élémentaire du solide est une rotation autour de cette droite.

Rappelons de plus qu'une rotation se représente en portant sur l'axe une longueur numériquement égale à la vitesse angulaire dans un sens OA tel qu'un observateur ayant les pieds en O et la tête en A voit la rotation s'effectuer dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire de gauche à droite.

On sait que l'on compose les rotations en composant leurs axes représentatifs comme des forces.

98 - **Composantes de la vitesse d'un point.** — Soient ω une rotation, p, q, r ses composantes suivant trois axes coordonnés.

Ainsi qu'on l'a établi dans la première partie du cours, pour obtenir les composantes de la vitesse d'un point x, y, z du solide, l'on écrit sur deux lignes horizontales :

1° les composantes de la vitesse instantanée de rotation,
2° les coordonnées du point

$$\begin{matrix} p, & q & r \\ x & y & z \end{matrix}$$

et l'on forme les trois déterminants

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - ry \\ \frac{dy}{dt} &= rx - pz \\ \frac{dz}{dt} &= py - qx. \end{aligned}$$

99 - **Composantes de l'accélération d'un point.** — On déduit des valeurs précédentes celles des accélérations. On trouve, en effet,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y + q(py - qx) - r(rx - pz).$$

ajoutant et retranchant p^2x dans le second membre et tenant compte de la relation $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$, on a la première des trois expressions qui suivent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} - \omega^2 x + p(px + qy + rz)$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} - \omega^2 y + q(px + qy + rz)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} - \omega^2 z + r(px + qy + rz)$$

les deux autres se déduisant de la première en permutant circulairement les lettres.

100 - **Moment résultant des quantités de mouvement.** — Désignons par L', M', N' les composantes du moment résultant des quantités de mouvement. Des deux lignes

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ m\frac{dx}{dt} & m\frac{dy}{dt} & m\frac{dz}{dt} \end{array}$$

on déduit par la règle ordinaire

$$L' = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$$

$$M' = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$$

$$N' = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

En remplaçant les vitesses par leurs valeurs (1) :

$$L' = p\sum m(y^2+z^2) - q\sum mxy - r\sum mxz$$

$$M' = -p\sum mxy + \dots\dots\dots$$

$$N' = \dots\dots\dots$$

c'est-à-dire, en employant les coefficients de l'ellipsoïde d'inertie par rapport aux axes de coordonnées :

$$(3)\qquad \begin{aligned} L' &= Ap - Fq - Er \\ M' &= Fp + Bq - Dr \\ N' &= Ep - Dq - Cr \end{aligned}$$

Si on suppose que les axes coordonnés coïncident avec les axes principaux d'inertie, on a les formules très-simples

$$(4)\qquad L' = Ap \quad M' = Bq \quad N' = Cr$$

101 – Moment résultant des forces effectives. – Désignons par L'', M'', N'' les composantes du moment résultant des forces effectives, on a :

$$\begin{aligned} L'' &= \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) \\ M'' &= \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ N'' &= \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs (2), on trouve des expressions assez complexes, mais qui se simplifient beaucoup si les axes se confondent avec les axes principaux d'inertie, ce qui dispense d'écrire dans le développement du calcul tout terme renfermant le produit de deux coordonnées distinctes (x, y, z).

On obtient alors

$$(5)\qquad \begin{aligned} L'' &= A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr \\ M'' &= B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp \\ N'' &= C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq \end{aligned}$$

102 – Remarque. – Quand les moments sont pris par rapport à trois axes fixes, on a les relations $L'' = \frac{dL'}{dt}$ $\quad M'' = \frac{dM'}{dt}$ $\quad N'' = \frac{dN'}{dt}$

qui expriment que le moment résultant des forces effectives représente en grandeur et en direction la vitesse du point représentatif du moment résultant des quantités de mouvement.

Les formules (4) et (5) ne satisfont pas à ces relations : cela tient à ce que les moments y sont évalués par rapport à des axes mobiles.

On peut, dans ce cas, déduire les formules (5) des formules (4) en se servant de la théorie des mouvements relatifs.

Soit G le point représentatif du moment résultant des quantités de mouvement. Les coordonnées du point G par rapport au système mobile des axes principaux d'inertie, sont Ap, Bq, Cr et, par suite, les composantes de sa vitesse relative sont :

$$A\frac{dp}{dt} \qquad B\frac{dq}{dt} \qquad C\frac{dr}{dt}$$

Si l'on veut maintenant avoir les composantes de sa vitesse absolue par rapport à des axes fixes coïncidant actuellement avec les axes principaux d'inertie, il faudra composer la vitesse relative avec la vitesse d'entraînement du point G.

Le mouvement d'entraînement est une rotation aux composantes p, q, r, et les composantes de la vitesse s'obtiennent, à l'aide des formules (1), en remplaçant dans celles-ci x, y, z par les coordonnées Ap, Bq, Cr du point G. On trouve ainsi pour les composantes de la vitesse d'entraînement

$$(C-B)qr \qquad (A-C)rp \qquad (B-A)pq$$

et, par suite en ajoutant les composantes suivant les trois axes de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, on retrouve les formules (5).

103 - Force vive du solide. — Soit θ la force vive du solide, on a

$$2\theta = \sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

ou, en remplaçant les composantes de la vitesse par leurs valeurs (1)

$$(6) \qquad 2\theta = Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Dqr-2Erp-2Fpq$$

On peut trouver autrement cette expression. En désignant par ω la vitesse angulaire instantanée de rotation et par μ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe instantané de rotation, on trouve directement

$$2\theta = \mu\,\omega^2.$$

Si maintenant α, β, γ sont les cosinus directeurs de l'axe de rotation, la théorie des moments d'inertie donne la relation

$$\mu = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

enfin, on a

$$\alpha = \frac{p}{\omega} \qquad \beta = \frac{q}{\omega} \qquad \gamma = \frac{r}{\omega}$$

Ces formules donnent pour 2θ les valeurs (6).

En supposant que les axes coordonnés se confondent avec les axes principaux d'inertie, la formule (6) se réduit à la suivante :

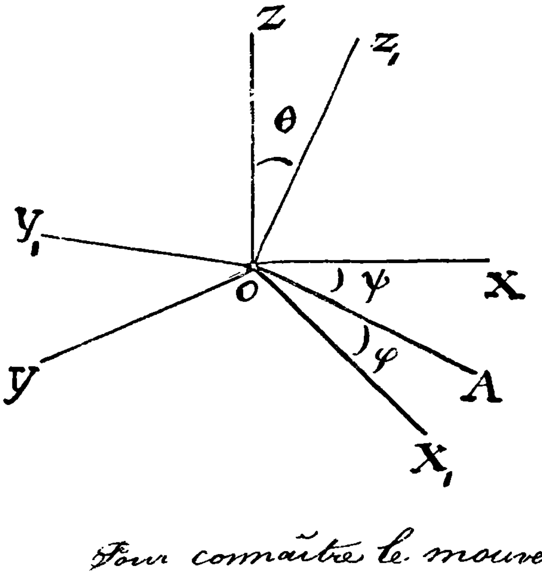
$$(7) \qquad 2\theta = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

II - Équations du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

104 - Prenons le point fixe pour origine. Considérons trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ et trois axes rectangulaires mobiles OX_1, OY_1, OZ_1 invariablement liés avec le solide.

Pour connaître à un instant quelconque la position du solide, il suffit de connaître à cet instant la position des axes mobiles autour des axes fixes.

105 - Variables d'Euler. — On peut déterminer la position des axes mobiles par trois angles définis comme il suit :



ψ angle que fait avec OX la trace OA du plan X_1OY_1 sur le plan XOY.

θ inclinaison du plan X_1OY_1 sur le plan XOY, mesurée par l'angle ZOZ.

φ angle de l'axe OX_1 avec la trace OA.

On voit que l'on peut passer des axes OX, OY, OZ aux axes OX_1, OY_1, OZ_1 par trois rotations ψ, θ, φ autour des axes OZ, OA, OZ_1.

Pour connaître le mouvement du solide, il suffit d'exprimer ψ, θ, φ en fonction du temps.

105 – Équations du mouvement. — Le principe de d'Alembert fournit des équations d'équilibre qui doivent suffire à déterminer le mouvement du solide. Dans le cas qui nous occupe, ces équations sont au nombre de trois ; on les obtient en égalant à zéro la somme des moments des forces extérieures et des forces d'inertie par rapport à chacun des trois axes fixes passant par le point O. Ces équations sont les suivantes :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = L$$

$$(8) \qquad \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = M$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = N$$

L, M, N étant les composantes du moment résultant des forces extérieures.

Les Coordonnées (x, y, z) d'un point par rapport aux axes fixes sont liées aux Coordonnées (x_1, y_1, z_1) du même point par rapport aux axes mobiles par les relations connues

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1$$

$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1$$

$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1$$

dans lesquelles les 9 cosinus a, b, c sont exprimables en fonction des trois angles d'Euler.

En remplaçant les x, y, z dans les équations (8) par leurs valeurs ci-dessus, et enfin les 9 Cosinus par leurs valeurs en fonction des trois angles d'Euler, on arriverait à des expressions ne dépendant que des dérivées des angles ψ, θ, φ et des coëfficients de l'ellipsoïde central du Solide rapporté aux axes mobiles, coëfficients que l'on doit considérer comme des constantes connues.

On aurait ainsi trois équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les trois variables qui déterminent la position du solide.

Mais cette marche naturelle conduit à des calculs longs et complexes que l'on évite par l'emploi de trois variables auxiliaires.

106 – Variables auxiliaires. — Ces variables auxiliaires sont les composantes p, q, r de la vitesse instantanée de rotation suivant les axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1. Nous allons établir :

1° trois équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les composantes p, q, r.
2° trois relations entre p, q, r et les angles ψ, θ, φ.

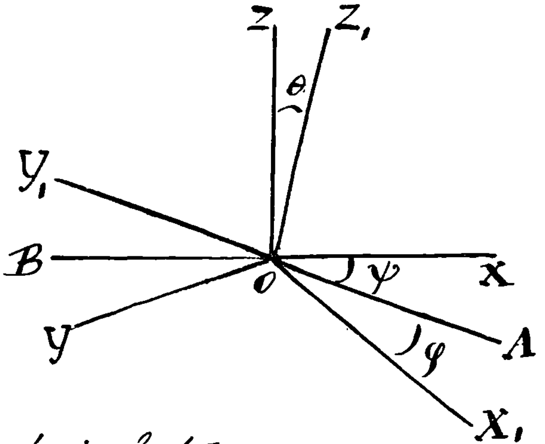
On a ainsi un système de 6 équations simultanées qui, en tenant compte de l'état initial définissent toutes les circonstances du mouvement.

107 – Équations d'Euler. — Écrivons que la somme des moments des forces effectives est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à chacun des trois axes mobiles en supposant, pour simplifier, que ceux-ci coïncident avec les trois axes principaux d'inertie. En nous servant à cet effet des formules (5) nous obtenons les trois équations suivantes dans lesquelles on désigne par L, M, N les sommes des moments des forces extérieures par rapport aux axes mobiles.

$$(9)\qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,q\,r &= L \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,r\,p &= M \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,p\,q &= N. \end{aligned}$$

108 – Relations entre les composantes p, q, r et les angles ψ, θ, φ.

Considérons deux positions infiniment voisines du solide, la première correspondant à l'époque t et aux angles ψ, θ, φ, la seconde à l'époque $t + dt$ et aux angles $\psi + d\psi$, $\theta + d\theta$, $\varphi + d\varphi$.



Le mouvement élémentaire pendant dt résulte des trois rotations $d\psi, d\theta, d\varphi$, autour de OZ, OA, OZ_1 ; mais il résulte aussi des trois rotations $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, autour de OX_1, OY_1, OZ_1.

On a les relations cherchées en exprimant les conditions de cette équivalence. Ces conditions s'expriment en égalant les projections des deux rotations élémentaires équivalentes sur trois axes quelconques. Nous prendrons pour ces axes OA, OB, OZ ; OB étant perpendiculaire à OA dans le plan X_1OY_1.

Nous prendrons pour ces axes OA, OB, OZ_1; OB étant perpendiculaire à OA dans le plan X_1OY_1.

Remarquons d'abord que OA est perpendiculaire à OZ_1 comme étant dans le plan X_1OY_1, perpendiculaire à OZ comme étant dans le plan XOY, perpendiculaire à OB par construction; par conséquent, OZ_1, OZ, OB sont dans un même plan et l'angle BOZ est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$. De plus, BOY_1 est égal à φ.

Cela posé, le tableau suivant donne les projections de $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$, sur OA, OB, OZ_1:

	OA	OB	OZ_1
$d\psi$	0	$\sin\theta\, d\psi$	$\cos\theta\, d\psi$
$d\theta$	$d\theta$	0	0
$d\varphi$	0	0	$d\varphi$

On a de même pour les projections de $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ sur les mêmes axes:

	OA	OB	OZ_1
$p\,dt$	0	0	$r\,dt$
$q\,dt$	$p\,dt\cos\varphi$	$p\,dt\sin\varphi$	0
$r\,dt$	$-q\,dt\sin\varphi$	$q\,dt\cos\varphi$	0

Par suite, les relations cherchées sont les suivantes:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\[2ex] \sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\,\dfrac{d\psi}{dt} = r \end{cases}$$

109 – En résumé, les composantes p, q, r et les angles ψ, θ, φ satisfont aux équations (9) et (10) qui constituent un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre. Les intégrales générales renfermeront six constantes arbitraires que l'on déterminera en donnant les valeurs initiales des six inconnues. –

XI.

III – Mouvement d'un Solide autour d'un point fixe dans le cas où les forces extérieures ont un moment résultant constamment nul par rapport au point fixe.

a) Méthode analytique.

110 – Supposons que les forces extérieures aient une résultante passant constamment par le point fixe. Les composantes L, M, N du moment résultant se réduisent à zéro et le système (9) devient

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0$$

$$(11)\qquad B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0$$

Il s'agit de trouver des fonctions p, q, r de t satisfaisant à ces équations et se réduisant à des valeurs données p_0, q_0, r_0 pour $t=0$.

Nous traiterons d'abord quelques questions particulières.

111 – Condition pour que l'axe instantané de rotation soit une droite fixe dans le solide. – Les cosinus directeurs de l'axe rapportés aux axes mobiles sont $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$; supposons qu'ils soient constants.

Si les forces extérieures ont une résultante passant par le point fixe, leur travail est nul ; la force vive θ du solide est donc constante. On a d'ailleurs $2\theta = \mu\,\omega^2$ et le moment d'inertie μ ne varie pas, puisque la direction de l'axe est invariable par hypothèse ; donc la vitesse de rotation ω reste constante. Il en résulte que les composantes p, q, r sont aussi constantes et leurs dérivées sont nulles.

Les équations (11) deviennent alors

$$(C-B)\,qr = 0$$

$$(A-C)\,rp = 0$$

$$(B-A)\,pq = 0.$$

Si les moments d'inertie sont inégaux, ces relations exigent que deux des composantes p, q, r soient nulles. Donc, il faut et il suffit que la rotation s'effectue autour d'un axe principal d'inertie.

Nous avions déjà trouvé cette condition.

112 -. Cas où l'axe instantané de rotation s'écarte très-peu d'un axe principal d'inertie. — Supposons que l'axe instantané de rotation s'écarte très-peu de OZ, pendant toute la durée du mouvement, p et q sont alors très-petits.

Négligeons pq ; la troisième équation donne $r =$ const. et les deux autres

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,rq = 0$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = 0$$

deviennent des équations linéaires à coëfficients constants.

Ces équations ont pour intégrales :

$$p = P\cos(St + \varepsilon)$$

$$q = P\sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}}\sin(St+\varepsilon)$$

P et ε étant des constantes arbitraires et la valeur de S étant déterminée par la relation

$$S = r\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$$

Ce calcul montre que si C est le plus petit ou le plus grand des moments d'inertie, la valeur de S est réelle et les valeurs de p et q représentées par des fonctions trigonométriques, peuvent rester effectivement très-petites.

Mais il n'en est plus ainsi si OZ est l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie car S est alors imaginaire, et, par suite, p et q exprimées en fonction du temps par des exponentielles, peuvent croître indéfiniment. Donc :

Le mouvement de rotation n'est généralement stable qu'autour des axes principaux du plus grand et du plus petit moment d'inertie.

113 – Intégration dans le cas général. (Jacobi).

On déduit d'abord des équations (11) deux intégrales :

1° en multipliant ces équations respectivement par p, q, r, ajoutant et intégrant :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \tag{12}$$

2° en multipliant par Ap, Bq, Cr, ajoutant et intégrant :

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2 \tag{13}$$

h et K sont deux constantes dont les valeurs sont déterminées en fonction des composantes p_0, q_0, r_0 de l'état initial par les relations

$$(14)\qquad \begin{aligned} Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 &= h \\ A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 &= K^2 \end{aligned}$$

114 – Déduisons d'abord des équations (12) quelques conséquences utiles : On tire de ces équations :

$$(15)\qquad \begin{aligned} K^2 - Ah &= B(B-A)q_0^2 + C(C-A)r_0^2 \\ K^2 - Bh &= C(C-B)r_0^2 + A(A-B)p_0^2 \\ K^2 - CH &= A(A-C)p_0^2 + B(B-C)q_0^2 \end{aligned}$$

et si l'on suppose

$$A < B < C$$

on conclut immédiatement de ces relations

$$K^2 - Ah > 0 \qquad K^2 - Ch < 0$$

Au contraire $K^2 - Bh$ se compose d'un terme positif et d'un terme négatif, de sorte que son signe n'est pas connu d'avance, et que cette quantité peut être positive, négative ou nulle, suivant l'état initial. –

115 — Cela posé, la méthode d'intégration consiste à éliminer deux des variables p, q, r entre les équations (12), (13) et l'une des équations (11). On obtient ainsi une équation différentielle qui détermine la troisième variable. Nous allons éliminer p et r de manière à calculer d'abord la composante q relative à l'axe moyen.

On tire des équations (12) et (13) :

$$(16) \qquad p^2 = \frac{Ch - K^2 - B(C-B)q^2}{A(C-A)}$$

$$r^2 = \frac{K^2 - Ah - B(B-A)q^2}{C(C-A)}$$

et, en portant ces valeurs dans la deuxième des équations (11), il vient

$$dt = \pm \frac{B\sqrt{AC}\, dq}{\sqrt{Ch - K^2 - B(C-B)q^2}\sqrt{K^2 - Ah - B(B-A)q^2}}.$$

dt étant positif, on devra prendre $+$ ou $-$ suivant que dq sera positif ou négatif. — La relation précédente peut aussi s'écrire

$$(17) \qquad dt = \pm \frac{B\sqrt{AC}}{\sqrt{(Ch-K^2)(K^2-Ah)}} \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{B(C-B)}{Ch-K^2}q^2}\sqrt{1-\frac{B(B-A)}{K^2-Ah}q^2}}$$

Soit z une nouvelle variable liée à q par la relation

$$(18) \qquad q = z\sqrt{\frac{Ch-K^2}{B(C-B)}}$$

Substituant dans l'équation (17) et posant, pour abréger,

$$(19) \qquad s = \pm\sqrt{\frac{(C-B)(K^2-Ah)}{ABC}}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{(B-A)(Ch-K^2)}{(C-B)(K^2-Ah)}}$$

on trouve

$$Sdt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-m^2z^2}}$$

et, par suite, en intégrant et désignant par $\mathcal{E}$ une constante arbitraire

(20) $$St+\mathcal{E} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-m^2z^2}}$$

On en conclut

(21) $$z = \sin am\,(St+\mathcal{E})$$

De plus, en remplaçant q par sa valeur (18) dans les formules (16), on obtient aisément

(22) $$p^2 = \frac{Cb-K^2}{A(C-A)}(1-z^2)$$
$$r^2 = \frac{K^2-Ab}{C(C-A)}(1-m^2z^2)$$

En substituant à z sa valeur tirée de la relation (18) dans la formule (20) et en tenant compte dans les valeurs (21) des relations qui existent entre les trois fonctions elliptiques, on parvient définitivement au système suivant qui donne la solution complète du problème.

$$p = \sqrt{\frac{Cb-K^2}{A(C-A)}}\ \cos am\,(St+\mathcal{E})$$

(23) $$q = \sqrt{\frac{Cb-K^2}{B(C-B)}}\ \sin am\,(St+\mathcal{E})$$

$$r = \sqrt{\frac{K^2-Ab}{C(C-A)}}\ \Delta\, am\,(St+\mathcal{E})$$

Dans ces formules, la constante S et le <u>module</u> m sont déterminés par les relations (19).

Les arbitraires d'intégration sont $b, K, \mathcal{E}$..

116 — Par suite de l'hypothèse sur les grandeurs relatives de A, B, C, les radicaux des formules (19) et (22) sont tous réels.

Pour que la valeur absolue du module soit moindre que l'unité comme on le suppose dans la théorie des fonctions elliptiques, il faut que l'on ait

$$\frac{K^2 - Ah}{B - A} > \frac{Ch - K^2}{C - B}$$

Dans le cas contraire, on substituerait au changement de variable (18) le suivant :

$$q = z\sqrt{\frac{K^2 - Ah}{B(B-A)}}$$

et l'équation (17) donnerait encore les valeurs de p, q, r exprimables à l'aide des fonctions elliptiques avec un module moindre que l'unité.

117 — Cas particulier où $K^2 - Bh = 0$. — En supposant $K^2 = Bh$, la valeur (19) de m^2 se réduit à l'unité.

Par suite si l'on pose $u = St + \varepsilon$, la relation (20) donne

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

on en déduit

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{2u}$$

et enfin

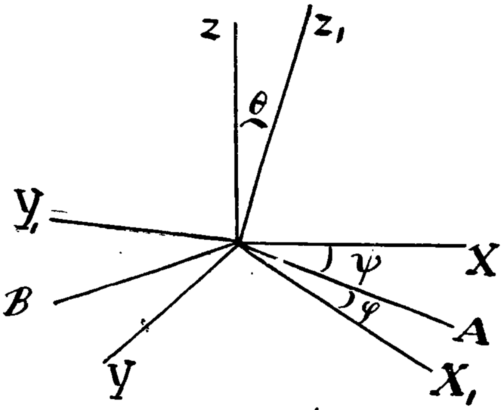
$$z = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

de sorte que z est la tangente hyperbolique de u.

$$z = tgh\, u.$$

Lorsque t croît indéfiniment, u croît aussi en valeur absolue et la valeur de z^2 tend vers l'unité ; par suite, d'après les formules (22), p et r tendent vers zéro. Donc, <u>la rotation tend à s'effectuer autour de l'axe moyen d'inertie</u>. —

118 – Calcul des angles ψ, θ, φ. — Pour compléter la solution analytique, il reste à exprimer les angles ψ, θ, φ en fonction du temps.



Prenons pour axe fixe OZ l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui est invariable en grandeur et en direction. Soit K sa longueur.

Les projections de K sur OZ_1 et OB sont $K\cos\theta$ et $K\sin\theta$. De la projection sur OB on déduit les projections sur OY_1 et OX_1 qui sont respectivement $K\sin\theta\cos\varphi$ et $K\sin\theta\sin\varphi$. Or, on sait que les composantes de K suivant OZ_1, OY_1, OX_1 sont Cr, Bq, Ap. On a donc les équations

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
K\cos\theta &= Cr\\
K\sin\theta\cos\varphi &= Bq\\
K\sin\theta\sin\varphi &= Ap.
\end{aligned}
$$

qui font connaître θ et φ en fonction du temps, puisque p, q, r sont déjà connus.

Pour avoir le troisième angle ψ, on reprendra l'équation (N° 108)

$$\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

et on y mettra les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ déduites des équations (24) ce qui donne

$$(25)\qquad K\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = Ap^2 + Bq^2$$

La première équation (24) et l'équation (12) donnent enfin

$$\sin\theta = 1 - \frac{C^2r^2}{K^2} \qquad Ap^2 + Bq^2 = b - Cr^2$$

ce qui transforme (25) en

$$(26)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{K(b - Cr^2)}{K^2 - C^2r^2}$$

et le second membre étant une fonction connue de t, on en déduira ψ par une quadrature.

b) Méthode géométrique.

119 — Poinsot a donné une forme géométrique à la théorie de la rotation d'un solide qui tourne autour d'un point fixe en vertu d'un mouvement acquis et sans l'intervention d'aucune force. L'étude, faite à ce point de vue n'exige pas l'établissement préalable des équations d'Euler; elle déduit toutes les propriétés du mouvement des théorèmes généraux de la Dynamique par une série de déductions purement géométriques.

Les forces extérieures n'existant pas ou se réduisant à une résultante passant par le point fixe nous avons d'abord les deux propriétés suivantes.

120 — 1° La force vive du solide est invariable dans le mouvement.

Si donc on désigne par ω la vitesse angulaire instantanée de rotation par μ le moment d'inertie relatif à l'axe instantané de rotation, et par h une constante, on a :

$$(27) \qquad \mu\omega^2 = h.$$

D'après ce qui a été dit précédemment (N° 103) cette relation se confond avec l'équation (12).

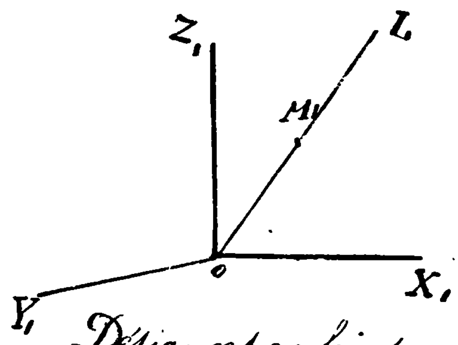
121 — 2° L'axe du moment résultant des quantités de mouvement conserve dans l'espace une grandeur et une direction constantes.

Or. Ap, Bq, Cr sont les projections de cet axe, sur les axes mobiles ; ces quantités ne sont pas constantes, puisqu'elles sont les projections d'une grandeur fixe sur des directions qui varient. Mais la somme des carrés des projections d'une même droite sur trois axes rectangulaires, fixes ou mobiles, représente toujours le carré de la longueur de cette droite. On a donc, en désignant par K une constante qui représente l'axe du moment résultant

$$(28) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

équation qui n'est autre que l'intégrale (13) que nous avons précédemment déduite des équations d'Euler.

122 — Il est maintenant très-simple de trouver géométriquement les propriétés du mouvement au moyen des relations (27) et (28) directement fournies par le théorème des forces vives et le théorème des moments des quantités de mouvement.



Soient à un instant quelconque OX_1, OY_1, OZ_1 les axes principaux du solide, relatifs au point fixe O. Soit OL l'axe instantané de rotation et M_1 le point (appelé pôle par Poinsot) où cet axe rencontre l'ellipsoïde d'inertie.

Désignons enfin par ρ le rayon vecteur OM_1. On a par la définition même de l'ellipsoïde d'inertie $\rho = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Par suite, l'intégrale (27) des forces vives peut s'écrire :

$$\frac{\omega}{\rho} = \sqrt{h}$$

et on en conclut :

Théorème I. — La vitesse angulaire de la rotation instantanée est proportionnelle à la distance du point fixe au pôle.

123 — Considérons le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point M_1 et désignons par X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées de ce point. L'équation de ce plan tangent est

$$Ax_1x + By_1y + Cz_1z = 1$$

Les cosinus directeurs de l'axe instantané sont $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ et on a par suite

$$x_1 = \frac{p\rho}{\omega} \quad y_1 = \frac{q\rho}{\omega} \quad z_1 = \frac{r\rho}{\omega}$$

Ces relations permettent d'écrire l'équation du plan tangent sous la forme suivante, en tenant compte de (29)

$$Apx + Bqy + Crz = \sqrt{h}.$$

Les cosinus directeurs de la normale en M_1 sont donc proportionnels à Ap, Bq, Cr ; cette normale est par suite parallèle à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui est perpendiculaire au plan invariable du maximum des aires. On en conclut ce théorème :

Théorème II. — Le plan tangent au pôle est parallèle au plan invariable du maximum des aires.

124 — Cherchons enfin la distance δ du plan tangent à l'origine. On a :

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}$$

ou bien d'après (28)

(30) $$\delta = \frac{\sqrt{h}}{R}$$

Donc :

Théorème III. — <u>Le plan qui touche l'ellipsoïde au pôle de la rotation reste toujours à la même distance du point fixe.</u>

125 — Il résulte des théorèmes II et III que le plan tangent au pôle est complètement fixe et on se représentera le mouvement du solide invariablement lié à son ellipsoïde d'inertie en concevant :
1° que cet ellipsoïde dont le centre est maintenu fixe, reste en contact avec un plan fixe.
2° qu'il tourne à chaque instant autour du rayon mené du centre au point de contact.
3° enfin qu'il tourne avec une vitesse angulaire, proportionnelle à la longueur de ce rayon.

126 — Seconde représentation géométrique du mouvement.

On peut déterminer le lieu des points de contact de l'ellipsoïde avec le plan fixe 1° sur l'ellipsoïde 2° sur le plan fixe.

On obtient ainsi deux lignes que l'on peut considérer comme les directrices de deux cônes ayant leur sommet commun au point fixe.

Le premier de ces cônes est le lieu des positions de l'axe instantané dans le solide ; le second est le lieu des positions de l'axe instantané dans l'espace.

Celui-ci est fixe ; celui-là est mobile avec le solide.

Il est aisé de voir que les deux cônes sont constamment tangents.. En effet, l'axe instantané est à chaque instant sur les deux surfaces ; elles ont donc toujours une génératrice commune. Au bout d'un temps infiniment petit, une génératrice infiniment voisine du cône mobile vient coïncider avec une génératrice du cône fixe ; et comme, dans ce mouvement, elle ne se déplace que d'infiniments petits du second ordre, il s'en suit que si, sur les deux cônes on prend, à partir de l'arête commune deux arêtes correspondantes, distantes de la première de quantités infiniment petites du premier ordre, elles seront distantes l'une de l'autre de quantités du second ordre; d'où il résulte que les deux cônes sont tangents.

D'ailleurs, le cône mobile ne glisse pas sur l'autre, puisque l'arête de contact est l'axe instantané de rotation. Donc enfin, le mouvement du solide peut être produit par le roulement du cône mobile sur le cône fixe.

127 — Lieu des pôles sur l'ellipsoïde. — La détermination de ce lieu résulte de la proposition suivante :

Théorème. — L'axe instantané de rotation décrit dans le solide un cône du second degré. (Poisson).

En effet, les équations de l'axe instantané par rapport aux axes mobiles sont :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

p, q, r sont liés par les équations (12) et (13) d'où l'on déduit :

$$A(K^2 - Ah)p^2 + B(K^2 - Bh)q^2 + C(K^2 - Ch)r^2 = 0$$

Eliminant p, q, r entre ces équations, il vient

$$(31) \qquad A(K^2 - Ah)x^2 + B(K^2 - Bh)y^2 + C(K^2 - Ch)z^2 = 0$$

équation d'un cône du second degré ayant ses axes principaux dans la même direction que ceux de l'ellipsoïde. —

XII. 128 — Nous avons vu que si l'on suppose $A < B < C$, on a nécessairement

$$K^2 - Ah > 0 \qquad K^2 - Ch < 0$$

Le signe de $K^2 - Bh$ dépend de l'état initial.

Cela posé, l'équation du cône est telle que si l'on a :

1° $K^2 - Bh > 0$, toute section $z = \gamma$ donne une ellipse. Donc, le cône enveloppe l'axe des z, c'est-à-dire le petit axe de l'ellipsoïde central.

2° $K^2 - Bh < 0$, toute section $x = \alpha$ donne une ellipse et le cône enveloppe l'axe des x, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipsoïde.

Si $K^2 - Bh = 0$, le cône se réduit à deux plans ayant pour équations

$$\frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{A(K^2 - Ah)}{C(Ch - K^2)}}$$

Ces plans qui passent par l'axe moyen divisent l'ellipsoïde en quatre fuseaux tels que quand le pôle de rotation se trouve à un instant sur l'un d'eux, il s'y trouve toujours.

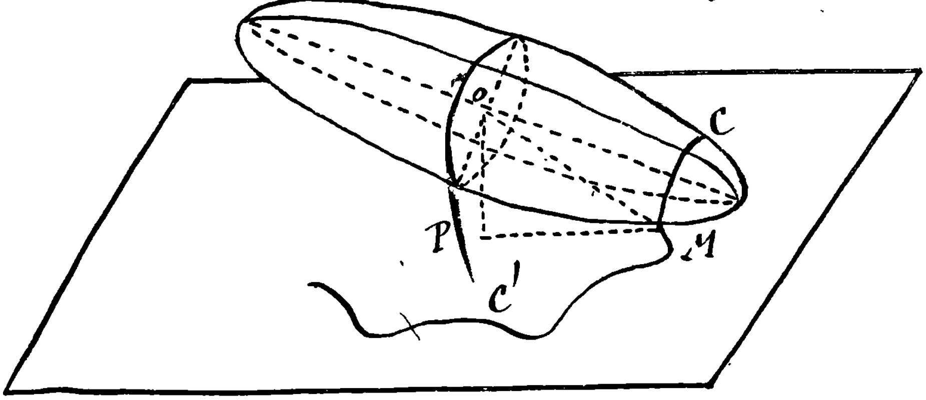
129 – **Remarque.** – Désignons par a, b, c les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde ; $a > b > c$. Soit d la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent fixe ; nous avons trouvé $d = \frac{\sqrt{h}}{K}$. Il en résulte que les inégalités

$$K^2 - Ah > 0 \qquad K^2 - Ch < 0$$

se réduisent aux conditions géométriques évidentes $d < a$, $d > b$.

130 – **Lieu des pôles sur le plan fixe.** – On se bornera à indiquer le principe de la méthode.

Soient C la courbe mobile et C' la courbe fixe ; la courbe C roule sur la courbe C'.



Les coordonnées d'un point, la courbe C, intersection de l'ellipsoïde d'inertie et d'un cône du second degré peuvent être exprimées en fonction du rayon vecteur r mené de O au point considéré.

La courbe C' peut être rapportée à un système de coordonnées polaires (ρ, φ) ayant le point P comme origine.

Par conséquent en désignant par dS la longueur d'un élément de C, on peut poser

$$dS^2 = f(r)\, dr^2$$

et on a, en désignant par $d\sigma$ la longueur d'un élément de C'

$$d\sigma = d\rho^2 + \rho^2 + d\varphi^2$$

Pour exprimer que C roule sur C', il suffit d'écrire $d\sigma = dS$.

$$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = f(r)\, dr^2$$

D'ailleurs, en posant $OP = d$, on a au point de contact,

$$r^2 = \rho^2 + d^2.$$

On a l'équation différentielle de la courbe C' en éliminant r entre les deux relations précédentes. On obtient ainsi

$$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{\rho^2 f\sqrt{\rho^2 + d^2}}{\rho^2 + d^2}$$

équation dont l'intégration conduit à une intégrale elliptique. –

IV – Mouvement d'un Solide autour d'un point fixe dans le Cas où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution.

131 – **Définitions.** – Nous prendrons l'axe de révolution pour axe mobile OZ_1, de sorte que $A = B$.

Nous appellerons :

équateur, le plan X_1OY_1 des axes principaux égaux,
ligne des noeuds, la trace de l'équateur sur le plan fixe XOY
précession, la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$ de la ligne des nœuds autour de OZ
nutation la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ de l'axe de révolution autour de la ligne des nœuds.
rotation propre autour de l'axe de figure, la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, $d\varphi$ représentant l'angle dont le solide tourne pendant le temps dt autour de OZ_1.

132 – Cas où le moment résultant des forces extérieures passe par le point fixe. Dans ce cas, qui est celui où le mouvement du solide s'effectue sans l'intervention d'aucune force, les fonctions elliptiques de la solution générale se réduisent aux fonctions trigonométriques.

En faisant $A = B$ et $L = M = N = 0$, les équations d'Euler deviennent

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)\,rq = 0$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C-A)\,rp = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

La dernière donne $r = \text{const.}$ Les deux autres sont des équations linéaires à coefficients constants dont les intégrales générales sont

$$p = P\sin(St + \varepsilon)$$

$$q = P\cos(St + \varepsilon)$$

P et ε étant des constantes arbitraires et S une constante déterminée par la relation :

$$S = \frac{A-C}{A}\,r.$$

Il reste à déterminer les angles d'Euler à l'aide des formules établies dans le cas général.

La première des équations (24) donne

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} \quad \text{ou} \quad \theta = \text{const.}$$

Les deux autres équations, divisées membre à membre, après avoir fait $B=A$, donnent

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(St+\mathcal{E}) \quad \text{ou} \quad \varphi = St+\mathcal{E}$$

Enfin, la précession est donnée par la formule (26). Or, on a dans le cas actuel,

$$A(p^2+q^2)+Cr^2 = h$$

$$A^2(p^2+q^2)+C^2r^2 = K^2$$

et les valeurs ci-dessus de p, q donnent $p^2+q^2 = P^2$. Il en résulte

$$h - Cr^2 = AP^2 \quad K^2 - C^2r^2 = A^2P^2$$

et, par suite, la formule (26) devient :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K}{A}$$

En résumé, on a :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K}{A} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{A-C}{A}r.$$

Donc, l'axe de figure décrit uniformément un cône de révolution autour de l'axe fixe du moment résultant des quantités de mouvement, et le solide tourne uniformément autour de l'axe de figure.

193 — **Changement de variables.** — Reprenons le cas où le moment résultant des forces extérieures n'est pas nul. Les équations d'Euler sont :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = L$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C-A)pr = M$$

$$C\frac{dr}{dt} = N.$$

Soit OA la ligne des noeuds et OB une droite perpendiculaire à OA et à OZ_1. Il y a avantage dans certains cas à substituer au système des axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1 le système des axes OA, OB, OZ_1. Les axes OA, OB sont à la fois mobile dans le solide et dans l'espace.

Désignons par $p'q'r'$ les composantes de la rotation instantanée suivant OA, OB, OZ_1. Il suffit pour avoir p', q' de projeter successivement sur OA et sur OB les composantes suivant OX_1 et OY_1, ce qui donne

$$p' = p\cos\varphi - q\sin\varphi$$

$$q' = p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

Pour introduire les nouvelles variables, ajoutons les deux premières équations d'Euler multipliées par $\cos\varphi$ et $-\sin\varphi$.

En ayant égard à la relation

$$\frac{dp'}{dt} = \cos\varphi\frac{dp}{dt} - \sin\varphi\frac{dq}{dt} - q'$$

et en posant

$$L' = L\cos\varphi - M\sin\varphi$$

on trouve ainsi :

$$A\frac{dp'}{dt} + (C-A)q'r + Aq'\frac{d\varphi}{dt} = L'.$$

De même si l'on ajoute les deux premières équations d'Euler multipliées par $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, et si l'on pose

$$M' = L\sin\varphi + M\cos\varphi$$

on obtient l'équation :

$$A\frac{dq'}{dt} - (C-A)p'r - Ap'\frac{d\varphi}{dt} = M'.$$

Dans ces relations, L' et M' représentent les composantes du moment résultant des forces extérieures suivant OA et OB.

Enfin, en supprimant les accents et désignant par p, q, r les composantes de la rotation et par L, M, N les composantes du moment résultant des forces extérieures suivant les nouveaux axes OA, OB, OZ_1, on a le système d'équations :

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr+Aq\frac{d\varphi}{dt}=L$$

$$A\frac{dq}{dt}+(C-A)pr+Ap\frac{d\varphi}{dt}=M$$

$$C\frac{dr}{dt}=N$$

De plus, les relations générales entre p, q, r et ψ, θ, φ, deviennent en appelant p, q, ce que nous appellions plus haut p', q'.

$$(33)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{d\theta}{dt} \\ q &= \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} \\ r &= \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

134 – Cas singulier d'une précession uniforme sans nutation.

Un cas intéressant est celui où, sous l'action de forces extérieures, le solide se meut suivant les mêmes lois qu'un corps abandonné à lui-même et soustrait à toute action extérieure, de sorte que l'axe de figure de l'ellipsoïde d'inertie est animé d'un mouvement de précession uniforme autour d'une droite fixe avec laquelle il fait un angle constant tandis que le solide tourne lui-même uniformément sur cet axe de figure.

Cherchons quelles doivent être la grandeur et la direction du moment résultant des forces extérieures, pour qu'en prenant la droite fixe pour axe des z, on ait

$$\theta=\gamma \qquad \frac{d\psi}{dt}=\beta \qquad \frac{d\varphi}{dt}=\alpha$$

α, β, γ étant des constantes.

Dans cette hypothèse, les relations (33) donnent

$$p=0 \qquad \frac{dq}{dt}=0 \qquad \frac{dr}{dt}=0$$

On déduit alors des équations (32) : $M=0$ $N=0$. Donc, les forces extérieures se réduisent à un couple dont le plan est perpendiculaire à la ligne des nœuds. Quant au moment de ce couple, il est donné par la première équation (32) qui donne :

$$(34)\qquad L=(C-A)\beta^2\sin\theta\cos\theta+C\alpha\beta\sin\theta$$

On voit donc qu'on peut toujours se donner arbitrairement tous les éléments du mouvement α, β et l'angle θ et qu'on trouve une valeur correspondante pour le moment du couple. Cette propriété n'existe pas dans la rotation naturelle où, par suite des formules obtenues N° 132, on a la relation :

$$C\alpha=(A-C)\beta\cos\theta.$$

XIII – 135 – Effort à exercer sur un point de l'axe de figure pour le déplacer.

Considérant un solide de révolution mobile autour d'un point fixe pris sur son axe de figure, on suppose que les forces extérieures se réduisent à celles qui passent par le point fixe et à une force appliquée en un point M de l'axe, à une distance $OM = l$ et dont les composantes suivant OA et OB soient respectivement égales à X et Y. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la composante parallèle à OZ, dont le moment est nul par rapport aux trois axes, de sorte que l'on peut regarder cette composante comme nulle.

On a alors

$$L = -lY, \quad M = lX, \quad N = 0$$

et les équations du mouvement deviennent

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} -lY &= A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr + Aq\frac{d\varphi}{dt} \\ lX &= A\frac{dq}{dt} - (C-A)pr - Ap\frac{d\varphi}{dt} \\ 0 &= \frac{dr}{dt}; \end{aligned} \right.$$

elles permettent de déterminer le mouvement du corps quand on se donne X et Y.

Nous nous proposons le problème inverse : Connaissant le mouvement du corps, en déduire à chaque instant la force qui, appliquée au point M produirait ce mouvement. Les équations précédentes fournissent alors immédiatement les valeurs de X et Y.

Supposons que $\frac{d\varphi}{dt}$ soit très grand. La troisième des équations (33) montre qu'alors r est très-grand et sensiblement égal à $\frac{d\varphi}{dt}$, de sorte que l'on a approximativement en négligeant dans les deux premières équations (33) les premiers termes des seconds membres

$$X = -\frac{Cp}{l}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$Y = -\frac{Cq}{l}\frac{d\varphi}{dt}$$

Soient u, v, w, les composantes de la vitesse du point M suivant OA, OB, OZ, on a

$$u = ql, \quad v = -pl, \quad w = 0$$

et, par suite

$$X = -\frac{Cv}{l^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$Y = -\frac{Cu}{l^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

d'où

$$Xu + Yv = 0$$

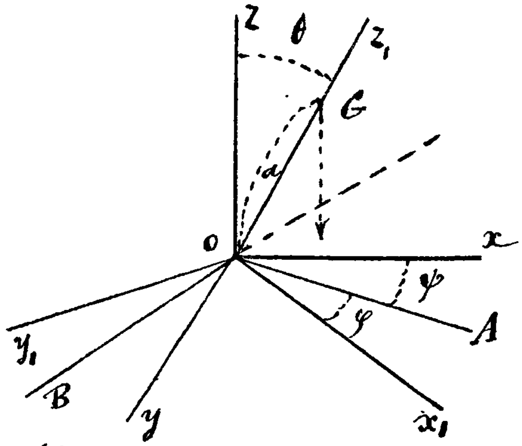
Ainsi la force est à chaque instant perpendiculaire à la vitesse du point M ; quant à son intensité F, on a

$$F = \frac{C}{l^2}\sqrt{v^2+u^2}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

Cette force F est l'effort qu'il faut exercer pour déplacer le point M de l'axe de rotation avec une vitesse égale à $\sqrt{v^2+u^2}$ – On voit qu'elle est proportionnelle à la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, ainsi qu'au moment

V – Mouvement d'un Solide de révolution pesant autour d'un point fixe.

136 – Équations. – Considérons un corps de révolution mobile autour d'un point fixe de son axe et soumis uniquement à la pesanteur. L'axe fixe OZ étant vertical, soit G le centre de gravité a sa distance au point fixe et P le poids total du corps.



Il est clair qu'il faut, dans les équations (32) du numéro (133), supposer M = 0, N = 0 et

$$L = Pa\sin\theta.$$

Les équations du mouvement sont donc

$$(35)\qquad \begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr + Aq\frac{d\varphi}{dt} = PA\sin\theta \\ &A\frac{dq}{dt} - (C-A)pr - Ap\frac{d\varphi}{dt} = 0 \\ &C\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}$$

avec

$$(6)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{d\theta}{dt} \\ q &= \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} \\ r &= \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

137 — Cas singulier de précession uniforme sans nutation. — On a montré au numéro 134 que l'on a

$$\theta = \gamma, \quad \frac{d\psi}{dt} = \beta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \alpha,$$

α, β, γ étant des constantes si les forces extérieures appliquées au corps satisfont aux conditions

$$M = 0, \quad N = 0$$

$$L = (C-A)\beta^2 \sin\theta \cos\theta + C\alpha\beta \sin\theta$$

Si la pesanteur agit seule sur le corps, les conditions $M = 0$. $N = 0$ seront satisfaites et la troisième condition se réduit à la suivante :

$$(C-A)\beta^2 \cos\theta + C\alpha\beta - Pa = 0$$

Cette relation détermine la précession β si l'on se donne la valeur constante de θ ainsi que la rotation α autour de l'axe de figure. On en tire les deux valeurs

$$\beta = \frac{-C\alpha \pm \sqrt{C^2\alpha^2 + 4(C-A)Pa\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}$$

Supposons α très-grand, la valeur approchée du radical est

$$C\alpha + \frac{2(C-A)Pa\cos\theta}{C\alpha}$$

et on en déduit les deux valeurs approchées

$$\beta_1 = \frac{Pa}{C\alpha}$$

$$\beta_2 = -\frac{C\alpha}{(C-A)\cos\theta}$$

La racine β_1 a toujours une valeur assez petite ; elle croît à mesure que α diminue ; elle est indépendante de l'angle θ. Elle change de signe avec la rotation α et avec le moment Pa.

La racine β_2 est au contraire très-grande ; elle dépend de l'angle θ et est indépendante du moment Pa.

Par suite à ces deux racines correspondent des lois essentiellement différentes pour le mouvement spécial du solide.

138 — Cas général. — Revenons au cas général. On déduit aisément trois intégrales premières des équations (35) et (36). En effet

1° la troisième équation (35) donne, en désignant par C_1 une constante

$$(37)\qquad r = C_1$$

2° ajoutant les deux premières équations (35) multipliées par p, q et tenant compte de la première équation (36) il vient

$$A(p\,dp + q\,dq) = Pa \sin\theta\, d\theta$$

d'où en intégrant :

$$(38)\qquad A(p^2+q^2) + 2Pa\cos\theta = C_2$$

3° Enfin en introduisant dans la deuxième équation (35) la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ tirée de la troisième équation (36) et remplaçant p par $\frac{d\theta}{dt}$, on trouve aisément

$$A(\sin\theta\, dq + q\cos\theta\, d\theta) - Cr\sin\theta\, d\theta = 0$$

d'où en intégrant :

$$(39)\qquad Aq\sin\theta + Cr\cos\theta = C_3$$

139 — Détermination directe des intégrales premières. — Il importe de remarquer que les trois intégrales précédentes s'obtiennent directement sans recourir aux équations (35) et (36) ni, par conséquent au changement de variables dont ces équations sont la conséquence. En effet :

1° L'équation (37) est une conséquence évidente de la troisième équation d'Euler correspondant aux axes ordinaires OX_1, OY_1, OZ_1.

2° Pour obtenir l'intégrale (38), il suffit d'appliquer au solide le théorème des forces vives.

Lorsque les forces appliquées à un système admettent une fonction, la différence entre la force vive du système et la fonction des forces est une constante (N° 42). De plus, pour un système pesant, la fonction des forces est $-Pc$, P étant le poids du système et c la distance du centre de gravité à un plan horizontal inférieur. (N° 44). —

Dans le cas actuel, la force vive est $\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$ et, d'après la figure du N° 136, la distance du centre de gravité au plan XOY est $a\cos\theta$. On a donc :

$$A(p^2+q^2)+Cr^2+2Pa\cos\theta=\text{const.}$$

et, puisque r est constant, cette équation se confond avec l'intégrale (38).

3° On obtient enfin l'intégrale (39) en exprimant que la composante suivant l'axe vertical OZ du moment résultant des quantités de mouvement est constante. En effet, les projections de ce moment résultant sur OB et OZ, (N° 136) sont respectivement Aq et Cr ; dont les angles de OB et OZ, avec OZ étant $\frac{\pi}{2}-\theta$ et θ, la projection du moment résultant sur OZ est,

$$Aq\sin\theta+Cr\cos\theta.$$

et, en égalant cette expression à une constante on retrouve l'équation (39).

