COURS

DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

PAR

J. GRAINDORGE

DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

TOME I

CINÉMATIQUE & STATIQUE

MONS
MAISON HECTOR MANCEAUX
IMPRIMERIE. — LIBRAIRIE UNIVERSELLE

1888

PRÉFACE.

L'ouvrage que je publie est la reproduction des leçons professées à la Faculté des sciences et à l'École des Mines de Liège. Depuis que j'ai été chargé de remplacer à l'Université pour le cours de Mécanique analytique mon vénéré maître M. De Cuyper, je me suis constamment inspiré de ses idées. Mon unique préoccupation a été de rendre mon enseignement aussi utile que possible aux deux catégories de mes auditeurs. Pour l'une comme pour l'autre, il est nécessaire de mettre en lumière les principes fondamentaux qui servent de base et à la Mécanique céleste et à la Mécanique appliquée.

Aussi, quoique m'attachant à donner à mon cours un caractère scientifique, je n'ai jamais perdu de vue que la majorité de mes élèves sont de futurs ingénieurs pour lesquels il faut développer particulièrement certaines théories (centres de gravité, moments d'inertie, rotation des corps, etc.) qu'ils auront à appliquer fréquemment dans leurs études subséquentes.

La publication récente des programmes détaillés de l'épreuve préalable du concours pour l'admission dans l'administration des chemins de fer m'a obligé à introduire certaines théories qui ne font pas d'ordinaire partie du cours de Mécanique analytique. J'ai tenu à donner aux élèves de l'École de Liège tous les éléments nécessaires pour qu'ils puissent prendre part à cette épreuve, en leur évitant de faire de nombreuses recherches.

Il est un point dont je n'ai pas cru devoir me préoccuper, quoique cependant je le considère comme étant d'une importance capitale : ce sont les applications sans lesquelles la théorie est une lettre morte en Mécanique, comme dans toute autre branche des Mathématiques. Mais, mon honorable collègue et ami, M. Philippe Banneux, qui est chargé des exercices de Mécanique à l'École des Mines, vient de commencer la publication d'un remarquable recueil qui sera le complément indispensable de l'ouvrage actuel, et auquel je renverrai surtout les futurs ingénieurs.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

LIVRE II.

CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

DEUXIÈME PARTIE.

STATIQUE.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

LIVRE II.

STATIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

ERRATA.

Page 89, ligne 5, *au lieu de :* hélicoïdal, *lisez :* héliçoidal.

» 128, » 3 en bas, *au lieu de :* W_r, *lisez :* W'_r.

» 139, » 4, *au lieu de :* $\frac{2NN''}{dt^2}$, *lisez:* $\frac{2N'N''}{dt^2}$.

» 159, » 7, *lisez :* suivant OM : $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \varphi_r$.

» 174, » 16, *au lieu de :* juxtaposons, *lisez :* concentrons.

» 176, » 4, *au lieu de :* φ^1, *lisez :* φ'.

» 271, dernière ligne, *lisez :* $L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z$

$= L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = const.$

» 332, » 6 en bas, *au lieu de :* $\frac{1}{2}\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$, *lisez :*

$\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$.

INTRODUCTION.

La Mécanique est la science qui s'occupe du mouvement et des forces.

On dit qu'un *corps* est en *mouvement*, lorsqu'il occupe successivement différentes positions dans l'espace. Il est en *repos*, lorsqu'il conserve la position qu'il occupait d'abord.

En Géométrie, on étudie aussi des mouvements. Ainsi, par exemple, on peut considérer une ligne comme engendrée par le mouvement d'un point, une surface par le mouvement d'une ligne. Mais, en Géométrie, on ne s'occupe que des diverses positions que prennent successivement les points mobiles et les lignes mobiles, et l'on fait abstraction du temps employé par le point ou la ligne pour passer d'une position à une autre.

En Mécanique, on étudie aussi le mouvement et ses propriétés. Mais, l'étude de la Mécanique se distingue de celle de la Géométrie en ce qu'elle introduit un élément nouveau : c'est le *temps* employé par le mobile pour passer d'une position à une autre.

Les deux notions fondamentales du temps et de l'espace qui nous donnent l'idée du mouvement ne peuvent pas être définies. Nous les admettons comme acquises. Mais, si l'on ne peut pas définir le temps, il est nécessaire, pour pouvoir mesurer le temps, de définir d'une manière précise ce qui constitue l'*égalité des temps*.

On dit que deux intervalles de temps sont *égaux*, lorsqu'un même corps, placé dans des conditions parfaitement identiques, exécute pendant ces deux intervalles de temps des mouvements identiques. De cette définition des temps égaux, on passe facilement à celle d'un *rapport entre deux temps*. Il en résulte que, si l'on prend un certain intervalle de temps comme unité, tout autre intervalle sera représenté par le nombre que mesure son rapport à l'unité adoptée.

Il est évident que l'on peut étudier les *propriétés générales du mouvement* d'un corps par l'observation, jointe aux notions de la Géométrie, et cela sans qu'il soit nécessaire d'introduire aucun principe nouveau. Mais, du moment où l'on veut reconnaître comment il se fait que le mouvement suive telle loi particulière, on doit avoir recours à des notions nouvelles.

D'abord, nous savons qu'un corps ne peut se mettre en mouvement par lui-même. Il ne peut sortir du repos que par une action étrangère quelconque. De là résulte un principe fondamental de la Mécanique, une loi que l'on appelle la loi d'*inertie*, sur laquelle nous reviendrons plus loin : quand un corps passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ce phénomène est dû à une cause, et cette cause est étrangère au corps. On donne le nom de *force* à toute cause produisant ou pouvant produire le mouvement. Il va sans dire qu'il ne s'agit pas des causes premières en vertu desquelles les mouvements s'effectuent, mais de la valeur numérique des efforts qui seraient capables de les produire.

Il est évident que nous pouvons étudier le mouvement en lui-même, c'est-à-dire abstraction faite des causes qui produisent ce mouvement. D'autre part, nous pouvons aussi nous proposer d'étudier les effets produits par des causes déterminées, et réciproquement.

Nous pourrions, d'après les considérations qui précèdent, diviser l'étude de la Mécanique en deux parties, savoir :

1° LA CINÉMATIQUE[1], qui s'occupe de l'étude des mouvements considérés en eux-mêmes, c'est-à-dire tels que nous les observons. La Cinématique s'occupe donc du mouvement comme effet, sans remonter aux causes.

Elle se rattache à la Géométrie : on peut dire qu'elle tient le milieu entre la Géométrie et la Mécanique. Elle s'occupe des considérations relatives aux espaces parcourus, aux temps employés à parcourir ces espaces, et aux vitesses des différents mouvements.

2° LA DYNAMIQUE[2], qui s'occupe des relations qui existent entre le mouvement d'un corps et les forces qui sollicitent ce corps. On y résout le double problème suivant :

I. *Étant données les forces qui agissent sur un corps quelconque, déterminer le mouvement qui prendra naissance, si le corps est en repos* ; ou bien, *dans le cas contraire, chercher comment se modifiera le mouvement acquis en vertu de causes antérieures.*

---

1. Du mot grec Κίνημα, qui signifie mouvement.
2. Du mot grec Δύναμις, qui signifie force.

II. Réciproquement, *connaissant le mouvement d'un mobile, trouver les forces qui agissent actuellement sur ce mobile.*

On conçoit facilement que, si un corps primitivement en repos, vient à être sollicité par des forces, il peut ne pas se mettre en mouvement. On dit alors que *le corps est en équilibre sous l'action de ces forces*, ou que *ces forces se font équilibre*. On conçoit aussi que des forces appliquées à un corps en mouvement peuvent se faire équilibre : en effet, le mouvement du corps peut ne pas être altéré par l'introduction de ces forces.

Évidemment, les questions d'équilibre pourraient être comprises dans la Dynamique. C'est le cas où le mouvement cesse d'exister. Mais, cette science de l'équilibre des forces est trop importante pour que nous ne la considérions que comme un chapitre de la Dynamique. Nous en ferons une division spéciale de la Mécanique à laquelle on donne le nom de STATIQUE [1]. Il résulte d'ailleurs d'un principe établi par d'Alembert que le problème général du mouvement peut se déduire du problème de l'équilibre.

Nous aurons donc ainsi les trois grandes divisions suivantes :

1° La CINÉMATIQUE, traitant du mouvement, abstraction faite des forces qui peuvent le produire.

2° La STATIQUE, traitant des forces, abstraction faite des mouvements qu'elles peuvent produire.

3° La DYNAMIQUE, traitant du mode d'action des forces, c'est-à-dire de la manière dont elles font naître le mouvement ou le modifient.

---

1. Du mot grec Στατικός, qui se tient debout.

On doit aussi distinguer dans la Statique et la Dynamique, l'étude des corps solides et celle des fluides. Les principes fondamentaux sont les mêmes pour les solides et pour les fluides ; mais, pour les fluides, on doit avoir égard à leur variabilité de forme, ce qui complique évidemment la solution des problèmes, surtout dans les questions de mouvement.

Nous nous occuperons des fluides dans une section spéciale qui porte le nom d'HYDRAULIQUE, et que nous diviserons en HYDROSTATIQUE et HYDRODYNAMIQUE.

Observons encore que dans l'étude de la Mécanique, nous supposerons des corps fictifs qui n'existent pas dans la nature. Ainsi, nous considérerons les corps solides comme étant indéfiniment rigides, les liquides comme étant d'une incompressibilité absolue, les cordes parfaitement flexibles et inextensibles, et ainsi de suite.

COURS
DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CINÉMATIQUE.

LIVRE I.

CINÉMATIQUE DU POINT.

CHAPITRE PREMIER.

Loi du mouvement. — Mouvement uniforme.

1. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la cinématique est la partie de la mécanique dans laquelle on s'occupe des lois du mouvement, abstraction faite des causes qui le déterminent. C'est l'étude des mouvements considérés en eux-mêmes. Elle s'occupe de toutes les considérations relatives aux espaces parcourus dans les divers mouvements, aux temps employés à les parcourir, à la détermination des vitesses d'après les diverses relations qui peuvent exister entre ces espaces et les temps correspondants. Elle étudie aussi les différents instruments qui permettent de changer un mouvement en un autre.

2. La cinématique se divise en deux parties :

1° *La cinématique pure*, où le mouvement est étudié d'une manière pure et abstraite.

2° *La cinématique appliquée* ou *théorie des mécanismes* qui étudie les mécanismes servant à la transmission et à la transformation des mouvements.

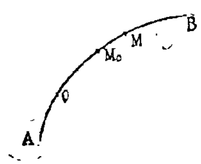
3. TRAJECTOIRE. — Quand un point se meut dans l'espace, la suite des positions qu'il occupe succcessivement forme une ligne *droite* ou *courbe* que l'on appelle sa *trajectoire*.

Suivant que la trajectoire est une ligne droite ou une ligne courbe, le mouvement est *rectiligne* ou *curviligne*.

4. Pour que le mouvement d'un point soit complétement connu, on doit connaître sa *trajectoire*, et, en outre, *la loi du mouvement du point sur sa trajectoire*, c'est-à-dire la loi suivant laquelle le point mobile parcourt les diverses parties de cette trajectoire.

Soit AB la trajectoire du point mobile M (fig. 1) ; pour définir la position du point M à un instant donné, on prend sa distance OM à un point fixe O sur la trajectoire, et l'on compte le temps à partir du moment où le point mobile se trouve dans une position déterminée M_0. On voit qu'*à chaque valeur du temps correspond une longueur* OM. Cette longueur que nous désignerons par s est donc une fonction du temps, et nous aurons :

Fig. 1.



$$s = f(t).$$

C'est l'*équation du mouvement du point sur sa trajectoire.*

5. L'unité de longueur est le mètre ; l'unité de temps est la seconde de temps moyen, c'est-à-dire la 86400e partie du jour solaire moyen. s et t peuvent être positifs ou négatifs : s est positif ou négatif, suivant qu'il est compté dans un sens ou dans l'autre, à partir du point initial O ; t est positif ou négatif, suivant qu'il est compté après ou avan tl'instant initial correspondant à M_0.

6. On appelle *mouvement uniforme* le mouvement dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.

Si donc s_0 est l'espace parcouru à l'origine du temps, nous aurons, d'après la définition :

$$\frac{s - s_0}{t} = a,$$

ou bien :

$$s = s_0 + at.$$

C'est l'*équation du mouvement uniforme*.

7. On dit aussi que le *mouvement est uniforme, lorsque les espaces parcourus dans des temps égaux sont égaux, quels que soient ces temps.*

8. On appelle *vitesse* dans le mouvement uniforme le chemin parcouru par le mobile dans l'unité de temps, ou, ce qui revient au même, le rapport constant qui existe entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir.

On a donc, en désignant par v la vitesse dans ce mouvement :

$$v = \frac{s - s_0}{t} = a.$$

9. Remarque. — Il est bien évident que l'on ne peut pas comparer un espace à un temps, mais bien les rapports de ces quantités à leurs unités respectives. Il en résulte qu'il n'y a pas d'unité de vitesse : la vitesse définie comme nous l'avons fait est un nombre abstrait dont la grandeur varie avec l'unité de temps et l'unité de longueur. Ordinairement, le temps est considéré comme un nombre abstrait. Alors *la vitesse est une longueur, un nombre de mètres* (parcourus en une seconde).

10. On attribue à la vitesse le *sens* dans lequel s'effectue le mouvement. Elle sera positive ou négative, suivant que le mouvement a lieu dans le sens des s positifs, ou des s négatifs. Cela résulte d'ailleurs de la formule :

$$v = \frac{s - s_0}{t}.$$

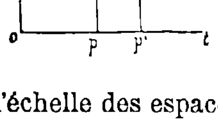
En résumé, les équations du mouvement uniforme sont :

$$s = s_0 + at,$$
$$v = a.$$

11. *Représentation graphique de la loi du mouvement.*

Soit $s = f(t)$ la loi du mouvement. Prenons deux axes rectangulaires ot et os (fig. 2), et choisissons arbitrairement une longueur représentant l'unité de temps, et une longueur représentant l'unité de longueur. Portons sur l'axe des abscisses des longueurs op, op'..., représentant à l'échelle adoptée des valeurs déterminées du temps, et supposons que les ordonnées mp, $m'p'$..., soient à l'échelle des espaces les valeurs de s qui correspondent

Fig. 2.



dans l'équation du mouvement à ces différentes valeurs de t. Nous aurons ainsi une suite continue de points m, m', m''..., formant une certaine figure ayant pour équation :

$$s = f(t).$$

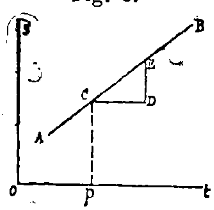
C'est cette ligne que l'on appelle *la courbe des espaces*. Nous pourrons ainsi obtenir graphiquement s en fonction de t, ou bien t au moyen de s.

12. Remarque I. — Il ne faut pas confondre la ligne que nous venons de définir avec la *trajectoire* que le point décrit dans l'espace.

Remarque II. — Dans le mouvement uniforme, la courbe des espaces est une ligne droite.

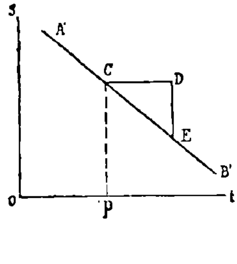
13. Proposons-nous de trouver graphiquement *la vitesse du mouvement uniforme* représenté par la droite AB (ligne des espaces). Il suffit de mener à partir d'un point C quelconque une droite CD parallèle à ot (fig. 3), et égale à la ligne qui représente l'unité de temps, puis de mener par le point D une parallèle à os, jusqu'à la rencontre avec AB au point E. La longueur DE représente la quantité dont s a varié dans l'unité de temps : c'est donc *la valeur absolue de la vitesse*.

Fig. 3.



14. Le signe de cette vitesse est indiqué par la position de la droite DE. Ainsi, dans le cas où le mouvement est représenté par AB (fig. 3), c'est-à-dire s'il a lieu dans le sens des s positifs, la vitesse est positive ; dans le cas de A'B' (fig. 4), c'est-à-dire si le mouvement a lieu dans le sens des s négatifs, la vitesse est négative.

Fig. 4.



Mouvement varié. — Vitesse.

15. Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Dans ce cas, les espaces parcourus ne sont pas proportionnels aux temps employés à les parcourir.

On distingue cependant parmi les mouvements variés, ceux qui sont *périodiques* ou *périodiquement uniformes*. Ce sont des mouvements dans lesquels les espaces parcourus pendant des temps égaux *convenablement choisis* sont égaux; cette égalité ne subsiste pas, quelque petits que soient les temps égaux considérés, mais seulement quand ces temps sont des multiples d'un certain intervalle appelé *période du mouvement*.

16. Dans un mouvement varié en général, *la vitesse* varie à chaque instant en grandeur et en direction. Mais, à *un instant quelconque,* elle a une valeur finie et déterminée, qui, si elle demeurait constante, transformerait le mouvement varié en mouvement uniforme.

Il résulte de cette définition, que, si v est la vitesse à la fin du temps t, et ds l'espace élémentaire parcouru pendant le temps dt, nous aurons :

$$ds = vdt,$$

d'où :

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Si donc $s = f(t)$ est l'équation du mouvement, nous aurons :

$$v = f'(t).$$

On voit que *la vitesse à un instant donné est exprimée* *par la dérivée première de l'espace par rapport au temps.*

Il résulte aussi de la même définition que *la direction de la vitesse* est celle de l'élément infiniment petit *ds* de la *trajectoire*, c'est-à-dire celle de la tangente.

17. Remarque. — On peut encore trouver l'expression de la vitesse par le raisonnement suivant :

Soient s l'espace parcouru par le mobile à la fin du temps t, et v sa vitesse à cet instant ; $s + \Delta s$ l'espace parcouru à la fin du temps $t + \Delta t$, v' la vitesse à cet instant, et supposons $v < v'$.

Si, pendant le temps Δt, le mobile avait continué son mouvement d'une manière uniforme avec la vitesse v, il aurait parcouru l'espace $v\Delta t$, évidemment plus petit que Δs ; nous aurons donc :

$$v\Delta t < \Delta s.$$

D'autre part, si pendant le temps Δt, le mobile avait parcouru sa trajectoire d'un mouvement uniforme avec la vitesse v', il aurait parcouru l'espace $v'\Delta t$, et nous aurions évidemment :

$$v'\Delta t > \Delta s.$$

Nous aurons donc :

$$v'\Delta t > \Delta s > v\Delta t,$$

ou bien :

$$v' > \frac{\Delta s}{\Delta t} > v.$$

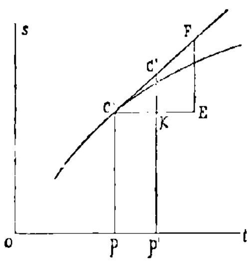
Si nous supposons que Δt décroisse indéfiniment, à la limite on a $v' = v$, et, par conséquent,

$$v = \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

18. Proposons-nous de trouver graphiquement, dans un mouvement varié, la grandeur de la vitesse du mobile à la fin du temps t, correspondant à une abscisse op.

Au bout du temps t, le mobile est en M sur sa trajectoire; au bout du temps $t + dt$, il est en M′ : il a parcouru l'arc $\text{MM}' = ds$. Au point M correspond une certaine valeur de s représentée par l'ordonnée $\text{C}p$ de la courbe des espaces (fig. 5); au point M′ $(t + dt)$ correspond un point C′ infiniment voisin de C. La longueur pp' représente dt, et

Fig. 5.



$$\text{C'K} = \text{C}'p' - \text{C}p,$$

représente l'arc ds.

La vitesse $\frac{ds}{dt}$ est donc donnée par le rapport $\frac{\text{C'K}}{\text{CK}}$.

Prenons sur CK une longueur CE égale à la longueur qui représente l'unité de temps, puis menons EF parallèle à os, jusqu'à la rencontre de la tangente. On a, par la similitude des triangles,

$$\frac{\text{C'K}}{\text{CK}} = \frac{\text{EF}}{\text{CE}}.$$

Or, dans le temps CK, le mobile parcourt l'espace C′K. Donc, si, à partir du temps t, le mouvement devenait uniforme, le mobile parcourrait dans l'unité de temps l'espace EF, et EF serait la vitesse de ce mouvement uniforme. C'est donc la vitesse cherchée.

Donc, pour trouver la vitesse au bout du temps t, dans le mouvement varié, menons par le point C, correspondant au temps t, une droite CE parallèle à ot, et égale à la ligne qui représente l'unité de temps. Par le point E menons une parallèle à os jusqu'à sa rencontre en F avec la tangente au point C. La longueur EF de cette parallèle sera la vitesse cherchée.

19. REMARQUE. — Nous avons vu que la vitesse en un point de la trajectoire à la fin du temps t, est donnée par la formule :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Il ne faut pas conclure de là que la vitesse a pour valeur la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe des espaces fait avec l'axe des abscisses (des temps), puisque, en général, l'échelle des espaces et celle des temps sont différentes. L'angle que fait la tangente avec l'axe des temps sera plus ou moins grand, tout en correspondant toujours à une même vitesse suivant que l'on fera varier l'une des échelles dans un sens ou dans l'autre, puisque suivant l'une ou l'autre chose, la courbe des espaces sera différente.

La vitesse ne sera égale à la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente fait avec l'axe des abscisses que si la ligne par laquelle on représente l'unité de temps est égale à celle par laquelle on représente l'unité d'espace.

20. COURBE DES VITESSES. — Il résulte de ce qui précède que la vitesse à un instant donné est, en général, une fonction de t. Il s'ensuit que l'on peut tracer une courbe dont les abscisses seraient les temps, et les ordonnées les vitesses correspondantes. On obtient ainsi la *courbe des vitesses*.

21. Remarque. — Le cas du mouvement uniforme est compris dans le cas général. En effet, on a alors :

$$v = \text{const.} = a\,;$$

la courbe des vitesses est une ligne droite. On a donc :

$$\frac{ds}{dt} = a,$$

d'où, en intégrant :

$$s = s_0 + at,$$

en désignant par s_0 la valeur de s pour $t = o$. C'est la formule que nous avons trouvée plus haut (n° **6**).

Dans le cas général, la vitesse v n'est plus constante ; elle est une fonction du temps, et l'on a :

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v dt.$$

CHAPITRE II.

Mouvement uniformément varié. Accélération.

22. Le mouvement uniformément varié est celui dans lequel la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux, quels que soient ces temps. C'est le mouvement dans lequel *la vitesse varie proportionnellement au temps*.

Soient v_0 la vitesse à l'instant initial, v la vitesse au bout du temps t, nous aurons :

$$\frac{v - v_0}{t} = \varphi,$$

φ étant une constante.

On en tire :

$$v = v_0 + \varphi t.$$

La quantité φ qui joue ici le même rôle que la vitesse dans le mouvement uniforme se nomme l'*accélération du mobile.* On voit que, dans le mouvement uniformément varié, l'*accélération est la différence des vitesses que possède le mobile au commencement et à la fin de l'unité de temps :* c'est la quantité *constante* dont la vitesse varie pendant l'unité de temps.

L'accélération φ peut être *positive* ou *négative,* suivant que la vitesse croît ou décroît, c'est-à-dire suivant que $v \gtrless v_0$. Suivant l'un ou l'autre cas, le mouvement est *accéléré* ou *retardé.*

23. Equations du mouvement uniformément varié. — On a :

$$v = v_0 + \varphi t.$$

Or :

$$v = \frac{ds}{dt};$$

par conséquent :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + \varphi t,$$

d'où :

$$s = c + v_0 t + \tfrac{1}{2} \varphi t^2.$$

Mais, pour $t = o$, on a $s = s_0$; par suite, $c = s_0$, et il vient :

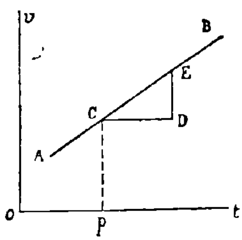
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

On conclut de là que la *courbe des espaces* est une *parabole* dont l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées. La *ligne des vitesses* est une ligne droite.

Il faut bien observer que la trajectoire, c'est-à-dire la ligne décrite par le point mobile, peut être une ligne droite ou une ligne courbe.

24. Remarque. — De ce que l'accélération dans le mouvement uniformément varié est la quantité constante dont la vitesse varie dans l'unité de temps, on conclut que l'on obtiendra l'accélération par une construction analogue à celle qui nous a servi à déterminer la vitesse dans le mouvement uniforme (n° **13**). Ainsi, AB étant la ligne des vitesses (fig. 6), on mènera par un point C quelconque de cette droite une parallèle CD à ot, et égale à la ligne qui représente l'unité de temps. Puis, par le point D, on mène DE parallèle à ov : la longueur DE sera l'accélération cherchée.

Fig. 6.



25. Propriétés du mouvement uniformément varié. — Les équations de ce mouvement sont :

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\varphi t^2, \\ v &= v_0 + \varphi t. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La première équation nous donne :

$$\frac{s - s_0}{t} = v_0 + \tfrac{1}{2}\varphi t.$$

Or, $\frac{s - s_0}{t}$ est la *vitesse moyenne* du mobile pendant le temps t : c'est la vitesse que le mobile devrait avoir pour parcourir d'un mouvement uniforme l'espace $s - s_0$ pendant le temps t. Cette vitesse moyenne a, comme on le voit, pour expression $v_0 + \frac{1}{2}\varphi t$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la vitesse réelle qui a lieu au milieu du temps t.

Donc, *dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un certain temps* t *quelconque, est égale à la vitesse réelle du mobile au milieu de cet intervalle.*

En remplaçant φ par sa valeur tirée de la deuxième équation (1), il vient :

$$\frac{s - s_0}{t} = \frac{v + v_0}{2}.$$

Donc, *dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un intervalle de temps quelconque est égale à la moyenne des vitesses que le mobile possède au commencement et à la fin de cet intervalle.*

En éliminant t entre les deux équations (1), on a :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \varphi (s - s_0).$$

Donc, *la demi différence des carrés des vitesses prises pour deux positions quelconques, est égale au produit de l'accélération par le chemin parcouru dans cet intervalle.*

26. Remarque. — Les équations du mouvement uniformément varié se simplifient, lorsque l'on compte le temps à partir de l'instant où la vitesse v_0 est nulle, et les espaces à partir de la position que le mobile occupe à cet instant.

On a alors pour $t = o$, $v_0 = o$, et $s_0 = o$.
Par suite,

$$s = \frac{1}{2} \varphi t^2,$$

$$v = \varphi t.$$

De la première de ces équations on tire, pour $t = 1$

$$\varphi = 2\, s.$$

Donc, *l'accélération* φ *est égale au double du chemin parcouru par le mobile pendant la première seconde du mouvement.*

Chute des corps.

27. Les formules du mouvement uniformément varié servent à résoudre tous les problèmes relatifs au *mouvement vertical des corps pesants dans le vide.*

L'expérience nous apprend que, quand on laisse tomber un corps dans le vide, la pesanteur lui communique en une seconde une vitesse de $9^{m},8088$, si l'observation est faite à la latitude de Paris. On représente ce nombre par g : c'est l'accroissement de vitesse pendant chaque seconde.

C'est donc l'accélération due à la pesanteur. Cette accélération étant constante, le mouvement est uniformément varié. Par conséquent, les formules du mouvement vertical des corps pesants dans le vide s'obtiennent en remplaçant φ par g dans les formules du mouvement uniformément varié.

Si *le corps part du repos*, et si l'on compte les distances sur la verticale à partir du point où il commence sa chute, on a :

$$v = gt,$$

$$s = \tfrac{1}{2}\, gt^2.$$

Si, au contraire, *le corps est lancé de bas en haut,* avec une vitesse initiale v_0, le mouvement sera retardé, et nous aurons :

$$v = v_0 - gt,$$

$$s = v_0 t - \tfrac{1}{2}\, gt^2.$$

28. PROBLÈME. — *Calculer la hauteur à laquelle s'élèvera un corps pesant animé d'une vitesse donnée v_0, dirigée de bas en haut.*

Les formules du mouvement sont :

$$v = v_0 - gt,$$

$$s = v_0 t - \tfrac{1}{2}\, gt^2.$$

En faisant $v = o$, dans la première formule, on a la durée T de l'ascension ; il vient alors :

$$v_0 = g\mathrm{T},$$

d'où :

$$\mathrm{T} = \frac{v_0}{g}.$$

En substituant dans la seconde formule, on a la hauteur H à laquelle le mobile s'élève :

$$\mathrm{H} = \frac{{v_0}^2}{2g}.$$

C'est la *hauteur due à la vitesse v_0*.

REMARQUE. — Si le mobile parvenu à cette hauteur H commence à descendre, il est facile de voir que le temps de la chute est égal au temps de l'ascension, et que le mobile repasse au point de départ avec la vitesse v_0.

En effet, désignons par T′ la durée de la chute, c'est-à-dire le temps employé par le mobile pour descendre de la hauteur H, et par v' la vitesse à la fin de la chute. Nous aurons à démontrer que l'on a :

$$v' = v_0, \quad \text{et} \quad T' = T.$$

Or, on a :

$$v' = gT',$$

$$H = \tfrac{1}{2} gT'^2.$$

On en tire :

$$T' = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

d'où :

$$v' = \sqrt{2gH} = v_0;$$

$$T' = \frac{v_0}{g} = T.$$

La vitesse $v' = \sqrt{2gH}$ s'appelle la *vitesse due à la hauteur* H.

CHAPITRE III.

Mouvement rectiligne varié. — Accélération.

29. Pour arriver à l'étude du mouvement rectiligne varié en général, considérons d'abord un mouvement rectiligne uniformément varié. L'accélération dans ce mouvement est, comme on sait, la quantité constante dont la vitesse varie dans l'unité de temps.

Pendant le temps infiniment petit dt, la vitesse v s'accroît de φdt, que l'on appelle la *vitesse élémentaire acquise*, correspondant à ce temps infiniment petit. En divisant la vitesse élémentaire acquise par dt, on obtient l'accélération. Ainsi donc, dans ce mouvement, la *vitesse a une direction constante*, celle du mouvement : il en est de même de la *vitesse élémentaire acquise*, et de l'*accélération* qui est la vitesse acquise pendant l'unité de temps.

30. Dans un *mouvement rectiligne varié en général,* le mouvement a une direction constante ; la vitesse a aussi une direction constante, celle du mouvement. La vitesse acquise pendant un temps quelconque aura aussi la même direction. Mais, dans ce mouvement, la vitesse varie *en grandeur* d'un instant à l'autre d'une manière quelconque ; il en est de même de la vitesse acquise.

D'ailleurs, l'accélération n'est pas constante, puisque le mouvement n'est pas uniformément varié. Mais, à un instant donné, l'*accélération* du mouvement rectiligne varié *a une valeur finie et déterminée qui, si elle demeurait constante, transformerait le mouvement rectiligne varié en un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Il résulte de là que, si φ est l'accélération à la fin du temps t, dv la variation de vitesse pendant le temps dt, on aura :

$$dv = \varphi dt,$$

d'où :

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Or, comme on a :

$$v = \frac{ds}{dt},$$

il s'ensuit :

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

On voit que, *dans un mouvement rectiligne varié, l'accélération à un instant donné est exprimée par la dérivée première de la vitesse par rapport au temps, ou bien par la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.* La *direction* de cette accélération est évidemment celle de la vitesse.

Si donc le mouvement rectiligne varié a pour équation :

$$s = f(t),$$

nous aurons :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

31. Remarque. — Le mouvement rectiligne uniformément varié est un cas particulier du mouvement que nous venons d'étudier. On a alors $\varphi = \text{const.} = a$; par suite $\frac{dv}{dt} = a$, d'où $v = v_0 + at$, ce qui est l'équation du mouvement uniformément varié (n° **23**).

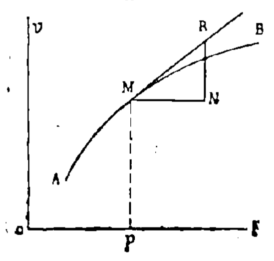
32. Dans le mouvement rectiligne varié quelconque, l'accélération est, en général, une fonction de t, et l'on peut construire la *courbe des accélérations* définie par une équation de la forme :

$$\varphi = \psi\,(t).$$

33. Proposons-nous maintenant de trouver graphiquement la grandeur de l'accélération dans un mouvement rectiligne varié. Nous avons vu (n° **24**) le moyen de déterminer graphiquement la grandeur de l'accélération dans le cas du mouvement uniformément varié, c'est-à-dire lorsque la ligne des vitesses est une ligne droite.

Si le mouvement rectiligne n'est pas uniformément varié, la ligne qui représente la *loi de variation de la vitesse* (courbe des vitesses) n'est plus une ligne droite. Pour déterminer l'accélération de ce mouvement à un instant quelconque, on fera une construction analogue à celle qui a servi à déterminer la vitesse dans un mouvement varié quelconque (n° **18**). Soit AB la courbe des viteses, M un point de cette courbe, correspondant au temps t. Menons MN parallèle à ot, et égal à la ligne qui représente l'unité de temps, puis menons NR parallèle à ov. La longueur NR nous donnera l'accélération du mouvement considéré.

Fig. 7.



34. Remarque. — Nous pouvons observer que, dans le mouvement rectiligne varié, *la vitesse élémentaire* acquise pendant le temps dt, est la vitesse infiniment petite dv qui, se composant avec la vitesse v que le mobile possède à la fin du temps t, donne la vitesse $v + dv$, *de même direction,* à la fin du temps $t + dt$: c'est la vitesse communiquée au mobile pendant le temps infiniment petit dt. L'*accélération* est le quotient de cette vitesse élémentaire acquise par le temps dt. Cette remarque nous sera utile plus loin (n° **57**).

35. Remarque. — Les valeurs numériques de la vitesse et de l'accélération dépendent uniquement de l'unité de temps et de l'unité de longueur. On peut se demander comment varieraient ces valeurs par un changement dans les unités de temps et de longueur.

Désignons par v' et φ' les valeurs numériques de la vitesse et de l'accélération à un instant t, lorsque l'on prend pour unité de longueur une unité m fois plus grande, et pour unité de temps une unité n fois plus grande. Soient s' et t' les nouveaux nombres qui représentent s et t à partir de l'origine ; nous aurons les deux équations :

$$s' = \frac{s}{m}, \quad t' = \frac{t}{n};$$

d'où :

$$ds' = \frac{ds}{m}, \quad dt' = \frac{dt}{n},$$

et, par conséquent,

$$v' = \frac{ds'}{dt'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{n}{m}.$$

On a donc :

$$dv' = \frac{n}{m} \cdot dv,$$

et, par suite,

$$\varphi' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{n^2}{m} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{n^2}{m} \cdot \varphi.$$

Ainsi donc, les valeurs numériques cherchées sont données par les formules :

$$v' = \frac{n}{m} \cdot v, \qquad \varphi' = \frac{n^2}{m} \cdot \varphi.$$

Problèmes sur les lois du mouvement rectiligne.

36. Tous les problèmes que l'on peut se proposer dans l'étude du mouvement rectiligne se réduisent au suivant : *connaissant une relation entre deux des quantités t, s, v, φ, trouver les valeurs des autres.*

1° On donne : $\qquad s = f(t)$.

On en tire :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

2° On donne : $\qquad v = f(t)$.

De la formule $v = \frac{ds}{dt}$, on tire :

$$ds = vdt = f(t)\,dt;$$

par conséquent,

$$s = s_0 + \int_0^t f(t)\,dt.$$

D'autre part, on a :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = f'(t).$$

3° On donne : $\varphi = f(t)$.

De la formule $\varphi = \frac{dv}{dt}$, on tire :

$$dv = \varphi\, dt = f(t)\, dt;$$

d'où :

$$v = v_0 + \int_0^t f(t)\, dt = \mathrm{F}(t).$$

Connaissant v, on aura s en fonction de t, au moyen de la formule :

$$s = s_0 + \int_0^t v dt = s_0 + \int_0^t \mathrm{F}(t)\, dt.$$

4° On donne : $\varphi = f(s)$.
On a donc :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f(s).$$

Multipliant les deux membres par $2ds$, il vient :

$$2ds\,\frac{d^2s}{dt^2} = 2\,f(s)\,ds\,;$$

d'où, en intégrant :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = v_0{}^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)\, ds = \mathrm{F}(s).$$

On a ensuite la formule :

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Or, v étant connu en fonction de s, on a :

$$dt = \frac{ds}{v};$$

d'où :

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{F(s)}}.$$

5° On donne : $v = f(s)$.

On a :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = f'(s) \cdot f(s).$$

D'autre part, de la formule :

$$v = \frac{ds}{dt},$$

on tire :

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{f(s)},$$

d'où :

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{f(s)}.$$

6° On donne : $\varphi = f(v)$.

De la formule $\varphi = \dfrac{dv}{dt}$, on tire :

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)};$$

et, de la formule :

$$ds = vdt,$$

on conclut :

$$s = s_0 + \int_0^t vdt = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)}.$$

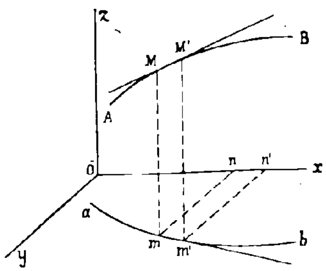
CHAPITRE IV.

Mouvement projeté.

37. Mouvement projeté sur un plan fixe. — Pendant qu'un point se meut dans l'espace, on peut le projeter à chaque instant sur un plan fixe. Les projections ainsi obtenues peuvent être considérées comme les positions successives d'un second point qui se mouvrait dans ce plan. Le mouvement de ce second point est ce qu'on appelle la *projection du mouvement du premier point sur ce plan*. Il est évident que la trajectoire du mouvement projeté est la projection de la trajectoire de l'espace.

Soient MM' et *mm'* les chemins infiniment petits parcourus pendant le temps *dt* par le mobile M et par sa projection *m* sur le plan (fig. 8). La vitesse du point M est :

Fig. 8.



$$\frac{MM'}{dt},$$

la vitesse du point *m* est :

$$\frac{mm'}{dt};$$

Or, *mm'* est la projection de MM' sur le plan fixe. Par conséquent, *la vitesse du mouvement projeté sur un plan fixe est la projection sur ce plan de la vitesse du mouvement dans l'espace.*

38. Mouvement projeté sur une droite fixe. — On peut aussi projeter à chaque instant le point mobile sur une droite fixe *ox*, en menant par chacune des positions successives du point des plans parallèles à un plan donné. Le mouvement projeté est alors un mouvement rectiligne suivant la droite *ox*.

Soient MM' et *nn'* les chemins infiniment petits parcourus par le mobile M et sa projection *n* pendant le temps infiniment petit *dt* (fig. 8).

La vitesse du point M est :

$$\frac{MM'}{dt},$$

la vitesse du point *n* est :

$$\frac{nn'}{dt};$$

Or, nn' est la projection de MM' sur la droite fixe ox. Par conséquent, *la vitesse du mouvement projeté sur une droite à un instant quelconque est égale à la projection sur cette droite de la vitesse que possède le point à cet instant.*

39. Remarque. — Ces deux propriétés existent que la projection soit oblique ou orthogonale. Dans le cas d'une projection orthogonale, nous aurons, en désignant par V et V' la vitesse et sa projection, et par θ l'angle que V fait avec le plan ou avec l'axe :

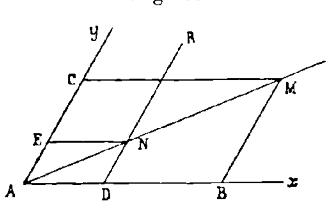
$$V' = V \cos \theta.$$

CHAPITRE V.

Composition des mouvements et des vitesses.

40. Soit un mobile A animé d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant Ax avec une vitesse AD, et d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant Ay avec une vitesse AE. Proposons-nous de *trouver le mouvement réel du point* A, *et sa vitesse.*

Fig. 9.



Au bout d'une seconde la ligne Ay, transportée parallèlement à elle-même sera venue en DR (fig. 9). Mais, en même temps, le point A parcourt la portion AE de cette droite Ay. Donc, à la fin de cette seconde, le point A sera en un certain point N. Au bout du temps t, la droite Ay vient en BM, de manière que l'on ait $AB = AD \times t$; dans ce même temps t, le point A parcourt sur Ay un espace AC, tel que l'on ait $AC = AE \times t$. Donc, à la fin du temps t, le mobile est en un point M.

Or, on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BM}{DN}.$$

Donc, les deux triangles AND et AMB sont semblables, et, par suite, les trois points A, N, M sont en ligne droite. Par conséquent, la position M du mobile à la fin du temps t, est sur la droite ANM, qui passe par les deux points A et N.

Par conséquent, *le mouvement réel du mobile est rectiligne et dirigé suivant la droite* ANM.

Mais, en vertu de la similitude des triangles ADN et ABM, on a :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD} = t,$$

d'où :

$$AM = AN \times t, \quad \text{ou bien } \frac{AM}{t} = AN = \text{const.},$$

quel que soit t.

Puisque le rapport de l'espace au temps est constant, quel que soit t, on en conclut que le mouvement réel du mobile est *uniforme*, et que sa vitesse est AN ; il est d'ailleurs évident que AN est la diagonale du parallélogramme ADNE, dont AD et AE sont les côtés.

Les deux mouvements suivant Ax et Ay sont appelés *mouvements composants*, et le mouvement suivant AM est le *mouvement résultant*. Les vitesses suivant Ax et Ay sont appelées *vitesses composantes*, et la vitesse suivant AM est la *vitesse résultante*.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La vitesse du mouvement résultant est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.*

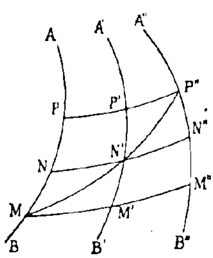
41. REMARQUE I. — Un point ne peut avoir qu'un seul mouvement. Quand on considère un point comme animé de deux ou de plusieurs mouvements, c'est une pure opération de l'esprit : cela n'a rien de réel.

REMARQUE II. — Les mouvements suivant Ay et Ax sont aussi appelés mouvement *relatif* et mouvement *d'entraînement*. Le mouvement réel s'appelle *mouvement absolu*.

42. Passons maintenant à la *composition des mouvements et des vitesses quelconques*.

Pendant qu'un point mobile décrit la trajectoire AB *d'une manière continue*, supposons que cette trajectoire occupe successivement les positions A'B', A''B''..., à la fin des temps t', t''... (fig. 10), AB étant la position de cette trajectoire à la fin du temps t. Soient M, N, P, les positions que le mobile occupe sur la courbe mobile AB aux temps t, t', t''... A la fin du temps t, le mobile est en M ; au bout du temps t', il est en N sur sa trajectoire, mais celle-ci est alors en A'B', et, par suite, le point se trouve en réalité en N'. De même, à la fin du temps t'', le mobile est en réalité en P'', et ainsi de suite. Donc, le mobile décrit dans l'espace la trajectoire MN'P''... qui est la *trajectoire absolue* du point M.

Fig. 10.



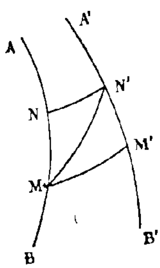
Le mouvement du point M sur sa trajectoire AB est le *mouvement relatif*, et le mouvement de cette trajectoire est le *mouvement d'entraînement*.

43. Nous avons vu que, si un point est animé à la fois de deux mouvements rectilignes et uniformes, la vitesse du mouvement résultant est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses composantes.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que, si nous considérons des mouvements quelconques, la *vitesse du mouvement absolu* (ou *vitesse résultante) sera encore représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants*.

Soient AB la trajectoire à la fin du temps t (fig. 11), et A'B' la trajectoire à la fin du temps t' ; M la position du mobile à la fin du temps t, N' sa position à la fin du temps t'. Le mobile décrit l'arc MN' dans le temps $t' - t = \Delta t$. Or, si l'on suppose l'intervalle $t' - t$ infiniment petit, la figure MNN'M' peut être considérée comme un parallélogramme ayant pour côtés MN et MM', et pour diagonale MN'. Par conséquent, le déplacement absolu ou réel MN' est la diagonale du parallélogramme construit sur les déplacements relatif et d'entraînement.

Fig. 11.



Mais, les déplacements infiniment petits MN', MN et MM' sont proportionnels aux vitesses correspondantes ; par conséquent, *la vitesse absolue est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses relative et d'entraînement*.

Cette propriété est connue sous le nom de *parallélogramme des vitesses*. On l'énonce comme suit :

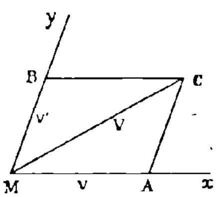
THÉORÈME. — *Si un point est animé de deux vitesses, la vitesse résultante est donnée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses composantes.*

44. REMARQUE. — Il résulte de là que si l'on désigne par v, v' les vitesses composantes et par V la vitesse résultante, nous aurons :

$$V : v : v' = \sin(v, v') : \sin(v', V) : \sin(V, v).$$

D'autre part, le triangle MAC (fig. 12) nous donne :

Fig. 12.



$$V^2 = v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \widehat{MAC} ;$$

or :

$$\cos \widehat{MAC} = -\cos \widehat{CAx} = -\cos(v,v').$$

Par suite,

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos(v,v').$$

45. En particulier, si l'angle (v,v') est droit, c'est-à-dire *si les vitesses composantes sont perpendiculaires entre elles*, le parallélogramme devient un rectangle, et, si l'on désigne par α l'angle (V, v), on a :

$$v = V \cos \alpha,$$

$$v' = V \sin \alpha,$$

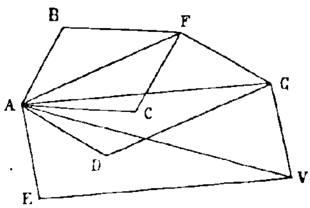
$$V^2 = v^2 + v'^2.$$

46. COMPOSITION D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE MOUVEMENTS. — Un point étant animé de plusieurs mouvements, on peut composer ces mouvements en un seul qui sera le mouvement résultant du point considéré.

On peut trouver *la vitesse résultante* au moyen des vitesses des mouvements composants en appliquant successivement la règle du parallélogramme des vitesses.

Soient AB, AC, AD, AE les vitesses des mouvements composants (fig. 13). On trouve que AF est la résultante de AB et AC ; AG la résultante de AF et AD ; AV la résultante de AG et AE. Par conséquent, AV est la résultante des vitesses données. Il est évident que, pour trouver cette résultante, il suffit de mener, par l'extrémité B de la première vitesse, une droite BF égale et parallèle à AC, par l'extrémité F une droite FG égale et parallèle à AD, et par l'extrémité G une droite GV égale et parallèle à AE. La droite AV qui joint le point A à l'extrémité du contour polygonal ABFGV est la résultante cherchée. Cette construction s'appelle le *polygone des vitesses*.

Fig. 13.



Il est facile de voir que *la résultante est égale et de sens contraire à la droite* VA *qui ferme le contour polygonal.*

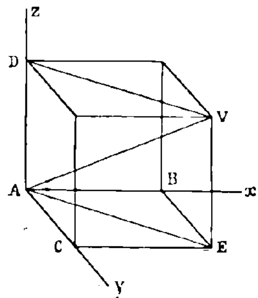
Remarque. — En particulier, *si les vitesses sont de même direction*, la vitesse résultante sera égale à leur somme algébrique, et dirigée suivant la même direction que les composantes.

47. Si les vitesses données sont au nombre de trois, et si leurs directions ne sont pas dans un même plan, on peut les composer de la manière suivante :

Soient AB, AC, AD les trois vitesses données (fig. 14).

En composant AB et AC, on obtient la résultante AE de ces deux vitesses ; en composant ensuite AE et AD, on trouve que AV est la résultante cherchée. Or, cette dernière droite est la diagonale du parallélipipède construit sur AB, AC et AD. Cette construction, constitue le *parallélipipède des vitesses*, et l'on a le théorème suivant :

Fig. 14.



THÉORÈME. — *La vitesse résultante de trois vitesses dont les directions ne sont pas dans un même plan est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les vitesses composantes.*

48. CAS PARTICULIER. — *Si les trois vitesses données sont perpendiculaires entre elles,* le parallélipipède est rectangulaire.

En désignant par v, v', v'' les trois vitesses composantes, par V la vitesse résultante, et par α, β, γ les angles que V fait avec les trois composantes, on a :

$$v = V \cos \alpha,$$

$$v' = V \cos \beta,$$

$$v'' = V \cos \gamma,$$

$$V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2.$$

49. DÉCOMPOSITION DES VITESSES. — On peut décomposer une vitesse donnée suivant des directions données.

Soient d'abord (fig. 12) Mx et My deux directions données, et MC = V la vitesse qu'il s'agit de décomposer suivant ces deux directions. Observons que, pour que cela soit possible, *il faut que la vitesse* V *donnée soit dans le plan* $y\text{M}x$. Il suffira de mener par le point C deux parallèles CA et CB aux deux directions, et alors MA et MB seront les deux composantes cherchées.

On peut aussi décomposer une vitesse suivant trois directions données Ax, Ay, Az (fig. 14). Il suffira de mener par le point V trois plans VB, VC, VD respectivement parallèles aux plans zy, zx, et xy, et l'on aura les trois composantes cherchées AB, AC et AD.

50. Composition analytique de plusieurs vitesses. — Soient v, v', v''... les vitesses données, et soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$... les angles que ces vitesses font avec les axes coordonnés rectangulaires.

En décomposant la vitesse v suivant les axes, on obtient les trois composantes :

$$v_x = v \cos \alpha,$$

$$v_y = v \cos \beta,$$

$$v_z = v \cos \gamma.$$

Faisant la même chose pour chacune des vitesses données, on aura, suivant l'axe des x, une série de vitesses de même direction dont la résultante, que nous désignerons par V_x est égale à la somme algébrique (n° **46**, remarque). On a donc :

$$V_x = \Sigma v_x = \Sigma v \cos \alpha ;$$

on aura, de même, suivant les axes des y et des z :

$$V_y = \Sigma v_y = \Sigma v \cos \beta,$$

$$V_z = \Sigma v_z = \Sigma v \cos \gamma.$$

Les trois vitesses V_x, V_y, V_z se composeront en une vitesse résultante V, dirigée suivant la diagonale du parallélipipède dont V_x, V_y, V_z sont les côtés (n° **47**), et nous aurons :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2,$$

ou bien :

$$V^2 = (\Sigma v \cos \alpha)^2 + (\Sigma v \cos \beta)^2 + (\Sigma v \cos \gamma)^2.$$

En désignant par *a, b, c*, les angles que V fait avec les axes, nous aurons :

$$V_x = V \cos a = \Sigma v \cos \alpha,$$

$$V_y = V \cos b = \Sigma v \cos \beta,$$

$$V_z = V \cos c = \Sigma v \cos \gamma ;$$

d'où l'on tire :

$$\cos a = \frac{\Sigma v \cos \alpha}{V},$$

$$\cos b = \frac{\Sigma v \cos \beta}{V},$$

$$\cos c = \frac{\Sigma v \cos \gamma}{V}.$$

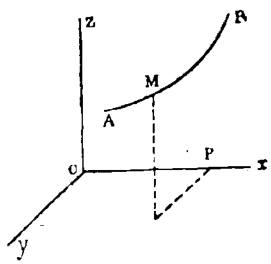
51. Remarque. — Nous avons vu (n° **46**) que la résultante d'un nombre quelconque de vitesses est égale et de sens contraire à la droite qui ferme le contour polygonal formé par les vitesses composantes. Il résulte de là que *la projection de la résultante sur une droite ou sur un plan est égale à la somme algébrique des projections des composantes.*

CHAPITRE VI.

Mouvement curviligne. — Éléments du mouvement.

52. Soit AB (fig. 15) la trajectoire d'un point rapportée à trois axes que nous supposerons rectangulaires, et soit M un point de cette trajectoire. Soient encore P, P', P'' les projections du point M sur les axes.

Fig. 15.



Pendant que le point M décrit sa trajectoire dans l'espace, ses projections se meuvent sur les axes. Or, la position d'un point M étant connue du moment où l'on connaît ses projections sur les axes, il est évident que le mouvement du point M sera bien défini, si l'on connaît les mouvements de ses trois projections sur les axes. Ces projections sont déterminées à un instant donné par les équations :

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t),$$

$$z = f_3(t).$$

Ces équations sont les équations du mouvement des projections de M sur les axes. On les appelle les *équations du mouvement du point* M.

Au moyen de ces équations il est facile de déterminer à chaque instant la position du mobile dans l'espace.

En éliminant t entre ces trois équations, on obtient deux relations entre les variables x, y, z. Ce sont *les équations de la trajectoire* du point M dans l'espace.

Il est souvent plus commode de conserver, pour représenter la trajectoire, les trois équations précédentes, qui définissent la courbe au moyen d'une variable auxiliaire t.

53. Proposons-nous maintenant de déduire *les éléments du mouvement dans l'espace* au moyen de ceux des trois mouvements suivant les axes.

En désignant par v_x, v_y, v_z les vitesses des trois projections du point M, on a :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t),$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = f'_3(t).$$

Or, on sait (n° **38**) que la vitesse du mouvement projeté sur un axe est égale à la projection de la vitesse sur cet axe. Donc, en désignant par v la vitesse du point M, et par α, β, γ les angles que sa direction fait avec les axes, on a :

$$v_x = v \cos \alpha,$$

$$v_y = v \cos \beta,$$

$$v_z = v \cos \gamma.$$

Donc, si par le point M on mène trois droites parallèles aux axes et égales respectivement à v_x, v_y, v_z, v sera la diagonale du parallélipipède construit sur ces droites. Par conséquent, la vitesse v du point M est la résultante des vitesses v_x, v_y, v_z de ses projections sur les axes, et l'on a :

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2,$$

ou bien :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

54. Cas particulier. — Il est évident que, si le mouvement du point s'effectue dans un plan, les équations du mouvement sont :

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t).$$

En éliminant t entre ces deux équations, on obtient une relation entre les variables x, y, qui sera *l'équation de la trajectoire du point* M.

Les vitesses des projections sur les axes sont :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t);$$

on en conclura comme précédemment que la vitesse v est la résultante de v_x et v_y, et l'on aura :

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2,$$

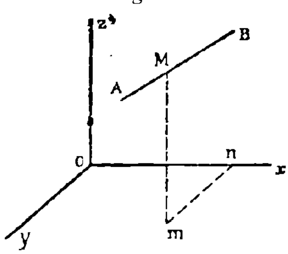
ou bien :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Accélération dans le mouvement d'un point.

55. Considérons d'abord un mouvement rectiligne varié. Dans ce mouvement la vitesse et l'accélération ont une direction constante, celle du mouvement. Elles ont pour expressions (fig. 16) :

Fig. 16.



$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

La vitesse du mouvement projeté sur l'axe des x est :

$$v_x = v \cos \alpha,$$

α étant une constante.

L'accélération du mouvement projeté sur l'axe des x, est $\frac{dv_x}{dt}$. Or, puisque α est constant, on a :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha,$$

ou bien, en désignant par φ et φ_x l'accélération du mobile, et celle de sa projection sur l'axe des x :

$$\varphi_x = \varphi \cos \alpha.$$

THÉORÈME. — *Dans le mouvement rectiligne varié, l'accélération du mouvement projeté sur un axe est égale à la projection de l'accélération sur cet axe.*

56. Il résulte de là que, dans le mouvement rectiligne, tous les résultats relatifs aux projections des vitesses s'appliquent aux accélérations. Nous aurons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La résultante des accélérations des projections est dirigée suivant la trajectoire rectiligne, et elle a pour valeur* $\dfrac{dv}{dt}$.

Vitesse élémentaire acquise. Accélération totale.

57. Considérons maintenant un *mouvement varié quelconque*. Dans ce mouvement, la vitesse change à chaque instant, non seulement en grandeur, mais aussi en direction.

On appelle *vitesse élémentaire acquise* la vitesse que le mobile acquiert pendant le temps dt. C'est la vitesse infiniment petite du qui, se composant avec la vitesse v du mobile à la fin du temps t, donne la vitesse $v + dv$ (de direction différente) à la fin du temps $t + dt$.

On appelle *accélération totale* l'accélération à laquelle est due la vitesse élémentaire acquise. C'est la vitesse que le mobile acquerrait pendant l'unité de temps, si, dans chacune des portions infiniment petites dans lesquelles cette unité de temps peut être divisée, il acquérait un élément de vitesse de même grandeur et de même direction que celui qu'il acquiert réellement pendant le même temps infiniment petit à la fin du temps t.

L'accélération totale à un instant quelconque est donc une vitesse finie qui a la même direction et le même sens que la vitesse élémentaire acquise relative à cet instant. Elle est égale au quotient de la vitesse élémentaire acquise par le temps infiniment petit dt correspondant.

58. Dans le mouvement rectiligne, la vitesse du mobile a toujours la même direction ; la vitesse élémentaire acquise, et, par conséquent, l'accélération ont aussi la même direction, qui est celle du mouvement.

Dans le mouvement curviligne, la vitesse élémentaire acquise et l'accélération n'ont pas une direction constante. On devra donc en déterminer, à chaque instant, la grandeur et la direction. A cet effet, on détermine les composantes de l'accélération totale suivant des directions connues.

59. Théorème. — *Dans un mouvement curviligne quelconque, l'accélération du mouvement projeté sur un axe, est égale à la projection de l'accélération totale sur cet axe.*

Soient v la vitesse du mobile à la fin du temps t, x, y, z les coordonnées du point M à cet instant. A la fin du temps $t + dt$, la vitesse est v', et les coordonnées du mobile sont $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$.

Les composantes de la vitesse v sont :

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt};$$

les composantes de la vitesse v' sont :

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt},$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt},$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt}.$$

Comme on le voit, ces dernières se composent des composantes de v, et de trois autres quantités $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$, qui seront donc les composantes de la vitesse élémentaire acquise : ce sont les projections de la vitesse élémentaire acquise sur les axes (n° **51**). Or, l'accélération totale a la même direction que la vitesse élémentaire acquise, et elle est égale à cette vitesse divisée par dt (n° **57**). Donc, les projections de l'accélération totale à laquelle est due cette vitesse élémentaire acquise, s'obtiennent en divisant par le temps dt, les projections de la vitesse élémentaire acquise, ce qui nous donne pour ces projections :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ainsi donc, $\frac{d^2x}{dt^2}$ est la projection de l'accélération totale sur l'axe des x. Mais, $\frac{d^2x}{dt^2}$ est l'accélération du mouvement projeté sur l'axe des x, lequel est rectiligne (n° **30**). D'ailleurs, l'axe des x étant quelconque, on en conclut que : *l'accélération du mouvement projeté sur un axe est égale à la projection de l'accélération totale sur cet axe.*

60. Il résulte de cette propriété que, si nous désignons par φ l'accélération totale, et par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes, nous aurons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi \cos \alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi \cos \beta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi \cos \gamma.$$

Par conséquent, si par le point M on mène des droites égales et parallèles aux accélérations des mouvements projetés sur les trois axes, et si sur ces droites on construit un parallélipipède, *la diagonale de ce parallélipipède sera précisément l'accélération totale du mobile.* Cette accélération totale est donc la résultante des accélérations des projections du mobile sur les axes, et l'on a :

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \text{ [1]}$$

---

1. D'ailleurs, il est évident que la vitesse élémentaire acquise est la diagonale du parallélipipède construit sur ses trois composantes $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$. Par conséquent, l'accélération totale qui a la même direction que la vitesse élémentaire acquise, et qui est égale à cette vitesse élémentaire acquise, divisée par dt (c'est-à-dire proportionnelle à cette vitesse élémentaire acquise), sera la diagonale du parallélipipède construit sur les trois côtés $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ $\left(\text{proportionnels à } \frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt}, \frac{d^2z}{dt}\right)$.

61. Cas particulier. — Dans le cas où le mouvement a lieu dans un plan, les équations du mouvement étant :

$$x = f_1 (t), \quad y = f_2 (t),$$

les accélérations des mouvements projetés sont :

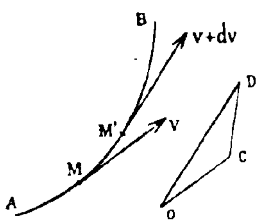
$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''_1 (t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2 (t),$$

et l'accélération totale sera la diagonale du parallélogramme construit sur deux droites parallèles aux axes et égales respectivement à ces deux quantités.