140 – <u>Cas où les valeurs initiales de la précession et de la nutation sont égales à zéro.</u> – Supposons, pour $t=0$:

$$\frac{d\psi}{dt}=0 \quad \frac{d\theta}{dt}=0 \quad \theta=\theta_0.$$

On trouve, en remplaçant dans les équations (38) et (39) p et q par leurs valeurs (36), et en égalant les premiers membres de ces équations à leurs valeurs initiales :

$$(40)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2=2\lambda(\cos\theta_0-\cos\theta)$$

$$(41)\qquad \sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\mu(\cos\theta_0-\cos\theta)$$

On a posé, dans les équations ci-dessus :

$$(42)\qquad \lambda=\frac{Pa}{A}\qquad \frac{Cr}{A}=\mu.$$

Eliminons $\frac{d\psi}{dt}$ entre ces équations ; pour cela, multiplions l'équation (40) par $\sin^2\theta$ et remplaçons $\sin^4\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ par sa valeur tirée de l'équation (41). Nous aurons

$$(43)\qquad \sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2\lambda\sin^2\theta(\cos\theta_0-\cos\theta)-\mu^2(\cos\theta_0-\cos\theta)^2$$

L'équation (43) détermine θ. En supposant obtenue la valeur de θ, la relation (41) fera connaître la précession $\frac{d\psi}{dt}$; enfin, la troisième des équations (36) donnera $\frac{d\varphi}{dt}$.

141 — Intégration approximative dans le cas où la vitesse initiale de rotation autour de l'axe de figure est très-grande. —

La composante r de la rotation est constante pendant tout le mouvement et, d'après la troisième équation (36), sa valeur se confond avec la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$. Supposons que cette valeur soit très-grande.

La valeur μ est alors aussi très-grande; et pour que le second membre de l'équation (43) soit positif, il faut que $\cos\theta_0 - \cos\theta$ soit très-petit, c'est-à-dire que θ diffère très-peu de θ_0.

Posons donc

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon$$

Nous aurons en négligeant le carré de ε

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \varepsilon \sin\theta_0$$

$$\sin^2\theta = \sin^2\theta_0 + 2\varepsilon \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (43) il vient en supprimant les termes de l'ordre de ε^2 et en divisant les deux membres par $\sin^2\theta_0$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = \varepsilon(2\lambda \sin\theta_0 - \mu^2\varepsilon).$$

Cette équation peut s'écrire

(44) $$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\alpha-\varepsilon)}} = \mu\, dt$$

en posant

(45) $$\alpha = \frac{2\lambda \sin\theta_0}{\mu^2}$$

L'équation (44) étant mise sous la forme :

$$\frac{\frac{2\, d\varepsilon}{\alpha}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right)^2}} = \mu\, dt$$

on trouve, en intégrant

$$\arccos\left(1-\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) = \mu t$$

La constante d'intégration est nulle, ε s'annulant avec t. —

De cette dernière relation, on tire :

$$(46) \qquad \varepsilon = \frac{\alpha(1-\cos\mu t)}{2}$$

ou bien enfin

$$(47) \qquad \varepsilon = \alpha \sin^2 \frac{\mu t}{2}.$$

Ainsi, ε est périodique et α est le maximum de sa valeur. En ayant égard aux relations (45) et (42), on a

$$(48) \qquad \alpha = \frac{2 A P a \sin\theta_0}{C^2 r^2}.$$

142 – **Nutation.** — En prenant la dérivée de l'expression (46) on trouve pour la valeur de la nutation

$$(49) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Pa \sin\theta_0}{Cr} \sin\mu t.$$

143 – **Précession.** — Quant à la précession $\frac{d\psi}{dt}$, elle est donnée par l'équation (41) d'où l'on déduit avec la même approximation :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\mu\varepsilon}{\sin\theta_0}$$

ou, en remplaçant ε par sa valeur (46).

$$(50) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cr}(1-\cos\mu t)$$

Cette expression est périodique ; sa valeur moyenne est

$$\frac{Pa}{Cr}.$$

144 – **Valeur de la période.** — La nutation et la précession passent par la même valeur toutes les fois que le temps s'accroît d'une quantité τ telle que $\mu\tau = 2\pi$. La période du phénomène est donc $\frac{2\pi}{\mu}$ et on a, d'après la valeur (42) de μ

$$(51) \qquad \tau = \frac{2\pi A}{Cr}$$

145 - **Gyroscopes.** — Les divers résultats auxquels nous venons d'arriver se vérifient au moyen de la toupie gyroscopique et de la balance gyroscopique. Chacun de ces appareils se compose d'un tore maintenu dans une chappe qui fait corps avec une tige formant le prolongement de l'axe du tore.

Dans la toupie cette tige est terminée par un crochet qui se loge, après la mise en rotation du tore, dans un godet ou crapaudine. L'appareil étant abandonné à lui-même, l'axe paraît décrire un cône circulaire droit, d'une ouverture constante autour de la verticale, avec une vitesse angulaire d'autant plus faible que la rotation est plus grande.

En réalité, l'angle de l'axe avec la verticale n'est pas constant; mais ses variations très-petites sont insensibles. De même la précession de l'axe autour de la verticale n'est pas constante; mais la période de sa variation étant très-courte, l'oeil ne perçoit que sa valeur moyenne.

Dans la balance, la tige à une petite distance de la chappe, est articulée à un cylindre qui s'engage dans une crapaudine verticale. On peut faire occuper une position quelconque à un poids sur la portion de la tige opposée au tore, de manière à faire passer a du positif au négatif et, par conséquent, à obtenir une précession positive ou négative conformément à la formule (50).

VI - Effets de percussions sur un solide tournant autour d'un point fixe.

146 - Soient L, M, N les composantes du moment résultant des impulsions totales des percussions par rapport aux axes principaux d'inertie.

Pour obtenir les modifications apportées au mouvement, il suffit d'exprimer qu'il y a équilibre entre les impulsions totales des percussions et les accroissements (pris en sens contraire) des quantités de mouvement.

On en conclut que si le solide est primitivement en repos, les composantes du moment résultant (L, M, N) sont égales aux composantes Ap, Bq, Cr du moment résultant des quantités de mouvement, de sorte que l'on a :

$$(52)\qquad \begin{aligned} Ap &= L \\ Bq &= M \\ Cr &= N \end{aligned}$$

Ces équations déterminent la vitesse de rotation et l'axe instantané.

147 – Théorème. – L'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué du plan du couple résultant des percussions.

En effet, le plan du couple résultant a pour équation

$$Lx + My + Nz = 0$$

attendu qu'il est perpendiculaire à l'axe du moment résultant (L, M, N). Or dans l'ellipsoïde d'inertie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

le diamètre conjugué de ce plan a des cosinus directeurs proportionnels à $\frac{L}{A}$ $\frac{M}{B}$ $\frac{N}{C}$ et, par suite, à p, q, r d'après les équations (52).

Chapitre IV.

Mouvement d'un solide libre.

148 – Le mouvement le plus général d'un solide résulte d'une translation identique au mouvement de l'un quelconque de ses points, et d'une rotation autour de ce point.

Le point dont le mouvement règle la translation du système peut être pris arbitrairement; mais il y a avantage, comme nous allons le voir, à choisir le centre de gravité.

En effet, le mouvement du centre de gravité est le même que si, la masse entière du solide étant concentrée en ce point, on y appliquait la résultante de translation des forces extérieures. On peut donc écrire immédiatement les équations du mouvement de ce point.

D'autre part, la rotation autour du centre de gravité, rapportée à des axes de direction constante passant par ce point, peut être traitée comme un mouvement absolu en adjoignant aux forces extérieures les forces d'inertie d'entraînement et les forces centrifuges composées.

Ces dernières sont nulles, car le mouvement d'entraînement est une translation.

Les forces d'inertie d'entraînement se réduisent à une force unique passant par le centre de gravité, car ces forces sont parallèles et proportionnelles aux masses des points sur lesquels elles agissent fictivement.

Or, on a vu que le mouvement d'un solide autour d'un point ne dépendait que du mouvement résultant des forces appliquées par rapport à ce point. Donc, si ce point est le centre de gravité, on n'aura pas à tenir compte des forces d'inertie d'entraînement.

On pourra donc étudier le mouvement relatif d'un corps autour de son centre de gravité comme s'il était question d'un mouvement absolu et comme si le centre de gravité était fixe.

Si l'on voulait étudier le mouvement relatif d'un corps autour d'un point différent du centre de gravité, il faudrait tenir compte de la résultante des forces d'inertie d'entraînement et faire intervenir dans le calcul ses moments qui seraient différents de zéro, puisque cette résultante ne passerait plus par l'origine des coordonnées.

XIV.

Troisième partie.

Mécanique des Systèmes naturels.

149 – La Mécanique, telle que nous l'avons envisagée jusqu'à présent, doit être considérée comme une Science abstraite, bien que la notion de force sur laquelle elle repose soit empruntée à l'observation du monde physique.

Les systèmes de points se mouvant par l'application de forces quelconques, les solides dont la forme reste rigoureusement invariable sous l'action des forces appliquées, sont des êtres de raison; et il reste à voir par suite de quelles hypothèses sur la constitution de la matière, les principes de la Mécanique rationnelle deviennent applicables à l'étude des phénomènes naturels.

Ces hypothèses et les conséquences immédiates qui en dérivent forment le lien qui existe entre la Mécanique et la Physique.

Chapitre premier.

Notions générales sur la constitution de la matière.

150 – Molécules et atomes. — On considère un corps comme un assemblage de particules matérielles ou molécules, de dimensions très-petites, maintenues à distance les unes des autres par des actions mutuelles, dites forces moléculaires.

Suivant Newton, ces molécules seraient solides, dures et invariables. Aujourd'hui, pour rendre compte des phénomènes cristallographiques et chimiques, on conçoit autrement les molécules intégrantes des corps. On se les figure avec Ampère comme composées chacune de plusieurs atomes, exerçant les uns sur les autres des actions attractives ou répulsives; et comme rien n'oblige, dans l'état actuel de nos connaissances, à tenir compte des dimensions des atomes constitutifs d'une molécule, on fait abstraction de ces dimensions et on réduit les atomes à de simples points dénués d'étendue.

On conçoit donc chaque molécule comme un groupe de points soumis à des attractions ou répulsions réciproques. L'action mutuelle de deux molécules A et B résulte alors des actions mutuelles des points qui constituent ces molécules. L'action de A sur B n'a pas, en général, de résultante unique; elle se ramène à une force appliquée au centre de gravité de B et à un couple.

151 – Hypothèses sur les forces intérieures. — En résumé, on se représente les corps comme formés par des points agissant les uns sur les autres.

On admet de plus, en général, les hypothèses suivantes :

1° l'action mutuelle de deux points a et b consiste en deux forces égales et opposées appliquées, l'une au point a, l'autre au point b ;

2° ces forces sont dirigées suivant la distance ab ;

3° la valeur commune de ces forces ne dépend que de la distance r des deux points, par suite, elle est une fonction $\varphi(r)$ de cette distance.

4° la fonction $\varphi(r)$ décroit rapidement lorsque la distance r augmente ; elle devient insensible lorsque la variable r dépasse une limite très-petite.

Il est possible que l'étude approfondie des phénomènes naturels conduise à modifier ces hypothèses ; on doit les considérer, actuellement, comme ayant servi de point de départ aux progrès les plus importants de la Mécanique moléculaire et de la Physique mathématique.

152 – Homogénéité. — Isotropie. — Un corps est dit homogène lorsque dans toutes les parties extrêmement petites, dont l'ensemble constitue le corps, il présente la même constitution.

Un corps est dit isotrope lorsqu'il présente la même constitution dans toutes les directions autour d'un même point.

Pour qu'un corps soit isotrope, il faut que si d'un point quelconque du corps on mène dans une direction quelconque une droite de longueur très-grande par rapport à la distance moyenne de deux molécules, on rencontre toujours sur cette droite le même nombre de molécules orientées de toutes les manières possibles. Il faut donc que les molécules soient distribuées dans le corps de manière à ne présenter, ni quant au nombre, ni quant à l'orientation, aucune prédominance dans quelque direction que ce soit.

Ce mode de structure diffère essentiellement de celui que présentent les cristaux dans lesquels, suivant les minéralogistes, les centres de gravité des molécules forment un assemblage régulier de points situés sur les sommets de cellules parallélipipédiques égales déterminées par trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes rectangulaires ou obliques. Toutes ces molécules sont, en outre, identiquement orientées, de sorte que les atômes correspondants occupent des positions homologues dans les diverses cellules.

153 – Force élastique. — En un point M, dans l'intérieur d'un corps, imaginons un élément plan ω. Le plan de cet élément indéfiniment prolongé partage le corps en deux parties A et B. Soit R la résultante de translation de celles des actions exercées par A sur B dont la direction traverse ω.

La résultante R est ce que l'on appelle la force élastique exercée sur celle des faces de l'élément plan ω qui est contigüe à A.

154 – Cette résultante est, en général, oblique à l'élément plan ω. Si elle est normale à cet élément et dirigée vers **A**, elle représente une <u>traction</u>. Si, encore normale à cet élément, elle est dirigée vers B, elle représente une <u>pression</u>. Quand la force élastique est parallèle à l'élément ω, on lui donne le nom de <u>force élastique tangentielle</u>.

155 – La force élastique exercée sur celles des faces de ω qui est contigue à B s'obtiendrait de même en composant celles des actions exercées par B sur A dont la direction traverse ω. En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, cette nouvelle résultante est égale et opposée à la précédente; de sorte que les forces élastiques exercées sur les deux faces d'un élément plan quelconque sont égales et opposées.

156 – Le rapport $E = \frac{F}{\omega}$ représente la <u>force élastique rapportée à l'unité de surface</u>; on l'appelle simplement <u>force élastique</u>. Pour ne pas confondre la force élastique E avec la force élastique R, on peut appeler celle-ci <u>force élastique effective</u>. En conséquence, la force élastique effective sur l'une des faces d'un élément-plan s'obtient en multipliant la force élastique par l'aire de cet élément.

157 – Il résulte immédiatement des définitions que si l'on considère, dans un corps, un volume **V** limité par une surface quelconque, la résultante des actions exercées par les points extérieurs à **V** sur les points intérieurs est la résultante des forces élastiques effectives exercées sur les faces extérieures de tous les éléments-plans de la surface limite.

Car si les forces élastiques comprennent des actions de points extérieurs sur d'autres points extérieurs suivant des lignes traversant deux éléments-plans de la surface limite, ces actions étrangères se détruisent en composant la résultante générale, et il ne reste que les actions des points extérieurs sur les points intérieurs.

158 – Théorème. – <u>La force élastique exercée sur un élément ne dépend pas de l'orientation de cet élément, quand elle lui est constamment normale.</u> –

Le milieu étant rapporté à trois axes rectangulaires, soit M un point quelconque pris dans son intérieur.

Imaginons un tétraèdre infiniment petit dont un sommet soit en M, et dont les trois arêtes qui partent de ce point soient parallèles aux axes. Désignons par ω l'aire de la face triangulaire opposée au point M, et soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à cette face.

D'après un théorème connu sur la projection des aires, les trois faces triangulaires rectangles du tétraèdre, lesquelles sont perpendiculaires à OX, OY, OZ ont respectivement pour surfaces

$$a = \omega\alpha \qquad b = \omega\beta \qquad c = \omega\gamma.$$

Cela posé, la portion du corps comprise dans le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces élastiques effectives exercées sur ses 4 faces et des forces (y compris les forces d'inertie s'il y a mouvement) qui sollicitent sa masse.

Soit N la force élastique sur ω et N_1, N_2, N_3 les forces élastiques sur a, b, c du côté des coordonnées positives. Ces forces étant normales aux éléments sur lesquels elles s'exercent, la résultante des actions exercées sur le tétraèdre par le milieu environnant a pour projection sur les axes :

$$N\omega\alpha - N_1 a$$

$$N\omega\beta - N_2 b$$

$$N\omega\gamma - N_3 c$$

Soient maintenant X, Y, Z les composantes de la force, rapportée à l'unité de masse, qui agit au point M. Désignons par ρ la densité, ou masse de l'unité de volume, en ce point, et par v le volume du tétraèdre.

La masse du tétraèdre est ρv et les composantes de la force qui le sollicite sont

$$\rho X v \qquad \rho Y v \qquad \rho Z v$$

On a donc les trois équations d'équilibre :

$$N\omega\alpha - N_1 a + \rho X v = 0$$

$$N\omega\beta - N_2 b + \rho Y v = 0$$

$$N\omega\gamma - N_3 c + \rho Z v = 0$$

Le troisième terme de chacune de ces équations est un infiniment petit du troisième ordre négligeable par rapport aux deux autres qui sont du second ordre. En le supprimant et en tenant compte des relations qui existent entre les aires des quatre faces, les équations ci-dessus donnent les conditions :

$$N = N_1 = N_2 = N_3.$$

qu'il s'agissait d'établir.

Chapitre II.

Mouvement des solides naturels.

159 — **Propriétés caractéristiques des solides.** — Le caractère essentiel de l'état solide est la résistance au changement de forme ; cette propriété correspond théoriquement à une stabilité spéciale de l'assemblage moléculaire.

Des déformations se produisent cependant, soit momentanées, soit persistantes.

Tout corps solide soumis momentanément à l'action de forces extérieures éprouve une déformation qui disparaît lorsqu'on supprime les forces, pourvu que leurs intensités soient restées inférieures à certaines limites, variables avec les différents corps. Quand ces limites sont dépassées, la déformation est permanente.

Un corps qui, après avoir été déformé par des forces, revient exactement à sa forme primitive quand on supprime ces forces, est dit <u>parfaitement élastique</u>.

160 — Lorsqu'un solide naturel se meut sans éprouver de changement de forme appréciable pendant son mouvement, on peut, sans erreur sensible, lui appliquer tout ce qui a été dit relativement au mouvement d'un solide invariable.

Quand la déformation n'est pas insensible, la détermination des circonstances du mouvement ne peut s'effectuer que si l'on connaît les lois suivant lesquelles varient les actions que les diverses parties du corps exercent les unes sur les autres, quand leurs positions relatives viennent à changer. La question rentre alors dans le cas général de la recherche du mouvement d'un système de points soumis à leurs actions mutuelles et à des forces extérieures.

Nous n'aurions rien à ajouter à ce qui précède, si l'on n'avait jamais à considérer que le mouvement de solides isolés. Mais on a souvent à considérer des solides qui se meuvent en touchant d'autres solides, et il est nécessaire d'analyser les effets de ce contact, pour en tenir compte dans l'étude du mouvement des corps dont il s'agit.

Le contact peut n'exister que pendant un temps très-court, pendant lequel les mouvements des solides sont notablement modifiés ; c'est ce qui a lieu lorsqu'il se produit un <u>Choc</u>.

Le contact peut au contraire être continu, de sorte que les solides <u>glissent</u> ou <u>roulent</u> l'un sur l'autre.

Nous allons voir quelles sont les circonstances qui se produisent dans chacun de ces deux cas. —

I – Théorie du Choc.

161 – **Théorèmes généraux.** Quand les mouvements propres de deux solides sont tels que ces corps devraient venir occuper une même portion de l'espace, il se produit, pendant un temps très-court, quand ces corps sont arrivés au contact l'un de l'autre, des modifications finies de leurs mouvements. Ce phénomène est connu sous le nom de choc.

Pour faire rentrer l'étude du choc dans les théories générales de la Dynamique, il suffit de le considérer comme produit par des actions que des points de l'un des corps exercent sur des points de l'autre quand les distances mutuelles de ces points sont devenues moindres que le rayon de leur sphère d'action.

Ces actions réciproques, s'exerçant avec une intensité très-considérable pendant un temps très-court, sont des percussions intérieures par rapport au système des deux corps. On pourra donc appliquer, pendant le choc en négligeant les forces extérieures, les théorèmes de Dynamique où les forces intérieures n'entrent pas.

Par suite, si l'on considère le système des deux corps:

1° La résultante de translation des quantités de mouvement est constante en grandeur et en direction pendant toute la durée du choc.

2° Le moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur et en direction pendant toute la durée du choc.

162 – Considérons au contraire le théorème des forces vives. On peut, dans l'application de ce théorème, négliger le travail des forces extérieures, parce que, pendant le choc le déplacement des points d'application de ces forces sont insensibles. Mais il n'en est pas de même pour le travail des forces intérieures, à cause de la grandeur de leur intensité.

Nous avons vu (N° 45) que le système des forces intérieures admet une fonction. En désignant par $\varphi(r)$ l'action mutuelle de deux points et en posant $\int \varphi(r)\, dr = \psi(r)$, la fonction des forces intérieures est $-\sum \psi(r)$, le $\sum$ s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des points du système.

Par suite, en désignant par θ la force vive du système des deux corps, le théorème des forces vives donne, pour toute la durée du choc:

$$(1) \qquad \theta + \sum \psi(r) = \text{Constante}.$$

163 – **Choc de deux solides sphérique.** — Nous nous bornerons à étudier le cas de choc le plus simple, en supposant qu'il s'agisse de

de deux sphères homogènes animées de mouvements de translation rectilignes et uniformes suivant la ligne qui joint leurs centres.

Soient m, m' les masses des deux sphères ; v, v' leurs vitesses que nous supposons dirigées dans le même sens. Si m est en arrière de m' et que v soit plus grand que v', le choc se produit.

En raison de la symétrie du système par rapport à la droite suivant laquelle les centres des deux solides se mouvaient d'abord, ces deux centres resteront sur la même droite pendant et après le choc, et le mouvement de chacun des deux solides ne cessera pas d'être une translation : le choc n'aura donc pour effet que de modifier les vitesses.

Aussitôt que les corps sont arrivés au contact, il se développe entre celles de leurs molécules qui sont voisines du point de contact, des forces qui tendent à diminuer la vitesse de m et à augmenter celle de m' ; de sorte qu'après un temps très-court, les deux corps ont une vitesse commune u. Pour déterminer cette vitesse, il suffit de remarquer que la somme des quantités de mouvement des deux solides conserve constamment la même valeur. En égalant cette somme de quantités de mouvement prise avant le choc, à ce qu'elle devient au moment où les deux solides ont une même vitesse, on obtient la relation.

$$(2) \qquad mv + mv' = (m + m')u$$

d'où l'on déduit :

$$(3) \qquad u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

A partir de l'instant où les deux solides ont acquis une vitesse commune u, les choses se passent de diverses manières suivant la nature des solides ; nous supposerons deux cas extrêmes.

164 – 1° Corps dénués d'élasticité. — Supposons que les deux corps soient complètement mous, ou dénués d'élasticité, de manière que chaque sphère ne tende pas à modifier, au moyen de son élasticité, la forme nouvelle qu'elle a reçue. Dans ce cas, les deux sphères n'agissent pas l'une sur l'autre, les déformations qu'elles ont subies sont persistantes et elles continuent à se mouvoir ensemble avec la vitesse u déterminée par la formule (3).

165 – 2° Corps parfaitement élastiques. — Supposons, au contraire, que les deux corps n'aient pas subi de déformations persistantes et qu'ils

et qu'ils continuent à réagir l'un sur l'autre après que leurs vitesses sont devenues égales, de sorte que, au bout d'un temps très-court les sphères se séparent avec des vitesses différentes.

Supposons de plus, que les deux corps parfaitement élastiques reprennent alors exactement leurs formes primitives et que leur état intérieur soit, comme avant le choc, un état d'équilibre.

Voyons ce que donne dans ces hypothèses, le théorème des forces vives.

Reprenons l'équation (1) applicable dans le cas actuel, non seulement pendant la durée du choc, mais pendant toute la durée du mouvement, puisqu'il n'y a pas de forces extérieures.

Appelons S et S' les deux corps; pour former la valeur de $\sum\psi(r)$ relative à leur ensemble, on peut combiner de toutes les manières possibles: 1° deux points de S; 2° deux points de S'; 3° un point de S et un point de S'. On obtient ainsi trois termes α, α', β dont la somme est égale à $\sum\psi(r)$, de sorte que l'équation (1) des forces vives devient :

$$\theta+\alpha+\alpha'+\beta = \text{Const}^{e}.$$

Cela posé, le terme β n'a de valeur sensible que pendant le choc; de plus, par suite des hypothèses admises, chacune des quantités α, α' a la même valeur avant et après le choc. Par conséquent, il résulte de l'équation ci-dessus que la force vive θ du système a la même valeur avant et après le choc.

D'ailleurs cette force vive s'évalue en ne tenant compte que des translations des deux masses puisque l'on néglige les vibrations intérieures produites par le choc. Si donc on désigne par w, w' les vitesses acquises par m, m' à la fin du choc, on a la relation :

$$(4) \qquad m w^2 + m' w'^2 = m v^2 + m' v'^2$$

En outre, la somme des quantités de mouvement du système ne changeant pas pendant le choc, on a la seconde relation :

$$(5) \qquad m w + m' w' = m v + m' v'.$$

Les équations (4) et (5) déterminent w et w'. A cet effet, écrivons ces équations comme il suit :

$$m(w^2 - v^2) = m'(v'^2 - w'^2)$$
$$m(w - v) = m'(v' - w').$$

En divisant membre à membre, il vient :

$$w - w' = v - v'.$$

et, en adjoignant cette équation à l'équation (5) on trouve :

$$(6)\qquad w = \frac{(m-m')\,v + 2m'v'}{m+m'}$$

$$w' = \frac{(m'-m)\,v + 2m\,v}{m+m'}$$

166 – **Cas particuliers.** — 1° Supposons deux sphères égales dont l'une soit au repos avant le choc. On a dans ce cas

$$m = m' \qquad\qquad v' = 0$$

et les formules (6) donnent

$$w = 0 \qquad\qquad w' = v$$

Donc, la sphère mobile communique sa vitesse à l'autre et devient immobile après le choc.

2° Supposons maintenant une sphère tombant sur un plan fixe. Celui-ci peut être assimilé à une sphère dont la masse serait infinie ; on a donc :

$$m' = \infty \qquad\qquad v' = 0$$

il en résulte :

$$w = -v \qquad\qquad w' = 0$$

la sphère est donc renvoyée avec une vitesse égale et contraire à celle qu'elle avait avant le choc.

167 – Tous les solides naturels étant compris entre les deux limites extrêmes d'un défaut complet d'élasticité et d'une élasticité parfaite, il s'ensuit que le choc de ces solides doit présenter des circonstances intermédiaires entre celles qui se rapportent à ces deux limites. —

XV-

168 - Perte de force vive dans le choc des corps mous. —

Soient v et v' les vitesses initiales des deux sphères, et u leur vitesse commune après le choc. La diminution éprouvée pendant le choc par la double-force vive totale des deux corps a pour expression

$$mv^2+m'v'^2-mu^2-m'u^2 = m(v^2-u^2)+m'(v'^2-u^2)$$

$$= m(v-u)(v+u)+m'(v'-u)(v'+u).$$

qui se réduit à

$$(7) \qquad m(v-u)(v-v')$$

en éliminant $m'(v'-u)$ au moyen de l'équation (2) ci-dessus mise sous la forme

$$m(v-u) = m'(u-v')$$

Cette dernière relation donne encore les suivantes:

$$(8) \qquad \frac{v-u}{m} \quad \frac{u-v'}{m} \quad \frac{v-v'}{m+m'},$$

d'où l'on tire $v-u = \frac{m'}{m+m'}(v-v')$. En portant dans (7) et divisant par 2, on obtient définitivement

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

pour la <u>perte de force vive</u> produite par le choc.

169 - Théorème de Carnot. —

On peut donner une autre expression de la perte de force vive qui se produit dans le choc des corps mous. On arrive à cette expression en s'appuyant sur un théorème que nous allons établir par la théorie des percussions.

Supposons deux solides en mouvement arrivant au contact. Le choc commence à l'instant où les actions mutuelles de ces deux solides deviennent sensibles; postérieurement à cet instant, les deux corps se déforment, et on suppose que la déformation cesse au bout d'un temps très-court après lequel le système des deux corps forme un solide invariable unique.

Pendant le choc, en vertu des forces intérieures chaque point de ce système subit une percussion.

Soient pour un point quelconque dont la masse est m :

X, Y, Z les composantes de la percussion

a, b, c les composantes de la vitesse au commencement du choc

a', b', c' les composantes de la vitesse à la fin du choc.

Désignons par A, B, C les impulsions totales des forces X, Y, Z de sorte que

$$A = \int_0^\theta X\,dt \qquad B = \int_0^\theta Y\,dt \qquad C = \int_0^\theta Z\,dt$$

D'après le théorème sur l'effet des percussions (No. 59, p. 48) il y a équilibre entre les impulsions totales des percussions et les accroissements des quantités de mouvement pris en sens contraire, c'est-à-dire entre les systèmes de forces dont les composantes seraient exprimées pour chaque point par

$$A, \quad B, \quad C$$

et

$$m(a-a'), \quad m(b-b'), \quad m(c-c').$$

En exprimant cet équilibre par l'équation du travail virtuel, on a la relation :

$$\sum (A\delta x + B\delta y + C\delta z) + \sum m\left[(a-a')\delta x + (b-b')\delta y + (c-c')\delta z\right] = 0.$$

Le premier $\sum$ représente le travail virtuel du système de forces dont les composantes seraient exprimées par A, B, C pour chaque point. Ce travail n'est pas nul, pour un déplacement virtuel quelconque, bien que les composantes A, B, C soient comme les forces X, Y, Z, deux à deux égales et opposées pour le système des deux corps. (No. 37; p. 28). Mais ce travail sera nul, en particulier, si l'on choisit le déplacement virtuel de manière que la distance de deux points quelconques du système reste invariable. Or, c'est précisément ce qui a lieu si l'on prend pour ce déplacement virtuel le mouvement effectif du système des deux corps pendant un temps infiniment petit dt à partir de la fin du choc puisque, par hypothèse, ce système forme alors un solide invariable.

Si donc on suppose

$$\delta x = a'\,dt \qquad \delta y = b'\,dt \qquad \delta z = c'\,dt$$

l'équation du travail virtuel se réduit à la suivante

$$\sum m\left[(a-a')a' + (b-b')b' + (c-c')c'\right] = 0$$

Soient

$$a^2+b^2+c^2=v^2 \qquad a'^2+b'^2+c'^2=v'^2$$

$$(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2=u^2$$

d'où

$$aa'+bb'+cc'=\frac{v^2+v'^2-u^2}{2}$$

l'équation précédente devient alors

$$\frac{1}{2}\sum mv^2-\sum mv'^2=\frac{1}{2}\sum mu^2$$

On exprime ce résultat en disant que la perte de force vive est égale à la force vive relative aux vitesses perdues.

Cette proposition est connue sous le nom de Théorème de Carnot.

170 — Dans le cas des deux sphères, d'après ce théorème, la perte de force vive se présente sous la forme:

$$\frac{1}{2}m(v-u)^2+\frac{1}{2}m'(v'-u)^2$$

Cette expression se réduit effectivement à la valeur (9) quand on y remplace $v-u$ et $v'-u$ par leurs valeurs tirées des relations (8).

171 — Remarque. — La théorie du choc, telle que nous venons de l'exposer, dans les cas les plus simples, est en fait très imparfaite; elle s'appuie sur des hypothèses difficilement conciliables avec les idées actuellement admises sur la constitution des corps. Elle devrait d'ailleurs, pour être exacte, tenir compte des phénomènes thermiques qui se produisent dans le choc. En conséquence, les formules déduites de cette théorie ne peuvent être considérées que comme approximatives.

172 — Application au battage des pieux de fondations. — Lorsque, pour exécuter un travail mécanique, la pression ou l'effort direct que l'on peut exercer est inférieur à la résistance à vaincre, on a recours au choc. C'est ainsi que l'on enfonce par la chute d'un mouton les pieux destinés à soutenir les fondations que l'on doit établir sur un sol peu résistant.

Supposons que le choc s'effectue comme si le mouton et le pieu étaient des corps complètement dénués d'élasticité. Soient

m la masse du mouton

m' la masse du pieu

v' la vitesse du mouton à l'origine du choc

u la vitesse commune du pieu et du mouton à la fin du choc.

Considérons le mouvement du système formé par le pieu et le mouton pendant que le pieu s'enfonce dans le sol. Les forces appliquées sont la résistance R du sol et le poids du système mobile que nous considérerons comme négligeable par rapport à R.

Appliquons au mouvement le théorème des forces vives depuis le moment où le pieu se met en mouvement jusqu'au moment où il s'arrête.

La force vive initiale est $\frac{1}{2}(m+m')u^2$; la force vive finale est égale à zéro.

Pour évaluer le travail, désignons par ε l'enfoncement à un instant quelconque; le travail de R correspondant à un cheminement élémentaire $d\varepsilon$ est $-R\,d\varepsilon$, et le travail total est $-\int_0^\alpha R\,d\varepsilon$, α représentant l'enfoncement définitif du pieu.

On a donc

$$0-\frac{1}{2}(m+m')u^2=-\int_0^\alpha R\,d\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\alpha R\,d\varepsilon=\frac{1}{2}(m+m')u^2.$$

Le premier membre représente le <u>travail utile</u> accompli; on voit que ce travail est mesuré par la force vive postérieure au choc.

D'autre part, si l'on désigne par P le poids du mouton et par H la hauteur de chute on a, d'après la loi de la chute des corps pesants :

$$PH=\frac{1}{2}mv^2$$

d'où il résulte que le <u>travail moteur</u> PH est mesuré par la force vive antérieure au choc.

Si donc, il n'y avait pas une perte de force vive, le travail utile serait exactement égal au travail moteur. Par suite, la perte de force vive produite par le choc équivaut à une perte de travail utile. Cette perte, déduite de l'expression (9) en y faisant $v'=0$, a pour valeur

$$\frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}v^2=\frac{m'}{m+m'}PH.$$

La fraction perdue du travail utile est $\frac{m'}{m+m'}$; elle est d'autant moindre que m est plus considérable par rapport à m'.—

II – Roulement et glissement des Solides naturels.

173 – Mouvement d'un cylindre pesant sur un plan incliné –

Supposons qu'un cylindre homogène descende en roulant sur un plan incliné sous la seule action de la pesanteur, de manière que son axe de figure reste toujours parallèle à la trace horizontale du plan.

La vitesse angulaire du corps, dans un mouvement de rotation autour de son axe, va en s'accélérant comme la vitesse de son centre de gravité ; et cela ne peut avoir lieu que si ce corps éprouve de la part du plan une réaction tangentielle F dirigée en sens contraire du mouvement.

Si nous désignons par M la masse du cylindre, par R son rayon, par v la vitesse de son centre de gravité, par ω la vitesse angulaire avec laquelle il tourne autour de l'axe, et par φ l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon, nous aurons

$$Mg \sin\varphi - F$$

pour la somme des projections des forces extérieures sur la direction du mouvement du centre de gravité, et par suite ce mouvement sera déterminé par l'équation

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi - \frac{F}{M}$$

La somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe du cylindre se réduit à FR de sorte que le mouvement de rotation autour de cet axe sera déterminé par l'équation

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{FR}{\sum mr^2}$$

ou bien, en remplaçant le moment d'inertie $\sum mr^2$ par sa valeur $\frac{1}{2}MR^2$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2F}{MR}$$

Mais v doit être égal à $R\omega$, puisqu'il y a roulement du cylindre sur le plan : on en déduit

$$g\sin\varphi - \frac{F}{M} = \frac{2F}{M}$$

d'où

$$F = \frac{1}{3}Mg\sin\varphi.$$

Le frottement que le cylindre éprouverait de la part du plan s'il glissait au lieu de rouler, serait égal à $f\,M\,g\cos\varphi$, en désignant par f le coefficient de frottement, la réaction F que le plan exerce sur ce cylindre quand il y a simple roulement ne pouvant pas être supérieure à ce frottement il faut que l'on ait

$$\frac{1}{3}M\,g\sin\varphi < f\,M\,g\cos\varphi$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg}\varphi < 3f$$

Lorsque cette condition est remplie, le cylindre roule sur le plan et l'on trouve les valeurs de v et ω au moyen des relations établies précédemment, dans lesquelles on remplace F par sa valeur $\frac{1}{3}M\,g\sin\varphi$.

175 – Si l'on avait

$$\operatorname{tg}\varphi > 3f$$

le cylindre ne roulerait pa sur le plan; mais il glisserait, et le frottement qu'il éprouverait le ferait également tourner autour de son axe. En désignant par F ce frottement, on aurait encore pour déterminer v et ω, les équations

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi - \frac{F}{M}\ ,\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2F}{MR};$$

seulement, au lieu de chercher la valeur de F de manière que l'on ait $v = R\,\omega$, on devrait supposer

$$F = f\,M\,g\cos\varphi.$$

Chapitre II.

Equilibre des fluides.

L'étude des fluides sera divisé en deux parties: l'hydrostatique et l'hydrodynamique, la première traitant de l'équilibre, l'autre, du mouvement des fluides.

176 – **Propriétés caractéristiques des fluides.** – Dans les fluides, l'état des molécules est instable; ces molécules sont très-mobiles les unes par rapport aux autres et le moindre effort suffit pour changer leurs positions relatives.

On divise les fluides en deux catégories: les liquides sur lesquels l'action des forces extérieures, même très-considérables, ne produit que de faibles variations de volume, et les gaz dont le volume varie sous l'action des moindres efforts.

Par suite de la mobilité des molécules, tout fluide en équilibre doit être isotrope. En effet, les actions des molécules les unes sur les autres doivent être très-faibles, et ne peuvent exercer aucune influence sur l'orientation de ces molécules.

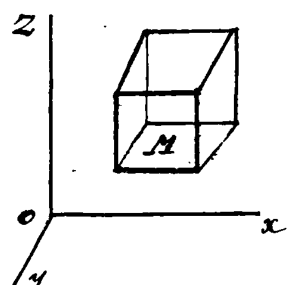
Il résulte de l'isotropie que la force élastique est normale, en chaque point, à l'élément sur lequel elle s'exerce et, par conséquent, qu'elle reste la même quelle que soit l'orientation de cet élément.

Enfin cette force élastique est une pression, attendu qu'un fluide doit être comprimé pour être maintenu en équilibre.

I – Conditions de l'équilibre.

177 – **Equations générales de l'équilibre.**

Soit p la pression, rapportée à l'unité de surface en un point M d'un fluide ayant pour coordonnées x, y et z, ρ la densité en ce point, et X, Y, Z les composantes parallèles aux axes, de la force appliquée, cette force étant rapportée à l'unité de masse.



Construisant au point M un parallélipipède infiniment petit ayant pour arêtes dx, dy, dz, la condition nécessaire pour l'équilibre du fluide est que ce parallélipipède soit lui-même en équilibre quel que soit le point M sous l'action des pressions qu'il supporte et de la force appliquée.

et de la force appliquée. Cette dernière a pour composantes parallèles aux axes

$$\rho X dx\, dy\, dz,$$
$$\rho Y dx\, dy\, dz,$$
$$\rho Z dx\, dy\, dz.$$

Les pressions sur les faces du parallélipipède parallèles au plan YOZ sont les seules qu'il y ait lieu de considérer dans la projection sur OX. Or la pression sur la face de gauche est $p\, dy\, dz$, et la pression sur la face de droite a pour valeur $\left(p + \frac{dp}{dx}\right) dy\, dz$. On a donc l'équation

$$p\, dy\, dz - \left(p + \frac{dp}{dx}\right) dy\, dz + \rho X dx\, dy\, dz = 0$$

En réduisant et opérant de même suivant OY et OZ, on obtient

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho X, \qquad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \qquad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Ces équations sont dues à Euler. Les seconds membres doivent satisfaire à des conditions auxquelles on parvient de la manière suivante.

Multipliant les trois équations respectivement par dx, dy, et dz, et ajoutant il vient

$$(2) \qquad \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = \rho\left(X dx + Y dy + Z dz\right)$$

Le premier membre est la différentielle totale de la fonction p; il faut donc que le second membre soit la différentielle exacte d'une fonction de coordonnées, d'où les trois conditions

$$\frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy},$$
$$\frac{d(\rho Z)}{dx} = \frac{d(\rho X)}{dz},$$
$$\frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que le fluide soit en équilibre. Lorsqu'elles se trouveront remplies, il suffira de donner la pression en un point pour qu'elle soit déterminée dans toute l'étendue du fluide. L'intégration de l'équation (1) donne en effet

$$p = F(x, y, z) + C$$

et il suffira, pour déterminer la constante, de connaître la pression en un point

178 – **Surfaces de niveau.** — On appelle <u>surface de niveau</u> une surface telle qu'en tous ses points la pression soit la même. Si l'on a

$$p = f(x, y, z),$$

les surfaces de niveau sont définies par l'équation

$$f(x, y, z) = \text{Constante}.$$

A chaque valeur de la constante correspond une surface particulière; en chaque passe une surface de niveau.

179 – **Théorème.** — <u>La force appliquée en un point d'un fluide est normale à la surface de niveau qui passe par ce point.</u>

En effet les cosinus directeurs de la normale à la surface de niveau passant par le point x, y, z sont proportionnels à $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$. Or

$$\frac{df}{dx} = \frac{dp}{dx} = \rho X$$

Ces cosinus directeurs sont donc proportionnels à $\rho X, \rho Y$ et ρZ ou à X, Y et Z.

180 – <u>Cas où les forces extérieures admettent une fonction.</u> — Si les forces appliquées admettent une fonction φ, on a

$$X = \frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = \frac{d\varphi}{dy}, \quad Z = \frac{d\varphi}{dz};$$

et, par suite,

$$(3) \qquad dp = \rho\, d\varphi.$$

D'après cette équation, p est constant en même temps que φ et inversement; on a donc $p = \psi(\varphi)$; par suite ρ est aussi fonction de φ. Cette dernière condition est nécessaire et suffisante pour que le second membre soit une différentielle exacte.

Les surfaces de niveau sont définies par l'équation

$$\varphi = \text{Constante},$$

et la densité reste la même en tous les points d'une surface de niveau.–

181 – Cas particuliers. — 1° Le fluide est incompressible.
Alors, ρ est constant, de sorte qu'en intégrant, on a

$$p = \rho\varphi + C.$$

2° Le fluide est un gaz suivant la loi de Mariotte.
Dans ce cas, $p = K\rho$, K étant une fonction de la température. Dès lors, la température, comme la densité, demeure constante sur une même surface de niveau.
L'équation (8) devient

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{K},$$

d'où

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{K}}$$

Le premier cas est celui des liquides, le second celui des gaz parfaits.

XVI. 182 – Application à la pesanteur.

— Dans le cas où la seule force extérieure est la pesanteur, et où le milieu a des dimensions assez petites pour que l'intensité et la direction de cette force puissent être regardées comme constantes l'équation $dp = \rho\, d\varphi$ devient

$$dp = \rho g\, dz.$$

Les surfaces de niveau sont définies par l'équation $z =$ constante. Ce sont des plans horizontaux.

1° Cas des liquides. — Dans les liquides, ρ est constante. Donc

$$p = C - \rho g z$$

ou

$$p = p_0 + g\rho(z_0 - z) = p_0 + \varpi_0 (z_0 - z)$$

en appelant ϖ_0 le poids spécifique.

2° Cas des gaz. — Nivellement barométrique. — Pour les gaz parfaits, $p = K\rho$, K étant fonction de la température ; on a donc

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{K}\, dz,$$

et, en supposant la température constante,

$$l\frac{p_0}{p} = \frac{g}{K}(z - z_0)$$

Cette formule, appliquée à l'atmosphère terrestre permet d'obtenir la la distance verticale de deux points quand on a mesuré les pressions en ces deux points. Elle suppose la loi de Mariotte rigoureusement exacte et l'intensité de la pesanteur constante ainsi que la température dans la portion du milieu que l'on considère.

Si la température a des valeurs différentes t_1 et t_2 aux deux stations on peut supposer approximativement que la température du milieu est égale à la moyenne $\frac{t'+t^2}{2}$.

183 – Influence de la variation de l'intensité de la pesanteur. Equilibre d'un gaz dont les points sont attirés par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

— Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz menés par le centre d'attraction qui, dans le cas de l'atmosphère terrestre coïncide avec le centre de la terre, et r la distance d'un point $M(x, y, z)$ à l'origine. L'attraction en ce point, rapportée à l'unité de masse, peut être représentée par $\frac{f}{r^2}$, f étant un coefficient constant. Donc

$$X = -\frac{fx}{r^3}$$

$$Y = -\frac{fy}{r^3},$$

$$Z = -\frac{fz}{r^3}$$

par suite

$$dp = -\frac{f}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\rho$$

ou

$$dp = -\rho\frac{f\,dr}{r^2}$$

La fonction des forces relatives à l'attraction newtonienne est $\frac{f}{r}$; donc les surfaces de niveau sont des sphères et la température doit pour que l'équilibre soit possible, être constante en tous les points d'une même couche sphérique.

Posant alors $\rho = \frac{p}{K}$, K est une fonction de la température et, par suite, de r, de sorte que l'équation devient

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{K}\,\frac{dr}{r^2}$$

Pour achever l'intégration, il faut faire une hypothèse sur la fonction K. Supposons, par exemple, la température constante; alors K devient une constante et l'intégration donne, en désignant par r_0 le rayon de la terre, et par p_0 la pression à sa surface,

$$l = \frac{p}{p_0} = \frac{f}{K}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

d'où

$$\frac{p}{p_0} = e$$

Or on a $\frac{f}{r_0^2} = g$; si de plus on pose $r - r_0 = z$, il vient

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g r_0}{K}\frac{z}{r_0+z}}$$

Lorsque z est très-petit, on peut le négliger devant r_0 et on a la formule

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g}{K}z}$$

qui ne diffère pas de celle qui a été obtenue au numéro précédent.

184 – Equilibre relatif d'un liquide renfermé dans un vase tournant.

On suppose le liquide en équilibre relatif dans un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Soit ω la vitesse angulaire.

Les forces directement appliquées se réduisant à la pesanteur, on n'a qu'une composante $-g$ parallèle à OZ; mais il faut y joindre les forces apparentes qui, dans le cas de l'équilibre relatif, se réduisent à la force d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire à la force centrifuge dont les composantes parallèles aux axes sont

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0.$$

Il est clair qu'il existe une fonction des forces, et on a

$$d\varphi = \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz,$$

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - gz.$$

Les Surfaces de niveau ont donc pour équation

$$z = C + \frac{\omega^2}{2g} \cdot (x^2 + y^2);$$

ce sont des paraboloïdes de révolution. L'un de ces paraboloïdes forme la surface libre. Pour obtenir la valeur de la Constante qui correspond à cette surface libre, il faut connaître la forme du vase et le volume du liquide.

Considérant en particulier, le cas où ce vase est un cylindre de révolution de rayon a, soit h la hauteur du liquide dans le vase à l'état de repos; il suffit alors d'exprimer que le volume du liquide est égal à $\pi a^2 h$.

Si l'on prend pour volume élémentaire celui d'un anneau compris entre deux cylindres de rayon r et $r + dr$, l'élément de volume a pour valeur $2\pi z r dr$, de sorte que le volume total est

$$2\pi \int_0^a z r dr = 2\pi \int_0^a \left(C + \frac{\omega^2}{2g} r^2\right) r dr = 2\pi\left(\frac{Ca^2}{2} + \frac{\omega^2}{2g}\frac{a^4}{4}\right)$$

On a donc pour déterminer C l'équation

$$C = h - \frac{\omega^2 a^2}{4g}$$

Il reste à calculer la pression

$$dp = \rho\left[\omega^2(x dx + y dy) - g dz\right]$$

d'où puisque ρ est constant,

$$p = \rho\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz\right] + C' = -g\rho C + C'$$

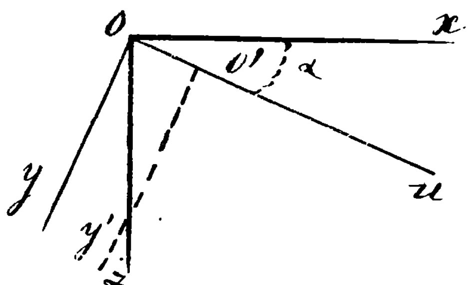
Pour déterminer la Constante C', il faut considérer la surface libre. Soit p_0 la pression sur cette surface, remplaçant C par la valeur calculée plus haut, on obtient l'équation

$$p_0 = -h\rho g + \frac{\omega^2 a^2 \rho}{4} + C'$$

Le problème est entièrement résolu. –

II – Pression d'un liquide pesant sur les parois.

185 – **Pression sur une paroi plane.** — La pression exercée par un liquide pesant sur un élément infiniment petit lui est normale ; les pressions élémentaires exercées sur une paroi plane sont donc des forces parallèles, et, par suite, elles ont une résultante unique.



Prenant la surface libre pour plan des xy et l'axe OZ dirigé de haut en bas, on a alors pour chaque point de la paroi

$$p = p_0 + \varpi z ;$$

et, par suite la pression sur un élément $d\omega$ a pour valeur $p\,d\omega + \varpi z\,d\omega$. Pour avoir la pression totale P, il faut intégrer sur toute la paroi ; ainsi

$$P = p_0 \int d\omega + \varpi \int z\,d\omega .$$

$\int d\omega$ est l'aire totale ω ; de plus, si z_1 désigne la coordonnée z du centre de gravité,

$$\omega z_1 = \int z\,d\omega ;$$

donc

$$P = p_0 \omega + \varpi z_1 \omega$$

Si l'une des faces de la paroi est à l'extérieur du vase, elle est soumise à la pression $p_0\,\omega$, de sorte que la poussée exercée par le liquide est égale à $\varpi z_1 \omega$. Elle est aussi égale au poids d'un cylindre de liquide ayant pour base la paroi et pour hauteur la distance de son centre de gravité à la surface libre.

186 – **Centre de pression.** — On appelle centre de pression le point où la résultante des pressions qui s'exercent sur une paroi rencontre cette paroi.

Prenant pour axe des y l'intersection du plan de la paroi avec la surface libre, on rapportera les points de la paroi à Oy et à l'intersection Ou de son plan avec ZOX. La deuxième face de la paroi étant supposée à l'intérieur du vase, on a en chaque point

$$p = \varpi z .$$

Prenant les moments par rapport à Oy et Ou et représentant par

par u_1 et y_1 les coordonnées du centre de pression, on obtient les deux équations

$$P u_1 = \int u p\, d\omega$$

$$P y_1 = \int y p\, d\omega.$$

Or

$$p = \varpi z = \varpi u \sin \alpha, \text{ donc}$$

$$P u_1 = \varpi \sin \alpha \int u^2 d\omega$$

$$P y_1 = \varpi \sin \alpha \int y u\, d\omega$$

De plus

$$P = \varpi \sin \alpha \int u\, d\omega$$

On en tire

$$u_1 = \frac{\int u^2 d\omega}{\int u\, d\omega}$$

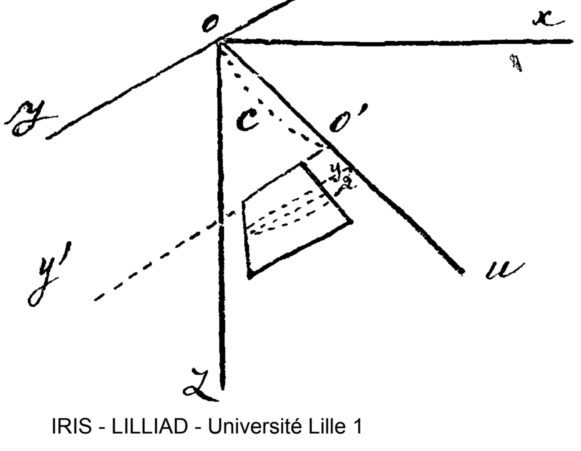
$$y_1 = \frac{\int y u\, d\omega}{\int u\, d\omega}$$

Remarque. — Si l'on prenait pour axe des y une parallèle à $O'y'$ à Oy, menée à une distance $OO' = c$, on aurait

$$u_1 = \frac{\int u\,(u+c)\, d\omega}{\int (u+c)\, d\omega},$$

$$y_1 = \frac{\int y\,(u+c)\, d\omega}{\int (u+c)\, d\omega}.$$

187 — Application. — Centre de pression d'un trapèze. — Soit par exemple, un trapèze de hauteur h dont les bases sont horizontales et respectivement égales à a et b. Rapportant le trapèze à l'axe Ou et à un axe $O'y'$ qui se confond avec sa base supérieure, soit c la distance OO'. L'aire $d\omega$ d'un élément de surface compris entre deux parallèles aux bases est $(y_1 - y_2)\, du$



y_1 et y_2 désignant les coordonnées de ses extrémités.
On a d'ailleurs la relation

$$\frac{y_1 - y_2 - a}{b - a} = \frac{u}{h}$$

d'où

$$y_1 - y_2 = a + \frac{(b-a)\,u}{h}$$

Or, la coordonnée u_1 du centre de pression est donnée par la formule

$$u_1 = \frac{\int u\,(c+u)\,(y_1 - y_2)\,du}{\int (c+u)\,(y_1 - y_2)\,du}$$

Le dénominateur a pour valeur

$$\int_0^h \left((ac + au) + \frac{(b-a)\,cu}{h} + \frac{(b-a)\,u^2}{h} \right) du$$

$$= ach + \frac{ah^2}{2} + \frac{(b-a)\,ch}{2} + \frac{(b-a)\,h^2}{3}$$

$$= ch\,\frac{a+b}{2} + \frac{h^2}{6}(a + 2b)$$

$$= \frac{h}{12}\left(6c\,(a+b) + 2h\,(a+2b)\right)$$

Calculant de même le numérateur, on trouve

$$\frac{ach^2}{2} + \frac{ah^3}{3} + \frac{(b-a)\,ch^2}{3} + \frac{(b-a)\,h^3}{4}$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[2c\,(a+2b) + h\,(a+3b)\right]$$

On a donc

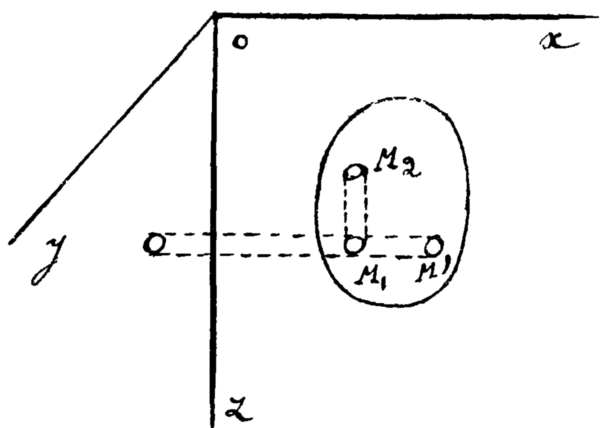
$$u_1 = h\,\frac{2c\,(a+2b) + h\,(a+3b)}{6c\,(a+b) + 2h\,(a+2b)}$$

La connaissance de u_1 suffit pour déterminer le centre de pression, car il est clair que ce point se trouve sur la droite qui joint les milieux des deux bases.

188 - **Pression sur une paroi courbe.** — Quand on considère une paroi courbe, les pressions élémentaires ne sont plus des forces parallèles ; elles n'auront donc pas en général de résultante unique ; mais on pourra toujours les réduire à une force passant par un point arbitraire et à un couple ou encore à deux forces.

Lorsqu'on considère la surface totale d'un solide immergé dans un liquide, les pressions du fluide se réduisent toujours, comme on va le montrer, à une force unique.

189 - **Principe d'Archimède.** — Considérant un solide immergé dans un liquide, soient $d\omega$ l'un des éléments M_1 de sa surface, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à cet élément. Les composantes parallèles aux axes de la pression qui s'exerce sur cet élément sont



$$p\,d\omega\,\alpha, \quad p\,d\omega\,\beta, \quad p\,d\omega\,\gamma,$$

ou en représentant par da, db, dc, les projections de l'élément sur les trois plans des coordonnées,

$$p\,da, \quad p\,db, \quad p\,dc$$

Si l'on prolonge le cylindre projetant l'élément M_1 sur le plan yOz il intercepte un deuxième élément M' sur lequel la pression est la même qu'en M_1; les deux composantes parallèles à Ox des pressions en M_1 et M' sont évidemment égales et elles se détruisent puisqu'elles sont de signes contraires. On verrait de la même manière que les composantes parallèles à Oy se détruisent, de sorte qu'il suffit de considérer les composantes parallèles à OZ ; ce sont des forces parallèles qui admettent par suite une résultante unique.

Considérant deux éléments M_1 et M_2 situés sur la même verticale ; soient z_1 et z_2 les valeurs de z qui leur correspondent. La pression sur l'élément M_1 est $p_0 + \varpi z_1$; la pression sur M_2 est de même $p_0 + \varpi z_2$; de sorte qu'en réunissant les composantes parallèles à OZ des deux pressions élémentaires, on obtient une force élémentaire dirigée de bas en haut et égale à

$$\varpi (z_2 - z_1)\, dc.$$

Cette quantité représente le poids d'un volume du liquide égale à la portion du cylindre projetant qui se trouve à l'intérieur du corps.

La résultante est donc une force verticale dirigée de bas en haut, et égale au poids du liquide déplacé ; elle peut d'ailleurs être considérée comme appliquée au centre de gravité de ce liquide. C'est en cela que consiste le principe d'Archimède.

XVII.

190 — Généralisation du principe d'Archimède pour le cas où l'on considère un fluide compressible et où l'on tient compte des variations de la pesanteur. — Quand on n'a pas égard aux variations de la direction de la pesanteur les surfaces de niveau sont toujours des plans horizontaux, et il est facile de voir que les composantes horizontales des pressions se détruisent comme dans le cas particulier examiné plus haut.

Dans l'équation différentielle

$$dp = \rho g dz,$$

ρ et g doivent être considérés comme des fonctions de z ; on en tire

$$p = p_0 + \int_0^z \rho g dz$$

p_0 désignant le plan $x\,o\,y$.

Si donc on considère les pressions qui s'exercent sur deux éléments M_1 et M_2 pris sur la même verticale et dont les coordonnées z sont respectivement z_1 et z_2, leurs composantes verticales donnent la force élémentaire

$$dc = \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Cette quantité représente le poids de la colonne verticale de fluide déplacé par la portion $M_1 M_2$ du cylindre projetant, car le poids d'un élément de cette colonne est $dc\, dz\, \rho g$.

La poussée est donc encore égale au poids du liquide déplacé.

Enfin il est aisé de voir que le principe subsiste encore dans le cas où le solide n'est que partiellement immergé.

III. Equilibre des corps flottants.

191 — Condition générale de l'équilibre. Pour qu'un corps flottant soit en équilibre, il faut d'abord que le poids du corps flottant soit égal à la poussée du liquide.

Soient V et Π le volume et le poids spécifique du corps, v et ϖ le volume et le poids spécifique du liquide déplacé. La condition précédente s'exprime par l'égalité

$$V\Pi = v\varpi$$

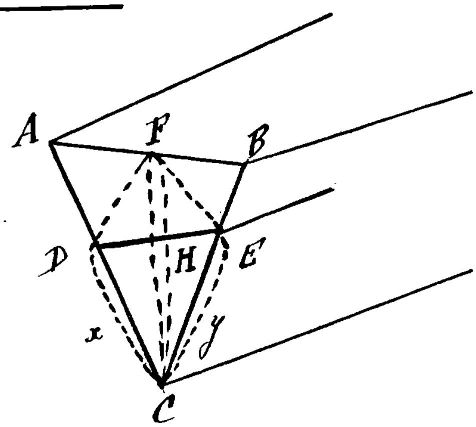
ou

$$\frac{v}{V} = \frac{\varpi}{\Pi} = r$$

Il faut en outre que les centres de gravité du solide de la partie immergée considérée comme homogène soient sur une même verticale.

Le problème consiste donc à mener un plan partageant le solide en deux parties dont le rapport des volumes est donné et perpendiculaire à la droite qui joint ces deux centres de gravité. — Pour un solide de révolution homogène le plan en question est évidemment perpendiculaire à l'axe. —

192 – Cas d'un prisme triangulaire homogène dont les arêtes sont horizontales.–



On supposera d'abord qu'une seule arête soit immergée. Le problème revient à trouver dans la base ABC une droite DE telle que le rapport des deux triangles DEC et ABC étant égal à r, cette droite soit perpendiculaire à celle qui joint les centres de gravité des deux triangles. Soient F et H les milieux de AB et DE, DE doit être perpendiculaire à FH; et par suite le triangle DEF doit être isocèle.

Posant : $AC = a$, $BC = b$, $DC = x$, $EC = y$, $ACF = \alpha$, $BCF = \beta$, $CF = h$, on aura

$$xy = rab,$$

$$x^2 - 2hx\cos\alpha + h^2 = y^2 - 2hy\cos\beta + h^2$$

et par l'élimination de y on obtient l'équation du 4e degré.

$$x^4 - 2h\cos\alpha\, x^3 + 2h\, rab\cos\beta\, x - r^2a^2b^2 = 0$$

Le dernier terme étant négatif, il y a toujours deux racines réelles de signes contraires. La racine positive est la seule qui convienne.

Il peut en outre y avoir deux autres racines réelles; elles seront positives, en vertu de la règle de Descartes. Mais il est clair qu'une racine ne peut convenir au problème qu'autant que x et y sont respectivement inférieurs à a et b.

Supposant le triangle isocèle ; alors $b = a$; $\cos\beta = \cos\alpha = \frac{h}{a}$, $h^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}$, c désignant le troisième côté. Les équations deviennent alors

$$xy = ra^2$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)\,2h\cos\alpha$$

ou

$$x^2 - y^2 = (x-y)\frac{4a^2 - c^2}{2a}.$$

On aperçoit immédiatement une première solution savoir $x = y = a\sqrt{r}$; cette racine convient toujours, puisque r est supposé inférieur à l'unité.

En divisant la dernière équation par $x - y$, il reste à considérer les suivantes

$$xy = ra^2, \quad x+y = \frac{4a^2-c^2}{2a};$$

les quantités x et y sont donc les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - \frac{4a^2-c^2}{2a}z + ra^2 = 0$$

donc

$$x = \frac{1}{4a}\left[4a^2-c^2 + \sqrt{(4a^2-c^2)^2-16ra^4}\right]$$

$$y = \frac{1}{4a}\left[4a^2-c^2 - \sqrt{(4a^2-c^2)^2-16ra^4}\right]$$

Les quantités x et y seront réelles si

$$4a^2-c^2 > 4a\sqrt{r} \text{ ou } 2a\sqrt{1-\sqrt{r}} > c;$$

mais pour qu'elles conviennent à la question, il faut qu'elles soient toutes deux inférieures à a.

Si $a = b = c$, les formules deviennent

$$x = \frac{a}{4}\left[3+\sqrt{9-16r}\right]$$

$$y = \frac{a}{4}\left[3-\sqrt{9-16r}\right]$$

Les racines seront réelles si $r < \frac{9}{16}$; la plus grande x sera inférieure à a si

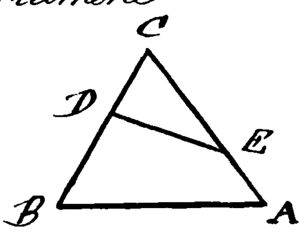
$$3+\sqrt{9-16r} < 4$$

ou si

$$r > \frac{8}{16}$$

Ainsi dans le cas du prisme équilatère, il n'y a trois solutions possibles que si l'on a $\frac{8}{16} < r < \frac{9}{16}$

On ramène aisément au précédent le cas où deux arêtes sont immergées.



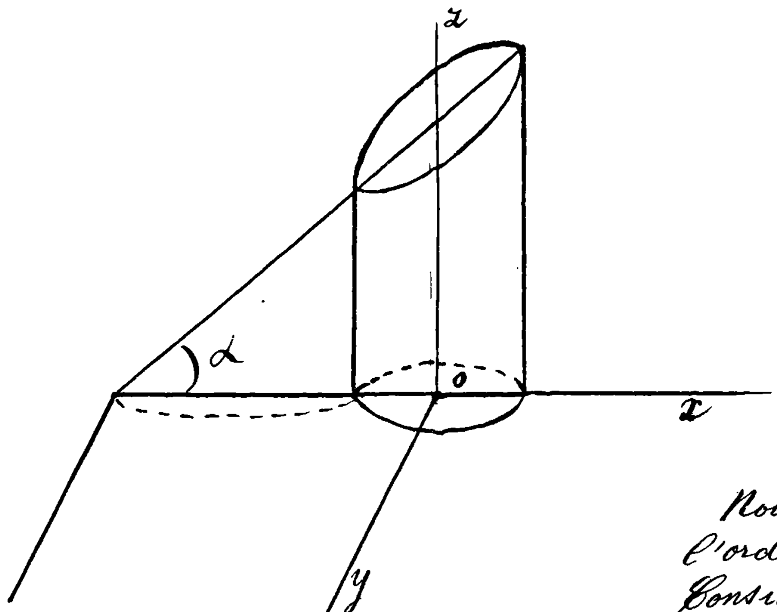
Le rapport $\frac{BAED}{BAC}$ étant en effet égal à r, il est clair que $\frac{DEC}{BAC} = 1-r$.

De plus le centre de gravité du triangle total et celui du trapèze étant sur une même perpendiculaire à DE, le centre de gravité du triangle DEC se trouve sur la même perpendiculaire à DE..

193 — Stabilité de l'équilibre des Corps flottants. — La solution que l'on va donner du problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants suppose que dans les petits mouvements que prend le corps lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre, les pressions sont les mêmes que si le système était en repos. On fait ainsi abstraction des forces d'inertie qui correspondent au mouvement des molécules du liquide.

Clebsch a montré que cette hypothèse entraînait des erreurs qui, dans certains cas ne sont pas négligeables. M. Jordan s'est occupé de la même question. Quoiqu'il en soit, on adoptera cette hypothèse dans ce qui va suivre.

194 — Lemme. — Centre de gravité d'un cylindre droit tronqué. —



Soit un cylindre droit tronqué, désignons par α l'angle des plans des deux bases, O le centre de gravité de la base inférieure; prenons pour axes des coordonnées l'axe Oz du cylindre, une droite Oy parallèle à l'intersection du plan des deux bases et une perpendiculaire Ox à cette intersection.

Nous nous proposons de rechercher l'ordonnée γ du centre de gravité. Considérons à cet effet un élément de volume cylindrique parallèle à OZ. Son poids est égal à $\varpi z d\omega$, ϖ désignant le poids spécifique et son centre de gravité se trouve à une hauteur $\frac{z}{2}$.

Prenant les moments par rapport au plan xOy et désignant par P le poids total du cylindre, on a

$$P\gamma = \frac{1}{2}\varpi \int z^2 d\omega$$

Or

$$z = (c+x)\operatorname{tang}\alpha,$$

par suite

$$P\gamma = \frac{1}{2}\varpi \operatorname{tang}^2\alpha\left[\int c^2 d\omega + 2c\int x\, d\omega + \int x^2 d\omega\right]$$

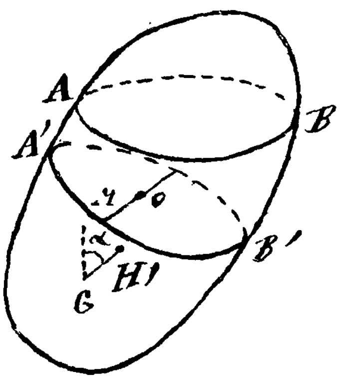
Le terme $\int x\, d\omega$ est nul puisque le point O est le centre de gravité de la base; donc

$$P\gamma = \frac{1}{2}\varpi \operatorname{tang}^2\alpha\left(c^2\omega + \int x^2 d\omega\right)$$
$$= \frac{1}{2}\varpi \operatorname{tang}^2\alpha\left(c^2\omega + I\right),$$

ω représentant l'aire de la base et I le moment d'inertie de cette base par rapport à Oy.
Posant enfin $OO' = \varepsilon$, on a la formule

$$P\gamma = \frac{1}{2}\varpi(\omega\varepsilon^2 + I \tan^2\alpha).$$

195 – Revenons à la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Nous allons d'abord démontrer que les forces appliquées au solide admettent une fonction ; il suffira ensuite de rechercher les conditions pour que cette fonction soit un maximum dans la position d'équilibre. Lorsqu'il en sera ainsi l'équilibre sera stable.



Soient $A'B'$ la ligne de flottaison du corps dans sa position d'équilibre
AB cette ligne de flottaison dans la position actuelle ; le plan AB est horizontal ;
α l'angle des plans AB, $A'B'$
S le volume total du corps
L' le volume du liquide déplacé par la partie inférieure à $A'B'$
L'' le volume du liquide déplacé par la partie comprise entre AB et $A'B'$.
G, H', H'' les centres de gravité de ces trois volumes.

GH' est perpendiculaire à $A'B'$ et fait par suite un angle α avec la verticale.
Posons $GH' = a$.

Soient z, z', z'' les distances de ces centres de gravité au plan horizontal AB.
P, P', P'' les poids des trois volumes considérés.

On a $P = P' = \varpi V$, V désignant la mesure du volume L' du liquide déplacé dans la position d'équilibre.

Le solide est soumis aux trois forces P, P', P'' qui sont verticales, la première dirigée de haut en bas et appliquée en G, les deux autres dirigées de bas en haut et appliquées l'une en H' l'autre en H''.

Les deux premières sont constantes et leur travail élémentaire est évidemment $Pdz - P'dz'$.

La force P'' est variable et son point d'application H'' se déplace dans le corps ; il est aisé d'établir que son travail élémentaire est $-d(P''z'')$.

En effet, soit p le poids d'un des éléments de volume L'' ζ sa distance au niveau du liquide, on a à chaque instant

$$P''z'' = \Sigma p\zeta$$

Le travail él[émen]taire de la poussée correspondant à l'élément de volume p est $-p\,d\zeta$ et la somme de ces travaux est $-\Sigma p\,d\zeta$. Or l'équation précédente donne

$$\Sigma p\, d\zeta = d\,(P''Z'')$$

La somme des travaux élémentaires de toutes les forces appliquées est donc

$$Pdz - P'dz' - d\,(P''z''),$$

quantité qui a pour intégrale la fonction des forces :

$$\varphi = Pz - P'z' - P''z''$$

La quantité $P''z''$ est le moment par rapport à AB du volume L'' que l'on peut assimiler à un cylindre tronqué. On a donc d'après le lemme précédent

$$P''z'' = \frac{\varpi}{2}\,(\omega\,\varepsilon + I\,\mathrm{tang}^2\alpha),$$

ϖ désignant le poids spécifique du liquide, ω l'aire de AB qui diffère extrêmement peu de $A'B'$, ε la distance du centre de gravité de $A'B'$ au plan AB et I le moment d'inertie de $A'B'$ par rapport à la droite MN parallèle à l'intersection des deux plans.

D'ailleurs $Pz - P \quad = P(z - z') = Pa\cos\alpha$; ainsi

$$\varphi = Pa\cos\alpha - \frac{\varpi}{2}\,(\omega\varepsilon^2 + I\,\mathrm{tang}^2\alpha)$$

L'angle α est très-petit ; remplaçant $\cos\alpha$ par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\mathrm{tang}^2\alpha$ par α^2, il vient

$$\varphi = Pa\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\varpi}{2}\,(\omega\varepsilon^2 + I\,\alpha^2)$$

ou, puisque $P \quad P = \omega V$,

$$\varphi = Pa - \frac{\varpi}{2}\left(\omega\varepsilon^2 + (aV + I)\,\alpha^2\right)$$

Dans la position d'équilibre, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$; donc φ se réduit à Pa. Pour que cette valeur soit un maximum, il faut que le terme entre parenthèses soit constamment positif.

Cette condition est évidemment remplie si $a > 0$.

Lorsque a est négatif, on peut le remplacer par $-a'$, a' étant positif ; la parenthèse devient

$$\omega\,\varepsilon^2 + (I - a'V)\,\alpha^2$$

Cette quantité sera positive si le minimum de I est supérieur à aV.

Ainsi l'équilibre est stable : 1° si le centre de gravité du corps est au-dessous de celui du liquide déplacé.

2° Si le produit $a'V$ est inférieur au plus petit des moments d'inertie principaux de l'aire du plan de flottaison par rapport à son centre de gravité. —

XVIII -

Chapitre IV -

Hydrodynamique.

116 - **Données du problème.** - L'hydrodynamique a pour objet l'étude du mouvement des fluides. Pour déterminer le problème, on suppose données, pour l'instant initial, la position et la vitesse de chacun des points du système. On se donne de plus la force appliquée à chaque point, rapportée à l'unité de masse, et les pressions sur les surfaces limites.

Soient à l'instant t, x, y, z les coordonnées d'un point, a, b, c ses coordonnées initiales. Il est clair que les coordonnées x, y, z qui varient avec le point considéré et qui sont déterminées à chaque instant, doivent être considérées comme des fonctions de a, b, c et de t. On peut donc poser

$$x = \varphi_1 (a, b, c, t)$$
$$y = \varphi_2 (a, b, c, t),$$
$$z = \varphi_3 (a, b, c, t).$$

Mais on peut envisager le problème autrement. Si les fonctions φ étaient connues, les équations précédentes fourniraient, par la différentiation, les composantes u, v, w de la vitesse d'un point; elles se trouveraient exprimées en fonction de t et de a, b, c. Mais les valeurs de a, b, c, peuvent être tirées des trois équations précédentes en fonction de x, y, z et en substituant dans u, v, w, on obtient

$$u = f_1 (x, y, z, t)$$
$$v = f_2 (x, y, z, t)$$
$$w = f_3 (x, y, z, t).$$

Le problème consiste alors à déterminer les trois quantités u, v, w en fonction de $x, y, z\, t$.

Ces fonctions étant connues, pour obtenir x, y, z, il faudra intégrer le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Les trois constantes introduites par l'intégration seront d'ailleurs déterminées par l'état initial. -

197 – Établissement des équations. — Application du principe de d'Alembert.

D'Alembert et Lagrange sont parvenus, grâce à une hypothèse, à établir les équations différentielles du problème.

On a fait remarquer que les fluides pouvaient, dans l'état d'équilibre, être considérés comme isotropes. Il en résulte qu'en un point quelconque, la pression sur un élément est normale à cet élément et indépendante de son orientation.

On suppose que ces propriétés peuvent être étendues au cas où les fluides sont en mouvement. Cette hypothèse ne peut être qu'approximative ; pour qu'il en fût autrement, il faudrait que la mobilité des molécules, les unes par rapport aux autres, fût en quelque sorte infinie.

Admettant toutefois cette hypothèse, les trois équations établies pour l'équilibre par la considération du parallélipipède élémentaire ; s'appliqueront au fluide en mouvement, pourvu que, parmi les forces appliquées, on comprenne la force d'inertie.

Si l'on représente par u' v' w' les dérivées totales des vitesses u, v, w par rapport au temps, les composantes de la force d'inertie sont $-u'dm$, $-v'dm$, $-w'dm$; et par suite elles deviennent $-u'$, $-v'$, $-w'$ quand on les rapporte à l'unité de masse.

Les équations du mouvement sont donc, conformément au principe de d'Alembert

$$\frac{dp}{dx} = \rho\ (X - u'),$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho\ (Y - v')$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho\ (Z - w')$$

ou bien

$$u' + \frac{1}{\rho}\ \frac{dp}{dx} = X,$$

$$v' + \frac{1}{\rho}\ \frac{dp}{dy} = Y,$$

$$w' + \frac{1}{\rho}\ \frac{dp}{dz} = Z$$

Or on a

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w$$

et deux équations analogues, de sorte que les équations du mouvement deviennent

$$\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=X$$

$$(1)\qquad \frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=Y$$

$$\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=Z$$

Ces trois équations aux dérivées partielles renferment cinq fonctions inconnues u, v, w, p, ρ des quatre variables x, y, z, t. Elles ne suffisent donc pas pour résoudre le problème.

198 - Equation de Continuité. — On obtient une quatrième équation, dite équation de continuité en exprimant que le fluide est continu.

Considérant à cet effet autour du point x, y, z un élément de volume V infiniment petit; il a pour densité ρ. La masse de cet élément reste invariable pendant le mouvement. Ainsi

$$\delta(\rho V)=0,$$

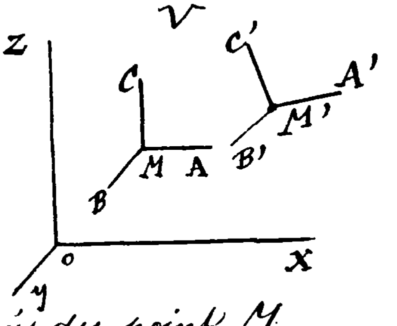
ou

$$V\delta\rho+\rho\,\delta V=0,$$
$$\delta\rho+\rho\frac{\delta V}{V}=0$$

La densité ρ étant fonction de x, y, z et t, on a $d\rho=\rho' dt$, ρ' étant la dérivée totale de ρ, ou

$$\delta\rho=\left(\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dx}u+\frac{d\rho}{dy}v+\frac{d\rho}{dz}w\right)dt.$$

Il reste à calculer $\frac{\delta V}{V}$. Pour cela on supposera que le volume V soit un parallélipipède $MABC$ ayant son sommet en x, y, z et dont les arêtes soient respectivement égales à dx, dy, dz. Au bout du temps dt, ce parallélipipède s'est déformé en se déplaçant; il est devenu une parallélipipède oblique $M'A'B'C'$.



Il s'agit d'évaluer son nouveau volume.

Coordonnées du point M	$x,$	$y,$	z
Coordonnées du point M'	$x+u\,dt,$	$y+v\,dt,$	$z+w\,dt.$
Coordonnées du point A	$x+dx,$	y	z
Coordonnées du point A'	$x+dx+u_1\,dt,$	$y+v_1 dt$	$z+w_1 dt,$

les vitesses u_1, v_1, w_1, se rapportant au point A..

Transportant l'origine des axes au point M' les coordonnées de A' deviennent

$$dx + (u_1 - u)dt, \quad (v_1 - v)dt, \quad (w_1 - v)dt.$$

Or, on a

$$u_1 - u = \frac{du}{dx}\,dx$$

$$v_1 - v = \frac{dv}{dx}\,dx$$

$$w_1 - w = \frac{dw}{dx}\,dx\,;$$

les coordonnées au point A sont donc

$$dx\left(1 + \frac{du}{dx}dt\right), \quad \frac{dv}{dx}dx\,dt, \quad \frac{dw}{dx}dx\,dt;$$

et pour B' et C' on trouverait des expressions analogues.

Cela posé, le volume du parallélipipède $M'A'B'C'$ est égal au déterminant

$$dx\,dy\,dz \begin{vmatrix} 1 + \frac{du}{dx}dt & \frac{dv}{dx}dt & \frac{dw}{dx}dt \\ \frac{du}{dy}dt & 1 + \frac{dv}{dy}dt & \frac{dw}{dy}dt \\ \frac{du}{dz}dt & \frac{dv}{dz}dt & 1 + \frac{dw}{dz}dt \end{vmatrix}$$

L'ensemble des termes finis et des termes du premier ordre est représenté par la première diagonale de sorte qu'en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur, le volume devient

$$dx\,dy\,dz\left[1 + dt\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\right]$$

et la variation de volume est égal à

$$dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$$

On a donc en négligeant les infiniments petits du second ordre

$$\frac{\delta V}{V} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)dt.$$

et l'équation de continuité $\delta\rho + \rho\,\frac{dV}{V} = 0$ devient

$$\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} + \rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0\,;$$

elle peut s'écrire

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0$$

Elle doit être jointe aux trois premières équations aux dérivées partielles.

199 – Recherche d'une cinquième équation. — La cinquième équation dépend des propriétés du fluide par suite desquelles les fonctions p et ρ ne sont pas indépendantes. Il est facile de l'obtenir dans certains cas particuliers.

Supposant d'abord qu'il s'agisse d'un fluide incompressible homogène. La cinquième équation est alors

$$\rho = \text{Constante};$$

au reste l'équation (4) se réduit alors à

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

Considérant en second lieu un fluide incompressible mais non homogène, la densité d'un élément déterminé est indépendante du temps. On a dans ce cas

$$\rho' = 0$$

et l'équation de continuité

$$\rho' dt + \rho \frac{\delta V}{V} = 0$$

se réduit à

$$\delta V = 0$$

L'équation (4) se décompose ainsi dans les deux suivantes

$$\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

Enfin dans le cas général, p et ρ sont liés par une relation dépendant de la nature du fluide. Il faut connaître cette relation pour que le problème puisse être résolu analytiquement.

200 – Remarque sur les conditions aux limites. — L'intégration des équations de l'hydrodynamique présente des difficultés qui n'ont pu, jusqu'à présent, être surmontées que dans des cas très particuliers ; mais il est important de remarquer qu'il ne suffirait pas pour résoudre les problèmes, d'obtenir les intégrales générales des équations que l'on vient d'établir. Ces intégrales donnent seulement des indications sur la forme suivant laquelle les inconnues dépendent des variables.

Pour achever la solution, il faut avoir recours aux conditions relatives aux limites. Ces conditions ne sont le plus souvent susceptibles d'être exprimées analytiquement qu'au moyen de nouvelles hypothèses. C'est ainsi que, lorsqu'il s'agit d'un fluide limité à une paroi, on admet qu'une molécule qui, à un moment donné se trouve en contact avec cette paroi y demeure indéfiniment, de manière qu'elle est astreinte à se mouvoir sur une surface donnée. Cette hypothèse n'est pas suffisamment justifiée.

201 — *Cas particulier.* — Lagrange a examiné en particulier le cas où les forces extérieures admettant une fonction f, on sait à priori que u, v, w sont les dérivées partielles d'une même fonction φ. Dans ce cas,

$$X = \frac{df}{dx}, \qquad u = \frac{d\varphi}{dx},$$

$$Y = \frac{df}{dy}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}$$

$$Z = \frac{df}{dz}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

L'équation (1) devient alors

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{df}{dx}$$

ou

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{df}{dx},$$

de même pour les équations (2) et (3). On peut donc les écrire, en représentant par V la vitesse d'un point.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 - f\right] + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 - f\right] + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 - f\right] + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 0$$

Multipliant par dx, dy, dz et ajoutant, il vient

$$d\left[\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 - f\right] + \frac{1}{\rho}dp = 0,$$

les différentielles totales étant prises par rapport aux coordonnées seulement.

Il résulte de cette équation que la quantité

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 - f + \int\frac{dp}{\rho}$$

est fonction du temps seulement. On peut donc l'égaler à une fonction du temps que rien n'empêche d'ailleurs de considérer comme compris dans le terme $\frac{d\varphi}{dt}$, attendu que la fonction φ n'est définie que par ses dérivées partielles prises par rapport aux coordonnées. Dans ces conditions, on peut poser

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}V^2 + \int\frac{dp}{\rho} - f = 0$$

Lagrange a également énoncé un théorème, dont la démonstration est, il est vrai, aujourd'hui contestée, et qui permet dans certains cas de reconnaître *à priori* si u, v, w sont des dérivées partielles. Il a en effet démontré que si cette condition est remplie à un instant quelconque, elle le sera toujours.

M. Helmholz est revenu récemment sur l'étude des équations générales de l'hydrodynamique, et en a déduit des conséquences importantes.

201. **Mouvement permanent. — Théorème de Bernouilli.** — Le mouvement est dit permanent quand les circonstances de ce mouvement ne dépendent que des coordonnées, de sorte qu'elles restent les mêmes en un point déterminé de l'espace. Dans ce cas les composantes de la force X, Y et Z sont indépendantes du temps et il en est de même de la pression.

Nous supposerons en outre que les forces appliquées admettent une fonction f.

Les équations du mouvement

$$u' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X$$

$$v' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y$$

$$w' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z$$

donnent, en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz

$$u'dx + v'dy + w'dz + \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz\right) = df$$

ou, puisque p est indépendant du temps,

$$u'dx + v'dy + w'dz + \frac{1}{\rho}dp = df.$$

On peut appliquer cette équation au mouvement d'un point sur sa trajectoire; à cet effet, il suffit de faire $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$; on trouve ainsi

$$uu'dt + vv'dt + ww'dt + \frac{1}{\rho}dp = df.$$

ou

$$\frac{1}{2}dV^2 + \frac{dp}{\rho} - df = 0$$

On en déduit par l'intégration — formule de B[illegible] —

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dp}{\rho} - f = \text{Constante}$$

On appelle __filets__ les trajectoires des points du fluide considéré. Il suffit d'un point de cette trajectoire pour la déterminer car, à partir de chaque position le déplacement du point est déterminé pendant un temps infiniment petit, puisque la vitesse ne dépend que des coordonnées.

Quand il s'agit d'un liquide homogène pesant, on a

$$f = -gz, \qquad \rho = \text{Constante}$$

L'équation précédente se réduit donc à

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{Constante}$$

ou

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = \text{Constante},$$

ou enfin

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} \quad \frac{p_0}{\varpi}.$$

Cette égalité constitue le __Théorème de Bernoulli__. —

Chapitre V.

Hydraulique.

L'hydraulique est une science d'application, reposant à la fois sur des théories rationnelles et sur des faits d'expérience. On se bornera à présenter un aperçu des principales méthodes dont elle fait usage.

I - Généralités.

202 - On a établi en hydrodynamique les équations du mouvement d'un fluide parfait, c'est-à dire dans lequel on fait abstraction du frottement entre les molécules.

$$u' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X,$$

$$v' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y$$

$$w' + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z$$

Il est rare qu'on en fasse usage en hydraulique; on se place d'ordinaire à un point de vue beaucoup moins général.

Le plus souvent on suppose le régime permanent établi. Dès lors, le théorème de Bernouilli devient applicable et fournit une relation entre la vitesse et la pression mais cette relation n'est pas suffisante; il faut encore connaître l'un ou l'autre de ces deux éléments.

203 - Règles pour la détermination de la pression dans certains cas particuliers.

Dans certains cas on peut obtenir à priori une valeur approximative de la pression.

1° Si le mouvement de chaque point est rectiligne et uniforme, et si le fluide n'est soumis à aucun frottement les équations du numéro précédent se réduisent à celles de l'hydrostatique, attendu que $u' = v' = w' = 0$. Les pressions se distribuent alors suivant la loi hydrostatique.

2° Lorsque tous les points sont animés de mouvements très-lents, on peut négliger u', v', w' ainsi que les frottements et admettre encore que la distribution des pressions est celle de l'hydrostatique.-

3° Quelquefois on peut établir à priori que les diverses molécules ont sensiblement les mêmes mouvements que si elles n'étaient soumises qu'aux forces extérieures; alors

$$u' = X, \quad v' = Y, \quad w' = Z.$$

Ces équations comparées à celles du numéro précédent exigent que l'on ait p = Constante.

4° S'il existe un plan tel que, dans son voisinage, les trajectoires des molécules qui le traversent soient sensiblement rectilignes et perpendiculaires à ce plan, on peut démontrer que les pressions sont sensiblement distribuées dans ce plan, d'après la loi hydrostatique.

Prenant, en effet, ce plan pour plan des y, z, et considérant l'équation

$$dp = \rho \left[(X - u')\,dx + (Y - v')\,dy + (Z - w')\,dz \right]$$

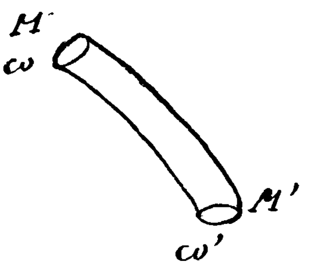
qui se déduit de celles du numéro précédent, il est facile de voir qu'on doit y faire $v' = 0$, $w' = 0$; en effet v et w sont nuls dans le voisinage du plan, de sorte qu'il en est de même de leurs dérivées. D'ailleurs quand on se borne à considérer la pression dans ce plan, il faut faire $dx = 0$, et l'on a

$$dp = \rho\,(Y\,dy + Z\,dz)$$

équation qui n'est autre que celle de l'hydrostatique.

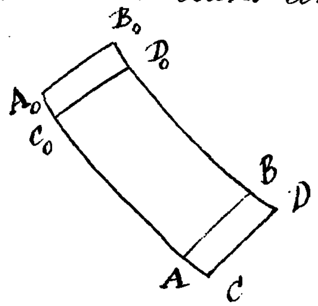
Les remarques précédentes permettent d'obtenir, dans un grand nombre de cas, la valeur de la pression. Pour achever le problème, on ne fait pas d'ordinaire usage des équations de l'hydrodynamique. On a recours à l'application du théorème des forces vives ou du théorème des quantités de mouvement. Mais cette méthode nécessite de grandes précautions surtout pour l'emploi du théorème des forces vives, pour lequel il faut tenir compte des forces intérieures.

204 – Théorème de Bernouilli. – Comme premier exemple de la méthode, nous exposerons la démonstration que Bernouilli a donnée de son théorème.



Considérant un filet fluide formé par l'ensemble des trajectoires qui traversent un élément infiniment petit ω normal à ces trajectoires et un deuxième élément ω' également normal au filet, il est clair que, si V et V' désignent les vitesses en M et en M', on a $\omega V = \omega' V'$.

Soient alors dans une masse liquide pesante, une portion de filet limitée



à deux éléments normaux A_0B_0, AB; soient en outre p_0 et p, z_0 et z, les pressions et les ordonnées verticales correspondant aux deux éléments. Au bout d'un temps dt, le volume considéré est venu en C_0D_0CD.

On va appliquer le théorème des forces vives au déplacement subi pendant le temps dt.

Le régime étant permanent la force vive de la partie commune C_0D_0AB n'a pas changé et si P désigne le poids commun des deux parties $A_0B_0C_0D_0$ et $ABCD$ du liquide, la variation de force vive est

$$\frac{P}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right).$$

Il reste à évaluer le travail. Or, on néglige les frottements puisqu'on suppose que le liquide est un fluide parfait; les pressions des parois sont normales et ont un travail nul. Le travail de la pesanteur dépend uniquement du poids de la masse et de l'abaissement du centre de gravité; on peut donc, pour l'évaluer, substituer au déplacement réel un autre déplacement dans lequel ces éléments conservent la même valeur, et supposer que le volume $A_0B_0C_0D_0$ a été transporté en $ABCD$, le reste du liquide étant resté immobile. Le travail de la pesanteur est donc

$$P\left(z_0 - z\right)$$

Il reste à évaluer le travail des pressions sur les bases. Soient p_0 et p ces pressions, ε_0 et ε les distances A_0C_0 et AC, ce travail est

$$\omega_0 p_0 \varepsilon_0 - \omega p \varepsilon$$

Or,

$$\omega\varepsilon_0 = \omega\varepsilon = \frac{P}{\varpi}$$

L'équation des forces vives est ainsi

$$\frac{P}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right) = P(z_0 - z) + (p_0 - p)\frac{P}{\varpi}$$

ou

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}$$

C'est l'équation déjà obtenue en hydrodynamique..

205 – Énoncé usuel du théorème de Bernoulli. – Le rapport $\frac{p}{\varpi}$ s'appelle la hauteur due à la pression p. Si en un point M d'un liquide où la pression est p on introduit un tube vertical, de section très-petite ω s'ouvrant dans le vide à sa partie supérieure, le liquide s'élèvera dans le tube à une hauteur h telle que

$$\omega h \varpi = p\omega \quad \text{d'où} \quad h = \frac{p}{\varpi},$$

ce qui justifie la dénomination précédente.

Si l'on prolonge l'ordonnée du point M de cette longueur h, on obtient une ordonnée Z appelée niveau piézométrique du point M.

$$Z = z + \frac{p}{\varpi}.$$

La différence des niveaux piézométriques de deux points s'appelle la charge entre ces deux points.

Enfin la quantité $\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse du point.

On peut donc énoncer le théorème de Bernoulli de la manière suivante

L'accroissement de la hauteur due à la vitesse entre deux points d'un même filet est égal à la charge entre ces deux points.

Le piézomètre usuel est un tube plongé dans le liquide et débouchant dans l'air. Soit p_a la pression de l'atmosphère; la hauteur h' à laquelle s'élève alors le liquide est donnée par la relation

$$(p_a + h'\varpi)\,\omega = p\,\omega.$$

Ainsi donc la différence des valeurs de h' est encore égale à la différence des valeurs de $\frac{p}{\varpi}$, c'est-à-dire à la charge.

II - Mouvement d'un liquide qui s'écoule d'un réservoir dans lequel le niveau est maintenu constant.

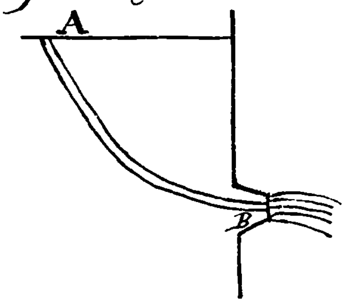
206 – Le liquide s'écoulant d'un réservoir dont le niveau est maintenu constant par un certain orifice, on se propose de calculer la vitesse d'écoulement ainsi que la dépense ou le débit, lorsque le régime permanent est établi.

Supposant la paroi très-mince, on pourra admettre que la veine liquide est libre à sa sortie.

Vitesse d'écoulement. — Torricelli annonça en 1643, que la vitesse d'écoulement était proportionnelle à la racine carrée de la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice, et indépendante de la nature de ce liquide. – D. Bernouilli démontra le premier cette proposition que Newton avait vainement cherché à établir.

L'expérience montre qu'après la sortie les molécules de la veine convergent jusqu'à une certaine distance égale au demi-diamètre de l'ouverture ; la section de la veine passe alors par un minimum ; puis les molécules divergent et décrivent des paraboles très-sensiblement identiques à celles qu'elles parcourraient sous l'action de la pesanteur. Il en résulte comme on l'a démontré, que la pression est sensiblement constante dans tous les points de la veine et égale à la pression atmosphérique qui s'exerce sur sa surface.

Appliquant alors le théorème de Bernouilli à une portion de filet AB



partant de la surface libre et limitée à la section contractée, on remarquera que la pression sur les deux sections limites est la même et que la vitesse en A peut être négligée, à cause de la grande étendue de la surface libre ; on aura donc

$$\frac{V^2}{2g} = h \quad \text{d'où} \quad V = \sqrt{2gh}.$$

En déterminant expérimentalement les éléments de la parabole du jet, on vérifie avec une approximation
est égale à celle qui résulte de la formule précédente.

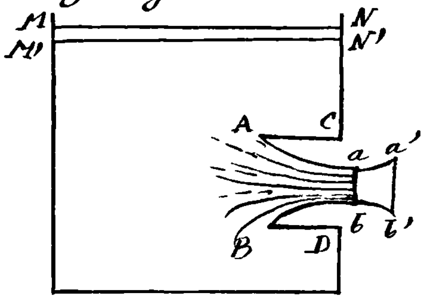
207 – Dépense. — Soit ω l'aire de la section contractée, Ω celle de l'orifice, les filets étant sensiblement normaux à la section contractée, la dépense est $\omega V = \omega\sqrt{2gh} = m\Omega\sqrt{2gh}$, m étant le rapport $\frac{\omega}{\Omega}$. Pour déterminer m, il suffit de mesurer le débit. On trouve ainsi pour ce rapport des valeurs qui varient avec la forme des orifices : pour un orifice circulaire, $m = 0{,}60$, pour un orifice carré, $m = 0{,}62$.

Le coefficient m s'appelle le coefficient de dépense. On le prend aussi pour la mesure approximative du coefficient de contraction, ce qui ne serait exact que si la vitesse à la sortie était rigoureusement égale à $\sqrt{2gh}$.

Dans certains cas la valeur de m peut s'obtenir par des considérations théoriques.

208 – Cas d'un orifice parfaitement évasé intérieurement. — Si l'on entaille une paroi épaisse suivant le profil même que présente la veine dans le cas d'un orifice très-mince, on a évidemment $m = 1$. – L'expérience confirme ce résultat.

269 — Ajutage rentrant de Borda. — L'ajutage de Borda est constitué par un tube cylindrique rentrant $ABCD$. Il est nécessaire que la longueur du tube n'excède pas son diamètre pour que la veine ne mouille pas sa paroi.



Grâce à la forme de l'ajutage, on peut considérer comme négligeables les vitesses des molécules en contact avec les parois, par exemple de celles qui se trouvent en C et en D, de sorte que la distribution des pressions sur ces parois est la même que dans l'équilibre.

Appliquant le théorème des quantités de mouvement à toute la masse fluide comprise entre la surface et la section contractée ab, et projetant sur un axe perpendiculaire à ab, on voit qu'au bout du temps dt cette masse occupe la position $M'N'a'b'$. La quantité de mouvement de la partie $M'N'ab$ n'a pas changé ; celle de la partie $MNM'N'$ peut être négligée à cause de la faiblesse des vitesses à la surface. Quant à la quantité de mouvement de la portion $aba'b'$ elle s'obtient en multipliant par sa vitesse V sa masse $\frac{\varpi}{g}\omega V dt$; elle est donc égale à $\frac{\varpi}{g}\omega V^2 dt$, et se projette en vraie grandeur.

Il reste à évaluer les projections des impulsions élémentaires. Il n'y a pas à tenir compte des frottements qui sont des forces intérieures, pas plus que de la pesanteur et des pressions sur MN qui sont normales à l'axe de projection. Il reste la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface $AabB$ et il est facile de voir que la résultante de ses actions élémentaires est égale à la pression atmosphérique sur une paroi plane.

La pression atmosphérique donne donc une force $-\Omega p_a$ dont l'impulsion est $-\Omega p_a dt$ et qui se projette en vraie grandeur.

Il faut enfin considérer les pressions sur les parois. Elles sont distribuées comme dans l'équilibre. Si on imaginait une paroi en AB, les composantes de ces pressions parallèles à l'axe se détruiraient. La résultante de toutes ces pressions est donc celle qu'exercerait le liquide sur cette paroi AB, de sorte qu'elle a pour valeur $\Omega(p_a + h\varpi)$ et on obtient finalement l'équation

$$\frac{\varpi}{g}\omega V^2 dt = -\Omega p_a dt + \Omega(p_a + h\varpi) dt$$

ou

$$\frac{\omega V^2}{g} = h\Omega$$

ou en remplaçant V par $\sqrt{2gh}$,

$$\omega = \frac{1}{2}\Omega.$$

Ce résultat a été vérifié par l'expérience.

XX -

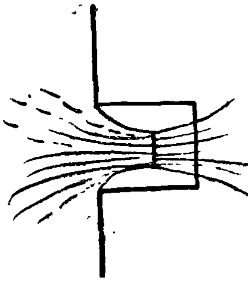
210 - Ajutage cylindrique extérieur.

— La longueur d'un ajutage cylindrique étant d'environ une fois et demie son diamètre, l'expérience prouve qu'il n'y a plus de section contractée, de sorte que les molécules décrivent, à partir de leurs sorties, des paraboles comme si elles étaient isolées. Si Ω', désignant la section, le théorème de Toricelli était applicable, la dépense serait,

$$Q = \Omega' \sqrt{2gh}$$

L'expérience prouve que dans la réalité, la dépense n'est que les $\frac{82}{100}$ de cette quantité ; la vitesse à la sortie doit donc être sensiblement égale à $0,82\sqrt{2gh}$. Entre l'entrée et la sortie de l'ajutage se produit ainsi une variation rapide de vitesse qui doit être attribuée aux frottements intérieurs.