62. Propriété. — *L'accélération totale en un point* M *est située dans le plan osculateur à la trajectoire en ce point* M.

Soit AB la trajectoire du mobile, M la position de ce mobile à la fin du temps t, et M' sa position à la fin du temps $t + dt$ (fig. 17). Par un point quelconque O, menons une droite OC dont la grandeur, la direction et le sens soient ceux de la vitesse v du mobile au point M; par ce même point O, menons une droite OD dont la grandeur, la direction et le sens soient ceux de la vitesse $v + dv$ du mobile au point M' infiniment voisin du point M. Joignons CD : cette droite dont la grandeur est CD, la direction CD, et le sens C vers D est évidemment *égale et parallèle à la vitesse élémentaire* acquise correspondant au temps dt que le mobile emploie pour aller de M en M'. Par conséquent, l'accélération totale, à la fin du temps t,

Fig 17.



sera dirigée suivant une parallèle à CD, menée par le point M, et elle aura pour grandeur le quotient $\frac{\mathrm{CD}}{dt}$. Or, il est évident que le plan OCD est parallèle au plan osculateur en M ; par conséquent, *l'accélération totale est dans le plan osculateur en* M.

63. Remarque. — On peut démontrer cette propriété par l'analyse de la manière suivante : à cet effet, on décomposera l'accélération totale suivant trois axes rectangulaires dont l'un sera perpendiculaire au plan osculateur, et les deux autres situés dans ce plan. Nous allons démontrer que *la composante de l'accélération totale suivant la perpendiculaire au plan osculateur est nulle.*

Désignons cette composante par N', qui sera évidemment la projection de l'accélération totale sur cette perpendiculaire, et appliquons le théorème des projections. En désignant par ε, ε', ε'' les angles de cette perpendiculaire (la binormale) avec les axes, nous aurons :

$$\mathrm{N}' = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\varepsilon + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\varepsilon' + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\varepsilon'' ;$$

en remplaçant $\cos\varepsilon$, $\cos\varepsilon'$, $\cos\varepsilon''$ par leurs valeurs, et posant :

$$\mathrm{A} = \sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2},$$

on a :

$$\mathrm{N}' = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{\mathrm{A}} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{\mathrm{A}}$$

$$+ \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\mathrm{A}} ;$$

d'où :

$$\mathrm{AN}' = \frac{d^2x}{dt^2}(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + \frac{d^2y}{dt^2}(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$
$$+ \frac{d^2z}{dt^2}(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = o\,;$$

par conséquent :

$$\mathrm{N}' = o,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

64. Il résulte de là que l'on peut considérer l'accélération totale comme la résultante de ses deux projections sur deux axes rectangulaires situés dans le plan osculateur. On prend ordinairement les projections suivant la tangente et le rayon de courbure de la trajectoire : ce sont *l'accélération tangentielle*, et *l'accélération normale* ou *centripète*.

Nous allons chercher les valeurs de ces deux composantes que nous désignerons respectivement par φ_t et φ_n.

65. *L'accélération tangentielle* étant dirigée suivant la tangente, nous aurons, en appliquant le théorème des projections :

$$\varphi_t = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{ds}\,;$$

or, de la formule :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on tire :

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s\,;$$

par conséquent :

$$\varphi_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

66. Pour obtenir *l'accélération centripète*, remarquons que l'on a :

$$\varphi^2 = \varphi_t^2 + \varphi_n^2,$$

ou bien :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \varphi_n^2 ;$$

d'où :

$$\varphi_n^2 = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{dt^4}.$$

Or, on sait que, $d\alpha$ étant l'angle de contingence, on a :

$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2 = d\alpha^2 ds^2,$$

par suite :

$$\varphi_n^2 = \frac{d\alpha^2 ds^2}{dt^4} ;$$

d'autre part, ρ étant le rayon de courbure au point M, on a :

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho},$$

d'où, en ayant égard à la formule :

$$v = \frac{ds}{dt},$$

il vient :

$$\varphi_n^2 = \frac{v^4}{\rho^2},$$

d'où :

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

REMARQUE. — L'accélération centripète étant dirigée suivant le rayon de courbure, on peut obtenir l'expression précédente en appliquant le théorème des projections.

67. Il résulte de ce qui précède que, *si en un point de la trajectoire du mobile, on mène la tangente et le rayon de courbure, et si l'on prend sur ces lignes des longueurs respectivement égales à* $\frac{dv}{dt}$ *et à* $\frac{v^2}{\rho}$, *la diagonale du rectangle construit sur ces deux droites sera en grandeur et en direction l'accélération totale du mobile.*

On lui donne le nom *d'accélération totale* pour la distinguer de ses composantes.

68. REMARQUE. — Si le mouvement du mobile est *rectiligne*, le rayon ρ est infini, et l'accélération centripète est nulle. L'accélération totale se réduit à sa composante tangentielle $\frac{dv}{dt}$, ce qui est conforme à ce que nous avons vu (n° **30**).

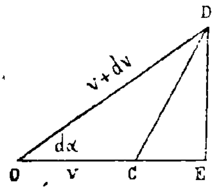
Si le mouvement *curviligne* est *uniforme*, l'accélération tangentielle est nulle, et l'accélération totale se réduit à sa composante normale $\frac{v^2}{\rho}$.

Enfin, si le mouvement est *rectiligne* et *uniforme*, les deux composantes de l'accélération totale sont nulles ; il en sera de même de l'accélération totale.

69. On peut encore observer que des deux composantes de l'accélération totale, la première, l'accélération tangentielle produit *la variation de grandeur de la vitesse*, et la seconde, l'accélération centripète produit le *changement de direction de cette vitesse*.

70. On peut obtenir les expressions de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète de la manière suivante :

Fig. 18.



Reprenons la figure OCD dans laquelle OC est égale et parallèle à v, OD égale et parallèle à $v + dv$ (fig. 18).

Nous avons vu (n° **62**) que CD est égale, parallèle et de même sens que la vitesse élémentaire acquise, et et que l'accélération totale qui a la même direction et le même sens que la vitesse élémentaire acquise est parallèle à CD, et égale à $\frac{\mathrm{CD}}{dt}$.

Cela posé, menons DE perpendiculaire à OC; il est évident que la vitesse infiniment petite CD pourra être considérée comme la résultante des deux vitesses CE et ED. Par conséquent, la vitesse élémentaire acquise pourra être considérée comme la résultante de deux vitesses : l'une égale à CE sera dirigée suivant la tangente en M à la trajectoire, l'autre égale à ED sera dirigée suivant une perpendiculaire à cette tangente menée dans le plan osculateur, c'est-à-dire suivant le rayon de courbure en M.

Si donc nous divisons ces deux composantes CE et ED par dt, nous aurons les deux composantes de l'accélération totale suivant ces deux directions, c'est-à-dire l'accélération tangentielle et l'accélération normale. Or, si nous désignons par $d\alpha$ l'angle infiniment petit compris entre les directions des vitesses v et $v + dv$, nous aurons :

$$CE = OE - OC\,;$$

or :

$$OE = OD \cos d\alpha,$$

par suite :

$$CE = (v + dv) \cos d\alpha - v.$$

Mais, l'angle $d\alpha$ étant très petit, on peut remplacer son cosinus par l'unité, et nous aurons pour la composante tangentielle de la vitesse élémentaire acquise :

$$CE = v + dv - v = dv\,;$$

donc, la composante tangentielle φ_t de l'accélération totale aura pour expression :

$$\varphi_t = \frac{CE}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

D'autre part, on a :

$$ED = OD \sin d\alpha = (v + dv) \sin d\alpha,$$

ou bien, en remplaçant $\sin d\alpha$ par $d\alpha$,

$$ED = (v + dv)\, d\alpha = v d\alpha + dv\, d\alpha.$$

Mais ED est un infiniment petit du premier ordre ; par conséquent, nous devons abandonner le second terme $dvd\alpha$ qui est du second ordre, et nous aurons pour la composante normale de la vitesse élémentaire acquise :

$$ED = v d\alpha.$$

Donc, la composante normale φ_n de l'accélération totale aura pour expression :

$$\varphi_n = \frac{\mathrm{ED}}{dt} = v\,\frac{d\alpha}{dt}.$$

Cette composante est *dirigée vers le centre de courbure.* D'ailleurs, puisque $d\alpha$ est l'angle de contingence, on a :

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho};$$

par suite :

$$\varphi_n = \frac{\mathrm{ED}}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

71. Remarque. — On peut encore obtenir les composantes de l'accélération totale suivant la tangente et le rayon de courbure de la manière suivante :

Soient λ, μ, ν, les angles que fait avec les axes le rayon de courbure, pris dans le sens qui va de la courbe au centre de courbure, et α, β, γ les angles de la tangente au point M avec les axes, on a :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = v \cos \beta,$$

$$\frac{dz}{dt} = v \cos \gamma;$$

on en tire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d \cos \alpha}{dt}.$$

Or, on sait que :

$$\cos \lambda = \rho \cdot \frac{d \cos \alpha}{ds};$$

d'ailleurs :

$$\frac{d \cos \alpha}{dt} = \frac{d \cos \alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \cos \lambda = \frac{v}{\rho} \cos \lambda;$$

donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \alpha \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho} \cos \lambda.$$

De même :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \cos \beta \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho} \cos \mu,$$

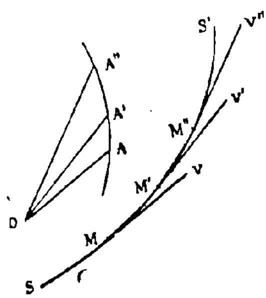
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \cos \gamma \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho} \cos \nu.$$

Il résulte de ces formules que l'accélération totale est la résultante d'une accélération $\frac{dv}{dt}$ dirigée suivant la tangente dans le sens du mouvement, et d'une accélération $\frac{v^2}{\rho}$ dirigée suivant la normale principale dans le sens centripète.

Indicatrice des accélérations totales.

72. Imaginons que M, M', M'' (fig. 19)..., soient les positions d'un mobile à la fin des temps t, $t+\theta$, $t+2\theta$.... θ étant un intervalle très petit. Menons des tangentes à latrajectoire SS' en ces points, et prenons MV, M'V', M''V''..., égales aux vitesses du mobile en ces différents points.

Fig. 19.



Par un point O, menons des droites OA, OA', OA''..., égales et parallèles aux vitesses v, v', v''... Le lieu des points A, A', A''..., sera une courbe dont les arcs AA', A'A''..., seront égaux aux vitesses élémentaires acquises. Ainsi donc, *les rayons vecteurs de cette courbe sont les valeurs des vitesses, et ses arcs sont les produits* φdt. Cette courbe s'appelle : *indicatrice des accélérations totales*.

Imaginons que, pendant que le mobile parcourt la trajectoire SS', un second mobile parcourre l'indicatrice, de manière que les deux mobiles passent en même temps aux points correspondants M et A, M' et A'.... Nous aurons la propriété suivante :

Propriété. — *Les vitesses du mobile auxiliaire sur l'indicatrice sont égales et parallèles aux accélérations totales du mobile réel sur sa trajectoire.*

Remarque. — Si la courbe SS' est plane, l'indicatrice est plane.

Accélération du mouvement projeté sur un plan fixe.

73. On sait (n° **37**) que la vitesse du mouvement projeté sur un plan fixe est à chaque instant la projection de la vitesse du point de l'espace. Cela posé, soit OCD le triangle dans lequel OC, OD, et CD sont respectivement égaux et parallèles à la vitesse v à la fin du temps t, à la vitese $v + dv$ à la fin du temps $t + dt$, et à la vitesse élémentaire acquise correspondant au temps dt. Projetons ce triangle sur le plan fixe, et soit *ocd* le triangle projection.

Le côté *oc*, projection de OC, est égal et parallèle à la vitesse de la projection sur le plan fixe à la fin du temps t, le côté *od*, projection de OD, est égal et parallèle à la vitesse de la projection sur ce plan fixe à la fin du temps $t + dt$. Donc, le côté *cd*, projection de CD, est égal et parallèle à la vitesse élémentaire acquise du mouvement projeté, puisqu'il jouera dans le mouvement projeté le même rôle que CD dans le mouvement de l'espace.

Donc, *l'accélération totale du mouvement projeté sur un plan est la projection sur ce plan de l'accélération totale du mouvement de l'espace.*

74. Remarque. — Si l'on projette sur le plan fixe le *rectangle* dont les côtés sont l'accélération tangentielle et l'accélération normale, et la diagonale l'accélération totale, la projection sera, en général, un *parallélogramme* dont la diagonale sera l'accélération totale du mouvement projeté. Les côtés de ce parallélogramme représentent deux composantes de cette accélération ;

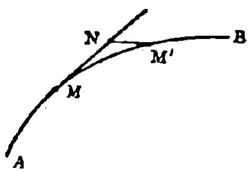
mais, ces composantes, qui ne sont pas rectangulaires, seront différentes de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale du mouvement projeté.

Donc, en général, l'*accélération tangentielle et l'accélération centripète du mouvement projeté sur un plan ne sont pas les projections de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète du mouvement de l'espace.*

Déviation due à l'accélération totale.

75. On peut encore trouver une expression de l'accélération totale dont nous aurons à faire usage dans la suite.

Fig. 20.



Considérons le mobile à la fin du temps t au point M, animé de la vitesse v (fig. 20). A la fin du temps $t + dt$, le mobile est arrivé en M', et il possède la vitesse $v + dv$. Le mouvement réel MM' peut être considéré comme résultant de deux mouvements rectilignes simultanés. Dans le premier mouvement, si l'accélération était nulle à partir du point M, le mobile continuerait à se mouvoir d'un mouvement uniforme sur la tangente, avec la vitesse v, et au bout du temps dt, il serait arrivé au point N, tel que l'on ait :

$$\mathrm{MN} = vdt.$$

Il résulte de là que NM' représente la *déviation* par rapport au mouvement rectiligne dûe à l'accélération. Le second mouvement, dû à l'accélération φ, est uniformément varié, puisque l'accélération φ peut être considérée comme constante en grandeur et direction pendant le temps infiniment petit dt. Le chemin NM′ parcouru par le mobile dans ce mouvement est donc :

$$NM' = \tfrac{1}{2}\,\varphi\,dt^2.$$

Donc, quand on connaît une des deux quantités NM′ ou φ, on peut calculer l'autre.

De cette formule on tire pour l'accélération φ :

$$\varphi = \frac{2NM'}{dt^2}.$$

On conclut de là que *l'accélération totale φ a la même direction et le même sens que la déviation* NM′ *et elle est égale au double de cette déviation divisée par dt^2*.

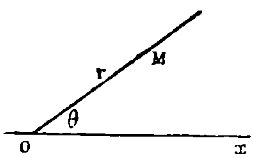
CHAPITRE VII.

Mouvement d'un point rapporté à des coordonnées polaires. — Vitesse.

76. On peut rapporter les diverses positions d'un point mobile à un système de coordonnées polaires.

Nous allons d'abord étudier *le mouvement dans un plan*. Soient O le pôle, Ox l'axe polaire, OM $= r$ le rayon vecteur, θ l'angle qu'il fait avec l'axe polaire (fig. 21). Les quantités r et θ qui fixent la position du point dans le plan sont évidemment des fonctions du temps t. Le mouvement du point M sera déterminé quand on connaîtra les relations qui lient r, θ et t. Ces relations sont les *équations du mouvement du point* M *en coordonnées polaires*.

Fig. 21.



En éliminant t entre ces équations on aura l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.

On peut considérer le point M comme animé de deux mouvements simultanés : en effet, on peut le regarder comme se mouvant suivant le rayon vecteur OM, pendant que celui-ci tourne autour du pôle O. La composition de ces deux mouvements donnera le mouvement réel.

Or, la vitesse du point M dans son mouvement le long du rayon vecteur est :

$$v_g = \frac{dr}{dt}.$$

C'est *la vitesse de glissement.*

La vitesse du point M en vertu du mouvement autour du pôle O sera dirigée suivant la perpendiculaire au rayon vecteur OM. Or, l'arc décrit par le point M pendant le temps dt étant $rd\theta$, la vitesse sera :

$$v_c = r\frac{d\theta}{dt}.$$

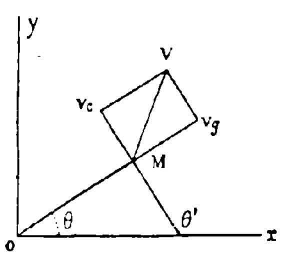
C'est *la vitesse de circulation.*

La vitesse du point M sera la diagonale du parallélogramme construit sur v_g et v_c.

77. Remarque I. — On peut trouver analytiquement ces deux composantes de la manière suivante :

Nous savons que les composantes de la vitesse suivant deux axes rectangulaires sont $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$: ce sont les projections de la vitesse V sur les axes. D'autre part, v_g et v_c sont les projections de la vitesse v sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire à ce rayon.

Fig. 22.



Nous aurons donc, en appliquant le théorème des projections (fig. 22) :

$$v_g = \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta, \quad (1)$$

$$v_c = \frac{dx}{dt}\cos\theta' + \frac{dy}{dt}\sin\theta'.$$

Or, on a $\theta' = 90° + \theta$, par suite

$$\cos \theta' = -\sin \theta, \quad \sin \theta' = \cos \theta ;$$

donc,

$$v_c = -\frac{dx}{dt} \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta . \tag{2}$$

Mais, les formules

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

En substituant dans les formules (1) et (2), il vient :

$$v_g = \frac{dr}{dt},$$

$$v_c = r \frac{d\theta}{dt},$$

valeurs que nous avons trouvées précédemment.

78. Remarque II. — Les formules (3) permettent de déterminer les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ de la vitesse suivant les axes, connaissant les vitesses v_g et v_c de glissement et de circulation.

Si, au contraire, on donne $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, et que l'on se propose de trouver la vitesse de glissement, et la vitesse de circulation, il faudra employer les formules (1) et (2), qui, d'ailleurs, ne sont autres que les formules (3) résolues par rapport à $\frac{dr}{dt}$ et $r\,\frac{d\theta}{dt}$.

79. Remarque III. — Dans le cas d'un mouvement plan, on considère encore une autre vitesse que l'on appelle *vitesse aréolaire*. Si l'on considère l'aire élémentaire MOM′ décrite par le rayon vecteur pendant le temps dt, la vitesse aréolaire v_a sera le quotient de cette aire par le temps dt. On aura donc :

$$v_a = \frac{\text{aire MOM}'}{dt} = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}.$$

80. Remarque IV. — Si, dans un mouvement plan, on prend sur le rayon vecteur une longueur OA égale à l'unité de longueur, le déplacement du point A mesure l'angle décrit par le rayon vecteur. La vitesse de ce point A est évidemment égale à $\frac{d\theta}{dt}$. On l'appelle *la vitesse angulaire*. En la désignant par ω, on a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

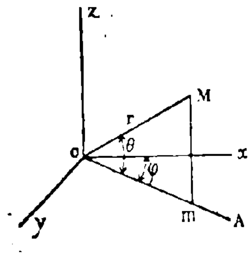
par conséquent :

$$v_c = r\,\frac{d\theta}{dt} = \omega r,$$

$$v_a = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}\,\omega r^2.$$

81. Considérons maintenant *le mouvement dans l'espace.* Lorsqu'un point se meut dans l'espace, on peut définir sa position à chaque instant, en donnant :

Fig. 23.



1° sa distance r à un point fixe O (fig. 23) ;

2° l'angle θ que fait le rayon vecteur OM avec sa projection Om sur un plan fixe xOy ;

3° l'angle φ que fait cette projection Om avec une droite fixe Ox tracée dans ce plan.

Les coordonnées r, θ, φ sont des fonctions du temps t ; le mouvement du point M sera déterminé, quand on connaîtra les relations entre ces quantités et le temps t. Ces relations constituent *les équations du mouvement du point* M.

On peut considérer le mouvement du point M comme résultant de trois mouvements simultanés :

1° Un *mouvement de glissement* du point M le long du rayon vecteur OM ;

2° Un *mouvement de rotation* du rayon OM autour du point O dans le plan MOA : c'est le *mouvement en latitude ;*

3° Un *mouvement de rotation* du plan MOA autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan fixe xOy : c'est le *mouvement en longitude.*

La *vitesse de glissement* le long du rayon vecteur est évidemment donnée par la formule :

$$v_g = \frac{dr}{dt}.$$

La vitesse du point M, supposé immobile sur le rayon vecteur OM, pendant que le rayon OM tourne autour du pôle O dans le plan MOA, ou *la vitesse en latitude* sera :

$$v_\lambda = r\,\frac{d\theta}{dt}\,;$$

elle est *dirigée suivant une perpendiculaire à* OM *dans le plan* MOA.

La vitesse du point M immobile dans le plan MOA, pendant que ce plan tourne autour de Oz, ou la *vitesse en longitude*, sera la même que celle de sa projection m sur le plan fixe, autour de l'origine. Or, cette dernière, qui correspond à une distance $r \cos \theta$ de l'origine sera :

$$r \cos \theta \,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Donc, la *vitesse en longitude* du point M est :

$$v_l = r \cos \theta \,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Elle est *dirigée suivant une perpendiculaire au plan* MOA.

La résultante de ces trois vitesses perpendiculaires entre elles deux à deux est la vitesse du point M dans l'espace.

82. Formules. — Les relations entre les coordonnées rectilignes et les coordonnées polaires étant :

$$x = r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \theta,$$

on en tire pour les vitesses des mouvements projetés sur les axes :

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos\theta\sin\varphi\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{dt} + r\cos\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

En résolvant ces équations par rapport à $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\theta}{dt}$ et $r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}$, on obtient en fonction des vitesses des projections sur les axes, la vitesse de glissement, la vitesse de circulation en latitude et la vitesse de circulation en longitude :

$$\frac{dr}{dt} = \cos\theta\cos\varphi\frac{dx}{dt} + \cos\theta\sin\varphi\frac{dy}{dt} + \sin\theta\frac{dz}{dt},$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\cos\varphi\frac{dx}{dt} - \sin\theta\sin\varphi\frac{dy}{dt} + \cos\theta\frac{dz}{dt},$$

$$r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi\frac{dx}{dt} + \cos\varphi\frac{dy}{dt}.$$

Accélération en coordonnées polaires.

83. Supposons d'abord que le mouvement du point M s'effectue dans un plan. Si nous prenons les composantes de l'accélération totale suivant le rayon vecteur, et suivant une perpendiculaire à ce rayon vecteur, nous aurons :

$$\varphi_r = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta,$$

$$\varphi_p = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta' + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta' = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta.$$

Or, des formules (3) (n° **77**), on tire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

En remplaçant, il vient :

$$\varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\varphi_p = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Les termes $\frac{d^2r}{dt^2}$, $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ qui entrent dans ces formules sont *l'accélération de glissement*, *l'accélération tangentielle du mouvement de circulation* du point M autour du point O, *l'accélération centripète* dans ce même mouvement de circulation.

Le terme $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ est une *accélération complémentaire* qui résulte du mouvement de rotation des directions suivant lesquelles on décompose l'accélération totale.

84. Considérons maintenant le mouvement d'un point dans l'espace. Nous aurons pour les composantes de l'accélération totale suivant les axes :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} = {} & \cos\theta\cos\varphi\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\cos\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \\
& - 2\cos\theta\sin\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\
& + 2r\sin\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\theta\cos\varphi\frac{d^2\theta}{dt^2} \\
& - r\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\cos\theta\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} = {} & \cos\theta\sin\varphi\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\sin\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \\
& + 2\cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\
& - 2r\sin\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{d^2\theta}{dt^2} \\
& - r\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} = {} & \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \\
& - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}.
\end{aligned}
$$

Ces formules nous apprennent que l'accélération totale est la résultante des huit accélérations suivantes :

$\frac{d^2r}{dt^2}$, accélération du mouvement de glissement ;

$r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, accélération tangentielle dans le mouvement de circulation en latitude ;

$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, accélération centripète du mouvement de circulation en latitude ;

$r\cos\theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, accélération tangentielle dans le mouvement de circulation en longitude ;

$-r\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, accélération centripète du mouvement de circulation en longitude ;

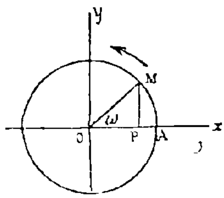
$$\left.\begin{array}{r} 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}, \\ 2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}, \\ 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}, \end{array}\right\}$$

accélérations complémentaires dûes aux divers mouvements du rayon OM autour du point O.

85. PROBLÈME. — *Un point* M *parcourt une circonférence de cercle de rayon r avec un mouvement uniforme. On demande de déterminer l'accélération totale du mobile à la fin du temps t.*

Rapportons le mouvement à deux axes rectangulaires ox et oy passant par le centre du cercle (fig. 24), l'axe ox passant par le point A où le mobile se trouve à l'origine du temps. Soient M la position du mobile à la fin du temps t, et v sa vitesse.

Fig. 24.



Nous aurons, en désignant par ω l'angle MoA :

$$x = r \cos \omega,$$

$$y = r \sin \omega.$$

Or, le mouvement du point M étant uniforme, on a :

$$\text{arc AM} = \omega r = vt,$$

d'où :

$$\omega = \frac{vt}{r}.$$

Par suite :

$$x = r \cos \frac{vt}{r},$$

$$y = r \sin \frac{vt}{r}.$$

Ce sont les *équations du mouvement* du point M.

On en tire, pour les composantes de la vitesse :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -v \sin \frac{vt}{r},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos \frac{vt}{r}.$$

De la première de ces formules on conclut que *la vitesse du mouvement projeté sur l'axe ox est proportionnelle à l'ordonnée* MP.

On a aussi pour les composantes de l'accélération totale :

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{r} \cos \frac{vt}{r},$$

$$\varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{r} \sin \frac{vt}{r};$$

par conséquent :

$$\varphi = \frac{v^2}{r}.$$

En désignant par α l'angle que l'accélération totale fait avec l'axe des x, on a :

$$tg\alpha = tg \frac{vt}{r} = \frac{y}{x};$$

donc, l'accélération totale qui a pour valeur $\frac{v^2}{r}$ est dirigée suivant le rayon vecteur oM, et de M vers o, puisque $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ sont de signes contraires à x et y.

Supposons que l'on projette le mobile à chaque instant sur un plan parallèle à ox, et faisant avec le plan du cercle un angle θ, et étudions *les propriétés du mouvement projeté.*

Prenons pour axes, dans le plan de projection, les projections des axes de l'espace. Ces projections sont rectangulaires, l'axe des x étant parallèle au plan de projection ; nous aurons, pour les équations du mouvement projeté :

$$x = r \cos \frac{vt}{r},$$

$$y = r \cos \theta \sin \frac{vt}{r}.$$

En éliminant t, on trouve pour l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 \cos^2 \theta} = 1 ;$$

cette trajectoire est donc une *ellipse*.

Des équations précédentes on tire :

$$\frac{dx}{dt} = - v \sin \frac{vt}{r},$$

$$\frac{dy}{dt} = v \cos \theta \cos \frac{vt}{r},$$

d'où l'on déduit la vitesse du mouvement projeté, qui sera un *mouvement varié.*

On a ensuite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{v^2}{r} \cos \frac{vt}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{v^2}{r} \cos \theta \sin \frac{vt}{r} ;$$

donc, l'accélération totale du mouvement projeté aura pour expression :

$$\varphi = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \frac{vt}{r} + \cos^2\theta \sin^2 \frac{vt}{r}}.$$

Si β est l'angle que cette accélération fait avec l'axe des x, on a :

$$tg\,\beta = \cos\theta\; tg\,\frac{vt}{r} = \frac{y}{x}.$$

Donc, l'accélération totale est dirigée du point mobile vers le point o', centre de l'ellipse, puisque $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ sont de signes contraires à x et y.

Propriété. — *L'accélération φ est proportionnelle à la distance du point mobile au centre de sa trajectoire elliptique.*

En effet, en désignant cette distance par d, on a :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sqrt{\cos^2 \frac{vt}{r} + \cos^2\theta \sin^2 \frac{vt}{r}} ;$$

donc :

$$\varphi = \frac{v^2}{r^2}\, d.$$

Remarque. — Tous ces résultats confirment ce que nous avons dit de l'accélération du mouvement projeté.

LIVRE II.

CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE I.

Mouvement d'un corps solide. Mouvement de translation.

86. Nous avons étudié jusqu'ici le mouvement d'un point. Nous nous proposons maintenant d'étudier le mouvement d'un *solide invariable*, c'est-à-dire d'un système de points dont les distances mutuelles restent constamment les mêmes.

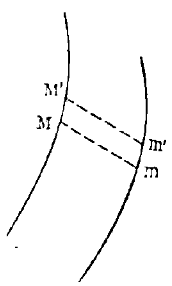
Nous commencerons par les mouvements simples, à savoir le mouvement de translation et le mouvement de rotation.

87. Mouvement de translation. — On dit qu'un système invariable mobile dans l'espace est animé d'un *mouvement de translation*, lorsque tous les points de ce système décrivent simultanément, pendant un temps infiniment petit, des chemins égaux, parallèles et de même sens.

88. Propriété. — *Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de translation, les vitesses de tous ses points sont égales, parallèles et de même sens.*

En effet, puisque les chemins élémentaires MM' et

Fig. 25.



mm' sont égaux, parallèles et de même sens, il est évident que les vitesses des points M et m seront égales, parallèles et de même sens (fig. 25).

Cette vitesse commune de tous les points à un même instant s'appelle *la vitesse de translation* à l'instant considéré. Cette vitesse peut d'ailleurs changer en grandeur et direction à chaque instant.

89. Remarque I. — Il est évident que, dans un mouvement de translation, une droite telle que Mm (fig. 25), joignant deux points M et m du solide, restera constamment parallèle à sa position primitive. En effet, puisque les arcs MM' et mm' sont égaux, parallèles et de même sens, la figure MM'$m'm$ peut être considérée comme un parallélogramme, et, par conséquent M'm' est égale et parallèle à Mm.

Remarque II. — Ce que nous avons dit du mouvement de translation d'un solide invariable, s'applique évidemment au mouvement de translation d'une figure plane dans son plan.

Remarque III. — Pour qu'une translation soit bien définie, on doit connaître *sa direction*, *la vitesse linéaire*, ainsi que *le sens* dans lequel le mouvement s'effectue.

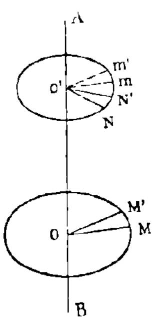
Mouvement de rotation. — Vitesse angulaire. Axe de rotation.

90. Si deux points d'un corps en mouvement restent constamment immobiles dans l'espace, tous les points de la droite qui joint ces deux points restent aussi fixes. On dit que le solide *tourne* autour de cette droite que l'on appelle *axe de rotation.*

Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, chacun de ses points décrit une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est sur l'axe.

91. PROPRIÉTÉ. — *Dans un mouvement de rotation autour d'un axe, les perpendiculaires abaissées des divers points du corps sur l'axe décrivent des angles égaux dans le même temps.*

Fig. 26.



Soient AB l'axe de la rotation (fig. 26), M et N deux points du corps, M' et N' les positions de ces deux points au bout d'un certain temps. Il s'agit de démontrer que l'on a :

$$\widehat{MOM'} = \widehat{NO'N'},$$

O et O' étant les centres des deux circonférences décrites par les points M et N.

Menons $O'm$ parallèle à OM : cette droite sera perpendiculaire à AB, et, par conséquent, dans le plan du cercle NO'N'. Or, lorsque les points M et N viennent en M' et N', la droite $O'm$ vient en $O'm'$, parallèle à OM', et l'angle $\widehat{mO'm'} = \widehat{MOM'}$.

D'autre part, l'angle N$O'm$ ne change pas pendant la rotation ; par conséquent, l'angle $N'O'm'$ qui est la nouvelle position de cet angle est égale à $NO'm$. On a donc :

$$\widehat{N'O'm'} = \widehat{NO'm} ;$$

en retranchant la partie commune $N'O'm$, il vient :

$$\widehat{mO'm'} = \widehat{NO'N'}.$$

Donc,

$$\widehat{MOM'} = \widehat{NO'N'}.$$

Par conséquent, les angles décrits dans le même temps par les perpendiculaires abaissées des différents points sur l'axe sont égaux. La valeur commune de tous ces angles correspondant à un temps quelconque est ce qu'on apppelle le *déplacement angulaire* du solide pendant ce temps.

92. Le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe est *uniforme*, lorsque le solide tourne d'angles égaux dans des temps égaux, quels que soient ces temps ; ou bien, lorsque les angles dont il tourne sont proportionnels aux temps correspondants. L'angle dont le solide tourne pendant l'unité de temps, s'appelle *la vitesse angulaire*. Elle mesure le degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur de ce mouvement.

93. Dans un mouvement de rotation uniforme d'un corps autour d'un axe, les différents points du corps décrivent d'un mouvement uniforme des circonférences de cercle. Mais, *les vitesses linéaires de ces différents points sont différentes*. En effet, soient MM' et NN' (fig. 26) les arcs décrits dans le même temps par les deux points M et N : ces arcs sont proportionnels aux rayons correspondants. Par conséquent, les arcs décrits dans l'unité de temps sont proportionnels aux rayons correspondants OM et O'N. Donc, *dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, les vitesses des différents points sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.*

94. Si l'on mesure les angles par les arcs correspondants sur une circonférence dont le rayon est égal à l'unité de longueur, la *vitesse angulaire sera l'arc décrit dans l'unité de temps par un point du corps situé à l'unité de distance de l'axe*. C'est la *vitesse linéaire de ce point.*

Il résulte de ce qui précède, que si ω est la vitesse angulaire du mouvement de rotation, et v la vitesse linéaire d'un point situé à une distance r de l'axe de rotation, nous aurons :

$$\frac{v}{\omega} = \frac{r}{1},$$

d'où :

$$v = \omega r.$$

95. Un mouvement de rotation qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Dans un mouvement de rotation varié, *la vitesse angulaire* varie à chaque instant. Mais, à un instant donné, elle a une valeur finie et déterminée qui, si elle demeurait constante à partir de cet instant, transformerait le mouvement varié en mouvement uniforme. Il résulte de là, que, si θ est l'angle dont le solide a tourné à la fin du temps t, c'est-à-dire le chemin parcouru par un point du corps situé à l'unité de distance de l'axe de rotation, $\frac{d\theta}{dt}$ sera *la vitesse de ce point* à la fin du temps t. Ce sera *la vitesse angulaire* du corps à la fin du temps t, et, en la désignant par ω, on a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

suivant que ω sera constante ou variable, le mouvement de rotation sera uniforme ou varié.

Dans le cas du mouvement varié, nous appellerons *accélération angulaire* la quantité $\frac{d\omega}{dt}$.

Le même raisonnement que nous avons fait ci-dessus (n° **94**), nous permettra de conclure que la vitesse v d'un point situé à une distance r de l'axe de rotation sera donnée par la même formule :

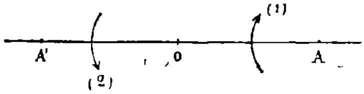
$$v = \omega r.$$

96. Pour qu'*une rotation soit bien définie*, on doit connaître *l'axe* autour duquel elle s'effectue, *la vitesse angulaire* ω et *le sens* du mouvement de rotation.

97. Axe de rotation. — Avant d'aller plus loin, nous allons définir ce que l'on entend par *axe de la rotation*.

Soit AA' la droite indéfinie autour de laquelle se fait la rotation (fig. 27). A partir d'un point O pris sur cette droite, portons une longueur $OA = \omega$, ω étant la vitesse angulaire. La droite finie OA indiquera l'axe de la rotation et la grandeur de la vitesse angulaire. Elle peut aussi indiquer *le sens* de cette rotation, si l'on convient d'attribuer

Fig. 27.



à OA un sens tel qu'un observateur, couché le long de l'axe, voie la rotation s'effectuer de gauche à droite. Ainsi, dire que OA est l'axe de rotation, c'est dire que l'observateur a les pieds en O, et la tête en A. La rotation s'effectuant *par convention* de gauche à droite, son sens est bien défini : elle aura lieu dans le sens de la flèche (1). Au contraire, dire que OA' est l'axe de rotation, c'est dire que l'observateur a les pieds en O, et la tête en A'. La rotation s'effectuant toujours de gauche à droite, elle aura lieu dans le sens de la flèche (2).

Ainsi donc, *l'axe de la rotation sera une longueur finie prise sur l'axe géométrique autour duquel le corps tourne, égale à la vitesse angulaire, et dirigée dans un sens tel que l'observateur couché le long de cet axe voie le corps tourner de gauche à droite.*

98. Remarque. — La convention que nous avons faite permet d'attribuer des signes aux rotations qui s'effectuent autour des axes coordonnés. Ainsi, si la rotation s'effectue autour de l'axe des x, et si elle a lieu des y vers les z, le sens de l'axe sera Ox, puisque l'observateur pour la voir s'effectuer de gauche à droite devra avoir les pieds en O, et la tête en x. Or, la direction Ox étant celle des abscisses positives, on dira que la *rotation est positive*,

Si la rotation a lieu des z vers les y, le sens de l'axe sera évidemment Ox', et *la rotation* sera dite *négative.*

CHAPITRE II.

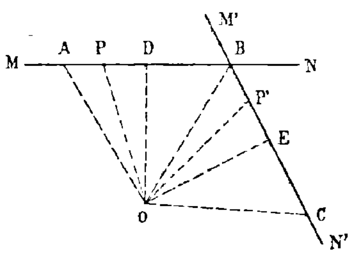
Mouvement d'une figure plane dans son plan.

99. Théorème. — *Lorsqu'une figure plane se meut dans son plan, on peut toujours amener cette figure d'une de ses positions à une autre position par un mouvement de rotation autour d'un des points du plan.*

Il est évident que la position et le mouvement d'une figure plane sont définis par la position et le mouvement d'une droite qui joint deux points A et B de la figure, ou bien d'une droite du plan de la figure, liée invariablement à cette figure. La position de la figure à un moment quelconque sera connue, si l'on connaît la position de cette droite.

Cela posé, nous allons démontrer que A'B' étant la position de la droite AB au bout d'un certain temps, on passera de la position AB à la position A'B' par une rotation autour d'un point du plan de la figure.

Fig. 28.



Soit MN une droite tracée dans le plan de la figure, et invariablement liée à cette figure, et supposons qu'au bout d'un certain temps la droite MN soit venue en M'N' (fig. 28). Soit B le point de rencontre de MN et M'N'. Ce point B peut être considéré comme appartenant à MN et à M'N'.

Si on le regarde comme appartenant à M'N', c'est un point de la figure dans sa seconde position. Il est évident que dans la première position de la figure, ce point se trouvait en un point de MN, par exemple en A.

Si, au contraire, on regarde le point B comme appartenant à MN, c'est un point de la figure dans sa première position. Par suite, dans la seconde position de la figure, ce point est venu se placer en C sur M'N', et l'on aura évidemment :

$$AB = BC.$$

Soit O le centre du cercle passant par les trois points A, B, C : les deux cordes AB et BC étant égales, les angles au centre AOB et BOC sont aussi égaux. Si donc, on fait tourner la droite MN autour du point O comme centre, jusqu'à ce que le point A vienne en B, le point B de MN viendra en C, et la droite MN viendra se placer sur M' N' ; en outre, la figure mobile, supposée liée à la droite MN qui l'entraîne dans son mouvement, passera de la première position à la seconde.

100. Remarque. — Considérons encore deux points P et P' qui se correspondent dans les deux positions de la figure, c'est-à-dire tels que AP = BP'. Par la rotation autour du point O, le point P vient se placer en P', après avoir décrit un arc de cercle ayant le point O pour centre. Nous pouvons observer que l'angle POP' est le même, quels que soient les points considérés.

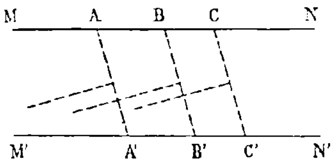
On a, en outre, la propriété suivante :

Propriété. — *Les perpendiculaires élevées au milieu des droites* PP' *qui joignent deux positions d'un même point concourent en un même point* O.

101. Nous avons supposé que les deux droites MN et

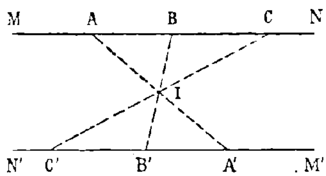
M'N' se coupent en un point B. Si ces deux droites étaient parallèles et de même sens (fig. 29), il suffirait, pour amener MN à coïncider avec M'N', de donner à MN, et par conséquent à la figure mobile, un mouvement de translation, ce qui équivaut à un mouvement de rotation autour d'un centre situé à l'infini. D'ailleurs, dans ce cas, les perpendiculaires élevées aux milieux de AA', BB', CC', etc., étant parallèles, leur point de rencontre est à l'infini.

Fig. 29.



102. Si les deux droites MN et M'N' étaient parallèles et de sens contraires (fig. 30), en joignant AA', BB', CC', etc., ces droites se coupent en leurs milieux I. Il est évident que, pour amener MN à coïncider avec M'N', il suffirait de donner à MN, et par conséquent à la figure mobile, un mouvement de rotation autour du point I. D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux milieux de AA', BB', CC', etc. se confondent, dans ce cas, avec le point I.

Fig. 30.



103. Mouvement élémentaire d'une figure plane dans son plan. — Le théorème énoncé plus haut (n° **99**) s'applique à un déplacement quelconque de la figure mobile, dans son plan, et, par suite, à un déplacement infiniment petit.

Donc, le déplacement élémentaire d'une figure plane dans son plan résulte d'un mouvement de rotation élémentaire autour d'un point du plan, point qui peut être situé à l'infini. Comme ce point change pour chaque déplacement élémentaire, on l'appelle *centre instantané de rotation.*

Dans ce cas, les droites telles que PP', qui joignent deux positions consécutives P et P' d'un même point de la figure mobile, deviennent les arcs infiniment petits de la trajectoire décrite par chacun de ces points ; alors, la perpendiculaire élevée au milieu de PP' devient la normale à la trajectoire, et l'angle POP' est l'angle infiniment petit dont la figure a tourné autour du point O.

104. Conséquences. — De ce qui précède résultent les propriétés suivantes :

1° A un instant donné, et dans un temps infiniment petit, tous les points de la figure mobile ont un mouvement de rotation élémentaire autour du centre instantané correspondant, ou, ce qui revient au même, autour d'un axe perpendiculaire au plan et mené par le centre instantané.

2° A un instant donné, les normales aux trajectoires de tous les points de la figure mobile concourent en un même point, *qui est le centre instantané de rotation.*

3° La vitesse de chaque point mobile est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au centre instantané de rotation.

4° Les vitesses de tous les points de la figure sont proportionnelles aux distances de ces points au centre instantané.

105. Mouvement continu d'une figure plane dans son plan. — *Quand une figure plane se meut d'une manière continue dans son plan, ce mouvement peut être produit au moyen d'une certaine courbe du plan, qui serait invariablement liée à la figure mobile,* *et qui roulerait sans glisser sur une autre courbe fixe située dans ce même plan.*

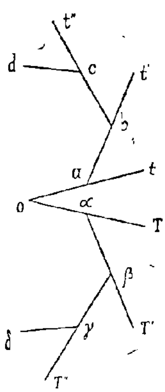
On peut encore énoncer ce théorème comme suit :

THÉORÈME. — *Le mouvement continu d'une figure plane dans son plan est un mouvement épicycloïdal.*

En effet, nous avons vu que le mouvement élémentaire d'une figure plane dans son plan est une rotation autour d'un certain point O, que l'on appelle *centre instantané de rotation*. Le mouvement continu de la figure est une suite de mouvements élémentaires, par conséquent, une suite de rotations autour de centres instantanés successifs infiniment voisins dans le plan.

Supposons que O soit le centre de rotation à l'instant considéré (fig. 31) : au bout d'un temps infiniment petit, le centre sera α, puis ce seront les points β, γ, δ ... Tous ces points O, α, β, γ..., forment une courbe du plan. Or, il existe un point a du plan, ce point étant invariablement lié à la figure, qui viendra coïncider avec α, lorsque ce point α sera le centre instantané ; de même, des points b, c, d..., du plan, invariablement liés à la figure mobile, coïncideront avec les points β, γ, δ..., lorsque ces derniers seront les centres de rotation. Tous ces points O, a, b, c... forment une courbe Oabc... liée invariablement à la figure mobile.

Fig. 31.



Cela posé, il est facile de s'assurer que, si nous supposons la figure mobile animée d'un mouvement continu, la courbe Oabc... est toujours tangente à la courbe fixe O$\alpha\beta\gamma$..., et roule sans glisser sur cette dernière. Soit, en effet, O le centre de rotation au moment considéré : le mouvement de la figure est une rotation élémentaire autour du point O, rotation qui amène le point a en coïncidence avec α. Donc, $aO\alpha$ est l'angle dont la figure tourne autour de O. Le déplacement étant infiniment petit, cet angle $aO\alpha$ est infiniment petit et les deux courbes sont tangentes en O. Le mouvement est donc un mouvement de roulement, et ce roulement s'effectue sans glissement : en effet, dans le mouvement élémentaire, le point O ne bouge pas, et le point a vient en α ; donc $Oa = O\alpha$, et, par suite, il y a simple roulement.

Donc, *dans le mouvement de la figure mobile dans son plan, la courbe* $Oabc$... *roule sans glisser sur* $O\alpha\beta\gamma$... Réciproquement, si la courbe mobile, à laquelle la figure est invariablement liée, roule sans glisser sur une courbe fixe, on obtient précisément le mouvement de la figure mobile.

La courbe fixe est le lieu des points du plan qui sont successivement les centres instantanés de rotation, et la courbe mobile est le lieu des points de la figure mobile qui viennent successivement coïncider avec les centres instantanés.

106. Remarque. — Par la première rotation autour du point O, le point a vient coïncider avec α (fig. 31) ; par la seconde rotation autour du point α, le point b vient coïncider avec β. Or, il est évident que l'angle dont la figure doit tourner autour de α pour amener cette coïncidence de b avec β est égal à la somme des angles bat + $T\alpha\beta$, c'est-à-dire égal à la somme des angles de contingence des deux courbes. Donc, *à un instant quelconque, la courbe mobile tourne autour du point de contact d'un angle égal à la somme des angles de contingence des deux courbes.*

107. Cette propriété permet de trouver *une relation entre la vitesse angulaire de la rotation instantanée, et* *la vitesse linéaire avec laquelle le point de contact se déplace le long des deux courbes.*

Soient R le rayon de courbure de la courbe fixe, et ρ le rayon de courbure de la courbe mobile, v la vitesse avec laquelle le point de contact se déplace le long des deux courbes. Dans le temps infiniment petit dt, ce point parcourt sur chacune des deux courbes un arc égal à vdt. Donc, l'angle de contingence correspondant dans la courbe fixe est $\frac{vdt}{R}$, et dans la courbe mobile $\frac{vdt}{\rho}$; par conséquent, la courbe mobile décrit dans le temps dt, un angle total égal à :

$$\frac{vdt}{R} + \frac{vdt}{\rho} = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho}\right) dt.$$

Or, ω étant la vitesse angulaire de la rotation instantanée, l'angle dont la figure mobile a tourné pendant le temps dt sera égal à ωdt. Nous aurons donc :

$$\omega dt = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho}\right) dt,$$

d'où l'on tire :

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho}\right),$$

pour la rotation cherchée.

Si les courbures des deux courbes sont dans le même sens, nous aurons :

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right), \quad \text{ou} \quad \omega = v\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right).$$

Mouvement d'un solide dont tous les points se déplacent parallèlement à un plan.

108. Considérons un corps se mouvant parallèlement à un plan. Faisons une section plane P' parallèle à ce plan P ; elle déterminera une figure plane mobile dans son plan P'.

Or, à un instant quelconque, le mouvement élémentaire de cette figure plane est un mouvement élémentaire de rotation autour d'un centre instantané. Par suite, le mouvement élémentaire du corps est un mouvement de rotation élémentaire autour d'un axe perpendiculaire au plan P, mené par le centre de rotation. Cet axe se déplace à chaque instant : on l'appelle *axe instantané de rotation.*

Donc, si un solide se meut d'une manière continue parallèlement à un plan fixe, son mouvement peut être produit au moyen d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan fixe, et qui serait invariablement lié au corps solide, et qui roulerait sans glisser sur un autre cylindre fixe dans l'espace, dont les génératrices seraient aussi perpendiculaires au plan fixe.

Le cylindre fixe est le lieu des droites qui sont successivement axes instantanés de rotation, et le cylindre mobile le lieu des droites de l'espace qui viennent successivement coïncider avec les axes instantanés.

CHAPITRE III.

Mouvement d'une figure sphérique sur sa sphère.

109. Si nous reprenons les raisonnements relatifs au mouvement d'une figure plane dans son plan, et si nous remplaçons les droites par des arcs de grands cercles, nous arriverons aux théorèmes suivants :

1° Une figure sphérique peut être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre position, par un mouvement de rotation autour d'un point de la sphère comme pôle, ou ce qui est la même chose, par une rotation autour d'un diamètre de la sphère comme axe.

2° Tout mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur sa sphère est une rotation infiniment petite autour d'un point de la sphère comme pôle (appelé *pôle instantané*), ou autour d'un diamètre de la sphère comme axe : ce diamètre s'appelle *axe instantané de rotation*.

3° Le mouvement continu d'une figure sphérique mobile sur la sphère est une suite de rotations infiniment petites. On peut l'obtenir en faisant rouler une ligne invariablement liée à la figure mobile sur une ligne fixe tracée sur la sphère. En d'autres termes, le *mouvement continu d'une figure sphérique mobile sur la sphère est un mouvement épicycloïdal sphérique.*

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

110. Supposons un corps solide mobile autour d'un point fixe O. Coupons ce corps par une sphère ayant le point O pour centre. Cette sphère déterminera par son intersection avec le corps une figure sphérique qui, dans le mouvement du corps solide, se déplacera en restant sur la sphère. Or, tout mouvement élémentaire de cette figure sphérique est un mouvement de rotation autour d'un diamètre de la sphère. Donc, *le mouvement élémentaire du solide lié à la figure sphérique est aussi une rotation autour de ce diamètre, c'est-à-dire autour d'un axe instantané passant par le point fixe* O.

D'autre part, nous savons que le mouvement continu de la figure sphérique sur la sphère peut s'obtenir en faisant rouler une courbe L, appartenant à la figure sphérique, sur une courbe fixe λ, tracée sur la sphère.

Nous pouvons prendre ces deux courbes L et λ comme directrices de deux cônes ayant pour sommets le point O, et alors le mouvement de L sur λ équivaut au roulement du cône (O, L) sur le cône fixe (O, λ). Donc, *le mouvement continu d'un solide invariable autour d'un point fixe* O, *s'obtient en faisant rouler sans glisser un cône, invariablement lié au solide et ayant pour sommet le point* O, *sur un cône fixe dans l'espace et ayant aussi pour sommet le point* O.

Le cône fixe dans l'espace est le lieu des axes instantanés de rotation, et le cône mobile est le lieu des droites de l'espace qui viennent successivement coïncider avec les axes instantanés.

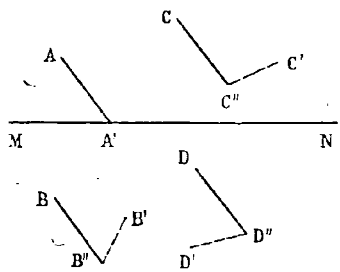
L'axe instantané de rotation à un moment donné, est la génératrice de contact du cône mobile avec le cône fixe.

Mouvement le plus général d'un corps solide.

111. Propriété. — *Quel que soit le mouvement d'un corps solide dans l'espace, on peut amener ce corps d'une de ses positions à une autre, en lui donnant d'abord un mouvement de translation et ensuite un mouvement de rotation autour d'un certain axe.*

Soient A, B, C, D... et A′, B′, C′, D′... (fig. 32), deux positions successives d'un système de points de figure invariable. Joignons AA′, puis, par les points B, C, D..., menons des droites BB″, CC″, DD″..., égales et parallèles à AA′. Pour amener le solide de la position (ABCD...) à la seconde position (A′ B′ C′ D′ ...), donnons-lui d'abord un mouvement de translation rectiligne représenté en grandeur et en direction par AA′. Les points B, C, D..., viendront en B″, C″, D″... Il n'y aura plus qu'à donner au solide un second mouvement en vertu duquel le point A′ restant immobile, les points B″, C″, D″... viendront en B′, C′, D′... Or, comme on sait, ce second déplacement du solide peut s'effectuer par une rotation autour d'un axe instantané passant par le point A′. Donc, on peut amener le solide de la première position

Fig. 32.



(ABCD...) à la seconde position (A'B'C'D'...) en lui communiquant :

1° Une translation suivant AA' ;

2° Une rotation autour d'un axe instantané MN passant par le point A'. (·)

112. Il est évident qu'il y a une infinité de manières de faire passer le corps de la première position à la seconde par la combinaison d'une translation et d'une rotation. En effet, il suffit de faire jouer à chacun des points que l'on peut imaginer faire partie du corps solide, le rôle que l'on a fait jouer au point A.

Or, parmi ces combinaisons, en nombre infini, il y en a une dans laquelle la translation a lieu parallèlement à l'axe de rotation. En effet, imaginons un plan P, perpendiculaire à MN, et soit F la section faite par ce plan dans le corps. La translation AA' transporte la figure F dans un plan P' parallèle au plan P. Soit F' la position de la section F après la translation AA', et soit F'' la position qu'elle occupe dans le plan P' après la rotation autour de MN. Or, pour faire passer la figure plane de sa première position F à la position F'', on peut d'abord lui donner un mouvement de translation suivant une perpendiculaire aux deux plans P et P', translation qui amènera la figure F en F_1, dans le plan P', puis faire tourner F_1 dans le plan P' autour d'un point de ce plan, c'est-à-dire autour d'un axe perpendiculaire aux plans P et P'. Si l'on conçoit le solide entraîné par cette figure, il passera de la position (ABCD...) à la position (A'B'C'D'...).

On voit donc que l'on peut amener le solide d'une position à une autre par une translation suivie d'une rotation autour d'un axe de même direction que la translation. Cet axe s'appelle *axe instantané de rotation* *et de glissement.* La position de cet axe change d'un instant à l'autre du mouvement.

113. Il résulte de ce qui précède que le mouvement élémentaire d'un corps solide dans l'espace est un *mouvement hélicoïdal*, c'est-à-dire qu'il peut être assimilé à celui d'une vis qui pénètre dans son écrou.

114. Si maintenant nous passons *au mouvement continu* d'un corps dans l'espace, nous pourrons le considérer de deux manières différentes. En effet, nous avons vu que :

1° Le mouvement élémentaire d'un corps peut être produit par une translation égale et parallèle au mouvement élémentaire de l'un des points du corps, et une rotation autour d'un axe passant par ce point. Si donc, on considère toujours le même point du corps, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le mouvement continu d'un corps dans l'espace peut être produit par le roulement d'un cône invariablement lié au corps, sur un cône qui est animé d'un mouvement de translation dans l'espace.*

2° Si l'on considère l'axe instantané de rotation et de glissement, on voit que les différentes positions de cet axe dans l'espace, forment une *surface réglée*, et les positions qu'il occupe dans le corps forment aussi une surface réglée. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le mouvement continu d'un corps dans l'espace peut être considéré comme produit par le roulement d'une surface réglée liée au corps sur une surface réglée fixe dans l'espace, accompagné d'un glissement le long de la génératrice de contact.*

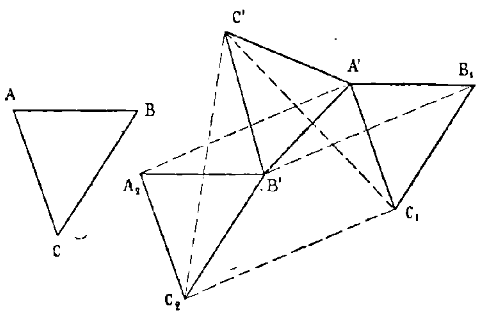
La surface réglée fixe dans l'espace est le lieu des axes instantanés de rotation et de glissement ; la surface mobile est le lieu des droites qui viennent successivement coïncider avec les axes de rotation et de glissement.

115. Nous avons démontré que, quel que soit le mouvement d'un corps solide dans l'espace, on peut amener ce corps d'une position à une autre, en lui donnant un mouvement de translation qui amène un des points dans sa nouvelle position, et ensuite un mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce point dans sa nouvelle position.

Nous avons aussi reconnu que l'on peut faire passer le corps de sa première position à la deuxième d'une infinité de manières, en changeant le point dont on considère le mouvement de translation.

Nous allons maintenant démontrer que, *quel que soit le point choisi, le mouvement de rotation sera toujours le même*.

Fig. 33.



Considérons trois points A, B, C du corps formant un triangle ABC invariablement lié au corps, et soit A'B'C' le triangle dans sa nouvelle position (fig. 33).

Passons d'abord de la première position à la seconde en considérant le point A. Nous aurons : 1° une translation AA' qui amène le triangle ABC en $A'B_1C_1$; 2° une rotation autour d'un axe passant par le point A'. Pendant cette rotation le point B_1 décrira un parallèle d'une sphère ayant son centre en A′, puisque $A'B_1 = A'B'$; le point C_1 décrira un parallèle d'une sphère ayant son centre en A′, puisque $A'C_1 = A'C'$. Par conséquent, l'axe de la rotation sera une droite passant par A′, et perpendiculaire aux droites C_1C' et B_1B'.

Si l'on avait considéré le point B, nous aurions eu une translation BB′ amenant le triangle ABC en $A_2B'C_2$, et une rotation autour d'un axe passant par B′, et perpendiculaire aux droites A_2A' et C_2C'. Or, on a C_2B' égal et parallèle à B_1C_1 ; donc, B_1B' est égal et parallèle à C_2C_1. Donc, *l'axe de rotation en* A′ *est perpendiculaire au plan* $C'C_1C_2$.

D'autre part, A_2C_2 est égal et parallèle à $A'C_1$: donc, A_2A' est égal et parallèle à C_1C_2, et, par conséquent, *l'axe de rotation en* B′ *est perpendiculaire au plan* $C'C_1C_2$. Il résulte de là que les axes de rotation en A′ et B′ sont parallèles et perpendiculaires au plan $C'C_1C_2$.

Il reste à démontrer que *les vitesses angulaires de ces deux rotations sont égales*. Or, le déplacement autour de l'axe en A′ est évidemment la projection sur le plan $C'C_1C_2$, perpendiculaire à l'axe de rotation, du déplacement $B_1A'B'$ dans l'espace, et le déplacement autour de l'axe en B′ est la projection sur ce même plan du déplacement $A_2B'A'$ dans l'espace. Mais, les deux angles $B_1A'B'$ et $A_2B'A'$ sont égaux dans l'espace comme alternes internes ; donc, leurs projections sur un même plan sont égales. Par conséquent, les déplacements autour des axes en A′ et B′ sont égaux, et, par suite, les vitesses angulaires des deux rotations sont égales.

116. Propriété. — *Le déplacement total d'un point quelconque du corps, estimé suivant l'axe de rotation, est le même pour tous les points.*

En effet, le déplacement total du point C, par exemple, est CC′ ; or, CC′ est la résultante des deux déplacements CC_1 et C_1C'. Donc, la longueur CC' estimée suivant l'axe, c'est-à-dire sa projection sur l'axe, sera la somme des projections de ses composantes CC_1 et C_1C'. Mais, la projection de C_1C' sur l'axe est nulle ; donc, le déplacement d'un point quelconque estimé suivant l'axe de rotation est égal à la projection sur cet axe de la translation de ce point. Or, la translation est la même pour tous les points du corps. Par conséquent, le déplacement total, estimé suivant l'axe, est le même pour tous les points.