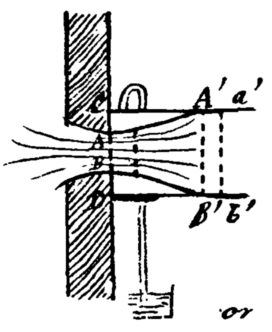
Au début du phénomène et avant l'établissement du régime permanent, il est clair que le jet se produira comme s'il n'y avait pas d'ajutage, de sorte qu'il existera une section contractée. Mais par suite du mouvement du liquide,



l'air compris entre la veine et la paroi de l'ajutage est rapidement entraîné, la pression diminue dans le voisinage de la section contractée et, d'après le théorème de Bernouilli, la vitesse de sortie augmente. D'autre part, la pression extérieure étant égale à celle de l'atmosphère, la vitesse se ralentit au sortir de l'ajutage ; il en résulte que la veine se dilate et finit par mouiller les parois du cylindre. Peu à peu l'air qui se trouvait au début entre la veine et les parois se trouve remplacé par un liquide qui se trouve, sinon en repos, du moins animé uniquement d'une espèce de remous fort lent.

211 - Ajutage cylindrique succédant à un orifice parfaitement évasé intérieurement.

— Au moyen des remarques qui précèdent, il est facile de traiter la question quand l'orifice étant pratiqué dans une paroi épaisse, est parfaitement évasé intérieurement.



Soient dans ce cas p_0 la pression atmosphérique, p et p' les pressions en AB et $A'B'$. Il est entendu que p' désignant la pression dans le milieu où débouche l'ajutage, si celui-ci s'ouvre dans l'atmosphère, on a $p' = p_0$. Soient encore V et V' les vitesses en AB et $A'B'$; ces vitesses sont normales aux deux sections AB, $A'B'$ dont on représentera les aires par Ω et Ω'.

Le théorème de Bernouilli appliqué à une portion de filet partant du niveau du liquide et limité en AB donne

$$(1) \qquad \frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}$$

On obtient une deuxième relation en appliquant pendant le temps dt le théorème des quantités de mouvement à la portion $CDA'B'$ du liquide et projetant sur un axe perpendiculaire à AB.

Au bout du temps dt ce volume est venu en $aba'b'$, et, si l'on représente par μ la masse de $ABab$ ou $A'B'a'b'$, la variation de la quantité de mouvement est $\mu(V'-V)$ ou $\Omega'\frac{\varpi}{g}V'(V'-V)\,dt$, en remplaçant μ par sa valeur.

La pesanteur étant normale à l'axe, il n'y a pas à en tenir compte, non plus que des pressions sur les parois cylindriques, car si l'on fait abstraction des frottements sur les parois, ces pressions sont aussi perpendiculaires à l'axe. La pression sur $A'B'$ est p'; la pression sur CD peut être regardée comme égale à p, vu la lenteur des mouvements du liquide qui se trouve en contact avec la partie annulaire. L'équation est donc

$$\Omega'\frac{\varpi}{g}V'(V'-V)\,dt = \Omega(p-p')\,dt$$

ou

$$(2) \qquad \frac{V'(V'-V)}{g} = \frac{p}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}$$

De plus

$$(3) \qquad \Omega V = \Omega' V'.$$

Les équations (1) (2) et (3) sont à trois inconnues et suffisent pour résoudre le problème. Ajoutant (1) et (2) on obtient

$$\frac{V'^2 + (V-V')^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}$$

d'où à cause de (3)

$$(4) \qquad \frac{V'^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{\Omega'}{\Omega}-1\right)^2\right] = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}$$

$$V'^2 = \mu\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}\right)$$

et si $p' = p_0$,

$$V'^2 = \mu h,$$

μ désignant une constante.

On déduit de la formule (1)

$$(5) \qquad \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} = -h + \frac{V^2}{2g} = h\left(\frac{\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Omega'}{\Omega}-1\right)^2} - 1\right)$$

212. Ajutage cylindrique succédant à un orifice en mince paroi. — Ce Ce cas se ramènera au précédent au moyen d'une hypothèse. On admettra que la portion de la veine comprise entre l'orifice et la section contractée a la même forme que dans l'air. Les calculs précédents deviennent alors applicables si l'on prend pour Ω la section de la veine contractée. Remplaçant donc dans les formules précédentes, Ω' par Ω et Ω par $m\Omega$, on a

$$\frac{V'^2}{2gh} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}$$

Si l'on fait m, 0,62, on trouve très-approximativement

$$V' = 0{,}85\sqrt{2gh}$$

L'expérience donne $0{,}82\sqrt{2gh}$; nombre très-rapproché du précédent.

La formule (8) devient approximativement

$$\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} = 0{,}73\,h \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} = \frac{3}{4}h.$$

La pression en AB est donc inférieure à la pression atmosphérique. Ce résultat est confirmé par une expérience de Venturi qui adaptait à l'ajutage un tube recourbé qui plongeait dans un vase rempli d'eau. Le liquide s'élevait dans le tube à une hauteur représentant précisément la valeur de $\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}$; cette valeur a été trouvée égale à $0{,}74\,h$.

La diminution de pression déterminée par un ajutage cylindrique explique l'aspiration produite par les trompes. Il est clair en effet que si le tube recourbé de l'expérience de Venturi était en communication avec un réservoir fermé et rempli d'air, le gaz serait peu à peu entraîné par le mouvement du liquide.

213. Travail des frottements internes. — Il se produit, entre la section contractée et l'orifice de sortie de l'ajutage, une diminution de vitesse $V - V'$ et, par suite une perte de force vive qui est nécessairement due aux frottements des molécules liquides les unes contre les autres. Ces frottements sont des forces intérieures qui disparaissent dans l'application du théorème des quantités de mouvement. Le théorème des forces vives les introduit, au contraire, et permet de les évaluer au moyen des résultats qui précèdent.

Soit P le poids de la portion infiniment petite $ABab$ du liquide, la variation de la force vive pendant le temps dt est

$$\frac{P}{2g}V'^2 - \frac{P}{2g}V^2$$

Le travail de la pesanteur est nul et en désignant par ε la distance qui sépare AB de ab et par ε' celle qui sépare $A'B'$ de $a'b'$, le travail des pressions sur AB et $A'B'$ est $p\Omega\varepsilon - p'\Omega'\varepsilon' = \frac{P}{\varpi}(p-p')$. Soit enfin tf le travail moléculaire, on a

$$\frac{P}{2g}V'^2 - \frac{P}{2g}V^2 = \frac{P}{\varpi}(p-p') + tf$$

ou, en vertu de l'équation (2)

$$tf = P\frac{V'^2 - V^2 - 2V'^2 + 2VV'}{2g}$$

$$tf = -\frac{P}{2g}(V-V')^2$$

Si l'on désigne par Q la dépense ou le poids du liquide écoulé dans l'unité de temps, le travail moléculaire sera, pendant l'unité de temps,

$$Tf = -\frac{Q}{2g}(V-V')^2.$$

Il est égal à la force vive correspondant à la vitesse perdue.

214 – Mouvement permanent d'un liquide dans une conduite cylindrique. –

Lorsqu'on accroît la longueur d'un ajutage cylindrique on voit la dépense diminuer, ce qui doit être attribué aux frottements contre les parois des molécules qui sont en contact avec cette paroi et aux frottements des couches liquides les unes sur les autres. Les différentes couches cylindriques prennent en effet, par suite des frottements contre la paroi, des vitesses qui augmentent de l'intérieur à l'extérieur.

L'expérience montre que ces frottements ne dépendent pas sensiblement de la pression du liquide, mais uniquement de sa vitesse.

Soient l la longueur de la conduite, χ le périmètre de la section droite, u la vitesse moyenne déterminée d'après le débit, au moyen de la relation $Q = u\Omega$. Il résulte des expériences de Prony que la résistance F provenant des frottements peut être représentée par la formule

$$F = \varpi l(\alpha u + \beta u^2)$$

ou, en posant $\alpha = a\varpi$, $\beta = b\varpi$,

$$F = \varpi l(au + bu^2)$$

où

$$a = 0{,}0000173, \qquad b = 0{,}000348;$$

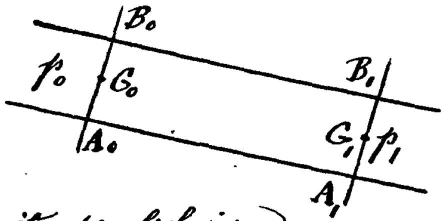
ces coefficients sont sensiblement indépendants de la nature du liquide.

On peut prendre approximativement

$$a = 0, \qquad b = 0{,}000385$$

Il est assez naturel d'admettre que le mouvement du liquide se fait par filets rectilignes et parallèles aux génératrices. La permanence du débit exige alors que l'on ait en chacun des points d'un filet $\omega V = \omega' V'$ et, par suite $V = V'$ puisque $\omega = \omega'$. Ainsi le mouvement d'un filet est uniforme.

On peut alors calculer la vitesse moyenne dans la conduite. Soient



$A_0 B_0 A_1 B_1$ une portion du liquide comprise entre deux plans normaux aux génératrices, G_0 et G_1 les centres de gravité des deux bases, z_0 et z_1 leurs hauteurs au-dessus d'un plan horizontal, α l'inclinaison de la conduite sur l'horizon.

En appliquant le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe parallèle aux génératrices, et remarquant que la variation de la quantité de mouvement est nulle, il suffit d'exprimer que la somme des projections des forces est nulle. La projection de la pesanteur est $\varpi \Omega l \cos\alpha$ ou $\varpi \Omega (z_0 - z_1)$; par suite, on a l'équation

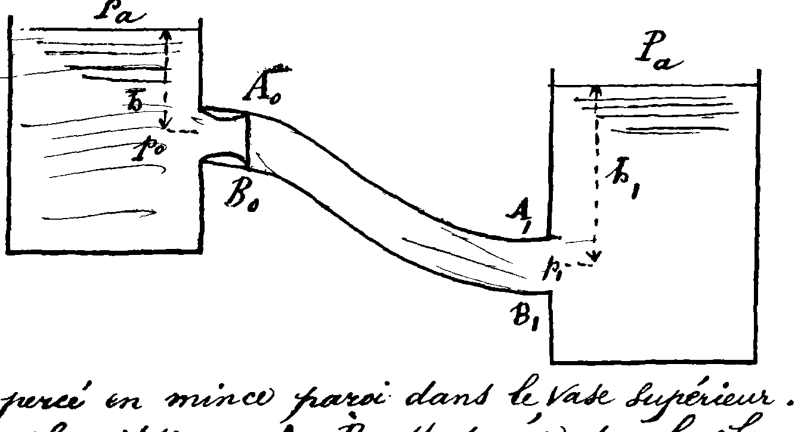
$$\Omega \varpi (z_0 - z_1) + \Omega (p_0 - p_1) - l \varpi \chi (au + bu^2) = 0$$

$$z_0 - z_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} = \frac{l \chi}{\Omega} (au + bu^2)$$

Si donc on connaît la charge entre les deux sections, on en déduira la valeur de u. C'est la formule précédente qui a servi à déterminer les coefficients de a et b.

On peut remarquer que ce résultat s'applique à une conduite quelconque dont la section est courante. Il suffit pour s'en rendre compte de la diviser en cylindres élémentaires.

215 – Mouvement d'un liquide entre deux réservoirs à niveau constant.



On considère deux vases en communication par une conduite cylindrique; le niveau est maintenu constant dans chacun d'eux. L'orifice d'écoulement est percé en mince paroi dans le vase supérieur.

La vitesse en $A_0 B_0$ est donnée par la formule (4) du n°   en faisant $\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{1}{m} = \frac{1}{0,62}$ d'où $\mu = \frac{3}{4}$ approximativement; par suite, en en la désignant par u,

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{3}{4}\left(h_0+\frac{p_a}{\varpi}-\frac{p_0}{\varpi}\right)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{p_0}{\varpi}=h_0+\frac{p_a}{\varpi}-\frac{3}{4}\,\frac{u^2}{g};$$

u est la vitesse d'écoulement dans la conduite.

Quant à la pression p_1 en A, B, si l'on suppose la paroi traversée normalement et si l'on remarque que les mouvements le long des parois sont très lents, on peut appliquer la loi hydrostatique et poser

$$p_1=p_a+\varpi h_1,$$

L'équation établie au numéro précédent, donne alors

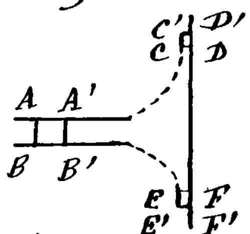
$$z_0-z_1+h_0-h_1-\frac{3u^2}{4g}=\frac{l\chi}{\Omega}(au+bu^2)$$

ou, en appelant H la différence des niveaux des deux vases

$$H=\frac{3u^2}{4g}+\frac{l\chi}{\Omega}(au+bu^2)$$

Cette équation fournit la valeur de u; et par suite, la dépense.

216 – Pression exercée par une veine liquide en mouvement contre une paroi plane. – Une veine liquide vient se briser contre une paroi plane. Une fois le régime permanent établi, les filets se recourbent et deviennent parallèles au plan. Il s'agit de calculer la force F qu'il faudrait appliquer normalement à la paroi, suivant l'axe de la veine pour maintenir cette paroi en repos.



Appliquant à cet effet le théorème des quantités de mouvement au liquide ABCDEF pendant le temps dt et projetant sur l'axe de la veine, il est clair qu'il suffit de considérer la partie A B A'B', car en CD ou EF, la vitesse est perpendiculaire à l'axe de projection. Or ρ désignant la densité du liquide, et ω la section de la veine, la masse AB A'B' a pour valeur $\rho\omega V dt$; donc

$$F dt-\rho\omega V^2 dt=0$$

ou

$$F=\rho\omega V^2$$

la force F est ainsi proportionnelle au carré de la distance. –

Quatrième partie.
Thermodynamique.

Chapitre premier.
Préliminaires.

On va rappeler d'abord certaines notions d'Analyse nécessaires à l'exposition de la théorie.

217 – Remarques sur les relations différentielles. – Nous savons qu'il existe une relation différentielle entre trois quantités x, y, z lorsque les variations infiniment petites de ces quantités sont liées par une équation de la forme

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

P, Q, R étant des fonctions de x, y, z.

Lorsque la relation différentielle se réduit à la forme

$$dz = Pdx + Qdy$$

P, Q étant des fonctions de x, y, il y a deux cas à considérer.

1° Si les fonctions P, Q sont telles que l'on ait

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

il existe une fonction $\varphi(x, y)$ dont $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle totale. L'accroissement de la fonction φ, lorsque x, y passent d'un système de valeurs à un autre, mesure l'accroissement correspondant de la quantité z.

Par suite, si la fonction φ est uniforme, l'accroissement de z ne dépend que des valeurs extrêmes de x, y; il reste le même, quelle que soit la série des valeurs intermédiaires. Si x, y reviennent à leurs valeurs initiales, l'accroissement de z est égal à zéro.

2° Si la condition $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ n'est pas remplie, il n'existe pas de fonction dont la différentielle soit égale à dz.

Pour avoir l'accroissement de z lorsque les variables x, y passent des valeurs x_0, y_0 aux valeurs x_1, y_1, il est nécessaire d'établir une relation entre x et y. En posant alors $y = f(x)$, d'où $dy = f'(x)\,dx$, on a

$$dz = [P + Q f'(x)]\,dx$$

P et Q, fonctions de x, y deviennent des fonctions de x seulement, si on y remplace y par $f(x)$. Par suite, dz se réduit à la différentielle $\psi(x)\,dx$ d'une fonction de x et, quand x varie de x_0 à x_1, l'accroissement de z est

$$\Delta z = \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx$$

La valeur de cet accroissement dépend évidemment de la relation qui lie x et y, entre les valeurs extrêmes de ces variables

On peut donner une forme géométrique à ces remarques. Soit un point M ayant pour coordonnées x et y. Lorsque les variables passent continûment d'un système de valeurs à un autre, le point M décrit une courbe entre deux points déterminés M_0 et M_1.

On peut dire alors que, lorsqu'on va de M_0 à M_1, l'accroissement de z ne change pas ou change avec le chemin parcouru suivant que $P\,dx + Q\,dy$ est ou n'est pas une différentielle exacte.

Lorsque le point M décrit un contour fermé, l'accroissement de z est nul dans le premier cas; il ne l'est pas en général dans le second.

218. Théorème. — Si P et Q sont deux fonctions de x, y, continues et uniformes dans toute l'étendue de l'aire limitée par un contour fermé, l'intégrale simple

$$\int (P\,dx + Q\,dy)$$

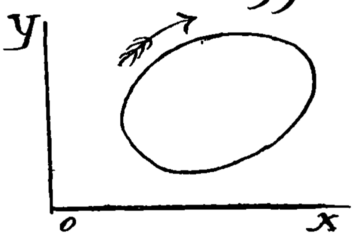
prise en donnant à x et à y successivement tous les systèmes de valeurs qui correspondent aux divers points du contour, est égale à l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) dx\,dy$$

étendue à tous les éléments superficiels $dx\,dy$ de l'aire considérée, de sorte que l'on a:

$$(1) \qquad \int (P\,dx + Q\,dy) = \iint \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) dx\,dy$$

Cet énoncé suppose que le contour est parcouru dans le sens indiqué par la flèche ci-contre. Ce sens est celui suivant lequel un observateur debout sur la partie supérieure du plan XOY doit parcourir le contour de l'aire considérée, de manière que cette aire soit toujours à sa droite.



Nous nous bornerons à rappeler ici l'énoncé de ce théorème dont la démonstration a été donnée dans le Cours d'Analyse au commencement de la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires.

219 - Corollaire. — Une expression de la forme $Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte si l'intégrale $\int(P\,dx + Q\,dy)$ prise suivant un contour fermé quelconque, est égale à zéro.

Il résulte en effet de la relation (1) que l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)dx\,dy$$

est alors égale à zéro, quelque soit le champ de l'intégration.

Par suite l'élément de cette intégrale doit être identiquement nul et on a :

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

220 - Intégrale d'une différentielle totale. — Nous rappellerons enfin que dans le cas où la condition ci-dessus d'intégrabilité se trouve satisfaite, la fonction $\varphi(x,y)$ dont $Pdx + Qdy$ est la différentielle exacte est donnée par la formule

$$(2) \qquad \varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P\,dx + \int_{y_0}^{y} Q_0\,dy\,,$$

dans laquelle, les limites x_0 et y_0 étant arbitraires, on désigne par Q_0 ce que devient la fonction Q lorsque l'on y remplace x par x_0.

Cette formule a été également établie dans le Cours d'Analyse ; elle nous sera utile ultérieurement.

Chapitre II.

Transformations sans changement d'état.

221 – La Thermodynamique a pour objet l'étude de la transformation des corps par la chaleur.

Cette transformation peut s'opérer avec changement d'état, soit physique, soit chimique.

Les transformations accomplies avec changement d'état chimique rentrent dans le domaine de la Thermochimie; nous n'aurons pas à les considérer ici.

En admettant la permanence de l'état chimique, il peut arriver que l'état physique du corps soit ou ne soit pas modifié. Nous supposerons d'abord que cet état (solide, liquide ou gazeux) reste le même dans l'étendue de la transformation.

I. Formules générales de la transformation.

222 – **Hypothèses admises.** — Nous admettrons dans cette étude :

1° que le corps qui se transforme est isotrope et que la température est la même dans toutes ses parties;

2° que dans chacun des états successifs de sa transformation, le corps est en repos sous une pression extérieure, normale et uniforme sur toute l'étendue de sa surface.

223 – **Équation caractéristique.** — Dans ces conditions, si l'on considère l'unité de poids du corps, sa pression, son volume et sa température sont liés par une relation de sorte que, deux de ces éléments étant pris arbitrairement, le troisième est déterminé.

Si donc on désigne par

- t la température,
- v le volume de l'unité de poids du corps,
- p la pression par unité de surface,

il existe entre ces trois variables une relation $f(t,p,v)=0$ dite équation caractéristique du corps.

Cette équation n'est connue aujourd'hui que pour les gaz qui suivent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

A défaut de cette équation, il suffirait de connaître l'équation différentielle $\frac{df}{dt}dt+\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dp}dp=0$. On y parvient par la détermination de deux éléments spécifiques dont voici la définition.

224 – **Coefficients thermo-élastiques.** — L'équation différentielle caractéristique

peut être mise sous la forme :

$$\frac{dv}{v} = \alpha dt - \beta dp. \tag{3}$$

Les coefficients α, β sont dits thermo-élastiques ; il est aisé d'en préciser la signification.

1° Le coefficient α détermine l'accroissement relatif du volume correspondant à un accroissement infiniment petit de la température, lorsque la pression reste constante ; c'est le coefficient de dilatation sous pression constante.

2° Le coefficient β détermine la diminution relative du volume correspondant à un accroissement infiniment petit de la pression, lorsque la température est maintenue constante ; c'est le coefficient de compressibilité isothermique.

225 – Coefficients thermiques. — 1° Supposons que l'on échauffe l'unité de poids d'un corps, en maintenant son volume constant, de manière à produire un accroissement dt de la température ; on dépense une quantité de chaleur dq. Le rapport $c = \frac{dq}{dt}$, correspondant à $dv = 0$, est la chaleur spécifique sous volume constant.

2° Supposons que l'on échauffe l'unité de poids du corps, sous pression constante, de manière à produire un accroissement dt de la température ; on dépense une quantité de chaleur dq. Le rapport $c' = \frac{dq}{dt}$, correspondant à $dp = 0$, est la chaleur spécifique sous pression constante.

Les deux chaleurs spécifiques portent le nom commun de coefficients thermiques.

226 – Expression de la chaleur absorbée par une transformation élémentaire.

Prenons v et p comme variables indépendantes et considérons la température t comme une fonction de ces variables définie par l'équation caractéristique ;

1° Si, la pression restant constante, le volume v varie de dv, la température éprouve une variation correspondante $\frac{dt}{dv}dv$ et, par suite, le corps a reçu une quantité de chaleur $c'\frac{dt}{dv}dv$, c' étant la chaleur spécifique sous pression constante.

2° Si, le volume restant constant, la pression p varie de dp, la température varie de $\frac{dt}{dp}dp$, et le corps a reçu une quantité de chaleur égale à $c\frac{dt}{dp}dp$, c étant la chaleur spécifique sous volume constant.

3° Par suite, si le volume et la pression s'accroissent simultanément de dv et dp, le corps reçoit une quantité de chaleur

$$dq = c'\frac{dt}{dv}dv + c\frac{dt}{dp}dp \tag{4}$$

Cette relation est celle qui existe entre la quantité de chaleur absorbée par un corps dans une transformation infiniment petite et les variations correspondantes et les variations correspondantes de deux variables indépendantes.

On peut introduire dans cette relation les coefficients thermo-élastiques. On déduit, en effet, de la relation (3)

$$dt = \frac{1}{\alpha v} dv + \frac{\beta}{\alpha} dp.$$

Il en résulte que les dérivées partielles de la fonction sont

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{\alpha v} \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

On peut substituer ces valeurs dans l'équation (4), et dans la relation ainsi obtenue, remplacer successivement dv et ensuite dp par leurs valeurs tirées de (3); on obtient ainsi les trois expressions

$$dq = \frac{c'}{\alpha v} dv + \frac{c\beta}{\alpha} dp$$

$$(5) \qquad dq = c' dt - \frac{(c'-c)\beta}{\alpha} dp$$

$$dq = c\,dt + \frac{(c'-c)}{\alpha v} dv$$

qui donnent la valeur de dq en fonction des variations infiniment petites des variables prises deux à deux pour variables indépendantes.

Ces expressions dépendent des quatre coefficients c, c', α, β qui doivent être considérés en général comme des fonctions des deux variables choisies pour déterminer l'état du corps.

Plus généralement, on peut imaginer les trois quantités t, v, p exprimées en fonction de deux variables x, y par trois relations

$$t = F(x,y) \qquad v = F_1(x,y) \qquad p = F_2(x,y)$$

telles que, par l'élimination de x, y, on trouve l'équation caractéristique.

Par l'introduction de ces nouvelles variables, on met dq sous la forme générale

$$(6) \qquad dq = P\,dx + Q\,dy$$

P et Q désignant des fonctions de x, y; et cette forme comprend les trois qui précèdent.

227 – *Expression de la chaleur absorbée par une transformation quelconque.*
La chaleur q absorbée par une transformation finie, portant le corps d'un état à un autre état quelconque, est représentée par l'intégrale

$$q = \int (P\,dx + Q\,dy)$$

étendue à la série des états intermédiaires.

Il importe de se rappeler que $P\,dx + Q\,dy$ n'est pas une différentielle exacte; les fonctions P et Q sont telles que l'on n'a pas $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Par suite de ce fait fondamental, mis en lumière par M. Clausius, la chaleur absorbée par la transformation d'un corps ne dépend pas seulement des états extrêmes; elle dépend aussi de la série des états intermédiaires.

228 – *Transformations isothermiques.* — Si un corps absorbe ou dégage de la chaleur de manière que sa température reste constante, la transformation est *isothermique*.

229 – *Transformations adiabatiques.* — La transformation d'un corps qui n'absorbe ou ne dégage pas de chaleur est dite *adiabatique*.

Dans une transformation adiabatique, les deux variables de l'état du corps sont liées par l'équation différentielle.

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

dont l'intégrale générale peut être mise sous la forme

$$\mu = \psi(x, y)$$

μ désignant une constante arbitraire.

230 – *Cycles.* — On appelle *Cycle* une suite de transformations telle que le corps revienne à son état initial.

L'expression de dq n'étant pas une différentielle exacte, l'intégrale $\int dq$ étendue à la série des états successifs d'un cycle quelconque n'est pas égale à zéro; la chaleur dégagée n'est pas égale à la chaleur absorbée.

Désignons par

q_1 la somme des éléments dq positifs,

q_0 la somme des valeurs absolues des éléments dq négatifs,

q la valeur de $\int dq$ relative au cycle.

La quantité de chaleur q_1 est celle que, dans sa transformation, le corps ~~emprunte~~

emprunte aux sources extérieures ; la quantité q_0 est celle qu'il leur restitue. D'ailleurs l'état final du corps ne diffère pas de son état initial ; par suite, la quantité $q = q_1 - q_0$ a disparu, ou plutôt n'existe plus sous la forme de chaleur.

La quantité $q = q_1 - q_0$ est désignée sous le nom de chaleur consommée. Lorsque les circonstances du cycle sont telles que l'on ait $q_0 > q_1$, la valeur de q est négative ; sa valeur absolue représente alors de la chaleur créée.

231 Représentation géométrique. — On peut représenter par un point M, sur un plan le système x, y des variables qui déterminent l'état d'un corps.

Lorsque ce corps se transforme, le point M se meut sur une courbe.

Aux transformations isothermiques ou adiabatiques correspondent des faisceaux de courbes

$$t = \varphi(x, y)$$

$$\mu = \psi(x, y)$$

aux paramètres t et μ que l'on appelle isothermiques ou adiabatiques, comme les transformations que ces courbes représentent. Par chaque point passent une courbe t et une courbe μ.

Lorsque le corps se transforme suivant un cycle le point M décrit un contour fermé.

232 – Travail des pressions. — Dans le mode particulier de transformation que nous considérons, chacun des états successifs du corps est un état d'équilibre ; par suite, sur les deux faces d'un élément de la surface limite s'exercent des pressions égales et opposées. Le travail de ces pressions, dans une transformation, peut s'exprimer d'une manière très-simple.

Considérons, par exemple, la pression intérieure résultant de la force expansive du corps. Soit p la valeur de cette pression par unité de surface ; la face intérieure de la surface limite supporte une pression $p\omega$. Supposons que le corps éprouve un accroissement de volume infiniment petit et soit ε la portion de normale comprise entre l'élément ω et la nouvelle surface du corps. Le travail de la pression intérieure est $p\omega\varepsilon$ pour l'élément ω et le travail élémentaire accompli par le corps est

$$d\mathcal{T} = \sum p\omega\varepsilon = p\sum\omega\varepsilon$$

Mais $\omega\varepsilon$ est le volume compris entre l'élément ω et l'élément correspondant de la nouvelle surface ; $\sum\omega\varepsilon$ est la variation de volume dv du corps. On a donc

$$(7) \qquad d\mathcal{T} = p\,dv.$$

Le travail accompli par le corps, ou <u>travail extérieur</u>, dans une transformation finie quelconque s'exprime par l'intégrale

$$(8) \qquad \mathcal{C} = \int p\,dv$$

L'expression $p\,dv$ n'étant pas une différentielle exacte, il est nécessaire, pour calculer cette intégrale, de connaître la relation qui lie x et y dans la transformation.

Si, en particulier, le corps se transforme suivant un cycle, l'expression (8) du travail extérieur mise sous la forme

$$\mathcal{C} = \int p\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy\right)$$

peut, d'après la relation (1) être remplacée par la suivante

$$\mathcal{C} = \iint\left(\frac{dp}{dy}\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dy}\right)dx\,dy$$

Si les variables x et y sont v et p, on a simplement

$$\mathcal{C} = \iint dx\,dy$$

Par suite, le travail extérieur est représenté par l'aire limitée par le contour représentatif du cycle. Il est aisé d'établir directement ce résultat, d'après la valeur (7) du travail élémentaire.

La pression extérieure étant égale et opposée à la pression intérieure, son travail élémentaire est $-p\,dv$ et son travail total correspondant à une transformation quelconque du corps est $-\int p\,dv$.

II. Thermodynamique des gaz parfaits.

223. – L'expérience montre que certains corps présentent les propriétés suivantes:

1° ils suivent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

2° leurs chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant, sont entre des limites étendues, sensiblement indépendantes des variables de l'état du corps.

Ces corps sont dits <u>gaz parfaits</u>, tels sont très à peu près, les gaz H, Az, O, CO.

234 - **Équation caractéristique.** — L'équation caractéristique des gaz parfaits résultant des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, est la suivante :

$$pv = K(1 + mt)$$

en désignant par m une constante dont la valeur est commune à tous les gaz et par K un coefficient spécifique variant avec la nature du gaz.

235 - **Température absolue.** — La constante m est égale à $\frac{1}{273}$ d'après les expériences de Regnault. Par suite, l'équation précédente devient

$$(9) \qquad pv = \frac{K}{273}(273 + t)$$

Le binôme $273 + t$ est ce que l'on appelle la <u>température absolue</u> dans la nouvelle théorie dynamique de la chaleur. C'est la température centigrade comptée à partir d'un zéro placé à 273 degrés au-dessous du zéro ordinaire.

236 - **Volume spécifique.** — Désignons par p_0 la pression atmosphérique normale et posons $K = p_0 v_0$; l'équation (9) peut s'écrire

$$(10) \qquad p\,v = \frac{p_0 v_0}{273}(273 + t)$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que v_0 est la valeur de v qui correspond aux valeurs $t = 0$ et $p = p_0$ de la température et de la pression.

Cette constante que l'on appelle <u>volume spécifique</u>, représente donc le volume de l'unité de poids du gaz à zéro et sous la pression atmosphérique normale, dans le cas où le gaz peut subir ces conditions de température et de pression sans changer d'état et sans cesser de satisfaire aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Sa valeur est égale à l'inverse du <u>poids spécifique</u>, ou poids de l'unité de volume à zéro et sous la pression p_0.

237 - **Coefficients thermo-élastiques des gaz parfaits.** — En posant pour abréger

$$(11) \qquad R = \frac{p_0 v_0}{273}$$

et désignant par T la température absolue $273 + t$, l'équation (10) peut s'écrire

$$(12) \qquad pv = RT$$

On obtient par différentiation

$$\frac{dv}{v} = \frac{dt}{T} - \frac{dp}{p}.$$

et en identifiant cette équation avec la relation (3) qui définit les coefficients thermo-élastiques, on trouve

$$(13) \qquad \alpha = \frac{1}{T} \qquad \beta = \frac{1}{p}$$

Donc, pour les gaz parfaits :
1° le coefficient de dilatation sous pression constante est l'inverse de la température absolue.
2° le coefficient de compressibilité isothermique est l'inverse de la pression.

238 – Expression de la chaleur absorbée par une transformation élémentaire.
[illegible] valeurs (13) dans les équations (5), on a, pour la [illegible] par une transformation thermique infiniment petite, les trois [illegible] ressions :

$$dq = \frac{1}{R}(c'p\,dv + c\,v\,dp)$$

$$(14) \qquad dq = c'dt - \frac{c'-c}{R}\,v\,dp$$

$$dq = c\,dt + \frac{c'-c}{R}\,p\,dv$$

qui, jointes à l'équation (12), renferment toutes les lois de la thermodynamique des gaz.

239 – Nous avons remarqué (N° 229) que l'expression de la chaleur absorbée par une transformation infiniment petite n'est pas une différentielle exacte.
Les expressions (14) permettent de vérifier ce fait dans le cas des gaz parfaits. Considérons, en effet, la première de ces expressions, celle où v et p sont les variables indépendantes. Si cette expression était une différentielle exacte, on aurait $\frac{d\,(c'p)}{dp} = \frac{d\,(cv)}{dv}$ ce qui conduirait à la relation inexacte $c' = c$.
L'expression dq n'est donc pas une différentielle exacte, mais il est possible de former avec elle deux autres expressions qui soient des différentielles exactes.

240 — En effet, si l'on pose $A = \frac{(c'-c)}{R}$, la quantité A est une constante et la troisième des relations (14) montre que l'expression $dq - Apdv$ est égale à $c\,dt$; d'ailleurs la chaleur spécifique c étant constante, pour les gaz parfaits, lorsque t et u varient, on voit que $c\,dt$ est la différentielle de $ct + a$, a désignant une constante arbitraire. Par suite, en posant

$$(15) \qquad h = ct + a$$

on a $dq - Apdv = dh$.

241 — En divisant ensuite la troisième des expressions (14) par T, ayant égard à la relation $pv = RT$, et désignant par n le rapport $\frac{c'}{c}$, on trouve

$$\frac{dq}{T} = c\left[\frac{dt}{T} + (n-1)\,\frac{dv}{v}\right]$$

et par suite $\frac{dq}{T} = d\mu$, en posant

$$(16) \qquad \mu = c\,l(Tv^{n-1}) + b.$$

la caractéristique l étant celle des logarithmes népériens, et b désignant une constante arbitraire.

242 — Donc les expressions $dq - Apdv$ et $\frac{dq}{T}$ sont des différentielles exactes; nous verrons ultérieurement que ce résultat, que nous venons d'établir pour les gaz parfaits, s'étend à tous les corps.

243 — La quantité pdv qui entre dans le second membre de la troisième des expressions (14) a une signification que nous avons établie précédemment (N° 232); elle représente le travail de la force élastique du gaz quand le volume s'accroît de dv.

Il en résulte que la quantité de chaleur absorbée par le gaz dans une transformation infiniment petite se compose de deux termes dont le premier est proportionnel à la variation de la température et le second au travail extérieur élémentaire.

244 — Expression de la chaleur absorbée par une transformation quelconque.

Si l'on considère actuellement une transformation modifiant de quantités finies quelconques la température et le volume d'un gaz, on a, par intégration, la quantité de chaleur absorbée par la transformation

$$q = \int\left(c\,dt + \frac{c'-c}{R}\,p\,dv\right)$$

c'est-à dire puisque les chaleurs spécifiques c, c' sont constantes,

$$q = c\int dt + \frac{c'-c}{R}\int p\,dv$$

En posant, comme précédemment

$$(17) \qquad A = \frac{c'-c}{R}$$

et désignant par

t_0, t_1 les températures initiale et finale,

$\mathcal{C}$ le travail extérieur total

cette expression devient

$$(18) \qquad q = c(t_1 - t_0) + A\mathcal{C}.$$

245 – Transformations isothermiques. – Si la transformation est isothermique, on a constamment $t_1 = t_0$ et, par suite $q = A\mathcal{C}$. Donc, la chaleur absorbée dans une transformation isothermique est proportionnelle au travail extérieur.

246 – Transformations adiabatiques. – Les lois particulières qui régissent une transformation adiabatique résultent des équations (14) en y faisant $dq = 0$. On obtient alors les relations

$$(19) \qquad \begin{aligned} c'p\,dv + cv\,dp &= 0 \\ c'dt - \frac{c'-c}{R}v\,dp &= 0 \\ c\,dt + \frac{c'-c}{R}p\,dv &= 0 \end{aligned}$$

En posant $n = \frac{c'}{c}$ et en désignant par f, f_1, f_2 trois constantes arbitraires, les intégrales des équations (19) sont :

$$(20) \qquad \begin{aligned} pv^n &= f \\ Tp^{\frac{1-n}{n}} &= f_1 \\ Tv^{n-1} &= f_2 \end{aligned}$$

Dans ces formules v volume de l'unité de poids est l'inverse du poids de l'unité de volume. Par suite, la première des relations (20) montre que dans une transformation adiabatique, la pression varie comme une puissance de la densité dont l'exposant est égal au rapport des deux chaleurs spécifiques.

Cette est la loi des pressions que Laplace et Poisson avaient énoncé avant la théorie mécanique de la chaleur.

247 — En désignant par E l'inverse de la quantité A définie par la relation (17), la troisième équation (19) peut s'écrire $E\,c\,dt + p\,dv = 0$. Par suite, en intégrant et désignant par T_0 et T_1 les températures absolues initiale et finale, il vient:

$$(21) \qquad \int p\,dv = E\,c\,(T_0 - T_1).$$

Donc, le travail de la détente adiabatique d'un gaz est proportionnel à l'abaissement de la température de ce gaz.

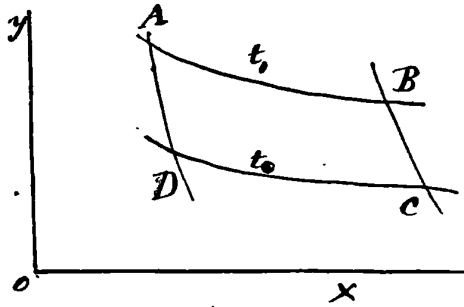
Supposons que le gaz se détende indéfiniment sans gagner ni perdre de chaleur et cherchons le travail correspondant. Le volume v croissant indéfiniment, il résulte de la troisième des équations (20) que la température absolue tend vers zéro. En conséquence, faisant $T_1 = 0$ dans l'équation (21) on trouve $E\,c\,T_0$ pour l'expression du maximum de travail que puisse produire la détente adiabatique de l'unité de poids d'un gaz à partir d'une température absolue donnée T_0.

248 — Cycles. — Supposons que le gaz se transforme suivant un cycle; la température finale t_1 étant égale à la température initiale t_0, la relation (18) donne $q = A\,\mathcal{C}$. Donc, le rapport de la chaleur consommée au travail extérieur est indépendant des circonstances du cycle.

On verra ultérieurement que ce rapport est également indépendant de la nature du corps qui se transforme suivant un cycle. Dès à présent on voit que l'on peut déduire des seules lois expérimentales que suivent les gaz cette notion fondamentale de l'équivalence de la chaleur et du travail dont la conception précise a été le point de départ de la Thermodynamique. Cette déduction remarquable est due à M. Bourget.

249 — Cycle de Carnot. — On appelle cycle de Carnot un cycle dont le contour représentatif est formé de deux lignes isothermiques et de deux lignes adiabatiques.

(Voir à la page suivante la démonstration de ce cycle).



Soient deux lignes isothermiques AB, DC qui correspondent à des températures différentes t_1 et t_0 telles que l'on ait, par exemple $t_1 > t_0$; Soient, en outre, deux lignes adiabatiques AD, BC.

Supposons que le point représentatif de la transformation décrive le quadrilatère curviligne ainsi formé dans le sens direct ABCDA. Désignons par q_1 la chaleur absorbée par le corps de A en B et par q_0 la chaleur dégagée de C en D; la chaleur consommée dans le cycle est $q_1 - q_0$ et en désignant par $\mathcal{C}$ le travail effectué par le gaz, on a d'après ce qui précède $q_1 - q_0 = A\mathcal{C}$.

Si le cycle est décrit en sens inverse ADCBA, le gaz absorbe q_0 de D en C, dégage q_1 de B en A et le travail de la pression intérieure est égal à $-\mathcal{C}$; ce travail correspond à un travail égal à $\mathcal{C}$ de la pression extérieure.

250 – Théorème. – Quand un gaz se transforme suivant un cycle de Carnot, entre deux sources de températures différentes, le rapport de la chaleur empruntée à l'une des deux sources à la chaleur cédée à l'autre source est égal au rapport des températures absolues respectives des deux sources.

En effet, on a démontré (Nº 241) que l'expression de la chaleur absorbée dans une transformation infiniment petite peut être mise sous la forme $dq = T\,d\mu$, T désignant la température absolue et μ une fonction de deux variables de l'état du corps.

Sur une ligne adiabatique, $d\mu$ est égal à zéro et par suite μ reste constant. Soient μ_1 et μ_0 les valeurs de μ sur BC et AD; désignons, de plus, par T_1 et T_0 les températures absolues relatives aux isothermiques AB et DC.

En intégrant successivement dq de A à B, puis de C à D, on a

$$q_1 = T_1 (\mu_1 - \mu_0)$$

$$-q_0 = T_0 (\mu_0 - \mu_1)$$

On en conclut conformément à l'énoncé,

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{T_1}{T_0} \qquad (22)$$

Il résulte de ce qui précède, que le rapport $\frac{q_1}{q_0}$ ne dépend que des températures des sources; il est indépendant de la nature du corps qui se transforme suivant le cycle. Nous étendrons ultérieurement à un corps quelconque ce résultat obtenu dans le cas d'un gaz et cette extension nous conduira au principe de Carnot. –

III – Transformations réversibles.

251 – **Définition.** – On dit qu'une transformation est réversible, lorsque le corps qui se transforme peut parcourir dans les deux sens opposés, les états successifs de cette transformation.

252 – **Conditions de réversibilité.** – Il est une condition essentielle à remplir pour qu'une transformation soit réversible. Nous avons appelé p la pression intérieure qui correspond au volume v et à la température t dans l'état d'équilibre d'un système isotrope. Pour qu'une transformation du système soit réversible, il faut que la pression extérieure que nous désignerons par p' soit constamment égale à p. Si la pression extérieure p' était moindre que p, le corps pourrait bien se dilater, mais la transformation inverse serait impossible. Au contraire, si la pression extérieure p' était plus grande que p, le corps pourrait se contracter, mais la transformation inverse serait impossible.

253 – Pour qu'une transformation soit réversible, il faut en outre qu'il n'existe pas de différence finie entre la température du corps qui se transforme et la température des sources avec lesquelles ce corps est mis en communication pendant la transformation. Car si une source est à une température supérieure à celle du corps, elle pourra bien lui céder la chaleur nécessaire pour accomplir une phase déterminée de sa transformation, mais elle ne pourrait pas recevoir la chaleur que le corps doit dégager dans le sens inverse.

Dans ce qui suivra, nous supposerons toujours ces conditions remplies, c'est à dire les transformations réversibles.

IV – Principe d'équivalence.

254 – **Postulatum.** – Nous avons vu (Nº 248) que lorsqu'un gaz se transforme suivant un cycle, la chaleur consommée est proportionnelle au travail extérieur. On voit ainsi que, si de la chaleur disparaît, du travail est produit, et inversement, si de la chaleur est créée, du travail est dépensé. Ce résultat conduit à concevoir entre la chaleur consommée et le travail produit, quand un corps quelconque se transforme suivant un cycle, une corrélation telle que l'une de ces quantités est nulle quand l'autre l'est aussi.

De là ce postulatum: quand un système matériel quelconque se transforme suivant un cycle réversible, la chaleur consommée est nulle si le travail extérieur est nul, et réciproquement. –

255 – Corollaire : Quand un système matériel quelconque se transforme suivant un cycle réversible, le rapport de la chaleur consommée au travail extérieur est une constante indépendante des circonstances du cycle et de la nature du système. (Principe d'équivalence).

Soient
q et τ la chaleur consommée et le travail produit lorsqu'un corps S se transforme suivant un cycle C;
q' et τ' la chaleur consommée et le travail produit lorsqu'un corps S se transforme suivant un cycle C';

Si l'on pose $\frac{q}{\tau} = A$, $\frac{q'}{\tau'} = A'$, je dis que l'on a $A = A'$. En effet, considérons le cycle d'opérations réalisé lorsque le corps S décrivant m fois dans le sens direct le cycle C, le corps S décrit m' fois dans le sens inverse, le cycle C'. La chaleur totalement consommée est $mq - m'q'$, et le travail totalement accompli est $m\tau - m'\tau'$.

Cela posé, choisissons m et m' qui sont arbitraires, de manière que $mq - m'q' = 0$; la chaleur consommée sera nulle. D'après le postulatum, le travail correspondant doit être nul aussi et on a, par conséquent, $m\tau - m'\tau' = 0$. Mais $q = A\tau$, $q' = A'\tau'$; on a donc simultanément

$$mA\tau - m'A'\tau' = 0$$

$$m\tau - m'\tau' = 0$$

et on en conclut $A = A'$.

256 – Valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur. –
La quantité A qui exprime le rapport constant existant entre la chaleur absorbée dans un cycle et le travail correspondant est ce que l'on appelle l'équivalent calorifique du travail et son inverse que nous désignerons par la lettre E, est l'équivalent mécanique de la chaleur.

La théorie des gaz conduit à la valeur (17)

$$A = \frac{c' - c}{R}$$

D'ailleurs, d'après (11), on a en désignant par v_0 le volume spécifique du gaz

$$R = \frac{p_0 v_0}{273}.$$

On en conclut

$$(23) \qquad E = \frac{1}{273}\,\frac{p_0 v_0}{c' - c}$$

et il résulte du principe d'équivalence que E est une constante. Il existe donc, pour les gaz parfaits, entre le volume et les deux chaleurs spécifiques une relation telle que l'expression (23) est un nombre invariable dépendant uniquement du choix des unités qui servent à exprimer les quantités de chaleur et de travail

Cette conséquence de la théorie se vérifie ; si, pour les gaz, H, Az, O, CO, on remplace v_0, c', c par les valeurs données par l'expérience, on trouve la même valeur de E. Voici les éléments du calcul pour l'hydrogène.

Unités adoptées : Kilogramme, mètre, calorie. La calorie, unité de chaleur, est la quantité nécessaire pour porter de zéro à un degré sous la pression normale, la température d'un kilogramme d'eau. Données :

$$v_0 = 11{,}150 \qquad c' = 3{,}410 \qquad \frac{c'}{c} = 1{,}40$$

$$c = 2{,}435 \qquad p_0 = 10333.$$

on en déduit $E = 434$. Ce nombre représentant des kilogrammètres, peut être adopté comme valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

V. Principe de Carnot.

257 - **Postulatum.** — Nous avons vu, (N° 250) que, lorsqu'un gaz se transforme suivant un cycle de Carnot, entre deux sources, aux températures absolues T_1 et T_0, on avait entre ces températures et les quantités de chaleur q_1 et q_0 absorbée et dégagée dans le cycle, la relation

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

On tire de cette relation

$$\frac{q_1}{T_1} = \frac{q_0}{T_0} = \frac{q_1 - q_0}{T_1 - T_0}$$

on a d'ailleurs, en désignant par τ le travail accompli, $q_1 - q_0 = A\tau$, d'où

$$q_1 = \frac{A T_1}{T_1 - T_0}\,\tau \qquad q_0 = \frac{A T_0}{T_1 - T_0}\,\tau$$

On a, d'ailleurs, en désignant par τ le travail accompli $q_1 - q_0 = A\tau$, d'où

$$q_1 = \frac{AT_1}{T_1 - T_0}\tau \qquad q_0 = \frac{AT_0}{T_1 - T_0}\tau$$

Les rapports $\frac{q_1}{\tau}$, $\frac{q_0}{\tau}$ ne dépendent que des températures des sources. Si donc un ou plusieurs gaz décrivent successivement, entre les températures T_1 et T_0, des cycles de Carnot dans les sens direct ou inverse, la quantité de chaleur empruntée à l'une des sources et la quantité de chaleur cédée à l'autre sont respectivement données par les formules

$$\sum q_1 = \frac{AT_1}{T_1 - T_0}\sum\tau \qquad \sum q_0 = \frac{AT_0}{T_1 - T_0}\sum\tau.$$

de sorte que ces quantités sont respectivement proportionnelles au travail $\sum\tau$ totalement accompli. Il n'est donc possible de transporter de la chaleur sur une source, par les opérations du cycle de Carnot, que si du travail est produit ou dépensé.

On peut étendre à des corps quelconques ce résultat démontré pour des gaz. De là ce postulatum: Quand un système matériel quelconque se transforme suivant des cycles de Carnot entre des limites déterminées de température, la chaleur transportée est nulle si le travail extérieur est nul, et réciproquement.

238. — M. Clausius a proposé une démonstration de ce postulatum en admettant, à titre d'axiome, qu'il est impossible de transporter sans dépense de travail de la chaleur d'un corps sur un plus chaud.

Considérons un système matériel se transformant suivant des cycles de Carnot et conservons les notations du numéro précédent. Si en supposant $\sum\tau = 0$, on avait $\sum q_1 < 0$, de la chaleur serait absorbée par la source supérieure et contrairement à l'axiome, de la chaleur serait transportée de l'autre source plus chaude sans dépense de travail. Si l'on avait $\sum q_1 > 0$, de la chaleur serait transportée sans travail dans la transformation inverse. On doit donc admettre que $\sum q_1$ est égal à zéro, et comme on a, d'après le premier principe, $\sum q_1 - \sum q_0 = A\sum\tau$, on doit avoir aussi $\sum q_0 = 0$.

239 — Corollaire. — Quand un corps quelconque se transforme suivant un cycle de Carnot, le rapport de la quantité de chaleur transportée au travail extérieur ne dépend que des températures des sources; ce rapport est indépendant de la nature du corps. (Principe de Carnot).

Soient

q_0 et τ la chaleur transportée et le travail produit lorsqu'un corps S se transforme suivant un cycle de Carnot C entre les mêmes températures T_1 et T_0,

q'_0 et τ' la chaleur transportée et le travail produit lorsqu'un autre corps S' se transforme suivant un cycle de Carnot C' entre les mêmes températures T_1 et T_0;

Si l'on pose $\frac{q_0}{\tau} = B$, $\frac{q'_0}{\tau'} = B'$, je dis que l'on a $B = B'$. En effet, considérons le cycle d'opérations réalisé lorsque le corps S décrivant m fois dans le sens direct le cycle C, le corps S' décrit m' fois dans le sens inverse le cycle C'. La chaleur définitivement transportée est $mq_0 - m'q'_0$ et le travail totalement accompli est $m\tau - m'\tau'$. Ces deux quantités sont nulles ensemble, d'après le postulatum; on doit donc avoir simultanément

$$mB\tau - m'B'\tau' = 0$$

$$m\tau - m'\tau' = 0.$$

et on en conclut $B = B'$.

260 — Le travail accompli dans un cycle étant proportionnel à la chaleur consommée $q_1 - q_0$, il résulte du principe de Carnot que le rapport $\frac{q_0}{q_1 - q_0}$, relatif à un cycle de Carnot, ne dépend pas de la nature du corps qui se transforme. Ce rapport, et par suite le rapport $\frac{q_1}{q_0}$, ont donc la même valeur pour un corps quelconque et pour un gaz se transformant entre les mêmes limites de température. On a donc, quel que soit le corps,

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

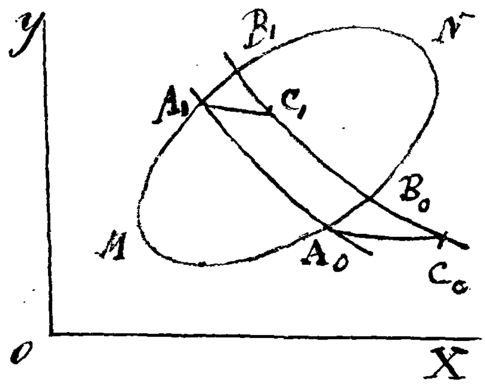
ce qui étend à un corps quelconque le théorème démontré (N° 250) dans le cas d'un gaz parfait.

261 — **Théorème de Clausius** — La relation précédente peut encore s'écrire

$$\frac{q_1}{T_1} - \frac{q_0}{T_0} = 0.$$

M. Clausius a généralisé ce résultat en établissant le théorème suivant:

<u>Si l'on désigne par dq la chaleur absorbée dans une transformation élémentaire d'un corps et par T la température absolue de ce corps, l'intégrale $\int \frac{dq}{T}$, étendue aux états successifs d'un cycle réversible est égale à zéro.</u>



Soit MN le contour représentatif du cycle. Menons une série de lignes adiabatiques infiniment voisines telles que A_1A_0, B_1B_0, avec les lignes isothermiques A_1C_1, A_0C_0.

Soient T_1 la température absolue qui correspond au point A_1 et δq_1 la quantité de chaleur à fournir au corps pour le transformer suivant l'élément A_1C_1 de la ligne isothermique ; désignons par T_0 et δq_0 les quantités analogues relatives au point A_0.

Le contour $A_1C_1C_0A_0A_1$ figurant un cycle de Carnot, on a, d'après ce qui précède

$$\frac{\delta q_1}{T_1} - \frac{\delta q_0}{T_0} = 0$$

et, pour toute la série des cycles analogues,

$$\int\left(\frac{\delta q_1}{T_1} - \frac{\delta q_0}{T_0}\right) = 0$$

Cela posé si l'on désigne par dq_1 la quantité de chaleur absorbée lorsque le corps se transforme suivant A_1B_1, il est aisé d'établir que la différence entre dq_1 et δq_1 est infiniment petite par rapport à ces quantités. Imaginons en effet que le corps se transforme suivant un cycle réversible $A_1B_1C_1A_1$, la chaleur consommée, égale à $dq_1 - \delta q_1$, équivaut au travail extérieur et ce travail qui serait représenté par l'aire $A_1B_1C_1$ si les variables x et y étaient v et p, est un infiniment petit du second ordre. On peut donc, dans l'intégrale ci-dessus remplacer δq_1 par dq_1 ; de même si dq_0 représente la chaleur absorbée quand le corps se transforme suivant A_0B_0, on peut remplacer δq_0 par dq_0. Par suite on a

$$\int\left(\frac{dq_1}{T_1} - \frac{dq_0}{T_0}\right) = 0$$

ou, ce qui revient au même

$$\int \frac{dq}{T} = 0 \qquad (24)$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments du cycle.

La relation (24) donne l'expression la plus générale du théorème de Carnot dans le cas d'un cycle quelconque réversible.

VI – Conséquences générales du principe d'équivalence et du principe de Carnot.

262 – Forme analytique du principe d'équivalence. — Soit $\int dq$ la

la chaleur consommée dans un cycle et $\int p\,dv$ le travail équivalent. On a, d'après le premier principe, en désignant par A l'équivalent calorifique du travail

$$\int dq = A \int p\,dv$$

c'est-à-dire

$$\int (dq - A\,p\,dv) = 0.$$

x et y étant les variables de l'état du corps, $dq - A\,p\,dv$ est de la forme $M\,dx + N\,dy$ et l'intégrale de cette expression suivant un contour fermé quelconque est égale à zéro. Cette expression est, par suite, une différentielle exacte (N°. 219) et, si l'on désigne par h une fonction des variables x y, on peut poser

$$(25) \qquad dq - A\,p\,dv = dh.$$

On désigne la fonction h sous le nom de chaleur interne.

263 – Forme analytique du principe de Carnot. – En second lieu, d'après le théorème de Clausius, l'intégrale $\int \frac{dq}{T}$, prise sur un contour fermé quelconque, est égale à zéro. Il en résulte que $\frac{dq}{T}$ est une différentielle exacte; on peut donc poser

$$(26) \qquad \frac{dq}{T} = d\mu$$

μ désignant une fonction que M. Clausius appelle entropie.

264 – Il résulte des relations (25) et (26) que l'expression de la chaleur absorbée par la transformation élémentaire d'un corps peut être mise sous l'une de ces deux formes

$$(27) \qquad dq = dh + A\,p\,dv$$

$$(28) \qquad dq = T\,d\mu$$

On peut apprécier maintenant le progrès réalisé par la théorie, puisque l'expression de dq primitivement mise sous la forme $P\,dx + Q\,dy$ et dépendant par suite de la détermination de deux fonctions distinctes P et Q se trouve ramenée à la détermination d'une seule fonction, h ou μ.

265 – (Voir la page suivante).

265 – La condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de la forme $M\,dx + N\,dy$ soit une différentielle exacte est que l'on ait $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$; en appliquant successivement cette condition aux expressions $dq - Ap\,dv$ et $\frac{dq}{T}$, on obtient deux relations qui résument toutes les conséquences de la théorie.

On pourrait établir ces conditions en attribuant à dq la forme générale $P\,dq + Q\,dy$, mais la généralité des formules que l'on obtiendrait ainsi n'offre aucune utilité; on se bornera à considérer le cas où l'une des variables est la température t, l'autre variable étant d'ailleurs quelconque. On supposera donc que l'état du corps soit déterminé par les deux variables t et x, de sorte que l'expression de dq soit réductible à la forme

$$(29) \qquad dq = \gamma\,dt + \lambda\,dx$$

Les coefficients γ, λ, fonctions de t et x, présentent alors une signification physique qu'il importe de préciser.

266 – **Chaleur spécifique générale.** – Le coefficient γ est une chaleur spécifique; il mesure, pour l'unité de poids du corps, le rapport $\frac{dq}{dt}$ évalué en attribuant à x une valeur constante.

Les variables v et p étant des fonctions de t, x, sont liées par une relation lorsque t varie, x reste constant; de sorte que le point M ayant v pour abscisse et p pour ordonnée décrit une courbe représentant un mode particulier de transformation auquel se rapporte la chaleur spécifique γ. Les chaleurs spécifiques ordinaires c et c' correspondent au cas où le point M décrit des droites parallèles aux axes coordonnés.

267 – **Chaleur latente.** – Le coefficient γ mesure la chaleur absorbée par le corps dans une transformation isothermique; c'est-à-dire dans des conditions telles que la variable x change seule de valeur, sans aucun effet thermométrique. Ce coefficient s'appelle chaleur latente.

Relation déduite du principe d'équivalence. En remplaçant dq par la valeur (29) et dv par $\frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}dx$, la relation (25) devient

$$(30) \qquad dh = \left(\gamma - Ap\frac{dv}{dt}\right)dt + \left(\lambda - Ap\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

En exprimant que le second membre est une différentielle exacte, on trouve la condition :

$$(31) \qquad \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\gamma}{dx} = A\Delta$$

Δ étant le déterminant des fonctions p et v :

$$(32) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dp}{dx} \\ \frac{dv}{dt} & \frac{dv}{dx} \end{vmatrix}$$

269 – **Relation déduite du principe de Carnot.** — De même, par suite de (29), la relation (26) devient

$$(33) \qquad d\mu = \frac{\gamma}{T}\,dt + \frac{\lambda}{T}\,dx$$

et la condition d'intégrabilité est la suivante :

$$(34) \qquad \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\gamma}{dx} = \frac{\lambda}{T}.$$

270 – **Relations déduites des deux principes.** — Chacune des relations (31) et (34) a été établie indépendamment de l'autre ; elle subsisterait donc si l'on voulait n'admettre que celui des deux principes fondamentaux dont elle dérive, à l'exclusion de l'autre. Mais, si l'on admet les deux principes, le système simultané de ces deux équations peut être remplacé par le suivant :

$$(35) \qquad \lambda = A T \Delta$$

$$(36) \qquad \frac{d\gamma}{dx} = A T \frac{d\Delta}{dt}$$

et les deux relations ci-dessus résument, comme nous l'avons déjà dit, toutes les conséquences de la théorie.

Nous allons considérer ces relations dans deux cas particuliers.

271 – 1° **Variables t et p.** – Soit $x = p$; on a alors $\gamma = c'$ et si l'on désigne par l' la valeur correspondante de λ, l'expression de dq est

$$dq = c'dt + l'dp.$$

Le déterminant Δ a pour valeur

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{dv}{dt} & \frac{dv}{dp} \end{vmatrix} = -\frac{dv}{dt}$$

et, par suite, les relations fondamentales (35) et (36) deviennent

$$(37) \qquad l' = -AT'\frac{dv}{dt}$$

$$(38) \qquad \frac{dc'}{dp} = -AT\frac{d^2v}{dt^2}$$

La première de ces relations montre que la chaleur latente l' est complètement déterminée par l'équation caractéristique. La seconde conduit à une conséquence importante : on en conclut que si l'une des quantités $\frac{dc'}{dp}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$ est nulle, l'autre l'est aussi. Donc, si l'équation caractéristique est telle que le volume soit une fonction linéaire de la température, la chaleur spécifique sous pression constante ne dépend pas de la pression elle ne dépend que de la température.

Réciproquement, si la chaleur spécifique sous pression constante ne dépend pas de la pression et est une fonction de la température seulement le volume est une fonction linéaire de la température.

Une vérification de ce fait résulte des expériences de Regnault sur l'acide carbonique.

272 - 2° **Variables t et v.** Soit $x = v$; on a alors $y = c$ et si l'on désigne par l la valeur correspondante de λ, l'expression de dq se met sous la forme

$$dq = c\,dt + l\,dv.$$

On a, dans ce cas

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dp}{dv} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{dp}{dt}$$

et, par suite, les relations (35) et (36) deviennent

$$(39) \qquad l = AT\frac{dp}{dt}$$

$$(40) \qquad \frac{dc}{dv} = AT\frac{d^2p}{dt^2}$$

La première de ces relations donne la valeur de la chaleur latente. La seconde montre que si la pression est une fonction linéaire de la température, la chaleur spécifique sous volume constant ne dépend pas du volume ; elle ne dépend que de la température.

<u>Réciproquement, si la chaleur spécifique sous volume constant est une fonction de la température seulement, la pression est une fonction linéaire de la température.</u>

273 – **Relation entre les coefficients c', c, α, β.** — Il est aisé d'établir que l'équation (35) qui donne l'expression générale de la chaleur latente équivaut à une relation entre les coefficients thermo-élastiques α, β et les coefficients thermiques $c'c$.

Prenons en effet t et p comme variables indépendantes. Si l'on rapproche la valeur correspondante $dq = c'dt + l'dp$ de la seconde des expressions (5) (N° 226) on voit que l'on a

$$l' = -\frac{(c'-c)\beta}{\alpha}$$

D'autre part la relation (3) qui a servi à définir les coefficients thermo-élastiques (N° 224) donne évidemment

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v$$

On conclut de ces valeurs que la relation (37) revient à la suivante:

$$(41) \qquad c' - c = \frac{A\alpha^2 vT}{\beta}$$

Ainsi les quatre coefficients qui servent à exprimer, d'après les formules (5) la chaleur absorbée par une transformation élémentaire d'un corps, ne sont pas indépendants les uns des autres; ils sont liés par une relation et il suffit, par conséquent, de connaître trois d'entre eux pour connaître le quatrième.

274 – En tenant compte de la relation (41), la valeur de dq correspondante au cas où t et p sont les variables indépendantes peut se mettre sous la forme

$$(42) \qquad dq = c'dt - A\alpha vT.dp$$

en supposant $dq = 0$, on tire de cette relation

$$(43) \qquad dt = \frac{A\alpha vT}{c'}dp$$

Cette dernière formule est celle que W. Thomson a donnée pour évaluer théoriquement la variation de température due à la compression adiabatique d'un corps.

275 – (Voir la page suivante).

275 – Calcul de la chaleur interne. – La chaleur interne h est définie par la relation (25):

$$dh = dq - Apdv$$

à laquelle conduit le principe d'équivalence. En attribuant à dq la forme (29), on a l'expression générale

$$dh = \left(\gamma - Ap\frac{dv}{dt}\right)dt + \left(\lambda - Ap\frac{dv}{dx}\right)dx$$

ou bien, en remplaçant la chaleur latente λ par sa valeur (35):

$$(44)\qquad dh = \left(\gamma - Ap\frac{dv}{dt}\right)dt + A\left(T\Delta - p\frac{dv}{dx}\right)dx$$

Enfin, en appliquant à cette expression la formule d'intégration rappelée au N° 220, on trouve

$$(45)\qquad h = A\int_{x_0}^{x}\left(T\Delta - p\frac{dv}{dx}\right)dx + \int_{t_0}^{t}\left(\gamma_0 - Ap_0\frac{dv_0}{dt}\right)dt + a$$

Les indices zéro du second terme signifient que dans γ, p, v, fonctions de x, t, on a remplacé x par x_0; a est une constante arbitraire.

Considérons, comme précédemment, deux cas particuliers.

276 – 1° Variables t, p. – Soit $x = p$, d'où $\gamma = c'$ et $\Delta = -\frac{dv}{dt}$ (N° 271), la formule (45) devient:

$$(46)\qquad h = -A\int_{x_0}^{x}\left(T\frac{dv}{dt} + p\frac{dv}{dp}\right)dp + \int_{t_0}^{t}\left(c_0' - Ap_0\frac{dv_0}{dt}\right)dt + a$$

Appliquons cette formule à un <u>corps solide</u>. La faiblesse de la dilatation des corps solides sous l'action de la chaleur et la petitesse de leur coefficient de compressibilité permettent de supposer que l'on a très sensiblement $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dp} = 0$.

On a donc approximativement

$$(47)\qquad h = \int_{t_0}^{t} c_0'\,dt + a$$

Cette formule s'applique aussi dans un grand nombre de cas, aux corps liquides.

277 – 2° Variables t, v. – Soit $x = v$, d'où $\gamma = c$ et $\Delta = \frac{dp}{dt}$ (N° 272). On a dans ce cas, $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dx} = 1$ et, par suite, la relation (44) devient

$$dh = c\,dt + A\left(T\frac{dp}{dt} - p\right)dv$$

et il vient, en intégrant,

$$(48)\qquad b = A\int_{v_0}^{v}\left(T\frac{dp}{dt} - p\right)dv + \int_{t_0}^{t} c_0\,dt + a$$

Appliquons cette formule à un gaz parfait. — On a alors $p = \frac{RT}{v}$, d'où $\frac{dp}{dt} = \frac{R}{v}$ et $T\frac{dp}{dt} = p$; d'ailleurs pour les corps de cette catégorie, la chaleur spécifique c sous volume constant est une constante. La formule (48) devient donc $b = c(t-t_0) + a$ ou simplement $b = ct + a$, en comprenant $-ct_0$ dans la constante arbitraire. Nous retrouvons ainsi la valeur précédemment établie (N° 240).

278 — Calcul de l'entropie. — L'entropie μ est définie par la relation (26)

$$d\mu = \frac{dq}{T}$$

à laquelle conduit le principe de Carnot. En attribuant à dq la forme (29) et remplaçant λ par sa valeur (35), on a

$$(49)\qquad d\mu = \frac{\gamma}{T}\,dt + A\,\Delta\,dx$$

et, en intégrant

$$(50)\qquad \mu = A\int_{x_0}^{x}\Delta\,dx + \int_{t_0}^{t}\frac{\gamma_0}{T}\,dt + b$$

γ_0 représente ce que devient γ, fonction de x et t, lorsque l'on y remplace x par x_0; b est une constante arbitraire.

La détermination de l'entropie offre un intérêt spécial, parce que, en exprimant que sa valeur est constante, on obtient la relation qui existe entre x et t dans une transformation adiabatique.

On pourrait particulariser la formule (50) en y supposant successivement $x = p$ et $x = v$; mais les expressions ainsi obtenues seraient sans utilité; nous nous abstiendrons de les écrire.

279 — Les relations générales qui résultent des deux principes fondamentaux de la Thermodynamique sont principalement dues à Clausius et à W. Thomson. M. Kirchoff a établi l'expression générale de la chaleur interne et l'a appliquée à l'étude des phénomènes de dissolution. —

Chapitre III.

Transformations avec changement d'état.

279 — Nous allons étudier les phénomènes qui se produisent quand un corps se transforme en passant de l'état liquide à l'état gazeux, ou, inversement de l'état gazeux à l'état liquide.

I — Données d'expérience.

280 — *Transformation isothermique avec changement d'état.* — Quand on diminue progressivement le volume d'une vapeur sèche, en la soumettant à une pression de plus en plus grande et la maintenant à une température constante il existe une limite de pression que l'on ne peut dépasser. Dès que l'on arrive à cette pression maximum, la vapeur est dite saturée ; si le volume continue à diminuer, une partie de la vapeur se transforme en liquide et la pression reste constante. La réduction du volume amène enfin la liquéfaction totale et le corps, à l'état liquide, se transforme ensuite à température constante de manière que généralement son volume n'éprouve que de faibles variations lorsque la pression varie de quantités considérables.

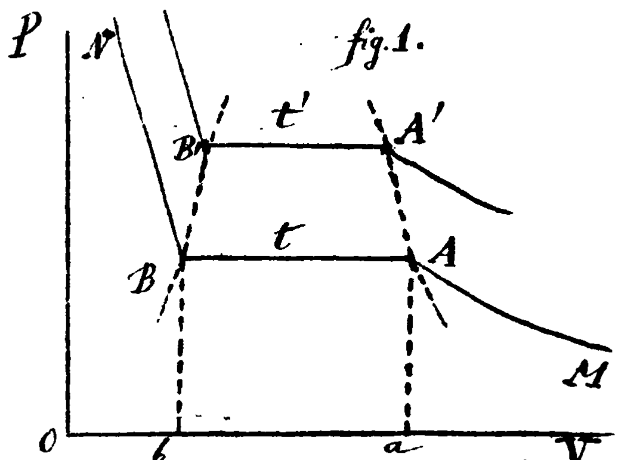


fig. 1.

L'ensemble de ces phénomènes peut se représenter par une ligne en prenant pour abscisse le volume de l'unité de poids du corps et pour ordonnée la pression.

On obtient ainsi une ligne isothermique qui, pour une température déterminée t, présente la forme ci-contre. La portion MA représente la transformation de la vapeur. Au point A la vapeur est saturée et la liquéfaction commence ; de A à B la pression reste constante et la liquéfaction s'accroît. Au point B le corps est devenu liquide et au delà, la portion BN représente sa transformation isothermique.

281 — A une température t' supérieure à t, la courbe isothermique présente une forme analogue ; mais ainsi qu'il résulte de l'expérience, les points A et B se rapprochent et ce rapprochement continue progressivement jusqu'à ce que l'on atteigne la température critique du corps.

A et B se confondent alors en un point unique où la ligne de transformation devenue continue, présente une inflexion avec tangente parallèle à l'axe OV.

A des températures supérieures à la température critique, la ligne isothermique devient une courbe hyperbolique dont la limite, pour des valeurs croissantes de la température, est l'hyperbole $pv = RT$ des gaz parfaits.

282 — Cette allure générale des lignes isothermiques résulte des expériences d'Andrews sur l'acide carbonique; des travaux postérieurs conduisent à admettre qu'elle est générale et qu'elle se présente dans la transformation de tous les corps.

283 — Les coordonnées du point A correspondent à des éléments physiques importants.

L'abcisse représente le volume de l'unité de poids de la vapeur saturée.

L'ordonnée représente la pression de la vapeur saturée.

Ces quantités que nous représenterons respectivement par u' et p sont des fonctions de la température t. On peut donc poser

$$(50)\qquad \begin{aligned} u' &= \varphi(t) \\ p &= \psi(t) \end{aligned}$$

284 — Transformation d'une vapeur saturée et sèche. — Les équations (50) en y considérant t comme un paramètre variable, représentent le lieu du point A, c'est-à-dire la ligne de transformation de la vapeur saturée et sèche.

Quand on passe sur cette ligne d'un point A à un point voisin A' (fig. 1), la vapeur reste saturée et il ne se produit aucune liquéfaction.

285 — Volume spécifique des vapeurs saturées. — On ne connaît pas actuellement la forme de la relation $u' = \varphi(t)$ qui existe entre le volume spécifique (volume de l'unité de poids) d'une vapeur saturée et sa température.

On ne possède à cet égard que des valeurs particulières déterminées expérimentalement pour la vapeur d'eau par MM. Fairbairn et Tate.

286 — Pression des vapeurs saturées. — Jusqu'à présent on n'a pas pu déterminer par la théorie la forme de la fonction $p = \psi(t)$; mais la relation qui existe entre p et t est donnée en fait par la voie expérimentale, et sa connaissance est due surtout aux expériences de Regnault. Ces expériences comprennent un très-grand nombre de vapeurs et les résultats qu'elles ont fournis ayant pu être représentés par des formules d'interpolation, la relation empirique qui lie la pression p et la température t peut être regardée comme complètement déterminée.

---

287 — (Voir la page suivante).

287 — **Chaleur latente de vaporisation.** — Pendant que la vapeur se liquéfie elle dégage de la chaleur; on appelle chaleur latente de vaporisation la quantité de chaleur λ que dégage un kilogramme de vapeur saturée en se liquéfiant totalement à une température constante. Dans cette transformation le point représentatif de l'état du corps décrit la portion rectiligne AB de la ligne isothermique.

La chaleur latente de vaporisation dépend de la nature du corps; c'est une fonction de la température t à laquelle s'effectue le changement d'état.

Regnault a déterminé par l'expérience la chaleur latente de vaporisation pour quelques liquides à diverses températures et il a représenté par des formules empiriques les résultats de ses expériences. Il a trouvé pour l'eau

$$\lambda = 606{,}5 - 0{,}695\,t$$

et pour l'éther

$$\lambda = 94{,}0 - 0{,}079\,t$$

II — Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur saturée.

288 — **Expression de la chaleur absorbée par une transformation élémentaire.** Considérons un mélange de liquide et de vapeur saturée formant un poids total de un kilogramme à la température t. Désignons par

x le poids de la vapeur dans le mélange

$1-x$ le poids du liquide

u et u' les volumes spécifiques (volumes de l'unité de poids) du liquide et de la vapeur. — (u et u' sont respectivement représentés par Ob et Oa sur la figure du N° 280)

v le volume du mélange.

On a

$$(51) \qquad v = u(1-x) + u'x = u + (u'-u)x$$

Les quatre quantités u, u' p, λ sont des fonctions de t seulement; v est une fonction de t et de x; nous pouvons donc prendre t et x comme variables indépendantes.

Considérons une transformation infiniment petite qui fasse passer le mélange de l'état (t, x) à l'état $(t+dt,\ x+dx)$. La chaleur dq nécessaire pour opérer cette transformation est employée:

1° à échauffer un poids $1-x$ de liquide ;
2° à échauffer un poids x de vapeur ;
3° à vaporiser un poids dx de liquide.

On sait d'ailleurs que la quantité de chaleur absorbée par une transformation infiniment petite de l'unité de poids d'un corps dont l'état physique ne change pas est représentée par une expression de la forme $c'dt + l'dp$, quand on prend pour variables la température et la pression.

En supposant donc que c' l' se rapportent au liquide et que c'_1, l'_1 soient les quantités analogues relatives à la vapeur, on peut écrire

$$dq = (1-x)(c'dt + l'dp) + x(c'_1 dt + l'_1 dp) + \lambda\, dx$$

Cela posé la vapeur restant saturée, sa pression p est une fonction $\psi(t)$ de sa température ; par suite, on peut remplacer dp par $\frac{dp}{dt}dt$ et mettre l'expression ci-dessus sous la forme

$$dq = (1-x)\left(c' + l'\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(c'_1 + l'_1\frac{dp}{dt}\right)dt + \lambda\, dx$$

infin, en posant, pour abréger

$$(52) \qquad m = c' + l'\frac{dp}{dt}$$

$$m' = c'_1 + l'_1\frac{dp}{dt}$$

il vient

$$dq = \left[m(1-x) + m'x\right]dt + \lambda\, dx$$

ou

$$(53) \qquad dq = \left[m + (m'-m)x\right]dt + \lambda\, dx$$

En vertu de la relation $p = \psi(t)$, les quantités c', l', c'_1, l'_1, et par suite m, m', sont des fonctions de la température seule.

En résumé, chaque état particulier d'un mélange de liquide et de vapeur saturée est défini par les deux variables t et x, et la formule (53) donne, en fonction de ces variables et de leurs variations, la quantité de chaleur absorbée par une transformation infiniment petite du mélange.

La formule (51) exprime en fonction des mêmes variables le volume de l'unité de poids du mélange.

289 – La formule (53) permet de préciser la signification physique des coefficients m, m'.

1° Supposons que t varie, x restant égal à zéro. La formule (53) donne alors $\frac{dq}{dt} = m$.

Le coefficient m est donc la chaleur spécifique du liquide relative à une transformation telle que ce liquide soit toujours soumis à une pression égale à celle de sa vapeur saturée. Cette transformation est représentée par la ligne BB' sur la figure du N° 280.

2° Supposons que t varie, x restant égal à l'unité. La formule (53) donne alors $\frac{dq}{dt} = m'$.

Le coefficient m' est donc la chaleur spécifique de la vapeur relative à une transformation telle que cette vapeur soit toujours saturée et sèche. Cette transformation est représentée par la ligne AA' (fig. 1).

Cet élément introduit par M. Clausius joue un rôle important dans la théorie des vapeurs saturées; on l'appelle chaleur spécifique de la vapeur saturée sèche.

III – Conséquences du principe d'équivalence et du principe de Carnot.

290 – Relations fondamentales. – Nous avons été conduits aux deux principes de la Thermodynamique par la seule considération de transformations reversibles et telles que chacun des états successifs qui les constituent soit déterminé par les valeurs que prennent, pour cet état, deux variables indépendantes. Les conséquences de ces principes s'appliquent donc à toute transformation offrant ce double caractère, et en particulier à la transformation reversible d'un mélange de liquide et de vapeur saturée résultant, comme on vient de le voir, de la variation des quantités x et t.

En posant $\gamma = m + (m' - m)x$, la chaleur absorbée par une transformation élémentaire de cette espèce a pour expression d'après la formule (53) $dq = \gamma dt + \lambda dx$ et les conséquences des deux principes s'expriment analytiquement par les deux relations fondamentales (35) et (36).

$$\lambda = AT\Delta \tag{54}$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = AT\frac{d\Delta}{dt} \tag{55}$$

que nous allons développer dans le cas particulier dont il s'agit.

291 – Equation de Clapeyron. – On a, en général,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dp}{dx} \\ \frac{dv}{dt} & \frac{dv}{dx} \end{vmatrix}$$

Dans le cas actuel, l'expression p dépendant de la température seule, on a $\frac{dp}{dx} = 0$. De plus, d'après (52), $\frac{dv}{dx} = u - u'$. Donc

$$\Delta = (u' - u)\frac{dp}{dt}$$

et la relation (54) devient :

$$(56) \qquad \lambda = AT(u' - u)\frac{dp}{dt}$$

292 – **Équation de W. Thomson.** – En second lieu, de la relation $\gamma = m + (m' - m)x$ on tire $\frac{d\gamma}{dx} = m' - m$; et en remarquant d'autre part que l'on a, d'après (54), $A\frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{dt}$ la relation (55) devient

$$(57) \qquad m' - m = T\,\frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{dt}.$$

293 – **Volume spécifique des vapeurs saturées.** – De l'équation (56), on déduit :

$$(58) \qquad u' - u = \frac{E\lambda}{T\frac{dp}{dt}}$$

La chaleur latente λ et la pression p de la vapeur saturée sont des fonctions de la température qui, ainsi que nous l'avons dit, ont été déterminées empiriquement pour quelques liquides. L'équation (58) permet donc de calculer $u' - u$ et, par suite u' quand on connaît le volume u du liquide. Voici les résultats calculés pour la vapeur d'eau par M. Clausius :

t	u' calculé	u' mesuré
58°,21	8,23	8,27
92,66	2,11	2,15
117,17	0,947	0,941
144,74	0,437	0,432

Les valeurs de u' ont été déterminées expérimentalement par MM. Fairbairn et Tate ; on voit qu'elles s'accordent très-bien avec celles qui ont été déduites de la théorie.

294 — Les deux quantités p et u' sont des fonctions de la température (N° 283), elles sont donc fonction l'une de l'autre, et M. Zeuner a trouvé que la relation qui existe entre ces deux fonctions est représentée assez exactement par l'équation

$$pu'^{n} = b$$

Pour la vapeur d'eau, les deux constantes n et b ont les valeurs suivantes

$$n = 1{,}0646$$

$$b = 1{,}704.$$

En représentant cette équation par une courbe, on obtient une sorte d'hyperbole qui figure la ligne de transformation de la vapeur saturée et sèche (N° 284).

294 — **Chaleur spécifique des vapeurs saturées.** — Nous venons de déterminer le volume spécifique u' de la vapeur saturée à l'aide de la pression et de la chaleur latente. La connaissance de la chaleur totale suffit pour déterminer la chaleur spécifique m' de la vapeur saturée.

On se sert pour cela de la formule (57). On peut d'ailleurs sans erreur sensible remplacer le coefficient m par la chaleur spécifique c du liquide, car le coefficient c' de la valeur (52) est en général très-faible. On aura ainsi m'.

Il résulte de ce calcul que les corps peuvent se diviser en trois catégories: pour les uns la valeur de m' est négative; pour d'autres elle est positive; enfin il y a un troisième groupe de corps pour lesquels la valeur de m' est négative au-dessous d'une certaine température et positive au-dessus.

La température pour laquelle la chaleur spécifique m' passe du négatif au positif s'appelle température d'inversion.

Voici les valeurs de m' calculées par M. Clausius, à différentes pour la vapeur d'eau et pour la vapeur d'éther.

	t	m'
Vapeur d'eau.	58°,21	− 1,398
	92,66	− 1,266
	117,17	− 1,107
	144,74	− 0,807
Vapeur d'éther.	0°	+ 0,116
	40	+ 0,120
	80	+ 0,128
	120	+ 0,133

On voit d'après ce tableau que la vapeur d'eau appartient à la première catégorie ; la chaleur spécifique de la vapeur saturée est négative et sa valeur absolue va en diminuant quand la température s'élève. La vapeur d'éther appartient à la seconde catégorie ; la valeur de m' est positive et augmente avec la température.

295 – Condensation dans la détente de la vapeur d'eau. — Supposons qu'une vapeur éprouve une transformation infiniment petite en restant saturée et sèche, c'est-à-dire que le point représentatif de la transformation décrive un élément de la ligne AA' (fig. 1). La quantité de chaleur nécessaire à cette transformation sera

$$dq = m'dt$$

ou bien, en prenant pour variable le volume spécifique u' correspondant à la température t.

$$dq = m'\frac{dt}{du'}du' = \frac{m'}{\left(\frac{du'}{dt}\right)}.du'.$$

Or la dérivée $\frac{du'}{dt}$ sera toujours négative, la valeur de m' est aussi négative pour la vapeur d'eau ; il en résulte que pour la vapeur d'eau, dq et du' ont le même signe.

Par suite, de la vapeur d'eau ne peut rester saturée et sèche, quand on la dilate, que si elle absorbe de la chaleur. Si donc la dilatation est assez rapide pour que les corps extérieurs n'aient pas le temps de lui fournir cette chaleur, il y aura condensation partielle.

Au contraire, de la vapeur d'eau ne peut rester saturée, quand on la comprime que si elle dégage de la chaleur. Si donc la compression est assez rapide pour que les corps extérieurs n'aient pas le temps d'absorber cette chaleur, la vapeur s'échauffera et sera portée au-dessus de son point de saturation.

Pour la vapeur d'éther, m' ayant un signe différent, les phénomènes sont opposés ; la dilatation surchauffe la vapeur, et la compression produit une condensation partielle.

Ces phénomènes ont été découverts théoriquement à peu près à la même époque par M. Clausius et par Rankine. M. Hirn les a vérifiés expérimentalement.

296 – Entropie d'un mélange de vapeur saturée et de liquide. —

L'entropie μ est déterminée par la relation $d\mu = \frac{dq}{T}$. En remplaçant, dans le cas actuel, dq par sa valeur (53) et $m' - m$ par sa valeur (57), on a

$$d\mu = \frac{m}{T}dt + x\,d\left(\frac{\lambda}{T}\right) + \frac{\lambda}{T}dx$$

ou

$$(54) \qquad d\mu = \frac{m}{T}dt + x\,d\left(\frac{\lambda x}{T}\right)$$

La quantité m étant une fonction de la température seule, on reconnaît que le second membre est bien une différentielle exacte. En intégrant, on a

$$(55) \qquad \mu = \frac{\lambda x}{T} + \int_{t_0}^{t} \frac{m}{T} dt + C$$

Supposons que l'on passe de l'état (x_0, t_0) à l'état (x, t). On a pour l'état initial

$$\mu_0 = \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} + C.$$

et, par suite, l'accroissement $\mu - \mu_0$ de l'entropie a pour valeur

$$(56) \qquad \Delta\mu = \frac{\lambda x}{T} - \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{m}{T} dt.$$

297 – Dans une transformation adiabatique, l'entropie reste constante. La formule (56) donne donc pour une telle transformation

$$(57) \qquad \frac{\lambda x}{T} - \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} = -\int_{t_0}^{t} \frac{m}{T} dt.$$

Si l'on connaît le titre x_0 du mélange à la température t_0, cette relation permet de calculer le titre x à une température quelconque t. On pourra ensuite déterminer le volume v du mélange à l'aide de la formule $v = u + (u'-u)x$.

298 – Chaleur interne d'un mélange de vapeur saturée et de liquide.
La chaleur interne b est déterminée par la relation $db = dq - A\,p\,dv$. En remplaçant dq par sa valeur (53) et calculant dv par la formule $v = u + (u'-u)x$, il vient

$$db = \left[\lambda - Ap(u'-u)\right] dx + \left[m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Ap\frac{d(u'-u)}{dt}x\right] dt$$

En intégrant d'abord par rapport à x et choisissant $x = 0$ pour la limite inférieure de cette intégration, il vient par l'application de la formule ordinaire d'intégration totale :

$$(58) \qquad b = \left[\lambda - Ap(u'-u)\right] x + \int_{t_0}^{t} \left[m - Ap\frac{du}{dt}\right] dt + a$$

Dans le cas de la vapeur d'eau, $\frac{du}{dt}$ a une valeur très petite et la chaleur spécifique m est sensiblement constante ; on a alors avec une approximation suffisante :

$$(59) \qquad b = \left[\lambda - Ap(u'-u)\right] x + m(t - t_0)$$

Supposons que l'on passe de l'état (x_0, t_0) à l'état (x, t) ; la formule (58) donne pour l'état initial

$$h_0 = \left[\lambda_0 - Ap_0(u'_0 - u_0)\right] x_0$$

et, par suite, l'accroissement $h - h_0$ de la chaleur interne a pour valeur

$$(60) \quad \Delta h = \lambda x - \lambda_0 x_0 - Ap(u' - u)x + Ap_0(u'_0 - u_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\left(m - Ap\frac{du}{dt}\right)dt.$$

299 – **Travail dans la détente adiabatique.** – De la relation $dq = dh + Apdv$ relative à une transformation élémentaire, il résulte que, entre la chaleur q absorbée par une transformation quelconque, l'accroissement Δh de la chaleur interne et le travail extérieur $\mathcal{C}$, on a la relation

$$q = \Delta h + A\,\mathcal{C}.$$

Si la transformation est adiabatique, on a $q = 0$ et par suite

$$(61) \qquad \mathcal{C} = -E\,\Delta h.$$

Le travail dans la détente adiabatique est donc égal au produit de l'équivalent mécanique de la chaleur par la perte de chaleur interne.

S'il s'agit d'un mélange de vapeur saturée et de liquide, la variation de la chaleur interne est donnée par la formule (60) ; le titre x du mélange résulte de la relation (57).

300 – M. Clausius a appliqué les formules précédentes à la détente de la vapeur d'eau saturée, comme elle a lieu dans les machines à vapeur.

Considérons, par exemple, de la vapeur saturée et sèche à la température de 150 degrés et prenons pour unité de volume, le volume occupé par un kilogramme de vapeur dans ces conditions ; on a alors $t_0 = 150°$, $v_0 = 1$.

Le tableau suivant indique le poids de la vapeur qui reste, le volume du mélange et le travail extérieur accompli à différentes températures.

t	x	v	$\mathcal{C}$
150°	1,000	1,00	" Kgm
125	0,956	1,88	11,300
100	0,911	3,90	23,200
75	0,866	9,23	35,900
50	0,829	25,7	49,300
25	0,766	88,7	63,900

Il se produit, comme on le voit, une condensation de plus en plus grande à mesure que la détente de la vapeur se prolonge. –

XXV.

Chapitre IV.

Application de la Thermodynamique au mouvement permanent des fluides compressibles.

201. — Rappel d'une formule d'hydrodynamique. — Considérons le mouvement permanent d'un fluide parfait. On a démontré que, si en un point quelconque M de la masse fluide, l'on désigne par

V la vitesse

p la pression

f la fonction des forces extérieures

ρ la densité.

et si l'on représente par d l'accroissement que l'une de ces quantités éprouve quand le point considéré se déplace infiniment peu sur la trajectoire, on a la relation :

$$(63)\qquad \frac{dV^2}{2} + \frac{dp}{\rho} = df$$

En intégrant cette relation le long d'une portion quelconque de la trajectoire et en désignant par les indices 1 et 2 les valeurs relatives aux extrémités, il vient

$$(64)\qquad \frac{1}{2}V_2^2 - \frac{1}{2}V_1^2 + \int \frac{dp}{\rho} = f_2 - f_1 .$$

Dans l'application de cette formule aux gaz, on peut en général négliger l'action des forces extérieures, notamment celle de la pesanteur. En supposant alors nulle ou négligeable la vitesse initiale V_1 et représentant par la lettre u sans indice la vitesse finale V_2, on trouve simplement :

$$(65)\qquad u^2 = -2\int \frac{dp}{\rho} .$$

Soit v le volume de l'unité de poids du fluide correspondant à la densité ρ ; le poids de l'unité de volume étant évidemment $\frac{1}{v}$ et la densité étant, par définition, la masse de l'unité de volume, on a la relation $\rho g = \frac{1}{v}$ et par suite

$$(66)\qquad u^2 = -2g\int v\,dp$$

La formule (66) conduit, en faisant diverses hypothèses sur la relation qui existe entre v et p, aux différentes formules de la vitesse d'écoulement des gaz.

302 – Formule de Bernouilli. — Quand les conditions de mouvement sont telles que le poids spécifique ou son inverse v varie peu dans l'étendue du filet considéré, on peut substituer approximativement à v dans l'intégrale $\int v\,dp$ sa valeur initiale v_1. On a alors $u^2 = g v_1 \int dp$ et par suite, en désignant par p_1 et p_2 les pressions extrêmes :

$$(67) \qquad u^2 = 2 g p_1 v_1 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right).$$

303 – Formule de Navier. — Cette seconde formule s'obtient en supposant que la température est constante dans l'étendue du filet. En appliquant alors la loi de Mariotte, on a la relation

$$p v = p_1 v_1 \quad \text{d'où} \quad v = \frac{p_1 v_1}{p}$$

Substituant dans (66) et intégrant par rapport à p entre les limites p_1 et p_2, on obtient :

$$(68) \qquad u^2 = 2 g p_1 v_1 \, l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

la caractéristique l étant celle des logarithmes népériens.

304 – Formule de Zeuner. — Si on admet enfin qu'un élément quelconque du fluide se transforme adiabatiquement, c'est-à-dire se modifie sans gagner ni perdre de chaleur, les variables p et v varient de manière que le produit $p v^n$ reste constant, n étant le rapport des deux chaleurs spécifiques. On a donc

$$p v^n = p_1 v_1^n \quad \text{d'où} \quad v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Substituant dans (66) et intégrant par rapport à p, il vient :

$$(69) \qquad u^2 = \frac{2 n g v_1 p_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

305 – Comparaison des formules. — L'hypothèse d'où résulte la formule (68) est telle que cette formule ne peut offrir quelque approximation que lorsque les pressions extrêmes diffèrent peu l'une de l'autre. Ce n'est, en effet, qu'à cette condition que la densité peut rester sensiblement constante dans l'étendue du filet.

La formule de Navier suppose que la température est constante dans toute l'étendue du fluide en mouvement, et par suite, que la chaleur gagnée ou perdue par rayonnement compense exactement les variations de température dues à la transformation.

Celle de M. Zeuner suppose, au contraire, que l'effet du rayonnement est négligeable. Les résultats des deux formules doivent donc comprendre la valeur vraie de la vitesse.

On peut d'ailleurs établir directement que les deux formules se rapprochent lorsque p_1 et p_2 ne diffèrent pas beaucoup. En effet, d'après la série connue

$$a^z = 1 + z\,la + \frac{1}{2} z^2 (la)^2 + \cdots\cdots$$

On peut écrire

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 + \frac{n-1}{n} l\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \left[l\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]^2 + \cdots\cdots$$

Par suite, en observant que $l\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$, substituant dans (69) et extrayant la racine en ne conservant que les deux premiers termes, il vient

$$(70) \qquad u = \sqrt{2g\,v_1 p_1\, l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}\left[1 - \frac{n-1}{4n} l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right];$$

par suite, la formule de M. Zeuner donne une valeur de la vitesse moindre que celle de Navier, et la différence relative est à peu près égale à

$$\delta = \frac{n-1}{4n}\, l\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Soit, par exemple, $\frac{p_1}{p_2} = 2$; en prenant $n = 1,40$, on trouve $\delta < \frac{1}{25}$.

306 — **Abaissement de température dans l'écoulement adiabatique des gaz.**

Soient T_1 et T_2 les températures absolues aux extrémités du filet. On a, d'après la loi qui lie la température à la pression dans la transformation adiabatique d'un gaz :

$$(71) \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Cette relation permet de calculer T_2 quand on connaît T_1, p_2, p_1. La pression p_2 à la sortie étant moindre que p_1, on a $T_2 < T_1$; la température s'abaisse donc par la détente.

307 — **Écoulement d'un mélange de liquide et de vapeur saturée.** —

La formule (66) est toujours applicable. On peut la transformer en intégrant par parties

$$u^2 = 2g(p_1 v_1 - p_2 v_2) + 2g \int p\,dv.$$

$\int p\,dv$ est le travail accompli par l'unité de poids du corps se transformant suivant la série des états successifs que présente le parcours du filet. Si, en particulier, on suppose on suppose que cette transformation soit adiabatique, on peut évaluer ce travail à l'aide d'une formule établie à la fin du chapitre précédent. — Le problème est donc théoriquement résolu.

Chapitre V.

Étude de la Chaleur considérée comme un mode de mouvement.

308 — Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur la nature de la chaleur.

La notion établie par la Thermodynamique de l'équivalence du travail et de la chaleur a conduit à considérer l'état thermique des corps comme constitué par des mouvements intérieurs.

Ces mouvements ont été attribués, soit aux éléments des milieux dits impondérables, auxquels les physiciens et les géomètres ont eu recours pour la coordination et l'explication des phénomènes électriques et lumineux, soit aux particules mêmes de la matière.

Cette seconde manière d'envisager les phénomènes est celle que M. Clausius a adoptée pour établir la théorie mécanique des gaz; nous allons exposer, au même point de vue, les premières notions d'une théorie qui, si elle n'a pas atteint son développement définitif, offre du moins l'avantage de rattacher l'explication des phénomènes aux principes généraux de la Mécanique rationnelle.

Nous allons d'abord rappeler quelques théorèmes de dynamique en donnant à l'énoncé de ces théorèmes la forme spéciale qui lui a déjà été attribuée dans le Cours de Physique.

I. Théorèmes généraux.

309 — **Principe des forces vives.** — Considérons un système de points en mouvement sous l'action de forces quelconques.

On sait que <u>la variation de la force vive du système pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur le système pendant le même temps.</u>

Si donc on désigne par

θ la force vive du système,

$\mathcal{C}_i$ le travail des forces intérieures;

$\mathcal{C}_e$ le travail des forces extérieures,

on a pour l'accroissement de la force vive correspondant à un déplacement quelconque du système:

$$A\theta = \mathcal{C}_i + \mathcal{C}_e. \tag{71}$$

310 — **Énergie d'un système.** — Dans l'hypothèse des forces centrales, on peut donner une autre forme au principe des forces vives.

On a en effet démontré que l'on désigne par

$\varphi(r)$ l'action mutuelle de deux points quelconques du système

$\psi(r)$ une fonction telle que $\psi(r) = \int \varphi(r)\,dr$

et si l'on pose enfin

$$u = \Sigma\ \psi(r)$$

le Σ s'étendant aux combinaisons deux à deux de tous les points du système, le travail des forces intérieures correspondant à un déplacement fini quelconque du système est égal à l'accroissement de la fonction u pris en signe contraire, de sorte que l'on a

$$\mathcal{C}_i = -\Delta u.$$

Par suite, la relation (71) peut s'écrire $\Delta\theta = -\Delta u + \mathcal{C}_e$ ou bien

$$\Delta(\theta + u) = \mathcal{C}_i$$

ou bien enfin

$$\Delta H = \mathcal{C}_e \tag{72}$$

en posant pour abréger

$$H = \theta + u \tag{73}$$

311 — On peut adopter, pour désigner les quantités θ, u, H les dénominations introduites par Rankine et appeler

1° Énergie actuelle ou cinétique, la force vive θ du système ;
2° Énergie potentielle, la fonction u ;
3° Énergie totale ou simplement énergie la somme $H = \theta + u$ des énergie actuelle et potentielle.

Le résultat exprimé par l'équation (72) s'exprime alors comme il suit :
Dans un système quelconque, la variation de l'énergie correspondant à une transformation du système est égale au travail des forces extérieures.

Quand il n'y a pas de forces extérieures, la variation de l'énergie est égale à zéro, donc :

L'énergie d'un système isolé est constante.

C'est en cela que consiste le principe fondamental de la conservation de l'énergie.

312 - Énergie potentielle. — Il importe de préciser la signification de la fonction u qui mesure l'énergie potentielle du système.

Sa valeur est, par définition, $u = \sum \psi(r)$; on a de plus, $\psi(r) = \int \varphi(r)\, dr$, $\varphi(r)$ étant l'action mutuelle de deux points quelconques. La fonction ψ résultant d'une intégration, la fonction u renferme une constante arbitraire. On peut choisir cette constante de manière que le minimum minimorum de u soit égal à zéro, et cette fonction qui est alors toujours positive, présente une signification facile à établir.

Supposons le système soustrait à toute force extérieure. La fonction u prise en sens contraire est alors la fonction des forces du système. Par suite, un minimum de l'énergie potentielle est un maximum de la fonction des forces et correspond à un état d'équilibre stable.

Cela posé, imaginons que le système passe d'un état quelconque à l'état caractérisé par l'indice zéro. Le travail des forces intérieures est égal à $u - u_0$ et il devient égal à u si le second état est celui qui correspond au minimum minimorum de l'énergie potentielle. La valeur du travail est, dans ce cas, la plus grande qui puisse être réalisée par le jeu des forces intérieures, quand on part de l'état quelconque considéré.

On peut donc dire que l'énergie potentielle d'un système est le maximum de travail que peuvent produire, à partir d'un état déterminé, les forces intérieures par suite d'un déplacement quelconque du système, et que ce maximum est obtenu lorsque le système passe de l'état actuel considéré à l'état d'équilibre correspondant à une valeur nulle de l'énergie potentielle.

313 - Mouvements stationnaires. — M. Clausius dit que le mouvement d'un système est <u>stationnaire</u>, lorsque chaque point se meut dans un espace limité de telle sorte que ce point s'éloigne peu d'une position moyenne fixe.