117. Cette propriété peut être traduite par la suivante :

PROPRIÉTÉ. — *Si, par un point de l'espace, on mène une parallèle à l'axe de la rotation, et si, par ce même point, on mène des droites égales et parallèles aux déplacements des différents points, le lieu géométrique des extrémités de ces droites est un plan perpendiculaire à l'axe.*

118. COROLLAIRE. — Pour construire l'axe, il suffira de mener par un point quelconque de l'espace, trois droites égales et parallèles aux trois déplacements de trois points du corps. Le plan du triangle formé par les extrémités de ces droites sera celui de la rotation, et la perpendiculaire à ce plan sera l'axe de la rotation.

CHAPITRE IV.

Composition des mouvements simultanés d'un corps solide. Composition des translations.

119. COMPOSITION DES TRANSLATIONS. — Si un corps est animé de deux mouvements élémentaires de translation, chacun de ses points décrira la diagonale du parallélogramme construit sur les déplacements élémentaires dans les mouvements composants. Or, tous les parallélogrammes ainsi obtenus pour les différents points ont leurs côtés égaux et parallèles : il en est de même des diagonales qui sont égales et parallèles. Par conséquent, le déplacement résultant a même direction, même sens et même grandeur pour chaque point : c'est donc un *mouvement de translation*. On voit, en outre, que *la vitesse du solide est déterminée en grandeur, direction et sens par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.*

120. Si un corps est animé de *plusieurs mouvements élémentaires de translation*, le mouvement résultant sera une translation, dont la vitesse se déduira des vitesses des mouvements composants par la règle du polygone des vitesses.

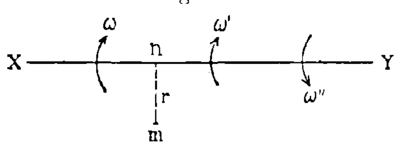
121. Réciproquement, une translation peut être décomposée en trois translations parallèles à trois axes rectangulaires ; les vitesses de ces translations seront les côtés du parallélipipède dont la vitesse donnée sera la diagonale.

Composition des rotations.

122. THÉORÈME. — *Deux ou plusieurs rotations s'effectuant autour d'un même axe se composent en une rotation unique dont la vitesse angulaire est égale à la somme algébrique des vitesses angulaires des rotations composantes.*

Soient trois rotations ω, ω', ω'' autour de l'axe XY (fig. 34). Imaginons un plan quelconque passant par l'axe XY, et soient m un point de ce plan, $mn = r$ sa distance à l'axe XY.

Fig. 34.



En vertu de la rotation ω, le point m tend à s'élever au-dessus du plan et perpendiculairement à ce plan avec une vitesse :

$$v = \omega r.$$

En vertu de la rotation ω', le point m tend à s'élever perpendiculairement au plan avec une vitesse :

$$v' = \omega' r.$$

En vertu de la rotation ω'', de sens contraire aux deux précédentes, le point m tend à s'abaisser au-dessous du plan, perpendiculairement au plan avec une vitesse :

$$v'' = \omega'' r.$$

Par conséquent, la vitesse du point m perpendiculairement au plan sera :

$$V = v + v' - v'' = (\omega + \omega' - \omega'')\, r.$$

C'est la vitesse avec laquelle le point m tend à s'élever au-dessus du plan : or, cette vitesse V serait produite par une rotation Ω autour du même axe, et telle que l'on ait :

$$V = \Omega r.$$

On a donc :

$$\Omega = \omega + \omega' - \omega'',$$

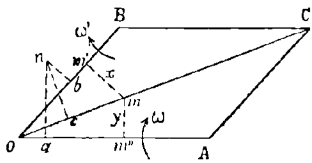
ce qui démontre le théorème énoncé.

123. Composition des rotations autour d'axes concourants. — Soit un solide animé de deux rotations élémentaires autour de deux axes concourants, et soient ω, ω' les vitesses angulaires de ces deux rotations.

Soient OA, OB les deux axes de rotation (fig. 35), c'est-à-dire les droites qui représentent la position de l'axe, la grandeur de la vitesse angulaire et le sens du mouvement. Je dis que *le mouvement résultant sera une rotation dont l'axe sera représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites* OA *et* OB.

En effet, le point de rencontre O des deux axes reste fixe dans les deux mouvements composants ; par conséquent, le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe passant par le point O.

Fig. 35.



Nous allons démontrer que *cet axe est dirigé suivant la diagonale du parallélogramme*. A cet effet, cherchons un second point de l'axe : je dis d'abord que ce point doit se trouver dans le plan des deux axes donnés. En effet, ce point doit rester immobile en vertu des deux rotations. Or, les deux composantes de la vitesse d'un point M situé en dehors du plan sont respectivement perpendiculaires aux plans MOA et MOB : elles ne sont donc pas dirigées suivant une même droite, et ne peuvent par conséquent pas se détruire. Donc, ce point est situé dans le plan des deux axes. De plus, il doit se trouver dans l'angle des deux axes, autrement ses vitesses ne seraient pas de sens contraires. Soit donc m un point à l'intérieur de l'angle AOB : les deux composantes de la vitesse de ce point sont perpendiculaires au plan AOB. En vertu de la rotation ω, le point m s'abaisse au-dessous du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse égale à ωy, y étant la distance du point m à l'axe OA ; en vertu de la rotation ω' le point m s'élève au-dessus du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse égale à $\omega' x$, x étant la distance du point m à l'axe OB. Le point m sera donc immobile, si l'on a :

$$\omega' x = \omega y.$$

Or, cette équation exprime une propriété qui appartient à tous les points de la diagonale du parallélogramme, laquelle sera donc la direction de l'axe de la rotation résultante.

Reste à trouver *l ι grandeur de la vitesse angulaire* Ω *de la rotation résultante.*

A cet effet, considérons un point n du plan des deux axes (fig. 35). En vertu de la rotation ω, ce point n s'abaisse en-dessous du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse égale à $\omega\,.\,na$; en vertu de la rotation ω', il s'abaisse en-dessous du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse égale à $\omega'\,.\,nb$. Donc, en vertu des deux rotations ω et ω', il s'abaisse avec une vitesse égale à :

$$\omega\,.\,na + \omega'\,.\,nb.$$

Désignons par Ω la vitesse angulaire inconnue résultante ; nous devrons avoir :

$$\Omega\,.\,nc = \omega\,.\,na + \omega'\,.\,nb. \qquad (1)$$

Or, dans le parallélogramme OACB, on a :

$$\mathrm{OC}\,.\,nc = \mathrm{OA}\,.\,na + \mathrm{OB}\,.\,nb. \qquad (2)$$

Mais, par hypothèse, nous avons supposé :

$$\mathrm{OA} = \omega, \quad \mathrm{OB} = \omega' ;$$

donc, la formule (1) devient :

$$\Omega\,.\,nc = \mathrm{OA}\,.\,na + \mathrm{OB}\,.\,nb. \qquad (3)$$

La comparaison des formules (2) et (3) nous donne $\Omega = \mathrm{OC}$ pour la grandeur de la vitesse angulaire de la rotation résultante. On voit, en outre, que le sens de cette rotation est OC, puisqu'elle doit être telle que le point n s'abaisse en-dessous du plan.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La rotation résultante de deux rotations concourantes est représentée en grandeur, direction et sens par la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des deux rotations données.*

124. COROLLAIRE. — Comme conséquences de ce théorème, nous aurons les relations suivantes :

$$\omega : \omega' : \Omega = \sin(\omega', \Omega) : \sin(\omega, \Omega) : \sin(\omega, \omega'),$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos(\omega, \omega').$$

125. Il résulte de ce qui précède que *des rotations en nombre quelconque autour d'axes concourants* se composent en une rotation unique représentée par la droite qui ferme le contour polygonal des axes des rotations composantes.

126. Trois rotations autour de trois axes concourants se composent en une rotation unique dont l'axe est *la diagonale du parallélipipède* construit sur les axes des rotations composantes.

127. CAS PARTICULIER. — Si les rotations sont rectangulaires, on a :

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2,$$

$$\omega_x = \omega \cos \alpha,$$

$$\omega_y = \omega \cos \beta,$$

$$\omega_z = \omega \cos \gamma.$$

128. Il résulte de là qu'une rotation peut être décomposée en trois rotations autour des trois axes rectangulaires.

129. — Composition analytique d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes concourants. — Soient $\omega\ (\alpha, \beta, \gamma)$, $\omega'\ (\alpha', \beta', \gamma')$, $\omega''\ (\alpha'', \beta'', \gamma'')$... les axes des rotations données. Nous pouvons décomposer la rotation ω en trois rotations autour de trois axes rectangulaires, et nous aurons pour ces trois composantes :

$$\omega \cos \alpha, \quad \omega \cos \beta, \quad \omega \cos \gamma\,;$$

faisant la même opération pour chacune des rotations données, nous aurons *autour de l'axe des x* des rotations $\omega \cos \alpha$, $\omega' \cos \alpha'$,... qui se composeront en une rotation dont l'axe sera $\Sigma\omega \cos \alpha$ (n° **122**). De même, autour de l'axe des y, nous aurons une rotation dont l'axe sera $\Sigma\omega \cos \beta$, et autour de l'axe des z une rotation dont l'axe sera $\Sigma\omega \cos \gamma$.

Ces trois rotations autour de trois axes rectangulaires se composent en une rotation unique, telle que l'on ait (n° **127**) :

$$\Omega^2 = (\Sigma\omega \cos \alpha)^2 + (\Sigma\omega \cos \beta)^2 + (\Sigma\omega \cos \gamma)^2.$$

En désignant par a, b, c, les angles que l'axe Ω fait avec les axes coordonnés, nous aurons :

$$\Omega \cos a = \Sigma\omega \cos \alpha,\ \ \Omega \cos b = \Sigma\omega \cos \beta,\ \ \Omega \cos c = \Sigma\omega \cos \gamma,$$

d'où :

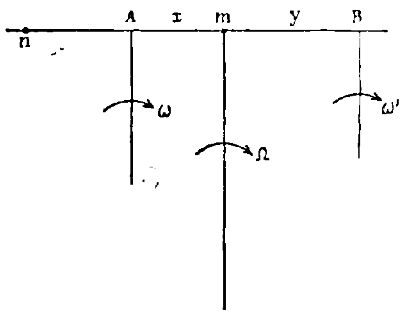
$$\cos a = \frac{\Sigma\omega \cos \alpha}{\Omega}, \quad \cos b = \frac{\Sigma\omega \cos \beta}{\Omega}, \quad \cos c = \frac{\Sigma\omega \cos \gamma}{\Omega}.$$

Composition des rotations autour d'axes parallèles.

130. Soit un solide animé de deux rotations de même sens autour de deux axes parallèles. Sous l'action de chacune de ces deux rotations ω et ω', chacun des points du corps se meut parallèlement à un plan perpendiculaire aux deux axes de rotation. Donc, tous les points du corps ont des vitesses parallèles à ce plan.

Par conséquent, le mouvement résultant est ou une translation parallèle à ce plan, ou une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire parallèle aux deux axes.

Fig. 36.



Dans ce dernier cas, nous pourrons déterminer cet axe, c'est-à-dire les points du corps qui restent immobiles sous l'action des deux rotations, ou bien dont la vitesse est nulle. Il est évident que ces points sont situés dans le plan des deux axes. Car, les composantes de la vitesse d'un point situé en dehors de ce plan ne sont pas dirigées suivant la même droite, et, par conséquent, elles ne peuvent pas se détruire. De plus, les points cherchés sont situés entre les deux axes ; autrement, ces composantes ne seraient pas de sens contraires.

Soit donc m un point compris entre les deux axes (fig. 36) : les deux vitesses de ce point sont de sens contraires $-\omega x$ et $+\omega' y$, en désignant par x et y les distances Am et mB ; pour que ce point soit immobile, on doit avoir :

$$-\omega x + \omega' y = 0,$$

d'où :

$$\omega x = \omega' y,$$

ou bien :

$$\frac{x}{y} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Donc, le point m divise la droite AB en deux segments inversement proportionnels aux vitesses angulaires ω et ω'. On reconnaîtra facilement que tous les points de la parallèle aux deux axes, menée par le point m, jouiront de la même propriété d'être immobiles : cette droite est donc l'axe de la rotation résultante.

Cherchons la vitesse angulaire de cette rotation résultante. Soit n un point du plan des deux axes : en vertu de la rotation ω, le point n s'élève au-dessus du plan, perpendiculairement à ce plan, avec une vitesse égale à $\omega \,.\, n$A ; en vertu de la rotation ω', le point n s'élève avec une vitesse égale à $\omega' \,.\, n$B. Donc, sous l'action des deux rotations, le point n s'élève avec une vitesse égale à $\omega \,.\, n\text{A} + \omega' \,.\, n\text{B}$. Si l'on imagine que Ω soit la vitesse angulaire résultante, *de même sens que les deux autres*[1], le point n s'élèverait, en vertu de

1. Elle doit être de même sens, puisque sous l'action des deux rotations simultanées le point n s'élève au-dessus du plan.

cette rotation avec une vitesse égale à $\Omega \,.\, mn$, et l'on aurait :

$$\Omega \,.\, mn = \omega \,.\, nA + \omega' \,.\, nB.$$

Or, on a :

$$nB = mn + y, \quad nA = mn - x\,;$$

par suite,

$$\Omega \,.\, mn = \omega\,(mn - x) + \omega'\,(mn + y)\,;$$

d'où, en vertu de la relation $\omega x = \omega' y$,

$$\Omega \,.\, mn = \omega \,.\, mn + \omega' \,.\, mn,$$

et enfin :

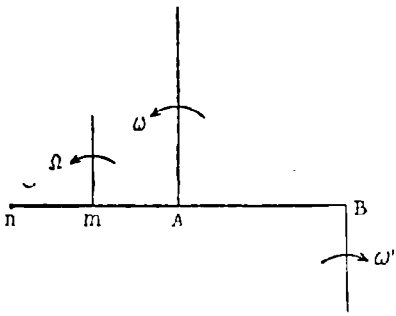
$$\Omega = \omega + \omega'.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux rotations parallèles et de même sens se composent en une rotation de même sens que les rotations proposées, autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, situé dans leur plan et compris entre ces deux axes, dont les distances à ces axes sont en raison inverse des vitesses angulaires correspondantes. La vitesse angulaire de la rotation résultante est égale à la somme des vitesses angulaires des deux rotations composantes.*

131. Supposons les *deux rotations parallèles et de* *sens contraires*. Soient ω et ω' les vitesses angulaires, et soit $\omega > \omega'$ (fig. 37). Le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe parallèle aux deux axes ω et ω'. Cet axe est dans le plan des deux axes donnés, en dehors de la portion du plan comprise entre ces deux axes, et du côté de l'axe qui correspond à la plus grande vitesse angulaire.

Fig. 37.



En effet, les points de l'axe de la rotation résultante devant avoir une vitesse nulle, ne peuvent être compris entre les deux axes, puisque, pour tous les points compris entre ces deux axes les composantes de la vitesse sont de même sens, et ne peuvent se détruire.

Soit donc un point m pris en dehors de la portion du plan comprise entre les deux axes, et soient $m\text{A} = x$, $m\text{B} = y$ ses distances aux deux axes. Les vitesses de ce point correspondant aux deux rotations sont de sens contraires, et égales à ωx et $\omega' y$. Pour que ce point soit immobile, on doit donc avoir :

$$\omega x = \omega' y.$$

Or, puisque, par hypothèse, $\omega > \omega'$, il s'ensuit que l'on a $x < y$.

De cette équation on tire :

$$\frac{x}{y} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

On voit que le point m jouit de la propriété que ses distances aux points A et B sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires correspondantes ω et ω', et qu'il est situé du côté de l'axe correspondant à la plus grande vitesse angulaire. On reconnaîtra que tous les points de la parallèle aux deux axes menée par le point m jouiront de la même propriété. Cette droite est donc l'axe de la rotation résultante. En outre, la rotation résultante est de même sens que ω et sa vitesse angulaire est :

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

En effet, soit n un point du plan : en vertu de la rotation ω, ce point s'abaisse en-dessous du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse égale à $\omega \,.\, n\mathrm{A}$; en vertu de ω', il tend à s'élever au-dessus du plan, avec une vitesse égale à $\omega' \,.\, n\mathrm{B}$; la vitesse résultante sera donc $\omega \,.\, n\mathrm{A} - \omega' \,.\, n\mathrm{B}$.

Si Ω est la vitesse angulaire inconnue de la rotation résultante, le point n, en vertu de cette rotation, se meut perpendiculairement au plan avec une vitesse $\Omega \,.\, mn$, et nous aurons :

$$\Omega \,.\, mn = \omega \,.\, n\mathrm{A} - \omega' \,.\, n\mathrm{B}.$$

Mais, on a :

$$n\mathrm{A} = mn + x,$$

$$n\mathrm{B} = mn + y,$$

et l'égalité précédente devient :

$$\Omega \,.\, mn = \omega\,(mn + x) - \omega'\,(mn + y) = (\omega - \omega')\,mn\,;$$

d'où :

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

Il résulte aussi de ce que la vitesse résultante est $\omega \cdot nA - \omega' \cdot nB = (\omega - \omega')\, mn$, que la vitesse angulaire Ω doit être de même sens que ω, puisque $\omega \cdot mn > \omega' \cdot mn$. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Deux rotations parallèles et de sens contraires se composent en une rotation autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, situé dans le plan de ces deux axes, en dehors de la portion du plan comprise entre ces axes, du côté de l'axe correspondant à la plus grande vitesse angulaire. La rotation résultante a lieu dans le sens de la plus grande, et sa vitesse angulaire est égale à la différence des vitesses angulaires des rotations composantes; les distances de l'axe résultant aux axes composants sont en raison inverse des vitesses angulaires correspondantes.*

132. Remarque. — Il est facile de voir que, dans le cas où les deux rotations parallèles sont de même sens, on a :

$$\omega : \omega' : \Omega = y : x : x + y,$$

ou bien :

$$\omega : \omega' : \Omega = mB : mA : AB.$$

Dans le cas où les deux rotations sont de sens contraires, on a :

$$\omega : \omega' : \Omega = y : x : y - x,$$

ou bien :

$$\omega : \omega' : \Omega = mB : mA : AB.$$

De cette dernière relation, on tire :

$$\omega' : \Omega = mA : AB,$$

d'où :

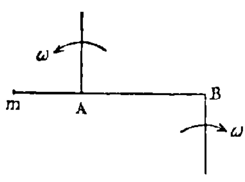
$$mA = AB \cdot \frac{\omega'}{\Omega} = AB \cdot \frac{\omega'}{\omega - \omega'},$$

équation qui détermine la position du point m.

133. Cas particulier. — Si les deux rotations parallèles et de sens contraires sont égales, c'est-à-dire si l'on a $\omega' = \omega$, la rotation résultante $\Omega = 0$, et l'on a $mA = \infty$. Ainsi donc, *la rotation résultante est nulle, et elle s'effectue autour d'un axe situé à l'infini.* Le mouvement résultant sera donc une translation perpendiculaire au plan des axes des rotations composantes.

On peut d'ailleurs s'en assurer directement de la manière suivante : Soient ω la vitesse angulaire des deux rotations, et m un point quelconque du plan des deux axes (fig. 38). En vertu de la rotation ω autour de l'axe A, le point m tend à s'abaisser au-dessous du plan, perpendiculairement au plan, avec une vitesse $\omega \cdot mA$; en vertu de la rotation ω autour de l'axe B, il s'élèvera au-dessus du plan avec une vitesse $\omega \cdot mB$. Donc, sous l'action des deux rotations, le point m s'élèvera avec une vitesse constante :

Fig. 38.



$$\omega\,(mB - mA) = \omega \cdot AB.$$

Il est facile de voir que cette vitesse sera la même, quelle que soit la position du point m dans le plan des deux axes, soit en dehors, soit en dedans de ces axes. Il résulte donc de là que tous les points du plan se meuvent perpendiculairement à ce plan avec une vitesse constante $\omega \cdot AB$.

Donc, *le système de deux rotations égales et de sens contraires, autour de deux axes parallèles, équivaut à une translation perpendiculaire au plan des axes des deux rotations, et dont la vitesse est égale au produit de la vitesse angulaire commune, multipliée par la distance des deux axes.*

Ce système de deux rotations égales, parallèles et de sens contraires constitue *un couple de rotations.* La distance AB des deux axes s'appelle le *bras de levier du couple ;* le produit $\omega \cdot AB$ est le *moment du couple.*

Un couple de rotations équivaut donc à une translation, perpendiculaire au plan du couple, et dont la vitesse est égale au moment du couple.

134. COMPOSITION DE PLUSIEURS ROTATIONS AUTOUR D'AXES PARALLÈLES. — Si un corps est animé à la fois d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes parallèles, on composera d'abord en une seule toutes les rotations qui ont lieu dans un sens ; on fera la même chose pour les rotations qui ont lieu en sens contraire. On aura ainsi deux rotations de sens contraires autour d'axes parallèles ; en composant ces deux rotations (n° **131**) on aura une rotation autour d'un axe parallèle, ou, dans le cas du couple, une translation perpendiculaire au plan des deux axes.

REMARQUE. — Si les deux rotations égales et de sens contraires s'effectuent autour du même axe, elles se détruisent.

135. PROPRIÉTÉS DES COUPLES DE ROTATIONS. — 1re PROPRIÉTÉ. — Un couple de rotations peut être représenté par *son axe*. On appelle *axe du couple* une perpendiculaire au plan du couple : si l'on prend sur cette perpendiculaire, *menée dans le sens de la translation*, une longueur proportionnelle au moment du couple, cet axe représentera le couple ou la translation en grandeur, direction et sens.

2e PROPRIÉTÉ. — Un couple de rotations peut être transporté d'une manière quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle invariablement lié au premier. En effet, tous ces couples équivalent à une même translation perpendiculaire à ce plan. Ils sont donc équivalents.

3e PROPRIÉTÉ. — On peut changer à volonté la grandeur de la vitesse angulaire ω, et la distance δ des deux axes ; pourvu que le produit $\omega\delta$ reste le même, l'effet du couple restera le même.

4e PROPRIÉTÉ. — Réciproquement, on peut remplacer une translation par un couple de rotations dont le plan est perpendiculaire à la direction de la vitesse de translation. Ce plan peut être mené par un point quelconque de l'espace, invariablement lié au corps. On prendra, comme on voudra, dans ce plan la direction des axes, et l'on prendra, comme on voudra, la vitesse angulaire ω et la distance δ, pourvu que l'on ait :

$$\omega\delta = V,$$

V étant la vitesse de translation.

136. REMARQUE. — Il est bien entendu que la substitution d'un couple de rotations à une simple translation n'est employée que comme un artifice de raisonnement pour simplifier la solution des problèmes.

Composition des couples de rotations.

137. Théorème. — *Un nombre quelconque de couples de rotations, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, invariablement liés entre eux, se composent en un couple unique dont le moment est égal à la somme des moments des couples composants.*

En effet, les couples donnés ωd, $\omega' d'$..., peuvent être transportés dans un seul plan parallèle à ceux qui les contiennent (n° **135**). Ils produiront une translation dans une direction perpendiculaire à ce plan, avec une vitesse V égale à la somme algébrique des vitesses relatives aux couples composants, et nous aurons :

$$V = v + v' + v'' + \dots;$$

si donc nous désignons par ΩD le couple de rotations capable de produire la vitesse V, nous aurons :

$$\Omega D = \omega d + \omega' d' + \omega'' d'' \dots$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

138. Théorème. — *Trois couples de rotations situés dans trois plans perpendiculaires entre eux, se composent de la même manière que trois vitesses concourantes.*

En effet, chacun des couples tend à transporter le plan qui le contient suivant une direction perpendiculaire à ce plan, avec une vitesse égale au moment du couple ; nous aurons donc trois vitesses parallèles aux trois axes coordonnés, qui se composeront en une vitesse V, donnée par la formule :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2.$$

Or, si W est le couple de rotations capable de produire la vitesse V, nous aurons :

$$W^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

L, M, N étant les trois couples donnés capables de produire les vitesses V_x, V_y, V_z.

Quant aux angles λ, μ, ν que l'axe de ce couple fait avec les axes coordonnés, ils sont déterminés par les formules :

$$\cos\lambda = \frac{V_x}{V} = \frac{L}{W}, \quad \cos\mu = \frac{V_y}{V} = \frac{M}{W}, \quad \cos\nu = \frac{V_z}{V} = \frac{N}{W}.$$

139. Réciproquement, un couple W étant donné, on peut le remplacer par trois couples situés dans trois plans orthogonaux.

140. Théorème. — *Un nombre quelconque de couples, situés dans des plans quelconques, se composent en un couple unique.*

En effet, les couples étant représentés par leurs axes, on pourra par un point O quelconque, former un contour polygonal dont les côtés seront respectivement égaux et parallèles à ces axes. La droite menée du point O à l'extrémité du contour polygonal sera égale en grandeur, direction et sens, à l'axe du couple résultant.

141. Remarque. — On peut d'ailleurs faire la composition analytique de ces couples de la manière suivante :

On décomposera chacun des couples donnés $w(\alpha, \beta, \gamma)$, $w'(\alpha', \beta', \gamma')$, ..., en trois couples situés dans les trois plans coordonnés :

$$w_x = w \cos \alpha, \quad w_y = w \cos \beta, \quad w_z = w \cos \gamma,$$

$$w_x' = w' \cos \alpha', \; w'_y = w' \cos \beta', \; w'_z = w' \cos \gamma', \text{ etc.}$$

On aura donc dans les trois plans coordonnés (n° **137**) les trois couples :

$$W_x = \Sigma w_x = \Sigma w \cos \alpha,$$

$$W_y = \Sigma w_y = \Sigma w \cos \beta,$$

$$W_z = \Sigma w_z = \Sigma w \cos \gamma.$$

Ces trois couples se composeront en un couple unique W donné par la formule (n° **138**) :

$$W^2 = W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 = (\Sigma w \cos \alpha)^2 + (\Sigma w \cos \beta)^2 + (\Sigma w \cos \gamma)^2.$$

Quant aux angles λ, μ, ν que l'axe W fait avec les axes coordonnés, ils sont déterminés par les formules :

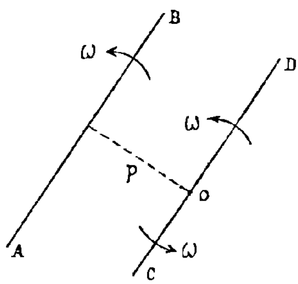
$$\cos \lambda = \frac{W_x}{W} = \frac{\Sigma w \cos \alpha}{W},$$

$$\cos \mu = \frac{W_y}{W} = \frac{\Sigma w \cos \beta}{W},$$

$$\cos \nu = \frac{W_z}{W} = \frac{\Sigma w \cos \gamma}{W}.$$

142. Transport d'une rotation parallèlement a elle-même. — On peut remplacer une rotation ω par une autre égale à la première, dont l'axe parallèle au premier, passe par un point donné invariablement relié à l'axe primitif, pourvu que l'on introduise un couple de rotations dont le moment soit égal à la rotation ω multipliée par la distance des deux axes. *Ce couple produira une translation perpendiculaire au plan des deux axes.*

Fig. 39.



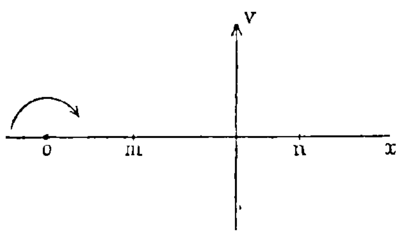
Soient une rotation ω autour de l'axe AB (fig. 39), O un point donné, et CD une parallèle à AB, menée par le point O. Introduisons autour de CD deux rotations égales à ω et de sens contraires : le système ne sera pas modifié, puisque ces deux rotations se détruisent. Le nouveau système se composera alors d'une rotation ω, de même sens que la première, autour de l'axe CD, et d'un couple de rotations dont le moment sera égal à ωp, p étant la distance des deux axes.

CHAPITRE V.

Composition d'une rotation et d'une translation.

143. Supposons d'abord la translation perpendiculaire à l'axe de rotation. Soient ω la vitesse angulaire de la rotation, v la vitesse de la translation (fig. 40).

Fig 40.



Projetons sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et soit O la projection de cet axe, la flèche indiquant le sens du mouvement. Menons une droite Ox perpendiculaire à la direction de la vitesse v de translation, et prenons sur Ox un point m, tel que l'on ait :

$$Om = \frac{v}{\omega},$$

et que ce point, considéré comme tournant autour de O, prenne un mouvement inverse de celui qu'il prendrait en vertu de la translation. Ceci posé, en vertu de la rotation, le point m s'abaisse sur une perpendiculaire à Ox avec une vitesse égale à $\omega \,.\, Om$, et, en vertu de la translation, il s'élève sur cette perpendiculaire avec une vitesse égale à v. Or, comme on a : $\omega \,.\, Om = v$, il en résulte que le point m est fixe. Il en serait de même de tous les points de la droite projetée en m. Le mouvement résultant est donc une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe du mouvement proposé, et situé dans un plan passant par cet axe, et perpendiculaire à la vitesse de translation.

Cherchons maintenant la vitesse angulaire ω' de ce mouvement. A cet effet, considérons un point quelconque n : en vertu de la rotation, ce point s'abaisse sur une perpendiculaire à Ox avec une vitesse égale à $\omega . On$, et, en vertu de la translation, il s'élève sur cette perpendiculaire avec une vitesse égale à v. Donc, la vitesse de ce point est :

$$\omega \,.\, On - v = \omega\,(Om + mn) - v = \omega \,.\, mn.$$

Or, ce produit $\omega . mn$ est évidemment de même signe que $\omega . On$; donc, le point n tend à s'abaisser sur une perpendiculaire à Ox, et, par suite la rotation inconnue ω' doit être de même sens que la rotation ω. Mais, en vertu de la rotation ω' autour de l'axe projeté en m, le point n s'abaisserait au-dessous de Ox avec une vitesse égale à $\omega' . mn$. Ces deux vitesses devant être égales, on a :

$$\omega' \,.\, mn = \omega \,.\, mn.$$

Par suite :

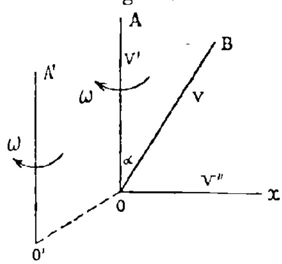
$$\omega' = \omega\,.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une rotation et une translation perpendiculaire à la rotation se composent en une rotation de même sens que la rotation proposée, dont l'axe est* *parallèle à l'axe de la rotation proposée, situé dans un plan passant par cet axe et perpendiculaire à la vitesse de translation, à une distance de l'axe de rotation égale au quotient de la vitesse de translation par la vitesse de rotation. La vitesse angulaire de la rotation résultante est égale à la vitesse angulaire de la rotation proposée.*

144. Supposons, en second lieu, que la rotation s'effectue autour d'un axe non perpendiculaire à la direction de la translation. Soient OA l'axe de la rotation ω et v la vitesse de translation suivant OB.

Fig. 41.



Décomposons la vitesse v en deux composantes v' et v'' suivant OA et une perpendiculaire Ox à OA, dans le plan AOB; nous aurons donc :

$$v' = v \cos \alpha,$$

$$v'' = v \sin \alpha.$$

Cela posé, la rotation ω et la translation v'' qui lui est perpendiculaire se composent en une rotation autour d'un axe O'A' parallèle à OA, et situé dans un plan passant par OA et perpendiculaire à la translation v''. La vitesse angulaire de cette rotation sera ω (n° **143**), et son axe sera à une distance OO' du premier, telle que l'on ait :

$$\omega \,.\, OO' = v \sin \alpha.$$

Nous aurons donc alors une rotation ω autour de O'A' et une translation v' dirigée suivant cet axe.

Le mouvement résultant sera un mouvement *hélicoïdal* (n° **113**). On a le théorème suivant :

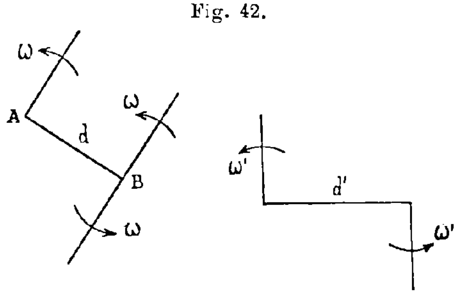
Théorème. — *Une rotation et une translation dont les axes ne sont pas perpendiculaires se composent en* *une rotation égale à la rotation proposée, dont l'axe parallèle à l'axe de la rotation donnée est situé dans un plan passant par l'axe de la rotation primitive, perpendiculaire au plan des deux axes, à une distance du premier égale à* $\frac{v \sin \alpha}{\omega}$, *et une translation le long du même axe.*

Il est facile d'obtenir la *vitesse d'un point quelconque du corps*. En effet, si l'on désigne par r la distance du point considéré à l'axe de rotation et de glissement, les deux composantes de la vitesse de ce point sont v' et ωr, et comme elles sont perpendiculaires, la vitesse résultante sera égale à $\sqrt{v'^2 + \omega^2 r^2}$.

145. Remarque. — Les deux questions que nous venons de traiter peuvent être posées d'une autre manière, en remplaçant la translation par le couple de rotations qui lui est équivalent.

Dans le premier cas (n° **143**), nous aurons à composer *une rotation et un couple de rotations situés dans un même plan*. Soient donc une rotation ω et un couple $\omega'd'$ situés dans un même plan; nous remplacerons d'abord le couple $\omega'd'$ (fig. 42) par un couple ωd équivalent, dont la vitesse angulaire soit égale à la rotation donnée ω. Le bras de levier de ce couple sera déterminé par la formule :

Fig. 42.



$$\omega d = \omega' d'.$$

Transportons ensuite ce nouveau couple dans son plan, de manière à faire coïncider avec ω celle des deux rotations du couple qui est de sens contraire à la rotation donnée ω.

Ces deux rotations égales et de sens contraires autour d'un même axe se détruisent, et il reste la rotation ω parallèle à la rotation primitive, et à une distance $AB = d$ de celle-ci, donnée par la formule :

$$d = \frac{\omega' d'}{\omega}.$$

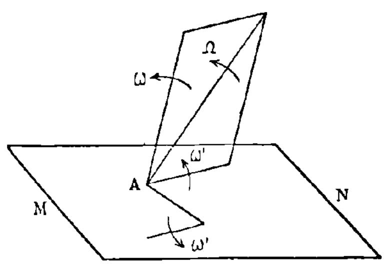
Ce résultat est conforme à celui que nous avons obtenu précédemment (n° **143**). On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une rotation et un couple de rotations situés dans un même plan se composent en une rotation égale à la première, autour d'un axe situé dans ce plan, parallèle au premier, et à une distance* $d = \frac{\omega' d'}{\omega}$.

Dans le second cas (n° **144**), nous aurons à composer *une rotation et un couple de rotations non situés dans un même plan.*

Soient donc ω l'axe de la rotation, et (ω', ω') le couple de rotations situé dans le plan MN. Nous pourrons transporter le couple dans le plan MN, de manière que l'un des deux axes rencontre l'axe de la rotation ω (fig. 43). Alors, les deux rotations concourantes ω et ω' se composent en une rotation Ω non située dans le plan MN, et le système est ramené aux deux rotations ω' et Ω autour de deux axes non situés dans un même plan. Il est d'ailleurs

Fig. 43.

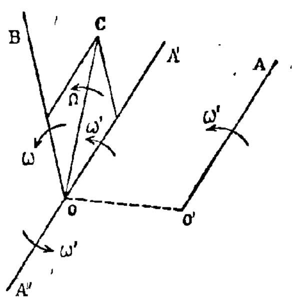


évident que cette composition peut être faite d'une infinité de manières différentes.

146. Réciproquement, *deux rotations autour de deux axes non concourants se réduisent à une rotation et un couple de rotations non situés dans un même plan*, *ou bien à une rotation et une translation.*

Soient ω et ω' les rotations autour des axes OB et O'A (fig. 44). Par le point O, menons un axe A'A'' parallèle à O'A, et imaginons autour de cet axe deux rotations égales à ω' et de sens contraires ; le système ne sera pas modifié. Mais, les deux rotations ω et ω' concourantes en O se composeront en une rotation unique Ω, et, par conséquent, le système se ramène à cette rotation Ω, et au couple (ω', ω'). Or, ce couple pourra être remplacé par une translation perpendiculaire à son plan (n° **133**), et la proposition est démontrée.

Fig. 44.



Composition d'un nombre quelconque de rotations.

147. Théorème. — *Un nombre quelconque de rotations s'effectuant autour de différents axes dirigés d'une manière quelconque dans l'espace, se composent en une rotation unique, et un couple de rotations non situés dans un même plan.*

En effet, si nous transportons tous les axes parallèlement à eux-mêmes en une même origine de l'espace, nous obtenons, pour chaque rotation, une rotation et un couple de rotations (n° **142**). Nous aurons donc une série de rotations ω, ω', ω''..., dont les axes passent par l'origine, et des couples de rotations ωd, $\omega' d'$..., dont les plans passent par l'origine. Toutes les rotations ω, ω'..., se composent (d'après la règle du polygone) en une rotation unique Ω dont l'axe passe par l'origine (n° **125**), et tous les couples se composeront en un couple unique W_r (n° **140**).

Donc, en résumé, le système se ramène à une rotation et un couple de rotations, ou bien à une rotation et une translation.

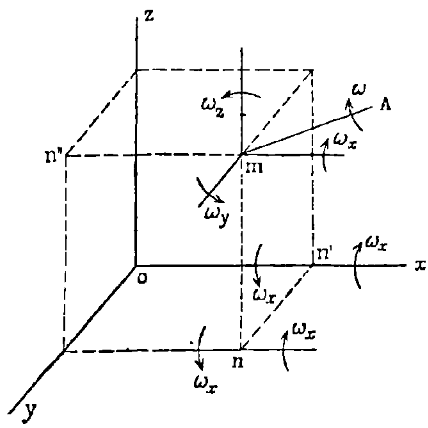
148. Remarques. — 1° Si $\Omega = 0$, le système se réduit à un couple de rotations W_r, ou à une translation.

2° Si $W_r = 0$, le système se ramène à une rotation unique Ω.

3° Si $\Omega = 0$, et $W_r = 0$, la rotation est nulle, ainsi que la translation. Le corps ne prend aucun mouvement; il est donc au repos.

149. Méthode analytique. — Soient ω (α, β, γ), ω' $(\alpha', \beta', \gamma')$... les rotations proposées, m (x, y, z) un point pris sur l'axe mA de la rotation ω (fig. 45) ; ω_x, ω_y, ω_z les composantes de ω, et supposons les rotations positives des y vers les z, des z vers les x et des x vers les y. Au lieu de transporter la rotation ω à l'origine, nous transporterons ses trois composantes ω_x, ω_y, ω_z. La translation de ω_x à l'origine peut se faire en la transportant d'abord en n, projection de m sur le plan des xy, puis ensuite en n'. Or, la translation de ω_x en n nous donne la rotation ω_x, et le couple $\omega_x . z$, situé dans un plan parallèle au plan des zx, ou dans le plan des zx, et qui produit une translation perpendiculaire au plan des zx, dans le sens des y positifs : il est donc positif. La translation de ω_x de n en n', nous donne une rotation ω_x dont l'axe passe par l'origine, et un couple $\omega_x . y$ dans le plan des xy, et qui produit une translation perpendiculaire au plan des xy dans le sens des z négatifs : il est donc négatif.

Fig. 45.



On verrait de la même manière que la translation de ω_y à l'origine, en passant par le point n, nous donne :

1° autour de l'axe des y, une rotation ω_y,

2° dans le plan des yz un couple négatif $- z\omega_y$,

3° dans le plan des xy un couple positif $+ x\omega_y$; enfin, la translation de ω_z à l'origine, en passant par le point n'', projection de m sur le plan des yz, nous donne :

1° autour de l'axe des z une rotation ω_z,

2° dans le plan des zx un couple négatif $- x\omega_z$,

3° dans le plan des yz un couple positif $+ y\omega_z$.

En opérant de la même manière pour toutes les rotations proposées, nous aurons des résultats analogues, c'est-à-dire des rotations autour des axes et des couples dans les plans coordonnés.

Nous aurons donc, en composant:
autour des axes coordonnés (n° **122**) trois rotations :

$$\Omega_x = \Sigma\,\omega_x = \Sigma\,\omega\cos\alpha,$$

$$\Omega_y = \Sigma\,\omega_y = \Sigma\,\omega\cos\beta,$$

$$\Omega_z = \Sigma\,\omega_z = \Sigma\,\omega\cos\gamma;$$

et, dans les trois plans coordonnés (n° **137**) trois couples de rotations, savoir :

1° dans le plan des yz, le couple

$$L_r = \Sigma\,(y\omega_z - z\omega_y) = \Sigma\omega\,(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$

2° dans le plan des zx, le couple

$$M_r = \Sigma\,(z\omega_x - x\omega_z) = \Sigma\omega\,(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$

3° dans le plan des xy, le couple

$$N_r = \Sigma\,(x\omega_y - y\omega_x) = \Sigma\omega\,(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Nous aurons donc, en résumé, une rotation :

$$\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2},$$

dont l'axe est déterminé par les formules :

$$\cos a = \frac{\Omega_x}{\Omega}, \quad \cos b = \frac{\Omega_y}{\Omega}, \quad \cos c = \frac{\Omega_z}{\Omega},$$

et un couple de rotations

$$W_r = \sqrt{L_r^2 + M_r^2 + N_r^2},$$

dont l'axe est déterminé par les formules :

$$\cos\lambda = \frac{L_r}{W_r}, \quad \cos\mu = \frac{M_r}{W_r}, \quad \cos\nu = \frac{N_r}{W_r}.$$

150. Remarques. — Le système se réduit à une rotation unique, lorsque l'on a : $W_r = 0$, c'est-à-dire

$$L_r = 0, \quad M_r = 0, \quad N_r = 0.$$

Le système se réduit encore à une rotation unique, (nº **145**) lorsque l'axe de la rotation Ω est dans le plan du couple W_r, c'est-à-dire lorsque l'axe Ω est perpendiculaire à l'axe W_r. Cette condition est exprimée par la formule :

$$\cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos c \cos \nu = 0,$$

ou bien :

$$L_r \,.\, \Omega_x + M_r \,.\, \Omega_y + N_r \,.\, \Omega_z = 0.$$

Le système se réduit à un couple de rotations, lorsque l'on a $\Omega = 0$, c'est-à-dire :

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0.$$

Enfin, si l'on a en même temps :

$$W_r = 0, \quad \Omega = 0,$$

la rotation est nulle, ainsi que le couple de rotations. Le corps ne prenant aucun mouvement est au repos.

Les équations :

$$\Omega = 0, \quad W_r = 0,$$

nous donnent les suivantes :

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0,$$

$$L_r = 0, \quad M_r = 0, \quad N_r = 0.$$

Ce sont les *six équations* qui expriment *le repos d'un corps solide animé de rotations autour d'axes quelconques de l'espace.*

151. Proposons-nous maintenant, dans le cas où le système se ramène à une rotation unique, *de trouver les équations de l'axe de rotation.*

Soient Ω_0 la vitesse angulaire de cette rotation unique, a, b, c les angles que l'axe de cette rotation fait avec les axes coordonnés. Il est évident, puisque Ω_0 est la rotation résultante, qu'il y aura équilibre entre les rotations ω, ω', ω''..., et $-\Omega_0$. Donc, la composition de toutes ces rotations autour de l'origine, nous donnera une rotation nulle et un couple nul.

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque de l'axe Ω_0. La translation de ω, ω', ω''... à l'origine nous donne les rotations Ω_x, Ω_y, Ω_z, et les couples de rotations L_r, M_r, N_r.

D'autre part, la translation de $-\Omega_0$ à l'origine, nous donne les rotations $-\Omega_0 \cos a$, $-\Omega_0 \cos b$, $-\Omega_0 \cos c$, et les trois couples de rotations :

$$-\Omega_0 (y_0 \cos c - z_0 \cos b),$$

$$-\Omega_0 (z_0 \cos a - x_0 \cos c),$$

$$-\Omega_0 (x_0 \cos b - y_0 \cos a).$$

Nous aurons donc les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\omega \cos \alpha - \Omega_0 \cos a &= 0, \\ \Sigma\omega \cos \beta - \Omega_0 \cos b &= 0, \\ \Sigma\omega \cos \gamma - \Omega_0 \cos c &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} L_r - \Omega_0 (y_0 \cos c - z_0 \cos b) &= 0, \\ M_r - \Omega_0 (z_0 \cos a - x_0 \cos c) &= 0, \\ N_r - \Omega_0 (x_0 \cos b - y_0 \cos a) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Les trois premières nous donnent la rotation résultante :

$$\Omega_0 = \sqrt{(\Sigma\omega \cos \alpha)^2 + (\Sigma\omega \cos \beta)^2 + (\Sigma\omega \cos \gamma)^2},$$

et les angles a, b, c, qu'elle fait avec les axes.

Les trois dernières expriment des relations entre les coordonnées x_0, y_0, z_0, d'un point de l'axe Ω_0. Or, il est facile de voir que *ces trois équations se réduisent à deux* : il suffit, pour cela, de les multiplier respectivement par $\Sigma\omega \cos \alpha$, $\Sigma\omega \cos \beta$, $\Sigma\omega \cos \gamma$, ou par $\Omega_0 \cos a$, $\Omega_0 \cos b$, $\Omega_0 \cos c$, et de faire la somme. On obtient ainsi l'identité :

$$L_r \Sigma\omega \cos \alpha + M_r \Sigma\omega \cos \beta + N_r \Sigma\omega \cos \gamma = 0,$$

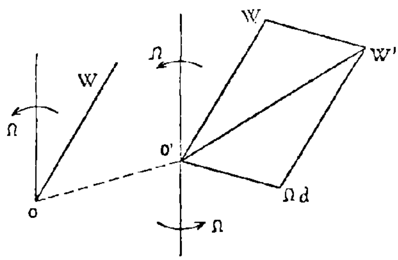
le premier membre étant identiquement nul, puisque, par hypothèse, le système se ramène à une rotation unique. Les trois équations (B) se réduisent donc à deux qui sont les équations de l'axe de la rotation résultante.

Propriétés de l'axe central.

152. Etant données n rotations, si on compose ces rotations successivement autour de différentes origines, on obtient pour chaque origine une rotation et un couple de rotations. Nous allons démontrer que, *pour toutes ces origines, la rotation conserve la même vitesse angulaire, et que son axe conserve la même direction, le couple unique seul change avec l'origine.*

En effet, supposons qu'en une origine O, nous ayons obtenu une rotation Ω et un couple W (fig. 46). Pour composer le système proposé autour de l'origine O', il suffit évidemment de transporter en O' le système Ω, W.

Fig. 46.



Or, il est facile de voir qu'après cette translation, la rotation Ω n'aura pas changé, le couple sera différent de W. En effet, le couple W se transporte en O', sans altération (n° **135**). L'axe Ω se transporte en O' en engendrant un couple Ωd (n° **142**) dont l'axe est perpendiculaire au plan ΩOO'. Mais les deux couples W et Ωd se composent en un couple unique W', dont l'axe est donné par la formule :

$$W'^2 = W^2 + (\Omega d)^2 + 2\,W\,(\Omega d)\cos(W, \Omega d).$$

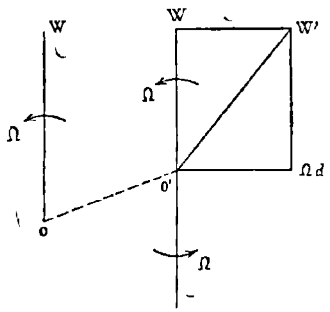
Ce couple W' sera donc différent de W, plus grand, ou plus petit.

153. Proposons-nous maintenant de *déterminer l'origine pour laquelle le couple unique sera minimum.*

Evidemment, cette origine O jouira de cette propriété que si l'on passe de cette origine pour laquelle on a la rotation Ω et le couple W, à une autre origine de l'espace, on doit obtenir un couple W' plus grand que W. Or, je dis que l'*origine* O *pour laquelle le couple est minimum sera telle qu'en cette origine, l'axe du couple coïncide avec l'axe de la rotation.*

Il suffit de démontrer que, si l'on passe de cette origine O à une origine O' quelconque, *le couple* W' *sera plus* *grand que* W. Soient donc, pour l'origine O (fig. 47), W l'axe du couple et Ω la rotation dont l'axe coïncide avec l'axe du couple. Si de l'origine O nous passons à l'origine O', le couple W se transporte parallèlement à lui-même sans altération ; quant à la rotation Ω, elle nous donnera, par sa translation en O', un couple Ωd dont l'axe est perpendiculaire au plan de ce couple, donc *à la droite* O'W *qui passe par son pied dans ce plan.*

Fig. 47.



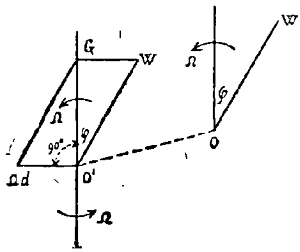
Nous aurons donc en O' deux couples W et Ωd dont les axes sont perpendiculaires, et qui se composent en un couple unique W', donné par la formule :

$$W'^2 = W^2 + (\Omega d)^2.$$

Par conséquent, $W' > W$, et la proposition est démontrée. Or, si nous considérons *toutes les origines prises sur la droite* OW, nous aurons pour chacune d'elles le même couple W et la même rotation Ω. Donc, *il y a une infinité d'origines pour lesquelles le couple est minimum.* Ces origines sont situées sur une droite que l'on appelle *axe central.*

154. DÉTERMINATION DE L'AXE CENTRAL. — Supposons que nous ayons en une origine O un couple W et une rotation Ω, dont les axes font un angle φ (fig. 48), et cherchons *une origine* O' *pour laquelle le couple est minimum.* Il faut évidemment que la nouvelle origine satisfasse à la condition que le couple Ωd engendré par la translation de Ω en O', soit tel que, composé avec W, il nous donne un couple G dont l'axe soit dirigé suivant Ω. Si donc ΩOO' est dans le plan du tableau, et W en avant de ce plan, il faudra que l'axe Ωd soit derrière ce plan. De plus, l'origine O' devra se trouver sur une perpendiculaire au plan de l'angle φ; en effet, l'axe du couple Ωd doit se trouver dans le plan de l'angle φ. Menons donc par le point O une perpendiculaire au plan de l'angle φ, et soit $OO' = d$ la distance inconnue des deux origines. Le couple W se transporte en O' sans altération; la translation de Ω engendre le couple Ωd dont l'axe est perpendiculaire au plan du tableau, et derrière. En construisant un parallélogramme dont nous connaissons le côté W en grandeur et direction, le côté Ωd en direction, et la diagonale G en direction, nous aurons :

Fig. 48.



$$G : W : \Omega d = \sin(90° + \varphi) : \sin 90° : \sin\varphi,$$

ou bien :

$$G : W : \Omega d = \cos\varphi : 1 : \sin\varphi.$$

On en tire :

$$G = W \cos\varphi,$$

$$\Omega d = W \sin\varphi.$$

On a donc pour la distance d de la nouvelle origine O' sur une perpendiculaire au plan de l'angle φ :

$$d = \frac{W \sin \varphi}{\Omega},$$

et le couple minimum est donné par la formule :

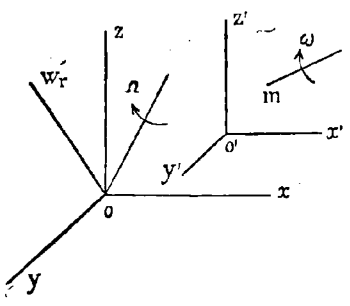
$$G = W \cos \varphi.$$

Par conséquent, pour avoir O′, on doit élever au plan de l'angle φ une perpendiculaire sur laquelle on prendra une longueur $OO' = \frac{W \sin \varphi}{\Omega}$: en menant par ce point O′ une parallèle à Ω, on aura *l'axe central.*

155. MÉTHODE ANALYTIQUE. — Proposons-nous de *trouver le lieu des points de l'espace pour lesquels le couple de rotations est un minimum.*

Soient O′ un point du lieu (fig. 49), x_0, y_0, z_0 ses coordonnées. Prenons ce point pour origine de trois axes rectangulaires $Ox'y'z'$ parallèles aux axes $Oxyz$. Soient W_r le couple résultant pour l'origine O, L_r, M_r, N_r ses couples composants. Nous aurons :

Fig. 49.



$$L_r = \Sigma\omega\,(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$

$$M_r = \Sigma\omega\,(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$

$$N_r = \Sigma\omega\,(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

en désignant par x, y, z, les coordonnées d'un point m de l'axe d'une rotation $\omega\,(\alpha, \beta, \gamma)$.

Soient x', y', z' les coordonnées du point m relatives aux nouveaux axes, W_r le couple résultant relatif à l'origine O′, L'_r, M'_r, N'_r ses couples composants. Nous aurons évidemment :

$$L'_r = \Sigma\omega\,(y' \cos\gamma - z' \cos\beta),$$

$$M'_r = \Sigma\omega\,(z' \cos\alpha - x' \cos\gamma),$$

$$N'_r = \Sigma\omega\,(x' \cos\beta - y' \cos\alpha)\,;$$

mais, on a :

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0,$$

et, par suite,

$$L'_r = \Sigma\omega \left\{ (y - y_0) \cos\gamma - (z - z_0) \cos\beta \right\},$$

$$M'_r = \Sigma\omega \left\{ (z - z_0) \cos\alpha - (x - x_0) \cos\gamma \right\},$$

$$N'_r = \Sigma\omega \left\{ (x - x_0) \cos\beta - (y - y_0) \cos\alpha \right\}.$$

En développant, il vient :

$$L'_r = L_r - y_0\,\Omega_z + z_0\,\Omega_y,$$

$$M'_r = M_r - z_0\,\Omega_x + x_0\,\Omega_z,$$

$$N'_r = N_r - x_0\,\Omega_y + y_0\,\Omega_x.$$

Par conséquent, le couple W'_r relatif à l'origine O' sera donné par la formule :

$$W'^2_r = L'^2_r + M'^2_r + N'^2_r = f(x_0, y_0, z_0).$$

Or, si O' est un point du lieu, W'_r sera un minimum, et l'on devra avoir :

$$\frac{\partial W'_r}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial W'_r}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial W'_r}{\partial z_0} = 0\,;$$

nous aurons donc les trois équations suivantes :

$$M'_r \,.\, \Omega_z - N'_r \,.\, \Omega_y = 0,$$

$$N'_r \,.\, \Omega_x - L'_r \,.\, \Omega_z = 0,$$

$$L'_r \,.\, \Omega_y - M'_r \,.\, \Omega_x = 0,$$

qui se réduisent à deux, et que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{L'_r}{\Omega_x} = \frac{M'_r}{\Omega_y} = \frac{N'_r}{\Omega_z},$$

ou bien :

$$\frac{L_r - y_0 \Omega_z + z_0 \Omega_y}{\Omega_x} = \frac{M_r - z_0 \Omega_x + x_0 \Omega_z}{\Omega_y} = \frac{N_r - x_0 \Omega_y + y_0 \Omega_x}{\Omega_z}.$$

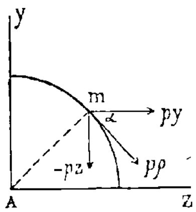
Ce sont les équations de *l'axe central.*

156. PROBLÈME. — *Un corps solide étant animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe instantané, on demande de déterminer les composantes rectangulaires de la vitesse linéaire d'un point m de ce corps, suivant des parallèles aux axes coordonnés, en fonction des coordonnées x, y, z de ce point, et des composantes p, q, r de la vitesse angulaire.*

A cet effet, nous allons considérer successivement les trois mouvements correspondant aux rotations p, q, r.

En vertu de la rotation p autour de l'axe $0x$, le point m se meut dans un plan perpendiculaire à $0x$, c'est-à-dire parallèle au plan des yz ; ce mouvement s'effectue des y vers les z. Considérons donc le plan en question $y\mathrm{A}z$ (fig. 50), et prenons les composantes de la vitesse correspondante, parallèlement aux axes $\mathrm{A}y$ et $\mathrm{A}z$. La vitesse circulaire du point m dans le plan $y\mathrm{A}z$ est égale à la vitesse angulaire p, multipliée par la distance $\mathrm{A}m = \rho$ de ce point à l'axe des x. Elle est donc égale à $p\rho$, et dirigée des y vers les z. Or, cette dernière se décompose en deux composantes parallèles respectivement à $\mathrm{A}z$ et $\mathrm{A}y$, savoir :

Fig. 50.



parallèlement à $\mathrm{A}z$: $\quad p\rho\cos\alpha = py$,

» $\quad$ à $\mathrm{A}y$: $-p\rho\sin\alpha = -pz$.

De même, si nous considérons le plan dans lequel le point m se meut en vertu de la rotation q autour de l'axe $\mathrm{O}y$, ce plan est parallèle au plan des zx, et la rotation s'effectue des z vers les x. La vitesse circulaire du point m est égale à $q\rho'$, en désignant par ρ' la distance du point m à l'axe des y : elle est dirigée des z vers les x. Ses composantes parallèles aux axes sont :

parallèlement à l'axe des x : $\quad qz$,

» $\quad$ » $\quad z : -qx$.

Enfin, en vertu de la rotation r autour de l'axe $\mathrm{O}z$, le point m se meut dans un plan parallèle au plan des xy, et des x vers les y. La vitesse circulaire du point m sera $r\rho''$, en désignant par ρ'' la distance du point à l'axe des z ; cette vitesse est dirigée des x vers les y, et ses composantes sont :

parallèlement à l'axe des y : $\quad rx$,

» $\quad$ » $\quad x : -ry$.

Nous aurons donc, suivant l'axe des x, la vitesse $qz - ry$, et, par conséquent,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = qz - ry,$$

de même, suivant les deux autres axes, on a :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = rx - pz,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Ces trois expressions se transforment l'une dans l'autre par une permutation tournante.

On en déduit pour la vitesse v du point m :

$$v^2 = (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2.$$

CHAPITRE VI.

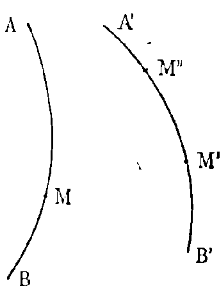
Mouvement relatif.

157. Pour étudier le mouvement d'un point, on rapporte sa position à celle de points de repère qui constituent *le système de comparaison*. Ce système doit être de forme invariable, mais sa position peut ne pas être invariable. Si le système de comparaison est fixe, le mouvement du point est dit *mouvement absolu*. Si le système de comparaison est mobile, on appelle *mouvement apparent ou relatif*, le mouvement que l'on trouve en comparant les positions successives du point mobile aux positions variables des points de repère. Ce mouvement est celui qu'un observateur, emporté par le mouvement du système de comparaison, sans avoir conscience du mouvement qu'il éprouve, attribuerait au point mobile. De là le nom de *mouvement apparent*. Le mouvement du système de comparaison est appelé *mouvement d'entraînement*.

158. Problème. — *Déterminer le mouvement absolu d'un point, connaissant le mouvement d'entraînement du système de comparaison, et le mouvement apparent du mobile.*

Soient AB (fig. 51) la trajectoire apparente du mobile à un instant déterminé, M la position du mobile à cet instant. Au bout d'un certain temps, la trajectoire est venue en A'B', le point M en M'. Mais, pendant ce même temps, le mobile, en vertu de son mouvement apparent, a dû se déplacer sur AB d'une longueur égale à s. Si l'on porte cette longueur sur A'B' en M'M'', on aura la position réelle du mobile en M'', à la fin du temps considéré.

Fig. 51.

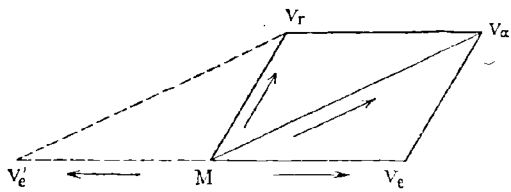


Si le déplacement est infiniment petit, MM'' fait avec AB un angle infiniment petit : le déplacement élémentaire du mobile est donc la résultante de ses déplacements élémentaires dans le mouvement apparent (ou relatif) et dans le mouvement d'entraînement. On en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *La vitesse du mouvement absolu est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

159. Remarque I. — Si l'on donne en grandeur et en direction la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement, on pourra en déduire la vitesse relative. En effet, il est évident que la vitesse relative Mv_r (fig. 52)

Fig. 52.



sera égale et parallèle à la droite v_ev_a qui achève le triangle Mv_ev_a. Ainsi donc, connaissant v_a et v_e on on pourrait construire v_r en joignant v_ev_a.