Nous appellerons mouvement composé le mouvement résultant d'un mouvement moyen et d'un mouvement stationnaire.

Dans un tel mouvement, l'une des coordonnées d'un point est de la forme $x = x_0 + x_1$, x_0 étant une fonction quelconque du temps et x_1 une fonction passant, pendant une durée que nous supposerons très-petite, par des valeurs successivement positives et négatives, de sorte que sa valeur moyenne soit nulle.

Le mouvement composé d'un système donne lieu au théorème suivant.

314 — <u>L'énergie actuelle moyenne d'un système est la somme de l'énergie actuelle du mouvement moyen et de l'énergie actuelle du mouvement stationnaire.</u>

On a, en effet, pour l'une des coordonnées de l'un des points du système $x = x_0 + x_1$. Il en résulte $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx_1}{dt}$, et par suite

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{dx_0}{dt}\,\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$$

Considérons les valeurs moyennes des quantités qui entrent dans cette relation pendant une durée très-petite, telle que la valeur moyenne de $\frac{dx_1}{dt}$ soit nulle. Supposons de plus, que, pendant la même durée, la variation de $\frac{dx_0}{dt}$ soit négligeable. La relation précédente devient, en réduisant ses termes à leurs valeurs moyennes

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$$

En ajoutant les relations analogues pour les mouvements projetés sur OY et OZ, on voit que la force vive d'un point est la somme de la force vive du mouvement moyen et de la force vive du mouvement stationnaire.

On étend ensuite cette propriété à l'ensemble des points du système.

II - Principe d'équivalence.

315 - Hypothèses fondamentales.

1° L'état naturel d'un corps au repos est un état d'équilibre dynamique, dans lequel chaque point est animé d'un mouvement stationnaire. On admet, en général, que la force vive moyenne de ce mouvement, inappréciable autrement à nos sens, détermine la température.

2° Tout corps recevant de la chaleur est considéré comme soumis à des forces extérieures et la quantité de chaleur qu'il reçoit dans une transformation quelconque par suite de l'action de ces forces est supposée proportionnelle à la somme de leurs travaux.

Si donc on désigne par

q la chaleur absorbée,

$\mathcal{T}_c$ le travail des forces qui émanent de la source,

E un coefficient né du choix des unités.

on a, suivant l'hypothèse admise

$$\mathcal{T}_c = Eq. \qquad (74)$$

316 - Principe général d'équivalence thermodynamique. —

On sait que la variation de l'énergie d'un système matériel, correspondant à une transformation quelconque de ce système, est égale au travail des forces extérieures (N° 311).

Supposons que certaines de ces forces émanent d'une source de chaleur; soit $\mathcal{T}_c$ leur travail et soit $\mathcal{T}_e$ celui des autres forces extérieures. En désignant par H l'énergie du système, on a :

$$\mathcal{T}_c + \mathcal{T}_e = \Delta H$$

D'après la relation (74) le travail calorifique $\mathcal{T}_c$ est égal au produit de la chaleur absorbée par le coefficient E; par suite l'équation précédente peut

peut s'écrire :

(75) $$E q = \Delta H - \mathcal{C}_e .$$

De cette relation résulte le principe d'équivalence thermodynamique : <u>l'énergie calorifique absorbée par un corps est égale à la variation de l'énergie du corps diminuée du travail des forces extérieures</u>.

317 – Supposons que le corps soit au repos et que les forces extérieures se réduisent à une pression normale et uniforme p. Le travail total de cette pression extérieure est $-\int p\,dv$, et la relation (75) devient

(76) $$E q = \Delta H + \int p\,dv$$

Nous avons obtenu antérieurement dans le même cas, la relation

(77) $$q = \Delta H + A \int p\,dv$$

h désignant la <u>chaleur interne</u> du corps. On en conclut par comparaison

$$A = \frac{1}{E} \qquad h = A h$$

de sorte que la <u>chaleur interne</u> est proportionnelle à l'<u>énergie</u> du corps.

318 – Supposons en second lieu, un système en mouvement. Le mouvement d'un point quelconque du système résulte d'un mouvement moyen <u>sensible</u> et d'un mouvement stationnaire <u>thermique</u>.

Désignons pour l'ensemble du système par

θ_0 la force vive du mouvement sensible,

θ_1 la force vive du mouvement thermique,

u l'énergie potentielle.

On peut prendre, d'après ce qui précède (Nos 310 et 314)

$$H = \theta_0 + \theta_1 + u$$

et la relation (75) devient :

$$E q = \Delta \theta_0 + \Delta(\theta_1 + u) - \mathcal{C}_e .$$

Enfin, en remarquant que $\theta_1 + u$ est égal (No 317) au produit de E par la chaleur interne h, on peut écrire :

(77) $$E q = \Delta \theta_0 + E \Delta h - \mathcal{C}_e$$

Cette relation présente, sous sa forme la plus générale, le principe d'équivalence thermodynamique.

319 – **Application au Choc des Corps.** — Considérons le choc de deux corps soustraits à toute force extérieure et supposons la durée du phénomène assez petite pour qu'aucun échange de chaleur n'ait le temps de s'opérer avec les corps extérieurs.

L'équation (77) appliquée au système des deux corps donne en y faisant $q = 0$ et $\mathfrak{C}_e = 0$:

$$\Delta \theta_0 + E \Delta h = 0.$$

Cette relation montre que la perte de force vive généralement produite par le choc équivaut à une variation de la chaleur interne du système. Cette variation peut se calculer par la formule

$$\Delta h = A \Delta \theta_0 \qquad (78)$$

Nous avons d'ailleurs vu (Chapitre III) que pour les solides, la chaleur interne dépend principalement de la température, de sorte, que l'on a très-sensiblement pour l'unité de poids du corps : $dh = c'dt$, c'était la chaleur spécifique sous pression constante.

Le coefficient c' variant peu entre certaines limites, on peut écrire $\Delta h = c' \Delta t$ et par suite, si l'on suppose que les deux corps soumis au choc soient de la même matière et aient un poids total égal à l'unité, la relation (78) permet de calculer l'élévation de température par la formule

$$\Delta t = -\frac{A}{c'} \Delta \theta_0 .$$

320 – D'après ce qui précède, le principe d'équivalence peut être considéré comme réduit aux lois ordinaires de la Mécanique. Une réduction analogue n'a été accomplie jusqu'à présent pour le principe de Carnot que dans certains cas particuliers, et l'interprétation mécanique de ce principe, dans toute sa généralité est encore à découvrir.

XXVI – Machines.

Chapitre premier.

Notions générales sur les Machines en mouvement.

1 – **Définition des Machines.** — On appelle <u>machine</u> un ensemble de corps qui reçoivent en certains points l'action de certaines forces, et qui exercent en d'autres points, des forces différant des premières par l'intensité, la direction et la vitesse des points d'application.

Une machine est donc un appareil transformant et modifiant l'action des forces.

D'ordinaire une machine n'a pas seulement pour but d'exercer un effort, elle doit encore déplacer le point d'application de cet effort, en d'autres termes, produire du travail. C'est du reste pour cette raison que cette expression s'est introduite dans la Mécanique : S'il s'agit, par exemple, d'élever à une certaine hauteur H, un poids P, il est facile de reconnaître que le travail PH est proportionnel au nombre d'ouvriers nécessaire ainsi qu'à la durée de leur effort.

On peut donc dire qu'une machine a pour but essentiel de transporter ou de transformer le travail des forces.

2 – Transmission du travail par les machines. — Parmi les forces appliquées à une machine, il en est dont le travail est positif ; ce sont les forces mouvantes ; les autres dont le travail est négatif, sont les forces résistantes.

Soient entre deux instants déterminés, $\mathcal{C}m$ et $\mathcal{C}r$ les valeurs absolues des travaux de ces deux systèmes de forces, θ et θ_0 les valeurs de la force vive totale de la machine aux deux instants extrêmes, on a

$$\theta - \theta_0 = \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_r .$$

Si le mouvement est uniforme, $\theta = \theta_0$ et par suite $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_r$. Lorsqu'il n'existe qu'une force mouvante P et une force résistante Q, si dp et dq sont les éléments de chemin parcouru projetés sur ces forces, il faut que

$$P\,dp - Q\,dq = 0 ;$$

les éléments de chemin sont inversement proportionnels aux valeurs des forces, ce que l'on exprime fréquemment en disant : Ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse.

Dans le cas le plus général, le mouvement d'une machine n'est pas uniforme mais périodique. Si l'on considère deux instants dont l'intervalle est égal à la période, on a encore $\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Enfin la même égalité a encore lieu lorsqu'on l'applique à un intervalle de temps égal à la durée totale du mouvement.

Dans cette durée totale, on peut distinguer trois périodes : la première s'étend depuis l'origine du mouvement jusqu'au moment où s'établit l'état régulier. La force vive est alors croissante et le travail moteur supérieur au travail résistant. Pendant la deuxième période qui comprend l'état régulier, le travail moteur est égal en moyenne au travail résistant. Enfin dans la troisième période, la force vive décroît et le travail résistant surpasse le travail moteur.

3 – Résistances passives. — Rendement des machines. — Dans l'évaluation

du travail, il est nécessaire, comme on sait, de tenir compte de toutes les forces, même des forces intérieures. Or, dans le travail résistant, on doit distinguer deux parties : le travail utile, c'est-à-dire celui qu'on se propose de produire et le travail des résistances passives qui correspond aux forces telles que les frottements.

Soit $\mathcal{E}u$ le travail utile. On considère comme mesure de la perfection d'une machine le rapport $\frac{\mathcal{E}u}{\mathcal{E}m}$ que l'on appelle le rendement et qui, dans les meilleures machines ne dépasse guère 0,75.

Si l'on pouvait construire une machine où $\mathcal{E}m$ étant nul, $\mathcal{E}u$ fut différent de zéro, on réaliserait le mouvement perpétuel. Mais d'après les considérations précédentes, $\mathcal{E}u$ est inférieur à $\mathcal{E}r$ et par suite à $\mathcal{E}m$ ce qui démontre l'impossibilité du mouvement perpétuel.

4 – Effet des chocs dans les Machines. — Quand il se produit un choc dans une machine, il en résulte une perte brusque de force vive résultant en partie de ce que les organes heurtés se comportent comme des corps imparfaitement élastiques, et surtout de ce que le choc détermine dans ces organes un mouvement vibratoire plus ou moins intense qui se communique aux supports et au sol occasionnant ainsi une perte de travail.

Soient θ_0 la force vive avant le choc, $\theta_0 - \varepsilon$ la force vive après le choc, les deux équations

$$\theta - \theta_0 = \mathcal{E}m - \mathcal{E}r$$

$$\theta' - (\theta_0 - \varepsilon) = \mathcal{E}m - \mathcal{E}r$$

donnent la force vive à un instant quelconque, la première correspondant au cas où il n'y aurait pas de choc, la deuxième au cas du choc. On voit que θ' est inférieur à θ. Il est donc nécessaire de fournir un excès de travail pour que le choc ne modifie pas la marche de la machine.

5 – Unités pour l'évaluation du travail des Machines. — L'unité de longueur étant le mètre et l'unité de force le Kilogramme, l'unité de travail est le Kilogrammètre. Mais quand un travail est évalué en Kilogrammètres, on ne tient aucun compte du temps employé à le produire. Aussi a-t-on introduit dans la Science des Machines une autre unité dans laquelle on fait intervenir le temps, élément dont l'importance est capitale dans l'Industrie. Cette unité est le cheval-vapeur ; elle correspond à un travail de 75 Kilogrammètres par seconde.

On appelle fréquemment force ou puissance d'une machine le nombre de chevaux-vapeurs qu'elle fournit.

Dans toute machine on distingue trois parties : celle qui reçoit l'action des forces motrices (machine motrice) ; celle qui effectue le travail utile (machine outil ; enfin la partie intermédiaire qui effectue la transformation du mouvement et des forces. (arbres, engrenages, etc)

Chapitre II.

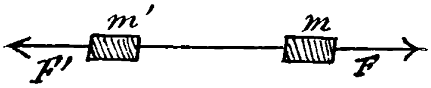
Calcul des tensions des liens dans une machine.

6 – Les liaisons que l'on établit dans une machine sont généralement de telle sorte qu'il n'y a qu'un seul mouvement possible, de sorte que les déplacements de tous les points sont fonctions du déplacement de l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire d'une seule variable. Un semblable système porte le nom de <u>système à liaisons complètes</u>. Une seule équation, par exemple, celle des forces vives, suffit pour donner toutes les conséquences du mouvement.

Mais cette équation ne fournit aucun renseignement sur les conditions de résistance de la machine, car les forces de liaison dont le travail est nul, n'entrent pas dans l'équation des forces vives.

C'est ainsi que, dans le mouvement d'un solide autour d'un axe, une seule équation suffit pour obtenir la loi du mouvement; mais il faut recourir aux équations générales pour obtenir les pressions exercées sur les appuis.

– Calcul des tensions dans le mouvement rectiligne. — Soient deux masses m et m' reliées par une tige inextensible et animées d'un mouvement rectiligne, F et F' deux forces, l'une mouvante, l'autre résistante appliquées à ces masses.



Le théorème des quantités de mouvement appliqué à l'ensemble du système fournirait la vitesse commune des deux masses; mais pour obtenir les tensions de la tige, il faudrait considérer séparément chacune d'elles. Soit T cette tension, on a

$$m \frac{dv}{dt} = F - T$$

$$m' \frac{dv}{dt} = T - F'$$

En faisant la somme de ces équations, on éliminerait T et il suffirait d'intégrer pour avoir la vitesse. Quant à la tension T elle est donnée par l'équation

$$m'(F-T) = m(T-F')$$

d'où

$$T = \frac{m'F + mF'}{m + m'}$$

Soient plus généralement n masses $m_1, m_2 \dots m_k ; m_{k+1}, \dots m_n$, animées d'un mouvement de translation rectiligne, sollicitées par des forces $F_1, F_2, \dots F_k ; F_{k+1}, \dots F_n$ et réunies par des tiges inextensibles. Cherchons la tension de la tige qui réunit les masses m_k et m_{k+1}.

Considérant d'abord les k premières masses, on a

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_k)\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_k - T,$$

ce que l'on peut écrire

$$M \frac{dv}{dt} = F - T.$$

L'ensemble des $n-k$ autres masses fournit une équation analogue

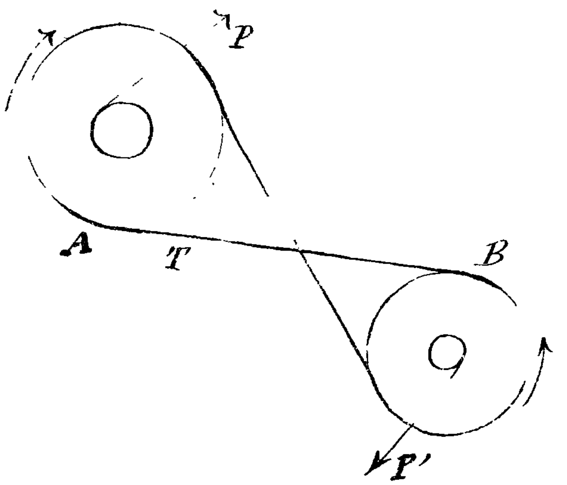
$$M' \frac{dv}{dt} = F' + T$$

et l'on en déduit

$$T = \frac{M'F - MF'}{M + M'}$$

I — Réactions des arbres tournants. — Cas où il n'y a que deux arbres. —

Considérons deux arbres parallèles réunis par une courroie AB. Soient ω et ω' leurs vitesses angulaires, P et P' les forces qui leur sont appliquées, la première étant une force mouvante, la deuxième une force résistante ; soient enfin R et R' les rayons des grands cercles sur lesquels est enroulée la courroie, p et p' les rayons des cercles tangentiellement auxquels agissent les forces P et P'.



Il s'agit d'évaluer la tension T de la courroie AB.

On a les deux équations

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - Tr}{I}$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{Tr - P'p'}{I'}$$

D'ailleurs la condition pour que la courroie ne glisse pas est $R\omega = R'\omega'$, d'où

$$R\frac{d\omega}{dt} = R'\frac{d\omega'}{dt}.$$

Pour mettre les équations sous une forme plus commode, on posera

$$I = MR^2, \quad I' = M'R'^2$$

$$Pp = FR, \quad P'p' = F'R';$$

elles deviendront

$$R\frac{d\omega}{dt} = \frac{F-T}{M}$$

$$R'\frac{d\omega'}{dt} = \frac{T-F'}{M'}$$

d'où

$$\frac{F-T}{M} = \frac{T-F'}{M'}$$

$$T = \frac{M'F+MF'}{M+M'}.$$

Si la force F subit une variation brusque ΔF, T augmente de ΔT et l'on a

$$\Delta T = \frac{M'}{M+M'}, \Delta F.$$

Donc s'il est à craindre que la force motrice F éprouve de brusques accroissements on devra rendre le rapport $\frac{M'}{M+M'}$, le plus petit possible, c'est-à-dire augmenter M. On y parviendra en augmentant le moment d'inertie de l'arbre qui reçoit l'action de la force motrice.

9 - Cas où le nombre des axes parallèles est quelconque. — Soient plus généralement n arbres parallèles

$\omega_1, \omega^2, \ldots \omega_K; \omega_{K+1}, \ldots \omega_n$ leurs vitesses angulaires,
$R_1, R^2, \ldots R_K; R_{K+1}, \ldots R_n$ les rayons des circonférences sur lesquelles passent
$P_1, P^2, \ldots P_K; P_{K+1}, \ldots P_n$ les forces appliquées aux arbres, les courroies,
$p_1, p^2, \ldots p_K; p_{K+1}, \ldots p_n$ leurs rayons,
$I_1, I^2, \ldots I_K; I_{K+1}, \ldots I_n$ leurs moments d'inertie.

Cherchons la tension de la courroie qui relie l'arbre de rang K à l'arbre de rang $K+1$. - Appliquons à cet effet, le théorème des forces vives à l'ensemble des K premiers arbres. La force vive de ce système a pour valeur

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 I + \omega_2^2 I + \ldots + \omega_K^2 I_K\right)$$

Or la vitesse de chaque arbre est dans un rapport constant avec la vitesse de l'arbre de rang K, de sorte que l'on peut poser

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{\omega_K}, \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{\omega_K}, \ \ldots$$

et, par suite

$$\theta = \frac{1}{2}\omega_K^2\left(\nu_1^2 I_1 + \nu_2^2 I_2 + \ldots + \nu_{K-1}^2 I_{K-1} + I_K\right).$$

La quantité entre parenthèses est un moment d'inertie que l'on peut représenter par MR_K^2, on aura ainsi

$$\theta = \frac{1}{2}\omega_K^2 \; MR_K^2.$$

D'autre part, le travail élémentaire des forces $P_1, P_2, \ldots P_K$ est

$$dt\left(\omega_1 P_1 p_1 + \omega_2 P_2 p_2 + \ldots + \omega_K P_K p_K\right)$$

ou

$$\omega_K dt\left(\nu_1 P_1 p_1 + \nu_2 P_2 p_2 + \ldots + P_K p_K\right)$$

La parenthèse est un moment que l'on peut représenter par FR_K, le travail élémentaire devient alors

$$\omega_K \, dt \, FR_K$$

et le théorème des forces vives donne

$$d\left(\frac{1}{2} MRK^2 \omega_K^2\right) = FR_K\omega_K dt - TR_K\omega_K dt,$$

$$MR_K^2\omega_K\frac{d\omega_K}{dt} = FR_K\omega_K - TR_K\omega_K,$$

$$MR_K\frac{d\omega_K}{dt} = F - T$$

L'ensemble des $n-K$ autres arbres fournit de même l'équation

$$M'R_{K+1}\frac{d\omega_{K+1}}{dt} = F' + T;$$

On a d'ailleurs la condition

$$RK\frac{d\omega_K}{dt} = R_{K+1}\frac{d\omega_{K+1}}{dt}$$

et l'on obtient par suite

XXVII -

Chapitre III.

Des volants.

10 - **But des volants.** — On a vu qu'en général, le mouvement d'une machine était périodique; pour cela, il faut que pendant un temps égal à la période, le travail moteur soit égal au travail résistant. Mais les variations qu'éprouve la vitesse pendant chaque période ne sont pas indifférentes: il importe que le mouvement soit le plus régulier possible. On parvient à ce résultat au moyen des volants destinés à augmenter le moment d'inertie des arbres des machines.

Soient, à deux instants déterminés V et V_0 les vitesses d'un point de la machine. Le système étant à liaisons complètes, les vitesses d'un autre point seront aux mêmes instants aV et aV_0, et le principe des forces vives donne l'équation

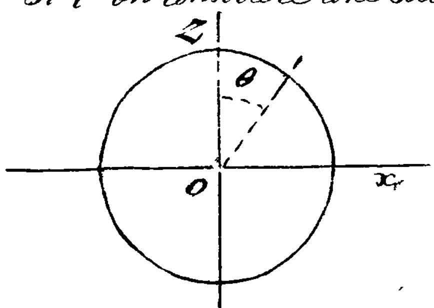
$$\frac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right)\sum m a^2 = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r.$$

On voit qu'on atténuera les variations de vitesse dans un intervalle déterminé en augmentant le terme $\sum m a^2$, c'est-à-dire en augmentant le moment d'inertie de l'arbre. La manière la plus simple d'obtenir ce résultat est d'y fixer un volant.

On supposera toujours le volant disposé de manière que son centre de gravité soit immobile, de sorte que le travail de la pesanteur sera constamment nul.

11 - **Problème des volants dans le cas d'un arbre unique.** — On montrera que le cas où il existe plusieurs arbres dans la machine se ramène aisément au cas d'un arbre unique.

Si l'on considère une section faite perpendiculairement à cet arbre, l'angle θ déterminera le mouvement et l'on aura



$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}$$

ω désignant la vitesse angulaire,
M la somme des moments des forces appliquées,
I le moment d'inertie.

On sait que M étant exprimé en fonction de θ, on déterminerait le mouvement par l'intégration de l'équation

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta).$$

Mais l'intégration de cette équation ne serait d'aucune utilité dans la théorie des volants. On se propose uniquement de résoudre les trois questions suivantes:

1° Déterminer la relation entre les forces mouvantes et les forces résistantes pour que la vitesse soit périodique.

2° Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la vitesse pendant une période.

3° Rendre la différence entre ces deux valeurs égale à une fraction donnée $\frac{1}{m}$ de la vitesse moyenne. Le coefficient $\frac{1}{m}$ s'appelle coefficient de régularisation.

L'application du théorème des forces vives fournit l'équation

$$\frac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^M M\, d\theta = \int_0^\theta \varphi(\theta)\, d\theta$$

qui permet d'obtenir la solution de ces trois questions.

12 — Périodicité du mouvement. — La fonction $\varphi(\theta) = M$ étant supposée périodique, soit τ sa période. La condition nécessaire pour que la vitesse ω admette la vitesse ω admette la période τ est

$$\int_0^\tau \varphi(\theta)\, d\theta = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car on aura

$$\int_0^{2\tau} \varphi(\theta) d\theta = \int_0^\tau \varphi(\theta)\, d\theta + \int_\tau^{2\tau} \varphi(\theta)\, d\theta = 0,$$

puisque $\int_\tau^{2\tau} \varphi(\theta) d\theta = \int_0^\tau \varphi(\theta)\, d\theta$ par suite de la périodicité de la fonction $\varphi(\theta)$.

13 — Détermination de la plus grande et de la plus petite valeur de la vitesse. — La vitesse ω étant supposée essentiellement positive, elle passe par un maximum ou par un minimum en même temps que ω^2 ou que $\frac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_0^2)$. Ainsi, pour obtenir les valeurs de θ qui correspondent au maximum et au minimum de ω, il suffit d'égaler à zéro la dérivée de la fonction précédente ou de $\int_0^\theta \varphi(\theta) d\theta$ prise par rapport à θ, c'est-à-dire de poser

$$\varphi(\theta) = 0.$$

Le signe de $\varphi'(\theta)$ indiquera s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Pendant une période la vitesse passe au moins par un maximum ou par un minimum. Dans tous les cas, le nombre des maximums et des minimums est un nombre pair. Il suffit de considérer le maximum maximorum ω'' et le minimum minimorum ω' de la vitesse. On représente par θ'' et θ' les valeurs de θ qui leur correspondent.

14 – Détermination du moment d'inertie de l'arbre. – En désignant par W la vitesse moyenne, on doit avoir

$$\omega'' - \omega' = \frac{1}{m} W.$$

On prendra pour valeur approchée de W la moyenne arithmétique $\frac{\omega''+\omega'}{2}$ et l'on aura

$$\omega'' - \omega' = \frac{1}{m} \frac{\omega''+\omega'}{2}.$$

Appliquant le théorème des forces vives entre les instants θ' et θ'', on a

$$\frac{1}{2} I(\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{1}{2} I (\omega''-\omega')(\omega''+\omega') = \int_{\theta'}^{\theta''} \varphi(\theta) d\theta;$$

et, à cause de l'équation précédente

$$(1) \qquad I \frac{W^2}{m} = \int_{\theta'}^{\theta''} \varphi(\theta) d\theta.$$

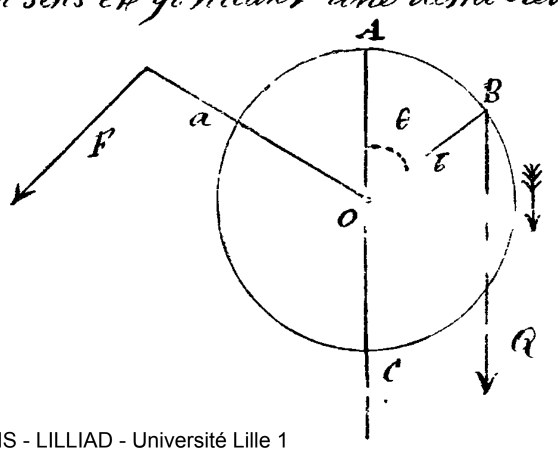
Cette équation déterminera I si W est connu et si l'on se donne m, car le deuxième membre a une valeur numérique que l'on doit regarder comme connue.

La valeur de W s'obtient pratiquement comme il suit.

Soit N le nombre de tours qu'exécute l'arbre dans une minute par le point situé à l'unité de distance de l'axe est $2\pi N$. Or W est l'axe décrit en une seconde par le même point ; donc

$$W = \frac{2\pi N}{60}$$

15 – Manivelle à simple effet. – On supposera d'abord que les forces appliquées se réduisent à deux, savoir une résistance tangentielle constante et la puissance exercée par une tielle dont on négligera les déviations. Si cette tielle n'agit que dans un sens et pendant une demi-révolution, on a la manivelle à simple effet.



Soient Q la puissance et F la résistance B le point d'application de la puissance. Quand ce point se déplace de A en C, on a

$$\varphi(\theta) = Q b \sin\theta - Fa,$$

Quand le point B se déplace de C en A, on a de même

$$\varphi(\theta) = -Fa$$

La fonction $\varphi(\theta)$ est donc périodique et admet pour période 2π.
On va maintenant résoudre les trois questions du problème général.
1° Exprimant que le travail moteur est égal au travail résistant pendant une période, on trouve

$$2\,Qb = 2\pi Fa,$$

$$\frac{Fa}{Qb} = \frac{1}{\pi}$$

2° Pour obtenir les maximum et les minimum de la vitesse, il suffit d'égaler à zéro la fonction $\varphi(\theta)$ ce qui donne

$$Qb \sin\theta - Fa = 0$$

d'où
$$\sin\theta = \frac{1}{\pi}$$

Cette équation fournit deux valeurs

$$\theta' = 18^\circ\, 33'\, 40''$$
$$\theta'' = 161^\circ\, 26'\, 20''$$

La première correspond directement au minimum de la vitesse, car dans le parcours **CA**, la vitesse diminue puisque la puissance est nulle ; il en est de même au début du parcours **AC** parce qu'alors le moment de la puissance est très petit.

3° Dans l'équation (1) du N° 14, le second membre qui représente le travail des forces appliquées entre le minimum et le maximum s'obtient sans intégration et on trouve

$$I\frac{w^2}{m} = 2\,Qb \cos\theta' - Fa(\theta'' - \theta') = 2\,Qb\left(\cos\theta' - \frac{Fa}{Qb}\,\frac{\theta'' - \theta'}{2}\right),$$

attendu que $\cos\theta' = -\cos\theta''$. Désignant par T le travail de la bielle dans un tour, cette équation devient

$$I\frac{w^2}{m} = T\left(\cos\theta' - \frac{\theta'' - \theta'}{2\pi}\right) = 0{,}552\, T.$$

Soient d'autre part N la puissance de la machine, N' le nombre de tours en une minute, on a

$$N'T = N . 75 . 60 .$$

d'où

$$T = 4500\,\frac{N}{N'}$$

16 – **Manivelle à double effet.** — La manivelle est à double effet, quand de **A** en **C** elle agit dans un sens et de **C** en **A** en sens opposé. On a

On a constamment si l'on compte l'angle θ de zéro à 180°;

$$\varphi(\theta = Qb \sin\theta - Fa,$$

de sorte que la période est égale à π.

1° Le travail sera nul dans un tour si

$$4Qb = 2\pi Fa = T,$$

d'où

$$\frac{Fa}{Qb} = \frac{2}{\pi}$$

2° L'équation $\varphi(\theta) = 0$ donne

$$\sin\theta = \frac{Fa}{Qb} = \frac{2}{\pi}$$

d'où

$$\theta = 39° \; 32' \; 24''$$
$$\theta' = 140° \; 27' \; 30''$$

3° L'équation du N° 14 devient

$$I\frac{w^2}{m} = 2Qb\cos\theta' - Fa(\theta'' - \theta')$$

$$\frac{Iw^2}{m} = 4Qb\frac{\cos\theta'}{2} - \frac{Fa}{Qb}\,\frac{\theta'' - \theta'}{4}$$

$$I\frac{w^2}{m} = T\;\frac{\cos\theta'}{2} - \frac{\theta'' - \theta'}{2\pi}$$

$$\frac{Iw^2}{m} = 0,105T.$$

Pour une même valeur de m, le moment d'inertie du volant est donc beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

17 – Deux manivelles simples, à double effet, rectangulaires. — Dans cette disposition les deux points morts A et C se trouvent supprimés. On a alors

$$\varphi(\theta) = Qb(\sin\theta + \cos\theta) - Fa$$

Il est clair que la période est égale à $\frac{\pi}{2}$.

1° Égalant à zéro la somme des travaux effectués dans un tour, on trouve

$$8\,Q b = 2\pi F a = T$$

d'où

$$\frac{Fa}{Qb} = \frac{4}{\pi}.$$

2° Posant $\varphi(\theta) = 0$, on trouve l'équation

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{\pi}$$

et multipliant par $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

ce qui donne

$$\theta' = 19° \, 11'$$

$$\theta'' = 70° \, 48'.$$

D'ailleurs $\varphi'(\theta) = \cos\theta - \sin\theta = \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$; d'où $\varphi'(\theta)$ est positif et correspond à un maximum.

3° On a

$$\int \varphi(\theta) = Qb(-\cos\theta + \sin\theta) - Fa\,\theta$$

par suite l'équation du N° 14 devient

$$\frac{Iw^2}{m} = Qb(\cos\theta' - \cos\theta'' + \sin\theta'' - \sin\theta') - Fa(\theta'' - \theta')$$

$$\frac{Iw^2}{m} = 8Qb\left(\frac{\cos\theta' - \cos\theta'' + \sin\theta'' - \sin\theta'}{8} - \frac{\theta'' - \theta'}{2\pi}\right)$$

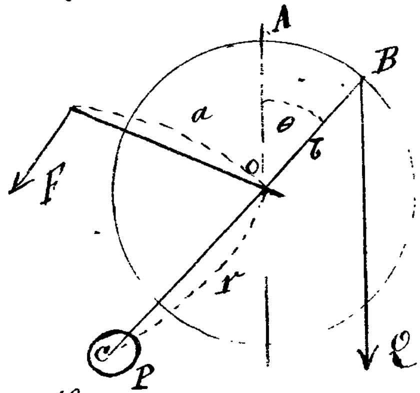
$$\frac{Iw^2}{m} = 0{,}0106\ T.$$

Ainsi dans ce système, le moment d'inertie du volant se trouve considérablement réduit. —

XXVIII —

18 — **Manivelle avec contre-poids.** — Lorsque l'emploi d'une manivelle à simple effet se trouve imposée par les circonstances, on peut, au moyen d'un contre-poids remédier aux inconvénients qu'elle présente. —

(Voir la figure à la page suivante.)



Soient C le centre de gravité du contre poids et P son poids choisi de manière à satisfaire à la relation

$$Pr = \frac{1}{2}\, Q b.$$

Le point B se déplaçant de A en C, on a

$$\varphi(\theta) = Q b \sin\theta - Pr \sin\theta - Fa = \frac{1}{2}\, Q b \sin\theta - Fa$$

Le point B se déplaçant de C en A, on a

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\, Q b \sin\theta - Fa$$

La valeur de $\varphi(\theta)$ prend donc les mêmes valeurs dans les deux parties du mouvement. Celui-ci est ainsi périodique, la valeur de la période étant égale à π. Il est clair d'ailleurs que le mouvement est le même que si l'on employait une manivelle à double effet dont la force serait $\frac{1}{2} Q$.

19 – Cas où le nombre des arbres est quelconque. — On peut aisément ramener au cas d'un arbre unique celui où le nombre des arbres est quelconque. Soient en effet

$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2, \ldots$ les vitesses angulaires des divers arbres,
$P,\ P_1,\ P_2, \ldots$ les forces qui leur sont appliquées,
$p,\ p_1,\ p_2, \ldots$ leurs bras de levier
$I,\ I_1,\ I_2, \ldots$ les moments d'inertie.

On peut appliquer le théorème des forces vives en considérant les réactions mutuelles comme des forces de liaison puisque ces liaisons sont indépendantes du temps.

La force vive du système a pour valeur

$$\frac{1}{2}\left(I\omega^2 + I_1\omega_1^2 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\,\omega^2\left(I + \nu_1^2 I_1 + \nu_2^2 I_2 + \cdots\right);$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots$ représentant les rapports $\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_2}{\omega}, \ldots$ Or, la parenthèse représente un moment d'inertie que l'on peut désigner par μ, de sorte que la force vive se met sous la forme $\frac{1}{2}\mu\omega^2$.

Le travail élémentaire de toutes les forces appliquées au système est

$$\left(P p\omega + P_1 p_1 \omega_1 + \cdots\right) dt = \omega\left(P p + \nu_1 P_1 p_1 + \cdots\right) dt$$

En distinguant les termes qui représentent un travail positif et ceux qui représentent un travail négatif, on peut évidemment représenter le travail élémentaire par

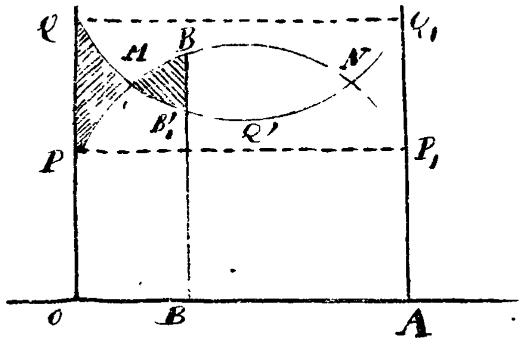
$$Pp\omega dt - Qq\omega dt$$

et l'équation des forces vives donne

$$\mu \frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq.$$

L'équation du mouvement a donc la même forme que s'il n'existait qu'un arbre unique. Dans cette équation, Pp et Qq représentent des fonctions de θ.

20 – Calcul des volants dans le cas général. — Les trois questions qui se présentent dans le calcul des volants peuvent être aisément résolues par un procédé graphique. On supposera que les deux fonctions Pp et Qq de θ sont périodiques et que la valeur commune de la période est 2π et l'on construira deux courbes $PP'P_1$, $QQ'Q_1$ dont les abscisses soient les valeurs de θ comprises entre zéro et 2π, et les ordonnées les valeurs correspondantes de Pp et de Qq. Les ordonnées extrêmes sont évidemment les mêmes dans chacune des deux courbes.



Quand θ varie de zéro à OB, le travail produit est la différence entre les aires $OBPB'$ et $OQBB'_1$, c'est à dire entre les aires $MB'B$, MPQ.

Cela posé, on va traiter successivement les trois questions.

1° La condition nécessaire et suffisante pour que la vitesse ω admette la période 2π c'est que pendant la durée correspondante, le travail moteur soit égal au travail résistant, ce qui exige que les aires des deux courbes $PP'P_1$, $QQ'Q_1$ soient égales. Il faudra faire en sorte que cette condition soit satisfaite.

2° Les racines de l'équation $\varphi(\theta) = 0$ sont évidemment les abscisses des points de rencontre des deux courbes tels que M et N. En particulier dans le cas de la figure, le point M correspond à un minimum de la vitesse, attendu que pour les valeurs de θ inférieures à l'abscisse de ce point, l'action de la résistance se trouve prépondérante. De même, le point N correspond à un maximum de la vitesse.

3° Pour obtenir le moment d'inertie de l'arbre et calculer le volant, on évalue graphiquement l'aire $MP'NQ'$ et, représentant par τ cette aire, on posera l'équation

$$I \frac{\omega^2}{n} = \tau$$

L'échelle à laquelle les courbes ont été tracées étant arbitraire, la détermination de l'aire τ exigera quelques précautions. On pourra procéder de la manière suivante : Soit a l'aire $MP'NQ'$ correspondant au travail τ ; soit de même a l'aire $OPP'P_1$, A et T le travail correspondant, les deux aires étant mesurées à l'aide d'une unité quelconque, on aura

$$\frac{T}{A} = \frac{\tau}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \tau = T\frac{a}{A}$$

Il suffit donc de mesurer sur la figure le rapport $\frac{a}{A}$, attendu que le travail T n'est autre que le travail moteur.

Si les courbes se coupent en plus de deux points, le nombre des points de rencontre est toujours pair, et il faudra déterminer le maximum maximorum et le minimum minimorum. On y parviendra facilement par la considération des aires en remarquant, par exemple, que le maximum maximorum correspond au moment où l'excès du travail moteur sur le travail résistant est le plus grand possible.

Chapitre IV.

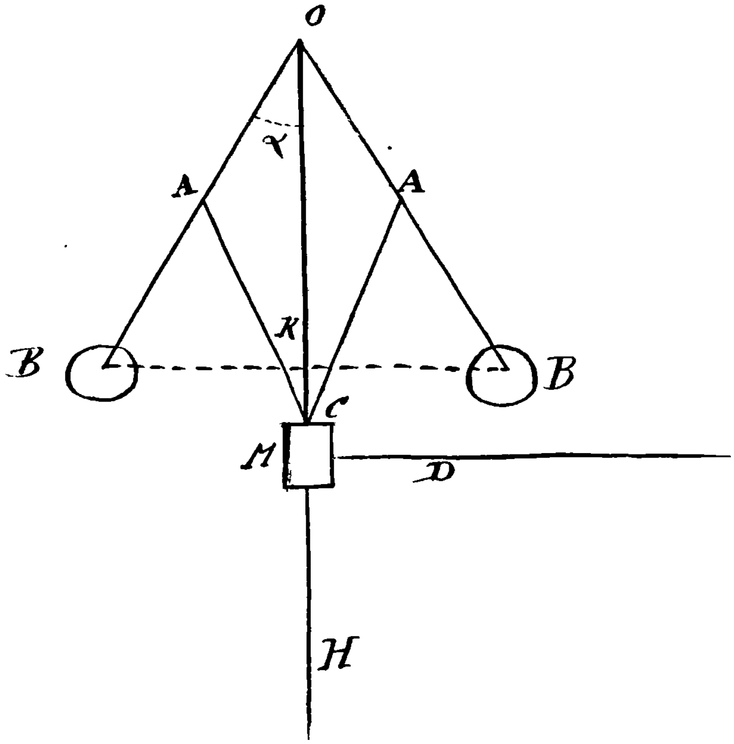
Des régulateurs.

21 – But des régulateurs. – On a vu que les volants avaient pour but de régulariser le mouvement des machines dans l'intervalle d'une période. Pour maintenir la période citée, il faut des régulateurs.

Le but des régulateurs est donc d'équilibrer le travail mobile et le travail résistant.

(Voir à la page suivante (f^{lle} 57), la description et la figure du régulateur à force centrifuge de Watt.–

— Description du régulateur à force centrifuge de Watt. —



Le régulateur de Watt est constitué par un arbre vertical OH auquel l'arbre de la machine communique un mouvement de rotation, par deux tiges OB articulées en O et terminées par deux sphères pesantes, par deux tiges AC articulées en A avec les précédentes et en C avec un manchon M qui peut glisser sans frottement sur l'arbre vertical. Ce manchon est relié à un levier MD de sorte que le déplacement du manchon entraîne celui du levier.

Mais ce dernier éprouve dans son mouvement une certaine résistance. Soit F la force qu'on doit appliquer verticalement en M pour vaincre cette résistance.

Pendant la marche normale, le système tourne autour de OM et se trouve en équilibre relatif. Mais si une cause quelconque vient à augmenter la vitesse de l'arbre, les boules tendent à s'écarter, par suite le manchon tend à s'élever et le levier à basculer. On dispose ce levier de manière que son mouvement ait pour résultat d'annuler ou de contrebalancer l'effet de la cause perturbatrice.

On va chercher à résoudre les trois questions suivantes :

1° Déterminer la relation qui, dans la marche normale, existe entre la vitesse angulaire ω et l'angle α d'écartement des tiges OB avec la verticale.

2° Déterminer la relation qui existe entre ω, α et F au moment où le manchon est sur le point de se déplacer.

3° Déterminer le déplacement du manchon.

Il suffit de traiter la deuxième question pour résoudre les deux autres.

Théorie du régulateur de Watt. — On posera

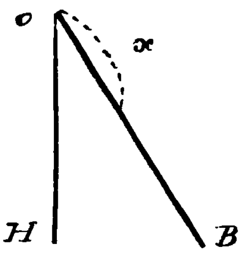
$$OA = a, \quad OB = b, \quad AC = c,$$

$$\text{angle } BOC = \alpha, \quad \text{angle } ACO = \beta.$$

et l'on représentera par P le poids de la sphère B, par p le poids de la tige OB, supposé prolongée jusqu'au centre B de la sphère, afin de compenser le renflement de la tige à son point de jonction avec la sphère ; enfin par q le poids de la tige AC et par Q celui du manchon M.

Il faut d'abord évaluer les forces d'inertie dans le mouvement de rotation.

La sphère B admet évidemment par suite de la symétrie, la droite OH pour axe d'inertie principal en K. Les forces d'inertie appliquées aux différents points de cette sphère ont donc une résultante unique passant par le centre de gravité B et dont la valeur est la même que si toute la masse était concentrée en ce point, de sorte que cette résultante a pour valeur $\frac{P}{g}\omega^2 b \sin\alpha$; elle est dirigée dans le sens KB.



Pour la tige OB de longueur dx est $\frac{p}{g}\frac{dx}{b} x \sin\alpha\,\omega^2$; toutes les forces d'inertie des différents éléments étant parallèles, ont une résultante égale à

$$\int_0^b \frac{p}{g}\frac{dx}{b} x \sin\alpha\,\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{p}{g} b\,\omega^2 \sin\alpha.$$

Soit x_1 la distance de son point d'application au point O, on a

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g} b\,\omega^2 \sin\alpha\, x_1 = \int_0^b \frac{p}{g}\frac{dx}{b} x^2 \sin\alpha\,\omega^2$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3} b.$$

Décomposant cette résultante en deux forces l'une appliquée en O, qui sera détruite par la composante provenant de l'autre tige, l'autre appliquée en B, il est clair que cette dernière a pour valeur

$$\frac{1}{3}\frac{p}{g} b\,\omega^2 \sin\alpha.$$

La tige AC donnera de même une résultante $\frac{1}{2}\frac{q}{g} c\,\omega^2 \sin\beta = \frac{1}{2}\frac{q}{g} a\,\omega^2 \sin\alpha$ appliquée aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur à partir du point C. On peut la décomposer en deux autres appliquées l'une en C, l'autre en A, puis cette dernière encore en deux autres, l'une appliquée en O, l'autre en B. Cette dernière est la seule qui ne soit pas détruite ; et elle a pour valeur

$$\frac{1}{3}\,\frac{q}{g}\,\omega^2 \sin\alpha\,\frac{a^2}{b}$$

On voit donc que les forces d'inertie donnent une force X appliquée en B, dirigée suivant KB et telle que

$$X = \frac{\omega^2 b \sin\alpha}{g}\left(P + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q\,\frac{a^2}{b^2}\right)$$

Il reste à évaluer les forces dues à la pesanteur. Si l'on remarque que les composantes appliquées en O sont détruites par la réaction de la tige verticale, on voit qu'il suffit de calculer les composantes appliquées en B et en C. On trouve ainsi au point B

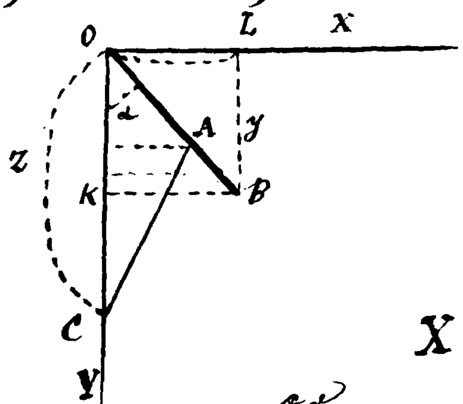
$$Y = P + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\,\frac{a}{b}$$

et au point C on obtient $q + C$ mais il faut ajouter à celle-ci la force F nécessaire pour vaincre la résistance que le levier rencontre dans son mouvement, de sorte qu'il vient, pour la force totale appliquée en C,

$$Z = \frac{q}{2} + Q + F \quad \text{ou} \quad \frac{q}{2} + Q - F,$$

suivant que le mouvement du manchon tend à se produire vers le haut ou vers le bas.

Pour obtenir la relation qui existe entre la vitesse angulaire ω, l'angle d'écartement α et la force F, au moment où le manchon est sur le point de se déplacer, il suffit d'exprimer que l'appareil est en équilibre sous l'action des forces directement appliquées et des forces d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire que la somme des travaux virtuels des forces X, Y et Z est nulle pour un déplacement compatible avec les liaisons.



Posant à cet effet

$$BK = x, \qquad BL = y, \qquad OC = z,$$

le principe du travail virtuel donnera l'équation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

or,

Or,

$$x = b \sin\alpha$$
$$y = b \cos\alpha$$
$$z = a \cos\alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2\alpha},$$

d'où l'on déduit

$$dx = b \cos\alpha\, d\alpha$$

$$dy = b \sin\alpha\, d\alpha$$

$$dz = -a \sin\alpha \left(1 + \frac{a \cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2 \sin^2\alpha}}\right) d\alpha$$

et l'équation du travail virtuel devient

$$\frac{2\omega^2 b^2 \cos\alpha}{g}\left(P + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q\frac{a^2}{b^2}\right) - 2b\left(P + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\frac{a}{b}\right) - a(q + Q \pm F)\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}\right) = 0.$$

C'est la relation cherchée..

XXIX.

29. **Etablissement du régulateur.** — Pour obtenir la relation qui, dans la marche normale, existe entre α et ω, il suffit de faire, dans la formule précédente, $F = 0$. Or si l'on suppose

$$a = c = \frac{b}{2}, \text{ et par suite } 2q = p$$

condition que réalisent ordinairement les conducteurs, la formule générale devient

$$\frac{\omega^2 b \cos\alpha}{g}\left(2P + \frac{3}{4}p\right) = 2P + Q + \frac{7}{4}p \pm F,$$

d'où en faisant $F = 0$,

$$\omega^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left(1 + \frac{P + Q + \frac{7}{4}p}{2P + \frac{3}{4}p}\right)$$

Si l'on désigne pour simplifier par Q le numérateur et par $2P$ le dénominateur de la fraction, par W la vitesse du régime l'équation précédente s'écrit

$$W^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left(1 + \frac{Q}{2P}\right). \tag{1}$$

Si, par suite de la diminution du travail résistant ou de l'accroissement du travail moteur, la vitesse de la machine vient à s'accroître, il est clair que les boules tendent à s'écarter et le manchon à s'élever ; mais alors se manifestera la résistan la résistance due au levier. Cette dernière est nulle quand la vitesse ω est égale à la vitesse de régime, mais elle croît en même temps que ω jusqu'au moment où elle atteint son maximum F. C'est seulement à cet instant que le manchon pourra se déplacer et au moment où le déplacement est sur le point de se produire, on se trouve dans les conditions où a été établie la formule générale. Soit donc ω_1 la vitesse avec laquelle le manchon commence à se déplacer, la formule générale dans laquelle on attribue à F le signe $+$, puisqu'il s'agit d'un mouvement de bas en haut, donne

$$(2) \qquad \omega_1^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left(1 + \frac{Q+F}{2P}\right)$$

De même la vitesse ω_2 à laquelle le manchon commence à se déplacer de haut en bas s'obtient en attribuant à F le signe $-$; ainsi

$$(3) \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left(1 + \frac{Q-F}{2P}\right)$$

On voit par ce qui précède que le manchon ne peut se déplacer tant que la vitesse est comprise entre ω_1 et ω_2 ; par suite $\omega_1 - \omega_2$ mesure la sensibilité de l'appareil. D'ordinaire c'est la donnée qui sert de base à l'établissement d'un régulateur.

Posant

$$(4) \qquad \omega_1 - \omega_2 = \frac{W}{n},$$

il reste à chercher la condition que doit remplir l'appareil pour que cette relation soit satisfaite.

Pour cela, on admettra qu'on peut sans erreur sensible, poser

$$W = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

équation qui multipliée par (4) donne

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{2W^2}{n}$$

Si l'on remplace dans cette dernière ω_1^2, ω_2^2, W^2 par leurs valeurs tirées de (1), (2), (3), on obtient

$$\frac{F}{P} = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{Q}{2P}\right)$$

ou

$$\frac{nF - Q}{2P} = 1.$$

La valeur de F étant supposée connue, cette équation donne la relation qui doit exister entre P et Q pour que l'appareil ait la sensibilité voulue.

Le régulateur est évidemment d'autant plus sensible que n est plus grand. Toutefois il existe pour n une limite qu'on ne saurait dépasser dans la pratique. Si l'on considère en effet le volant de la machine, on sait que pour l'établissement de ce volant, on réalise les conditions $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\Omega}{n}$, ω_1 et ω_2 désignant les valeurs extrêmes de la vitesse dans une période. Il est clair que si, dans le calcul du régulateur, on adoptait pour n une valeur supérieure à celle qui a servi au calcul du volant, le manchon se déplacerait contrairement au but que l'on se propose.

25 — Fonctionnement du régulateur. — Il est maintenant facile de se rendre compte du fonctionnement de l'appareil. S'il survient un excès de travail moteur, la vitesse angulaire de l'arbre croît et ne tarde pas à dépasser ω_1, et à partir de cet instant le manchon s'élève, tendant vers une position pour lequel l'angle α possède une valeur satisfaisant à l'équation

$$\omega^2 = \frac{g}{2 b \cos\alpha'}\left(1 + \frac{Q+F}{2P}\right)$$

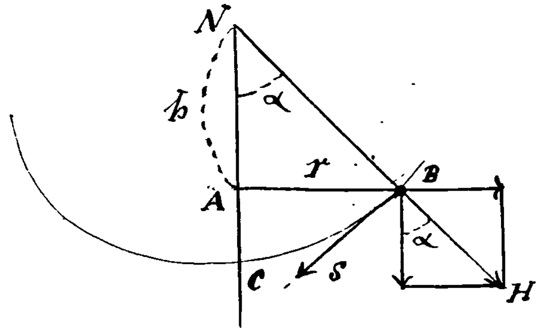
Mais le déplacement du levier a pour effet de diminuer le travail moteur, de sorte que la vitesse diminue bientôt, le manchon s'arrête, puis s'abaisse et le levier subit un déplacement en sens contraire, par suite duquel le travail moteur s'accroît, et ainsi de suite. Il se produit ainsi une série d'oscillations autour d'une nouvelle position d'équilibre dans laquelle la vitesse ω conservera une valeur constante mais différente de la pression.

Ainsi toute variation dans la pression du moteur entraîne un changement dans la vitesse de la machine.

26 — Régulateurs isochrones. — C'est pour remédier à cet inconvénient qu'on a cherché à construire des régulateurs isochrones. On appelle ainsi les régulateurs pour lesquels toute position est une fonction d'équilibre relatif stable lorsque l'arbre a son régime normal correspondant à une vitesse moyenne déterminée.

27 — Régulateur parabolique. — Lemme I. — On considère une courbe plane tournant autour d'un axe vertical situé dans son plan, avec une vitesse uniforme Ω, et sur laquelle peut se mouvoir le centre d'une boule de poids P. On demande quelle doit être la nature de la courbe pour que la boule soit en équilibre relatif quelque soit le point où elle se trouve abandonnée sans vitesse.

Il faut pour cela que, quelque soit la position de la boule, la résultante du poids de la boule et de sa force centrifuge soit normale à la courbe : —



Les triangles semblables de la figure ci-jointe donnent alors

$$\frac{NA}{AB} = \frac{BK}{KH},$$

ou

$$\frac{h}{r} = \frac{P}{\frac{P}{g} W^2 r}$$

ou enfin ———————————— $h = \frac{g}{W^2}$.

La sous-normale est constante, par suite la courbe est une parabole ayant pour axe A N et pour paramètre $\frac{g}{W^2}$. Ce paramètre varie d'ailleurs avec la vitesse W.

28 – **Lemme II.** — Le centre de la boule étant assujetti à demeurer sur la parabole BC, on suppose que la vitesse prenne une valeur ω, différente de W; on demande qu'elle est la force tangentielle S qu'il faut appliquer au point B pour maintenir l'équilibre.

Il suffit, pour résoudre la question d'exprimer que la résultante des trois forces est normale à la courbe, c'est-à-dire que la somme de leurs projections sur la tangente est nulle, ce qui donne

$$S = \frac{P}{g}\omega^2 r \cos\alpha - P\sin\alpha = P\sin\alpha\left(\frac{\omega^2 r}{g\,\mathrm{tang}\,\alpha} - 1\right)$$

Or $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{r}{h}$, $h = \frac{g}{W^2}$, par suite

$$S = P\sin\alpha\left(\frac{\omega^2}{W^2} - 1\right)$$

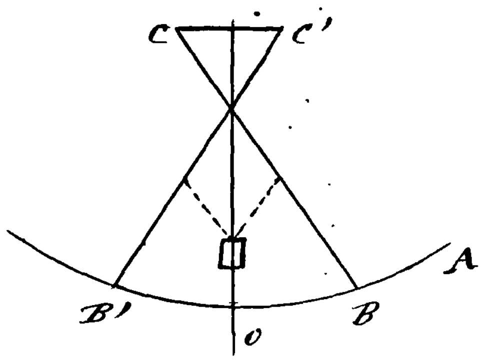
La valeur de S est positive pour $\omega > W$ et négative dans le cas contraire.

29 – **Fonctionnement du régulateur parabolique.** — Les principes précédents permettent de concevoir comment fonctionnerait un régulateur dont les boules seraient assujetties à se mouvoir sur une parabole. La force S sera utilisée pour faire varier la force motrice. La vitesse angulaire augmentant, la boule restera d'abord en repos jusqu'à ce que la valeur de S déduite de l'équation précédente atteigne la valeur nécessaire pour faire fonctionner le levier qui agit sur la force motrice. A cet instant, la boule s'écartera de l'axe jusqu'à ce que le travail moteur ait été assez réduit pour que la vitesse soit devenue de nouveau égale à W.

Il est à remarquer que dans ce système, la vitesse du régime est seule fixée par la construction du régulateur et reste constante quelle que soit la position des boules; le travail moteur peut donc varier sans que l'on soit obligé de changer la vitesse du régime.

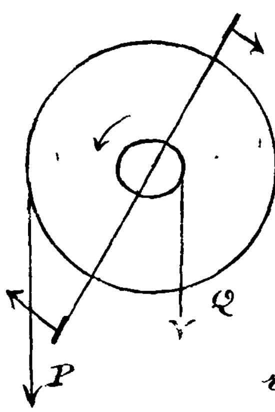
Dans la pratique, les choses se passent un peu autrement qu'on ne l'a supposé. Quand la vitesse angulaire varie, les boules acquièrent une certaine vitesse qui les entraîne au-delà de la nouvelle position d'équilibre; de là des oscillations qui diminuent les avantages du système. De plus, il est fort difficile de rendre une sphère mobile sans frottement sur une courbe.

30 - Régulateur à bras croisés de Farcot. — M. Farcot a cherché à faire disparaître cette dernière difficulté en remplaçant la parabole par un cercle très voisin de l'arc utilisé de la courbe.



Soit OA cet arc et B son milieu. La solution adoptée par ce constructeur consiste à remplacer l'arc OA par son cercle osculateur au point B. A cet effet, la boule est fixée à une tige articulée en C à un bras horizontal CC' invariablement relié à l'axe. L'appareil est d'ailleurs symétrique par rapport à cet axe et ses autres dispositions sont analogues à celles que l'on rencontre dans le régulateur de Watt.

31 - Modérateur à ailettes. — Cet appareil a pour but de rendre sensiblement uniforme, au bout d'un certain temps le mouvement d'un arbre sollicité par des forces qui ne se font pas équilibre.



Soient P la puissance et Q la résultante. — Sur l'arbre sont disposées des palettes planes dont les plans passent par l'axe et qui sont deux à deux symétriques par rapport à cet axe.

L'expérience a fait reconnaître que l'action exercée par l'air sur deux palettes opposées équivalait à un couple proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Soit $b\omega^2$ la valeur de ce couple;

Soit $b\omega^2$ la valeur de ce couple, on a l'équation

$$I\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq - b\omega^2$$

ce qui peut s'écrire en désignant par a et c des constantes positives

$$\frac{d\omega}{dt} = a\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)$$

ou

$$\frac{d\omega}{c^2 - \omega^2} = \frac{a}{c^2}\,dt$$

Intégrant et supposant que pour $t = o$, la vitesse soit nulle,

$$l\,\frac{c+\omega}{c-\omega} = \frac{2a}{c}\,t$$

d'où l'on déduit

$$\omega = c\;\frac{e^{\frac{2at}{c}} - 1}{e^{\frac{2at}{c}} + 1}.$$

On voit que la vitesse ω croît indéfiniment sans pouvoir dépasser une limite c. Si la constante $\frac{2a}{c}$ est considérable, la convergence est très-rapide de sorte qu'au bout d'un temps assez faible, la vitesse ω ne diffère plus sensiblement de sa limite et que le mouvement peut être considéré comme uniforme.

32 — **Des freins.** — Les régulateurs rendent le mouvement des machines sensiblement uniforme sans occasionner de perte de travail. Mais dans certains cas, il n'y a aucun avantage à économiser la force motrice. On peut alors faire usage des freins qui, pour empêcher les accroissements de la vitesse, augmentent le travail résistant au lieu de diminuer le travail moteur. Le modérateur à ailettes peut lui-même être considéré comme un frein.

D'ordinaire, un frein consiste essentiellement en un collier embrassant l'arbre et déterminant un frottement. Soit Rr le moment des résistances correspondant à ce frottement, l'équation du mouvement est

$$I\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq - Rr$$

Pour rendre la vitesse ω constante, il suffit d'annuler le second membre, ce que l'on réalise par tâtonnements en serrant plus ou moins le collier.

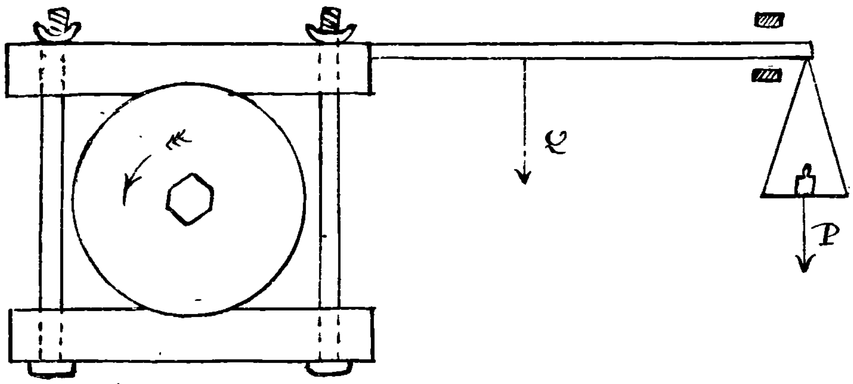
Si l'on veut arrêter l'arbre, il suffit de rendre Rr supérieur à $Pp - Qq$. Si cette dernière quantité est constante, on peut écrire

$$\frac{d\omega}{dt} = -a, \quad \text{d'où} \quad \omega = \omega_0 - at.$$

la vitesse s'annule ainsi au bout d'un temps $\frac{\omega_0}{a}$ et l'arbre restera dès lors immobile, aucune force ne tendant à le faire tourner en sens inverse.

33 – Mesure du travail utile d'une Machine. – Frein de Prony.

Le frein de Prony n'a pas pour objet de régulariser le mouvement des machines. C'est un appareil que l'on dispose sur l'arbre auquel sont appliquées les résistances utiles, afin de mesurer le travail utile de la machine qui, comparé au travail moteur, fournit la valeur du rendement.



On cale sur cet arbre une poulie et sur cette poulie, l'on place deux pièces évidées formant collier. Ces deux pièces sont réunies par des boulons que l'on peut serrer plus ou moins au moyen d'écrous. Un levier fixé entre les deux pièces est maintenu entre deux arrêts.

L'arbre tournant avec sa vitesse normale, et toutes les machines outils étant en action, on adapte le frein, et on le serre progressivement en même temps qu'on supprime toutes les machines outils. On règle par tâtonnements les boulons de manière que la vitesse soit celle du régime normal. Le travail utile est alors égal au travail des forces de frottement introduites par le frein.

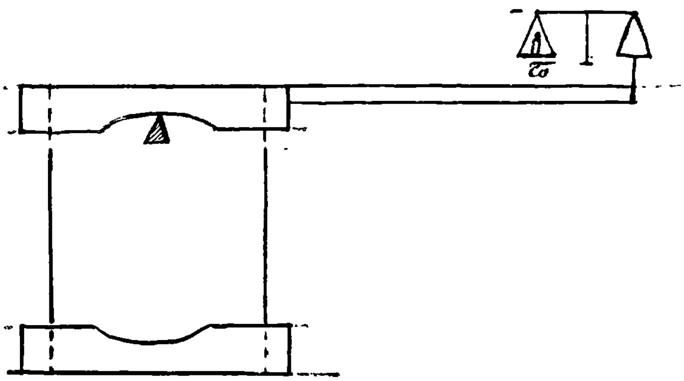
Pour évaluer ce travail des forces de frottement, on détermine par tâtonnements le poids qui doit être placé dans un plateau supporté par l'extrémité du levier pour amener le frein à une position d'équilibre. Dans la pratique, le défaut d'uniformité de la poulie et les variations du travail moteur ne permettent pas de réaliser l'équilibre. On détermine d'abord un poids P' pour lequel le levier reste en contact avec l'arrêt supérieur, mais sans le presser; ensuite un poids P'' pour lequel il reste de même en contact avec l'arrêt inférieur. On détermine ensuite par tâtonnements un poids intermédiaire P pour lequel le levier oscille et vient frapper alternativement les deux arrêts.

Soient Q le poids du frein, ΣF les forces de frottement, r le rayon de la poulie, l'équation d'équilibre est

$$\Sigma Fr = Pp + Qq.$$

Si donc on pose $A = Pp + Qq$, le travail du frottement égal au travail utile, est représenté pour un tour par $2\pi A$.

Pour déterminer q on enlève le frein et on le fait reposer sur un couteau ainsi que l'indique la figure. On suspend l'extrémité du levier à l'un des plateaux d'une balance et l'on charge l'autre de poids jusqu'à ce que l'équilibre soit établi. Soit ϖ la valeur de ce poids. On a



$$Qq = \varpi p,$$

relation qui fournit la valeur de Qq.

XXX.

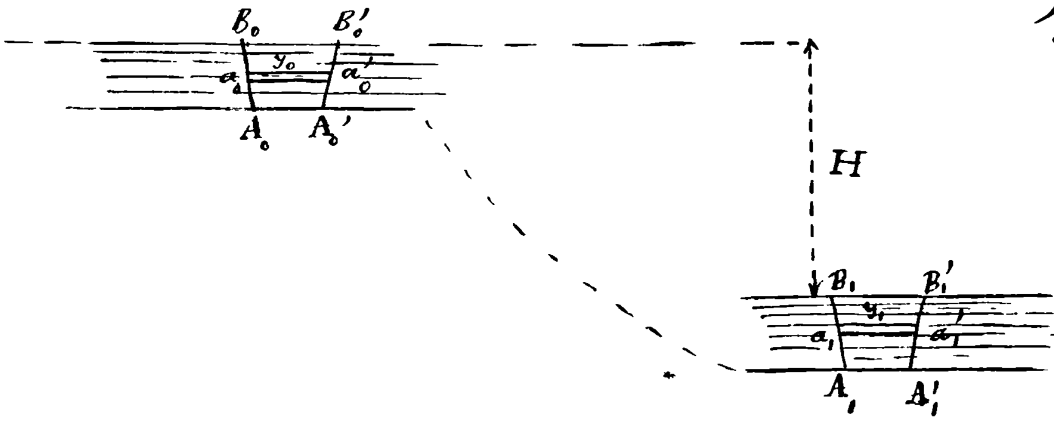
Chapitre V.

Moteurs hydrauliques.

I. Notions générales.

91 – Dans les moteurs hydrauliques la force motrice est la pesanteur. Cette force s'exerce sur de l'eau qui fait mouvoir une roue.

Il existe un canal supérieur qui amène le liquide et un canal inférieur par lequel il s'écoule. Le canal supérieur s'appelle le <u>bief d'amont</u>, le canal inférieur le <u>bief d'aval</u>. La différence de niveau des deux biefs est la <u>hauteur de chute</u> ou plus simplement la <u>chute</u>.



Théorème sur le travail transmis au moteur. — Soient deux sections transversales $A_0 B_0$, $A_1 B_1$ aussi rapprochées que possible de la roue, mais pour lesquelles les surfaces de niveau sont encore sensiblement horizontales. Pour appliquer au liquide compris entre les deux sections le théorème des forces vives, on supposera l'état permanent établi. Cette hypothèse n'est pas conforme à la réalité, car, pendant la chute, le mouvement n'est pas permanent mais périodique. Toutefois, on admet que l'erreur est négligeable parce que la durée de la période est faible; c'est en effet le temps nécessaire pour que deux palettes consécutives arrivent à la même position.

Considérons un temps θ très petit et calculons la variation de la force vive pendant ce temps. Soient V_0 et V_1 les vitesses moyennes en $A_0 B_0$ et $A_1 B_1$, et Q le débit, la masse de chacune des deux portions du liquide $A_0 B_0 A_0' B_0'$ et $A_1 B_1 A_1' B_1'$ est $\frac{Q\theta}{g}$; par suite la variation de la force vive est

$$\frac{1}{2}\frac{Q\theta}{g}\left(V_1^2 - V_0^2\right)$$

puisqu'on suppose que la vitesse des points compris entre $A_0' B_0'$ et $A_1 B_1$ n'a pas été modifiée.

Il faut maintenant évaluer le travail des forces. Considérons d'abord la pesanteur. Le filet $a_0 a_1$ a été transporté en $a_0' a_1'$ et le travail de la pesanteur qui dépend uniquement de l'abaissement du centre de gravité est le même que si la portion $a_0 a_0'$ était venue en $a_1 a_1'$. Si donc ϖ désigne le poids spécifique, δq le volume $a_0 a_1$, y_0 et y_1 les distances des points a_0 et a_1 aux niveaux correspondants, le travail de la pesanteur est pour le filet considéré

$$\varpi\, \delta q\, (H + y_1 - y_0)$$

~~Pour obtenir~~

Pour obtenir le travail des pressions sur les extrémités, on représentera par p_a la pression atmosphérique, et le travail de ces pressions est, pour le filet considéré

$$(p_a + \varpi y_0)\,\delta q - (p_a + \varpi y_1)\,\delta q$$

La somme de ces travaux étendue à tous les filets est donc

$$\Sigma\, \varpi\, \delta q\, H = H\, Q\, \theta$$

On négligera le travail des pressions de l'atmosphère et des parois des conduites, admettant ainsi que ces pressions ont lieu sans frottement, c'est-à-dire qu'elles sont normales.

Soient enfin, pendant l'unité de temps, T_m le travail transmis à la roue à la roue qui serait égal au travail des réactions de la roue sur le liquide si ces réactions avaient lieu sans frottement, et $\mathcal{T}_f$ un terme complémentaire correspondant aux frottements de la roue sur le liquide, et aux frottements internes, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\theta\left(V_0^2 - V_1^2\right) = Q H \theta - \mathcal{T}_m \theta - \mathcal{T}_f \theta$$

d'où

$$\mathcal{T}_m = Q\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right) - \frac{Q V_1^2}{2g} - \mathcal{T}_f .$$

Le travail $\mathcal{T}_m$ transmis à la roue croît avec le débit Q et la chute H. Le théorème montre ainsi qu'il y a avantage à ce que la vitesse V_0 soit la plus grande possible tandis qu'on doit chercher à diminuer V_1 et $\mathcal{T}_f$.

On appelle rendement d'un moteur hydraulique le rapport

$$\frac{\mathcal{T}_m}{Q\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

Ce rendement croît quand la vitesse V_1 et le travail $\mathcal{T}_f$ diminuent.

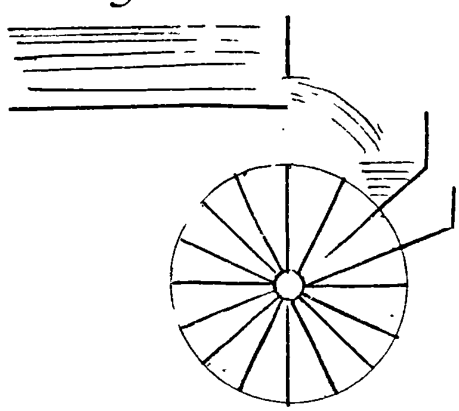
36 – **Classification des moteurs hydrauliques.** — Parmi les moteurs hydrauliques, les roues à axe horizontal ou roues hydrauliques et les roues à axe vertical ou turbines.

Les roues hydrauliques comprennent

1° les roues en dessus ou à augets,
2° les roues en dessous,
3° les roues de côté.

II – Roue à augets.

37 – **Disposition des roues à augets.** — La roue à augets se compose d'une jante cylindrique reliée à l'arbre par une série de rayons. Sur le pourtour sont disposés des augets, espaces égaux compris entre des aubes ou cloisons et limités latéralement par des joues.



Une portion du travail moteur est forcément perdue, car une partie de l'eau contenue dans un auget se déverse avant d'être arrivée à la partie inférieure. Néanmoins les roues peuvent fournir un rendement de 75 à 80 pour cent.

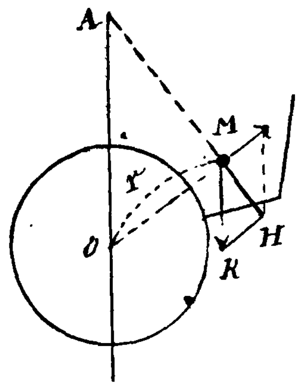
Soient Q le débit, q le poids d'eau recueilli dans un auget, N le nombre des augets et ω la vitesse angulaire de la roue, on a évidemment

$$\frac{q}{Q} = \frac{\frac{2\pi}{N}}{\omega}$$

d'où

$$q = \frac{2\pi Q}{N\omega}$$

38 – **Forme affectée par la surface libre de l'eau dans un auget.** – On supposera le liquide contenu dans chaque auget en équilibre relatif par rapport à la roue, bien que ce liquide possède un mouvement relatif qui, à la vérité, est fort lent. Cet équilibre relatif aura lieu sous l'action de la force centrifuge et de la pesanteur, de sorte qu'en un point quelconque M,



la résultante de ces deux forces est la normale à la surface du niveau. Les deux triangles semblables AOM, MKH donnent

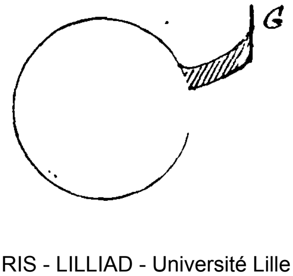
$$\frac{AO}{r} = \frac{MK}{KH} = \frac{mg}{m\omega^2 r}$$

d'où

$$AO = \frac{g}{\omega^2}.$$

La longueur AO étant indépendante de la position de la molécule et de celle de l'auget, il en résulte que les surfaces de niveaux sont des cylindres ayant pour traces sur le plan de la figure, des cercles qui ont pour centre le point O. On sait que la surface libre est précisément une surface de niveau. Quand la vitesse ω est très-petite, les surfaces de niveau sont sensiblement planes.

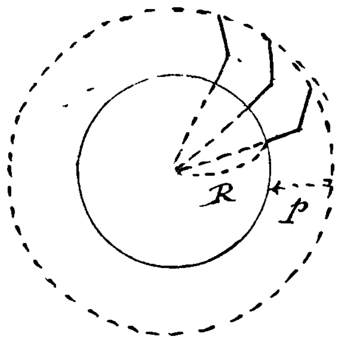
39 – **Détermination de la surface libre.** – Le poids spécifique de l'eau étant égal à l'unité, le volume de l'eau contenue dans un auget, est, comme son poids, représenté par $q = \frac{2\pi Q}{N\omega}$. Soit l la largeur de la roue, l'aire de la section faite dans le liquide par un plan normal à l'axe est égale à $\frac{2\pi Q}{lN\omega}$.



Il en résulte que pour obtenir la surface libre du liquide, pour une position déterminée de l'auget, il suffit de décrire, du point A comme centre un cercle interceptant une dire égale à la valeur précédente. On y parviendra par tâtonnements.

40 – Déversement du liquide. —

Le déversement du liquide commence quand le profil ainsi obtenu passe par le point G. On verra plus loin qu'il y a intérêt à retarder le déversement ; il faut pour cela diminuer ω le plus possible, afin d'élever le centre du cercle. Mais la vitesse angulaire de la roue ne peut descendre au-dessous d'une certaine limite sans quoi, on serait obligé de donner aux augets des dimensions exagérées. On s'arrange d'ordinaire de manière que le tiers environ de l'auget soit rempli. Soit p la distance à la jante de la roue du cercle qui limite extérieurement les augets, le volume de chaque auget est égal environ à



$$\frac{2\pi R l}{N} p,$$

d'où la condition

$$\frac{2\pi R l}{N} p = \frac{1}{3} \frac{2\pi Q}{N\omega},$$

$$Q = \frac{1}{3} l p R \omega.$$

41 – Évaluation du travail perdu par le déversement. —

Dans l'équation établie précédemment (No. 35)

$$\mathcal{T}_m = Q\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right) - Q\frac{V_1^2}{2g} - \mathcal{T}_f,$$

la seule quantité difficile à évaluer est $\mathcal{T}_f$. Ce terme comprend deux parties : l'une correspond au travail dû aux frottements du liquide dans l'auget, travail que l'on considérera comme négligeable ; l'autre beaucoup plus importante provient du déversement du liquide. Chaque molécule du liquide déversé arrive en effet dans le bief d'aval avec une certaine vitesse qui se trouve amortie par le frottement des molécules voisines. De là un travail sensible qu'il s'agit d'évaluer. A cet effet on supposera $V_1 = 0$, admettant ainsi que les vitesses des molécules considérées sont entièrement détruites par le frottement.

Appliquons alors le théorème des forces vives à un filet $a\,b\,c\,d$ pendant un temps θ. Soient q le volume, m la masse du liquide $a\,b\,a'\,b'$ et v' la vitesse en ab, la variation de force vive

de la force vive est égale à $-\frac{1}{2} m v'^2$, le travail de la pesanteur est $\varpi g h$; enfin le travail de la pression atmosphérique a pour valeur $p_a q - (p_a + \varpi h) q$. Désignant donc par t_f le travail du frottement interne pendant le temps θ, on a

$$-\frac{1}{2} m v'^2 = \varpi g h + p_a q - (p_a + \varpi h) q - t_f$$

d'où

$$t_f = \frac{1}{2} m v'^2$$

Si l'on fait la somme des quantités pour toutes les molécules tombant pendant l'unité de temps, on obtient

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{2} \Sigma m v'^2$$

La vitesse v' croît avec la hauteur de la chute qui suit le déversement, ce qui montre qu'il y a avantage à déterminer cette chute, c'est-à-dire à retarder le déversement.

XXXI —

42 — **Travail transmis à la roue.** — La valeur de $\mathcal{T}_f = \frac{1}{2} \Sigma m v'^2$ peut dès lors s'évaluer aisément. Soient en effet v la vitesse d'une molécule au moment où elle quitte l'auget, p son poids, z la hauteur de chute, on a

$$\frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} v'^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} v^2 + p z,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma m v'^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \Sigma p + \Sigma p z$$

$$\frac{1}{2} \Sigma m v'^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} Q + P \Sigma \frac{p z}{Q},$$

Q désignant le poids de l'eau qui se déverse dans l'unité de temps. Quant à la quantité $\Sigma \frac{p z}{Q}$, c'est la moyenne des hauteurs de chute des molécules qui se déversent. Il suffit évidemment d'en faire le calcul pour un seul auget.

Soient z_0 et z_1 les hauteurs du bord supérieur de l'auget au moment où le déversement commence et au moment où il se termine, z une hauteur intermédiaire, q_0, 0 et q les volumes correspondants de liquide contenus dans l'auget, la quantité à évaluer est

$$\frac{1}{q_0} \int_0^{q_0} z \, dq$$

On mesurera à cet effet un certain nombre de valeurs de q correspondants à des valeurs déterminées de z et on évaluera l'intégrale par un procédé approximatif. Pour cela il est avantageux de transformer l'intégrale précédente par l'intégration par parties qui donne

$$\frac{1}{q_0}\int_0^{q_0} z\,dq = \frac{1}{q_0}\left(q_0 z_0 - \int_{z_1}^{z_0} q\,dz\right),$$

car q étant la quantité mesurée, il est plus commode de calculer $\int q\,dz$ que $\int z\,dq$.

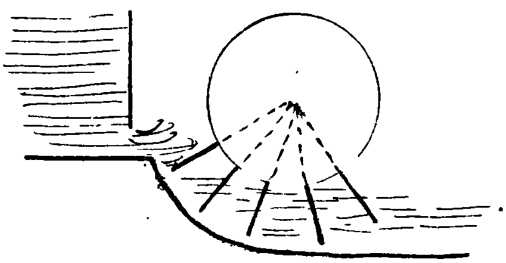
La quantité $\mathcal{T}_f$ se trouvant évaluée, tout sera connu dans la formule du N° 35; celle-ci permettra donc de calculer $\mathcal{T}_m$.

Poncelet a fait un certain nombre d'applications de cette méthode; les résultats sont vérifiés par l'expérience d'une manière très satisfaisante.

Parmi toutes les roues hydrauliques, la roue à augets est de beaucoup la meilleure; elle fournit un rendement excellent et doit être employée toutes les fois qu'on dispose d'une hauteur de chute suffisante.

III – Roue de côté.

43 – Description et mode de fonctionnement. — Quand la hauteur de chute devient insuffisante, on emploie la roue de côté. Cette roue est emboîtée dans un coursier circulaire qui, limité par des murs verticaux détermine des espèces d'augets entre les palettes planes de la roue.



Soient V la vitesse de l'eau à son arrivée, v sa vitesse à la sortie, que l'on supposera égale à celle des palettes de la roue; il est clair que c'est la différence de ces vitesses qui oblige la roue à tourner. Ainsi la roue de côté ne satisfait pas aux conditions que doit remplir un moteur hydraulique parfait: 1° parce qu'il y a un choc de l'eau contre les palettes, 2° parce que le liquide sort de la roue avec une vitesse sensible.

44 – Travail transmis à la roue. — Pour évaluer le travail transmis, il faut avoir recours à la formule générale

$$\mathcal{T}_m = QH + Q\frac{V_0^2}{2g} - Q\frac{V_1^2}{2g} - \mathcal{T}_f$$

V_0 est la vitesse dans le bief d'amont et peut être négligée ; la vitesse V_1 a été supposée égale à la vitesse v des palettes. La formule devient ainsi

$$\mathcal{E}_m = QH - \frac{Qv^2}{2g} - \mathcal{T}_f.$$

Il est avantageux de diminuer la vitesse de la roue, mais on va voir que le débit étant fixé, on ne peut abaisser cette vitesse au-dessous d'une certaine limite.

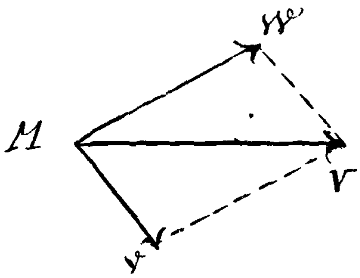
45. Détermination de la vitesse de la roue. — Soient l la longueur de la roue, b la distance des deux cercles qui limitent les palettes, a la longueur de l'arc intercepté sur le cercle extérieur par deux palettes consécutives le volume compris entre deux palettes, l'expression abl, on obtient une valeur trop forte, puisque la section est un trapèze mixtiligne et non un rectangle, et que l'on ne tient pas compte de l'épaisseur des palettes. Il sera plus exact de considérer ce volume comme représenté par

$$0,9\, bla$$

La plus faible valeur que l'on puisse donner à la vitesse de la roue correspond au cas où les augets seraient remplis, ce qui donne

$$\frac{v}{a}\, 0,9\, bla = Q \quad \text{ou} \quad 0,9\, blv = Q$$

46. — Evaluation du terme $\mathcal{T}_f$. — Le travail perdu $\mathcal{T}_f$ est dû aux frottements de l'eau sur les parois, frottements que l'on regardera comme négligeables, et surtout aux remous intérieurs qui amortissent la vitesse relative des molécules liquides par rapport aux palettes. Soit M une molécule qui arrive dans un auget



et dont la vitesse est V. Si l'on considérait le point M comme appartenant à la roue, sa vitesse serait v. La molécule possède donc par rapport à la roue une vitesse w, qui, composée avec v, donnerait V, et on a

$$w^2 = v^2 + V^2 - 2vV \cos(v, V),$$

formule dans laquelle V et $\cos(v, V)$ sont connues.

Si l'on choisit la vitesse v de telle sorte que l'angle v, w soit droit, la vitesse relative de la molécule par rapport à la roue, aura la direction de la palette, de sorte que le choc se trouvera évité. La condition pour qu'il en soit ainsi est

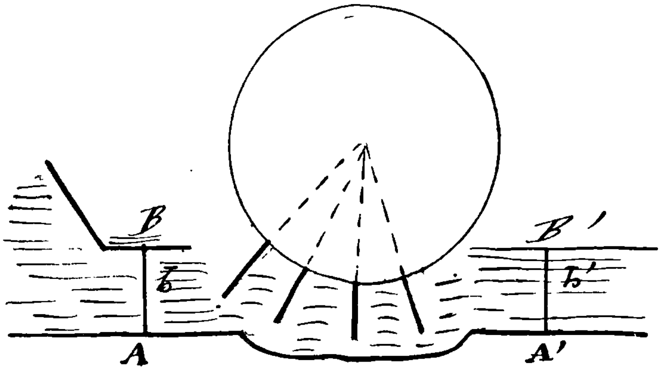
$$v = V \cos(v, V)$$

Par analogie avec le théorème de Carnot, on admet que la perte de travail due au remous est représentée par la force vive correspondant à la vitesse perdue. Or puisque l'on admet que l'eau arrive dans le bief d'aval avec la vitesse même de la roue, la vitesse w est entièrement anéantie par le remous, de sorte que l'on a

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{2} \sum m w^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} w^2.$$

IV. Roues en dessous.

47 – **Description et fonctionnement.** — Dans les roues en dessous, le coursier est un peu évidé à sa partie inférieure. C'est le choc de l'eau contre les palettes qui détermine le mouvement de la roue.



Soient deux sections transversales AB et A'B', V et V' leurs vitesses correspondantes.

La permanence du débit donne la relation

$$h l V = h' l V',$$

h et h' désignant les hauteurs du liquide et l la largeur du canal. On en déduit

$$\frac{h}{h'} = \frac{V'}{V}$$

La vitesse du liquide est déterminée par la résistance de la roue ; ainsi $V' < V$ donc h' est plus grand que h.

48 – **Travail transmis à la roue.** — On obtient une valeur approximative du travail transmis à la roue en appliquant le théorème des quantités de mouvement au liquide compris entre les sections AB et A'B'.

Soit Q le poids de l'eau qui s'écoule dans l'unité de temps, la variation de la quantité de mouvement dans un temps θ est $\frac{Q\theta}{g}(V'-V)$, et cette variation doit être égalée à l'impulsion pendant le temps θ des forces extérieures, savoir la pesanteur, la pression atmosphérique, les pressions sur les sections extrêmes et les réactions des palettes.

La pression atmosphérique a une résultante nulle, d'après le principe d'Archimède; il n'y a donc pas lieu d'y avoir égard. D'ailleurs si l'on projette sur un axe horizontal la pesanteur n'entrera pas dans l'équation.

Admettant que les réactions des palettes aient lieu sans frottement, ces réactions seront égales et opposées aux actions que l'eau exerce sur la roue. On négligera l'inclinaison de ces actions sur l'horizontale et on représentera par F leur résultante.

Les pressions sur les sections extrêmes sont

$$\varpi h l \times \frac{h}{2} \qquad \text{et} - \qquad \varpi h' l \frac{h'}{2}$$

de sorte qu'on a l'équation

$$\frac{Q\theta}{g}(V'-V) = \frac{\varpi l}{2}(h^2 - h'^2)\,\theta - F\theta,$$

d'où

$$F = \frac{Q}{g}(V-V') - \frac{\varpi}{2} l (h'^2 - h^2)$$

On obtiendra le travail $\mathcal{T}_m$ de la force F pendant l'unité de temps, c'est-à-dire le travail transmis à la roue, en multipliant F par V', c'est-à-dire par le déplacement du point d'application, en admettant que la vitesse V' est la vitesse même de la roue. Ainsi

$$\mathcal{T}_m = \frac{Q}{g}(V-V')V' - \frac{\varpi l h' V'}{2}\left(h' - \frac{h^2}{h'}\right)$$

ou, comme $\varpi l h' V' = Q$,

$$\mathcal{T}_m = \frac{Q}{g}(V-V')V' - \frac{Q h}{2}\left(\frac{h'}{h} - \frac{h}{h'}\right),$$

enfin, puisque $\frac{h'}{h} = \frac{V}{V'}$,

$$\mathcal{T}_m = \frac{Q}{g}(V-V')V' - \frac{Q h}{2}\left(\frac{V}{V'} - \frac{V'}{V}\right)$$

49 – Maximum du travail transmis. — Les données sont h et V. On peut se proposer de déterminer V' de manière à obtenir pour $\mathcal{T}_m$ la valeur la plus satisfaisante. Posant à cet effet $\frac{V'}{V} = x$, il vient

$$\mathcal{T}_m = \frac{Q V^2}{g}\left[2x(1-x) - \frac{hg}{V^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right]$$

Si l'on néglige la différence $b'-b$ devant la chute totale H, on a $\frac{V^2}{2g} = H$, donc $\frac{QV^2}{2g}$ représente le travail disponible et la parenthèse est le rendement du moteur. Pour obtenir son maximum, il suffit d'égaler à zéro la dérivée, ce qui donne

$$1\ 2x + \frac{bg}{2V^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0.$$

Comme $\frac{bg}{V^2}$ est très petit, on a à peu près $x = \frac{1}{2}$. D'ailleurs les valeurs de x correspondant à diverses valeurs de $\frac{bg}{V^2}$ sont renfermées dans le Tableau suivant

$\frac{bg}{V^2}$	x	rendement
0,00	0,500	0,500
0,05	0,553	0,431
0,10	0,595	0,373

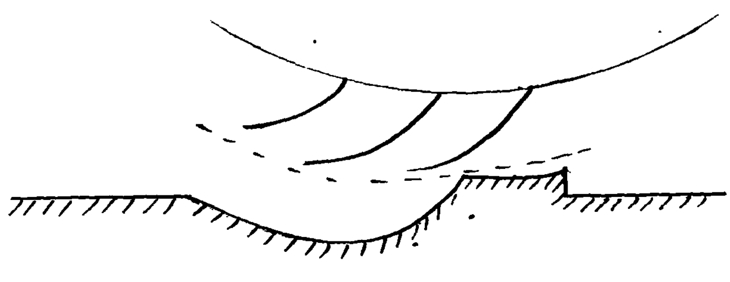
D'après ce tableau, il faudrait pour obtenir le rendement maximum, attribuer à x une valeur toujours plus grande que $\frac{1}{2}$. Mais l'expérience a fait reconnaître que le rendement est maximum pour $x = 0,40$ environ.

La théorie est donc imparfaite. La différence que l'on vient d'indiquer tient peut-être à ce que la vitesse que l'eau conserve à sa sortie n'est pas égale à celle de la roue, contrairement à ce que l'on a supposé.

Quoiqu'il en soit, quand on fait dans la formule $x = 0,40$, elle fournit pour le rendement une valeur sensiblement égale à celle qui résulte de l'expérience.

V - Roues à aubes courbes de Poncelet.

50 - Description. — Le profil du coursier est représenté par la figure ci-jointe.

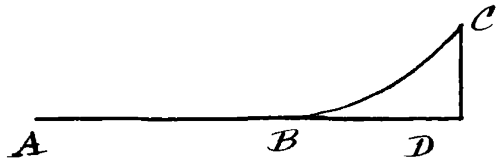


Il se compose d'une droite, d'une courbe dont la forme sera indiquée ultérieurement, d'un cercle suivi d'une portion de verticale, enfin d'une horizontale.

Le profil des aubes est courbe.

On supposera le rayon de la roue assez grand pour que le mouvement des aubes puisse être remplacé par une translation pendant le temps où elles sont en contact avec l'eau.

51 – **Condition** que l'on devrait réaliser pour éviter les chocs et les pertes de force vive. Considérant un plan AB sur lequel se meut une veine liquide infiniment mince avec une vitesse V et une surface cylindrique de profil BC se déplaçant avec une vitesse v parallèlement à AB, il est clair que V étant supérieur à v,



le liquide tend à monter le long de BC'. Le choc sera évité si le profil BC est tangent en B à AB.

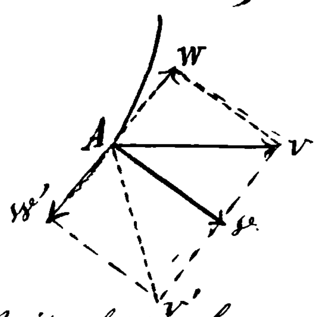
Si l'on admet que le mouvement des molécules sont indépendants les uns des autres, une molécule arrivant en B avec la vitesse V s'élèvera jusqu'à un point C tel que $CD = \frac{(V-v)^2}{2g}$; puis elle descendra et reviendra en B avec une vitesse relative $V-v$ dirigée de B vers A. La vitesse absolue regardée comme dirigée dans le sens AB sera $V-2v$ et elle s'annulera si l'on fait $v = \frac{V}{2}$. Dans ce cas, la molécule sortira avec une vitesse nulle.

Si la roue Poncelet pouvait fonctionner de cette manière, elle constituerait un moteur parfait, car l'eau y arrivant sans choc en sortirait sans vitesse.

52 – **Fonctionnement de la roue Poncelet.** – Les conditions que l'on a supposées au numéro précédent ne sont pas celles où fonctionne la roue Poncelet. On a en effet fait abstraction des réactions mutuelles des molécules, de plus on a négligé l'épaisseur de la veine; enfin les aubes ne peuvent être tangentes au profil intérieur du coursier car, dans le mouvement de rotation, chacune des aubes viendrait successivement obstruer le passage de la veine.

D'ailleurs, le mouvement d'une aube, ne peut, sans erreur sensible, être assimilé à une translation parallèle de la veine.

Soient A le point où une molécule vient rencontrer l'aube, AV la vitesse absolue de cette molécule, Av la vitesse du point A considéré comme appartenant à la roue. La vitesse relative AW de la molécule se détermine par la règle du parallélogramme, et le choc sera évité si le profil de l'aube est tangent à AW.



Mais alors la molécule ne pourra plus sortir de l'aube sans vitesse; en effet, après s'être élevée dans l'aube à une certaine hauteur, elle reviendra en A avec une vitesse relative AW' égale et opposée à AW. et la vitesse absolue AV' s'obtiendra par la règle du parallélogramme, en composant AW' avec AV. La vitesse AV' de la molécule à sa sortie ne pourrait être nulle que si l'angle α formé par la vitesse de l'eau et celle de la roue était égal à zéro.

Mais il est évidemment avantageux de réduire la vitesse AV à son minimum. Si l'on remarque que l'angle α est donné, il est clair que cette condition sera satisfaite quand le triangle $v\,A\,W$ sera isocèle, ce qui donne la condition

$$W' = v$$

D'ailleurs, dans ce cas

$$V = 2v\cos\alpha, \qquad V' = 2v\sin\alpha$$

et par suite

$$V' = V\,\operatorname{tang}\alpha$$

On s'arrange d'habitude de manière que l'angle α soit égal à 15°. Il est nécessaire de déterminer convenablement la forme du coursier pour que cet angle soit à peu près le même pour tous les filets, malgré l'épaisseur de la veine. La forme la plus avantageuse est celle d'une développante de cercle.

52 – **Rendement de la roue Poncelet.** — Chaque molécule sortant de la roue, avec une vitesse V' se rend dans le bief d'aval, où sa vitesse s'annule. Le travail des frottements qui annulent cette vitesse s'évaluerait comme on l'a fait pour les roues en dessus, et l'on obtiendrait pour l'ensemble des molécules qui s'écoulent dans l'unité de temps.

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V'^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2\operatorname{tang}^2\alpha.$$

Dans les circonstances ordinaires, la valeur de $\mathcal{E}_f$ ainsi calculée, est les 7 centièmes environ du travail moteur.

En réalité, le rendement ne dépasse guère 0,65. La théorie ne permet donc pas d'en calculer exactement la valeur, mais elle fait comprendre quel perfectionnement le système de Poncelet a apporté aux roues en dessous.

XXXII – VI – Turbines.

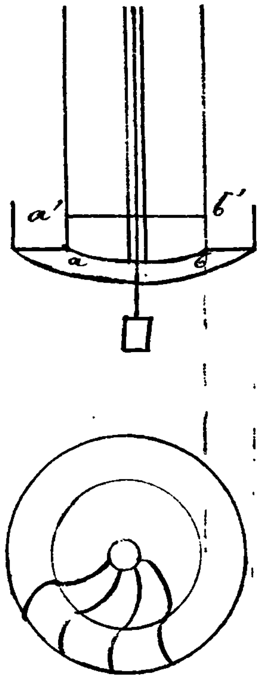
53 – Supposons que l'eau soit obligée de parcourir une aube courbe, le liquide éprouvera une réaction normale à l'aube et inversement, exercera sur cette dernière une réaction égale et contraire. Il en résulte que si l'aube est fixée à un axe vertical mobile, celui-ci prendra un mouvement de rotation.

Ce système constitue une turbine.

54 – Turbine Fourneyron. —

(Voir la description et la figure à la page suivante.)

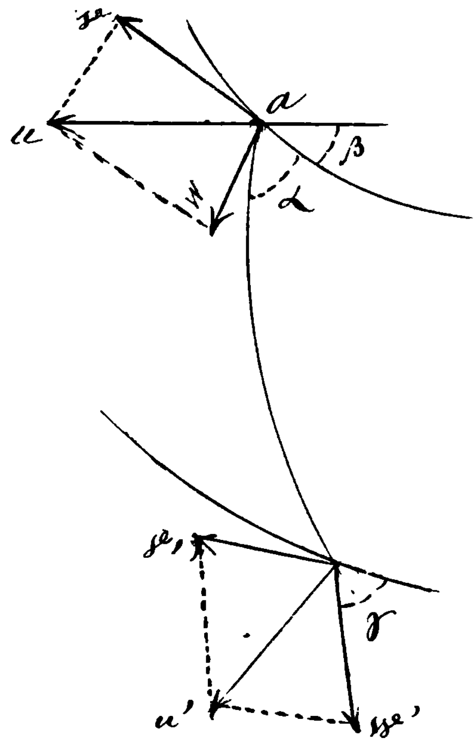
54 – Turbine Fourneyron. — La turbine Fourneyron est constituée par un cylindre vertical fermé à la partie ~~inférieure~~ et dont la portion comprise entre les plans $a\,b$, $a'\,b'$ est enlevée. Le fond est supporté par un tuyau dit porte-fond. Ce cylindre est divisé à sa partie inférieure par des aubes qui dirigent le liquide dans son écoulement latéral. Autour de la partie enlevée se trouve une couronne munie d'aubes courbes mais dirigées en sens inverse de celles du cylindre. Cette couronne peut tourner autour d'un axe vertical.



Le niveau du liquide est plus élevé dans le cylindre qu'à l'extérieur. La couronne est d'ailleurs entièrement noyée.

Représentant par h et h' les niveaux du liquide au-dessus du plan moyen de la couronne, dans le cylindre et à l'extérieur, il est évident que la hauteur de chute est $h-h'$.

55 – Théorie de la turbine Fourneyron. — Considérons la section de l'appareil par le plan moyen de la couronne, et soit $a\,b$ l'une des aubes de cette couronne.



Représentant par u la vitesse absolue d'une molécule liquide à l'instant où elle arrive en a et par v la vitesse du point a de la couronne, on obtient au moyen du parallélogramme, la vitesse relative w de la molécule par rapport à la couronne; pour que le choc soit évité, il suffit que le profil de l'aube soit tangent à w en a.

Soit w' la vitesse relative de la molécule à sa sortie de la couronne, on obtiendra sa vitesse absolue u' en composant w' avec la vitesse v' du point b.

Ces diverses vitesses sont liées aux angles α, β, γ que forment les aubes du cylindre et de la couronne avec les circonférences et aux pressions p et p' du liquide aux points a et b par un certain nombre de relations.