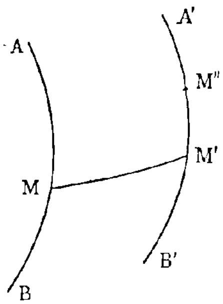
D'ailleurs, on peut encore observer que *la vitesse du mouvement relatif est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.* En effet, si l'on prend $Mv'_e = Mv_e$, et dirigée en sens contraire, la figure $Mv_av_rv'_e$ est un parallélogramme dont v_r sera la diagonale.

Remarque II. — On peut aussi vérifier que *la vitesse d'entraînement est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse relative prise en sens contraire.*

160. Problème. — *Déterminer l'accélération du mouvement absolu, connaissant le mouvement relatif, et le mouvement d'entraînement.*

Supposons d'abord que *le mouvement d'entraînement soit un simple mouvement de translation.* Soit M la position du mobile sur la trajectoire AB à la fin du temps t (fig. 53). Au bout du temps dt, la trajectoire relative du point sera venue en A'B', et le point M en M'. Mais, en vertu du mouvement relatif, le mobile aura parcouru un arc M'M'' de la trajectoire relative : donc, la position finale du mobile est le point M''.

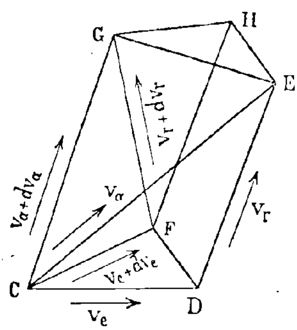
Fig. 53.



Au point M, la vitesse absolue est v_a : elle est la résultante de la vitesse relative v_r et de la vitesse d'entraînement v_e ; au point M'', la vitesse absolue est devenue $v_a + dv_a$: elle est la résultante de la vitesse relative qui est devenue $v_r + dv_r$, et de la vitesse d'entraînement qui est devenue $v_e + dv_e$.

Par un point C quelconque de l'espace (fig. 54), menons une droite CD égale en grandeur, direction et sens à la vitesse v_e d'entraînement du point M ; par le point D, menons une droite DE égale en grandeur, direction et sens à la vitesse relative v_r du point M. La résultante CE sera en grandeur, direction et sens la vitesse absolue v_a en M.

Fig. 54.



Si nous menons de même CF égale en grandeur, direction et sens à $v_e + dv_e$, et FG égale en grandeur, direction et sens à $v_r + dv_r$, la résultante CG sera en grandeur, direction et sens la vitesse absolue $v_a + dv_a$ en M''. Il en résulte que EG (n° **62**) sera en grandeur, direction et sens la vitesse élémentaire acquise dans le mouvement absolu pendant le temps dt.

Joignons DF, et menons par le point F une droite FH égale et parallèle à DE ; joignons EH et HG. Il est évident que la droite EG sera la résultante géométrique des deux droites EH et HG. Or EH = DF représente en grandeur, direction et sens la vitesse élémentaire acquise dans le mouvement d'entraînement pendant le temps dt, et HG représente en grandeur, direction et sens la vitesse élémentaire acquise dans le mouvement relatif pendant le temps dt.

Donc, *la vitesse élémentaire acquise dans le mouvement absolu est la résultante des vitesses élémentaires acquises dans le mouvement relatif et dans le mouvement d'entraînement.*

Mais l'accélération totale de chacun de ces mouvements est proportionnelle à la vitesse élémentaire acquise correspondante (elle est égale à la vitesse élémentaire acquise divisée par dt) ; elle a la même direction et le même sens (n° **57**). Donc, *l'accélération totale du mouvement absolu est la résultante de l'accélération du mouvement d'entraînement et de l'accélération du mouvement relatif.*

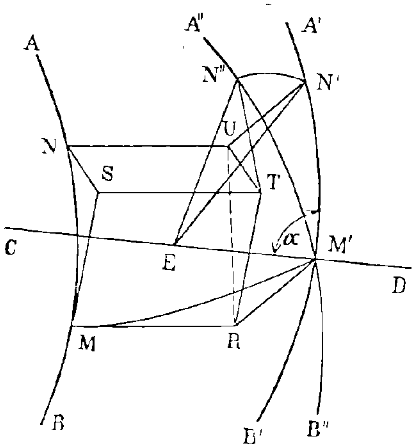
161. Remarque. — Si le mobile est animé d'un mouvement relatif et de plusieurs mouvements d'entraînement, et si ces mouvements sont tous des mouvements de translation, l'accélération totale du mouvement résulfant se trouvera en composant les accélérations totales de tous les mouvements du mobile, au moyen de la règle du polygone.

162. Supposons maintenant que *le mouvement d'entraînement soit quelconque.*

Soit AB la trajectoire relative du mobile à la fin du temps t, A″B″ la trajectoire relative à la fin du temps $t + dt$. Nous allons chercher la déviation dans le mouvement absolu, et nous en déduirons l'accélération totale, d'après la règle connue (n° **75**). Nous chercherons donc, d'une part, *la position à laquelle le mobile parviendrait au bout du temps dt, s'il continuait à se mouvoir sur la tangente à la trajectoire absolue du point* M *avec la vitesse absolue au point* M ; *puis, nous chercherons, d'autre part, la position à laquelle le mobile parvient en réalité au bout du temps dt ; en joignant ces deux points, nous aurons la déviation du mouvement absolu.*

Or, le mouvement d'entraînement est un mouvement élémentaire d'un corps solide. Nous savons (n° **111**) que ce mouvement, qui amène la trajectoire AB en A″B″ (fig. 55), peut être produit par un mouvement de translation, qui amènerait AB en A′B′, le point M en M′, et un mouvement de rotation autour d'un axe CD passant par le point M′. Mais, en vertu du *mouvement relatif*, le point M, au bout du temps *dt*, arriverait en N.

Fig. 55.



En vertu du *mouvement de translation*, le point M arriverait en M′, au bout du temps *dt*, pendant que AB viendra en A′B′ : au bout de ce temps *dt*, et en vertu du mouvement de translation, le point N vient en N′.

Dans le *mouvement de rotation* autour de l'axe CD, la trajectoire relative A′B′ vient en A″B″, et le point N′ vient en N″, en décrivant un arc N′N″ ayant pour centre un point E sur l'axe CD. La position finale du point M à la fin du temps $t + dt$ sera donc le point N'', et la trajectoire absolue serait une courbe passant par M et N''.

Menons en M la tangente MS à la trajectoire relative, et prenons sur cette tangente une longueur $MS = v_r dt$; le point S sera la position que le mobile occuperait à la fin du temps $t + dt$ sur la tangente à la trajectoire relative. Par conséquent, SN sera en grandeur, direction et sens la déviation dans le mouvement relatif.

Au bout du temps dt, le mouvement d'entraînement amène le point M en M', en lui faisant parcourir la trajectoire MM'. Si nous menons la tangente MR à cette trajectoire au point M, et si nous prenons $MR = v_e dt$, le point R sera la position que le mobile occuperait au bout du temps $t + dt$, sur la tangente à la trajectoire du mouvement d'entraînement. Donc, RM' sera en grandeur, direction et sens la déviation dans le mouvement d'entraînement.

Si l'on construit le parallélogramme MRST, le point T sera le point où le mobile serait parvenu au bout du temps $t + dt$, s'il avait continué à se mouvoir sur la tangente à sa trajectoire absolue en M, avec la vitesse absolue en M; MT sera la tangente à la trajectoire absolue, et l'on a : $MT = v_a dt$. Si l'on joint TN'', cette droite sera en grandeur, direction et sens la déviation du mouvement absolu pendant le temps dt. L'accélération totale du mouvement absolu aura la même direction et le même sens, et elle aura pour grandeur $\frac{2TN''}{dt^2}$.

Menons TU égale et parallèle à SN, joignons UN' et UN : nous aurons un polygone gauche fermé TUN'N''T, et l'on voit que TN'' est la résultante des trois côtés TU, UN' et N'N'', comptés dans le sens indiqué par les lettres.

L'accélération φ_a du mouvement absolu s'obtiendra en construisant un polygone ayant ses côtés parallèles aux précédents, et égaux au double de ceux-ci divisés par dt^2. Donc, $\varphi_a = \frac{2TN''}{dt^2}$ est la résultante de $\frac{2TU}{dt^2}$, $\frac{2UN'}{dt^2}$ et $\frac{2NN''}{dt^2}$.

Or, $TU = SN$; donc, $\frac{2TU}{dt^2} = \frac{2SN}{dt^2}$, c'est *l'accélération du mouvement relatif*, que nous désignerons par φ_r.

D'autre part, si l'on imagine le triangle RUT, ce triangle est égal et parallèle à MNS, et, par conséquent, UR est égal et parallèle à MN, donc à M'N'. La figure RUN'M' est donc un parallélogramme, et, par suite, UN' est égal en grandeur, direction et sens à RM'. Donc, $\frac{2UN'}{dt^2} = \frac{2RM'}{dt^2}$, c'est *l'accélération du mouvement d'entraînement* que nous désignerons par φ_e. Enfin, $\frac{2NN''}{dt^2}$ est aussi une accélération, que nous appellerons *accélération complémentaire :* nous pouvons en déterminer la grandeur, la direction et le sens.

En effet, si ω est la vitesse angulaire de la rotation autour de CD, on a :

$$N'N'' = \omega dt \,.\, N'E.$$

Or, dans le triangle rectangle N'EM', on a, en désignant par α l'angle que l'axe CD fait avec M'N' ou MN, ou avec la tangente MS à la trajectoire relative :

$$N'E = M'N' \sin \alpha = v_r dt \,.\, \sin \alpha\,;$$

donc,

$$N'N'' = \omega\, v_r \sin \alpha \;\; dt^2,$$

d'où :

$$\frac{2\,\mathrm{N'N''}}{dt^2} = 2\,\omega\, v_r \sin \alpha.$$

Cette troisième accélération qui est dirigée suivant N'N'' est perpendiculaire au plan qui passe par CD et par l'élément M'N' de la trajectoire relative, c'est-à-dire qu'elle est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation, et à la vitesse relative. Son sens est celui de la rotation autour de CD.

En résumé donc, φ_a est la résultante des trois accélérations :

$$\varphi_r,\ \varphi_e \ \text{et}\ 2\omega v_r \sin\alpha,$$

et l'on a le théorème suivant :

Théorème de Coriolis. — *L'accélération totale dans le mouvement absolu est la résultante de trois accélérations :*

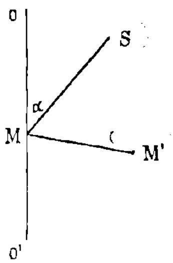
1° *L'accélération du mouvement d'entraînement* φ_e, *c'est-à-dire l'accélération du mouvement dont serait animé le mobile s'il restait en repos relatif dans la position où il se trouve ;*

2° *L'accélération relative* φ_r, *c'est-à-dire l'accélération dans le mouvement apparent du point ;*

3° *Une accélération complémentaire* $2\omega v_r \sin\alpha$, *perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de rotation, dans le sens dans lequel l'extrémité de la droite qui représente la vitesse relative tourne autour de l'axe instantané.*

163. On peut construire l'accélération complémentaire de la manière suivante : Soient M et M′ (fig. 56) les deux positions du point M, et MS une droite représentant en grandeur, direction et sens la vitesse relative. Le mouvement d'entraînement peut être décomposé en un mouvement de translation MM′ et un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point M′. Cette décomposition détermine la direction OO′ de l'axe instantané de rotation ; par conséquent, la grandeur $2\omega v_r \sin\alpha$ de l'accélération complémentaire sera déterminée. Ce sera une longueur représentant le double de l'aire du parallélogramme construit sur ω et v_r.

Fig. 56.



164. Remarque I. — Il est évident que si le mobile est animé d'un mouvement relatif, et d'un nombre quelconque de mouvements d'entraînement, on obtiendra l'accélération totale du mouvement absolu par un nombre suffisant de compositions successives.

Remarque II. — Dans le cas où le mobile est animé d'un mouvement relatif et d'un seul mouvement d'entraînement, l'accélération complémentaire, qui a pour expression $2\omega v_r \sin\alpha$, sera nulle :

1° Lorsque $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation ;

2° Lorsque $v_r = 0$, c'est-à-dire lorsque la vitesse relative est nulle ;

3° Lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsque l'axe de rotation du mouvement d'entraînement est parallèle à la vitesse du mouvement relatif.

Dans ces cas particuliers, l'accélération du mouvement absolu est la résultante de deux accélérations seulement : celle du mouvement relatif, et celle du mouvement d'entraînement. Dans tous les autres cas, on devra joindre à ces deux accélérations, l'accélération complémentaire.

REMARQUE III. — Lorsque le mouvement d'entraînement est un *mouvement rectiligne et uniforme*, son accélération φ_e est nulle. Alors φ_r ne diffère pas de φ_a, quoique v_r diffère de v_a.

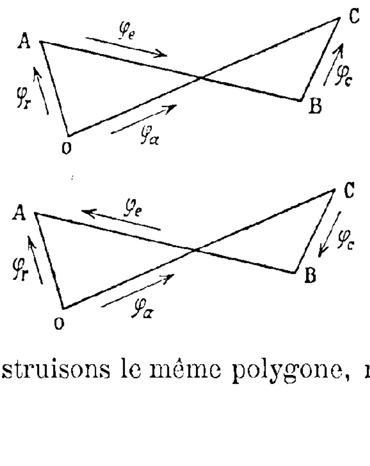
Lorsque le mouvement d'entraînement est un *mouvement de rotation uniforme* autour d'un axe fixe, l'accélération dans ce mouvement se réduit à l'accélération centripète ; elle est dirigée du point mobile vers l'axe de rotation, et elle a pour grandeur :

$$\frac{v_e^2}{r} = \omega^2 r,$$

en désignant par v_e la vitesse du point, r sa distance à l'axe, et ω la vitesse angulaire.

165. PROBLÈME. — *Déterminer l'accélération du mobile dans le mouvement relatif, connaissant le mouvement absolu et le mouvement d'entraînement.*

Fig. 57.



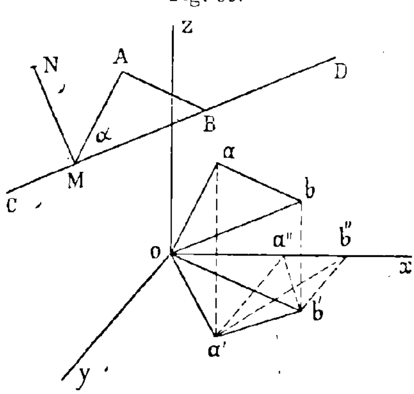
Soit OABC (fig. 57) le polygone de composition des accélérations, dans lequel OA représente en grandeur, direction et sens l'accélération relative, AB l'accélération d'entraînement, et BC l'accélération complémentaire ; OC sera en grandeur, direction et sens l'accélération du mouvement absolu. Construisons le même polygone, mais changeons les sens de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire. Il est évident que l'*accélération du mouvement relatif sera la résultante géométrique de l'accélération du mouvement absolu, d'une accélération égale et directement opposée à l'accélération d'entraînement et d'une accélération égale et opposée à l'accélération complémentaire.* Cette dernière se nomme *accélération centrifuge composée.* Elle se détermine comme l'accélération complémentaire, et elle est nulle dans les mêmes cas.

166. PROBLÈME. — *Déterminer les composantes de l'accélération complémentaire suivant trois axes rectangulaires.*

Nous nous proposons donc, étant données les trois composantes p, q, r de ω, et les trois composantes v_x, v_y, v_z de v_r, de trouver les composantes de l'accélération complémentaire $2\omega v_r \sin\alpha$, projetée sur les trois axes.

Soit CD (fig, 58) l'axe instantané de rotation que nous pouvons supposer passer par le point mobile M, en introduisant dans le système une translation convenable, et soit MA une droite qui représente en grandeur, direction et sens la vitesse relative v_r. Prenons sur l'axe CD une longueur MB qui représente en grandeur,

Fig. 58.



direction et sens la vitesse angulaire ω.

D'après ce que nous avons vu, l'accélération complémentaire $2\omega v_r \sin\alpha$ est égale au double de l'aire du parallélogramme construit sur MA et MB, ou égale à quatre fois l'aire du triangle MAB. De plus, elle est perpendiculaire au plan de ce triangle, puisqu'elle est perpendiculaire à MA et MB, et son sens est celui dans lequel l'extrémité A de la droite MA, qui représente la vitesse relative, tourne autour de l'axe CD. Si donc on élève une perpendiculaire au plan AMB, sur laquelle on prend une longueur $MN = 2\omega v_r \sin\alpha$, c'est cette droite MN que nous aurons à projeter sur les axes, ce qui revient évidemment à projeter le triangle AMB sur les trois plans coordonnés. Ainsi, par exemple, la projection de MN sur l'axe des z, sera égale à quatre fois la projection du triangle AMB sur le plan des xy.

Ceci posé, par le point O menons oa et ob respectivement égales et parallèles à MA et MB, et menons les coordonnées des points a et b. Nous aurons évidemment :

$$p = Ob'', \quad q = b'b'',$$

$$v_x = Oa'', \quad v_y = a'a''.$$

Le triangle Oab étant égal et parallèle à AMB, nous aurons à déterminer sa projection $Oa'b'$ sur le plan des xy. Or, on a :

$$\text{T} . Oa'b' = \text{quad.}\ Oa'b'a'' - \text{T} . Ob'a'' ;$$

mais,

$$\text{quad.}\ Oa'b'a'' = \text{T} . Oa'a'' + \text{T} . a'a''b'.$$

D'autre part, le triangle $a'a''b'$ est équivalent au triangle $a'a''b''$, puisqu'ils ont même base $a'a''$, et que leurs sommets b' et b'' sont sur une même parallèle à la base. On a donc :

$$\text{Quad. } Oa'b'a'' = T \,.\, Oa'a'' + T \,.\, a'a''b'' \,;$$

par suite,

$$\begin{aligned} T \,.\, Oa'b' &= T \,.\, Oa'a'' + T \,.\, a'a''b'' - T \,.\, Ob'a'' \\ &= T \,.\, Oa'b'' - T \,.\, Ob'a'' \\ &= \tfrac{1}{2}\, Ob'' \,.\, a'a'' - \tfrac{1}{2}\, Oa'' \,.\, b'b'' = \tfrac{1}{2}\, pv_y - \tfrac{1}{2}\, qv_x. \end{aligned}$$

Par conséquent, la composante de l'accélération complémentaire suivant l'axe des z, qui est égale à quatre fois le triangle $Oa'b'$, et que nous désignerons par $\varphi_{c,\,z}$, aura pour expression :

$$\varphi_{c,\,z} = 2\,(pv_y - qv_x).$$

Nous aurons de même pour les deux autres composantes :

$$\varphi_{c,\,x} = 2\,(qv_z - rv_y),$$

$$\varphi_{c,\,y} = 2\,(rv_x - pv_z).$$

Comme on le voit, ces trois composantes peuvent se déduire les unes des autres par une permutation tournante.

167. Méthode analytique. — Soient un système d'axes rectangulaires $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ en mouvement, et un point M ayant un mouvement propre, indépendant du mouvement des axes. Ce mouvement sera le *mouvement absolu* du point M. Le *mouvement relatif* du point M sera le mouvement de ce point par rapport au système de comparaison : c'est le mouvement qu'un observateur invariablement lié aux axes mobiles attribuerait au point M, s'il n'avait pas conscience de son mouvement. Le *mouvement d'entraînement* est le mouvement absolu qu'aurait le point M, s'il était fixé aux axes mobiles.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de M par rapport aux axes mobiles ; x, y, z les coordonnées de M par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz ; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de O' par rapport aux axes fixes ; a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles que font les axes fixes avec les axes mobiles ; nous aurons les formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y &= y_1 + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= z_1 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On a d'ailleurs les relations connues :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= b'c'' - b''c', & a' &= b''c - bc'', & a'' &= bc' - b'c, \\ b &= c'a'' - c''a', & b' &= c''a - ca'', & b'' &= ca' - c'a, \\ c &= a'b'' - a''b', & c' &= a''b - ab'', & c'' &= ab' - a'b. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$ada + bdb + cdc = 0, \quad ada + a'da' + a''da'' = 0,$$
$$a'da' + b'db' + c'dc' = 0, \quad bdb + b'db' + b''db'' = 0,$$
$$a''da'' + b''db'' + c''dc'' = 0, \quad cdc + c'dc' + c''dc'' = 0,$$

$$bdc + cdb + b'dc' + c'db' + b''dc'' + c''db'' = 0.$$

De cette dernière formule on tire :

$$cdb + c'db' + c''db'' = -(bdc + b'dc' + b''dc'') ;$$

de même, on a :

$$adc + a'dc' + a''dc'' = -(cda + c'da' + c''da''),$$
$$bda + b'da' + b''da'' = -(adb + a'db' + a''db'').$$

Des formules (1) on tire :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt} \\
&\quad + a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt}, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + \xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc'}{dt} \\
&\quad + a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + c'\frac{d\zeta}{dt}, \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + \xi\frac{da''}{dt} + \eta\frac{db''}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} \\
&\quad + a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Or, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sont les composantes de la *vitesse absolue* suivant les axes Ox, Oy, Oz.

$\frac{dx_1}{dt} + \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt}$, etc., sont les dérivées de x, y, z, en supposant ξ, η, ζ constants. Ce sont les composantes suivant les axes fixes Ox, Oy, Oz de la vitesse du point M, s'il était lié aux axes mobiles, c'est-à-dire au système de comparaison. Ce sont donc les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la *vitesse d'entraînement*.

$a \frac{d\xi}{dt} + b \frac{d\eta}{dt} + c \frac{d\zeta}{dt}$, etc. sont les dérivées de x, y, z, en supposant x_1, a, b, c... constants. Ce sont les composantes suivant les axes fixes de la *vitesse relative*.

On voit donc que la projection de la vitesse absolue sur un des trois axes est égale à la somme des projections sur cet axe de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.*

168. REMARQUE I. — Nous avons trouvé pour la projection de la vitesse d'entraînement suivant l'axe Ox :

$$v_{e,\,x} = \frac{dx_1}{dt} + \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt}.$$

Or, le mouvement d'entraînement se compose d'un mouvement de translation du point O' et d'une rotation autour d'un axe O'I passant par le point O'. Il en résulte que $\frac{dx_1}{dt}$ est la composante suivant l'axe Ox de la vitesse de translation.

$\xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt}$ est la projection sur Ox de la vitesse du point M (ξ, η, ζ), supposé lié au système mobile, et due à la rotation.

169. Remarque II. — D'après ce que l'on a vu précédemment (nº **156**), si l'on désigne par p, q, r les composantes de la rotation ω autour de l'axe O'I, on a pour les composantes de la vitesse du point M (due à la rotation) suivant les axes O'ξ, O'η, O'ζ :

$$q\zeta - r\eta, \quad r\xi - p\zeta, \quad p\eta - q\xi ;$$

donc, en vertu du théorème des projections,

$$\xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt} = a\,(q\zeta - r\eta) + b\,(r\xi - p\zeta) + c\,(p\eta - q\xi)$$

On en tire :

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp.$$

170. Remarque III. — En désignant par v_ξ, v_η, v_ζ les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse due à la rotation, et par v_x, v_y, v_z les composantes de cette vitesse suivant les axes fixes, on a :

$$v_\xi = av_x + a'v_y + a''v_z.$$

Or, (nº **168**) :

$$v_x = \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt},$$

$$v_y = \xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt},$$

$$v_z = \xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt};$$

par suite :

$$v_\xi = a\left(\xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt}\right)$$

$$+ a'\left(\xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt}\right)$$

$$+ a''\left(\xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt}\right),$$

ou bien, puisque $v_\xi = q\zeta - r\eta$ (n° **169**) :

$$q\zeta - r\eta = \xi\left(a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt}\right)$$

$$+ \eta\left(a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt}\right)$$

$$+ \zeta\left(a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt}\right).$$

On tire de là :

$$\left.\begin{aligned} a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} &= 0, \\ a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt} &= -r, \\ a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} &= q, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

expressions que l'on pourrait d'ailleurs obtenir en remplaçant dans les premiers membres $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ par leurs valeurs trouvées ci-dessus (n° **169**).

171. Différentiant les équations (2), on a :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2} \\
&\quad + a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt}\right), \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a'}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c'}{dt^2} \\
&\quad + a'\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c'\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc'}{dt}\right), \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a''}{dt^2} + \eta\frac{d^2b''}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2} \\
&\quad + a''\frac{d^2\xi}{dt^2} + b''\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ sont les projections sur les axes fixes de l'accélération du mouvement absolu.

$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2}$, etc., dérivées secondes de x, y, z, en laissant ξ, η, ζ constants, sont les projections *sur les axes fixes* Ox, Oy, Oz de l'accélération d'entraînement.

$a\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+b\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+c\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}$, etc., dérivées de x, y, z, en laissant x_1, a, b, c... constants, sont les projections *sur les axes fixes* de l'accélération relative.

Enfin, il reste les quantités :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{c,x} &= 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt}\right),\\
\varphi_{c,y} &= 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da'}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{db'}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{dc'}{dt}\right),\\
\varphi_{c,z} &= 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da''}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{db''}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

Ce sont les projections *sur les axes fixes* de l'accélération complémentaire. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'accélération du mouvement absolu est la résultante de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération complémentaire (ou de l'accélération centripète composée).*

172. REMARQUE. — Nous aurons donc la formule :

$$\varphi_{a,x}=\varphi_{e,x}+\varphi_{r,x}+\varphi_{c,x},$$

de laquelle on tire :

$$\varphi_{r,x}=\varphi_{a,x}-\varphi_{e,x}-\varphi_{c,x}.$$

Donc, *l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et de l'accélération centrifuge composée.*

173. Proposons-nous maintenant de *déterminer l'accélération complémentaire*. Nous remarquerons que :

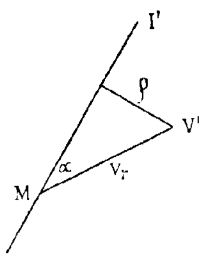
$$\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt},$$

sera, d'après ce que nous avons vu (n° **168**), la projection sur Ox de la vitesse d'un point dont les coordonnées sont $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, supposé lié aux axes mobiles, vitesse due au mouvement de rotation autour d'une parallèle à O'I. Or, si par le point M, on mène une droite MV', qui représente la vitesse relative v_r du point M, les coordonnées du point V', par rapport à l'origine M, seront : $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$. Par suite, l'expression :

$$\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt},$$

sera la projection sur Ox de la vitesse du point V', lié au système mobile, due à la rotation autour d'un axe MI', mené par le point M parallèle à O'I. Donc, si par le point M (fig. 59), on mène une droite parallèle à la vitesse K qu'aurait dans le mouvement de rotation autour de MI', l'extrémité V' de la vitesse relative, et égale au double de cette vitesse, c'est-à-dire égale à 2K, cette droite représentera l'accélération complémentaire. D'ailleurs, la vitesse K du point V' sera :

Fig. 59.



$$K=\omega\rho=\omega v_r \sin\alpha.$$

Par suite :

$$\varphi_c=2\omega v_r \sin\alpha.$$

174. On peut déterminer de la manière suivante la grandeur et la position de l'accélération complémentaire.

Multiplions les équations (5) par a, a', a'', et ajoutons ; nous aurons la projection de φ_c sur l'axe des ξ :

$$\varphi_{c,\,\xi} = 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt}\right)a$$

$$+ 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc'}{dt}\right)a'$$

$$+ 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc''}{dt}\right)a''$$

$$= 2\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da}{dt} + a'\frac{da'}{dt} + a''\frac{da''}{dt}\right)$$

$$+ 2\frac{d\eta}{dt}\left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)$$

$$+ 2\frac{d\zeta}{dt}\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right),$$

ou bien, en vertu des équations (3) :

$$\varphi_{c,\,\xi} = 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right);$$

de même,

$$\varphi_{c,\,\eta} = 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

$$\varphi_{c,\,\zeta} = 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right).$$

On en tire :

$$\varphi_c^2 = \varphi_{c,\xi}^2 + \varphi_{c,\eta}^2 + \varphi_{c,\zeta}^2$$

$$= 4\left\{\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right\}$$

$$= 4\left(p^2 + q^2 + r^2\right)\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}$$

$$- 4\left(p\frac{d\xi}{dt} + q\frac{d\eta}{dt} + r\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

$$= 4\,\omega^2 v_r^2 - 4\,\omega^2 v_r^2 \cos^2(\omega, v_r) = 4\,\omega^2 v_r^2 \sin^2(\omega, v_r),$$

d'où :

$$\varphi_c = 2\,\omega v_r \sin(\omega, v_r).$$

Il est facile de démontrer que l'accélération complémentaire φ_c est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation du système, et à la vitesse relative.

En effet, on a identiquement :

$$p\varphi_{c,\xi} + q\varphi_{c,\eta} + r\varphi_{c,\zeta} = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dt}\varphi_{c,\xi} + \frac{d\eta}{dt}\varphi_{c,\eta} + \frac{d\zeta}{dt}\varphi_{c,\zeta} = 0.$$

175. Remarque. — Si l'on veut les composantes de l'accélération relative suivant les axes mobiles $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, on aura :

$$\varphi_{r,\xi} = \varphi_{a,\xi} - \varphi_{e,\xi} - \varphi_{c,\xi};$$

or,

$$\varphi_{c,\,\xi} = 2\left(q\,\frac{d\zeta}{dt} - r\,\frac{d\eta}{dt}\right),$$

et, par suite,

$$\varphi_{r,\,\xi} = \varphi_{a,\,\xi} - \varphi_{e,\,\xi} - 2\left(q\,\frac{d\zeta}{dt} - r\,\frac{d\eta}{dt}\right);$$

de même,

$$\varphi_{r,\,\eta} = \varphi_{a,\,\eta} - \varphi_{e,\,\eta} - 2\left(r\,\frac{d\xi}{dt} - p\,\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

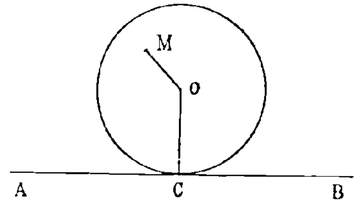
$$\varphi_{r,\,\zeta} = \varphi_{a,\,\zeta} - \varphi_{e,\,\zeta} - 2\left(p\,\frac{d\eta}{dt} - q\,\frac{d\xi}{dt}\right).$$

Applications du mouvement relatif.

176. Problème I. — *Un cercle roule sans glisser sur une droite fixe* AB. *Son mouvement est uniforme. Un point* M *est lié invariablement au cercle mobile. Déterminer à un instant quelconque l'accélération du mouvement.*

Le roulement du cercle sur la droite AB consiste en une rotation instantanée autour du point C; la vitesse ω de cette rotation est constante. On peut considérer cette rotation autour de C (fig. 60) comme la résultante d'une rotation autour du centre O, et d'une translation parallèle à AB et égale à $\omega \,.\, OC$ (n° **143**). Le mouvement du cercle, et par conséquent du point M peut donc être considéré comme composé de deux mouvements simples, savoir : une rotation autour du centre O, et une translation parallèle à AB. Nous prendrons le premier pour mouvement relatif, et le second pour mouvement d'entraînement. Ce dernier mouvement étant rectiligne et uniforme, son accélération est nulle. Le mouvement d'entraînement étant une translation, l'accélération complémentaire est nulle. Donc, l'accélération totale du mouvement absolu se réduira à l'accélération du mouvement de rotation du point M autour du point O. Or, cette dernière est égale au carré de la vitesse $\omega \,.\, OM$ du point M, divisé par le rayon OM du cercle qu'il décrit. Elle est donc égale à :

Fig. 60.



$$\frac{\omega^2 \,.\, OM^2}{OM} = \omega^2 \,.\, OM.$$

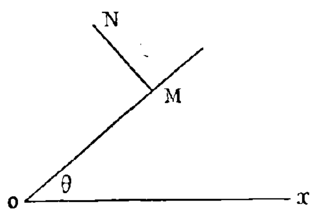
On voit qu'elle est constante en grandeur ; d'ailleurs, elle est constamment dirigée vers le centre O du cercle mobile.

177. Problème II. — *Trouver l'accélération totale dans le mouvement plan d'un point rapporté à des coordonnées polaires.*

Le mouvement du point M peut être décomposé en une translation le long du rayon vecteur OM, et une rotation du rayon OM autour du point O. Nous supposerons ces deux mouvements dirigés le premier dans le sens OM, le second dans le sens qui fait croître l'angle θ. Nous prendrons le premier mouvement comme mouvement relatif, le second comme mouvement d'entraînement, et nous chercherons l'accélération totale du mouvement absolu résultant.

Or, l'accélération du mouvement relatif, dirigée suivant le rayon OM (fig. 61), est égale à $\frac{d^2r}{dt^2}$ en grandeur et en signe. Dans le mouvement d'entraînement, qui est un mouvement de rotation autour du centre O, le point M décrit une circonférence de cercle, avec une vitesse égale à $r\frac{d\theta}{dt}$. L'accélération totale de ce mouvement se décompose en deux composantes, l'une tangentielle, dirigée suivant MN, perpendiculaire à OM, et égale à $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, l'autre centripète, dirigée suivant MO, et égale à :

Fig. 61.



$$\frac{\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{r} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Enfin, l'accélération complémentaire, qui est perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe de rotation, sera donc dirigée suivant MN, et elle aura pour expression :

$$2\,\omega v_r \sin\alpha.$$

Mais, l'angle α étant droit, cette accélération se réduira à $2\,\omega v_r = 2\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dr}{dt}$.

Si maintenant nous faisons la somme algébrique des accélérations de même direction, nous aurons pour les composantes de l'accélération totale du mouvement absolu :

suivant OM : $$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \varphi_r,$$

suivant MN : $$r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} = \varphi_p.$$

Ce sont les valeurs que nous avons trouvées précédemment (n° **83**).

DEUXIÈME PARTIE.

STATIQUE.

LIVRE I.

STATIQUE DU POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

Principes fondamentaux de la mécanique.

178. On appelle *corps* une portion de matière limitée dans tous les sens.

Un *point matériel* est un corps réduit à des dimensions très petites, telles que l'on puisse l'assimiler à un point géométrique. Ainsi, si l'on imagine un corps divisé en parties infiniment petites dans tous les sens, ces parties sont des points matériels qui, par leur réunion, forment le corps. Un point matériel peut donc être considéré comme provenant de la concentration d'une quantité plus ou moins grande de matière. La forme du point matériel est indifférente.

179. On dit qu'un *corps* est *libre*, lorsqu'il n'est assujetti à aucune condition, lorsqu'il n'y a aucun obstacle qui le gêne dans son mouvement.

180. Pour étudier le *mouvement des corps*, sous l'action des forces qui leur sont appliquées, nous commencerons par l'étude de l'action des forces sur les *points matériels*. Cette étude est basée sur quatre principes fondamentaux que l'on ne peut pas démontrer directement. L'exactitude de ces principes repose sur la concordance des conséquences qui en découlent avec les faits observés. La plus grande preuve de l'exactitude de ces principes se trouve dans l'accord des mouvements des corps célestes avec les lois de ces mouvements obtenues en se basant sur ces principes.

181. Premier principe. — Inertie de la matière. — *Un point matériel ne peut, de lui-même, passer de l'état de repos à l'état de mouvement. S'il est en mouvement, il ne peut modifier de lui-même son état de mouvement, en sorte que, si aucune cause extérieure n'agit sur lui, sa vitesse restera constamment la même en grandeur et en direction, c'est-à-dire que son mouvement sera rectiligne et uniforme.*

182. Force. — Pour qu'un point matériel passe de l'état de repos à l'état de mouvement, il faut qu'il soit soumis à l'action d'une certaine cause. Pour qu'un point matériel, déjà en mouvement, ne continue pas à se mouvoir uniformément et en ligne droite, il faut aussi qu'il soit soumis à l'action d'une certaine cause qui modifie les circonstances de son mouvement.

Toute cause capable de changer l'état de repos ou de mouvement d'un corps, a reçu le nom de *force*.

Il peut arriver cependant qu'une force, appliquée à un point matériel, ne détermine pas le mouvement de ce point. C'est ce qui arrive, si un obstacle s'oppose à ce mouvement. Alors, la force donne lieu à une *pression* ou à une *tension*. Ainsi, par exemple, un corps soumis à l'action de la pesanteur, et placé sur une table, exerce sur elle une pression ; de même, une balle de plomb tend le fil auquel on la suspend.

183. Poids des corps. — Lorsqu'un corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, et qu'un obstacle l'empêche de tomber sous cette action, la pression ou la tension qui en résulte s'appelle le *poids* du corps. Le poids d'un corps produit toujours une *déformation* de l'obstacle qui s'oppose à sa chute. Cette déformation peut être sensible, comme dans le cas d'un ressort, ou insensible à l'œil. La grandeur de la déformation peut servir à constater *l'énergie* du poids.

On dit que les *poids* de deux corps sont *égaux*, quand, soumis dans les mêmes conditions à l'action de la pesanteur seule, ces deux corps produisent le même effet. Ainsi, par exemple, si ces deux corps, suspendus à un ressort, le fléchissent également.

La *réunion de n poids égaux* forme évidemment un poids n fois plus fort. D'après cela, il suffira de choisir à volonté un poids A, que l'on prendra pour *unité*, pour pouvoir évaluer en nombre le poids d'un corps quelconque B. Ce nombre sera n, s'il faut n poids tels que A pour produire sur un ressort le même effet que le corps B.

L'*unité de poids* est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée, prise à la température de 4°,1 ; on lui a donné le nom de *gramme*. Mais, on prend ordinairement pour unité de poids le *kilogramme*, ou le poids d'un litre d'eau distillée, prise à la température de 4°,1. Le poids d'un corps quelconque peut donc être évalué en *grammes* ou en *kilogrammes*.

184. — De la mesure des poids, on peut passer à la mesure de l'*intensité des forces*. En effet, un corps A étant suspendu à un appareil à ressort, produit une certaine flexion. Si une force, appliquée au même appareil, produit la même flexion, la force peut être regardée *comme égale à l'action de la pesanteur sur le corps* A. *Le poids de ce corps* A peut donc servir de *mesure à la force*. Ainsi, une force quelconque peut toujours être mesurée par un poids, et, par conséquent, évaluée en nombre au moyen de l'unité de poids. Ordinairement, on évalue les intensités des forces en kilogrammes.

185. Nous venons de voir comment on peut déterminer en nombre l'intensité d'une force ; cela ne suffit pas pour définir complétement la force. Il faut, en outre, considérer la *direction* et le *sens* de la force.

Supposons un *point matériel libre et au repos*, et faisons agir sur lui une force : la direction suivant laquelle il commence à se déplacer est appelée la *direction de la force*. On considère la force comme agissant dans le *sens du premier mouvement* de ce point. Ainsi donc, pour qu'une force soit complétement déterminée, on doit connaître :

1° *son intensité*, qui est donnée en nombre ;

2° *sa direction*, qui est donnée par les angles α, β, γ qu'elle fait avec les axes ;

3° *son sens*, qui est celui du premier mouvement ;

4° *son point d'application*, c'est-à-dire le point sur lequel elle agit, qui est donné par ses coordonnées x, y, z.

Il résulte de ce qui précède que *deux forces* qui, agissant successivement sur le même point matériel, lui communiquent exactement le même mouvement, sont *égales* entre elles. Par conséquent, pour mesurer une force, il suffira de *choisir pour unité* une force bien déterminée. L'intensité d'une force quelconque sera exprimée par le nombre qui mesure son rapport à l'intensité de la force prise pour unité.

186. Une force quelconque peut être représentée *géométriquement* par une droite menée à partir de son point d'application, dans la direction et le sens de la force, et ayant une longueur proportionnelle à l'intensité de cette force.

187. Deuxième principe. — Égalité de l'action et de la réaction. — *Toute force appliquée à un point matériel* A, *émane d'un autre point matériel* B, *situé à une distance quelconque du premier ; réciproquement, le point* B *est soumis à l'action d'une autre force émanant du point* A. *Ces deux forces, qui sont l'action et la réaction, sont égales entre elles, dirigées suivant la droite* AB, *et en sens contraire l'une de l'autre.*

Si la force qui agit sur le point A tend à le rapprocher de B, alors la force qui agit sur le point B tendra aussi à le rapprocher de A. Ces deux forces sont dites *attractives.* Si les deux forces, au contraire, agissent de manière à éloigner les deux points A et B l'un de l'autre, ces deux forces sont dites *répulsives.*

188. Troisième principe. — Indépendance de l'effet d'une force et du mouvement que possède le point matériel sur lequel elle agit. — *L'effet produit par une force sur un point matériel est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point.*

Voici comment on peut se faire une idée de ce principe :

Supposons un point M, animé à un instant quelconque d'une certaine vitesse. Le principe énoncé signifie que l'effet d'une force sur ce point n'est pas modifié par cette vitesse ; en d'autres termes, cet effet sera le même que si le point était au repos, seulement le mouvement du point résultera de la composition des deux mouvements. Ainsi, supposons que l'on rapporte les positions successives du point M à un système d'axes rectangulaires animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme dont la vitesse soit égale et parallèle à la vitesse du point M à la fin du temps t. Si, à partir de cet instant, le point M n'était soumis à l'action d'aucune force, son mouvement serait rectiligne et uniforme, en vertu du principe de l'inertie (n° **181**). Par conséquent, il conserverait toujours la même position par rapport aux axes mobiles. Le principe énoncé signifie que, sous l'action de la force qui lui est appliquée, le point matériel prend *par rapport aux axes mobiles* un mouvement qui est exactement le même que le mouvement absolu que cette force lui communiquerait, s'il partait du repos. Pour avoir le mouvement réel du point dans l'espace, il suffira de composer le mouvement du point par rapport aux axes mobiles avec le mouvement des axes.

189. Ce principe nous permet de *déterminer le mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante.*

Une force est *constante* pendant un temps donné, lorsque, pendant ce temps, sa direction ne change pas, et que son intensité reste également constante.

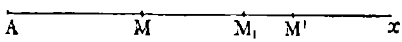
Trois cas peuvent se présenter :

1^er^ CAS. — *Le point matériel est au repos.* On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Un point matériel en repos, soumis à l'action d'une force constante, prend un mouvement rectiligne et uniformément varié.*

Soit Ax la direction de la force constante appliquée à un point *libre* et *au repos* placé en A (fig. 62). Le *mouvement de ce point sera évidemment rectiligne et dirigé suivant* Ax; car, il n'y a pas de raison pour que le mobile dévie dans un sens plutôt que dans l'autre.

Fig. 62.



Ce mouvement sera *uniformément varié*. En effet, soit M la position du mobile à la fin du temps t, et v sa vitesse à cet instant. Au bout du temps dt, le mobile sera en M', et l'on aura MM' $= ds$. Si, pendant ce temps dt, le mobile se mouvait avec sa vitesse en M, il parcourrait d'un mouvement uniforme l'espace $MM_1 = vdt$; l'accélération du mouvement est donc $\frac{2M_1M'}{dt^2}$ (n° **75**). Or, le chemin MM' réellement parcouru pendant le temps dt est la résultante de MM_1, chemin qui serait parcouru en vertu de la vitesse seule, et de M_1M'. Donc, en vertu du troisième principe, ce dernier chemin M_1M' est celui qui est parcouru sous l'action de la force. Mais, la force est constante : donc, pour un même temps dt, à partir d'une position quelconque sur la droite Ax, M_1M' aura toujours la même valeur. L'accélération est donc constante, et, par conséquent, le *mouvement* est *uniformément varié*. En désignant par φ l'accélération de ce mouvement, par t le temps compté à partir de l'instant où le mobile se met en mouvement, par x la distance entre le point de départ A et le point où le mobile se trouve à la fin du temps t, nous aurons l'équation du mouvement :

$$x = \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

2ᵉ Cas. — Supposons en second lieu que le point matériel, au lieu de partir du repos, se mette en mouvement *avec une vitesse initiale v_0 de même direction que la force.* En vertu du troisième principe, on obtiendra le mouvement du point mobile, en composant le mouvement rectiligne et uniforme, correspondant à la vitesse v_0, et qui a pour équation :

$$x_1 = v_0 t,$$

avec un mouvement rectiligne uniformément varié, de même direction que le premier, ayant pour équation :

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

Le mouvement résultant sera rectiligne ; sa direction sera la même que celle des deux mouvements composants, et il aura pour équation :

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le mouvement d'un point matériel, soumis à l'action d'une force constante, et animé d'une vitesse initiale de même direction que la force est un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Si la vitesse v_0 est de même sens que la force, le mouvement sera uniformément accéléré, et il aura pour équation :

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}\varphi t^2 ;$$

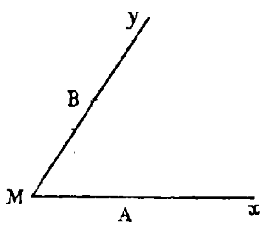
si la vitesse v_0 est de sens contraire à la force, le mouvement sera uniformément retardé, et il aura pour équation :

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

3[e] Cas. — Supposons en troisième lieu que le point matériel, soumis à l'action d'une force constante, soit animé *d'une vitesse initiale* v_0, *dont la direction ne coïncide pas avec celle de la force.*

Prenons pour axe des x *la direction et le sens* Mx de la vitesse initiale (fig. 63), et pour axe des y *la direction et le sens* My de la force au point M. D'après le troisième principe, on obtiendra la position du point à la fin du temps t, en composant le mouvement rectiligne et uniforme dû à la vitesse initiale v_0, avec le mouvement rectiligne uniformément varié que la force communiquerait au point, s'il partait de M sans vitesse initiale.

Fig. 63.



Nous aurons donc à composer les deux mouvements représentés par les équations :

$$x = \text{MA} = v_0 t,$$

$$y = \text{MB} = \tfrac{1}{2}\varphi t^2.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on en déduit pour l'équation de la trajectoire :

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{\varphi}\, y.$$

La trajectoire est donc une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et qui est tangente à l'axe des x au point M. L'axe des y est un diamètre de la parabole.

190. Quatrième principe. — Indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel. — *Lorsque plusieurs forces* *agissent simultanément sur un même point matériel, chacune d'elles produit le même effet que si elle agissait seule.* En d'autres termes, si un point matériel est soumis à la fois à l'action de plusieurs forces, on obtiendra le mouvement qu'il prend à partir d'un instant quelconque, en composant le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse qu'il possède à cet instant, avec les mouvements que chacune de ces forces lui communiquerait, si elle agissait seule sur ce point à partir du repos.

191. Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles produisent. — Soient F une force constante agissant sur un point matériel à partir du repos, φ l'accélération du mouvement rectiligne et uniformément varié correspondant ; soient encore F' une autre force constante agissant sur le même point matériel à partir du repos, φ' l'accélération correspondante. Je dis que l'on a :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'}.$$

En effet, soit F_1 une certaine force, contenue un nombre entier de fois dans F et F' ; nous aurons :

$$F = nF_1,$$

$$F' = n'F_1 ;$$

d'où :

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}.$$

Soit φ_1 l'accélération du mouvement que la force F_1 agissant seule communiquerait au point matériel à partir du repos. Si nous appliquons à ce point n forces égales à F_1, de même direction et de même sens, le mouvement que ce point prendra, s'obtiendra à chaque instant en composant les mouvements rectilignes et uniformément variés que chacune de ces forces lui communiquerait séparément (n° **190**). L'accélération du mouvement résultant sera la résultante des accélérations des mouvements composants. Ces accélérations étant de même direction et de même sens, leur résultante est égale à la somme $n\varphi_1$ de ces accélérations. Or, l'ensemble des n forces égales à F_1 est une force égale à F ; par conséquent, la force F produit une accélération $n\varphi_1$. On a donc :

$$\varphi = n\varphi_1 ;$$

nous aurons de même :

$$\varphi' = n'\varphi_1.$$

On en tire :

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{n}{n'},$$

et, par suite :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'}.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux forces constantes que l'on fait agir séparément sur un même point matériel à partir du repos, sont entre elles comme les accélérations qu'elles communiquent à ce point.*

192. Remarque I. — Si une force constante agit sur un point matériel qui est déjà animé d'une certaine vitesse, le mouvement du point s'obtiendra par la composition du mouvement rectiligne et uniforme correspondant à cette vitesse, avec le mouvement rectiligne et uniformément varié que la force lui communiquerait s'il partait du repos. Le mouvement résultant sera, d'après ce que nous avons vu (n° **189**), rectiligne ou parabolique.

L'accélération résultante est la résultante des accélérations de ces deux mouvements. Mais, l'accélération du premier mouvement est nulle, puisqu'il est rectiligne et uniforme ; donc, l'accélération résultante se réduit à l'accélération du second mouvement. Par conséquent, l'accélération, dans le mouvement rectiligne ou parabolique, qu'un point matériel animé d'une vitesse initiale, prend sous l'action d'une force constante, est la même que celle que cette force lui communiquerait, si la vitesse initiale était nulle.

Donc, *deux forces constantes que l'on ferait agir séparément sur un même point matériel sont entre elles comme les accélérations qu'elles communiquent à ce point, quelle que soit sa vitesse au moment où ces forces agissent sur lui.*

193. Remarque II. — Si la force n'est pas constante en grandeur et en direction, l'accélération totale à un instant quelconque n'est autre que l'accélération que cette force communiquerait au point, si, à partir de cet instant, elle restait constante.

D'après cela, on peut dire que, *si deux forces quelconques agissent séparément sur un même point matériel, ces deux forces sont entre elles comme les accélérations totales correspondantes.*

194. Masse d'un point matériel. — Si une même force agit successivement sur différents points matériels, *à partir du repos*, ces différents points prennent des mouvements rectilignes. Mais les accélérations de ces mouvements seront différentes, en général. On peut donc dire qu'il existe dans les différents points, une certaine qualité d'après laquelle ils cèdent plus ou moins facilement à l'action des forces. On en reconnaît l'existence par l'accélération plus ou moins grande que ces points reçoivent de la part d'une même force. Cette qualité, qui distingue les corps les uns des autres, est ce que l'on appelle la *masse*.

Deux points matériels ont des *masses égales*, quand, étant soumis séparément, à partir du repos, à l'action d'une même force, ils reçoivent des accélérations égales. La masse d'un point est *double, triple,* etc. de celle d'un autre point, quand elle est formée par la réunion de deux, trois, etc. points matériels de masse égale à celle de ce dernier.

Il résulte de là que la masse d'un point matériel peut être évaluée en nombre, quand on aura choisi un point dont *la masse sera prise pour unité de masse.*

195. Proportionnalité des forces aux masses des points matériels auxquels elles communiquent une même accélération. — Soit une force constante F agissant sur un point matériel de masse m à partir du repos ; elle lui communique une accélération φ. Si une autre force constante F' agissant sur un point matériel de masse m' à partir du repos, lui communique la même accélération φ, je dis que l'on aura :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'},$$

En effet, on peut toujours imaginer une masse m_1

contenue un nombre entier de fois dans m et m', de sorte que l'on ait :

$$m = nm_1,$$

$$m' = n'm_1 ;$$

d'où :

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}.$$

Or, il est facile de voir qu'il existe une force F_1 qui, agissant sur la masse m_1 à partir du repos, lui communique l'accélération φ. En effet, soit F_2 une force quelconque ; cette force agissant sur m_1 lui communiquera une accélération φ_2, et nous aurons, en vertu du théorème précédent (n° **191**) :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\varphi}{\varphi_2},$$

équation qui servira à déterminer F_1.

Cela posé, imaginons n points matériels de même masse m_1 : juxtaposons ces points, et appliquons à chacun d'eux une même force F_1 ; nous aurons un ensemble de n forces F_1, communiquant une accélération φ à un ensemble de n masses m_1, ou, ce qui revient au même, une force nF_1 communiquant une accélération φ à une masse $nm_1 = m$. Or, la force F communique la même accélération φ à la même masse m ; on a donc :

$$nF_1 = F.$$

On aurait de même :

$$n'F_1 = F';$$

d'où :

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'},$$

et, par suite :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}.$$

Il est évident que l'on obtiendrait la même relation si les deux forces F et F′ sont quelconques. C'est ce qui résulte de la remarque que nous avons faite plus haut (n° **193**). On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux forces quelconques sont entre elles comme les masses des points matériels auxquels elles communiquent une même accélération.*

196. RELATION ENTRE UNE FORCE, LA MASSE DU POINT MATÉRIEL SUR LEQUEL ELLE AGIT ET L'ACCÉLÉRATION CORRESPONDANTE. — Soit F une force constante, appliquée à un point matériel de masse m, à partir du repos, et lui communiquant une accélération φ ; soit de même F′ une force constante communiquant une accélération φ' à un point de masse m' à partir du repos. Je dis que l'on aura :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\varphi}{m'\varphi'}.$$

En effet, soit F'' une force communiquant une accélération φ' au point de masse m, et appliquons les deux théorèmes précédents (nos **191** et **195**). Nous aurons :

$$\frac{F}{F''} = \frac{\varphi}{\varphi'},$$

$$\frac{F''}{F'} = \frac{m}{m'};$$

par conséquent :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\varphi}{m'\varphi'}.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux forces constantes sont entre elles comme les produits des masses des points matériels sur lesquels elles agissent, par les accélérations qu'elles leur communiquent.*

197. UNITÉ DE MASSE. — On convient de prendre *pour unité de masse*, celle d'un point matériel qui, sous l'action d'une force égale à l'unité, prend une accélération égale à l'unité. Il résulte de là que, si l'on suppose $F' = 1$, $\varphi' = 1$, on aura $m' = 1$, et la formule précédente nous donne alors :

$$F = m\varphi.$$

Donc, l'unité de masse étant choisie comme nous l'avons fait, *la valeur numérique d'une force constante est égale au produit de la masse du point sur lequel elle agit par l'accélération du mouvement rectiligne qu'elle lui communiquerait en agissant sur lui à partir du repos.*

198. Remarque. — Supposons maintenant un point matériel soumis à l'action d'une *force variable*, mais déterminée à chaque instant en grandeur, direction et sens. Il résulte de ce qui précède que la valeur actuelle de cette force est $m\varphi$, en désignant par φ l'accélération du mouvement rectiligne qu'elle communiquerait au point matériel, en agissant à partir du repos. Mais, cette accélération φ du mouvement rectiligne élémentaire uniformément varié, est précisément l'accélération actuelle du point dans son mouvement. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *A un instant quelconque, la valeur numérique d'une force est égale au produit de la masse du point sur lequel elle agit par l'accélération actuelle du mobile.*

199. L'unité de masse étant définie, proposons-nous de *déterminer la masse d'un corps dont on connaît le poids.* A cet effet, reprenons la formule :

$$F = m\varphi.$$

Soit P le poids du corps, c'est-à-dire la force qui détermine la chute du corps lorsqu'on l'abandonne à lui-même. L'expérience nous apprend que la force P, en agissant sur le corps dans le vide, lui communique un mouvement dont l'accélération g est constante dans un même lieu et pour tous les corps. A Paris, $g = 9{,}8088$, en prenant le mètre pour unité de longueur, et la seconde pour unité de temps. On a donc :

$$P = mg,$$

d'où :

$$m = \frac{P}{g}.$$

Cette formule nous permet de *déterminer numériquement la masse d'un corps*, l'unité de masse étant définie comme ci-dessus (nº **197**).

D'ailleurs, cette même formule :

$$P = mg,$$

nous permet de déterminer *le poids* correspondant *à l'unité de masse*.

En effet, en y faisant $m = 1$, il vient :

$$P = g.$$

Si donc l'unité de poids est le kilogramme, on a :

$$P = 9^{kil},8088,$$

et si l'unité de poids est le gramme, on aura :

$$P = 9^{gr},8088.$$

C'est le poids correspondant à l'unité de masse.

200. Remarque. — Nous venons de voir que la masse d'un corps est donnée par la formule :

$$m = \frac{P}{g}.$$

Il s'ensuit que *la masse d'un corps est proportionnelle à son poids*. Mais il faut bien se garder de confondre la masse avec le poids. Le poids varie suivant le lieu où l on se trouve; mais la valeur de g varie dans les mêmes circonstances, de sorte que le rapport $\frac{P}{g}$ reste absolument constant dans toutes les circonstances.

201. On peut encore arriver à la considération de la masse de la manière suivante : Nous avons vu (n° **191**) que des forces constantes, agissant successivement sur un même point matériel, sont proportionnelles aux accélérations qu'elles lui communiquent. Si donc F, F', F''... désignent les nombres qui mesurent les intensités de ces forces, et φ, φ', φ''... les accélérations constantes correspondantes, nous aurons :

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{F'}{\varphi'} = \ldots..$$

Mais, ce rapport $\frac{F}{\varphi}$, qui est constant pour un même point matériel, varie d'un point matériel à un autre : c'est ce qui résulte de l'expérience. Ce rapport a donc pour chaque point matériel une valeur caractéristique, que l'on appelle *la masse du point matériel*. En désignant par m la masse du point considéré, on a donc :

$$\frac{F}{\varphi} = m, \quad \text{ou bien} \quad F = m\varphi,$$

c'est-à-dire *qu'une force constante est mesurée par le produit de la masse du point matériel sur lequel elle agit par l'accélération correspondante* (n° **197**).

202. Remarque I. — Observons encore que *l'expression de la mesure d'une force constante agissant sur un point matériel libre à partir du repos, peut prendre une autre forme.*

Nous avons trouvé la formule :

$$F = m\varphi,$$

φ étant l'accélération du mouvement rectiligne uniformément varié que la force communique au point matériel *à partir du repos*. Or, dans le cas actuel, on a, en désignant par v la vitesse que le mobile posséderait au bout du temps t :

$$v = \varphi t\,;$$

par suite,

$$F = \frac{mv}{t}.$$

Le produit mv s'appelle *quantité de mouvement*.

En faisant $t = 1$, dans la formule précédente, on a :

$$F = mv.$$

On en conclut qu'*une force constante, agissant sur un point matériel libre à partir du repos, est mesurée par la quantité de mouvement qu'elle produit pendant l'unité de temps*, ou, en d'autres termes, par le produit de la masse de ce point par la vitesse qu'elle lui fait acquérir pendant l'unité de temps.

203. Remarque II. — Nous avons vu (n° **198**) que l'intensité d'une force variable est donnée par la formule :

$$F = m\varphi.$$

Cette force F est appelée la *force motrice*.

Si l'on désigne par f la force qui communique la même accélération φ à l'unité de masse, on aura :

$$f = \varphi.$$

La force qui produit le mouvement de l'unité de masse s'appelle la *force accélératrice*, de sorte que la quantité φ est l'accélération ou la force accélératrice.

CHAPITRE II.

Composition des forces appliquées à un même point matériel.

204. C'est en se basant sur les quatre principes fondamentaux, que l'on parvient à trouver toutes les lois du mouvement des corps, sous l'action des forces qui leur sont appliquées. Mais, avant d'aborder l'étude du mouvement des corps, nous commencerons, comme en cinématique, par l'étude plus simple des lois du mouvement d'un point matériel.

Il est facile de concevoir que des forces soient appliquées à un point matériel, de manière qu'elles se neutralisent réciproquement, c'est-à-dire de manière à ne pas modifier l'état de mouvement ou de repos de ce point. On dit alors que *ces forces se font équilibre sur le point matériel,* ou que *le point matériel est en équilibre sous l'action de ces forces.*

L'idée d'équilibre n'entraîne pas nécessairement celle de repos. Quand on dit que des forces se font équilibre sur un point, cela signifie qu'elles ne modifient pas son état. Si le point est en repos, il restera en repos : mais, des forces peuvent se faire équilibre sur un point en mouvement.

Ces deux états d'équilibre s'appellent *l'équilibre statique*, et *l'équilibre dynamique*.

L'étude de l'équilibre peut être considérée comme un cas particulier de l'étude du mouvement ; mais, à cause de l'importance de ce cas particulier, nous en ferons une étude spéciale, qui constitue la *statique*.