Désignant par p_a la pression atmosphérique, le théorème de Torricelli fournit l'équation

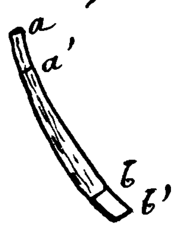
$$(1) \qquad u^2 = 2g\left(h + \frac{p_a - p}{\varpi}\right)$$

Le triangle $\alpha\, u\, v$ donne les relations

$$(2) \qquad w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta$$

$$(3) \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$$

Considérons un filet liquide suivant le profil ab, et appliquons le principe des forces vives pendant un temps très-petit; m désignant la masse du liquide aa' la variation de force vive est $\frac{1}{2}m(w'^2 - w^2)$; le travail des pressions aux deux extrémités a pour valeur $\frac{mg}{\varpi}(p-p')$. Le travail de la pesanteur étant nul puisque le mouvement est horizontal, il reste à évaluer le travail des forces apparentes qui se réduisent ici à la force centrifuge. Soit x le rayon correspondant à un point quelconque du filet, r et r' les rayons extrêmes; le travail des forces est



$$\int_r^{r'} m\,\omega^2 x\,dx = \frac{m\omega^2}{2}(r'^2 - r^2)$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} m(w'^2 - w^2) = \frac{mg}{\varpi}(p-p') + \frac{m\omega^2}{2}(r'^2 - r^2),$$

d'où en remarquant que $\omega r = v$, $\omega r' = v'$,

$$(4) \qquad w'^2 - w^2 = \frac{2g}{\varpi}(p - p') + v'^2 - v^2.$$

Si l'on admet qu'au point b le mouvement est assez lent pour que la pression suive la loi hydrostatique, on trouve pour la pression en ce point

$$(5) \qquad p' = p_a + \varpi h'.$$

Il reste à exprimer la permanence du débit. Soit ds un élément de la circonférence intérieure, on a

$$Q = \int u\, ds \sin\beta = 2\pi r u \sin\beta,$$

de même sur la circonférence extérieure

$$Q = 2\pi r' w' \sin\gamma,$$

d'où l'équation

$$(6) \qquad r u \sin\beta = r' w' \sin\gamma$$

Le triangle $b\, v' u'$ donne.

$$(7) \qquad u'^2 = v'^2 + w'^2 - 2 v' w' \cos\gamma$$

On ne pourrait calculer la vitesse de sortie u' qu'en faisant $\gamma = 0$, ce qui est impossible puisque la valeur du débit contient $\sin\gamma$ en facteur. On se borne à prendre pour γ une valeur aussi petite que possible, et la valeur de γ étant fixée, on rendra u' maximum en réalisant la condition

$$(8) \qquad v' = w'.$$

Enfin, on a la relation évidente

$$(9) \qquad \frac{v}{v'} = \frac{r}{r'}$$

On obtient de cette manière 9 équations entre 13 quantités, savoir les six vitesses, les pressions p et p', les angles α, β, γ et les rayons r et r'.

56 – Rendement de la turbine Fourneyron. — On peut déduire des 9 équations précédentes six équations résolues par rapport aux vitesses. Ajoutant d'abord les (3) et (4) et tenant compte de (5), on trouve

$$u^2 + w'^2 - w^2 = 2gH + v'^2 - v^2,$$

et puisque $w'^2 = v'^2$,

$$u^2 - w^2 = 2gH$$

Ajoutant cette dernière avec l'équation (2), il vient

$$u\,v \cos\beta = gH.$$

D'autre part en portant dans (6) les valeurs de W' et v' déduites des équations (8) et (9), on obtient

$$r\,u \sin\beta = \frac{r'^2}{r}\, v \sin\gamma$$

ou

$$\frac{u}{v} = \frac{r'^2}{r^2}\;\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

Les valeurs de uv et de $\frac{u}{v}$ étant obtenues, on trouve aisément

$$u^2 = gH\,\frac{r'^2}{r^2}\;\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$v^2 = gH\,\frac{r^2}{r'^2}\;\frac{\tang\beta}{\sin\gamma},$$

d'où l'on conclut W.

Les équations (8) et (9) deviennent alors

$$v'^2 = W'^2 = \frac{r'^2}{r^2}\, v^2 = gH\;\frac{\tang\beta}{\sin\gamma}$$

Enfin l'équation (7) devient

$$u'^2 = 2v'^2(1-\cos\gamma)$$

C'est avec la vitesse u' que l'eau sort de la turbine. De là résulte une perte de travail représentée par l'expression

$$T_f = \frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,u'^2 = \frac{Q}{g}\,v'^2(1-\cos\gamma)$$

ou

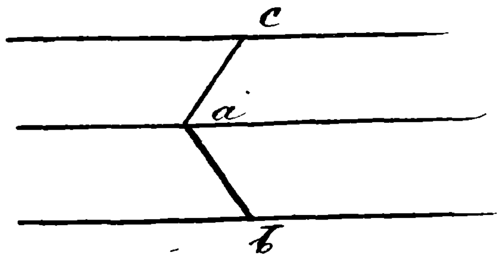
$$T_f = QH\,\frac{\tang\beta}{\sin\gamma}(1-\cos\gamma) = QH \tang\beta \tang\frac{\gamma}{2}$$

Le produit QH est le travail disponible correspondant à la hauteur de chute H. Le travail transmis a pour valeur $QH - T_f$; ainsi

$$T_m = QH\left(1 - \tang\beta \tang\frac{\gamma}{2}\right)$$

de sorte que le rendement de la machine $\frac{T_m}{QH}$ est représenté par $1 - \tang\beta \tang\frac{\gamma}{2}$.

57 - Turbine Fontaine. — La turbine Fontaine a été imaginée par Euler.



L'eau est encore guidée dans le cylindre fixe et dans le cylindre mobile par des aubes; mais ici les aubes sont superposées. La figure ci-jointe qui suppose le cylindre développé, montre la disposition des aubes; ac est l'aube fixe et ab l'aube mobile.

Il existe encore d'autres types de turbines. L'une d'entre elles n'est autre qu'une roue Poncelet à axe vertical.

VII - Rendement des moteurs hydrauliques.

58 - Dans cette étude rapide des principaux moteurs hydrauliques, on a eu surtout en vue l'évaluation du rendement. L'expression de rendement appliquée à un moteur n'a pas tout-à fait la même signification que lorsqu'il s'agit d'une machine. Dans ce dernier cas, le rendement est le rapport du travail utile au travail moteur, tandis que le rendement des moteurs est le rapport entre le travail moteur et le travail disponible. Pour évaluer ce rendement, on n'a donc pas à se préoccuper de la machine qui est associée au moteur, ni même des résistances passives telles que les frottements de l'arbre d'une roue hydraulique sur ses appuis. Il suffit de calculer le travail transmis à cette roue, travail qui se trouve ensuite utilisé d'une manière plus ou moins parfaite.

Si l'on considère la formule générale

$$\tau_m = QH + Q\frac{V_0^2}{2g} - Q\frac{V_1^2}{2g} - \tau_f,$$

on pourra généralement supposer nulles les vitesses V_0 et V_1, ce qui revient à considérer des sections assez éloignées de la roue. On aura alors

$$\tau_m = QH - \tau_f.$$

Le travail disponible est QH et le rendement est représenté par $\frac{\tau_m}{QH}$, quantité nécessairement inférieure à l'unité.

XXXIII - Chapitre VI.

Machines thermiques.

I. Machines à gaz.

59 - Rappel des propriétés des Gaz. — On appelle machine thermique toute machine destinée à transformer la chaleur en travail. Un corps quelconque peut servir à effectuer cette transformation. Mais les propriétés des gaz envisagés au point de vue de la Thermodynamique, avaient, pendant quelque temps, fait espérer que les gaz étaient destinés à fournir des résultats particulièrement avantageux.

La formule établie en thermodynamique

$$dq = C\,dt + Ap\,dv$$

donne en intégrant de t_0 à t_1

$$q = C(t_0 - t_1) + A\int p\,dv,$$

où $\int p\,dv$ représente le travail intérieur. Si l'on suppose $t_1 = t_0$ on a $q = A\int p\,dv$, de sorte que toute la chaleur absorbée est transformée en travail extérieur.

On sait que cette conclusion se trouve vérifiée par l'expérience de Joule, laquelle démontre nettement que dans un gaz, le travail intérieur est nul.

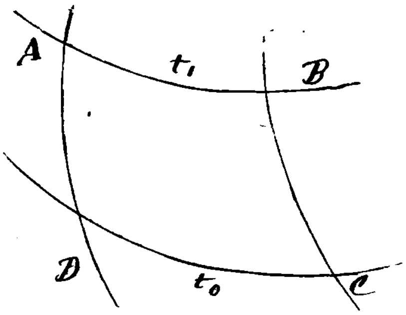
Considérant en effet l'équation

$$Eq = \Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 + \Delta u - \tau_e$$

conséquence du principe de la conservation de l'énergie. On sait que, dans l'expérience de Joule, il n'y a ni chaleur dégagée ni variation de température. Ainsi $q = 0$ et $\Delta\theta_0 = 0$, puisque la quantité θ, qui représente la force vive thermique détermine la valeur de la température. Le terme τ_e correspond au travail de la pesanteur; il est sensiblement nul; enfin $\Delta\theta_0 = 0$ puisque les molécules sont en repos, au commencement et à la fin de l'expérience. Donc $\Delta u = 0$, en d'autres termes, le travail intérieur est nul.

C'est par suite de cette propriété qu'on fondait de grandes espérances sur les machines à gaz. Mais pour la marche continue de travail d'une machine, il est nécessaire que le corps qui sert de véhicule à la chaleur décrive un cycle, c'est-à-dire repasse périodiquement par l'état initial, et il est clair que, dans ces conditions, l'influence du travail intérieur disparaît.

60 - Coefficient économique. — Cycle de Carnot. — Considérons un cycle de Carnot et désignons par q_1 la quantité de chaleur absorbée le long de AB et par q_0 celle que le corps cède le long de CD. La chaleur convertie en travail est $q_1 - q_0$.



On appelle <u>coefficient économique</u> le rapport

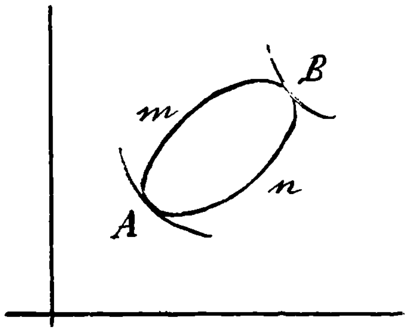
$$\frac{q_1 - q_0}{q_1} = \mathcal{E}$$

Ce coefficient est plus petit que l'unité; mais il y a intérêt à l'augmenter autant que possible, puisque la chaleur q_0 doit être regardée comme perdue.

D'après le théorème de Carnot,

$$\mathcal{E} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

61 - Coefficient économique dans un cycle quelconque. — Considérons un cycle quelconque et soient A et B les points de contact des deux lignes adiabatiques tangentes au cycle. Désignons par q_1 la chaleur absorbée le long de AmB et par q_0 la chaleur cédée le long de BnA, le coefficient économique est encore défini par



$$\mathcal{E} = \frac{q_1 - q_0}{q_1}$$

Il est facile de montrer que l'on a, en général $\mathcal{E} < \frac{T_1 - T_0}{T_1}$, T_1 et T_0 désignant la température minimum du cycle, de sorte que le cycle de Carnot est celui qui possède le coefficient économique maximum.

En effet, en représentant par μ l'entropie, on a $dq = T\,d\mu$ et la valeur de q_1 s'obtiendra en intégrant l'expression précédente le long de AmB. Or, tous les termes étant positifs, le long de AB, on a

$$q_1 < T_1(\mu_1 - \mu_0)$$

et l'on trouverait de même

$$q_0 > T_0(\mu_1 - \mu_0)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{q_0}{q_1} > \frac{T_0}{T_1},$$

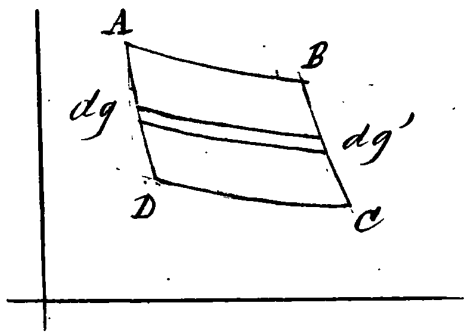
$$1-\frac{q_0}{q_1} < 1-\frac{T_0}{T_1}$$

$$\varepsilon < \frac{T_1-T_0}{T_1}$$

Dans une machine thermique, les températures t_1 et t_0 sont comprises entre 300° et 0°, de sorte que la valeur maximum de $\frac{T_1-T_0}{T_1}$ est d'environ $\frac{1}{2}$.

Il n'est pas inutile de faire remarquer que le coefficient économique ε ne doit pas être confondu avec le rendement.

62 — Des cycles dont le coefficient économique est le même que pour le cycle de Carnot. — Supposons que les deux lignes adiabatiques du cycle de Carnot soient remplacées par d'autres courbes AD et BC pour lesquelles les quantités $\int \frac{dq}{T}$ aient des valeurs égales et de signes contraires, on aura d'après le théorème de Clausius,



$$\frac{q_1}{T_1} - \frac{q_0}{T_0} = 0.$$

Le coefficient économique aura donc la même valeur que dans le cycle de Carnot.

Soit $F(p,v)=0$ l'équation de la courbe AD. Cherchons l'équation de la courbe BC. A cet effet, considérons deux isothermes infiniment voisins et soient dq, p, v; dq', p', v', les quantités qui se rapportent aux deux éléments interceptés sur AD et BC. On a

$$dq = c\,dt + Ap\,dv$$
$$dq' = c\,dt + Ap'\,dv'.$$

Les deux quantités dq et dq' sont égales si $p\,dv = p'\,dv'$. Or, on a $pv = p'v'$, d'où

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv'}{v'},$$

par suite

$$\frac{v}{v'} = \text{Constante} = K,$$

d'où

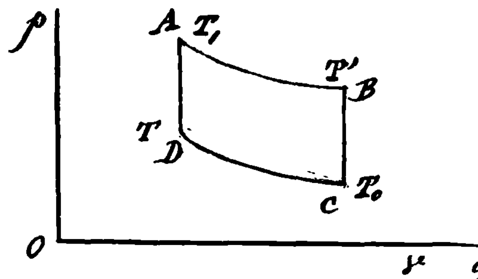
$$\frac{p}{p'} = \frac{1}{K}$$

L'équation de la courbe B C est donc

$$F\left(\frac{p'}{K}, \; K v'\right) = 0$$

Si, par exemple, la première équation est v = Constante ou p = Constante, la deuxième équation aura la même forme.

63 – **Cycle de la machine de Stirling.** – Ce cycle se compose de deux adiabatiques et de deux parallèles à l'axe des pressions.



Soient q_1 la chaleur absorbée par le corps le long de DA et q_0 la chaleur cédée le long de BC, on a

$$q_1 = c\,(T_1 - T)$$

$$q_0 = c\,(T' - T_0)$$

d'où pour la chaleur consommée

$$q_1 - q_0 = c\,(T_1 - T + T_0 - T')$$

Mais le théorème de Clausius donne

$$\int \frac{dq_1}{T} - \int \frac{dq_0}{T} = 0.$$

Or, sur toute parallèle à Op, dq se réduit à c dt, donc la relation précédente devient

$$\left(\int \frac{dt}{T}\right)_1 = \left(\int \frac{dt}{T}\right)_0,$$

la première intégrale étant prise le long de DA, la deuxième le long de BC. On en déduit

$$l\,\frac{T_1}{T} = l\,\frac{T'}{T_0},$$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{T'}{T_0}$$

On obtient pour le coefficient économique

$$\varepsilon = \frac{q_1 - q_0}{q_1} = 1 - \frac{T' - T_0}{T_1 - T}$$

et puisque

$$\frac{T_1 - T}{T} \equiv \frac{T' - T_0}{T_0},$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_0}{T},$$

valeur inférieure à celle qui correspond au cycle de Carnot, savoir $1 - \frac{T_0}{T_1}$.

Pour rendre $q_1 - q_0$ maximum, il suffit de faire $T + T'$ minimum. Or le produit $T\,T'$ est égal à $T_1 T_0$. Donc le maximum de $q_1 - q_0$ a lieu pour $T = T' = \sqrt{T_1 T_0}$ et alors ε prend la valeur

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}$$

Dans la pratique, on ne réalise jamais des transformations rigoureusement adiabatiques, ni même des transformations isothermes. Toute transformation réalisée dans une machine est intermédiaire entre les isothermes et les adiabatiques. Dans le cycle précédent, si AB et DC étaient des isothermes, on obtiendrait le même coefficient économique que dans le cycle de Carnot. La valeur de ce coefficient est donc dans la pratique, supérieure à l'expression qui vient d'être obtenue.

Un calcul tout semblable au précédent s'appliquerait au cycle de la machine d'Ericson, qui est composé de deux lignes adiabatiques et de deux parallèles à l'axe des volumes.

64 – Rendement des machines thermiques. – Si l'on confondait le rendement d'une machine thermique avec le coefficient économique, on obtiendrait des valeurs dérisoires. C'est qu'on ne doit pas considérer comme travail disponible le travail Eq_1 correspondant à la chaleur absorbée. On a démontré, en effet qu'en se plaçant dans les conditions les plus favorables, on ne pourrait utiliser qu'une fraction de ce travail. En réalité, on doit considérer le rendement d'une machine thermique comme le rapport de son coefficient économique à celui d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes limites de température.

Zeuner a justifié ce mode d'évaluation par la comparaison suivante.

Soient, dans une chute d'eau, h_1 et h_0 les hauteurs des deux biefs au-dessus du niveau de la mer, et posons

$$\tau_1 = Ph_1, \qquad \tau_0 = Ph_0.$$

τ_1 représente le travail que produirait, dans l'unité de temps, la chute de l'eau du niveau supérieur au niveau de la mer. On peut alors écrire

$$PH = P(h_1 - h_0) = \tau_1 \frac{h_1 - h_0}{h_1},$$

formule tout-à-fait analogue à

$$q_1 - q_0 = q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

Le niveau de la mer joue dans la première formule le rôle que joue dans la seconde le zéro absolu de température. Or dans le moteur hydraulique on se garde bien de comparer le travail transmis à τ_1, mais on le compare à PH, maximum de la valeur que puisse atteindre le travail moteur.

Les développements qui précèdent, dus principalement à Stirn et à Zeuner montrent que les espérances fondées sur les machines à gaz étaient fort exagérées. Elles ne sont certes pas appelées à remplacer les machines à vapeur.

63 – **Evaluation du rendement.** — Si l'on considère un cycle fonctionnant entre deux températures déterminées, le coefficient économique $\varepsilon = \frac{q_1 - q_0}{q_1}$ a sa valeur maximum dans le cycle de Carnot. On peut donc poser

$$\varepsilon_m = \frac{T_1 - T_0}{T_1}.$$

Quant au travail produit par le cycle, il a pour expression

$$\tau = E(q_1 - q_0) = Eq_1\varepsilon.$$

Donc, parmi tous les cycles fonctionnant entre deux températures T_1 et T_0 et pour lesquels la quantité q_1 a la même valeur, c'est le cycle de Carnot qui fournit le plus de travail,

$$\tau_m = Eq_1\varepsilon_m.$$

Stirn a défini rendement d'un cycle le rapport $\frac{\tau}{\tau_m}$ lequel n'est autre que $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}$. En désignant ce rendement par ρ, on a donc

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}.$$

Considérons par exemple, le cycle de la machine de Stirling. On a, dans ce cas,

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_0}{T}, \qquad \varepsilon_m = 1 - \frac{T_0}{T_1},$$

d'où

$$\rho = \frac{1 - \frac{T_0}{T}}{1 - \frac{T_0}{T_1}}$$

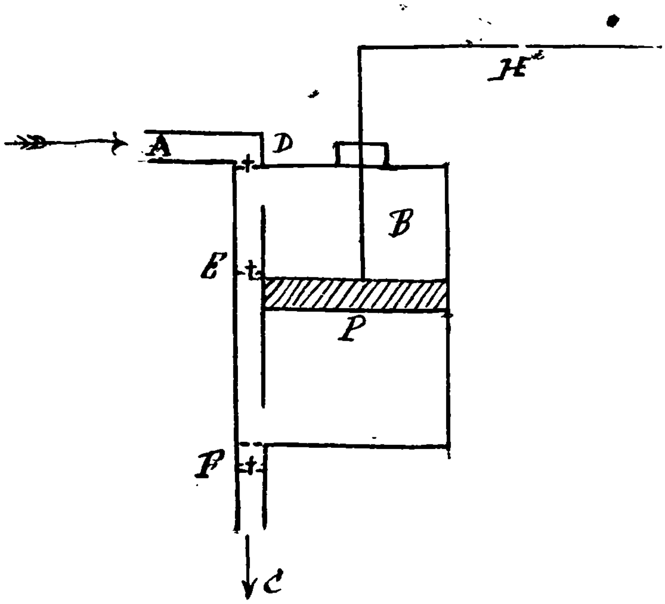
Si l'on prend $T = \sqrt{T_0T_1}$, auquel cas, la chaleur consommée est maximum, on a

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}}{1 - \frac{T_0}{T_1}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}}.$$

XXXIV - II - Notions générales sur les Machines à Vapeur.

66 - Principe de la machine de Watt à simple effet. — On va d'abord rappeler en quelques mots le fonctionnement de la machine de Watt à simple effet. On sait qu'une machine est dite à simple effet, quand la vapeur n'agit que sur l'une des deux faces du piston.

La disposition du corps de pompe est représentée par la figure.



A conduit d'arrivée de la vapeur

B corps de pompe

P piston

C condenseur

D soupape d'admission

E soupape d'équilibre

F soupape d'échappement

H balancier.

Le piston étant en haut de sa course, on ouvre D et F et on ferme E. La pression de la vapeur s'exerce sur la face supérieure du piston qui s'abaisse de sorte que le balancier s'incline. Le piston étant parvenu au bas de sa course, on ferme F et on ouvre E. La pression est la même sur les deux faces du piston, de sorte que si le balancier est muni d'un contre-poids, le piston remonte, et ainsi de suite.

Le balancier fait mouvoir trois pompes : l'une alimente le condenseur en y introduisant de l'eau froide ; la deuxième dite pompe à air enlève une portion de l'eau du condenseur et en même temps l'air qui s'y trouve introduit peu à peu ; la troisième alimente la chaudière au moyen de l'eau du condenseur.

67 - Détente. — Watt apporta bientôt un perfectionnement notable au système précédent en introduisant la détente. Supposons que l'on ferme D avant d'ouvrir E, la vapeur se détendra en continuant d'agir sur le piston.

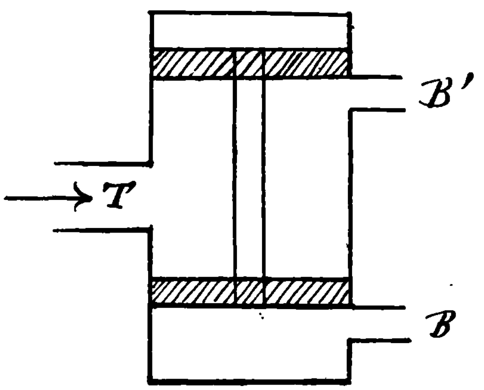
Soient V le volume de vapeur introduit quand elle agit constamment à pleine pression et T le travail effectué, $\frac{V}{n}$ le volume introduit dans le cas où il existe une détente. Pendant que la vapeur agit à pleine pression, elle effectue un travail $\frac{T}{n}$, et pendant la détente un travail T'. Le travail correspondant à l'unité de volume du gaz est ainsi

$$\frac{\frac{T}{n}+T'}{\frac{V}{n}} = \frac{T+nT'}{V}$$

tandis que dans le premier cas, il est égal à $\frac{T}{V}$. On voit ainsi que le travail de la vapeur est augmenté par la détente.

68 – Machine à double effet. — Tiroir. —

C'est encore Watt qui imagina la machine à double effet dans laquelle la vapeur agit alternativement sur les deux faces du piston. Le dispositif qui réalise le double effet est le tiroir.



La figure représente la section de la boîte à vapeur de Watt.

La vapeur arrive par le tuyau T. La boîte à vapeur communique avec la partie inférieure et avec la partie supérieure du corps de pompe par les orifices B et B'. Le tiroir formé par deux pistons solidaires est mobile dans la boîte à vapeur.

Dans la position indiquée par la figure, c'est la face supérieure du piston qui reçoit la pression de la vapeur; quand le tiroir est abaissé, c'est la face inférieure.

69 – Différents types de machines à vapeur.

On distingue les machines à basse, moyenne ou haute pression suivant que la pression de la vapeur est comprise entre 1 atmosphère et 1 atm. 1/2, entre 1 atm. 1/2 et 4 atm., ou enfin entre 4 atm. et 10 atmosphères;

les machines avec ou sans condensation, il est clair que les premières sont les plus avantageuses;

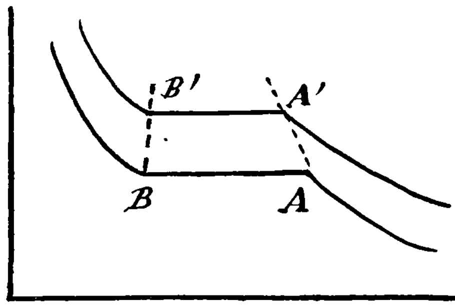
les machines avec ou sans détente, la détente pouvant être fixe ou variable;

les machines à balancier ou à connexion directe.

III. Théorie des Machines à vapeur.

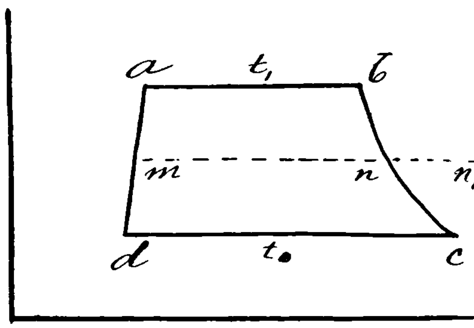
70 – **Cycle.** – Dans toute machine à condensation, l'eau décrit un cycle. Elle se vaporise dans la chaudière, passe dans le corps de pompe, puis dans le condenseur où elle se liquéfie; elle revient ensuite dans la chaudière où elle se vaporise de nouveau.

Nous supposerons la détente complète, c'est-à-dire le volume du corps de pompe assez grand pour que toute la vapeur se détendant adiabatiquement, puisse descendre à la pression du condenseur. Ce sont évidemment les conditions les plus favorables.



On a vu en thermodynamique que la courbe isothermique d'un mélange de liquide et de vapeur à une température déterminée présente une partie horizontale AB. Le lieu du point A est la courbe de transformation de la vapeur saturée sèche, le lieu du point B, la courbe de transformation du liquide, la pression étant égale à chaque instant à la tension maximum de sa vapeur.

71 – **Calcul du coefficient économique dans le cas de la détente adiabatique.** Considérons le cycle décrit par 1 kilogramme d'eau dans une machine à condensation.



Soit a le point représentatif de ce liquide à la température de la chaudière. Pendant la vaporisation, ce point décrit la droite ab. Pour plus de généralité, désignons par $x_1 < 1$ le poids vaporisé. Considérons ensuite la détente comme adiabatique, et soit bc la courbe décrite. En c le poids de vapeur est réduit à x_0 et le mélange se trouve à la température t_0 du condenseur. La vapeur se condense alors entièrement ce qui donne la droite cd, puis le liquide se réchauffe dans la chaudière en suivant la courbe da, laquelle n'est autre que la courbe BB' de la figure précédente.

La courbe bc diffère de la courbe AA'. On a montré en effet que, dans la détente adiabatique d'un mélange de liquide et de vapeur, il y a toujours condensation partielle. Il est facile d'en conclure que si l'on mène une parallèle mn à l'axe des volumes, le point n de la courbe adiabatique est à gauche du point n_1 correspondant de la courbe AA'. Cette dernière passerait d'ailleurs par le point b si la valeur de x_1 était égale à l'unité.

Nous allons évaluer la chaleur absorbée dans ce cycle, supposé décrite à partir du point d et dans le sens direct. La formule générale

$$dq = \left[m+(m'-m)x\right]dt+\lambda dx$$

montre que de d en a la chaleur absorbée est

$$\int_{t_0}^{t_1} m\,dt\,;$$

de $\underline{a}$ en $\underline{b}$ elle est égale à $\lambda_1 x_1$

de $\underline{b}$ en $\underline{c}$ la chaleur absorbée est nulle;

enfin de c en a il y a une quantité $\lambda_0 x_0$ de chaleur cédée. Ainsi

$$q_1 = \int_{t_0}^{t'} m\,dt + \lambda_1 x_1$$

$$q_0 = \lambda_0 x_0$$

$$q_1 - q_0 = \int_{t_0}^{t_1} m\,dt + \lambda_1 x_1 - \lambda_0 x_0$$

On sait d'ailleurs que dans une transformation adiabatique, il existe entre x_0 et x_1 la relation

$$\frac{\lambda_1 x_1}{} - \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{T}\,dt$$

qui permet de calculer x_0 quand on connaît x_1.

Au début de l'étude des Machines à Vapeur, on ignorait la condensation partielle du liquide dans la détente adiabatique. Or c'est précisément dans ce phénomène que l'on trouve la cause de la supériorité des machines à vapeur. Cette condensation partielle diminue en effet notablement la valeur de la chaleur cédée q_0. En se condensant le liquide agit pour réchauffer la vapeur à laquelle il se trouve intimement mélangé.

Pour achever le calcul du coefficient économique, on fera $x = 1$ et on tirera x_0 de l'équation précédente; on trouvera ainsi

$$q_1 - q_0 = \lambda_1\left(1-\frac{T_0}{T_1}\right) + \int_{t_0}^{t_1} m\left(1-\frac{T_0}{T}\right)dt.$$

La valeur de m diffère peu de C' chaleur spécifique sous pression constante qui, pour l'eau, demeure sensiblement invariable; donc

$$q_1 - q_0 = \lambda_1 \frac{T_1-T_0}{T_1} + C'(T_1-T_0) - C'T_0\, l\,\frac{T_1}{T_0}$$

D'ailleurs puisqu'on a fait $x_1 = 1$,

$$q_1 = \int_{t_0}^{t_1} m\,dt + \lambda_1 x_1 = \lambda_1 + c'(T_1 - T_0)$$

On obtient donc la valeur du coefficient économique

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1} + c'(T_1 - T_0) - c' T_0 \, l \frac{T_1}{T_0}}{\lambda_1 + c'(T_1 - T_0)}$$

72 - Exemples. — Avec une machine pour laquelle la pression dans la chaudière serait de 10^{atm}, ce qui suppose une température de 180° et le condenseur étant supposé à 0°, on trouve

$$\varepsilon = 0{,}352,$$

tandis que, pour un cycle de Carnot, on aurait

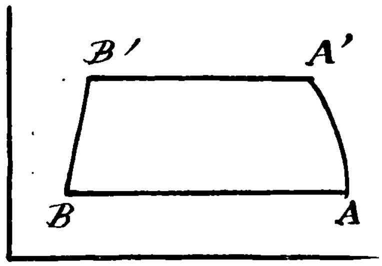
$$\varepsilon_m = 0{,}397.$$

Si la chaudière était à 150° et le condenseur à 50°, on aurait

$$\varepsilon = 0{,}218 \qquad \varepsilon_m = 0{,}236.$$

Le rendement d'une machine à vapeur, c'est-à-dire le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}$ est bien supérieur à celui d'une machine à gaz fonctionnant entre les mêmes limites de température.

73 - Du rôle de la chemise de vapeur. — On a fait remarquer que l'adiabatique bc ne devait pas être confondue avec la courbe AA'. Mais il est possible de faire décrire à la vapeur cette dernière courbe; seulement il faudra lui céder de la chaleur pendant la détente.



On sait d'après ce qui a été dit en thermodynamique que l'on a pour le cycle $BB'A'AB$

$$q_1 = \int_{t_0}^{t_1} m\,dt + \lambda_1 - \int_{t_0}^{t_1} m'\,dt,$$

$$q_0 = \lambda_0;$$

par suite

$$q_1 - q_0 = \lambda_1 - \lambda_0 - \int_{t_0}^{t_1} (m' - m)\,dt$$

On a d'ailleurs établi la relation

$$m' - m = T \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{dt}$$

ou

$$m' - m = \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\lambda}{T};$$

On peut donc écrire

$$q_1 - q_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\lambda}{T}\, dt$$

La chaleur spécifique λ a été déterminée par Regnault qui a donné des formules empiriques pour l'exprimer en fonction de la température. Les formules permettent d'effectuer l'intégration et par suite de calculer ε. Pour le deuxième exemple du numéro précédent où ε était égal à 0,218, on trouve $\varepsilon = 0,177$. Mais la chaleur transformée en travail est plus grande. La valeur de $q_1 - q_0$ devient égale à 145 calories au lieu de 132, de sorte que le travail produit est augmenté de près d'un dixième malgré la diminution du coefficient économique.

La transformation précédente se trouve à peu près réalisée quand on emploie la chemise de vapeur imaginée par Watt, et qui consiste en une sorte de cylindre environnant le corps de pompe dans lequel la vapeur circule avant d'arriver au tiroir.

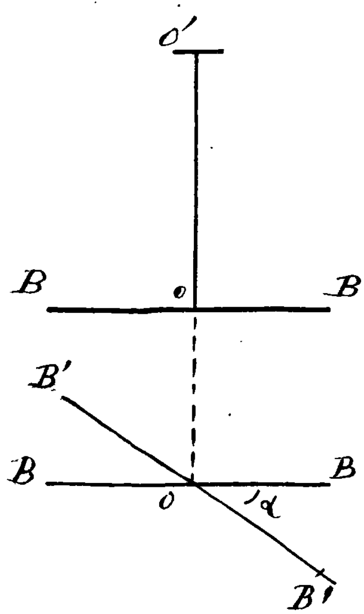
La chemise de vapeur a donc pour effet de remplacer dans la détente la courbe adiabatique par la courbe de transformation de la vapeur saturée sèche. Comme on l'a montré plus haut, le coefficient économique se trouve amoindri, de sorte qu'à ce point de vue, la chemise de vapeur est désavantageuse. Toutefois l'expérience a prouvé que, pour une même dépense de combustible, il résultait de cette disposition un accroissement notable dans la quantité de travail produite. Cet accroissement paraît dû en grande partie, à ce que les pertes de chaleur résultant de la conductibilité se trouvent diminuées, la vapeur sèche communiquant moins facilement sa chaleur à l'enveloppe que le mélange de liquide et de vapeur.

L'avantage deviendrait encore plus marqué si l'on utilisait pour réchauffer la vapeur, au lieu de la vapeur elle-même, les produits gazeux de la combustion, après qu'ils ont circulé autour de la chaudière pour produire la vaporisation. Ces produits conservent une grande quantité de chaleur qui se trouve perdue dans les dispositions ordinaires.

XXXV.

Note I.

Balance de torsion. — 1 — Une tige horizontale BB est suspendue à un fil vertical OO' encastré en O'; la tige et le fil sont liés invariablement l'un à l'autre, de plus le centre de gravité de BB est sur la verticale OO'.



Écartons la tige de sa position naturelle d'équilibre BB en tordant le fil et amenons-la en B'B' où elle est comprise dans le plan horizontal passant par B. On abandonne cette tige à elle-même et il s'agit de trouver la loi de son mouvement.

Pour y parvenir, il faut connaître les forces de torsion dans chaque position de la tige. Or, si l'on amène la tige à une position B'B' où elle fait un angle α avec sa position naturelle d'équilibre, on pourra l'y maintenir au moyen de deux forces égales et parallèles appliquées à ses extrémités. La tige étant en équilibre il en résulte que les forces de torsion se réduisent à un couple et l'expérience montre que le moment de ce couple est proportionnel à l'angle d'écart et a, par conséquent une valeur de la forme $K\alpha$, K ne dépendant que de la longueur de la tige, de la longueur et de la grosseur du fil.

Par suite si l'on désigne par

μ le moment d'inertie par rapport à l'axe OO', du système formé par la tige et le fil.

ω la vitesse angulaire du mouvement.

on a pour l'équation différentielle de ce mouvement :

$$\mu \frac{d\omega}{dt} = -K\alpha.$$

ou puisque $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$,

$$\mu \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K\alpha.$$

En posant $a = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$, cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a^2\alpha = 0.$$

elle a pour intégrale générale $\alpha = A \sin at + B \cos at$, A et B étant des constantes arbitraires qui déterminent les circonstances initiales du mouvement.

2 – On peut aussi appliquer à ce mouvement le théorème des forces vives. La force vive du système à un instant quelconque a pour valeur $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$, et le travail élémentaire des forces de torsion pour un déplacement angulaire $d\alpha$ est $-K\alpha\,d\alpha$. On a, par suite,

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = -\int K\alpha\,d\alpha + \text{Const}^{e}.$$

ou, en intégrant :

$$\mu\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = -K\alpha^2 + C.$$

Pour déterminer C, supposons que, quand la vitesse est nulle, l'on ait $\alpha = \alpha_0$, on en déduit $C = K\alpha_0^2$ et on a par suite

$$\mu\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = K(\alpha_0^2 - \alpha^2)$$

La vitesse angulaire est nulle pour $\alpha = \alpha_0$ et $\alpha = -\alpha_0$; donc, la tige oscille entre deux positions extrêmes symétriques par rapport à sa position naturelle d'équilibre.

On tire de l'équation précédente

$$dt \pm \sqrt{\frac{\mu}{K}}\ \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Si l'on compte le temps à partir de l'instant où $\alpha = -\alpha_0$, il faut prendre le signe + puisque α croît avec t.

Calculons le temps τ d'une oscillation simple. La formule précédente donne par l'intégration

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{K}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$$

c'est-à-dire

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\mu}{K}}.$$

Cette durée est indépendante de l'angle d'écart α_0 ; donc les oscillations sont isochrones.

Note II.

Homogénéité et similitude mécaniques.

1 – On démontre en géométrie analytique, que toute équation existante

entre les diverses longueurs d'une figure est homogène ; cette propriété résulte de ce fait évident que cette équation, comme les raisonnements et les calculs que l'on fait pour y arriver, doit être indépendante du choix de l'unité de longueur.

2 – Les relations établies par toute science mécanique satisfont à des conditions analogues ; leur forme doit être telle qu'elles subsistent quelles que soient les unités qui servent à évaluer les quantités que ces relations renferment.

Or, les quantités que l'on peut avoir à considérer dans l'étude d'un phénomène physique peuvent toujours s'exprimer à l'aide des unités fondamentales de longueur, de temps et de force.

Soient L, T, F une longueur, un temps et une force. Si une quantité physique Q est proportionnelle à L^α, T^β, F^γ nous dirons que cette quantité est de degré α en longueur, de degré β en temps, de degré γ en force, ou que ses dimensions sont α, β, γ.

Si l'on prend de nouvelles unités fondamentales respectivement a, b, c fois plus petites que les anciennes, de manière que les nombres qui expriment L, T, F deviennent respectivement a, b, c fois plus grands, la mesure de Q sera multipliée par $a^\alpha b^\beta c^\gamma$.

Par suite, une relation

$$f(Q, Q', \ldots) = 0$$

entre diverses quantités $Q, Q' \ldots$ devient par le changement des unités fondamentales

$$f(a^\alpha b^\beta c^\gamma Q, \quad a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} Q', \ldots\ldots) = 0.$$

et la forme de la fonction f doit être telle que cette dernière équation soit satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées à a, b, c.

3 – Ce théorème est dû à Newton (Principes, liv. II, prop. 32). Il constitue une théorie complète de la similitude en Mécanique, laquelle, comme l'on voit, résulte de l'homogénéité des équations par rapport aux trois espèces de quantités fondamentales et indépendantes qui y figurent. Quelques exemples feront sentir l'importance théorique et pratique du principe. (Voir à ce sujet, une Note de M. Bertrand. – Journal de l'École Polytechnique. XXXIIe Cahier; p. 189)

4 – 1er Exemple. Durée de l'oscillation d'un pendule simple

Cherchons à déterminer d'après ce principe, la forme de la relation

$$f(t, l, g, \alpha) = 0$$

qui existe entre

la durée d'oscillation d'un pendule simple . . . τ

la longueur de ce pendule l

l'accélération de la pesanteur . . . . g

l'angle initial d'écart . . . . α.

Le tableau suivant résume les dimensions de ces quantités en longueur, en temps et en force.

	L	T	F.
τ	0	1	0
l	1	0	0
g	1	-2	0
α	0	0	0

1° pour que la relation dont il s'agit soit indépendante de l'unité de longueur, il faut qu'elle ne dépende que du rapport $\frac{l}{g}$ et soit, par suite, de la forme :

$$f\left(\tau, \frac{l}{g}, \alpha\right) = 0.$$

2° exprimons maintenant que la relation précédente est indépendante de l'unité de temps ; il faut pour cela, qu'elle ne dépende que du produit $\tau\sqrt{g}$ et soit, par conséquent, réductible à la forme :

$$f\left(\frac{\tau}{\sqrt{\frac{l}{g}}}, \alpha\right) = 0.$$

De cette dernière équation, on tire :

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\varphi(\alpha)$$

Le principe d'homogénéité nous apprend donc, indépendamment de toute théorie que la durée d'oscillation τ est nécessairement égale au produit de $\sqrt{\frac{l}{g}}$ par une fonction numérique de l'angle d'écart.

5 – 2e Exemple. Résistance des fluides. – On voit, par l'exemple précédent, le parti que l'on peut tirer du principe d'homogénéité dans tous les cas où il s'agit d'assigner à priori la forme de la relation qui lie une quantité que l'on étudie empiriquement aux diverses variables dont cette quantité dépend. La principale difficulté réside alors dans la détermination complète des variables dont on a à tenir compte,

car il suffit que l'une de ces variables soit omise pour que la forme à attribuer à la fonction se trouve profondément modifiée. En voici un exemple:

Supposons qu'un élément plan se meuve dans un fluide, avec une vitesse constante, dans une direction normale à sa surface. Désignons par

ω la surface de l'élément,

v sa vitesse.

Si l'on admet d'abord que la densité ρ du fluide soit la seule variable qui détermine, avec ω et v, la résistance R du fluide, on aura une relation

$$f(R, \omega, v, \rho) = 0$$

dont il s'agit de préciser la forme. Le tableau des dimensions est alors le suivant

	L	T	F
R	0	0	1
ω	2	0	0
v	1	-1	0
ρ	-4	2	1

(pour déterminer les dimensions de ρ, il suffit de remarquer que, si l'on désigne par M une masse et V un volume, on a par définition $\rho = \frac{M}{V}$. D'ailleurs une masse est le rapport d'une force à une accélération, et une accélération est le rapport d'une longueur au carré d'un temps. On a donc $M = L^{-1}T^2F$ et, par suite, $\rho = L^{-4}T^2F$).

Cela posé:

1° pour que la relation cherchée soit indépendante de l'unité de force, il faut qu'elle soit de la forme:

$$f\left(\frac{R}{\rho}, \omega, v\right) = 0$$

2° pour qu'elle soit indépendante de l'unité de temps, il faut qu'elle ne dépende que du produit ρv^2 et soit, par conséquent de la forme:

$$f\left(\frac{R}{\rho v^2}, \omega\right) = 0$$

3° enfin, pour qu'elle soit indépendante de l'unité de longueur, il faut qu'elle se réduise à la forme

$$f\left(\frac{R}{\omega \rho v^2}\right) = 0.$$

On déduit de cette équation, en désignant par K un facteur numérique :

$$R = K\,\omega\rho v^2.$$

Elle est donc la forme nécessaire de R lorsque l'on réduit à ω, v, ρ les variables dont cette quantité dépend. Mais une seule variable ne suffisant pas à déterminer l'état d'un fluide, la variable ρ ne doit pas intervenir seule dans la valeur de R; introduisons en outre la pression p par unité de surface.

La variable p étant le rapport d'une force au carré d'une longueur, ses dimensions sont données par la formule $L^{-2}F$.

Si maintenant on exprime successivement que la relation

$$f(R, \omega, v, \rho, p) = 0$$

qui existe entre les cinq variables est indépendante des unités de force, de temps et de longueur, on est successivement conduit aux formes suivantes :

$$f\left(\frac{R}{p}, \frac{\rho}{p}, \omega, v\right) = 0$$

$$f\left(\frac{R}{p}, \frac{\rho v^2}{p}\,\omega\right) = 0$$

$$f\left(\frac{R}{\omega p}, \frac{\rho v^2}{p}\right) = 0$$

On en conclut définitivement la valeur :

$$R = \omega p\,\varphi\left(\frac{\rho v^2}{p}\right).$$

Cette formule montre que, si la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, elle est nécessairement proportionnelle à ρ et indépendante de p. Si la résistance est proportionnelle à la vitesse, elle est aussi proportionnelle à $\sqrt{p\rho}$.

Ajoutons que $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$ est à un facteur numérique près, la vitesse du son dans le fluide ; par suite, en désignant par a, on peut écrire :

$$R = \omega p\,\psi\left(\frac{v}{a}\right).$$

6 — Le plus souvent le principe d'homogénéité ne suffit pas à déterminer les relations qui existent entre les variables d'un phénomène physique, soit parce qu'il est difficile de connaître à priori toutes ces variables, soit parce que ces variables sont en nombre tel qu'il soit possible de former avec elles plusieurs équations satisfaisant également bien au principe, de sorte que par cette voie la solution est

indéterminée.

Une théorie mécanique du phénomène permet alors d'établir la forme naturelle des équations et d'éviter ainsi l'emploi de formules purement empiriques qui, en l'absence de tout guide rationnel, peuvent se trouver incompatibles avec la nature des phénomènes qu'elles ont pour but de représenter.

Lorsque les coefficients d'une formule obtenue par cette voie sont déterminés par expériences, il n'est pas rare que cette formule se prête à la représentation exacte du phénomène dans une grande étendue, alors même que la théorie adoptée comme base ne tient compte que des éléments principaux du problème en omettant les perturbations. Voici comment on peut se rendre compte de ce fait.

Supposant qu'en négligeant les perturbations, la théorie ait donné pour l'expression d'une quantité physique en fonction de certaines variables

$$u = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

Cette expression n'est qu'approchée et la valeur exacte peut être mise sous la forme

$$u = \varphi(x, y, z, \ldots)(1+\varepsilon)$$

ε étant une fonction de $x, y, z, \ldots$ qui représente l'effet des perturbations. La valeur de ε peut ne pas être négligeable, mais ses variations le sont en général tant que $x, y, z \ldots$ restent entre certaines limites. Par suite, entre ces limites, $1+\varepsilon$ peut être considéré comme un facteur modifiant la valeur de certains coefficients de la fonction φ; et l'on trouvera directement ces valeurs modifiées en déterminant les coefficients par expériences, à l'aide de valeurs de u correspondant à des systèmes de valeurs particulières de x, y, z. — pris en nombre suffisant.

Regnault a signalé cet avantage spécial des formules théoriques à l'occasion de ses expériences sur la tension des vapeurs saturées. Après avoir rappelé les tentatives de quelques géomètres pour obtenir l'expression de la pression d'une vapeur saturée en fonction de sa température, l'illustre physicien ajoute :

« Les principes sur lesquels ces géomètres se sont appuyés ne sont pas à l'abri de toute objection ..... et les formules sont loin de représenter convenablement les observations lorsqu'on donne aux coefficients qu'elles renferment les interprétations que leur assigne la théorie et les valeurs numériques qui s'en déduisent. Pour obtenir une formule qui représente les forces élastiques d'une manière satisfaisante, on est obligé de calculer ces coefficients au moyen de quelques-unes des forces élastiques que les expériences ont données pour des températures connues de sorte que l'on ne fait en définitive qu'une véritable interpolation.

« Néanmoins ces spéculations sont utiles parce qu'elles pourraient conduire à la connaissance de la forme de la fonction qui représente la loi physique du phénomène, et cette fonction pourra représenter les expériences mieux que toute autre lorsque ses coefficients auront été déterminés au moyen d'un certain nombre de ces mêmes expériences convenablement choisies. C'est en effet ce qui se présente pour la formule de M. Roche: cette formule représente les forces élastiques de la vapeur aqueuse, dans une grande étendue de l'échelle des températures, avec une exactitude remarquable et beaucoup mieux qu'on ne peut le faire avec toute autre formule qui n'introduit, comme la formule de Roche, que trois données expérimentales. »

« On peut s'expliquer jusqu'à un certain point comment cette formule, quoique fondée en partie sur des lois inexactes, paraît cependant s'approcher beaucoup de la formule qui représente rigoureusement le phénomène. Cette circonstance tient à ce que les lois qui ont été admises peuvent être considérées comme étant des premiers termes des lois véritables développées suivant les puissances de la température et que ces premiers termes l'emportent beaucoup sur la somme des autres. » (Relation des expériences etc. t I ; p. 585).

Il a semblé utile de citer textuellement cette appréciation de l'un des plus illustres représentants de la Méthode expérimentale parce qu'elle fixe avec précision le rôle des déductions théoriques dans les Sciences appliquées..

Note III.

Formule de Roche. — On peut établir comme il suit la formule dont il est question dans la Note précédente.

Considérons la formule de Clapeyron:

$$\lambda = AT(u' - u)\frac{dp}{dt}$$

et supposons:

1° que u (volume du liquide) soit négligeable par rapport à u' (volume de la vapeur saturée).

2° que les lois de Mariotte et de Gay-Lussac soient approximativement applicables à la vapeur surchauffée dans le voisinage de la saturation

3° que la chaleur latente λ puisse entre certaines limites, être approximativement considérée comme constante.

L'équation ci-dessus devient:

$$\lambda = \frac{ART^2}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$$

et en posant $K = \frac{\lambda}{AR}$ on en déduit, par intégration

$$p = Ce^{-\frac{K}{T}}$$

C désignant une constante. Cette formule peut encore s'écrire

$$p = Ce^{-\frac{K}{273+t}}$$

t étant la température centigrade. En y remplaçant 273 par a, on obtient une formule à trois constantes

$$p = Ce^{-\frac{K}{a+t}}$$

qui coïncide avec celle que Regnault a appliqué à la représentation de la loi qui ~~lie~~ la force élastique d'une vapeur saturée à sa température. -