Nous rappellerons ici que l'on peut représenter géométriquement une force appliquée à un point matériel A par une ligne droite, menée à partir de ce point dans la direction et le sens de la force, et ayant une longueur AP égale ou proportionnelle à la valeur numérique de l'intensité de la force (n° **186**). La droite AP ainsi obtenue représente la force en grandeur, et en direction. Par direction de la force, on entend souvent, non-seulement la direction de la droite suivant laquelle elle sollicite le point, mais aussi le sens dans lequel elle agit.

Pour distinguer l'une de l'autre deux forces égales, et agissant en sens contraires, suivant la même direction, on donne à l'une le signe +, et à l'autre le signe —. Ainsi, les forces + P et — P agissent en sens contraires.

205. Résultante. — Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, suivant des directions quelconques, ce point prend un certain mouvement dans l'espace. Or, on conçoit que ce même mouvement pourrait lui être communiqué par l'action d'une force unique, dont la grandeur et la direction dépendent des circonstances que présente ce mouvement. Cette force unique, capable de donner au point matériel le même mouvement qu'il prend sous l'action des forces qui lui sont appliquées simultanément, s'appelle la *résultante de ces forces*. Les forces dont elle tient lieu se nomment *les composantes*.

La *composition des forces* a pour objet de déterminer la résultante, lorsque l'on connaît les composantes.

Le principe de l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel nous conduit à la règle de la composition des forces appliquées à un même point. D'après ce principe, le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces, s'obtient en composant le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse que ce point possède à un instant donné, avec les mouvements que chacune des forces données lui communiquerait si elle agissait seule sur ce point à partir du repos. Dans cette composition, les mouvements composants jouent le rôle de mouvements d'entraînement, et il est évident qu'ils doivent être considérés comme des mouvements de translation.

206. THÉORÈME. — *Deux forces agissant sur un même point matériel suivant une même direction et dans le même sens peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme.*

Soit un point matériel M, animé d'une vitesse v et soumis à l'action de deux forces P et P' dont les directions coïncident. D'après le principe de l'indépendance des effets des forces, le mouvement du point M s'obtient en composant le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse v, avec les mouvements que chacune des forces P et P' communiquerait au point M à partir du repos, si elle agissait seule.

Or, la force P, agissant seule à partir du repos, communiquerait *suivant sa direction* un mouvement rectiligne uniformément varié ayant une accélération φ. De même, la force P' agissant seule à partir du repos, communiquerait *suivant sa direction* un mouvement rectiligne uniformément varié ayant une accélération φ'. Ces deux mouvements sont des mouvements d'entraînement, et on peut les considérer comme des mouvements de translation.

L'accélération du mouvement résultant est la résultante des accélérations des mouvements composants. Or, l'accélération du mouvement rectiligne et uniforme est nulle. Donc, l'accélération Φ résultante est égale à la somme des accélérations φ et φ', et elle a la même direction que φ et φ'. Mais, il est évident qu'il existe une force R (n° **198**), ayant la même direction que Φ, qui, appliquée au point M lui communiquerait l'accélération Φ. Cette force $R = m\Phi$ peut donc être substituée aux deux forces P et P', et, par conséquent elle sera leur résultante.

D'ailleurs, puisque l'on a :

$$\Phi = \varphi + \varphi',$$

on a aussi :

$$m\Phi = m\varphi + m\varphi',$$

et, par suite (n° **198**),

$$R = P + P'.$$

207. Théorème. — *Si plusieurs forces* P, P', P'',... *agissent simultanément sur un même point matériel, suivant la même direction, et dans le même sens, leur résultante est égale à leur somme, dirigée suivant la même droite et dans le même sens.*

On a donc :

$$R = P + P' + P'' + \ldots..$$

La démonstration de ce théorème est évidente.

208. Théorème. — *Deux forces égales et de sens contraires appliquées à un même point matériel, se font équilibre.*

En effet, d'après le principe de l'indépendance des effets des forces, l'accélération totale communiquée au point M sera la somme algébrique des accélérations dûes à ces forces. Or, ces accélérations étant égales et de sens contraires, l'accélération totale résultante sera nulle, c'est-à-dire que si le point était en repos, il restera en repos malgré la présence des deux forces. Donc, deux forces égales et de sens contraires agissant simultanément sur un même point matériel en repos se détruisent. Il résulte encore de là que deux forces égales et de sens contraires agissant simultanément sur un point matériel en mouvement n'altèrent pas le mouvement de ce point. Ces forces se font équilibre, ou bien le point est en équilibre sous l'action de ces forces.

REMARQUE I. — Il est évident, d'après cela, que l'on peut sans rien changer à l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel, introduire ou supprimer deux forces égales et de sens contraires, tout comme en algèbre on introduit ou supprime deux termes égaux et de signes contraires. Nous emploierons souvent ce procédé pour simplifier les démonstrations.

REMARQUE II. — Cette propriété de deux forces égales et opposées de n'imprimer aucun mouvement à un point matériel en repos fournit le moyen le plus commode *d'évaluer les intensités des forces.* Au lieu de comparer les forces par les accélérations qu'elles communiquent à une même masse, on les rapporte à une force bien connue, en cherchant *combien il faut réunir de forces égales à celle-ci pour faire équilibre à la force donnée.*

209. THÉORÈME. — *Si deux forces* P *et* P' *agissent sur un point matériel suivant la même direction, mais en sens contraires, la résultante de ces deux forces est égale en valeur absolue à leur différence, et elle est dirigée dans le sens de la plus grande.*

Soit la force P plus grande que la force P'. Il est évident (n° **206**) que l'on peut considérer la force P comme étant la résultante de deux forces, l'une égale à P', l'autre égale à P — P', et agissant dans le même sens que la force P. Nous aurons donc ainsi, au lieu des deux forces P et P', les trois forces P', — P' et P — P'. Or, les deux forces P', égales et de sens contraires, se font équilibre. Il nous reste donc la force P — P' agissant dans le même sens que la force P, et qui sera, par conséquent, la résultante des forces proposées.

210. THÉORÈME. — *Si plusieurs forces agissent sur un même point matériel suivant une même direction, les unes dans un sens, les autres en sens opposé, leur résultante est égale à la somme algébrique de toutes ces forces, et elle agit suivant la même direction, et dans le sens des forces qui donnent la plus grande somme arithmétique.*

Soient P, P', P'',... les forces qui agissent dans un même sens, Q, Q', Q'',... les forces qui agissent suivant la même direction, mais en sens contraire des premières. Il est facile de voir (n° **207**) que toutes les forces P de même direction et de même sens se composent en une force unique :

$$R' = P + P' + P'' + \ldots\ldots = \Sigma P,$$

de même direction et de même sens que les forces P.

De même, toutes les forces Q de même direction et de même sens, se composent en une force unique :

$$R'' = Q + Q' + Q'' + \ldots\ldots = \Sigma Q.$$

Le système proposé se réduit donc à deux forces R' et R'' de même direction et de sens contraires. Or, ces deux forces se composent (n° **209**) en une résultante unique R de même direction que ces forces, égale à leur différence et de même sens que la plus grande.

Si donc nous supposons $R' > R''$, nous aurons :

$$R = R' - R'' = \Sigma P - \Sigma Q,$$

ou bien :

$$R = P + P' + P'' + \ldots\ldots - (Q + Q' + Q'' + \ldots\ldots),$$

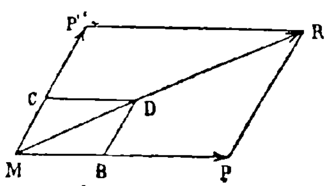
ce qui démontre le théorème énoncé.

REMARQUE. — Si la somme algébrique $\Sigma P - \Sigma Q$ est nulle, la résultante R est nulle, et les forces données se font équilibre.

211. COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES. — *Deux forces* P, P', *appliquées à un même point matériel se composent en une seule, qui est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les forces* P *et* P'.

Soit M un point matériel (fig. 64), soumis aux deux forces P et P' ; d'après le principe de l'indépendance des effets des forces, pour obtenir le mouvement du point M, il faut composer le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse que le mobile possède à un instant quelconque avec les mouvements que chacune des forces P et P' lui communiquerait si elle agissait seule à partir du repos. Or, la force P, agissant seule sur le point M à partir du repos, lui

Fig. 64.



communiquerait *suivant sa direction* un mouvement rectiligne uniformément varié, ayant une accélération φ. De même, la force P', agissant seule sur le point M à partir du repos, lui communiquerait *suivant sa direction* un mouvement rectiligne uniformément varié, ayant une accélération φ'. Ces deux mouvements qui jouent le rôle de mouvements d'entraînement doivent être considérés comme des mouvements de translation. Or, nous savons (nº **161**) que, dans ce cas, l'accélération totale du mouvement résultant est la résultante des accélérations totales des mouvements composants. Mais, l'accélération du mouvement rectiligne uniforme étant nulle, il s'ensuit que l'accélération totale Φ du mouvement résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations $MB = \varphi$, $MC = \varphi'$ des mouvements correspondants aux forces P et P'. Nous savons aussi (nº **198**) qu'une force unique R, ayant pour direction celle de l'accélération Φ, et pour intensité $m\Phi$, imprimerait exactement le même mouvement. Cette force R peut donc remplacer les forces P et P' ; elle est, par conséquent, leur résultante. Mais, les forces P, P', R, dirigées suivant les accélérations φ, φ', Φ, sont proportionnelles à ces accélérations ; par conséquent, les droites qui représentent ces forces en grandeur et direction forment une figure semblable à celle que forment les droites qui représentent les accélérations φ, φ' et Φ. Donc, MR est la résultante de MP et MP', et l'on en conclut le théorème énoncé. Ce théorème est connu sous le nom de *parallélogramme des forces*.

212. Conséquences. — Le triangle MPR nous donne facilement les relations suivantes :

$$P : P' : R = \sin(P', R) : \sin(P, R) : \sin(P, P'),$$

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos(P, P').$$

Ces formules permettent de déterminer R et les angles (P, R) et (P′, R), lorsque l'on connaîtra P, P′ et l'angle (P, P′).

213. Cas particuliers. — 1° Si les forces P, P′ sont perpendiculaires entre elles, on a les relations :

$$P = R \cos (P, R),$$

$$P' = R \sin (P, R),$$

$$R^2 = P^2 + P'^2.$$

2° Si $P = P'$, le parallélogramme devient un losange, et l'on a :

$$R = 2P \cos \tfrac{1}{2} (P, P').$$

Remarque. — Deux forces agissant sur un même point matériel, ne peuvent avoir une résultante nulle, que si elles sont égales et directement opposées.

214. Réciproquement, une force R étant donnée, on peut toujours la remplacer par deux autres forces dont les directions sont données dans un même plan avec la force. Il suffira de construire un parallélogramme dont MR sera la diagonale, et dont les côtés sont donnés en direction. C'est le problème de la *décomposition d'une force* en deux autres situées dans un même plan avec la force donnée.

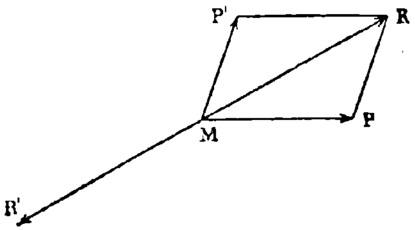
En particulier, si les deux directions données sont rectangulaires, nous aurons, en désignant par R la force donnée, par X, Y les deux composantes, et par α l'angle de R avec la composante **X** :

$$X = R \cos \alpha,$$

$$Y = R \sin \alpha.$$

215. Remarque. — La force R étant la résultante des deux forces P et P′, il est évident que, si aux deux forces P, P′, nous en joignons une autre R′, égale et directement opposée à R (fig. 65), les trois forces P, P′, R′ se feront équilibre. Il résulte de là et des relations précédentes (n° **212**) que l'on a :

Fig. 65.

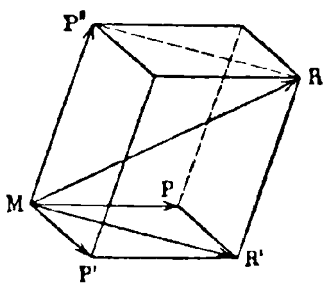


$$P : P' : R' = \sin(P', R') : \sin(P, R') : \sin(P, P').$$

Donc, *pour que trois forces concourantes se fassent équilibre, il faut :* 1° *que ces trois forces soient situées dans un même plan ;* 2° *que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

216. Théorème. — *La résultante de trois forces concourantes non situées dans un même plan est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent ces trois forces.*

Fig. 66.



Soient les trois forces P, P′, P″ appliquées au point M. En composant d'abord (fig. 66) les deux forces P et P′ par la règle du parallélogramme, on trouve que la résultante de ces deux forces est donnée en grandeur et en direction par la droite MR′, et en composant cette dernière avec la force P'', on obtient la résultante R des trois forces proposées. Or, il est évident que cette résultante R n'est autre que la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent les forces données.

Cas particulier. — Dans le cas où les forces P, P', P'' sont perpendiculaires entre elles, le parallélipipède est droit, et l'on a :

$$P = R \cos (P, R),$$

$$P' = R \cos (P', R),$$

$$P'' = R \cos (P'', R),$$

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2.$$

217. Réciproquement, une force R étant donnée en grandeur et direction, on peut la décomposer suivant trois directions non situées dans un même plan. Il suffira pour cela de construire un parallélipipède dont MR sera la diagonale, et dont les arètes sont données en direction.

En particulier, si les trois directions données sont perpendiculaires entre elles, nous aurons, en désignant par R la force donnée, par X, Y, Z ses composantes suivant les trois directions, et par α, β, γ les angles de R avec ces directions :

$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \cos \beta, \quad Z = R \cos \gamma.$$

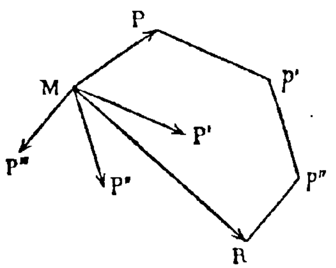
Ces formules nous montrent que les trois composantes sont les projections de R sur les trois directions données.

Remarque. — Il résulte du théorème du parallélipipède que, si trois forces ne sont pas dans un même plan, elles ne pourront avoir une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles toutes les trois.

218. Théorème. — *Un nombre quelconque de forces* P, P′, P″..., *appliquées à un même point matériel, se composent en une résultante unique qui est donnée en grandeur et en direction par la droite qui ferme le contour polygonal des forces données.*

En appliquant successivement la règle du parallélogramme des forces, on voit qu'il suffit de construire le contour polygonal MP$p'p''$R (fig. 67) dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux forces données. La droite MR représentera en grandeur et direction la résultante des forces proposées. Cette construction a reçu le nom *polygone des forces*.

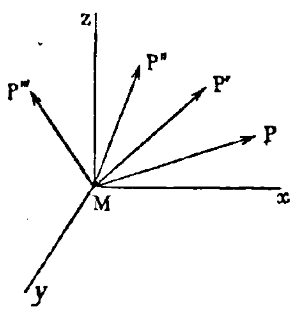
Fig. 67.



219. Méthode analytique.—*Etant donné un nombre quelconque de forces concourantes* P, P′, P″,... *trouver la résultante de ces forces en grandeur et direction.*

Rapportons le système à trois axes rectangulaires Mx, My, Mz ayant pour origine le point M (fig. 68). Soient α, β, γ les angles de la force P avec les axes, X, Y, Z, ses composantes suivant les axes; α', β', γ' les angles de la force P′ avec les axes, X′, Y′, Z′ ses composantes, et ainsi de suite.

Fig. 68.



La force P décomposée suivant les axes, nous donne (n° **217**) :

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma\,;$$

de même, la force P' nous donne :

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \cos \beta', \quad Z' = P' \cos \gamma',$$

et ainsi de suite.

Or, les forces X, X', X''..., dirigées suivant l'axe des x, se composent en une force unique, dirigée suivant l'axe des x, et égale à la somme algébrique de toutes ces forces (n° **210**). Cette force unique est donc égale à ΣX ou $\Sigma P \cos \alpha$; de même, suivant l'axe des y, nous aurons une force unique égale à ΣY ou $\Sigma P \cos \beta$, et suivant l'axe des z une force unique égale à ΣZ ou $\Sigma P \cos \gamma$.

Nous aurons ainsi réduit les forces données à trois forces dirigées suivant les trois axes rectangulaires : ces trois forces se composeront en une résultante unique R, qui sera la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois forces (n° **216**). Nous aurons donc :

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2},$$

ou bien :

$$R = \sqrt{(\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cos \gamma)^2}. \qquad (1)$$

Si nous désignons par a, b, c, les angles de R avec les axes, les composantes de R suivant les axes seront (n° **217**) : $R \cos a$, $R \cos b$, $R \cos c$. Nous aurons donc :

$$R \cos a = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos b = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos c = \Sigma P \cos \gamma\ ;$$

par suite :

$$\cos a = \frac{\Sigma P \cos \alpha}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma P \cos \beta}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma P \cos \gamma}{R}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) déterminent la grandeur et la direction de la résultante.

Conditions d'équilibre d'un point matériel libre.

220. Nous avons vu (n° **204**) qu'un point matériel est en équilibre, quand, étant en repos, il reste en repos sous l'action des forces qui lui sont appliquées. On dit aussi que des forces appliquées à un point matériel en mouvement se font équilibre, lorsque ce point, s'il était en repos, resterait en repos sous l'action de ces forces.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel soit en équilibre sous l'action de plusieurs forces, est que la résultante de ces forces soit nulle.*

Supposons d'abord le point matériel en repos. Je dis que la condition est *nécessaire :* en effet, les forces données peuvent être remplacées par leur résultante. Le point matériel doit donc rester en repos sous l'action de cette résultante, ce qui ne peut avoir lieu que si cette résultante est nulle. La condition est *suffisante* pour que le point primitivement en repos, reste en repos sous l'action des forces qui lui sont appliquées : en effet, ces forces pouvant être remplacées par leur résultante, et cette résultante étant nulle, le point sera dans le même état que si aucune force n'agissait sur lui, et, par suite, il restera en repos.

Il est évident que si des forces agissant sur un point en mouvement, ont une résultante nulle, ces forces se feront équilibre.

Cherchons, d'après cela, les *conditions analytiques* qui expriment l'*équilibre d'un point matériel libre*, sous l'action des forces P, P′, P″..., qui lui sont appliquées.

Il résulte de l'équation (1) (n° **219**) que la condition $R = 0$, nous donne les trois équations :

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X = 0,\\ \Sigma Y = 0,\\ \Sigma Z = 0,\end{array}\right\} \text{ ou bien : } \left.\begin{array}{l}\Sigma P \cos \alpha = 0,\\ \Sigma P \cos \beta = 0,\\ \Sigma P \cos \gamma = 0.\end{array}\right\}$$

Ce sont les *conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces* P, P', P''..., *appliquées à un point matériel libre.*

Remarque. — Si des forces, appliquées à un point matériel libre, se font équilibre, le polygone des forces sera fermé de lui-même, puisque la résultante ou la droite qui ferme le contour doit être nulle. Il est évident aussi que, si l'on change le sens de l'un des côtés, ce nouveau côté deviendra la résultante des autres. Donc, *si des forces se font équilibre, l'une quelconque de ces forces prise en sens contraire est la résultante des autres.*

221. Projection des forces. — Une force appliquée à un point matériel étant représentée en grandeur, direction et sens par une droite (n° **186**), la projection de cette droite sur un plan ou sur une droite peut être considérée comme représentant une force, que l'on appellera la projection de la première.

Cela posé, si l'on projette sur un plan le polygone des forces appliquées à un point matériel, on obtient comme projection un polygone plan fermé. On en conclut que *la projection sur un plan fixe de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel, est la résultante des projections des forces sur ce plan.*

On trouverait de la même manière que, si plusieurs forces agissent sur un même point matériel, *la projection de leur résultante sur une droite fixe est la résultante* *des projections des forces sur cette droite :* cette dernière résultante est la somme algébrique des projections des composantes.

222. On peut d'ailleurs démontrer analytiquement cette propriété que *la projection de la résultante sur une droite donnée est égale à la somme des projections des composantes sur cette droite.*

En effet, soient d une droite donnée, λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec les axes, R (a, b, c) la résultante des forces P (α, β, γ), P' $(\alpha', \beta', \gamma')$... Nous aurons :

$$\cos(d, \mathrm{R}) = \cos\lambda\cos a + \cos\mu\cos b + \cos\nu\cos c,$$

d'où :

$$\mathrm{R}\cos(d, \mathrm{R}) = \mathrm{R}\cos a\cos\lambda + \mathrm{R}\cos b\cos\mu + \mathrm{R}\cos c\cos\nu,$$

ou bien, en vertu des formules (2) (n° **219**) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\cos(d, \mathrm{R}) &= \cos\lambda(\mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{P}'\cos\alpha' + \ldots) \\
&\quad + \cos\mu(\mathrm{P}\cos\beta + \mathrm{P}'\cos\beta' + \ldots) \\
&\quad + \cos\nu(\mathrm{P}\cos\gamma + \mathrm{P}'\cos\gamma' + \ldots) \\
&= \mathrm{P}(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu) \\
&\quad + \mathrm{P}'(\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu) \\
&\quad + \ldots\ldots \\
&= \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, d) + \mathrm{P}'\cos(\mathrm{P}', d) + \ldots = \Sigma\mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, d),
\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

223. Problème. — *Un nombre quelconque de forces étant appliquées à un même point matériel, trouver la* *grandeur de leur résultante en fonction des intensités de ces forces, et des angles qu'elles font entre elles.*

On sait (n° **219**) que les composantes de R sont données par les formules :

$$R \cos a = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots,$$

$$R \cos b = P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \ldots,$$

$$R \cos c = P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots.$$

Elevant au carré, et ajoutant, en ayant égard aux relations :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos (P, P'), \text{ etc.}$$

il vient :

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots + 2PP' \cos (P, P') + 2PP'' \cos (P, P'') + \ldots,$$

ou bien :

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos (P, P').$$

CHAPITRE III.

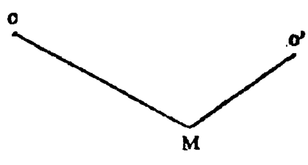
Équilibre d'un point matériel qui n'est pas libre.

224. Il arrive souvent qu'un point matériel est soumis à des conditions particulières qui font que le mouvement qu'il possède à chaque instant est différent de celui qu'il posséderait sous l'action de sa vitesse et des forces qui lui sont appliquées. On dit alors que le point est soumis à *des liaisons*.

Ainsi, par exemple, un point M suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible, dont l'autre extrémité est fixée en un point O, n'est pas libre. Il ne peut s'éloigner de O d'une quantité plus grande que OM. Il en résulte que ce point est assujetti à rester soit à l'intérieur d'une sphère de rayon OM, soit sur la surface de cette sphère.

Si OM est une barre rigide, le point M ne peut ni se rapprocher du point O d'une quantité plus petite que OM, ni s'en éloigner d'une quantité plus grande que OM. Il est assujetti à se mouvoir sur la surface de la sphère de rayon OM.

Fig. 69.



Si le point est à l'extrémité commune de deux tiges rigides articulées aux points fixes O et O′ (fig. 69), il ne pourra que se mouvoir à la fois sur les deux sphères de rayons OM et O′M, c'est-à-dire sur la courbe d'intersection de ces deux sphères.

On voit donc qu'en général, un point matériel qui n'est pas libre, est assujetti à demeurer sur une surface, ou sur une courbe, ou à demeurer dans une portion finie de l'espace.

Dans ces différents cas, on ne connaît pas *à priori* toutes les forces qui agissent sur le mobile. En effet, les obstacles obligent le point à se mouvoir de telle ou telle manière : ces obstacles produisent donc sur le point certains effets.

Il est évident que *l'effet d'une liaison sur un point équivaut à une force continuellement appliquée à ce point, et que l'on appelle force de liaison.* Par conséquent, on peut toujours supprimer les liaisons, en y substituant des forces convenables. Si l'on joint ces forces aux forces qui sollicitent le point matériel, *celui-ci pourra être considéré comme libre.* Il suffira alors pour l'équilibre que *la résultante de toutes les forces appliquées au point matériel* (c'est-à-dire les forces données et les forces qui remplacent les liaisons), *soit nulle.*

Équilibre d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface.

225. Soit un point matériel M sollicité par des forces données et assujetti à demeurer sur une surface. Dans ce cas, la force de liaison sera *la réaction de la surface* contre le point matériel. En effet, le point M étant sollicité par les forces qui lui sont appliquées, et devant rester sur une surface, produira sur celle-ci *une pression* déterminée. Mais, en vertu du second principe (n° **187**), la surface exercera sur le point M une réaction égale et contraire. Reste à déterminer cette réaction. Or, il est facile de voir que, *si la surface est parfaitement polie, elle ne pourra exercer qu'une réaction normale à la surface.*

A cet effet, observons que, si un point matériel est assujetti à demeurer sur une surface, la *condition nécessaire et suffisante* pour qu'il y ait équilibre est que la résultante des forces soit dirigée suivant la normale à cette surface. Cette condition est *suffisante ;* car, si elle est remplie, il n'y a pas de raison pour que le point matériel se déplace dans le plan tangent dans un sens plutôt que dans l'autre. Elle est *nécessaire ;* car, si la résultante n'était pas dirigée suivant la normale, on pourrait la décomposer en deux forces : l'une suivant la normale, l'autre dans le plan tangent. La première n'aurait aucune action pour déplacer le point ; la seconde, au contraire, aurait pour effet de déplacer le point dans le plan tangent.

Ces considérations vont nous servir à déterminer la *direction de la réaction de la surface.* En effet, si l'on joint cette force aux forces données, le point peut être considéré comme libre, et, puisqu'il est en équilibre, la réaction doit être égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces données, et, par conséquent, elle sera *normale à la surface.*

226. Equations d'équilibre. — Nous regarderons la surface comme parfaitement polie, c'est-à-dire comme ne pouvant exercer en un quelconque de ses points qu'une réaction dirigée suivant la normale en ce point. Nous pouvons donc considérer le point M comme libre, si, aux forces qui agissent sur ce point M, nous joignons la réaction normale de la surface, que nous désignerons par N.

Cela posé, soient X, Y, Z, les composantes de la résultante des forces appliquées au point M, λ, μ, ν les angles de la réaction normale avec les axes. Le point étant rendu libre, nous aurons les équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} X + N\cos\lambda &= 0, \\ Y + N\cos\mu &= 0, \\ Z + N\cos\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Or, en désignant par :

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface, et posant :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

on a :

$$\cos\lambda = V\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\mu = V\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\nu = V\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Les équations d'équilibre deviennent alors :

$$X + NV\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$Y + NV\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$Z + NV\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

On en tire, en éliminant N :

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{2}$$

Ce sont les conditions d'équilibre d'un point assujetti à demeurer sur la surface $F(x, y, z) = 0$.

Remarque I. — Les équations (2) expriment que les composantes de la résultante doivent être proportionnelles aux dérivées partielles de la fonction F.

Remarque II. — Les équations (2) nous permettent de reconnaître si un point donné sur la surface est en équilibre sous l'action des forces P, P', P''..., qui lui sont appliquées. Il suffira de vérifier si les coordonnées de ce point satisfont aux équations (2).

Remarque III. — Les équations (2), jointes à l'équation de la surface $F(x, y, z) = 0$, forment un système de trois équations à trois inconnues x, y, z, qui nous permettront de déterminer ces trois inconnues, c'est-à-dire la position du point de la surface qui est en équilibre sous l'action des forces données.

Remarque IV. — Lorsque les conditions (2) sont vérifiées, on pourra *déterminer la réaction normale en grandeur et direction*. En effet, des équations (1) on tire, en élevant au carré, et ajoutant :

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R.$$

On en conclut que la réaction normale est égale à la résultante des forces données.

D'ailleurs, les équations (1) nous donnent :

$$N \cos \lambda = - X,$$

$$N \cos \mu = - Y,$$

$$N \cos \nu = - Z.$$

Par conséquent, la réaction normale est directement opposée à la résultante R des forces données.

Remarque V. — On aurait pu trouver les équations (2) d'une autre manière : il suffit d'écrire la condition que la résultante des forces données doit être normale à la surface. Si donc on désigne par a, b, c les angles de la résultante avec les axes, on aura :

$$\frac{\cos a}{\cos \lambda} = \frac{\cos b}{\cos \mu} = \frac{\cos c}{\cos \nu},$$

ou bien :

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

comme précédemment.

Équilibre d'un point matériel assujetti à demeurer sur une courbe.

227. Soient :

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les équations de la courbe.

Il est évident que, sous l'action des forces qui lui sont appliquées, le point matériel exercera une certaine pression sur la courbe. En vertu du second principe (nº **187**), la courbe exercera sur le point M une réaction égale et contraire. Si nous supposons la courbe sans frottement, la réaction qu'elle exerce sur le point M sera normale à la courbe, c'est-à-dire qu'elle sera dans le plan normal. Nous pouvons donc faire abstraction de la courbe, et considérer le point M comme libre, si, aux forces qui agissent sur ce point, nous joignons la réaction normale que nous désignerons par N. Nous aurons alors pour les équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} X + N\cos\lambda &= 0, \\ Y + N\cos\mu &= 0, \\ Z + N\cos\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

D'ailleurs, la réaction normale N étant perpendiculaire à la tangente, on a la relation :

$$\cos\lambda \,.\, dx + \cos\mu \,.\, dy + \cos\nu \,.\, dz = 0.$$

Par suite, en multipliant les équations (2) respectivement par dx, dy, dz, et ajoutant, il vient :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation d'équilibre.

Or, des équations (1) on tire :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

d'où :

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

L'équation (3) devient alors :

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ + Z\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

C'est la condition d'équilibre cherchée.

Il est bon d'observer que cette équation (5) n'est autre que le résultat de l'élimination de dx, dy, dz entre les équations (3) et (4) ; elle peut donc être mise sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque I. — Lorsque l'on voudra s'assurer si un point donné de la courbe est en équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées, il suffira de vérifier si les coordonnées de ce point satisfont à l'équation (5).

Remarque II. — Les équations (1) et (5) forment un système de trois équations à trois inconnues x, y, z, lesquelles serviront à déterminer la position du point de la courbe qui est en équilibre sous l'action des forces données.

Remarque III. — Des équations (2) on tire :

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R,$$

ce qui démontre que la réaction est égale en grandeur à la résultante des forces qui agissent sur le point matériel. D'ailleurs, ces mêmes équations (2) nous donnent :

$$N \cos \lambda = -X,$$

$$N \cos \mu = -Y,$$

$$N \cos \nu = -Z;$$

donc, la réaction normale est directement opposée à la résultante des forces qui agissent sur le point matériel.

Remarque IV. — On pouvait obtenir l'équation (3) par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur une surface. Il est facile de s'assurer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit en équilibre sur une courbe est que la résultante des forces données soit située dans le plan normal à la courbe. En effet, si elle n'est pas dans le plan normal, on pourra la décomposer en deux forces, l'une dans le plan normal, l'autre suivant la tangente à la courbe. La première aurait pour effet de maintenir le point sur la courbe, de le presser contre la courbe, la seconde le ferait glisser sur la courbe, et, par conséquent, l'équilibre ne pourrait avoir lieu.

La condition d'équilibre est donc que la force R soit dans le plan normal, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente ; cette condition est exprimée par l'équation :

$$\cos(\mathrm{R}, t) = 0,$$

ou bien :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0\,;$$

c'est l'équation (3).

CHAPITRE IV.

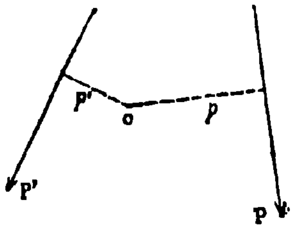
Moments des forces par rapport à un point.

228. On appelle *moment d'une force par rapport à un point* O, le produit de cette force par la distance du point O à la direction de la force. Ce point O s'appelle le *centre des moments*.

Il en résulte que le moment d'une force par rapport à un point est nul, lorsque le point est sur la direction de la force.

229. CONVENTION. — On est convenu d'attribuer un signe aux moments des forces, d'après la position qu'elles occupent par rapport au point O. A cet effet, on imagine que le point d'application de chaque force soit entraîné dans la direction de la force qui le sollicite. Chacun de ces déplacements peut être considéré comme une rotation autour du centre des moments dans un certain sens facile à trouver d'après le sens dans lequel la force agit. D'après la convention que nous avons adoptée en cinématique (n^{os} **97** et **98**) sur le signe d'une rotation, nous lui donnerons le signe +, si elle a lieu de gauche à droite, et le signe —, si elle a lieu de droite à gauche. Nous donnerons aux *moments les mêmes signes qu'aux rotations correspondantes*. Ainsi, le point O étant le centre des moments (Fig. 70), le moment de la force P, qui est Pp, sera positif, et celui de la force P′, qui est P′p', sera négatif. Nous écrirons donc :

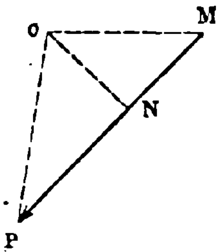
Fig. 70.



$$+\,\mathrm{P}p \quad \text{et} \quad -\,\mathrm{P}'p'.$$

230. THÉORÈME. — *La valeur absolue du moment d'une force peut être représentée par une aire plane.*

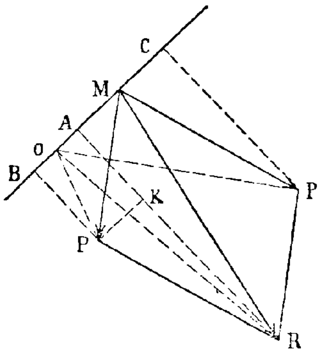
Fig. 71.



Soient M le point d'application de la force P, MP la force en grandeur et direction, O le centre des moments. Le moment de la force par rapport au point O est Pp = MP × ON (fig. 71). Or, l'aire du triangle OMP est égale à $\frac{1}{2}$ MP × ON = $\frac{1}{2}$ Pp. Donc, le moment de la force est égal *au double* de l'aire du triangle OMP.

231. Théorème. — *Si l'on considère deux forces appliquées à un même point matériel, et la résultante de ces deux forces, le moment de la résultante par rapport à un point* O *pris dans le plan de ces forces est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce même point.*

Fig. 72.



Soient MP et MP' les deux forces concourantes (fig. 72), MR leur résultante, et O le centre des moments. Les moments de ces trois forces sont respectivement égaux aux doubles des aires des triangles OMP, OMP' et OMR (nº **230**). Par conséquent, le théorème énoncé revient à l'égalité suivante :

$$\text{aire OMR} = \text{aire OMP} + \text{aire OMP}'.$$

Or, ces trois triangles qui ont une base commune OM sont entre eux comme leurs hauteurs RA, PB et P'C. Cela posé, si par le point P nous menons PK parallèle à OM, les deux triangles rectangles PRK, et MP'C sont égaux; donc, RK = P'C. Par conséquent, on a :

$$\text{RA} = \text{PB} + \text{P'C},$$

et par suite, le triangle OMR est égal à la somme des deux autres OMP et OMP', et le théorème est démontré.

Il est facile de s'assurer que le théorème énoncé est vrai, *quelle que soit la position du point* O dans le plan des trois forces, à la condition d'attribuer aux moments de chacune des trois forces un signe convenable (nº **229**).

Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Varignon.*

Il résulte de là que, si nous désignons par r, p, p', les distances respectives du point O aux trois forces R, P, P′, nous aurons la relation :

$$Rr = Pp + P'p'.$$

REMARQUE. — Si le point O est situé sur la résultante, les moments des forces P et P′ sont égaux et de signes contraires. D'ailleurs, dans ce cas, le moment de la résultante est nul.

232. THÉORÈME. — *Si l'on considère un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel, et situées toutes dans un même plan, le moment de la résultante de ces forces par rapport à un point* O *situé dans ce plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport à ce même point.*

En effet, soient P, P′, P″,... les forces concourantes ; si nous composons les deux forces P et P′ nous obtenons une résultante partielle R′, et l'on a :

$$R'r' = Pp + P'p' ;$$

composant ensuite R′ avec P″, on obtient une seconde résultante partielle R″, et l'on a :

$$R''r'' = R'r' + P''p'' = Pp + P'p' + P''p''.$$

En continuant ainsi, on finira par obtenir la résultante R des forces données, et il viendra :

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \dots = \Sigma Pp,$$

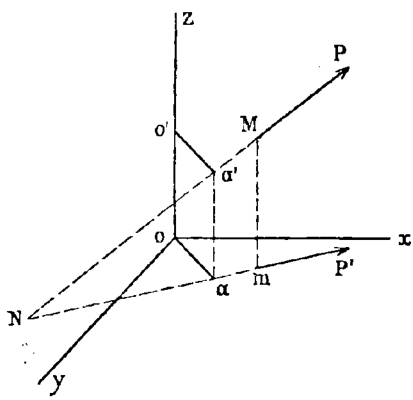
ce qui démontre le théorème énoncé.

Moments des forces par rapport à un axe.

233. On appelle *moment d'une force par rapport à un axe* le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la distance du point où l'axe rencontre le plan à la projection de la force. C'est le moment de cette projection par rapport au pied de l'axe.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que la distance du pied de l'axe à la projection de la force est égale à la plus courte distance entre la direction de la force et l'*axe des moments*.

Fig. 73.



En effet, soit Oa (fig. 73) la distance du pied O de l'axe à la projection mP' de la force sur le plan xy, perpendiculaire à l'axe Oz. Cette droite Oa étant perpendiculaire à l'axe Oz et à la force mP', est perpendiculaire au plan PNP', et, par conséquent, à la force MP. Elle est donc égale et parallèle à la plus courte distance $O'a'$ des deux droites Oz et MP.

Par suite, *le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance entre l'axe et la direction de la force.*

Il résulte de ce qui précède que le moment d'une force par rapport à un axe est nul :

1° Lorsque la force rencontre l'axe ;

2° Lorsque la force est parallèle à l'axe : car alors la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe est nulle.

On peut comprendre ces deux cas dans l'énoncé suivant : *le moment d'une force par rapport à un axe est nul, lorsque la direction de la force et l'axe sont dans un même plan.*

234. Signes des moments. — Le moment de la force P par rapport à l'axe n'étant autre que le moment de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au pied de l'axe, il est naturel de lui donner le *signe de ce dernier*.

Par conséquent, le moment $P'p$ de la force P par rapport à l'axe Oz sera positif ou négatif, suivant que la force P' tend à faire tourner la perpendiculaire Oa de gauche à droite par rapport à la direction positive Oz, ou en sens contraire.

235. Théorème. — *La valeur absolue du moment d'une force par rapport à un axe peut être représentée par une aire plane.*

En effet, le moment de la force P par rapport à Oz est égal au double de l'aire du triangle OmP' qui a pour base la projection mP' de la force sur le plan normal à l'axe, et pour sommet le pied de l'axe. Or, ce triangle est évidemment la projection sur le plan normal de l'aire du triangle formé en joignant un point quelconque de l'axe aux extrémités de la droite qui représente la force, par exemple le triangle OMP.

236. Théorème. — *Si un point matériel est soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces non situées dans un même plan, le moment de la résultante par* *rapport à un axe est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport à ce même axe.*

En effet, si l'on projette sur un plan quelconque toutes les forces, ainsi que leur résultante, on sait (n° **221**) que la projection de la résultante est la résultante des projections des composantes. Cette propriété aura lieu si l'on projette sur un plan perpendiculaire à l'axe des moments. D'ailleurs, toutes ces projections étant dans un même plan, le moment de la résultante projetée par rapport au pied de l'axe est égal à la somme des moments des composantes projetées, par rapport au même point.

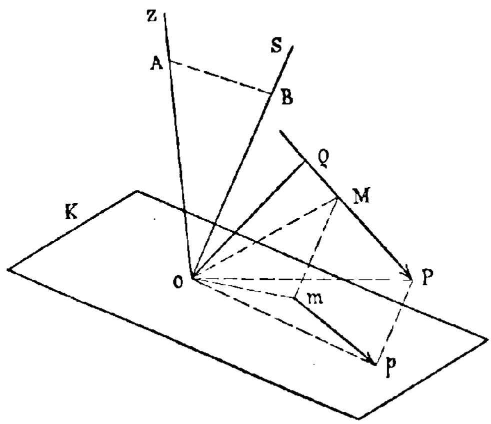
Donc, le moment de la résultante par rapport à l'axe est égal à la somme des moments des composantes par rapport à cet axe.

237. Théorème. — *Le moment d'une force par rapport à un point, est en valeur absolue, le maximum des moments de cette force par rapport à tous les axes que l'on peut mener par ce point.*

Pour démontrer cette propriété, cherchons le moment de la force P par rapport à un axe quelconque passant par le point O. Soit MP une force appliquée au point M (fig. 74) ; le moment de cette force par rapport au point O est égal à MP $\times$ OQ. Or, ce produit est aussi le moment de la force P par rapport à un axe OZ, mené par le point O, perpendiculairement au plan OMP passant par la force et par le centre O, et il est égal au double de l'aire du triangle OMP (n° **235**).

Cela posé, proposons-nous de trouver le moment de la force P par rapport à un autre axe OS passant par le point O. A cet effet, menons par le point O un plan K perpendiculaire à l'axe OS, et projetons le triangle OMP sur ce plan en O*mp*. Le moment de la force P par rapport à l'axe OS sera le double de l'aire du triangle O*mp* (n° **235**). Prenons maintenant sur OZ une longueur OA, mesurée à une certaine échelle, et égale à MP × OQ, c'est-à-dire au double de l'aire du triangle OMP. Les axes

Fig. 74.



OZ et OS feront entre eux un angle égal à l'angle des deux plans OMP et O*mp*; et si nous projetons OA sur OS, nous aurons une longueur OB, qui sera égale au double de l'aire O*mp*, c'est-à-dire au moment de la force P par rapport à OS.

Donc, *pour avoir le moment de la force* P *par rapport à un axe quelconque* OS, *on mène par le point* O *une perpendiculaire au plan passant par la force et par le point* O; *sur cette perpendiculaire on prend une longueur* OA, *égale au moment de la force* P *par rapport au point* O, *puis on projette* OA *sur* OS, *la projection sera le moment cherché.*

Il est évident que, quel que soit l'axe OS, on aura toujours OB < OA, et, par conséquent, le moment de la force P par rapport au point O, est le *maximum des moments de cette force par rapport à tous les axes passant par le point* O.

Remarque I. — Les moments de la force P par rapport à tous les axes OS, qui font un même angle avec OZ, sont égaux.

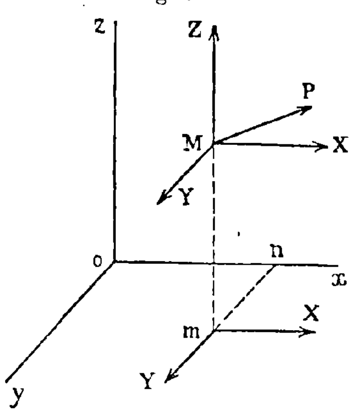
Remarque II. — Les moments sont nuls par rapport à tous les axes menés par le point O perpendiculairement à OZ. D'ailleurs, tous ces axes sont dans un plan passant par la force P (n° **233**).

Remarque III. — Les extrémités B des axes des moments d'une même force P sont situés sur une sphère dont OA est le diamètre. En effet, si l'on fait mouvoir OS dans le plan AOB, le point B, projection de A, décrira une circonférence dont OA est le diamètre, et cette circonférence, en tournant autour de OA, décrira une sphère qui sera le lieu des points B.

238. Problème. — *Une force* P *est appliquée en un point* M ; *par un point* O *de l'espace, on mène trois axes rectangulaires. Trouver les moments de la force* P *par rapport à ces trois axes.*

Soient x, y, z, les coordonnées du point M (fig. 75) ; décomposons la force P en ses trois composantes X, Y, Z, et appliquons le théorème des moments (n° **236**). Le moment de la force P par rapport à Oz est égal à la somme des moments des composantes : or, le moment de Z, qui est parallèle à l'axe, est nul (n° **233**) ; les moments de X et Y, qui se projettent en vraie grandeur sur le plan des xy, sont égaux à ces forces multipliées par leurs

Fig. 75.



distances à l'axe Oz, c'est-à-dire par y et x. Mais, le moment de X est négatif, et celui de Y est positif (nº **234**). Donc, le moment de P par rapport à l'axe Oz est $Yx - Xy$; de même, les moments par rapport à Ox et Oy ont respectivement pour expressions $Zy - Yz$, et $Xz - Zx$.

Nous aurons donc, en désignant par L, M, N les trois moments par rapport aux axes Ox, Oy, Oz :

$$L = Zy - Yz,$$

$$M = Xz - Zx,$$

$$N = Yx - Xy.$$

Ces trois moments sont évidemment (nº **237**) *les projections sur les axes de la longueur qui représente le moment de la force* P *par rapport au point* O.

239. PROBLÈME. — *Déterminer le moment de la force* P *par rapport à une droite* OK *passant par l'origine* O.

On sait (nº **237**) que ce moment est la projection sur cette droite de la longueur qui représente le moment de la force P par rapport à l'origine O. Donc, en désignant par λ, μ, ν les angles que OK fait avec les axes, et en appliquant le théorème des projections, nous aurons pour le moment cherché :

$$K = L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu.$$

Moment d'une force par rapport à un plan.

240. On appelle *moment d'une force par rapport à un plan,* le produit de cette force par la distance de son point d'application au plan.

Dans le cas où le plan est parallèle à la direction de la force, le moment de la force par rapport au plan est égal au produit de la force par sa distance au plan.

241. CONVENTION. — On considérera la distance du point d'application au plan comme positive ou négative, suivant la position de ce point par rapport au plan, d'après les conventions adoptées en géométrie analytique.

On considérera la force comme positive ou négative, suivant qu'elle agit dans un sens ou en sens contraire.

Par conséquent, le moment sera positif ou négatif, suivant les cas.

LIVRE II.

STATIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE I.

Équilibre des systèmes matériels de forme invariable.

242. On sait qu'un corps est un assemblage de molécules, placées à distance les unes des autres, et exerçant les unes sur les autres des actions attractives ou répulsives. Nous assimilerons les molécules à des points matériels, en faisant abstraction des dimensions de ces molécules. Les systèmes matériels seront donc des *systèmes de points matériels.*

Les corps se présentent à nous, dans la nature, sous trois états différents : ils sont solides, liquides ou gazeux.

Les *corps solides* sont ceux dans lesquels les molécules ont des positions déterminées les unes par rapport aux autres ; pour changer les positions relatives de ces molécules, il faut faire agir sur ces molécules des forces plus ou moins grandes : si la déformation ne dépasse pas une certaine limite, les molécules reviennent à leurs positions primitives, dès que les forces qui les ont dérangées cessent d'agir.

Dans *les liquides et les gaz*, les molécules sont extrêmement mobiles : la moindre cause les dérange de leurs positions, et quelque petit que soit le dérangement, il ne tend pas à disparaître en même temps que la cause qui l'a produit. C'est pour cette raison que l'on donne à ces corps le nom de *fluides*.

243. Nous allons étudier les conditions d'équilibre des systèmes de points matériels. Nous supposerons *ces systèmes entièrement libres et à l'état de repos*.

Rappelons d'abord le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Nous savons qu'en vertu de ce principe, toute force, appliquée à un point matériel A, émane d'un autre point matériel B, situé à une distance quelconque du premier. De même, le point B est soumis à l'action d'une force émanant de A, égale et contraire à la première : on l'appelle la *réaction du point* B.

244. Dans chaque système de points matériels, on a à considérer deux espèces de forces : *les forces intérieures* et *les forces extérieures*.

Soient A un point du système que nous étudions, et B un point qui agit sur A. Si le point B appartient au système, la force qu'il exerce sur A est une *force intérieure*. Si, au contraire, B ne fait pas partie du système matériel dont nous nous occupons, la force qui émane de B sera une *force extérieure*. Ainsi donc, *les forces intérieures* sont celles qui proviennent des actions des points du système les uns sur les autres. En vertu du second principe fondamental (n° **187**), à chacune d'elles correspond une force égale et directement opposée appliquée au système comme la première. *Les forces extérieures* sont celles qui proviennent des actions exercées sur le système par les points situés au dehors. A chacune d'elles correspond aussi une force égale et directement opposée ; mais, cette réaction n'est plus appliquée à un point du système, et on n'aura pas à en tenir compte, si l'on étudie seulement le système.

REMARQUE. — *Une même force peut jouer, tantôt le rôle de force intérieure, et tantôt le rôle de force extérieure,* suivant les cas. Si l'on considère, par exemple, le mouvement d'un corps qui tombe à la surface de la terre, l'attraction qu'une molécule du corps éprouve de la part d'une molécule quelconque de la terre est une force extérieure. Si, au contraire, on considère le mouvement d'un système matériel, formé de la terre toute entière, et des corps qui se trouvent à sa surface, ou dans son voisinage, cette même attraction est une force intérieure. De même, l'attraction exercée par le soleil sur la terre est une force extérieure pour la terre considérée seule. Si l'on considère le système formé de de la terre et du soleil, cette même attraction est une force intérieure.

245. Nous commencerons par l'*étude des systèmes matériels de forme invariable*, c'est-à-dire que nous supposerons que les points matériels qui les composent ne peuvent ni se rapprocher, ni s'éloigner les uns des autres. Un tel système a reçu le nom de *solide invariable,* ou simplement *corps solide.*

Les solides invariables n'existent pas dans la nature : ce sont des *corps fictifs*. Les *solides naturels* ne jouissent pas d'une rigidité parfaite : ils sont toujours plus ou moins déformables. Cependant, les résultats auxquels nous serons conduits dans l'étude des solides invariables sont applicables dans la plupart des cas aux solides naturels.

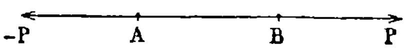
246. Quand un corps solide est sollicité par différentes forces, celles-ci sont, en général, appliquées aux différents points de la surface du corps. Nous supposerons donc *des forces appliquées aux différents points d'un corps solide, et nous nous proposerons de trouver les conditions d'équilibre de ces forces.*

Le problème de la composition de ces forces repose sur certaines propositions fondamentales que nous allons établir :

1° *Deux forces égales appliquées en deux points d'un corps solide, suivant la même droite, et en sens contraire l'une de l'autre, se font équilibre.*

En effet, soient A et B (fig. 76) deux points matériels situés à une distance AB, invariable dans un sens comme dans l'autre. Si nous appliquons au système formé par par ces deux points deux forces égales $+$ P et $-$ P, agissant en sens contraires suivant la direction de la droite qui les joint, il est évident que ces forces se font équilibre ; car, leur effet ne peut être que d'allonger la distance AB, et, par hypothèse, cette distance est invariable.

Fig. 76.



Il en résulte que si le corps est en repos avant que ces deux forces lui soient appliquées, il restera en repos sous l'action de ces forces.

2° *Une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, sans que son effet soit changé, pourvu que le nouveau point d'application soit invariablement lié au premier.*

En effet, il résulte de la proposition précédente que la force P, appliquée en B, peut être tenue en équilibre, aussi bien par la force — P appliquée au point A, que par une force — P appliquée au point B, pourvu que le point A soit invariablement lié au point B. L'effet de la force — P en A est donc le même que l'effet de la force — P en B. La proposition est donc démontrée : elle est d'un usage fréquent dans la démonstration des théorèmes de statique.

3° *Si, parmi les forces qui agissent sur un solide invariable en équilibre, il y en a plusieurs* P, P′, P″,... *dont les directions concourent en un même point* O, *ces forces* P, P′, P″,... *peuvent être remplacées par une force unique qui est leur résultante.* [1]

En effet, chaque force peut être transportée au point O pris sur sa direction : toutes ces forces appliquées en un même point peuvent être remplacées par une seule R. Or, celle-ci peut être appliquée en un point quelconque A de sa direction : la force R, appliquée en A, peut donc remplacer les forces P, P′, P″,...

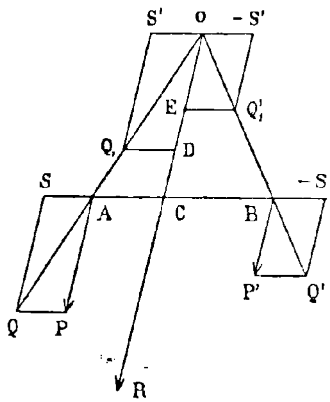
Remarque. — Il n'est pas nécessaire que le point O fasse partie du solide. En effet, on conçoit que, pour faire le raisonnement, on ait supposé le point O invariablement lié au corps ; mais, dès que l'on a trouvé la force R qui, appliquée en A, peut remplacer les forces P, P′, P″,... on n'a plus à s'occuper de l'hypothèse que l'on a faite sur le point O. Mais, il est évident que, pour pouvoir remplacer les forces P, P′, P″,... par la force R, il faut que cette force rencontre le corps en un quelconque de ses points. Si cela n'a pas lieu, la force R ne pourra remplacer les forces P, P′, P″,... que si le point A où on la suppose appliquée est invariablement lié au corps.

Compositions des forces parallèles.

247. Théorème I. — *Deux forces* P, P′, *parallèles et de même sens, appliquées en deux points* A *et* B *d'un corps solide, ont une résultante* R, *parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, égale à leur somme, et située dans leur plan. De plus, le point d'application de cette résultante partage la droite* AB *qui joint les points d'application des composantes en deux segments inversement proportionnels à ces composantes.*

Nous ne troublerons pas l'état du système (fig. 77), en appliquant en A et B, deux forces S et — S, égales et directement opposées (n° **246**, 1°). Nous aurons alors le système des quatre forces :

Fig. 77.



$$P, P', +S, -S,$$

qui sera équivalent au système des deux forces P, P′.

Or, les deux forces P et S appliquées au point A, ont une résultante Q, qui sera donnée par la règle du parallélogramme. De même, les deux forces P′ et — S, appliquées en B, auront une résultante Q′. Soit O le point de rencontre des deux forces Q et Q′ ; ces deux forces pourront être supposées appliquées en O (n° **246,** 2°), et leur résultante sera la résultante de P et P'. Cela posé, décomposons ces deux forces Q et Q' au point O, suivant deux directions, l'une parallèle à AB, l'autre parallèle aux forces P et P'. La force $OQ_1 = Q$ nous donnera ainsi une force S' égale et parallèle à S, et une force OD, égale et parallèle à P. De même, la force $OQ'_1 = Q'$ nous donnera une force — S', égale et parallèle à — S, et une force OE, égale et parallèle à P'. Or, les deux forces S' égales et de sens contraires, appliquées au point O se font équilibre. Il ne reste donc que les forces OD et OE, égales et parallèles à P et P'. Mais, ces deux forces étant de même direction et de même sens, et appliquées en un même point O, donnent une résultante R égale à leur somme $P + P'$.

La première partie du théorème est donc démontrée. Cette résultante R peut être supposée appliquée au point C où elle rencontre la droite AB. Reste à déterminer la position du point C. Or, les deux triangles semblables AOC, Q_1OD nous donnent :

$$\frac{AC}{OC} = \frac{Q_1D}{OD} = \frac{QP}{AP} = \frac{S}{P}.$$

De même, les triangles semblables COB, EOQ'_1 nous donnent :

$$\frac{CB}{OC} = \frac{EQ'_1}{EO} = \frac{P'Q'}{BP'} = \frac{S}{P'}.$$

On a, par conséquent :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{P'}{P},$$

et, par suite, le point C divise la droite AB dans le rapport inverse des forces P et P'.

Remarque. — La position du point C ne dépend que du rapport des forces P et P', et non de leur grandeur absolue, ni de leur direction. On en conclut le théorème suivant :

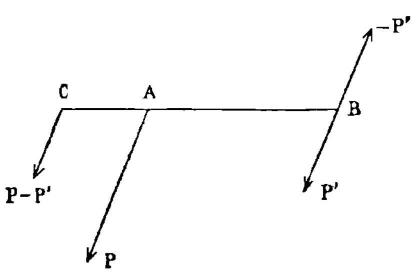
Le point d'application de la résultante de deux forces parallèles ne varie pas quand on altère les grandeurs ou les directions des deux forces, pourvu qu'elles restent parallèles et que leur rapport reste le même.

248. Réciproquement, on peut décomposer une force R, appliquée à un corps solide, en deux forces P, P', parallèles à R, de même sens et satisfaisant aux conditions précédentes.

249. Théorème II. — *Deux forces* P, P' *parallèles et de sens contraires, appliquées en deux points* A *et* B *d'un corps solide, ont une résultante* R, *parallèle à leur direction, agissant dans le sens de la plus grande, égale à leur différence, et située dans leur plan. Le point d'application de la résultante est situé sur le prolongement de la droite* AB, *du côté de la plus grande, et ses distances aux points* A *et* B *sont inversement proportionnelles aux forces appliquées en ces points.*

Soit P la plus grande des deux forces données (fig.78): on peut considérer cette force P comme résultant de la composition de deux forces parallèles et de même sens, dont l'une soit égale à P', et appliquée au point B. L'autre, évidemment égale à P — P', sera appliquée en un point C, qui sera déterminé par la proportion (n° **247**) :

Fig 78.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{P'}{P - P'},$$

ou bien :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{P'}{P}.$$

Il en résulte que les deux forces P et — P′, appliquées en A et B, peuvent être remplacées par le système des trois forces P — P′, P′, — P′. Or, les deux forces P′, appliquées en B, sont égales et de sens contraires, et par conséquent, se détruisent. Il ne reste que la force P — P′, appliquée au point C : cette force sera donc la résultante R des deux forces données, et le théorème est démontré.

250. REMARQUE. — Si les deux forces parallèles et de sens contraires sont égales, on aura :

$$R = 0, \quad \text{et} \quad AC = \infty.$$

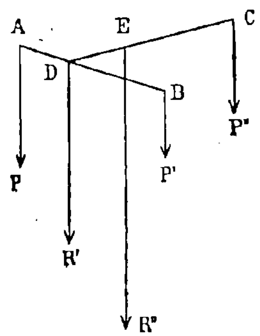
La résultante est nulle et son point d'application est situé à une distance infinie des points d'application des composantes. Par conséquent, le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, ne peut être remplacé par une force unique : ces forces n'ont pas de résultante. D'ailleurs, ces deux forces ne pourraient se faire équilibre, puisqu'elles ne sont pas directement opposées. Un tel système s'appelle *un couple*.

Un couple est donc un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, appliquées en deux points A *et* B, *qu'on suppose invariablement reliés entre eux.*

251. THÉORÈME III. — *Tant de forces parallèles que l'on voudra, appliquées en différents points d'un* *corps solide, et agissant dans le même sens, se composent en une résultante unique, parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme.*

Soient P, P′, P″,... les forces données (fig. 79). On composera d'abord P avec P′, en une force R′, qui sera parallèle à ces deux forces, égale à leur somme P + P′, et appliquée en un point D tel que l'on ait (n° **247**) :

Fig. 79.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{P'}{P}.$$

Puis, on composera R′ avec P″, ce qui nous donnera une résultante R″ égale à R′ + P″, c'est-à-dire à P + P′ + P″, appliquée au point E, et ainsi de suite. Il est évident que la résultante finale sera parallèle aux forces données, de même sens que ces forces et égale à leur somme.

Remarque. — Les points D, E... sont déterminés par les points d'application des forces P, P′, P″,... et par les rapports de ces forces. Par conséquent, si l'on fait tourner les forces P, P′, P″,... parallèles et de même sens, autour de leurs points d'application supposés fixes, de manière que ces forces conservent leur parallélisme et leurs rapports, les résultantes de tous ces systèmes de forces passeront constamment par un point fixe O. Ce point s'appelle *centre des forces parallèles*.

Lorsque les forces P, P′, P″,... sont égales entre elles, leur centre coïncide avec le centre des moyennes distances des points d'application.

252. Le théorème précédent nous permet de *composer un nombre quelconque de forces parallèles agissant les unes dans un sens, les autres en sens contraire*. On composera toutes les forces du premier groupe en une résultante R', et toutes les forces du second groupe en une résultante R''. Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

1° Si les deux résultantes partielles R' et R'' qui sont parallèles entre elles, et de sens contraires, sont inégales, elles se composeront (n° **249**) en une seule force R, égale à leur différence, agissant parallèlement à ces forces, et dans le sens de la plus grande. La force R sera alors la résultante de toutes les forces données : elle sera évidemment *égale à la somme algébrique de ces forces*.

2° Si les deux résultantes partielles R' et R'' sont égales et directement opposées, elles se détruisent : *les forces données se font équilibre*.

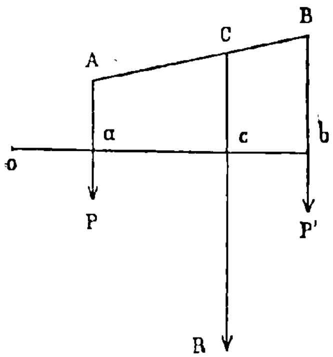
3° Si les deux résultantes partielles R' et R'' sont égales, et non directement opposées, elles forment un couple : *les forces données se réduisent à un couple*.

Théorèmes des moments dans le cas des forces parallèles.

253. Théorème I. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles situées dans un même plan, par rapport à un point* O *situé dans ce plan, est égal à la somme des moments des composantes*.

Considérons d'abord deux forces parallèles et de même sens P, P', et soit R leur résultante (fig. 80). Nous aurons :

Fig. 80.



$$\frac{P}{P'} = \frac{BC}{AC};$$

or, si du point O nous menons une perpendiculaire à ces forces, et si nous désignons par p, p', r les trois distances oa, ob, oc, nous aurons :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{bc}{ac} = \frac{p' - r}{r - p};$$

par conséquent,

$$\frac{P}{P'} = \frac{p' - r}{r - p},$$

d'où :

$$(P + P')\,r = Pp + P'p',$$

ou bien :

$$Rr = Pp + P'p'.$$

On vérifierait facilement que le même théorème a lieu dans le cas de deux forces parallèles et de sens contraires, en donnant des signes convenables aux distances et aux forces, suivant les conventions adoptées. Il est facile aussi de le vérifier dans le cas général.

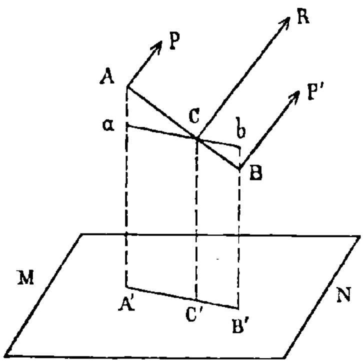
254. THÉORÈME II. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un axe, est égal à la somme des moments des composantes.*

La démonstration de ce théorème est évidente.

255. THÉORÈME III. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments des composantes.*

Soient P, P' deux forces parallèles et de même sens, R leur résultante, MN le plan (fig. 81), A', B', C' les projections des points d'application A, B, C sur le plan MN. Menons la droite aCb parallèle à A'C'B'. Nous aurons :

Fig. 81.



$$\frac{P}{P'} = \frac{BC}{AC} = \frac{Bb}{Aa};$$

or, si nous désignons par p, p', r les distances des trois points A, B, C au plan MN, il vient :

$$\frac{P}{P'} = \frac{r - p'}{p - r};$$

d'où :

$$(P + P')\,r = Pp + P'p',$$

ou bien :

$$Rr = Pp + P'p'.$$

En donnant des signes convenables aux distances et aux forces, suivant les conventions adoptées, on vérifiera facilement le théorème pour le cas de deux forces parallèles et de sens contraires, et ensuite on pourra l'étendre au cas général.

256. Les théorèmes précédents nous permettent de déterminer en grandeur et en position la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles.

En effet, soient P, P', P'',... les forces parallèles données, a, b, les distances de la résultante de ces forces à deux plans qui se coupent suivant une parallèle à ces forces, (x, y), (x', y'),... les quantités analogues pour les forces P, P',... nous aurons (n^{os} **252** et **255**) :

$$R = P + P' + P'' + \ldots\ldots\ldots = \Sigma P,$$

$$Ra = Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma Px,$$

$$Rb = Py + P'y' + P''y'' + \ldots = \Sigma Py.$$

On en tire, si ΣP est différent de zéro :

$$a = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad b = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}. \tag{1}$$

En particulier, si les forces P sont égales et de même sens, on a :

$$R = nP, \ \ a = \frac{1}{n}\Sigma x, \ \ b = \frac{1}{n}\Sigma y.$$

Discussion. — Nous avons vu que les forces proposées peuvent se réduire à une résultante unique, ou à un couple unique, ou à se faire équilibre.

1° Dans le premier cas, les deux résultantes partielles R' et R'' sont inégales, et, par suite, on a $\Sigma P \gtrless 0$. Les formules (1) déterminent les distances de la résultante R aux deux plans.

2° Lorsqu'il y a équilibre, les deux résultantes partielles R' et R'' sont égales et directement opposées. On a alors :

$$\Sigma P = 0.$$

D'autre part, si nous désignons par P, P',... les forces qui agissent dans un sens, par P_1, P'_1,... celles qui agissent en sens contraire, nous aurons, en général :

$$R'a_1 = Px + P'x' + \ldots\ldots,$$

$$R'b_1 = Py + P'y' + \ldots\ldots,$$

$$R''a_2 = P_1x_1 + P'_1x'_1 + \ldots,$$

$$R''b_2 = P_1y_1 + P'_1y'_1 + \ldots.$$

Dans le cas d'équilibre, on a : $R' = R''$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, et il vient :

$$Px + P'x' + \ldots - P_1x_1 - P'_1x'_1 \ldots = 0,$$

$$Py + P'y' + \ldots - P_1y_1 - P'_1y'_1 \ldots = 0.$$

Donc, les conditions d'équilibre sont :

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0.$$

La somme algébrique des forces est nulle ; les sommes des moments des forces par rapport à deux plans parallèles à leur direction sont nulles.

3° Si le système se réduit à un couple, on a $R' = R''$; mais, on n'a pas à la fois $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Dans ce cas, la somme algébrique des forces est nulle. Si l'on prend les sommes des moments des forces par rapport à deux plans parallèles à leur direction, une de ces sommes, au moins, est différente de zéro.

CHAPITRE II.

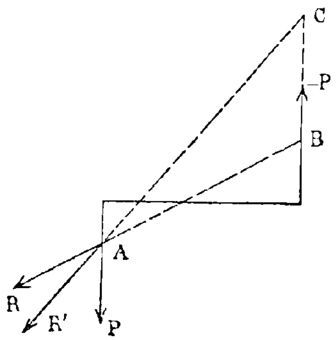
Théorie des couples. — Moment d'un couple.

257. Nous avons vu (n° **250**) qu'un couple est un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, appliquées à deux points invariablement liés entre eux. L'inclinaison de ces forces sur la droite qui joint leurs points d'application est arbitraire ; mais, on peut, sans changer l'effet des forces, transporter leurs points d'application en un point quelconque de leurs directions (n° **246**), et par suite, prendre ces points de manière que la droite qui les joint soit perpendiculaire à la direction commune de ces forces. C'est pourquoi on suppose ordinairement les forces perpendiculaires à cette droite qui s'appelle le *bras de levier*. Le bras de levier d'un couple est donc la distance des deux forces qui forment le couple.

258. Nous avons vu (n° **250**) qu'un couple ne peut pas se réduire à une force unique ; par conséquent, l'on ne peut pas trouver une force unique qui fasse équilibre à deux forces égales, parallèles et de sens contraires. On peut d'ailleurs s'en assurer de la manière suivante : Supposons qu'une force R puisse faire équilibre aux deux forces P, — P. Nous démontrerons que cette hypothèse est impossible.

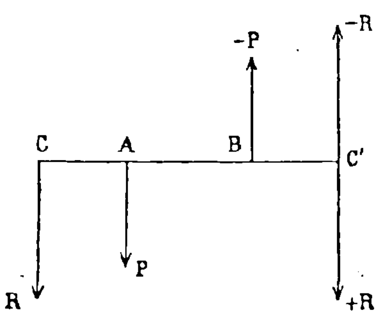
1° Supposons d'abord que la force R soit oblique par rapport aux deux forces P, — P : Il est évident qu'elle les rencontrera toutes les deux (fig. 82). Or, si nous composons les deux forces R et P concourantes au point A, nous obtiendrons une force unique R′, qui rencontrera évidemment la force — P en un point C. Mais, les forces P, — P, et R se faisant équilibre, par hypothèse, il devra en être de même des deux forces R′ et — P, ce qui est impossible, puisque ces forces sont concourantes.

Fig. 82.



2° Supposons en second lieu que la force R soit parallèle aux deux forces P, — P. Or, si la force R en C fait équilibre aux forces P, — P, (fig. 83), il est évident qu'il existe aussi une force — R, égale, parallèle et de sens contraire, qui, appliquée au point C′, tel que l'on ait BC′ = AC, ferait équilibre aux forces P, — P. En effet, les deux systèmes P, — P, + R, et P, — P, — R, sont identiques. Ceci établi, supposons que les trois forces P, — P, et R se fassent équilibre. Prenons BC′ = AC, et introduisons au point C′ deux forces R, — R, égales et directement opposées. Le système

Fig. 83.



n'étant pas modifié par l'introduction de ces deux forces (n° **208**), il est évident que les cinq forces :

$$R, P, -P, -R, +R,$$

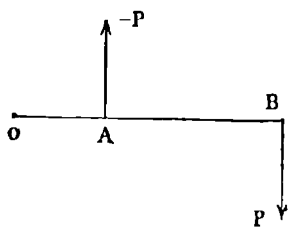
se font équilibre. Or, le système P, — P, — R étant en équilibre, il en résulterait qu'il y aurait équilibre entre les deux forces R, appliquées en C et C', ce qui est impossible, puisque ces deux forces égales et parallèles, agissent dans le même sens.

Donc, *l'effort d'un couple ne peut être comparé à une force.*

259. Théorème. — *Si l'on prend la somme algébrique des moments des deux forces d'un couple par rapport à un point quelconque de son plan (ou par rapport à un axe perpendiculaire à ce plan), cette somme est constante, et égale au produit de l'une des forces du couple par la longueur de son bras de levier.*

Soit O un point du plan, et soit OAB la perpendiculaire aux deux forces (fig. 84). Le moment de la force P, appliquée en B, est $P \times OB$; le moment de la force P, appliquée en A, est $P \times OA$: ce dernier est de sens contraire au premier.

Fig. 84.



La somme des moments des deux forces est donc :

$$P \times OB - P \times OA = P \times AB.$$

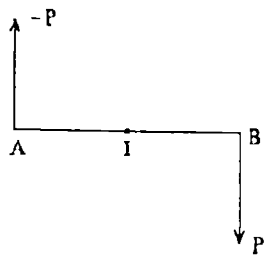
On arriverait au même résultat, quelle que soit la position du point O dans le plan des deux forces, et, par conséquent, le théorème est démontré.

Ce produit de l'une des forces du couple par son bras de levier est le *moment du couple*. Nous verrons dans la suite que le moment d'un couple est la *mesure de son énergie*.

260. PROPRIÉTÉ. — *Le moment d'un couple peut être représenté par l'aire du parallélogramme dont les deux forces du couple forment deux côtés opposés.*

261. SENS D'UN COUPLE. — Si l'on veut se faire une idée des sens de différents couples situés dans un même plan, on supposera que les milieux de leurs bras de levier soient rendus fixes. Soit, par exemple (fig. 85), le couple (P, — P) ; supposons que le point I, milieu de son bras de levier soit rendu fixe; menons par ce point une *perpendiculaire au plan dans un sens convenu*, et supposons un observateur placé sur cet axe, les pieds en I. L'effet des deux forces, et, par conséquent, l'effet du couple sera de faire tourner le bras de levier autour de cet axe. Le sens de cette rotation sera celui du couple. On conviendra que le *couple* sera *positif* ou *négatif*, suivant qu'il tend à faire tourner le bras de levier de gauche à droite ou de droite à gauche.

Fig. 85.



Il est bon de remarquer que cette tendance du couple à faire tourner son bras de levier est tout-à-fait fictive. Elle ne permet de rien conclure en ce qui concerne l'*effet réel* d'un couple sur un corps. Car, il faut bien observer qu'en réalité, il n'y a pas de point fixe dans le plan (à moins qu'on ne le dise). L'idée de la rotation ne sert qu'à faire image, et à distinguer les sens des couples situés dans un même plan.

Nous verrons plus tard, dans la Dynamique, quel est l'effet d'un couple sur un corps. Mais, actuellement, nous n'avons pas besoin de le savoir pour démontrer toutes les propriétés qui vont suivre.

262. THÉORÈME. — *Si l'on projette un couple sur un plan quelconque, la projection sera encore un couple. Le moment du couple projeté s'obtient en multipliant le moment du premier couple par le cosinus de l'angle des deux plans.*

En effet, le moment du couple projeté (P', — P') est représenté par l'aire du parallélogramme dont les deux forces P' formeront deux côtés opposés (nº **260**). Or, ce parallélogramme est évidemment la projection du parallélogramme qui représente le couple (P, — P), et le théorème est démontré.

263. THÉORÈME. — *La somme des moments des deux forces d'un couple par rapport à un axe quelconque, est égale au moment du couple, projeté sur un plan perpendiculaire à cet axe.*

En effet, la somme des moments des deux forces du couple de l'espace par rapport à l'axe est égale (nº **233**) à la somme des moments des projections des forces sur un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire au moment du couple projection.

Or, si A est l'angle que le plan du couple (P, — P) fait avec le plan perpendiculaire à l'axe, nous aurons, en désignant par $P'p'$ le moment du couple projeté, et par Pp le moment du couple de l'espace :

$$P'p' = Pp \cos A.$$

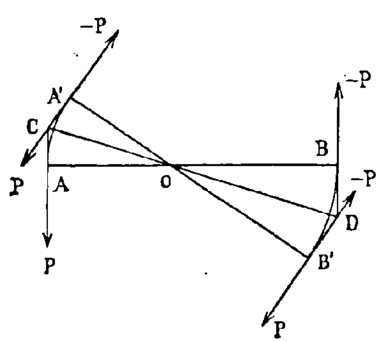
On conclut de là que la somme des moments des deux forces du couple par rapport à un axe est nulle pour $A = 90°$, c'est-à-dire lorsque l'axe est parallèle au plan du couple ; cette somme est maximum pour A = 0, c'est-à-dire lorsque l'axe est perpendiculaire au plan du couple ; enfin, cette somme est constante, lorsque A est constant. Donc, *la somme des moments des deux forces d'un couple par rapport à une droite, est la même que la somme des moments de ces forces par rapport à une autre droite parallèle à la première.*

Translation des couples. Mesure des couples. — Axe d'un couple.

264. Théorème. — *L'effet d'un couple n'est pas changé quand on fait tourner son bras de levier autour d'une de ses extrémités, ou autour d'un point quelconque pris sur ce bras de levier.*

Soit un couple (P, — P) dont AB est le bras de levier (fig. 86), et soit O un point pris sur ce bras de levier. Faisons tourner AB en A'B', et introduisons aux points A' et B' deux forces égales à P, directement opposées, et perpendiculaires à A'B'. Le système n'est pas changé par l'introduction de ces forces (n° **208**) Or, les deux forces P et — P, appliquées respectivement en A et A', peuvent être considérées comme appliquées en C : elles se composent en une force unique R' dirigée suivant la bissectrice de l'angle C,

Fig. 86.

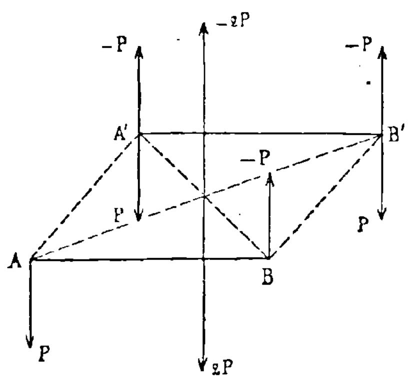


et, par conséquent, suivant la bissectrice de l'angle O. D'autre part, les deux forces P et — P, appliquées respectivement en B' et B, peuvent être considérées comme appliquées en D ; elles se composeront en une force R'', dirigée suivant la bissectrice de l'angle D, ou de l'angle O. Or, il est évident que les deux forces R' et R'', qui peuvent être considérées comme appliquées en O, sont égales et directement opposées ; donc, elles se détruisent. Le système se réduit donc aux deux forces P et — P, appliquées respectivement en A' et B', et le théorème est démontré.

265. Théorème. — *Un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans son plan, ou dans un plan parallèle, sans que son effet soit changé, pourvu que le nouveau bras de levier soit invariablement lié au premier.*

Soit un couple (P, — P) dont le bras de levier est AB, (fig. 87), et soit A'B' une droite égale et parallèle à AB, invariablement liée à cette dernière. En chacun des points A' et B', introduisons deux forces égales et parallèles à P, et directement opposées. Le système ne sera pas changé par l'introduction de ces forces. Or, les deux forces + P, appliquées en A et B' se composeront en une force unique 2P, appliquée au milieu de AB', et parallèle aux forces P. De même, les deux forces — P, appliquées en A' et B, se composent en une

Fig. 87.



force unique — 2P, appliquée au milieu de A'B, et parallèle aux forces P : cette dernière force — 2P est donc égale et directement opposée à la force + 2P, et par conséquent, elle la détruit. Le système est donc réduit aux deux forces P, — P, appliquées respectivement en A' et B', c'est-à-dire au couple (P, — P), transporté parallèlement à lui-même.

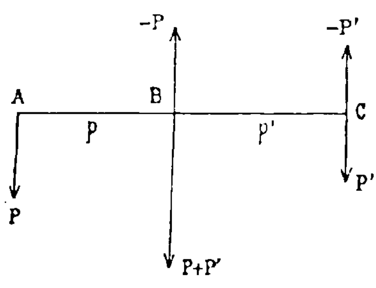
266. THÉORÈME. — *Un couple peut être transporté comme on voudra dans son plan ou dans un plan parallèle invariablement lié au premier, sans que son effet soit changé, pourvu que le nouveau bras de levier soit invariablement lié au premier.*

La démonstration de ce théorème résulte évidemment de la combinaison des deux précédents.

267. THÉORÈME. — *Un couple peut être remplacé par un autre couple de bras de levier différent, situé dans le même plan ou dans un plan parallèle invariablement lié au premier, pourvu que leurs moments soient égaux, et qu'ils soient de même sens.*

Soit un couple (P, — P) de bras de levier AB = p (fig. 88) : nous allons démontrer que l'on peut remplacer ce couple par un autre couple (P', — P') dont p' est le bras de levier, pourvu que l'on ait : $P'p' = Pp$.

Fig. 88.



Sur le prolongement de AB, prenons une longueur BC = p', et introduisons au point C deux forces égales à P' et directement opposées. Le système ne sera pas changé par l'introduction de ces forces. Or, les deux forces P et P', appliquées respectivement en A et C, parallèles et de même sens, se composent en une force unique égale à $P + P'$, et appliquée en un point qui divise la droite AC dans le rapport de P' à P : ce sera donc au point B (n° **247**). Mais, les deux forces $P + P'$ et $-P$, appliquées en B, et directement opposées, se composent en une force P', et le système est donc réduit aux deux forces P' et $-P'$, appliquées en B et C, parallèles et de sens contraires. Ce nouveau couple peut donc remplacer le premier.

On peut encore énoncer ce théorème en disant que *deux couples de même moment et de même sens, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles sont équivalents.*

COROLLAIRE. — Il résulte de ce théorème qu'un couple étant donné, on peut le remplacer par un autre couple dont le bras de levier est donné, ou par un autre couple dont les forces sont données.

268. THÉORÈME. — *Les efforts de deux couples sont proportionnels à leurs moments.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons d'abord démontrer que deux couples qui agissent sur des bras de levier égaux sont entre eux comme les forces de ces couples.

Soient donc deux couples $(P, -P)$ et $(Q, -Q)$ dont les bras de levier sont égaux : supposons que les forces P et Q soient entre elles dans le rapport de m à n. En remplaçant chacune des forces P par m forces égales, et chacune des forces Q par n forces égales entre elles et aux premières, nous pourrons considérer le couple $(P, -P)$ comme la somme de m couples égaux et de même sens, appliqués l'un sur l'autre, et le couple $(Q, -Q)$ comme la somme de n couples égaux entre eux et aux premiers, appliqués l'un sur l'autre. Les intensités des couples (P, — P), (Q, — Q) seront donc entre elles dans le rapport de m à n, ou dans le rapport de P à Q.

Soient maintenant deux couples quelconques (P, — P), et (Q, — Q) dont les bras de levier sont p et q.

D'après le théorème de l'équivalence des couples (n° **267**), on pourra remplacer le couple (Q, — Q) de bras de levier q, par un couple $\left(\frac{q}{p}\,Q, -\frac{q}{p}\,Q\right)$ de bras de levier p, puisque ces deux couples auront leurs moments égaux à Qq. Donc, au lieu des deux couples (P, — P), (Q, — Q), nous aurons les deux couples (P, — P), $\left(\frac{q}{p}\,Q, -\frac{q}{p}\,Q\right)$, dont les bras de levier sont égaux. Or, les intensités de ces couples sont entre elles comme les forces, et nous aurons, en désignant ces intensités par M et N :

$$M : N = P : \frac{q}{p}\,Q,$$

ou bien :

$$M : N = Pp : Qq,$$

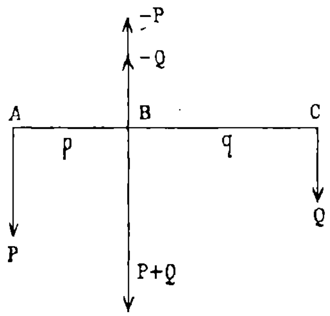
ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Si l'on prend pour *unité de couple* celui qui est composé de deux forces égales à l'unité de force, et dont le bras de levier est égal à l'unité de longueur, la formule ci-dessus nous apprend que le couple (P, — P) contient autant de fois l'unité de couple que son moment Pp contient de fois l'unité. Par conséquent, *le moment d'un couple est la mesure de son effort ou de son intensité.*

269. Théorème. — *Deux couples de même moment et de sens contraires, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, se font équilibre.*

Soient les deux couples (P, — P), (Q, — Q) de sens contraires, et dont les moments Pp, Qq sont égaux.

Fig. 89.



Transportons le couple (Q, — Q) de manière que son bras de levier BC = q se trouve dans le prolongement du bras de levier AB = p du couple (P, — P) (fig. 89). Les deux forces — P, — Q, appliquées au point B, se composeront en une force égale à leur somme — (P + Q), appliquée au point B.

D'autre part, les deux forces P et Q appliquées en A et C, parallèles et de même sens, se composent en une force égale à leur somme P + Q, parallèle à ces forces, de même sens que ces forces, et appliquée évidemment au point B (n° **247**). Nous avons donc au point B deux forces égales à P + Q, et de sens contraires. Ces deux forces se détruisent, et, par suite, le système des deux couples est en équilibre.

270. Axe d'un couple. — Un couple est déterminé, c'est-à-dire que l'on connaît tout ce que l'on a besoin de connaître relativement à l'énergie du couple, et à sa position dans l'espace, quand on connaît la *position du plan*, la *grandeur du moment*, et le *sens du couple.* Un couple peut être représenté par une simple droite, que l'on appelle l'*axe du couple.* On prendra cette droite perpendiculaire au plan du couple, dans un sens tel qu'un observateur placé suivant cet axe, les pieds à l'origine, voie le couple tendre à faire tourner son bras de levier, supposé fixé par un de ses points, dans le sens que nous avons adopté pour le sens positif. Sur cette droite, nous prendrons une longueur égale au moment du couple. Cette droite est ce que l'on appelle l'*axe du couple*. Elle représentera le couple : en effet, quand elle sera donnée, le couple sera entièrement déterminé pour son plan, son moment et son sens.

REMARQUE. — On voit que l'axe d'un couple n'occupe pas une position déterminée dans l'espace. On peut toujours le faire passer par un point pris d'une manière arbitraire dans l'espace.

271. On arrivera facilement au théorème suivant que nous avons déjà énoncé sous une autre forme (n° **263**) : *La somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite quelconque est la projection de l'axe du couple sur cette droite.*

Composition des couples.

272. THÉORÈME. — *Deux couples situés comme on voudra dans un même plan ou dans des plans parallèles, se composent en un couple unique dont le moment est la somme algébrique des moments des couples composants.*

Soient deux couples (P, — P), (Q, — Q) de bras de levier p et q. D'après les théorèmes précédents, on pourra ramener ces deux couples dans un même plan (n° **266**) ; puis, on transformera (n° **267**) le couple Qq en un autre couple de même moment et de même sens, et ayant pour bras de levier p. Il suffira pour cela de poser :

$$P'p = Qq.$$

Cela posé, on fait coïncider les deux bras de levier égaux; on a alors à chaque extrémité du bras de levier commun deux forces de même direction, qui se composent en une force unique égale à la somme algébrique de ces deux forces. Ces deux résultantes $P + P'$ forment un couple qui équivaudra à l'ensemble des deux couples proposés, et dont le moment sera :

$$(P + P')\,p = Pp + P'p = Pp + Qq.$$

273. Théorème. — *Tant de couples que l'on voudra, situés d'une manière quelconque dans un même plan ou dans des plans parallèles, se composent en un couple unique, situé dans un plan parallèle aux plans des couples composants, et dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.*

Il suffira pour démontrer ce théorème d'appliquer le théorème précédent.

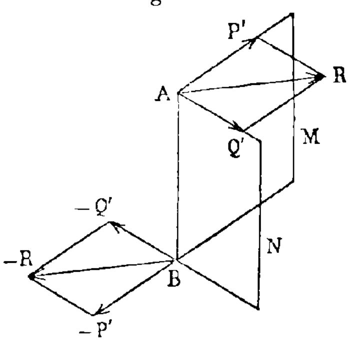
Remarque. — Ce résultat peut s'énoncer plus simplement en disant *que l'axe du couple résultant est la somme algébrique des axes des couples composants.*

274. Réciproquement, on pourra décomposer un couple donné en tant de couples que l'on voudra, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles.

275. Théorème. — *Deux couples situés comme on voudra dans deux plans qui se coupent sous un angle quelconque, se composent en un couple unique dont le plan passe par l'intersection des plans des deux couples, et dont le moment est relié aux moments des couples composants par la loi du parallélogramme.*

Soient deux couples (P, — P), (Q, — Q) situés dans les deux plans M et N (fig. 90). Sur l'intersection de ces deux plans prenons une longueur AB quelconque. Cela posé, remplaçons les deux couples donnés par deux couples équivalents ayant AB pour bras de levier, et soient (P', — P'), (Q', — Q') ces deux couples.

Fig. 90.



Or, les deux forces P', Q', à chacune des extrémités de AB se composent par la règle du parallélogramme en une force R. Nous aurons ainsi en A et B deux forces égales à R, parallèles et de sens contraires : elles forment un couple qui pourra remplacer les deux couples proposés, et le théorème est démontré.

Corollaire. — Il est évident que l'on a :

$$R^2 = P'^2 + Q'^2 + 2P'Q' \cos (P', Q'),$$

ou bien :

$$R^2 . \overline{AB}^2 = P'^2 . \overline{AB}^2 + Q'^2 . \overline{AB}^2 + 2P' . AB . Q' . AB \cos V,$$

en désignant par V l'angle des deux plans.

Si donc L et M sont les moments des couples composants, le couple résultant W sera donné par la formule :

$$W^2 = L^2 + M^2 + 2LM \cos V.$$

On a aussi :

$$L : M : W = \sin (M, W) : \sin (L, W) : \sin (L, M).$$

276. REMARQUE. — Il est facile de s'assurer que *l'axe du couple résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des couples composants.*

En effet, si l'on mène les axes des trois couples, ces axes forment un parallélogramme dont les côtés et la diagonale seront proportionnels à P′, Q′, R ; de plus, les angles que ces axes font entre eux sont égaux aux angles des plans des trois couples. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si deux couples sont représentés pour leurs axes et leurs moments par les deux côtés d'un parallélogramme, ces deux couples se composent en un couple unique dont l'axe est donné en grandeur, direction et sens par la diagonale de ce parallélogramme.*

REMARQUE. — Si les plans des deux couples sont rectangulaires, les axes de ces couples sont aussi rectangulaires, et l'on a :

$$W^2 = L^2 + M^2 ;$$

si l'on désigne par α, β les angles que l'axe du couple résultant fait avec les axes des couples composants, il vient :

$$L = W \cos \alpha, \quad M = W \cos \beta = W \sin \alpha.$$

277. THÉORÈME. — *Trois couples représentés par les trois arêtes contigues d'un parallélipipède se composent en un couple unique dont l'axe est représenté par la diagonale de ce parallélipipède.*

On démontre ce théorème en opérant comme pour le parallélipipède des forces (n° **216**).

Si les axes des couples sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire si les plans de ces couples sont perpendiculaires, le parallélipipède est droit, et l'on a, en désignant par L, M, N les moments des couples composants, et par W le moment du couple résultant :

$$W^2 = L^2 + M^2 + N^2\,;$$

en outre, si λ, μ, ν sont les angles que l'axe du couple résultant fait avec les axes des couples composants, on aura :

$$L = W\cos\lambda, \quad M = W\cos\mu, \quad N = W\cos\nu.$$

278. Remarque. — Un couple W peut être décomposé en trois couples situés dans trois plans rectangulaires, ou dont les axes sont perpendiculaires entre eux.

Les couples composants sont déterminés par les formules qui précèdent.

279. Théorème. — *Tant de couples que l'on voudra, situés dans des plans quelconques, se composent en un couple unique dont l'axe est donné par la règle du polygone des axes.*

La démonstration de ce théorème est évidente.

Remarque. — Si trois couples agissent dans trois plans qui forment un angle solide, ou qui se coupent en un point unique, ils ne peuvent avoir un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls tous les trois.

280. Conditions d'équilibre des couples. — Si les couples sont situés dans des plans parallèles, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la somme algébrique de leurs moments soit nulle.

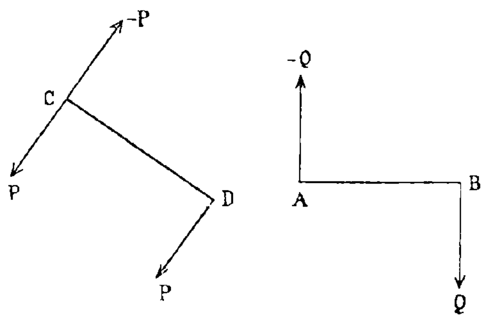
Si les axes des couples ne sont pas parallèles, il faut que les sommes algébriques des projections de ces axes sur trois axes rectangulaires soient nulles séparément.

Composition d'un couple et d'une force.

281. Théorème. — *Une force et un couple situés dans un même plan se composent en une force unique égale et parallèle à la force donnée, et située à une distance de celle-ci égale au moment du couple divisé par l'intensité de la force.*

Soient P la force donnée (fig. 91), et (Q, — Q) le couple donné. Nous pouvons remplacer le couple (Q, — Q)

Fig. 91.



par un autre couple de même moment et de même sens, dont les forces soient égales à P (n° **267**). Il suffira, pour déterminer le bras de levier du nouveau couple, de poser l'égalité :

$$Pp = Qq,$$

d'où l'on tire :

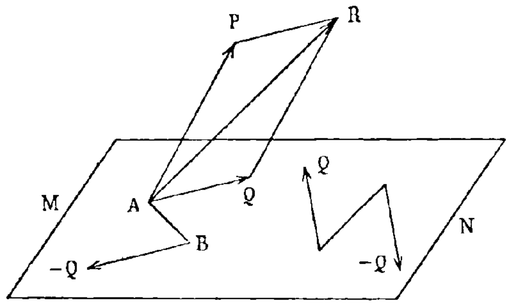
$$p = \frac{Qq}{P}.$$

Cela posé, transportons ce nouveau couple dans son plan, de manière que l'une des forces P du couple soit directement opposée à la force P donnée. Le couple occupera alors la position (P, — P) de bras de levier CD $= p$. Or, les deux forces P appliquées en C, égales et directement opposées, se détruisent. Le système est ainsi ramené à la force unique P, égale et parallèle à la force donnée P, et appliquée au point D, et l'on a CD $= p = \frac{Qq}{P}\cdot$ Le théorème est donc démontré.

282. Théorème. — *Une force et un couple, non situés dans un même plan, se composent d'une infinité de manières en deux forces non situées dans un même plan.*

Soient P la force donnée, et (Q, — Q) le couple donné. Soit A le point de rencontre de la force P avec le plan du couple (fig. 92). On peut transporter le couple dans son plan de manière que l'une des forces du couple

Fig. 92.

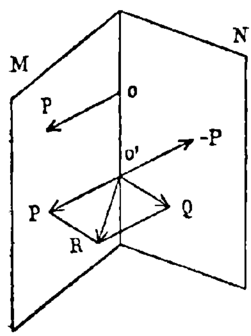


vienne passer par le point A. Cela posé, les deux forces concourantes P et Q se composent en une résultante R, non située dans le plan MN, et le système est donc réduit à la force Q, appliquée en B, et située dans le plan MN, et la force R non située dans ce plan. Il est évident que cette réduction peut être faite d'une infinité de manières : en effet, le couple (Q, — Q) peut être tourné comme on voudra autour du point A ; d'autre part, on peut remplacer le couple (Q, — Q) par un autre couple équivalent. Dans chacun de ces cas, on aura une résultante R' différente de R.

283. Théorème. — *Deux forces non situées dans un même plan peuvent se ramener d'une infinité de manières à une force et un couple non situés dans un même plan.*

Soient P et Q les deux forces situées dans les plans M et N, O et O' les points de rencontre de ces forces avec l'intersection des deux plans (fig. 93). Appliquons au point O', et dans le plan M deux forces P, — P égales et parallèles à P, et directement opposées. Les deux forces P et Q en O' se composeront en une force unique R, et les deux forces restantes formeront un couple (P, — P) situé dans le plan M. Il est évident que cette réduction peut se faire d'une infinité de manières.

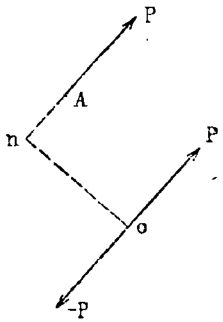
Fig. 93.



284. Théorème. — *Une force* P *appliquée en un point* A *d'un corps solide, peut être transportée parallèlement à elle-même en un autre point* O *invariablement lié au premier, pourvu que l'on adjoigne à cette force un couple dont le plan coïncide avec le plan* PAO, *et dont le moment soit égal au produit de la force* P *par la distance du point* O *à la direction primitive de la force.*

Soit P une force appliquée au point A, et soit O un point quelconque invariablement lié au point A (fig. 94). Introduisons au point O deux forces égales et parallèles à P, et directement opposées : il est évident que l'état du corps ne sera pas changé. Le système se composera alors d'une force P égale, parallèle et de même sens que la force proposée, et appliquée au point O, et d'un couple (P, — P) dont le bras de levier sera On, c'est-à-dire la distance du point O à la direction primitive de la force.

Fig. 94.



REMARQUE. — Ce théorème pourrait être considéré comme la réciproque du théorème (n° **281**).

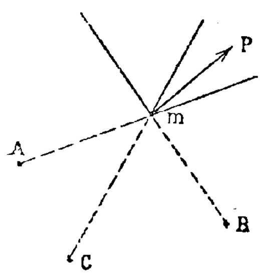
CHAPITRE III.

Composition des forces quelconques appliquées à un corps solide.

285. Théorème. — *Tant de forces que l'on voudra, appliquées à un corps solide, peuvent toujours se réduire à deux forces non situées dans un même plan, et dont l'une passe par un point* A, *pris arbitrairement dans le corps.*

Soient P, P′, P″,... les forces données, et soient m, m', m'',... les points d'application de ces forces. Imaginons deux autres points B et C (fig. 95) pris arbitrairement dans le corps, et joignons les trois points A, B, C aux points d'application des forces données. On peut décomposer la force P, appliquée en m, en trois forces dirigées suivant mA, mB, mC. Opérons de même pour les forces P′, P″,... Nous aurons ainsi pour chaque force trois composantes appliquées en A, B, C. Or, toutes les forces appliquées en A se composent en une force unique que l'on obtient par la règle du polygone des forces. De même, les forces appliquées en B se composent en une force unique, ainsi que les forces appliquées en C.

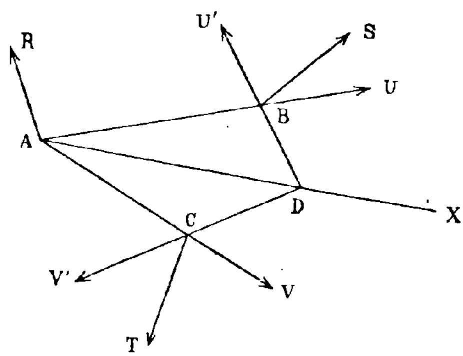
Fig. 95.



Nous obtenons donc ainsi trois forces R, S, T respectivement appliquées en A, B, C. Donc, *toutes les forces données peuvent être réduites à trois forces passant par trois points pris arbitrairement dans le corps.*

Nous allons maintenant réduire ces trois forces à deux, dont l'une passera par le point A. A cet effet, soit

Fig. 96.



AX l'intersection des deux plans ABS, ACT (fig. 96) ; prenons sur AX un point D quelconque, et joignons DB et DC.

Nous pourrons décomposer la force S, appliquée en B, en deux forces U et U' dirigées, l'une suivant AB, l'autre suivant DB ; de même, nous pourrons remplacer la force T appliquée en C par deux forces V et V' dirigées, l'une suivant AC, l'autre suivant DC.

Or, les trois forces concourantes R, U et V ont une résultante unique Q appliquée en A, et les deux forces concourantes U' et V' ont une résultante unique Q' appliquée en D. Ces deux dernières forces Q et Q', dont la première est appliquée au point A peuvent donc remplacer les forces données P, P', P'',... et le théorème est démontré.

REMARQUE I. — Il est évident que cette composition peut se faire d'une infinité de manières : en effet, le point D pris sur AX est quelconque, et d'ailleurs les points B et C sont aussi quelconques.

REMARQUE II. — 1° Si les forces Q et Q' sont égales et directement opposées, les forces P, P', P'',... se font équilibre.

2° Si les deux forces Q et Q' sont situées dans un même plan, c'est-à-dire si elles sont concourantes ou parallèles, on pourrait les composer en une seule, (à moins qu'elles ne soient parallèles, égales et de sens contraires), et le système se réduirait à une résultante unique.

3° Si les forces Q et Q' sont parallèles, égales et de sens contraires, le système se réduit à un couple.

286. On peut arriver au même résultat d'une autre manière :

THÉORÈME. — *Un nombre quelconque de forces appliquées à un solide invariable peut toujours être remplacé d'une infinité de manières par une force unique et un couple unique.*

Soient P, P', P''..., des forces appliquées aux points m, m', m'',... d'un solide invariable. Soit O un point faisant partie du corps solide, ou invariablement relié à ce corps, et transportons toutes les forces données en ce point O. Nous remplacerons ainsi (n° **284**) le système des forces données par un système de forces égales et parallèles aux premières, et appliquées au point O, et par des couples en nombre égal au nombre des forces. Or, toutes les forces appliquées en O se composent en une force unique R, appliquée en ce point ; tous les couples se composent en un couple unique W. Par conséquent, le système se réduit à une force unique et un couple unique.

Remarque I. — Ce résultat est exactement équivalent au précédent : en effet, nous pouvons prendre le point A du théorème précédent pour le point O, où l'on transporte les forces. Cela posé, le couple W (Q, — Q) peut être transporté, comme on voudra, dans des plans parallèles (n° **266**). Nous pouvons donc faire en sorte que l'une des forces du couple, par exemple la force + Q, passe par le point A. Si nous composons alors les forces R et Q, concourantes en A, nous obtiendrons une force S, appliquée au point A, et le système est alors réduit aux forces S et — Q.

Remarque II. — Il est évident que, quel que soit le point O où l'on transporte les forces données, la grandeur, la direction et le sens de la force R restent les mêmes, puisque le polygone des forces sera toujours le même; au contraire, la grandeur et la direction du couple varient avec la position du point O.

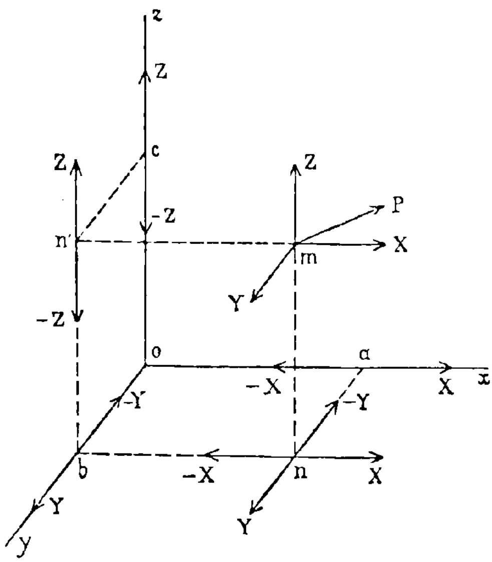
La force R s'appelle la *résultante de translation*.

287. Méthode analytique. — Soient P, P', P'',... les forces données, appliquées aux points m, m', m'',... (X, Y, Z), (X', Y', Z'),... les composantes de ces forces parallèlement à trois axes rectangulaires, (x, y, z), (x', y', z'),... les coordonnées des points m, m', m'',... par rapport aux mêmes axes.

Considérons la force P (fig. 97) appliquée au point $m(x, y, z)$: au lieu de transporter la force P directement à l'origine, nous y transporterons ses composantes X, Y, Z.

A cet effet, transportons la force X au point n, en introduisant le couple (X, — X) dont le bras de levier est $mn = z$, et dont le moment est Xz : ce couple est situé dans un plan parallèle au plan des zx, c'est-à-dire dans le plan de zx; si nous considérons comme positives les rotations des y vers les z, des z vers les x, et des x vers les y, le couple Xz sera positif (n° **261**). La force X, appliquée en n, peut être transportée en a (ou en O), en introduisant un couple (X, — X) dont le bras de levier

Fig. 97.



est $na = y$, et dont le moment est $\mathrm{X}y$: ce couple est situé dans le plan des xy, et il est négatif ; nous aurons donc dans le plan des xy le couple — $\mathrm{X}y$.

Ainsi, la translation de la force X à l'origine nous donne :

1° la force X, appliquée à l'origine O ;

2° le couple $+ \mathrm{X}z$, situé dans le plan des zx ;

3° le couple — $\mathrm{X}y$, situé dans le plan des xy.

La force Y pourra aussi être transportée de m en n, puis de n en b, en introduisant deux couples, et nous aurons ainsi :

17

1° la force Y, appliquée au point O ;
2° le couple — Yz, situé dans le plan des yz ;
3° le couple + Yx, situé dans le plan des xy.

Enfin, la translation de la force Z à l'origine nous donnera :

1° la force Z, appliquée au point O ;
2° le couple — Zx, situé dans le plan des zx ;
3° le couple + Zy, situé dans le plan des yz.

Chacune des forces données pourra être transportée à l'origine de la même manière que la force P, et nous aurons ainsi pour chacune d'elles : trois forces X, Y, Z, appliquées au point O, et dans chacun des plans coordonnés des couples $Zy - Yz$, $Xz - Zx$, $Yx - Xy$. Toutes les forces suivant l'axe des x se composent en une force unique :

$$\Sigma X = X + X' + X'' + \dots ;$$

nous aurons de même pour les deux autres axes :

$$\Sigma Y = Y + Y' + Y'' + \dots,$$

$$\Sigma Z = Z + Z' + Z'' + \dots.$$

Nous aurons aussi dans les trois plans coordonnés trois séries de couples ; ces couples se composeront dans chacun des plans en un couple unique égal à la somme algébrique des couples composants (n° **273**), et il viendra :

1° dans le plan des yz, le couple $L = \Sigma(Zy - Yz)$;
2° » zx, » $M = \Sigma(Xz - Zx)$;
3° » xy, » $N = \Sigma(Yx - Xy)$.

Le système est donc ramené à trois forces dirigées suivant les trois axes, et trois couples situés dans les trois plans coordonnés. Ces trois forces se composeront en une force unique R, donnée par la formule (n° **219**):

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2,$$

et, en désignant par a, b, c les angles que R fait avec les axes, on a :

$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R} = \frac{\Sigma X}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z^2)}},$$

$$\cos b = \frac{\Sigma Y}{R} = \frac{\Sigma Y}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}},$$

$$\cos c = \frac{\Sigma Z}{R} = \frac{\Sigma Z}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}.$$

Les trois couples L, M, N se composeront en un couple unique W, donné par la formule (n° **277**) :

$$W^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

et, en désignant par λ, μ, ν les angles que l'axe de ce couple fait avec les axes coordonnés, on a :

$$\cos \lambda = \frac{L}{W} = \frac{\Sigma(Zy - Yz)}{\sqrt{\{\Sigma(Zy - Yz)\}^2 + \{\Sigma(Xz - Zx)\}^2 + \{\Sigma(Yx - Xy)\}^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{M}{W} = \frac{\Sigma(Xz - Zx)}{\sqrt{\{\Sigma(Zy - Yz)\}^2 + \{\Sigma(Xz - Zx)\}^2 + \{\Sigma(Yx - Xy)\}^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{N}{W} = \frac{\Sigma(Yx - Xy)}{\sqrt{\{\Sigma(Zy - Yz)\}^2 + \{\Sigma(Xz - Zx)\}^2 + \{\Sigma(Yx - Xy)\}^2}}.$$

Ainsi donc, en général, le système des forces P, P', P'',... se ramène à une force unique R, et un couple unique W, déterminés par les formules qui précèdent.

CAS PARTICULIERS. — 1° Si la force R est nulle, les forces se réduisent à un couple unique W.

2° Si le couple W est nul, les forces se réduisent à une force unique R.

3° Si le couple W et la force R sont nuls, les forces données se font équilibre.

288. Nous venons de voir que, si le couple W est nul, les forces se réduisent à une résultante unique R. Le système pourra encore se réduire à une résultante unique, dans le cas où le couple W et la force R sont situés dans un même plan (n° **281**), c'est-à-dire lorsque la force R sera perpendiculaire à l'axe du couple.

Il résulte de là que la condition analytique nécessaire et suffisante pour que le système des forces P, P', P'',... appliquées à des points invariablement reliés entre eux, se ramène à une résultante unique, est :

$$\cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos c \cos \nu = 0,$$

ou bien, en remplaçant les cosinus par leurs valeurs :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0.$$

289. REMARQUE I. — Il est facile de s'assurer *que les moments* L, M, N *des trois couples situés dans les trois plans coordonnés, ne sont autres que les sommes des moments des forces données par rapport aux trois axes coordonnés.*

En effet, d'après ce que nous avons vu (n° **238**), l'expression $Yx - Xy$ est le moment de la force P par rapport à l'axe des Z ; par conséquent, $\Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)$ ou N est la somme des moments des forces données par rapport à l'axe des Z.

Donc, les moments L, M, N des projections du couple W sur les trois plans coordonnés, c'est-à-dire les projections de l'axe W sur les axes coordonnés, sont égaux aux sommes des moments des forces par rapport à ces mêmes axes.

290. REMARQUE II. — On sait (n° **262**) que si l'on projette le couple W sur un plan faisant un angle θ avec le plan du couple W, la projection W′ est donnée par la formule :

$$\mathrm{W}' = \mathrm{W} \cos \theta ;$$

mais, W′ est la somme des moments des forces par rapport à l'axe W′ (n° **263**). Donc :

THÉORÈME. — *La somme des moments des forces par rapport à un axe s'obtient en projetant sur cet axe le moment résultant, ou le moment du couple résultant.*

Ainsi, quand on a obtenu en grandeur et direction l'axe du couple résultant relatif à une certaine origine, il suffit de projeter cet axe sur une droite quelconque de cette même origine, pour avoir la somme des moments des forces par rapport à cette droite (ou estimée suivant cette droite).

291. PROPRIÉTÉ. — *La somme des moments des forces par rapport à un axe s'obtient en projetant sur cet axe les sommes des moments des forces relatives aux axes coordonnés, et faisant la somme de ces projections.*

En effet, soient W le moment du couple résultant pour une origine donnée, λ, μ, ν les angles que son axe fait avec les axes coordonnés, θ l'angle que fait cet axe avec une direction (λ', μ', ν') de la même origine, W' la somme des moments des forces par rapport à cette direction ; nous aurons :

$$W' = W \cos \theta = W (\cos \lambda \cos \lambda' + \cos \mu \cos \mu' + \cos \nu \cos \nu')$$

$$= L \cos \lambda' + M \cos \mu' + N \cos \nu',$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

292. Axe du moment maximum. — Si nous reprenons la formule :

$$W' = W \cos \theta,$$

nous en concluons les théorèmes suivants :

Théorème I. — *De tous les axes qui passent par une même origine, l'axe du couple résultant est celui par rapport auquel la somme des moments des forces est la plus grande*

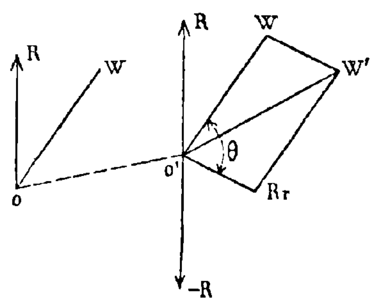
Théorème II. — *La somme des moments est la même par rapport à tous les axes qui font un même angle avec celui du plus grand moment, ou qui forment une surface conique décrite autour de cet axe sous le même angle.*

Théorème III. — *La somme des moments est nulle par rapport à tous les axes qui font un angle droit avec l'axe du plus grand moment, ou qui sont situés dans un plan perpendiculaire à sa direction.*

Propriétés de l'axe central.

293. Nous avons vu (n° **286**) que si l'on compose toutes les forces données autour d'une origine O, on obtient une force unique R et un couple unique W. Il est d'abord évident que si l'on transporte le point O en un point quelconque de R, on aura toujours la même force R et le même couple W. Il est facile de s'assurer que la grandeur et la position du couple W varient avec l'origine O prise en dehors de la résultante R. En effet, soient pour le point O la force R et le couple W (fig. 98) : il est évident que si nous voulons obtenir la force et le couple relatifs à une autre origine O', il suffira de transporter en ce point O' la force R et le couple W. Or, le couple W se transporte parallèlement à lui-même sans altération ; la force R se transporte parallèlement à elle-même au point O' en donnant naissance à un couple (R, — R) dont le moment est Rr, r étant la distance du point O' à la force R dans sa position primitive (n° **284**), et l'axe Rr de ce couple est perpendiculaire au plan ROO'.

Fig. 98.



Les deux couples W et Rr se composent en un couple unique W' qui est donné par la formule :

$$W'^2 = W^2 + (Rr)^2 + 2W \cdot Rr \cos \theta.$$

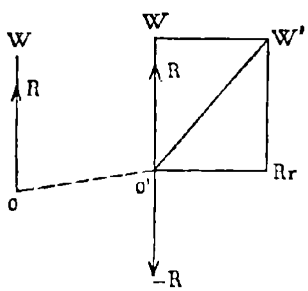
On voit donc qu'à l'origine O', on obtient une force unique R de même grandeur et direction qu'au point O, et un couple W' différent de W. Ainsi, le plan du couple et son moment varient avec la position du point O où l'on transporte les forces, et comme la direction de R reste toujours la même, il s'ensuit que *l'angle de* R *avec le plan du couple varie avec la position du point* O.

D'ailleurs, l'axe du couple W' est pour le point O' l'axe du moment maximum des forces (nº **292**). Ce maximum reste évidemment le même lorsque le point O se déplace sur la direction de la force R, et il change avec la position du point O dans l'espace, en dehors de la résultante.

294. AXE CENTRAL. — Parmi tous les maximums différents les uns des autres, il en est un plus petit que tous les autres. Les origines pour lesquelles cette propriété existe sont situées sur une même droite que l'on appelle *axe central* : elles sont déterminées par la condition qu'*en ces origines l'axe du couple coïncide avec la direction de la force unique* R.

Nous allons, en effet, démontrer que, si l'on a obtenu une origine O, telle que, pour cette origine, on a la condition que R et W coïncident (fig. 99), et si l'on passe de cette origine O à une autre origine O' quelconque, on obtiendra un couple W' plus grand que W. Soit donc O l'origine pour laquelle R et W coïncident, et passons de cette origine O à l'origine O'. Le couple W s'y transporte parallèlement à lui-même sans altération ; la force R, transportée parallèlement à elle-même en O', engendre un couple (R, — R) dont le

Fig. 99.



moment est Rr, et dont l'axe est perpendiculaire au plan ROO', donc à l'axe du couple W. Par conséquent, si nous composons les deux couples W et Rr en un couple unique W', nous aurons :

$$W'^2 = W^2 + (Rr)^2,$$

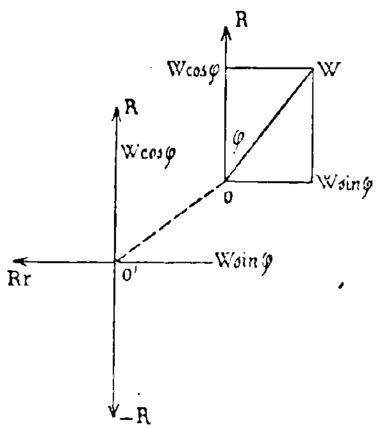
et, par suite, W' est plus grand que W, quel que soit r ; donc W est minimum.

Remarque. — Il est évident que si l'on déplace le point O sur la direction OR, le couple W restera constamment le même. Le lieu des points O pour lesquels W est minimum est donc une ligne droite : c'est *l'axe central.*

295. Problème. — Proposons-nous maintenant de *trouver la position de l'axe central pour un système de forces données.*

Soient pour une origine O de l'espace, OR la force unique, et OW l'axe du couple (fig. 100). Nous nous proposons de déterminer une origine O', telle qu'en cette origine l'axe du couple coïncide avec la direction de R. Il faut donc que le couple résultant de la translation de R de O en O', soit tel que, composé avec le couple W, il donne un couple dont l'axe soit dirigé suivant OR. Or, à l'origine O, nous pouvons décomposer le couple W en deux couples : l'un W cos φ

Fig. 100.



suivant la direction OR, l'autre W sin φ perpendiculaire à OR. Nous devons donc déterminer le point O' de manière que le couple résultant de la translation de R en O', détruise le couple W sin φ. D'ailleurs, l'axe de ce couple devant être dans le plan de l'angle φ, l'origine O' devra se trouver sur une perpendiculaire à ce plan. Ceci établi, par le point O menons une perpendiculaire au plan WOR, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur $OO' = r$. Transportons au point O' la force R et les couples W cos φ, W sin φ : les deux couples se transportent sans altération ; la force R engendre un couple (R, — R) dont le bras de levier est OO', et dont le moment est R . OO' = Rr. Si donc nous prenons la distance OO' dans un sens tel que l'axe Rr du nouveau couple soit de sens contraire à l'axe W sin φ, et que l'on ait Rr = W sin φ, ces deux couples seront égaux et de sens contraires, et par conséquent, se détruisent. Le système au point O' se réduit donc à la force unique R et au couple W cos φ, dont l'axe coïncide avec O'R. Cette droite O'R sera l'axe central.

On conclut de là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tant de forces que l'on voudra peuvent toujours se réduire à une seule force et un seul couple dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force.*

Il résulte de ce qui précède qu'il n'y a qu'une seule manière de réduire les forces à un système tel que celui que nous venons de définir.

296. PROPRIÉTÉ. — *Pour une origine quelconque, la projection du couple résultant sur la direction de la résultante de translation* R, *est constante, et égale au moment du couple minimum.*

En effet, soit G le moment du couple minimum ; nous aurons :

$$G = W \cos \varphi,$$

en désignant par W le moment du couple relatif à une origine quelconque, et par φ l'angle de l'axe W avec R. Or, G est indépendant de l'origine O d'où l'on est parti ; par suite $W \cos \varphi = const$, et la propriété est démontrée.

Corollaire. — On a évidemment :

$$\cos \varphi = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{WR};$$

on en tire :

$$G = W \cos \varphi = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{R}.$$

Or, le premier membre étant constant, quelle que soit l'origine O, il en est de même du second membre : mais, la résultante R est aussi constante. Il s'ensuit que l'on a, pour une origine quelconque :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = const.$$

297. Propriété. — Si l'on passe d'une origine O, prise sur l'axe central à une origine O' située à une distance x de cet axe, on a :

$$W^2 = G^2 + R^2x^2;$$

on en conclut que W augmente indéfiniment avec x.

Par conséquent, *en s'éloignant de l'axe central, on trouve des couples toujours plus grands et croissant* *sans limite*. Mais, chacun d'eux, estimé suivant la direction constante de la résultante de translation, donne une projection égale au couple minimum G (n° **296**).

298. De cette même formule, on conclut les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour toutes les origines prises sur un cylindre de révolution dont l'axe central est l'axe géométrique, le moment maximum a la même valeur.*

Si l'on imagine différentes origines prises sur une même génératrice de ce cylindre, on obtiendra pour chacune d'elles :

$$Rx = W \sin \varphi, \quad G = W \cos \varphi,$$

d'où :

$$tg\varphi = \frac{Rx}{G} = const. \text{ Donc :}$$

THÉORÈME II. — *Pour les origines situées sur une même génératrice du cylindre, les axes des moments maximums sont dans un même plan, et parallèles entre eux.*

Si l'on imagine différentes origines, situées sur une même section droite du cylindre, les axes des couples feront le même angle constant avec la génératrice ; par conséquent, ces axes formeront un hyperboloïde de révolution. Donc :

THÉORÈME III. — *Pour des origines situées sur une même section droite du cylindre (ou sur une même circonférence dans un plan perpendiculaire à l'axe central), les moments maximums sont égaux, et leurs axes forment un hyperboloïde de révolution autour de l'axe central, et dont la circonférence sera le cercle de gorge.*

Enfin, si l'on considère des origines sur des cylindres différents, la formule :

$$W^2 = G^2 + R^2x^2,$$

nous donne :

$$G^2 = W^2 - R^2x^2,$$

et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Pour des origines situées sur des cylindres différents, les moments maximums varient comme les ordonnées d'une hyperbole dont les abscisses sont les rayons de ces cylindres.*

299. ÉQUATIONS DE L'AXE CENTRAL. — Pour obtenir les équations de l'axe central, il suffira évidemment d'écrire que, *pour un point quelconque pris sur cet axe, la force unique coïncide avec l'axe du couple.* Soient donc R et W la force unique et l'axe du couple relatifs à une origine O. Soient O' un point quelconque de l'axe central, (a, b, c) ses coordonnées, W' l'axe du couple relatif à ce point O', L', M', N' les couples composants de W'. Prenons ce point O' pour origine de trois axes rectangulaires parallèles aux axes primitifs, et soient x', y', z' les coordonnées du point m par rapport à ces axes.

La condition de coïncidence de R et W' nous donne les équations :

$$\frac{L'}{\Sigma X} = \frac{M'}{\Sigma Y} = \frac{N'}{\Sigma Z},$$

dans lesquelles :

$$L' = \Sigma(Zy' - Yz'),\ M' = \Sigma(Xz' - Zx'),\ N' = \Sigma(Yx' - Xy');$$

mais, on a :

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c\,;$$

par suite,

$$L' = \Sigma[Z(y-b) - Y(z-c)] = \Sigma(Zy - Yz) - b\Sigma Z + c\Sigma Y,$$

ou bien :

$$L' = L - b\Sigma Z + c\Sigma Y\,;$$

de même,

$$M' = M - c\Sigma X + a\Sigma Z,$$

$$N' = N - a\Sigma Y + b\Sigma X.$$

Les équations de l'axe central sont donc :

$$\frac{L - b\Sigma Z + c\Sigma Y}{\Sigma X} = \frac{M - c\Sigma X + a\Sigma Z}{\Sigma Y} = \frac{N - a\Sigma Y + b\Sigma X}{\Sigma Z}.$$

Remarque. — On peut encore trouver ces équations par la théorie des maximums et minimums de la manière suivante :

Soient R et W la force unique et le couple unique relatifs à une origine O, W' le couple relatif à une origine O' (a, b, c). Pour que cette origine O' soit un point de l'axe central, il faut que W' soit un minimum. Or, si nous composons toutes les forces autour de l'origine O', nous aurons pour les couples composants de W' :

$$L' = L - b\Sigma Z + c\Sigma Y,$$

$$M' = M - c\Sigma X + a\Sigma Z,$$

$$N' = N - a\Sigma Y + b\Sigma X\,;$$ [1]

par conséquent :

$$W'^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2 = f(a, b, c).$$

La condition pour que W' soit un minimum nous donne :

$$\frac{\partial W'}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial W'}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial W'}{\partial c} = 0,$$

ou bien :

$$M'\Sigma Z - N'\Sigma Y = 0,$$

$$N'\Sigma X - L'\Sigma Z = 0,$$

$$L'\Sigma Y - M'\Sigma X = 0,$$

équations qui se réduisent aux suivantes :

$$\frac{L'}{\Sigma X} = \frac{M'}{\Sigma Y} = \frac{N'}{\Sigma Z}\,;$$

ce sont les équations trouvées ci-dessus.

---

1. Observons que ces équations nous donnent la relation démontrée précédemment (nº **296**) :

$$L'\Sigma X + M'\Sigma \cancel{X} + Y'\Sigma Z = L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = const.$$

Ces équations nous permettent de déterminer la valeur du couple minimum.

En effet, on a :

$$\frac{L'}{\Sigma X} = \frac{M'}{\Sigma Y} = \frac{N'}{\Sigma Z} = \frac{L'^2 + M'^2 + N'^2}{L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z}$$

$$= \frac{L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

Or, des deux derniers rapports on tire :

$$\frac{W'^2}{L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z} = \frac{L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z}{R^2};$$

et, en observant que l'on a (n° **296**) :

$$L'\Sigma X + M'\Sigma Y + N'\Sigma Z = L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z,$$

la valeur du couple minimum W′ est donnée par la formule :

$$W'R = L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z.$$

300. ÉQUATIONS DE LA RÉSULTANTE UNIQUE. — Nous avons vu (n° **288**) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces admette une résultante unique est que l'on ait identiquement :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + M\Sigma Z = 0.$$

Proposons-nous actuellement de trouver les équations de cette résultante, lorsqu'elle existe. Il est évident que si l'on prend pour origine un point quelconque de cette résultante, et si l'on compose toutes les forces autour de cette origine, on devra trouver un couple nul.

Soient donc a, b, c les coordonnées d'un point O' de la résultante unique, x', y', z' les coordonnées du point m par rapport à trois axes menés par le point O' parallèlement aux axes primitifs. La condition $W' = 0$ nous donne évidemment les trois équations :

$$L' = 0, \quad M' = 0, \quad N' = 0,$$

ou bien :

$$L - b\Sigma Z + c\Sigma Y = 0,$$

$$M - c\Sigma X + a\Sigma Z = 0,$$

$$N - a\Sigma Y + b\Sigma X = 0,$$

lesquelles expriment des relations entre les coordonnées (a, b, c) du point O', satisfaisant à la condition énoncée. Mais, si l'on multiplie ces équations respectivement par ΣX, ΣY, ΣZ, et si l'on ajoute, on obtient :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0,$$

équation identique, puisque le système admet une résultante unique (n°**288**). Les trois équations précédentes se réduisent donc à deux qui sont celles de la résultante unique.

CHAPITRE IV.

Équilibre d'un corps libre.

301. Nous avons vu qu'un nombre quelconque de forces P, P', P'',... appliquées à un solide invariable, peut toujours être remplacé par deux forces dont l'une passe par un point donné (n° **285**), ou bien par une force et un couple (n° **286**). Dans le premier cas, il faut pour *l'équilibre* que *les deux forces soient égales et directement opposées ;* dans le second cas, il faut que *la force unique et le couple unique soient nuls séparément.*

En effet, dans le premier cas, soient R' et R'' les deux forces : si le corps est en équilibre sous l'action de ces forces, il est évident que l'équilibre ne sera pas troublé en rendant fixe un point *quelconque* du corps pris sur la direction de R'. Mais alors la force R', appliquée en ce point fixe, ne pourra produire aucun effet : elle sera détruite par le point fixe[1]. Donc, la force R'', qui reste seule, devra passer aussi par le point fixe, sans quoi elle tendrait à faire tourner le corps autour du point fixe, et il n'y aurait pas équilibre. La force R'' doit donc passer

---

1. Un point fixe est un point qui jouit d'une résistance indéfinie ; toute force, quelque grande qu'elle soit, passant par un point fixe, est détruite par ce point.

par un point *quelconque* pris sur la direction de R', et, par conséquent, les *deux forces* R' *et* R'' *doivent être dirigées suivant une même droite*. Elles doivent, en outre, être *égales :* car, sans cela, elles auraient une résultante égale à leur somme ou à leur différence, et le solide ne serait pas en équilibre.

Dans le second cas, soient R la force unique et W le couple unique. Nous pouvons transporter ce couple dans son plan (n° **266**), de manière que l'une des forces du couple rencontre la force R. Cela posé, si l'équilibre a lieu, il ne sera pas troublé en rendant fixe ce point de rencontre. Or, les deux forces qui passent par ce point sont détruites, et il resterait la deuxième force du couple qui tendrait à faire tourner le corps autour du point fixe. Par conséquent, l'équilibre exige que cette force soit nulle, ce qui réduit le couple W à zéro. Mais, si $W = 0$, les forces se réduisent à une force unique R, et le solide ne pourrait être en équilibre que si l'on a :

$$R = 0.$$

Par conséquent, *les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide soit en équilibre*, *sont :*

$$R = 0, \quad W = 0,$$

ou bien (n° **287**) :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

ou bien encore :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma (Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

Les trois premières expriment que *la somme algébrique des projections des forces sur trois axes rectangulaires est nulle;* les trois dernières expriment que *la somme des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires est nulle.*

Il en résulte évidemment que ces mêmes conditions ont lieu pour un axe quelconque.

302. Comme application, nous allons chercher *les équations de la résultante d'un nombre quelconque de forces, lorsqu'elle existe.*

Il est évident que si les forces P, P', P'',... admettent une résultante unique R, il y aura équilibre entre les forces P, P', P'',... et — R. Soient donc x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de la résultante, que nous prendrons comme point d'application, et écrivons les six équations d'équilibre entre les forces P, P', P'',... — R. Nous aurons, en désignant par a, b, c les angles que R fait avec les axes, les équations :

$$\Sigma X - R\cos a = 0,$$

$$\Sigma Y - R\cos b = 0,$$

$$\Sigma Z - R\cos c = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) - R(y_0\cos c - z_0\cos b) = 0,$$

$$\Sigma(Xz - Zx) - R(z_0\cos a - x_0\cos c) = 0,$$

$$\Sigma(Yx - Xy) - R(x_0\cos b - y_0\cos a) = 0.$$

Or, en ayant égard aux trois premières, nous pouvons mettre les trois dernières sous la forme suivante :

$$L - y_0\Sigma Z + z_0\Sigma Y = 0,$$

$$M - z_0\Sigma X + x_0\Sigma Z = 0,$$

$$N - x_0\Sigma Y + y_0\Sigma X = 0\ ;$$

ce sont les équations que nous avons trouvées précédemment, et qui se réduisent à deux (n° **300**).

303. Remarque. — Les formules relatives à la composition d'un nombre quelconque de forces peuvent encore être mises sous une autre forme. En effet, si nous désignons par α, β, γ les angles que la force P fait avec les axes, nous aurons d'une part :

$$\Sigma X = \Sigma P \cos \alpha,$$

$$\Sigma Y = \Sigma P \cos \beta,$$

$$\Sigma Z = \Sigma P \cos \gamma,$$

d'où :

$$R = \sqrt{(\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cos \gamma)^2}\ ;$$

et, d'autre part,

$$L = \Sigma P\,(y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

$$M = \Sigma P\,(z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$

$$N = \Sigma P\,(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

d'où :

$$W = \sqrt{\{\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta)\}^2 + \{\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\}^2 + \{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)\}^2}.$$

Les équations d'équilibre sont alors les suivantes :

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos\beta = 0, \quad \Sigma P \cos\gamma = 0,$$

$$\Sigma P\,(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0, \quad \Sigma P\,(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,$$

$$\Sigma P\,(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Équivalence des systèmes de forces.

304. Un système de forces S est dit *équivalent à un autre système de forces* S', lorsque ces deux systèmes, considérés comme agissant sur un solide invariable, peuvent être mis en équilibre, chacun séparément, par un même troisième système S''.

Or, pour que les systèmes S et S'' se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces de ces deux systèmes sur une droite quelconque soit nulle, et que la somme des moments de ces forces par rapport à une droite quelconque soit aussi nulle. Pour que les systèmes S' et S'' se fassent équilibre, ils doivent satisfaire aux mêmes conditions. Il en résulte donc que, pour que les systèmes S et S' soient équivalents, il faut et il suffit : 1° que la somme des projections des forces du système S sur une droite quelconque, soit égale à la somme des projections des forces du système S' sur la même droite ; 2° que la somme des moments des forces du système S par rapport à une droite quelconque soit égale à la somme des moments des forces du système S' par rapport à cette même droite.

D'après cela, l'équivalence des deux systèmes sera exprimée par les six équations suivantes :

$$\Sigma X = \Sigma X',$$

$$\Sigma Y = \Sigma Y',$$

$$\Sigma Z = \Sigma Z',$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = \Sigma (Z'y' - Y'z'),$$

$$\Sigma (Xz - Zx) = \Sigma (X'z' - Z'x'),$$

$$\Sigma (Yx - Xy) = \Sigma (Y'x' - X'y'),$$

dans lesquelles les premiers membres se rapportent au système S, et les seconds membres au système S'.

Conditions d'équilibre d'un nombre quelconque de forces parallèles. Centre des forces parallèles.

305. Soient P, P', P'',... un nombre quelconque de forces parallèles. Rapportons le système à trois axes rectangulaires de l'espace ; soient m (x, y, z), m' (x', y', z'),... les points d'application de ces forces, α, β, γ leur direction commune.

Si nous transportons toutes ces forces à l'origine, nous obtiendrons trois forces dirigées suivant les axes :

$$\Sigma X = \cos\alpha \Sigma P,$$

$$\Sigma Y = \cos\beta \Sigma P,$$

$$\Sigma Z = \cos\gamma \Sigma P,$$

et trois couples dans les trois plans coordonnés :

$$L = \Sigma\,(Zy - Yz) = \cos\gamma\Sigma Py - \cos\beta\Sigma Pz,$$

$$M = \Sigma\,(Xz - Zx) = \cos\alpha\Sigma Pz - \cos\gamma\Sigma Px,$$

$$N = \Sigma\,(Yx - Xy) = \cos\beta\Sigma Px - \cos\alpha\Sigma Py.$$

Or, les trois forces se composent en une force unique :

$$R = \Sigma P,$$

et les trois couples en un couple unique, donné par la formule :

$$W^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Il est facile de voir que le système se réduit, en général, à une résultante unique : en effet, on a la relation :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0,$$

qui est identiquement satisfaite.

306. Proposons-nous maintenant de trouver *les équations de cette résultante unique*. Il est d'abord évident qu'elle est parallèle aux forces données P, P', P"... En effet, si l'on désigne par a, b, c les angles de cette résultante avec les axes, nous aurons :

$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R} = \frac{\cos\alpha\Sigma P}{\Sigma P} = \cos\alpha;$$

de même,

$$\cos b = \cos\beta, \quad \cos c = \cos\gamma.$$

Cela posé, si l'on introduit la résultante unique R en sens contraire, il y a équilibre entre les forces P, P', P'',... et la force — R. Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point pris sur la résultante ; nous aurons les six équations :

$$\cos\alpha\,\Sigma P - R\cos\alpha = 0,$$

$$\cos\beta\,\Sigma P - R\cos\beta = 0,$$

$$\cos\gamma\,\Sigma P - R\cos\gamma = 0,$$

$$\cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz - Ry_0\cos\gamma + Rz_0\cos\beta = 0,$$

$$\cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px - Rz_0\cos\alpha + Rx_0\cos\gamma = 0,$$

$$\cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py - Rx_0\cos\beta + Ry_0\cos\alpha = 0.$$

Les trois premières sont des identités ; les trois dernières peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\cos\gamma\,(\Sigma Py - Ry_0) - \cos\beta\,(\Sigma Pz - Rz_0) = 0,$$

$$\cos\alpha\,(\Sigma Pz - Rz_0) - \cos\gamma\,(\Sigma Px - Rx_0) = 0,$$

$$\cos\beta\,(\Sigma Px - Rx_0) - \cos\alpha\,(\Sigma Py - Ry_0) = 0\,;$$

or, il est évident qu'elles se réduisent à deux qui sont les équations de la résultante unique.

307. Remarque. — Au lieu de considérer comme point d'application de la résultante R, un point quelconque pris sur la direction de R, considérons comme point d'application le point (x_0, y_0, z_0), tel qu'en faisant tourner les forces autour de leurs points d'application de manière qu'elles restent parallèles entre elles, la résultante passe toujours par ce point. Dans ce cas, les équations précédentes doivent être indépendantes de α, β, γ, et l'on a, par conséquent :

$$\Sigma Px - Rx_0 = 0, \quad \Sigma Py - Ry_0 = 0, \quad \Sigma Pz - Rz_0 = 0\,;$$

d'où l'on tire :

$$x_0 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y_0 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z_0 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Le point (x_0, y_0, z_0) est le *centre des forces parallèles*. Ces formules expriment que *le moment de la résultante, considérée comme appliquée au centre des forces, par rapport à chacun des trois plans coordonnés, est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ces plans.*

308. Cas particuliers. — 1° Si $\Sigma P = 0$, les forces se réduisent à un couple, qui sera donné par la formule :

$$W^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

2° Si l'on a en même temps $\Sigma P = 0$, $\Sigma Px = 0$, $\Sigma Py = 0$, $\Sigma Pz = 0$, les forces se font équilibre.

Mais, il est évident que les forces données se feront aussi équilibre, si l'on a :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

ce qui nous donne les équations suivantes :

$$\Sigma P = 0, \quad \cos\gamma\Sigma Py - \cos\beta\Sigma Pz = 0, \quad \cos\alpha\Sigma Pz - \cos\gamma\Sigma Px = 0,$$

$$\cos\beta\Sigma Px - \cos\alpha\Sigma Py = 0.$$

Les trois dernières se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma}.$$

Donc, les conditions d'équilibre d'un système de forces parallèles sont les suivantes : *Il faut et il suffit que la somme algébrique des forces données soit nulle, et que les sommes des moments des forces par rapport à trois plans rectangulaires soient proportionnelles aux cosinus des angles que la direction commune des forces fait avec les axes perpendiculaires à ces plans.*

Remarque. — Si le système est tel que l'on ait $\Sigma P = 0$, sans que l'on ait en même temps :

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma},$$

la résultante des forces parallèles est nulle, et l'on a alors $x_0 = y_0 = z_0 = \infty$. Il s'ensuit que les forces se réduisent à un couple.

309. Théorème. — *La somme algébrique des moments d'un système de forces parallèles par rapport à un plan passant par le centre des forces est égale à zéro.*

En effet, si l'on prend ce plan pour plan des xy, on aura $z_0 = 0$, et par conséquent $\Sigma Pz = 0$.

Réciproquement, *si la somme des moments par rapport à un plan est nulle, le centre des forces parallèles est dans ce plan.*

CHAPITRE V.

Équilibre d'un solide qui n'est pas entièrement libre.

310. Les six équations d'équilibre que nous avons trouvées (nº **301**) supposent que le corps auquel les forces sont appliquées est *libre dans l'espace*, c'est-à-dire que ce corps n'est retenu par aucun obstacle, qu'il n'est soumis à aucune condition particulière.

Lorsqu'il en est autrement, le corps n'est pas libre, et l'on dit qu'il est *assujetti à des liaisons*. Ainsi, certains points du système peuvent être assujettis à demeurer sur des courbes fixes, ou sur des surfaces fixes, ou à conserver des positions fixes.

On dit qu'un système est à *liaisons complètes*, lorsque ces liaisons sont suffisantes pour déterminer les trajectoires de chacun des points. Ainsi, par exemple, un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe est un système à liaisons complètes : chaque point est forcé à décrire une circonférence autour de l'axe.

Lorsqu'un corps est assujetti à des liaisons, on peut concevoir que ces liaisons soient remplacées par des forces capables d'obliger le système à satisfaire aux mêmes conditions.

Si le système renferme un point fixe, on pourra remplacer la fixité du point par une force convenable appliquée en ce point. C'est la réaction du point fixe : la direction et l'intensité de cette force sont inconnues.

Si deux points matériels doivent rester à une même distance l'un de l'autre, par une tige de longueur constante, on pourra remplacer cette liaison par deux forces égales et contraires, appliquées aux deux points : ces deux forces appartiendront à la catégorie des forces intérieures (n° **244**).

Si un point du corps est assujetti à demeurer sur une surface fixe, ou sur une courbe fixe, une force égale à la réaction normale de la surface ou de la courbe, peut produire le même effet.

Si le corps solide a deux points fixes, les forces qui tiennent lieu de ces liaisons sont les réactions des points fixes. Ce sont des forces extérieures, au même titre que les forces appliquées aux autres points.

311. PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Lorsque des forces agissent sur un solide retenu par des obstacles fixes, on obtient les conditions d'équilibre, en joignant aux forces* P, P', P'',... *qui sollicitent le corps, les réactions que les obstacles fixes exercent sur lui. On peut alors considérer le corps comme entièrement libre, et lui appliquer les six équations d'équilibre.*

Si l'on élimine entre les équations ainsi obtenues les réactions inconnues provenant des obstacles, on obtiendra un certain nombre d'équations ne contenant plus que les données de la question, c'est-à-dire les composantes des forces P, P', P'',... et les coordonnées de leurs points d'application : ces équations exprimeront les conditions d'équilibre. Si l'on suppose ces conditions vérifiées, les équations primitives serviront à déterminer les réactions inconnues, et, par conséquent, les pressions exercées par le solide sur les obstacles fixes, puisque ces pressions sont égales et opposées aux réactions des obstacles.

Équilibre d'un corps solide qui a un point fixe.

312. Première méthode. — Si l'on prend le point fixe pour origine, et si l'on y transporte toutes les forces parallèlement à elles-mêmes, on obtient trois forces ΣX, ΣY, ΣZ, dirigées suivant les axes, et qui seront détruites par la résistance du point fixe, et trois couples L, M, N, situés dans les trois plans coordonnés. Or, l'équilibre exige que ces couples soient nuls : car, s'ils n'étaient pas nuls, ils se composeraient en un couple unique, et l'on pourrait transporter ce couple dans son plan (n° **266**), de manière que l'une de ses forces passe par le point fixe, qui la détruirait. Il resterait donc une force ne passant pas par ce point fixe, et qui mettrait le corps en mouvement. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système* sont donc :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Le point fixe n'est sollicité que par la résultante des forces ΣX, ΣY, ΣZ : cette résultante est donc égale et opposée à la force que doit développer ce point pour établir l'équilibre. C'est la *pression* exercée sur le point fixe.

313. Deuxième méthode. — On peut d'ailleurs obtenir les conditions d'équilibre de la manière suivante :

Nous pouvons supprimer le point fixe, et, par conséquent, rendre le corps libre, en introduisant une force R_1, égale à la réaction de ce point. Le corps solide sera alors en équilibre sous l'action des forces données P, P', P'',... et de la force R_1, et, comme il est libre, nous pourrons lui appliquer les six équations d'équilibre (n° **301**).

Prenons le point fixe pour origine de trois axes rectangulaires ; soient X, Y, Z les composantes d'une des forces P appliquées au solide, M (x, y, z) son point d'application, X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la réaction R_1 inconnue. Nous aurons les six équations suivantes :

$$\Sigma X + X_1 = 0, \quad \Sigma Y + Y_1 = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 = 0, \qquad (1)$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \qquad (2)$$

Les équations (2) ne renferment que les données de la question : ce sont les conditions d'équilibre. Donc, *pour qu'un corps solide, qui a un point fixe, soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces données par rapport à trois axes rectangulaires passant par ce point soit nulle.*

Il est évident que *la somme des moments des forces sera nulle pour tout autre axe passant par ce même point* (*n°* **291**).

Les équations (1) feront connaître les composantes de la réaction R_1 du point fixe, et, par suite, elles déterminent cette réaction en grandeur et en direction. On a, en effet :

$$X_1 = -\Sigma X, \quad Y_1 = -\Sigma Y, \quad Z_1 = -\Sigma Z.$$

La *pression* exercée par le corps sur le point fixe étant égale et contraire à la réaction de ce point sur le corps, ses composantes sont $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$, ou bien ΣX, ΣY, ΣZ. On en conclut que *cette pression*, ou *la* *charge sur le point d'appui, est égale à la résultante des forces données transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.*

REMARQUE. — Comme nous admettons que le point fixe est capable d'une résistance indéfinie, il est évident qu'il développera une réaction suffisante pour maintenir le point O en équilibre. Si l'on ne supposait pas que le point O puisse résister indéfiniment, il faudrait, pour que l'équilibre ait lieu, joindre aux conditions exprimées par les équations (2), la condition que la résultante des forces données transportées au point O ne soit pas supérieure à la pression à laquelle ce point peut résister.

Équilibre d'un corps solide qui a un axe fixe.

314. PREMIÈRE MÉTHODE. — Il est d'abord évident que l'on peut remplacer un axe fixe par deux points fixes O et O', pris sur cet axe. En effet, si deux points du système sont fixes, tous les points de la droite qui les joint sont fixes.

Prenons un des points fixes pour origine, par exemple le point O, et menons par ce point trois axes rectangulaires, l'axe OO' étant pris pour axe des z. Si l'on compose toutes les forces autour de l'origine O, on obtiendra une force unique qui sera détruite par la fixité du point O, et trois couples dans les trois plans coordonnés. Or, les couples situés dans les plans des yz et des zx sont détruits par la résistance de l'axe : en effet, on peut transporter les bras de levier de ces couples sur l'axe, et alors les deux forces de chacun d'eux sont détruites par la résistance de l'axe. Il ne reste donc que le couple N situé dans le plan des xy, et l'équilibre exige que ce couple soit nul : car, s'il n'était pas nul, en le transportant de manière que l'une des forces passe par le point O, cette force serait détruite, et l'autre force ferait tourner le système autour de l'axe OZ. La condition d'équilibre est donc :

$$N = 0.$$

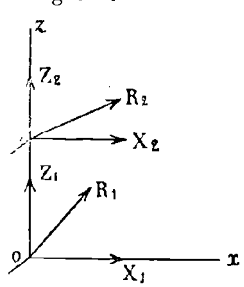
Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe soit égale à zéro.*

Si le corps peut glisser le long de l'axe, en même temps que tourner autour de cet axe, ce qui arrive si le corps est traversé par une tige fixe et inflexible, les forces ΣX et ΣY, perpendiculaires à l'axe, seront détruites par la résistance de l'axe, ainsi que les couples L et M; mais la force ΣZ ne sera pas détruite. Les conditions d'équilibre seront alors :

$$\Sigma Z = 0, \quad N = 0.$$

315. Deuxième méthode. — Les axes étant pris comme ci-dessus, nous pourrons supprimer les points fixes, et, par conséquent, rendre le corps libre, en introduisant deux forces convenables R_1 et R_2 qui sont les réactions de ces points fixes (fig. 101). Le corps solide sera alors en équilibre sous l'action des forces données $P, P', P'', \ldots$ et des deux forces R_1 et R_2, et, comme il est libre, nous pourrons lui appliquer les six équations d'équilibre.

Fig. 101.



Soient donc X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les composantes des deux forces R_1 et R_2, h la distance OO' ; nous aurons les six équations suivantes :

$$\Sigma X + X_1 + X_2 = 0, \ \Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0, \ \Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0, \quad (1)$$

$$L - Y_2 h = 0, \ M + X_2 h = 0, \ N = 0. \quad (2)$$

La dernière des équations (2) ne renferme que les données de la question : c'est la condition d'équilibre.

Les cinq autres équations serviront à déterminer les réactions des points fixes. Les deux premières équations (2) nous donnent X_2, Y_2, et alors les deux premières équations (1) déterminent X_1, Y_1.

La troisième équation (1) donne la somme $Z_1 + Z_2$ des composantes des réactions suivant la direction de l'axe, et ces deux composantes restent *individuellement indéterminées*. Ce résultat était facile à prévoir : en effet, le corps étant de forme invariable, nous savons (n° **246**) qu'une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, sans que cela altère le mouvement ou l'équilibre du corps, et, par suite, les réactions Z_1 et Z_2 peuvent être distribuées comme on voudra sur chacun des points O et O', pourvu que leur somme reste constante.

Équilibre d'un corps solide qui s'appuie contre un plan fixe.

316. Considérons d'abord *un corps pressé contre un plan fixe en un de ses points par une force passant par ce point. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre, est que la force qui passe par le point de contact soit normale au plan.*

Cette condition est *suffisante :* en effet, si la force est normale, le corps sera en équilibre, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il se déplace dans un sens plutôt que dans l'autre ; la condition est *nécessaire :* car, si la force est oblique au plan, on pourrait la décomposer en deux autres, l'une normale au plan, et l'autre située dans le plan. La première ne ferait qu'appuyer le corps sur le plan, et la seconde aurait pour effet de déplacer le corps.

La même conséquence s'appliquerait au plan tangent, si le corps est pressé contre une surface courbe par une force passant par le point de contact.

317. Considérons maintenant *un corps sollicité par plusieurs forces* P, P′, P″,... *et s'appuyant sur un plan* Q *par un de ses points* O, ou sur une surface courbe dont le plan Q serait le plan tangent en O. Supposons qu'il y ait équilibre : si l'on supprimait le plan, le point O prendrait un certain mouvement dans une certaine direction, et, pour maintenir le point en équilibre, il faudrait appliquer suivant cette direction une force déterminée qui remplacera donc la résistance du plan. Puisqu'il y a équilibre, il faut que cette force soit égale et opposée à la résultante des forces P, P′, P″,...

Par conséquent, il faut que ces dernières *aient une résultante unique, normale au plan, et passant par le point d'appui.*

D'ailleurs, les équations d'équilibre nous conduisent facilement à ces résultats. Considérons, en effet, un corps pressé contre un plan au point O : prenons ce plan pour plan des xy, le point O pour origine, l'axe des z étant dirigé du côté du plan où se trouve le corps solide. La résistance du plan pouvant être remplacée par une force normale R_1, nous aurons :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + R_1 = 0,$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Ces équations expriment que les forces données admettent une résultante unique, puisque l'on a identiquement :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0\,;$$

des deux premières équations, on conclut que cette résultante unique est verticale et passe par le point O. La troisième nous apprend que la résultante qui se réduit à ΣZ est égale à la pression supportée par le plan : de plus, *cette résultante doit être négative*, en vertu de cette même équation :

$$\Sigma Z + R_1 = 0.$$

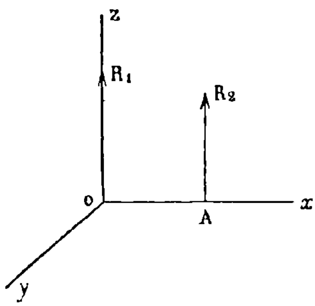
Donc, les conditions d'équilibre sont :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z < 0,$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

318. Supposons ensuite que *le corps repose sur le plan fixe par deux de ses points* O *et* A. Prenons le plan pour plan des xy (fig. 102), la droite OA pour axe des x, l'origine au point O, l'axe des z étant dirigé du côté du plan où se trouve le corps solide, et posons OA $= a$. Nous pouvons remplacer la résistance du plan par deux forces R_1 et R_2, normales à ce plan. Puisqu'il y a équilibre, la résultante de ces deux forces, laquelle a son point d'application entre les points O et A, doit être égale et contraire à la résultante des forces données. Cette résultante doit donc être normale au plan, et son point d'application doit être situé entre O et A.

Fig. 102.



D'ailleurs, les six équations d'équilibre nous donnent :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + R_1 + R_2 = 0,$$

$$L = 0, \quad M - R_2 a = 0, \quad N = 0.$$

Les équations :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad L = 0, \quad N = 0, \qquad \text{(A)}$$

qui ne renferment que les données du problème sont les conditions d'équilibre (n° **311**).

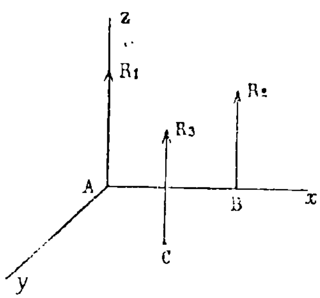
Les deux autres déterminent les pressions exercées sur les points d'appui, pressions qui sont égales à $-R_1$, $-R_2$. Des équations (A) on conclut que les forces données admettent une résultante unique, puisque l'on a identiquement la relation :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0 ;$$

d'ailleurs, puisque l'on a $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, cette résultante est normale au plan, et comme $\Sigma Z < 0$, elle est négative.

319. Supposons encore que *le corps s'appuie sur le plan fixe par trois de ses points* A, B, C. Nous prendrons le plan pour plan des xy (fig. 103), la droite AB pour axe des x, l'origine étant au point A, l'axe des z étant dirigé du côté du plan où se trouve le corps. Posons $AB = a$, et désignons par b et c les coordonnées du point C. Nous pourrons supprimer le plan fixe, et rendre le corps libre, en introduisant les réactions R_1, R_2, R_2 des points fixes, normales au plan. Nous aurons alors les six équations suivantes :

Fig. 103.



$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + R_1 + R_2 + R_3 = 0,$$

$$L + R_3 c = 0, \quad M - R_2 a - R_3 b = 0, \quad N = 0 ;$$

les trois équations :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad N = 0,$$

ne renferment que les données du problème : ce sont donc les conditions d'équilibre. Elles expriment que les forces données ont une résultante unique, puisque l'on a identiquement :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0.$$

De plus, puisque $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, cette résultante unique est normale au plan. Les trois autres équations serviront à déterminer les réactions des points fixes, et, par conséquent, les pressions exercées par le corps sur les points d'appui. La troisième équation nous apprend que la résultante des forces données, c'est-à-dire ΣZ est négative.

Propriété. — *Le point d'application de la résultante des forces* P, P', P'',... *doit se trouver à l'intérieur du triangle* ABC *formé par les trois points d'appui.*

En effet, prenons pour axe des x la droite AB passant par deux des points d'appui, de manière que le troisième sommet soit du côté des y positifs ; soient — R la résultante, laquelle est négative, x_0, y_0 les coordonnées de son point d'application, c'est-à-dire du point où elle rencontre le plan des xy. Il est évident qu'il y aura équilibre entre les forces R_1, R_2, R_3 et la force — R ; nous aurons donc les équations suivantes :

$$-R + R_1 + R_2 + R_3 = 0,$$

$$-Ry_0 + R_3c = 0,$$

$$Rx_0 - R_2a - R_3b = 0.$$

De la deuxième équation on tire :

$$y_0 = \frac{R_3c}{R},$$

par conséquent, y_0 est positif, c'est-à-dire que le point d'application de la résultante est situé du côté des y positifs. Il est évident que le même raisonnement s'appliquerait dans le cas où l'on prendrait AC ou BC pour axe des x; par suite, le point d'application de la résultante est à l'intérieur du triangle ABC.

REMARQUE. — Dans le cas particulier où les trois points d'appui seraient en ligne droite, on aurait $c = 0$, et les équations restantes :

$$\Sigma Z + R_1 + R_2 + R_3 = 0,$$

$$M - R_2 a - R_3 b = 0,$$

seraient insuffisantes pour déterminer R_1, R_2, R_3.

320. Soit maintenant *un corps solide qui s'appuie par un certain nombre de points contre un plan fixe*, que nous prendrons pour plan des xy, l'axe des z étant dirigé du côté du plan où se trouve le corps solide. Les réactions du plan fixe aux différents points de contact sont normales à ce plan, donc parallèles à l'axe Oz; de plus, puisque nous supposons le corps simplement appuyé, elles sont dirigées dans le sens des z positifs.

Nous pouvons considérer le corps comme libre, en joignant aux forces P, P', P'',... les réactions des points d'appui que nous désignerons par R_1, R_2,... R_n. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ les coordonnées de ces points d'appui. En appliquant les six équations d'équilibre d'un corps libre, nous aurons :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + R_1 + R_2 + \ldots + R_n = 0,$$

$$L + R_1 y_1 + R_2 y_2 + \ldots + R_n y_n = 0,$$

$$M - R_1 x_1 - R_2 x_2 - \ldots - R_n x_n = 0,$$

$$N = 0.$$

Les deux premières et la dernière sont les seules qui ne renferment que les données du problème : ce sont donc les conditions d'équilibre. Elles expriment que les forces données ont une résultante unique, puisque l'on a identiquement :

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0.$$

De plus, puisque $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, cette résultante est parallèle à l'axe des z ; par conséquent, elle est normale au plan. Les trois autres équations expriment les relations entre les données du problème et les réactions des points d'appui. Ces équations étant au nombre de trois, il s'ensuit qu'elles ne peuvent servir à déterminer que trois inconnues. Si donc le nombre des points d'appui est supérieur à trois, le problème sera indéterminé. D'ailleurs, l'équation $\Sigma Z + R_1 + R_2 + ... + R_n = 0$, nous apprend que la résultante des forces données, ou ΣZ, est négative.

PROPRIÉTÉ. — *Le point d'application de la résultante des forces données est situé à l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui, c'est-à-dire du contour que l'on obtient en supprimant les parties rentrantes du polygone effectif.*

Pour démontrer cette propriété, désignons par — R la résultante des forces P, P', P″,... laquelle est négative, et par x_0, y_0 les coordonnées du point où elle rencontre le plan des xy, l'axe des x passant par deux des points d'appui A et B, de telle manière que tous les autres points d'appui soient situés du côté des y positifs. Il y aura évidemment équilibre entre les forces R_1, R_2,.... R_n et la force — R, et nous aurons les équations suivantes :

$$-R + R_1 + R_2 + \dots + R_n = 0,$$

$$-Ry_0 + R_3y_3 + R_4y_4 + \dots + R_ny_n = 0,$$

$$Rx_0 - R_1x_1 - R_2x_2 - \dots - R_nx_n = 0;$$

de la deuxième on tire :

$$y_0 = \frac{R_3y_3 + R_4y_4 + \dots + R_ny_n}{R}.$$

Par conséquent, y_0 est positif, c'est-à-dire que le point d'application de la résultante est situé du même côté de la droite AB que les autres sommets du polygone. On pourrait appliquer le même raisonnement en prenant pour axe des x un côté quelconque du polygone laissant les autres sommets d'un même côté. Par conséquent, le point d'application de la résultante est à l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui.

CHAPITRE VI.

Théorie du centre de gravité.

321. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes prennent un mouvement vers l'intérieur de la terre, dans une direction perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. Cette direction s'appelle *la verticale*. Quand ils sont retenus, ils exercent une pression sur l'obstacle qui les retient. La force qui sollicite tous les corps vers le centre de la terre, exerce son action d'une manière continue. La cause de ces phénomènes est la *pesanteur* ou *gravité*. Le mouvement que la pesanteur communique aux corps est *rectiligne* et *uniformément varié* : on en conclut que *la pesanteur est une force constante* (n° **189**). Cette force est dirigée suivant la verticale; elle change de *direction* avec la position du point considéré à la surface de la terre, et elle agit de haut en bas : son *intensité* change quand on s'éloigne ou qu'on s'approche du centre. Ces variations sont insensibles pour des points peu éloignés les uns des autres ; par suite, pour des points peu éloignés, on peut considérer les forces comme parallèles.

On trouve que *l'accélération* du mouvement dû à la pesanteur *a la même valeur pour tous les corps* en un même lieu, et, par conséquent, pour tous les points matériels ; cette valeur est 9,8088 à Paris ; elle est égale à la vitesse acquise au bout d'une seconde par un corps tombant librement dans le vide. On la désigne par g, et l'on a :

$$g = 9{,}8088.$$

On en conclut que, si p désigne *l'intensité de la pesanteur* sur un point de masse m, on a :

$$p = mg\,;$$

donc, la *force que la pesanteur exerce sur un point matériel, est mesurée par le produit de la masse de ce point et du nombre constant g : elle est donc proportionnelle à la masse.*

322. Si maintenant on considère un corps solide, la pesanteur sollicite les points intérieurs comme les points de la surface du corps. Les dimensions du corps étant très petites par rapport à celles de la terre, il s'ensuit que les forces qui agissent sur les divers éléments d'un corps peuvent être considérées comme sensiblement parallèles. Il résulte de la théorie des forces parallèles (n° **251**) que ces forces ont une résultante unique, parallèle à ces forces, et égale à leur somme. Cette résultante est le *poids du corps*. Elle passe toujours par un point déterminé du corps, et ce point est indépendant de la direction des forces par rapport au corps, ou, ce qui revient au même, du corps par rapport aux forces : c'est *le centre de gravité du corps.*

323. Il résulte de ce qui précède et des lois de la composition des forces parallèles le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on connaît les centres de gravité d'un nombre fini de points massifs isolés, on trouve le centre de gravité du système en appliquant les formules de la composition des forces parallèles.*

Nous aurons donc (n° **307**), en désignant par p le poids d'un point massif, par x, y, z les coordonnées de ce point, par P le poids total du système, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité :

$$\mathrm{P} = \Sigma p, \quad \mathrm{P}x_1 = \Sigma px, \quad \mathrm{P}y_1 = \Sigma py, \quad \mathrm{P}z_1 = \Sigma pz,$$

d'où :

$$x_1 = \frac{\Sigma px}{\mathrm{P}}, \quad y_1 = \frac{\Sigma py}{\mathrm{P}}, \quad z_1 = \frac{\Sigma pz}{\mathrm{P}}.$$

REMARQUE I. — On peut transformer ces formules en introduisant les masses au lieu des poids. En effet, soient m la masse du point (x, y, z), M la masse totale du système, nous aurons, en vertu de la formule $p = mg$:

$$\mathrm{P} = \Sigma mg = g\Sigma m = \mathrm{M}g\ ;$$

donc, *le poids d'un corps quelconque est le produit de sa masse par le nombre constant g.*

Les formules ci-dessus deviennent alors, en supprimant le facteur commun g :

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{\mathrm{M}}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{\mathrm{M}}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{\mathrm{M}}.$$

On voit que ces dernières formules ne renferment plus de traces de l'action de la pesanteur. Il s'ensuit que la restriction que nous avions faite primitivement que les dimensions du corps étaient très petites par rapport à celles de la terre, peut être abandonnée. Les formules précédentes donneront le centre de gravité du système, quelles que soient ses dimensions.

Remarque II. — Si l'on considère un système formé de la réunion de plusieurs corps solides, dont on connaît les centres de gravité respectifs, on pourra déterminer le centre de gravité du système par les formules :

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M},$$

m désignant la masse de l'un des corps du système, x, y, z les coordonnées de son centre de gravité, M la masse totale du système, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du système.

Remarque III. — Si le plan des xy passe par le centre de gravité du système, on aura $z_1 = 0$; par conséquent :

$$\Sigma pz = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma mz = 0.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un système de points massifs, la somme des moments est nulle par rapport à tout plan passant par le centre de gravité du système.*

Remarque IV. — *Si le centre de gravité est sur l'un des axes*, par exemple sur l'axe des z, on a : $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; par suite,

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0.$$

Remarque V. — *Si l'origine est au centre de gravité*, on a : $x_1 = y_1 = z_1 = 0$; par suite,

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma ny = 0, \quad \Sigma mz = 0.$$

Propriétés des centres de gravité.

324. Soit un système de points pesants M, M', M'',... et soit G le centre de gravité de ce système. Nous aurons :

$$Px_1 = \Sigma px, \quad Py_1 = \Sigma py, \quad Pz_1 = \Sigma pz.$$

Cela posé, désignons par r, r', r'',... les distances des points M, M', M'',... à l'origine, et par r_1 la distance du centre de gravité, α, β, γ les angles de r avec les axes, α_1, β_1, γ_1 les angles de r_1 avec les axes ; on a :

$$x_1 = r_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = r_1 \cos\beta_1, \quad z_1 = r_1 \cos\gamma_1,$$

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma.$$

Les formules précédentes nous donnent alors :

$$Pr_1 \cos\alpha_1 = \Sigma pr\cos\alpha,$$

$$Pr_1 \cos\beta_1 = \Sigma pr\cos\beta,$$

$$Pr_1 \cos\gamma_1 = \Sigma pr\cos\gamma.$$

Si le centre de gravité G est pris pour origine, on a $r_1 = 0$, et il vient :

$$\Sigma pr\cos\alpha = 0,$$

$$\Sigma pr\cos\beta = 0,$$

$$\Sigma pr\cos\gamma = 0.$$

De ces formules on conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si sur les droites qui joignent les centres de gravité de différents points massifs au centre de gravité du système, on prend des forces égales à pr, $p'r'$,... ou proportionnelles à ces produits, ces forces se feront équilibre autour du centre de gravité.*

325. En particulier, si les points massifs ont des poids égaux, il vient :

$$\Sigma r \cos\alpha = 0, \quad \Sigma r \cos\beta = 0, \quad \Sigma r \cos\gamma = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère un système de points massifs égaux, et si l'on joint leurs centres de gravité respectifs au centre de gravité du système, des forces représentées en grandeur et direction par ces droites, se feront équilibre autour du centre de gravité du système.*

Réciproquement, *lorsque des forces se font équilibre autour d'un même point, ce point est le centre de gravité d'un système de points également pesants placés aux extrémités des droites représentatives de ces forces.*

En effet, soient F, F', F'',... les forces qui se font équilibre autour du point O, X, Y, Z les composantes de F ; les équations d'équilibre sont :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Or, X, Y, Z sont les coordonnées de l'extrémité de la force F : si p est le poids du point pesant placé à l'extrémité de chacune des forces, les coordonnées du centre de gravité du système de points pesants sont données par les formules :

$$x_1 = \frac{\Sigma p X}{\Sigma p} = \frac{p \Sigma X}{\Sigma p} = 0,$$

$$y_1 = \frac{\Sigma p Y}{\Sigma p} = \frac{p \Sigma Y}{\Sigma p} = 0,$$

$$z_1 = \frac{\Sigma p Z}{\Sigma p} = \frac{p \Sigma Z}{\Sigma p} = 0.$$

Donc, le centre de gravité du système de points est à l'origine, c'est-à-dire au point d'application des forces F, F', F''...

326. Proposons-nous maintenant de trouver *la relation qui existe entre les distances d'un certain nombre de points massifs à un point fixe, leurs distances mutuelles, et la distance du centre de gravité au point fixe.*

Reprenons les formules :

$$\mathrm{P}x_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots,$$

$$\mathrm{P}y_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots,$$

$$\mathrm{P}z_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots;$$

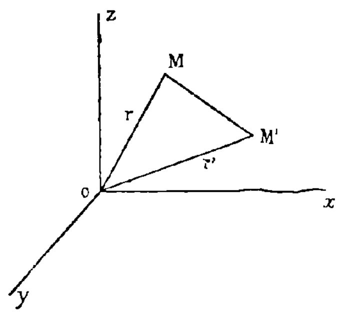
élevons au carré, et ajoutons, il vient :

$$\mathrm{P}^2 r_1^2 = p^2 r^2 + p'^2 r'^2 + p''^2 r''^2 + \ldots$$
$$+ 2pp'(xx' + yy' + zz') + 2pp''(xx'' + yy'' + zz'') + \ldots$$
$$+ 2p'p''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \ldots$$

Or, on a (fig. 104) :

$$\overline{MM'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz');$$

Fig. 104.



d'où :

$$2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \overline{MM'}^2.$$

Par suite,

$$P^2r_1^2 = p^2r^2 + p'^2r'^2 + p''^2r''^2 + ..$$
$$+ pp'(r^2 + r'^2 - \overline{MM'}^2) + pp''(r^2 + r''^2 - \overline{MM''}^2) + ..$$
$$+ p'p''(r'^2 + r''^2 - \overline{M'M''}^2) + ...$$

ou bien :

$$P^2r_1^2 = pr^2(p + p' + p'' + ...) + p'r'^2(p + p' + p'' + ...)$$
$$- pp'.\overline{MM'}^2 - pp''.\overline{MM''}^2 - p'p''.\overline{M'M''}^2 - ...$$
$$= P\Sigma pr^2 - \Sigma pp'\delta^2,$$

en désignant par δ la distance entre deux quelconques des points donnés.

Si l'on remplace les poids par les masses, il vient :

$$Mr_1^2 = \Sigma mr^2 - \frac{\Sigma mm'\delta^2}{M},$$

d'où :

$$\Sigma mr^2 = Mr_1^2 + \frac{\Sigma mm'\delta^2}{M}.$$

Donc, *la somme des produits que l'on obtient en multipliant la masse de chaque point matériel par le carré de sa distance au point fixe est égale au produit de la masse entière concentrée au centre de gravité par le carré de la distance du centre de gravité au point fixe, augmenté du rapport de la somme des produits des masses deux à deux par le carré de leur distance, divisée par la masse totale du système.*

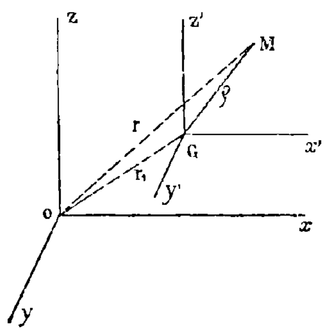
REMARQUE I. — Dans la formule qui précède, le second membre se compose de deux parties : la seconde est indépendante du point fixe O, la première ne dépend que de la distance OG du centre de gravité du système au point O. Il en résulte donc que Σmr^2 sera constant, lorsque $r_1 = const.$; donc, *la somme Σmr^2 reste constante lorsque l'origine* O *se déplace sur une sphère ayant son centre au centre de gravité du système.*

REMARQUE II. — De cette même formule, il résulte encore que Σmr^2 *sera minimum* pour $r_1 = 0$, c'est-à-dire *lorsque l'origine* O *coïncidera avec le centre de gravité du système.*

327. PROPRIÉTÉ. — *La somme des produits des masses des différents points du système par les carrés* *de leurs distances à un point fixe, est égale à la même somme prise par rapport au centre de gravité* G, *augmentée du produit de la masse entière, supposée concentrée au centre de gravité, par le carré de la distance* r_1 *du centre de gravité au point fixe* O.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité G (fig. 105), par x, y, z les coordonnées du point M par rapport au point fixe O, et par x', y', z' les coordonnées de ce point M par rapport à trois axes parallèles passant par le centre de gravité G ; nous aurons :

Fig. 105.



$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y',$$

$$z = z_1 + z' ;$$

par suite :

$$\Sigma mr^2 = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \Sigma m [(x_1 + x')^2 + (y_1 + y')^2 + (z_1 + z')^2]$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \Sigma m + \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$+ 2x_1 \Sigma mx' + 2y_1 \Sigma my' + 2z_1 \Sigma mz'.$$

Or, l'origine des coordonnées x', y', z' étant au centre de gravité, on a (n° **323**) :

$$\Sigma mx' = 0, \quad \Sigma my' = 0, \quad \Sigma mz' = 0 ;$$

par conséquent, il vient, en désignant par ρ la distance du point M au centre de gravité, et par r_1 la distance OG :

$$\Sigma m r^2 = M r_1^2 + \Sigma m \rho^2,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Remarque. — En combinant cette formule avec la précédente, on a la relation :

$$M \Sigma m \rho^2 = \Sigma m m' \delta^2.$$

Centre de gravité d'un solide invariable.

328. Un corps solide étant un assemblage de molécules placées à distance les unes des autres, il s'ensuit que nous pourrions obtenir le centre de gravité d'un corps au moyen des formules précédentes, si nous pouvions déterminer les masses des différentes molécules. Mais cette détermination n'étant pas possible, nous serons obligés de transformer nos formules.

A cet effet, nous allons rappeler quelques notions dont nous aurons à faire usage.

On dit qu'un corps est *homogène*, lorsqu'il présente dans tous les sens une constitution physique identique. Dans un corps homogène, des volumes égaux ont des poids égaux : pour deux corps homogènes différents, le poids est différent pour des volumes égaux.

Le *poids spécifique* d'un corps homogène est le poids de l'unité de volume : c'est le rapport du poids d'un certain volume à ce volume. En désignant par ϖ le poids spécifique d'un corps homogène, on a $\varpi = \frac{P}{V}$. L'unité de poids est le gramme, ou le poids d'un centimètre cube d'eau distillée : *le poids spécifique d'un corps homogène est donc le nombre de grammes que pèse un centimètre cube de la substance qui constitue ce corps.*

La *densité* d'un corps homogène est le rapport de la masse qu'il renferme sous un volume quelconque à ce volume. Si donc ρ désigne la densité d'un corps homogène, V son volume, nous aurons :

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \text{d'où} \quad M = V\rho.$$

Dans les *corps hétérogènes*, le poids n'est pas proportionnel au volume. On considère alors un élément très petit du corps, et le rapport du poids de cet élément à son volume est le *poids spécifique moyen* de cet élément. Si le volume de l'élément tend vers zéro, ce rapport tend vers une limite qui est le *poids spécifique* du corps *en un point* de ce corps où se trouve l'élément. Si la nature de la substance varie d'une manière continue, le *poids spécifique est une fonction continue des coordonnées* des différents points. Le poids spécifique en un point (x, y, z) est donc une fonction des coordonnées de ce point.

De la même manière, le rapport de la masse d'un élément du corps à son volume est la *densité moyenne* de cet élément, et l'on appelle *densité* d'un corps *en un point* (x, y, z) la limite du rapport précédent, lorsque le volume de l'élément renfermant ce point tend vers zéro. La *densité* d'un corps en un point (x, y, z) *est* donc *une fonction continue des coordonnées* de ce point. Pour les corps homogènes, cette fonction se réduit à une constante.

329. Ces principes établis, pour trouver le centre de gravité d'un corps solide, on conçoit que *la matière qui compose le corps soit continue*, c'est-à-dire qu'elle soit répandue dans la totalité de l'espace représenté par son volume apparent. Cette hypothèse n'a pour effet que de déplacer de quantités infiniment petites les points d'application des forces, et il n'en résultera aucune erreur appréciable dans les résultats. Cela posé, on suppose le corps décomposé en éléments très petits, *chacun de ces éléments étant complètement rempli de matière*. Soit $d\omega$ le volume d'un élément, la masse de cet élément sera $\rho d\omega$, en désignant par ρ la densité au point (x, y, z) où se trouve cet élément. D'ailleurs, à cause de la petitesse de l'élément, on peut regarder x, y, z comme ayant les mêmes valeurs en tous les points de cet élément.

Nous aurons ainsi, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du corps, les formules suivantes :

$$M=\int \rho d\omega,\quad Mx_1=\int \rho x d\omega,\quad My_1=\int \rho y d\omega,\quad Mz_1=\int \rho z d\omega.$$

Dans le cas particulier où le *corps* est *homogène*, ρ est constant, et il vient, en désignant par V le volume du corps :

$$M=\rho\int d\omega=\rho V,\quad x_1=\frac{\int x d\omega}{V},\quad y_1=\frac{\int y d\omega}{V},\quad z_1=\frac{\int z d\omega}{V}.$$

Remarque. — Il est facile de trouver la *relation* qui existe entre le poids *spécifique* ϖ et la *densité* ρ. En effet, $d\omega$ étant le volume d'un élément, le poids de cet élément sera $\varpi d\omega$ ou bien $g\rho d\omega$. On a donc :

$$\varpi = g\rho.$$

330. Il existe certains théorèmes qui permettent de simplifier la recherche du centre de gravité d'un solide homogène :

1° *Si la surface d'un corps est symétrique par rapport à un plan* P, *le centre de gravité est situé dans ce plan de symétrie.* Imaginons une série de droites parallèles et infiniment voisines dans le plan de symétrie P, puis un autre système de droites parallèles entre elles, et perpendiculaires aux premières. Nous découpons ainsi le plan en rectangles infiniment petits. Cela posé, considérons ces rectangles comme bases de prismes droits prolongés des deux côtés du plan, puis coupons ces prismes par des plans parallèles au plan P, infiniment voisins et *symétriques par rapport à ce plan de part et d'autre.* Nous aurons ainsi décomposé le solide en éléments symétriques deux à deux par rapport au plan P : or, deux éléments symétriques ayant même volume et même poids, le point d'application de la résultante de ces deux poids sera au milieu de la droite qui joint ces éléments, et, par conséquent, dans le plan de symétrie. Nous aurons donc, en résumé, une série de résultantes partielles ayant leurs points d'application dans le plan P. Par conséquent, le point d'application de la résultante de ces résultantes partielles, ou le centre de gravité du solide sera dans le plan P.

2° *Si la surface d'un corps a un plan diamétral, le centre de gravité du solide est dans ce plan.*

La démonstration de cette propriété est analogue à la précédente.

3° *Si la surface d'un corps a un axe de symétrie, le centre de gravité du corps est sur cet axe.*

Il est évident que l'on peut décomposer le corps en éléments qui seront deux à deux de même poids et symétriques par rapport à l'axe. Or, la résultante des poids de deux éléments symétriques aura son point d'application sur cet axe. Nous aurons ainsi une série de résultantes ayant leurs points d'application sur l'axe ; donc, le centre de gravité du corps sera sur cet axe.

4° *Si la surface d'un corps a un centre de figure, le centre de gravité coïncide avec ce centre de figure.*

En effet, on peut décomposer le corps en éléments qui sont deux à deux égaux et symétriquement placés par rapport au centre de figure. Or, la résultante des poids de deux éléments symétriques aura son point d'application au centre de figure ; donc, le centre de gravité du corps sera en ce point.

Centre de gravité des lignes et des surfaces.

331. Les surfaces et les lignes ne peuvent avoir de poids. Cependant, on considère souvent le centre de gravité d'une ligne ou d'une surface. A cet effet, on suppose la ligne ou la surface comme étant matérielle par la considération suivante : supposons qu'un solide s'étende suivant un plan, ou suivant une surface courbe quelconque, et qu'il présente partout une épaisseur très petite dans le sens de la normale à la surface plane ou courbe. On pourra faire abstraction de l'épaisseur, et imaginer toute la matière qui compose ce corps solide comme répandue sur la surface plane ou courbe.

La surface sera ainsi considérée comme matérielle, et, par conséquent, comme ayant un centre de gravité.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à une ligne droite ou courbe.

Le centre de gravité d'une ligne ou d'une surface est donc le centre de gravité d'un système de points matériels qui seraient répartis sur la ligne ou la surface. Pour pouvoir déterminer le centre de gravité, on devrait *connaître la loi de répartition de la matière* sur la ligne ou sur la surface. On suppose ordinairement *la ligne ou la surface homogène*, c'est-à-dire que tous les éléments de même étendue renferment la même quantité de matière.

332. CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE LIGNE. — Désignons par S la longueur totale de la ligne, et par ds la longueur de l'élément. La ligne étant supposée homogène, les poids et les masses des différents éléments sont proportionnels à leurs longueurs, et nous aurons :

$$S = \int ds, \quad Sx_1 = \int x ds, \quad Sy_1 = \int y ds, \quad Sz_1 = \int z ds.$$

Si la courbe est rapportée à trois axes rectangulaires, on a :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ étant les dérivées de y et de z, par rapport à x, fournies par les équations de la courbe proposée. Les limites des intégrales se rapportent aux extrémités de l'arc donné.

Si la courbe est plane, il est évident que son centre de gravité est situé dans son plan. Les coordonnées x_1, y_1

du centre de gravité, rapportées à deux axes rectangulaires pris dans le plan de la courbe, sont données par les formules :

$$S = \int ds, \quad Sx_1 = \int x ds, \quad Sy_1 = \int y ds,$$

dans lesquelles on a :

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Remarque. — On pourra d'ailleurs profiter des règles données précédemment (n° **330**), pour simplifier dans certains cas la recherche du centre de gravité.

333. Centre de gravité d'une surface. — Si la surface est plane, il est évident que le centre de gravité est situé dans son plan : à cause de l'homogénéité de la surface, les poids et les masses des divers éléments sont proportionnels à leurs aires. Si donc nous désignons par A l'aire de la surface, nous aurons :

$$A = \int\int dx dy, \quad Ax_1 = \int\int x\, dx dy, \quad Ay_1 = \int\int y\, dx dy\,;$$

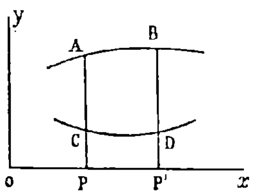
ces intégrales s'étendent à tous les éléments compris dans l'intérieur du contour donné.

Si l'aire est comprise entre une courbe, l'axe des x et deux ordonnées, les limites de y sont 0 et y, celles de x sont les abscisses x_0 et x des points extrêmes. D'ailleurs, en effectuant l'intégration relative à y, on a :

$$A = \int_{x_0}^{x} y dx, \quad Ax_1 = \int_{x_0}^{x} xy dx, \quad Ay_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y^2 dx.$$

Si l'aire A est comprise entre deux courbes données (fig. 106), les formules sont :

Fig. 106.



$$A = \int_{x_0}^{x} (Y - y)\, dx,$$

$$Ax_1 = \int_{x_0}^{x} (Y - y)\, x\, dx,$$

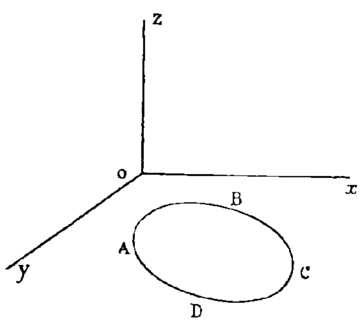
$$Ay_1 = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (Y^2 - y^2)\, dx,$$

Y et y étant les ordonnées des deux courbes, correspondant à une même abscisse.

Remarque. — On pourra d'ailleurs profiter des règles que nous avons énoncées précédemment (n° **330**).

334. Lorsque la surface dont on veut trouver le centre de gravité n'est pas plane, on la rapporte à trois axes coordonnés. Soit donc une portion de surface courbe limitée par un contour qui se projette en ABCD sur le plan des xy (fig. 107), et supposons cette surface homogène : nous la décomposerons en éléments par des plans perpendiculaires respectivement à Ox et Oy. A cause de l'homogénéité, les masses des différents éléments de la surface sont proportionnels à leurs aires. Si donc on désigne par A l'aire totale de la surface, et par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, nous aurons les formules :

Fig. 107.



$$A = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

$$Ax_1 = \int\int x \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

$$Ay_1 = \int\int y \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

$$Az_1 = \int\int z \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy.$$

Les limites de ces intégrales se déterminent comme dans le problème des aires du calcul intégral. Elles s'étendent à la partie ABCD du plan des xy sur laquelle la surface se projette.

Remarque. — Il est évident que l'on pourra faire usage des règles démontrées (nº **330**).

Centre de gravité des volumes.

335. Soit un corps compris sous une surface fermée dont l'équation rapportée à trois axes rectangulaires est :

$$F(x, y, z) = 0.$$

Décomposons le corps en éléments infiniment petits par trois systèmes de plans parallèles aux plans coordonnés ; l'élément de volume sera un parallélipipède rectangle ayant pour arêtes les différentielles dx, dy, dz des coordonnées d'un point du corps, c'est-à-dire les distances qui séparent deux plans consécutifs de chacun des systèmes. Le volume de cet élément sera $dxdydz$, et sa masse $\rho dxdydz$, en désignant par ρ la densité du corps au point (x, y, z).

Nous aurons donc les formules suivantes :

$$M = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$Mx_1 = \int\int\int \rho x\, dx\, dy\, dz,$$

$$My_1 = \int\int\int \rho y\, dx\, dy\, dz,$$

$$Mz_1 = \int\int\int \rho z\, dx\, dy\, dz,$$

dans lesquelles on devra remplacer ρ par la fonction de x, y, z, qui exprime la densité du corps.

Quant aux limites de ces intégrales, elles se déterminent comme dans le calcul intégral pour le volume d'un corps.

Cas particulier. — Si le corps est homogène, ρ est constant, et les formules se simplifient. En désignant par V le volume du corps, on a :

$$M = \rho\int\int\int dx\, dy\, dz = \rho V,$$

$$Vx_1 = \int\int\int x\, dx\, dy\, dz,$$

$$Vy_1 = \int\int\int y\, dx\, dy\, dz,$$

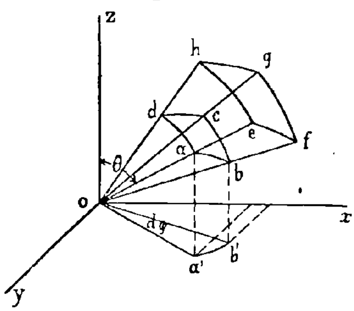
$$Vz_1 = \int\int\int z\, dx\, dy\, dz.$$

On voit, par ces formules, que la position du centre de gravité du solide ne dépend que de la forme de la surface qui le termine. On pourra d'ailleurs simplifier le calcul en faisant usage des règles établies (n° **330**).

REMARQUE. — On peut trouver les coordonnées du centre de gravité d'un corps rapporté à des coordonnées polaires. A cet effet, on prend pour élément de volume du corps, le solide déterminé par deux sphères de rayons r et $r + dr$, deux plans passant par l'axe des z et faisant des angles φ et $\varphi + d\varphi$ avec le plan des zx, et les rayons faisant des angles θ et $\theta + d\theta$ avec l'axe des z (fig. 108).

D'après cela, l'élément de volume sera $abcdefgh$, et nous aurons :

Fig. 108.



$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi ;$$

d'autre part,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = r \cos\theta.$$

Les formules qui déterminent le centre de gravité sont donc :

$$V = \int\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$Vx_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\theta \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$Vy_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\theta \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

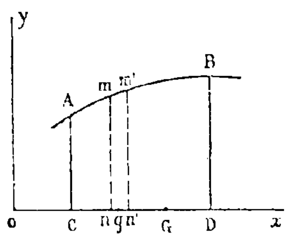
$$Vz_1 = \int\int\int r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi ;$$

les limites de ces intégrales se déterminent comme dans le cas des volumes des corps.

Centre de gravité des corps de révolution.

336. Centre de gravité d'un volume de révolution. — Proposons-nous de trouver le centre de gravité du volume engendré par l'aire ABCD tournant autour de l'axe des x (fig. 109). Ce centre de gravité sera évidemment situé sur l'axe des x, qui est un axe de symétrie (n° **330**) ; par conséquent, il suffit de déterminer l'abscisse de ce point G. Nous décomposerons le volume total en volumes élémentaires engendrés par des rectangles élémentaires tels que $mm'nn'$, tournant autour de l'axe des x.

Fig. 109.



Or, le volume de cet élément est $\pi y^2 dx$; son centre de gravité est aussi sur l'axe des x, en un point g, et l'on a $Og = x$. La masse de cet élément est $\pi\rho y^2 dx$; son moment par rapport à un plan passant par Oy et perpendiculaire à l'axe des x est $\pi\rho x y^2 dx$: la somme des moments des éléments est $\pi\int_\alpha^\beta \rho x y^2 dx$, en posant OC $= \alpha$, et OD $= \beta$. La masse du corps étant égale à $\pi\int_\alpha^\beta \rho y^2 dx$, son moment par rapport au même plan est $\pi x_1 \int_\alpha^\beta \rho y^2 dx$. Nous aurons donc la formule suivante :

$$\pi x_1 \int_\alpha^\beta \rho y^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta \rho x y^2 dx :$$

d'où l'on tire :

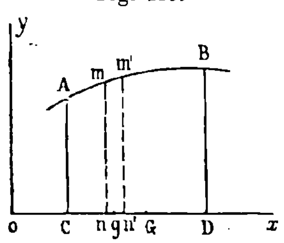
$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta \rho x y^2 dx}{\int_\alpha^\beta \rho y^2 dx}.$$

Si le corps est homogène, il vient :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta x y^2 dx}{\int_\alpha^\beta y^2 dx}.$$

337. Centre de gravité d'une surface de révolution. — Soit à trouver le centre de gravité de la surface de révolution engendrée par l'arc AB tournant autour de l'axe des x (fig. 110). Le centre de gravité sera évidemment sur l'axe des x qui est un axe de symétrie (n° **330**). Par conséquent, il suffit de déterminer l'abscisse de ce point G. Considérons l'aire élémentaire décrite par l'arc $mm' = ds$, tournant autour de l'axe des x : le centre de gravité de cette aire est sur l'axe des x, en un point g, et l'on a $Og = x$.

Fig. 110.



Or, la surface engendrée par l'élément $mm' = ds$ est égale à $2\pi yds$, et sa masse est $2\pi\rho yds$: son moment par rapport à un plan passant par Oy et perpendiculaire à l'axe des x est $2\pi\rho xyds$. La somme des moments des éléments est $2\pi\int_\alpha^\beta \rho xyds$. Mais la masse totale étant égale à $2\pi\int_\alpha^\beta \rho yds$, son moment par rapport au même plan est $2\pi x_1\int_\alpha^\beta \rho yds$. Nous aurons donc la formule :

$$2\pi x_1\int_\alpha^\beta \rho yds = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho xyds\ ;$$

d'où :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta \rho xyds}{\int_\alpha^\beta \rho yds}.$$

Si la surface est homogène, il vient :

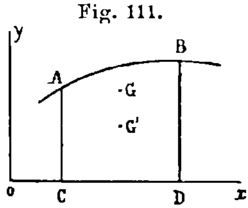
$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xyds}{\int_\alpha^\beta yds}.$$

Théorèmes de Guldin.

338. Théorème I. — *L'aire engendrée par un arc de courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égale au produit de la longueur de cet arc, multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

Soit G le centre de gravité de l'arc AB = S (fig. 111) ; nous aurons en désignant par y_1 la distance de ce point G à l'axe des x (n° **332**) :

Fig. 111.



$$Sy_1 = \int_\alpha^\beta yds,$$

α et β étant les abscisses des points A et B.

Multipliant les deux membres par 2π, il vient :

$$2\pi y_1 \,.\, S = 2\pi \int_\alpha^\beta yds \,;$$

or, le second membre est précisément l'expression de l'aire décrite par l'arc AB, tournant autour de l'axe des x, et l'on voit que cette aire est égale à l'arc S, multiplié par la circonférence $2\pi y_1$ décrite par son centre de gravité.

339. Théorème II. — *Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal au produit de cette aire, multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

Soit G′ le centre de gravité de l'aire ABCD = A (fig. 111). Nous aurons, en désignant par y_1 la distance de ce point G′ à l'axe des x (n° **333**) :

$$Ay_1 = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2 dx,$$

α, β étant les abscisses des points A et B.

Multipliant les deux membres par 2π, il vient :

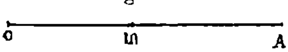
$$2\pi y_1 \,.\, A = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx\,;$$

or, le second membre est l'expression du volume décrit par l'aire ABCD tournant autour de l'axe des x, et l'on voit que ce volume est égal à l'aire A, multipliée par la circonférence $2\pi y_1$ décrite par son centre de gravité.

Applications du centre de gravité.

340. 1° Centre de gravité d'une ligne droite homogène. — Soit une droite OA = l, et m un point de cette droite, x sa distance à l'origine O (fig. 112). Nous aurons évidemment :

Fig. 112.



$$lx_1 = \int_0^l x dx = \frac{l^2}{2},$$

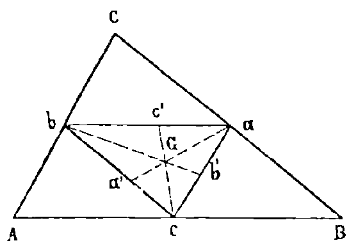
d'où :

$$x_1 = \frac{l}{2}.$$

Donc, le centre de gravité est au milieu de la droite OA.

2° Centre de gravité du contour d'un triangle. — Soient l, m, n les poids des côtés appliqués en leurs milieux a, b, c (fig. 113), a', b', c' les points d'application des résultantes des poids m, n ; l et n ; m et l. Il est évident que le centre de gravité est au point d'intersection des droites aa', bb', cc', et il est facile de voir que ces droites sont les bissectrices des angles a, b, c.

Fig. 113.



On a, en effet :

$$bc' : ac' = l : m = \text{CB} : \text{AC} = bc : ac\,;$$

de même, on aurait :

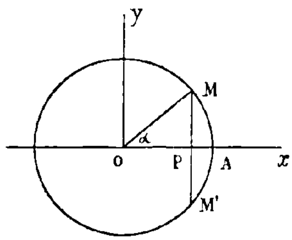
$$ba' : ca' = ab : ac,$$

$$ab' : cb' = ab : cb.$$

Il résulte de là que les droites aa', bb', cc' sont les bissectrices du triangle abc : par conséquent, le centre de gravité est le centre du cercle inscrit dans le triangle abc.

3° CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ARC DE CERCLE. — Soit l'arc MAM' $= 2l$ (fig. 114). Le centre de gravité est évidemment sur le rayon OA, perpendiculaire au milieu de la corde MM', rayon que nous prendrons pour axe des x (n° **330**). Nous aurons donc :

Fig. 114.



$$x_1 = \frac{\int_x^R x\,ds}{\int_x^R ds};$$

or, de l'équation :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

d'où :

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{R\,dx}{y} = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Par suite,

$$x_1 = \frac{\int_x^R \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{\int_x^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\arccos \frac{x}{R}}.$$

Mais, on a :

$$MP = \sqrt{R^2 - x^2},$$

d'autre part :

$$x = R\cos\alpha, \quad \text{d'où :} \quad \alpha = \arccos\frac{x}{R},$$

et, comme on a aussi :

$$AM = R\alpha = l,$$

il vient :

$$\arccos\frac{x}{R} = \frac{l}{R}.$$

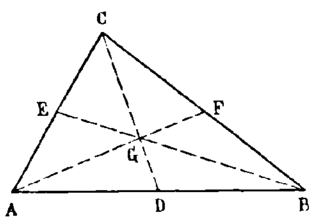
Par conséquent,

$$x_1 = \frac{MP \times R}{l} = \frac{2MP \times R}{2l} = \frac{MM' \times R}{2l}.$$

On en conclut que la distance du centre de gravité au centre du cercle est une quatrième proportionnelle à l'arc, la corde et au rayon.

4° Centre de gravité de l'aire d'un triangle. — Soit un triangle ABC (fig. 115) dont il s'agit de trouver le centre de gravité. La médiane CD est un diamètre qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à AB. Donc, le centre de gravité de l'aire du triangle est sur cette droite (n° **330**) ; il est évident que le centre de gravité se trouve aussi sur les deux médianes BE et AF. Il est donc au point de rencontre des trois médianes.

Fig. 115.



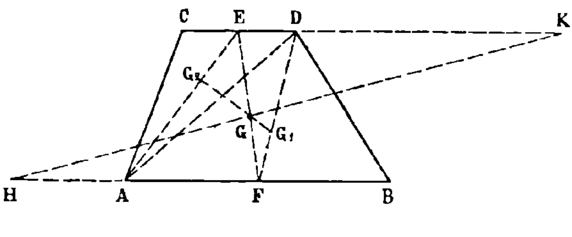
Il résulte de là que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé, et aux deux tiers de cette droite à partir du sommet.

5° Centre de gravité dun polygone. — Un polygone pouvant être décomposé en triangles au moyen de diagonales partant d'un même sommet, il suffira de considérer les centres de gravité de ces triangles comme les points d'application de forces parallèles, dirigées dans le même sens, et proportionnelles aux aires de ces triangles. Le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité cherché.

6° Centre de gravité d'un rectangle. — Le rectangle ayant un centre de figure, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure.

7° Centre de gravité d'un trapèze. — Soit le trapèze ABCD (fig. 116) : menons la diagonale AD qui

Fig. 116.



divise le trapèze en deux triangles, dont les centres de gravité sont sur DF et AE aux points G_1 et G_2.

Le point G qui divise la droite G_1G_2 en deux segments inversement proportionnels aux surfaces des triangles ABD et ACD, sera le centre de gravité du trapèze.

On peut facilement trouver une construction géométrique du centre de gravité cherché : en effet, EF est un diamètre qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à AB ; par conséquent, le centre de gravité est sur cette droite EF : il est donc à l'intersection de EF et de G_1G_2. Cela posé, désignons par x, y les distances du point G aux deux bases, et appliquons le théorème des moments aux forces parallèles appliquées en G_1 et G_2, et qui représentent les aires des triangles ACD et ADB, et à leur résultante appliquée en G (n° **307**). Nous aurons, en désignant par h la hauteur du trapèze :

$$AB \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} + CD \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{3} = (AB + CD)\frac{h}{2} \cdot x,$$

ou bien :

$$x\,(AB + CD) = \frac{h}{3}\,(AB + 2CD)\,;$$

de même, on a :

$$y\,(AB + CD) = \frac{h}{3}\,(2AB + CD).$$

Par suite,

$$\frac{x}{y} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD}.$$

De cette formule on conclut la construction suivante : Prolongeons le côté AB d'une longueur AH = CD, et le côté CD d'une longueur DK = AB ; le centre de gravité sera à l'intersection des droites HK et EF.

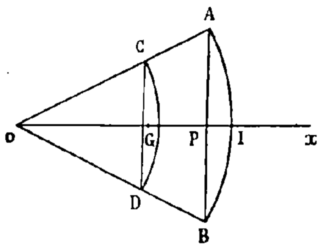
En effet, les triangles FGH et EGK sont semblables, et l'on a :

$$\frac{GF}{GE} = \frac{HF}{EK} = \frac{\frac{1}{2}\,AB + AH}{\frac{1}{2}\,CD + DK} = \frac{\frac{1}{2}\,AB + CD}{\frac{1}{2}\,CD + AB} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD}\,;$$

or, les distances du point G aux deux côtés AB et CD sont respectivement proportionnelles à GF et GE ; par conséquent, le point G sera le centre de gravité.

8° Centre de gravité d'un secteur circulaire. — Soit un secteur circulaire AOB (fig. 117) : le centre de gravité sera évidemment sur la droite Ox (n° **330**).

Fig. 117.



Cela posé, on peut concevoir l'arc AB décomposé en une infinité d'arcs élémentaires égaux, et, par conséquent, le secteur comme décomposé en secteurs infiniment petits correspondant à ces arcs. Or, ces secteurs infiniment petits peuvent être assimilés à des triangles, et tous ces triangles ont leurs centres de gravité sur un arc CD décrit du point O comme centre avec un rayon égal aux deux tiers de OA. Donc, le centre de gravité du secteur sera le point d'application de la résultante d'une infinité de forces égales et parallèles, agissant sur les points de l'arc CD : il coïncidera donc avec le centre de gravité de l'arc CD.

D'après cela, si l'on désigne par R le rayon du secteur, par l la longueur de l'arc AB, par c la corde de cet arc, nous aurons :

$$x_1 = \mathrm{OG} = \frac{\frac{2}{3}\mathrm{R} \cdot \frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}l} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{R}c}{l}.$$

Cas particulier. — Si le secteur est un demi cercle, on a $c = 2\mathrm{R}$, $l = \pi\mathrm{R}$; par conséquent,

$$x_1 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Remarque. — Le secteur AOB étant égal à la somme du triangle AOB et du segment AIB, nous pourrons trouver le centre de gravité du segment AIB, en appliquant le théorème des moments (n° **307**). En posant OP $= a$, on a :

$$\text{surf. secteur} = \tfrac{1}{2}\,Rl, \quad \text{surf. triangle} = \tfrac{1}{2}\,ac,$$

$$\text{surf. segment} = \tfrac{1}{2}\,(Rl - ac)\,;$$

d'ailleurs, les centres de gravité de ces trois surfaces sont situés sur la droite Ox, et les distances des deux premiers au point O sont respectivement égales à $\frac{2}{3}\,\frac{Rc}{l}$ et $\frac{2}{3}\,a$. Donc, en désignant par x_1 la distance du troisième au centre O, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\,Rl \cdot \frac{2}{3}\,\frac{Rc}{l} = \frac{1}{2}\,ac \cdot \frac{2}{3}\,a + \frac{1}{2}\,(Rl - ac)\,x_1\,;$$

d'où l'on tire :

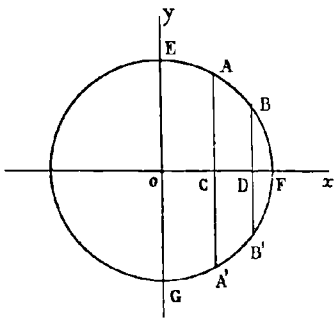
$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(R^2 - a^2)c}{Rl - ac},$$

et, si l'on observe que l'on a : $R^2 - a^2 = \frac{c^2}{4}$, il vient :

$$x_1 = \frac{c^3}{6\,(Rl - ac)}.$$

9° Centre de gravité d'un segment de cercle. — Soit le segment ABCD (fig. 118). Posons $OC = \alpha$, $OD = \beta$; nous aurons :

Fig. 118.



$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xy\,dx}{\int_\alpha^\beta y\,dx},$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2\,dx}{\int_\alpha^\beta y\,dx}.$$

Or, l'équation du cercle étant :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on a, en faisant abstraction de la constante :

$$\int y\,dx = \int \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R},$$

$$\int xy\,dx = \int \sqrt{R^2 - x^2}\,.\,x\,dx = -\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int y^2 dx = \int (R^2 - x^2)\,dx = R^2 x - \frac{x^3}{3};$$

il suffira de remplacer successivement dans ces formules x par β et α, et de substituer dans les expressions de x_1 et y_1.

Cas particuliers. — 1° Si l'on veut le centre de gravité du quart de cercle OEF, on fera $\alpha = 0$, $\beta = R$, et il vient :

$$x_1 = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi}.$$

2° Si l'on veut obtenir le centre de gravité du segment ABA'B', on devra observer qu'il se trouve sur l'axe Ox qui est un axe de symétrie (n° **330**) ; par conséquent, $y_1 = 0$, et l'on appliquera la formule (n° **333**) :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta x(Y-y)\,dx}{\int_\alpha^\beta (Y-y)\,dx},$$

et, comme on a : $Y = -y$, il vient :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xy\,dx}{\int_\alpha^\beta y\,dx}.$$

3° Si l'on veut le centre de gravité du demi cercle EFG, on a :

$$x_1 = \frac{\int_0^R x(Y-y)\,dx}{\int_0^R (Y-y)\,dx} = \frac{4R}{3\pi}.$$

10° Centre de gravité d'un segment sphérique. — Soit le segment sphérique engendré par l'aire ABCD (fig. 118) tournant autour de l'axe des x. Le centre de gravité est évidemment situé sur l'axe des x, qui est un axe de symétrie (n° **330**), et nous aurons la formule :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xy^2dx}{\int_\alpha^\beta y^2dx}.$$

L'équation du cercle étant :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on a :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta x(R^2 - x^2)\,dx}{\int_\alpha^\beta (R^2 - x^2)\,dx} = \frac{3(\alpha + \beta)(2R^2 - \beta^2 - \alpha^2)}{4(3R^2 - \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta)}.$$

Cas particuliers. — Si $\alpha = 0$, il vient :

$$x_1 = \frac{3\beta(2R^2 - \beta^2)}{4(3R^2 - \beta^2)};$$

si $\alpha = 0$, $\beta = R$, on a :

$$x_1 = \frac{3}{8}R,$$

pour l'abscisse du centre de gravité du volume engendré par l'aire OEF tournant autour de l'axe des x, c'est-à-dire de la demi-sphère.

11° CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE ZONE SPHÉRIQUE. — Soit la zône engendrée par l'arc AB (fig. 118) tournant autour de l'axe des x. Le centre de gravité étant sur l'axe des x (n° **330**), on a :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xyds}{\int_\alpha^\beta yds};$$

l'équation du cercle étant :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

il vient :

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta xdx}{\int_\alpha^\beta dx} = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

CAS PARTICULIERS. — Si $\alpha = 0$, on a :

$$x_1 = \frac{\beta}{2};$$

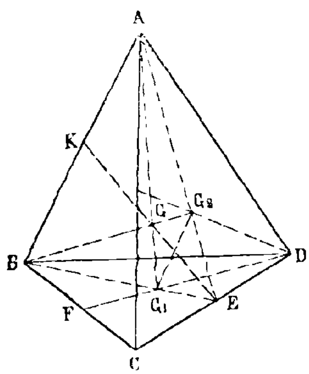
si $\alpha = 0$, $\beta = R$, il vient :

$$x_1 = \frac{R}{2},$$

pour l'abscisse du centre de gravité de la surface de la demi-sphère.

12° Centre de gravité d'une pyramide triangulaire. — Soit ABCD la pyramide donnée (fig. 119); le plan ABE mené par AB et et par le milieu E de CD est évidemment un plan diamétral pour les cordes parallèles à CD. Par conséquent, le centre de gravité de la pyramide devra se trouver dans ce plan (n° **330**). Par la même raison, il doit se trouver dans le plan ADF mené par AD, et par le milieu F de BC : il sera donc sur l'intersection AG_1 de ces deux plans. Or, le point G_1, intersection des médianes BE et DF du triangle BCD est le centre de gravité de ce triangle; par suite, le centre de gravité de la pyramide est sur la droite AG_1 qui joint le sommet A au centre de gravité de la face opposée. Par la même raison, il se trouve sur la droite BG_2 qui joint le sommet B au centre de gravité G_2 de la face opposée ACD : il est donc à l'intersection G des deux droites AG_1 et BG_2. Or, la droite G_1G_2, qui divise les côtés BE et AE du triangle ABE en parties proportionnelles est évidemment parallèle à AB, et égale à $\frac{1}{3}$ AB ; par suite, les deux triangles ABG et GG_1G_2 sont semblables, et

Fig. 119.



l'on a : $GG_1 = \frac{1}{3} AG$, ou bien $GG_1 = \frac{1}{4} AG_1$. Il résulte de là que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.

Remarques. — Le centre de gravité de la pyramide étant dans chacun des plans tels que ABE, on en conclut que les six plans menés par chacune des arêtes, et par le milieu de l'arète opposée se coupent en un même point, qui est le centre de gravité de la pyramide.

Il est évident aussi que les quatre droites qui joignent chacun des sommets de la pyramide au centre de gravité de la face opposée se rencontrent en ce même point.

Il est encore évident que les droites telles que EK, qui joignent les milieux des arètes opposées de la pyramide passent par un même point, et ce point est le milieu de ces droites.

Enfin, il résulte de ce qui précède que le centre de gravité de la pyramide triangulaire coïncide avec le centre de gravité du triangle suivant lequel cette pyramide est coupée par un plan mené parallèlement à la base et à une distance de cette base égale au quart de la hauteur de la pyramide.

13° Centre de gravité d'une pyramide a base quelconque. — On peut décomposer la pyramide en pyramides triangulaires au moyen de plans menés par le sommet et par les diagonales du polygone qui forme la base. Les centres de gravité de ces pyramides sont situés dans un plan parallèle au plan de la base et à une distance de celui-ci égale au quart de la hauteur. Or, ces centres de gravité sont les mêmes que ceux des triangles que le plan sécant détermine dans les diverses pyramides; d'autre part, les volumes de ces pyramides sont évidemment proportionnels aux surfaces de ces triangles.

22

Il s'ensuit que le centre de gravité de la pyramide coïncidera avec celui du polygone déterminé par le plan sécant.

Donc, le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, et au quart de cette droite à partir de la base.

14° Centre de gravité d'un cône. — Il est évidemment situé sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, et au quart de cette droite à partir de la base.

15° Centre de gravité d'un ellipsoïde. — Trouver le centre de gravité du volume compris entre l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les plans coordonnés et un plan quelconque, correspondant à l'abscisse x.

Nous aurons :

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int_0^x dx \int_0^{y'} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy.$$

Pour déterminer la limite supérieure y' de y, cherchons l'intersection de la surface avec le plan des xy ; nous aurons :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

d'où :

$$y' = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

On a donc :

$$V = c\int_0^x dx\int_0^{y'}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Cherchons d'abord l'intégrale relative à y, en posant :

$$\frac{y}{b} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\varphi,$$

d'où :

$$dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos\varphi\, d\varphi.$$

D'ailleurs, pour $y = 0$, on a $\varphi = 0$, et, pour $y = y' = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$: donc, l'intégrale relative à y se transforme en la suivante :

$$b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\varphi\, d\varphi = b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi\ ;$$

par suite,

$$V = bc\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi bc}{4}\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

ou bien :

$$V = \frac{\pi bc}{4}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

On a aussi :

$$Vx_1 = \int\int xz\,dx\,dy = c\int_0^x x\,dx\int_0^{y'}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$= \frac{\pi bcx^2}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right).$$

On en tire :

$$x_1 = \frac{3x(2a^2 - x^2)}{4(3a^2 - x^2)}.$$

On a de même :

$$Vy_1 = \int\int yz\,dx\,dy = c\int_0^x dx\int_0^{y'}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,y\,dy$$

$$= \frac{b^2c}{3}\int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,;$$

or, en posant $x = a\sin\psi$, il vient :

$$\int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = a\int_0^\psi \cos^4\psi\,d\psi$$

$$= a\left\{\frac{3}{8}\psi + \frac{3}{8}\sin\psi\cos\psi + \frac{\sin\psi\cos^3\psi}{4}\right\};$$

d'où :

$$Vy_1 = \frac{ab^2c}{8}\left\{\psi + \sin\psi\cos\psi + \frac{2}{3}\sin\psi\cos^3\psi\right\}.$$

Enfin, on a :

$$Vz_1 = \frac{1}{2}\int\int z^2\,dx\,dy = \frac{c^2}{2}\int_0^x dx\int_0^{y'}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$= \frac{abc^2}{3}\int_0^{\psi}\cos^4\psi\,d\psi,$$

ou bien :

$$Vz_1 = \frac{abc^2}{8}\left\{\psi + \sin\psi\cos\psi + \frac{2}{3}\sin\psi\cos^3\psi\right\}.$$

Cas particuliers. — Si dans les expressions précédentes, on fait $x = a$, et par conséquent, $\psi = \frac{\pi}{2}$, on obtient, pour le volume de la huitième partie de l'ellipsoïde, et pour les coordonnées de son centre de gravité :

$$V = \frac{\pi abc}{6},\quad x_1 = \frac{3a}{8},\quad y_1 = \frac{3b}{8},\quad z_1 = \frac{3c}{8};$$

et, si dans ces dernières formules, on fait $a = b = c$, on obtient pour le volume de la huitième partie de la sphère, et pour les coordonnées de son centre de gravité :

$$V = \frac{\pi a^3}{6},\quad x_1 = \frac{3a}{8},\quad y_1 = \frac{3a}{8},\quad z_1 = \frac{3a}{8},$$

expressions que l'on pourrait facilement trouver par un calcul direct.

16° Centre de gravité de l'aire du cône :

$$z^2 = 2xy,$$

comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Nous aurons :

$$\mathrm{A} = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^b \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2ab}\,(a + b),$$

$$\mathrm{A}x_1 = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\, x\, dx\, dy = \int_0^a x dx \int_0^b \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\, dy$$

$$= 2a\sqrt{2ab}\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{9}\right),$$

$$\mathrm{A}y_1 = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\, y\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^b \frac{(x + y)\, y}{\sqrt{2xy}}\, dy$$

$$= 2b\sqrt{2ab}\left(\frac{a}{9} + \frac{b}{5}\right),$$

$$\mathrm{A}z_1 = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\, z\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^b (x + y)\, dy$$

$$= \frac{ab}{2}(a + b)\,;$$

on en tire :

$$x_1 = \frac{3a}{a+b}\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{9}\right), \quad y_1 = \frac{3b}{a+b}\left(\frac{b}{5} + \frac{a}{9}\right), \quad z_1 = \frac{3\sqrt{ab}}{4\sqrt{2}}.$$

CHAPITRE VII.

Équilibre des systèmes de forme variable.

341. On appelle *fil* ou *cordon* un lien sans pesanteur dont la section transversale est négligeable, et qui est parfaitement flexible et inextensible. Il s'ensuit que la longueur de l'arc formé par le fil entre deux de ses points est invariable, quelles que soient les forces qui agissent pour l'étendre ; mais on peut le courber comme on voudra sans éprouver de résistance.

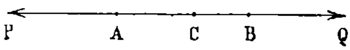
Le problème que nous nous proposons de résoudre consiste à *déterminer la forme d'équilibre d'un fil soumis à des forces données, et à trouver les tensions en ses différents points.*

342. Nous allons entrer dans quelques détails pour expliquer ce que l'on entend par *la tension d'un fil* en un point donné.

Considérons d'abord *deux forces agissant aux extrémités d'une portion rectiligne de cordon.*

Pour que ces forces se fassent équilibre, il faut qu'elles soient égales, directement opposées, et de même direction que le cordon. Il faut, en outre, que leur sens soit tel qu'elles tendent le cordon. En effet, si ces forces n'avaient pas la même direction que le cordon, rien ne les empêcherait de le faire tourner, et si, ayant la direction du cordon, elles ne sont pas égales et de sens contraires, elles auraient pour effet de faire avancer le cordon dans le sens de la plus grande. Il est évident aussi que les deux forces doivent tendre le cordon. Car, si les forces (fig. 120) appliquées en A et B sont dirigées de A vers B, et de B vers A, il n'y aura pas équilibre, *le fil ne pouvant développer aucune résistance qui empêche le rapprochement des points* A *et* B.

Fig. 120.



Par conséquent, pour que les forces se fassent équilibre, il faut que les conditions énoncées plus haut soient satisfaites. On dit alors que *les deux forces se font équilibre par l'intermédiaire du cordon.*

Cela posé, soit C un point quelconque du cordon. Si l'on coupe le cordon en ce point C, il faudra, pour maintenir l'équilibre de la partie AC, introduire en ce point C une force T_1 égale et directement opposée à P. Il s'ensuit que la partie BC du cordon tient lieu de cette force égale et opposée à P. Cette force T_1 s'appelle *la tension* du cordon. De même, pour maintenir l'équilibre de la portion BC, il faudrait introduire au point C une force T_2 égale et directement opposée à Q, et qui, par conséquent, tiendrait lieu de la portion AC. Cette tension T_2 sera donc égale et contraire à T_1.

La tension, dans le cas actuel, est constante dans toute l'étendue du fil AB. Elle est égale à la valeur commune des deux forces P et Q.

En général, si l'on coupe un fil en équilibre en un point, il faudra, pour maintenir l'équilibre, appliquer en ce point deux forces égales et contraires aux extrémités des deux portions séparées par la coupure. Ces deux forces sont *la tension du fil* au point considéré. Ainsi donc, *la tension du cordon en un point est la force qu'il faut appliquer en ce point pour maintenir l'une des portions du fil en équilibre, l'autre portion étant censée supprimée. Cette force tient lieu de la portion du fil supprimée.*

En un point du fil nous avons donc deux tensions, deux forces égales et de sens contraires qui se détruisent dans l'équilibre de l'ensemble du fil, mais qu'il y a lieu de considérer quand on étudie l'équilibre de chaque portion séparément.

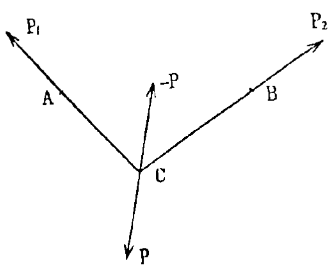
Il résulte de ce qui précède qu'une portion d'un fil en équilibre, est en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées, et des deux tensions aux deux extrémités.

REMARQUE. — On peut mesurer la tension d'un cordon en un de ses points en le coupant en ce point, et interposant un dynamomètre entre les deux parties.

343. PROBLÈME. — *Une force* P *de direction donnée est appliquée en un point* C *d'un fil sans poids* AB. *On demande quelles sont les forces* P_1, P_2 *qu'il faut appliquer suivant la direction des cordons* CA *et* CB *pour qu'il y ait équilibre.*

L'équilibre du cordon AC (fig. 121) exige que la force P_1 dirigée dans le sens du cordon soit égale à la tension T_1 de ce cordon (n° **342**). De même, en tous les points du cordon CB la tension T_2 est égale à P_2. Nous pouvons donc considérer le point C comme un point matériel libre en équilibre sous l'action de la force P et des tensions T_1, T_2 appliquées suivant

Fig. 121.



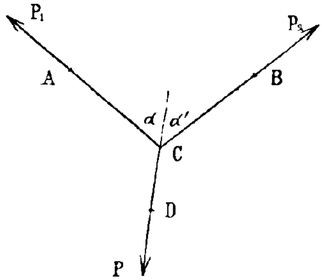
les directions CA et CB. Par conséquent, la force P est égale et contraire à la résultante de P_1 et P_2. Nous aurons donc P_1 et P_2 en décomposant la force — P, égale et opposée à P, suivant les directions CA et CB.

Remarque. — Les tensions des deux cordons sont en général inégales. Ces tensions seront égales lorsque la force P sera la bissectrice de l'angle ACB.

344. Supposons que *la force* P, *au lieu d'être appliquée directement en* C, *soit appliquée dans le prolongement d'un cordon* CD *attaché au point* C.

Le point C (fig. 122) considéré comme libre est en équilibre sous l'action des tensions des cordons AC, CB et CD, tensions qui sont égales (n° **342**) respectivement aux forces P_1, P_2, et P. Chacune de ces forces est donc égale et directement opposée à la résultante des deux autres. On en conclut que, pour qu'il y ait équilibre, les trois cordons doivent être dans un même plan, et l'on a la relation :

Fig. 122.



$$P : P_1 : P_2 = \sin(\alpha + \alpha') : \sin\alpha' : \sin\alpha ;$$

d'où l'on tire :

$$T_1 = P_1 = \frac{P \sin\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')},$$

$$T_2 = P_2 = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

Remarque. — Les tensions T_1 et T_2 sont d'autant plus grandes que sin $(\alpha + \alpha')$ est plus petit. Elles sont infinies pour $\alpha + \alpha' = 180°$. On en conclut que, *quelque petite que soit la force* P *s'exerçant obliquement sur un cordon, il est impossible de tendre ce cordon en ligne droite.*

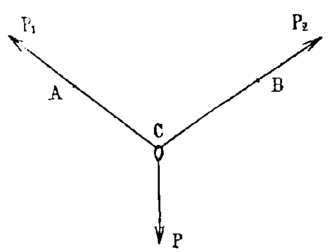
345. Supposons maintenant que l'*on fixe un point* A *du cordon* AC, et proposons-nous de trouver *la traction* que supporte le point A. Cette traction sera évidemment égale à la force P_1 qu'il faudrait appliquer au point A rendu libre, pour maintenir l'équilibre : elle est donc égale à la résultante des forces P_2 et P.

Si l'on fixe également un point B du cordon BC, la traction que supportera le point B sera égale et contraire à P_2.

346. Supposons encore *un cordon* AB, *et au point* C *un anneau dans lequel ce cordon peut glisser librement. Le cordon est tiré des deux côtés par deux forces* P_1 *et* P_2 ; *l'anneau est soumis à l'action d'une force* P. *On demande les conditions d'équilibre.*

Fixons les deux points A et B du cordon (fig. 123), l'un à droite, l'autre à gauche de l'anneau. Dans son mouvement, le point C ne peut que décrire une ellipse dont A et B sont les foyers. Donc, la condition d'équilibre est celle d'un point matériel assujetti à demeurer sur une ellipse. Il faut donc, *pour l'équilibre*, que *la force* P *soit normale à l'ellipse* (n° **227**), c'est-à-dire *bissectrice de l'angle* ACB.

Fig. 123.



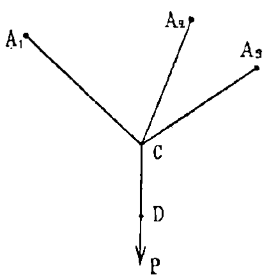
On a d'ailleurs, en désignant l'angle ACB par 2α, et en appliquant les formules précédentes (n° **344**) :

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2\cos\alpha}.$$

347. Si l'on avait un *nombre quelconque de cordons réunis par un nœud*, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre, est que chaque force ait la direction du cordon correspondant, et le sens voulu pour le tendre, et que chaque force soit égale et directement opposée à la résultante des autres.

Si l'on fixe un point sur chacun des cordons, excepté sur un seul CD, on peut se proposer de trouver les tractions que la force P exerce sur les points fixes.

Fig. 124.



S'il n'y a que *trois cordons non situés dans un même plan*, CA_1, CA_2, CA_3, il suffira de décomposer P en trois forces agissant suivant les prolongements de ces cordons (fig. 124).

S'il y a plus de trois cordons, le problème est indéterminé, la force P pouvant être décomposée d'une infinité de manières suivant ces cordons.

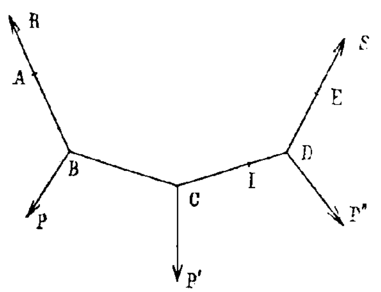
Équilibre du polygone funiculaire.

348. Considérons maintenant le cas général de *l'équilibre d'un cordon soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces appliquées en différents points de ce cordon.*

Ce cordon prendra la forme d'un polygone plan ou gauche dont les sommets seront les points d'application des forces. On lui donne le nom de *polygone funiculaire*. Les différents sommets portent le nom de *nœuds*.

Soit un fil ABCDE en équilibre (fig. 125), et sollicité par des forces P, P′, P″,... R, S, appliquées aux différents nœuds, et aux extrémités. D'après ce que nous avons vu (nº **342**), si l'on coupe un cordon quelconque CD en un point I, par exemple, il faudra, pour maintenir l'équilibre, appliquer en ce point I aux deux portions du fil, deux forces égales et contraires. Ces forces mesurent la tension du fil en ce point I. Lorsque le fil n'est pas coupé, ces deux forces sont détruites par la liaison que le fil établit. Cela posé, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force R agisse dans la direction du premier côté du polygone (ou qu'il y ait un point fixe remplaçant cette force).

Fig. 125.



La tension T_1 du premier cordon doit faire équilibre à cette force R, et, par conséquent, on a :

$$T_1 = R.$$

Pour qu'il y ait équilibre au point B, il faut que la tension T_2 du second côté BC fasse équilibre à la force P et à la tension T_1 appliquée en B. Cette tension T_2 doit donc être égale et directement opposée à la résultante de la force P et de la tension T_1 du premier côté. On peut observer que les trois doites AB, BC et BP sont situées dans un même plan.

De même, pour que le point C soit en équilibre, il faut que la tension T_3 du troisième côté CD fasse équilibre à la force P' et à la tension T_2, appliquée en C. La tension T_3 est donc égale et directement opposée à la résultante des forces T_2 et P', et les trois droites BC, CD et CP' sont dans un même plan.

En continuant de la même manière, on verrait que la tension du dernier côté doit être égale et directement opposée à la résultante de la force appliquée au dernier sommet, et de la tension du côté précédent. Pour que ce dernier côté soit en équilibre, il faut que la force S soit appliquée dans le prolongement de ce côté, et qu'elle soit égale à la tension de ce dernier côté.

On voit donc par ce qui précède, que *la tension en un nœud quelconque est égale en grandeur et en direction à la résultante de la force appliquée en ce nœud, et de la tension du côté adjacent.*

349. Théorème. — *Les forces appliquées à un polygone funiculaire en équilibre, étant transportées en un point quelconque, s'y font équilibre.*

En effet, si le polygone est en équilibre, il sera encore en équilibre, si l'on rend sa figure invariable; par conséquent, les forces qui y sont appliquées doivent satisfaire aux conditions d'équilibre d'un système rigide. Donc, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles doivent donner une résultante nulle.

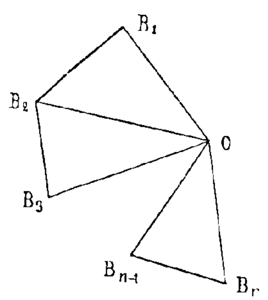
350. Remarque. — Il résulte de ce qui précède que l'on peut, pour définir le polygone funiculaire, donner en grandeur et direction les forces R, P, P′,... et les longueurs AB, BC,... des cordons successifs.

En construisant le contour polygonal ABCD..., on pourra déterminer *en grandeur et direction la dernière force* S qui maintiendra le polygone en équilibre.

On peut d'ailleurs obtenir cette force par la construction suivante :

Par un point quelconque O de l'espace (fig. 126), menons une droite OB_1 parallèle à R ou à T_1, et prenons sur cette droite à une échelle arbitraire une longueur OB_1 égale à la force R. Par le point B_1 menons une droite B_1B_2, égale et parallèle à la force P : il est évident que la droite OB_2 représente la tension T_2 du second côté du polygone. Si, par le point B_2, nous menons B_2B_3 égale et parallèle à P′, en joignant OB_3 nous aurons la tension T_3 du troisième côté, et ainsi de suite. En continuant ainsi, on trouvera que OB_n sera la tension T_n du dernier côté, et, par conséquent, elle sera égale à S.

Fig. 126.



Cette construction n'est autre que celle du polygone des forces R, P, P′,... S; il faut donc pour l'équilibre que le polygone soit fermé. Ce polygone a reçu le nom de *polygone de Varignon.*

Ainsi, les directions des côtés du polygone funiculaire en équilibre sont parallèles aux droites OB_1, OB_2,... partant du point O dans le polygone de Varignon, et ces droites représentent les tensions des côtés du polygone funiculaire. Il faut, en outre, *pour l'équilibre, que chaque côté du polygone funiculaire puisse résister à la tension correspondante.*

351. Théorème. — *La tension d'un cordon quelconque est égale à la résultante de toutes les forces appliquées au polygone funiculaire depuis une de ses extrémités jusqu'au sommet où commence ce cordon, ces forces étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un quelconque des points de ce côté.*

En effet, la portion ABCD (fig. 125), par exemple, est en équilibre sous l'action des forces R, P, P', P'' et T_4 : ces forces ne cesseront pas d'être en équilibre, si l'on rend le polygone ABCD rigide. Par conséquent, la force T_4 est égale et directement opposée à la résultante des forces R, P, P', P''. Comme on peut transporter des forces en un point quelconque de leur résultante, sans changer leur effet, le théorème est démontré.

On peut, d'après ce qui précède, résoudre les deux problèmes suivants :

352. Problème I. — *Déterminer la position d'équilibre d'un cordon, et les tensions de ses côtés, connaissant les forces en grandeur et direction, et les côtés du polygone en grandeur seulement.*

A partir d'un point A, je mène une parallèle à la force R, et je prends une longueur AB égale au premier côté du polygone. Par le point B, je mène une droite égale et parallèle à P, puis je construis un parallélogramme dont P et R sont les côtés, la diagonale sera la tension du côté BC, et elle aura la même direction que ce côté. Je prends donc à partir du point B, et sur le prolongement de la diagonale une longueur BC égale au second côté, puis par le point C, je mène une droite égale et parallèle à P', et ainsi de suite.

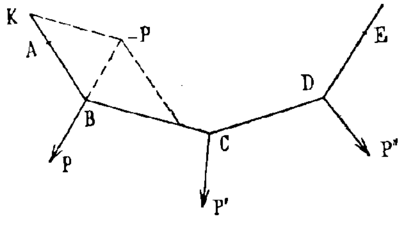
353. Problème II. — *Étant données la forme du polygone funiculaire, et les tensions des côtés, trouver les forces à appliquer aux nœuds pour maintenir l'équilibre.*

Chaque force sera égale et directement opposée à la résultante des tensions des côtés adjacents au nœud considéré.

354. Remarque. — Le plus souvent, au lieu d'être sollicitées par des forces données R et S, *les extrémités du polygone funiculaire sont attachées à deux points fixes* A *et* E. Alors R et S désigneront les réactions des points d'attache sur les cordons extrêmes, réactions qui sont égales et contraires aux tensions de ces cordons. On pourra dans ce cas se proposer, *connaissant la forme d'un polygone funiculaire en équilibre sous l'action de forces données*, P, P', P'',... *de déterminer les tractions exercées sur les deux points fixes.*

Puisque l'on connaît la figure du polygone funiculaire, on connaîtra les directions de ces tractions. Pour déterminer la traction au point A (fig. 127), nous observerons que cette traction est égale à la tension du côté AB, et dirigée suivant ce côté. Or, la force P est égale et directement opposée à la résultante des tensions T_1 et T_2 des deux côtés AB et BC; donc, — P est la résultante de ces tensions. Mais, la forme du polygone étant donnée,

Fig. 127.



on connaît les directions des deux composantes T_1 et T_2. On a donc à décomposer — P suivant deux directions données, et l'on trouve que BK est la tension du côté AB, c'est-à-dire que la traction au point A sera égale en grandeur à BK et dirigée dans le sens AB.

Solution analytique des problèmes précédents.

355. PROBLÈME I. — *Supposons que le polygone ait n côtés. On donne les forces en grandeur et direction. Les inconnues de la question sont les n tensions* $T_1, T_2, \ldots T_n$ *de ces côtés, et leurs directions* $(a_1, b_1, c_1), \ldots (a_n, b_n, c_n)$, *ce qui nous donne 4n inconnues.*

Désignons par $R(\alpha, \beta, \gamma)$, $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, ... $P_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1})$, $S(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ les forces appliquées aux points A, A_1, A_2,... A_{n-1}, E. Les conditions d'équilibre nous donnent les équations suivantes :

1° Au point A :

$$R \cos\alpha + T_1 \cos a_1 = 0,$$

$$R \cos\beta + T_1 \cos b_1 = 0,$$

$$R \cos\gamma + T_1 \cos c_1 = 0 ;$$

2° au point A_1 :

$$P_1 \cos\alpha_1 - T_1 \cos a_1 + T_2 \cos a_2 = 0,$$

$$P_1 \cos\beta_1 - T_1 \cos b_1 + T_2 \cos b_2 = 0,$$

$$P_1 \cos\gamma_1 - T_1 \cos c_1 + T_2 \cos c_2 = 0 ;$$

. . . .

. . . .

au point A_{n-1} :

$$P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} - T_{n-1} \cos a_{n-1} + T_n \cos a_n = 0,$$

$$P_{n-1} \cos \beta_{n-1} - T_{n-1} \cos b_{n-1} + T_n \cos b_n = 0,$$

$$P_{n-1} \cos \gamma_{n-1} - T_{n-1} \cos c_{n-1} + T_n \cos c_n = 0 ;$$

au point E :

$$S \cos \alpha_n - T_n \cos a_n = 0,$$

$$S \cos \beta_n - T_n \cos b_n = 0,$$

$$S \cos \gamma_n - T_n \cos c_n = 0.$$

Nous avons ainsi $n + 1$ groupes de trois équations, c'est-à-dire $3n + 3$ équations. En y joignant les n équations :

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1,$$

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos^2 a_n + \cos^2 b_n + \cos^2 c_n = 1,$$

nous aurons $4n + 3$ équations entre les $4n$ inconnues.

En éliminant les $4n$ inconnues, nous aurons trois équations indépendantes des inconnues. Pour faire cette élimination, il suffit d'ajouter les premières équations de chacun des $n + 1$ premiers groupes, ce qui nous donnera :

$$R \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + \ldots + P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + S \cos \alpha_n = 0 ;$$

de même, en ajoutant les deuxièmes, et ensuite les troisièmes, on a :

$$R \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + \ldots + P_{n-1} \cos \beta_{n-1} + S \cos \beta_n = 0,$$

$$R \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + \ldots + P_{n-1} \cos \gamma_{n-1} + S \cos \gamma_n = 0.$$

Or, ces trois dernières équations qui sont indépendantes des inconnues sont *les trois équations d'équilibre du polygone funiculaire*. Elles expriment, comme on le voit, cette propriété que toutes les forces R, $P_1, \ldots P_{n-1}$, S, transportées en un même point de l'espace, s'y font équilibre. Il en résulte que les $4n + 3$ équations précédentes se réduisent à $4n$ équations distinctes nécessaires et suffisantes pour déterminer les $4n$ inconnues.

356. PROBLÈME II. — *Connaissant les tensions* $T_1, T_2, \ldots T_n$, *et les directions* $(a_1, b_1, c_1), \ldots (a_n, b_n, c_n)$, *des côtés du polygone, déterminer les forces* R, $P_1, \ldots P_{n-1}$, S, *et les angles* $(\alpha, \beta, \gamma), \ldots (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, *qu'elles font avec les axes.*

Il y a actuellement $4n + 4$ inconnues, ce qui exige la connaissance de $4n + 4$ équations.

Or, nous aurons les $n + 1$ groupes de trois équations, et en outre les $n + 1$ équations :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos^2 \alpha_n + \cos^2 \beta_n + \cos^2 \gamma_n = 1.$$

357. REMARQUE. — Si nous supposons que les forces extrêmes R et S sont remplacées par deux points fixes

A et E, alors, dans le premier problème (α, β, γ), (α_n, β_n, γ_n), R et S ne sont pas donnés. Il s'ensuit que le premier des $n + 1$ groupes de trois équations disparaît, ainsi que le dernier, et il ne reste plus que $3n - 3$ équations au lieu des $3n + 3$ primitives (n° **355**). Mais, dans ce cas, la distance L des deux points fixes est connue en grandeur et en direction, et, si nous désignons par λ, μ, ν les angles que L fait avec les axes, et par l la longueur de l'un des côtés du polygone, nous aurons les trois équations :

$$L \cos \lambda = \Sigma l \cos a,$$

$$L \cos \mu = \Sigma l \cos b,$$

$$L \cos \nu = \Sigma l \cos c,$$

qui, jointes aux $3n - 3$ précédentes et aux n équations :

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos^2 a_n + \cos^2 b_n + \cos^2 c_n = 1,$$

serviront à déterminer les $4n$ inconnues.

Si l'on se propose, dans cette hypothèse de A et E fixes, de résoudre le second problème, c'est-à-dire de déterminer en grandeur et en direction les forces $P_1, \ldots P_{n-1}$, à appliquer aux différents nœuds, et les tractions R et S exercées sur les points fixes, nous aurons $4n + 4$ inconnues. Or, R et S sont données respectivement par le premier et le dernier des $n + 1$ groupes de trois équations (n° **355**), desquels on tire :

$$R = -T_1, \quad \alpha = a_1, \quad \beta = b_1, \quad \gamma = c_1,$$

$$S = T_n, \quad \alpha_n = a_n, \quad \beta_n = b_n, \quad \gamma_n = c_n.$$

Il reste alors, pour déterminer les $4n - 4$ inconnues restantes, les $n - 1$ groupes de trois équations, et, en outre, les $n - 1$ équations :

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos^2 \alpha_{n-1} + \cos^2 \beta_{n-1} + \cos^2 \gamma_{n-1} = 1,$$

c'est-à-dire $4n - 4$ équations.

358. Examinons encore le cas d'un *polygone funiculaire fermé de n côtés*, et proposons-nous de *déterminer les tensions* $T_1, \ldots T_n$, *et les angles que ces côtés font avec les axes.*

Soient $P_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \ldots P_n (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, les forces données appliquées aux n sommets. Nous aurons les $3n$ équations suivantes qui expriment qu'il y a équilibre à chaque sommet entre la force P et les tensions des deux côtés adjacents :

$$P_1 \cos \alpha_1 + T_1 \cos a_1 - T_n \cos a_n = 0,$$
$$P_1 \cos \beta_1 + T_1 \cos b_1 - T_n \cos b_n = 0,$$
$$P_1 \cos \gamma_1 + T_1 \cos c_1 - T_n \cos c_n = 0;$$
$$P_2 \cos \alpha_2 + T_2 \cos a_2 - T_1 \cos a_1 = 0,$$
$$P_2 \cos \beta_2 + T_2 \cos b_2 - T_1 \cos b_1 = 0,$$
$$P_2 \cos \gamma_2 + T_2 \cos c_2 - T_1 \cos c_1 = 0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n \cos \alpha_n + T_n \cos a_n - T_{n-1} \cos a_{n-1} = 0,$$
$$P_n \cos \beta_n + T_n \cos b_n - T_{n-1} \cos b_{n-1} = 0,$$
$$P_n \cos \gamma_n + T_n \cos c_n - T_{n-1} \cos c_{n-1} = 0.$$

D'autre part, on a les n relations :

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1,$$

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos^2 a_n + \cos^2 b_n + \cos^2 c_n = 1\,;$$

en outre, puisque le polygone est fermé, on a, en désignant par l la longueur d'un des côtés :

$$\Sigma l \cos a = 0,$$

$$\Sigma l \cos b = 0,$$

$$\Sigma l \cos c = 0.$$

Nous avons ainsi $4n + 3$ équations entre les $4n$ inconnnes T_1 (a_1, b_1, c_1),... T_n (a_n, b_n, c_n). Or, si l'on élimine les $4n$ inconnues, en ajoutant, comme nous l'avons fait précédemment (n° **355**), les $3n$ premières équations, on obtient les trois équations :

$$\Sigma P \cos \alpha = 0,$$

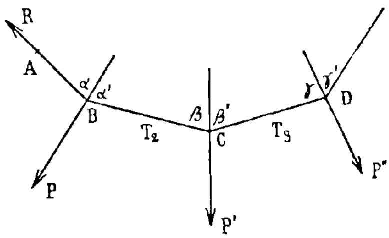
$$\Sigma P \cos \beta = 0,$$

$$\Sigma P \cos \gamma = 0,$$

qui seront les conditions d'équilibre du polygone fermé.

359. Remarque. — On peut encore mettre les conditions d'équilibre d'un polygone funiculaire sous une autre forme. En effet, comme chaque nœud doit être séparément en équilibre sous l'action de la force qui y est appliquée et des tensions des deux côtés adjacents, on a (fig. 128) :

Fig. 128.



$$R : P : T_2 = \sin\alpha' : \sin(\alpha + \alpha') : \sin\alpha,$$

$$T_2 : P' : T_3 = \sin\beta' : \sin(\beta + \beta') : \sin\beta,$$

etc.

De ces équations on tire, en égalant les valeurs des tensions :

$$\frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')} = \frac{P'\sin\beta'}{\sin(\beta+\beta')};$$

de même,

$$\frac{P'\sin\beta}{\sin(\beta+\beta')} = \frac{P''\sin\gamma'}{\sin(\gamma+\gamma')},$$

et ainsi de suite.

Ce sont les conditions d'équilibre du polygone funiculaire.

On a aussi pour la tension du premier côté :

$$T_1 = R = \frac{P \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')}.$$

360. Cas particulier. — Si les forces sont les bissectrices des angles du polygone, on a, en désignant par 2α, 2β,... les angles formés par les côtés,

$$T = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{P'}{2 \cos \beta} = \frac{P''}{2 \cos \gamma} = \dots..$$

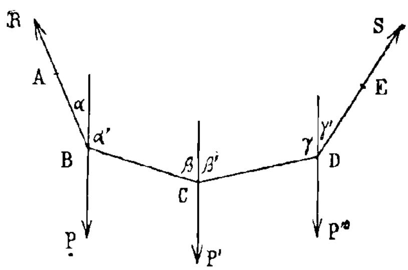
Donc, *l'équilibre exige que chaque force soit proportionnelle au double du cosinus de l'angle qu'elle fait avec chacun des côtés adjacents du polygone. La tension est constante dans toute l'étendue du fil.*

C'est ce qui arrivera lorsque les forces P, P', P'',... seront appliquées à des anneaux, puisque, comme on sait (nº **346**), dans ce cas, chaque force est bissectrice de l'angle des côtés adjacents.

Cas des forces parallèles.

361. Si les forces appliquées aux différents sommets du polygone sont parallèles et verticales (fig. 129), excepté les deux forces extrêmes, qui sont toujours dirigées suivant les deux côtés extrêmes (par exemple, si ce sont des poids), les conditions d'équilibre prendront une forme simple.

Fig. 129.



En effet, nous avons les équations (n° **359**) :

$$\frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{P' \sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')},$$

$$\frac{P' \sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} = \frac{P'' \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')},$$

etc.

Or, on a évidemment :

$$\alpha' + \beta = 180^\circ, \quad \beta' + \gamma = 180^\circ, \ldots$$

d'où :

$$\sin \alpha' = \sin \beta, \quad \sin \beta' = \sin \gamma, \ \ldots$$

Multipliant les deux membres de la première équation respectivement par $\sin \alpha'$ et $\sin \beta$, les deux membres de la seconde par $\sin \beta'$ et $\sin \gamma$, et ainsi de suite, on a :

$$\frac{P \sin \alpha \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{P' \sin \beta \sin \beta'}{\sin (\beta + \beta')} = \frac{P'' \sin \gamma \sin \gamma'}{\sin (\gamma + \gamma')} = \ldots$$

ou bien :

$$\frac{P}{\cot g\, \alpha + \cot g\, \alpha'} = \frac{P'}{\cot g\, \beta + \cot g\, \beta'} = \frac{P''}{\cot g\, \gamma + \cot g\, \gamma'} = \ldots$$

Donc, dans le cas actuel, *la condition d'équilibre est que chaque force soit proportionnelle à la somme des cotangentes des angles qu'elle fait avec les deux côtés adjacents au nœud correspondant.*

362. PROPRIÉTÉ. — *La tension horizontale de chaque cordon est une quantité constante.*

En effet, la tension du premier cordon AB est donnée par la formule (n° **359**) :

$$T_1 = \frac{P \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')}.$$

La composante horizontale de cette tension est évidemment :

$$H = T_1 \sin \alpha = \frac{P \sin \alpha \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{P}{\cot g\, \alpha + \cot g\, \alpha'}.$$

On trouverait de même que la composante horizontale de la tension du second côté est :

$$\frac{P}{\cot g\,\beta + \cot g\,\beta'},$$

et ainsi de suite. Par conséquent, la tension horizontale de chacun des côtés du polygone est une constante, et les conditions d'équilibre (n° **361**) expriment cette propriété.

363. PROPRIÉTÉ. — *La tension de chaque côté est en raison inverse du sinus de l'angle que ce côté fait avec la direction de la force.*

En effet, on a :

$$T_1 = \frac{H}{\sin\alpha},$$

$$T_2 = \frac{H}{\sin\alpha'} = \frac{H}{\sin\beta}, \text{ etc.}$$

364. PROPRIÉTÉ. — *Lorsque toutes les forces sont parallèles, le polygone funiculaire en équilibre est un polygone plan.*

En effet, l'équilibre de chaque sommet exigeant que la force P qui y est appliquée, et les deux cordons adjacents soient dans un même plan, ce plan contiendra la force P' parallèle à P, et appliquée au sommet suivant. Le côté suivant sera encore dans ce même plan, et ainsi de suite.

365. PROPRIÉTÉ. — *Les deux côtés extrêmes se rencontrent en un point de la verticale passant par le centre des forces parallèles appliquées aux différents nœuds.*

En effet, toutes les forces appliquées au polygone doivent se faire équilibre. Or, toutes les forces parallèles sont dans un même plan avec les forces R et S, dirigées suivant les côtés extrêmes. Mais, toutes les forces parallèles se réduisent à leur résultante égale à leur somme, et par conséquent cette résultante doit faire équilibre aux deux forces R et S. Or, pour que trois forces situées dans un même plan se fassent équilibre, elles doivent concourir en un même point.

Équilibre d'un fil flexible.

366. *Trouver la forme d'équilibre d'un fil flexible et inextensible attaché par ses deux extrémités à deux points fixes, et sollicité par des forces en ses différents points.*

Supposons le fil divisé en éléments de longueur ds ; un élément $MM' = ds$, considéré comme libre, sera en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent, et des tensions à ses deux extrémités. Ces tensions sont d'ailleurs dirigées suivant les tangentes aux deux points M et M' : elles agissent l'une dans un sens, l'autre en sens contraire.

Soient Pds la force qui agit sur l'élément ds : Xds, Yds, Zds ses composantes ; T la tension à l'extrémité M : ses composantes sont :

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds}.$$

Comme la force T est dirigée en sens contraire du sens dans lequel on compte l'arc ds, ses composantes doivent être prises avec le signe —.

Soit T' la tension au point M' : décomposons cette tension suivant les axes. A cet effet, observons que la tension T en un point M de la courbe est une fonction continue de l'arc s qui définit ce point, ou des coordonnées x, y, z, de ce point : il en est évidemment de même de ses composantes $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$. Par conséquent, quand on passe du point M au point M', ces fonctions augmentent chacune de sa différentielle. Les composantes de T' sont donc :

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\quad T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\quad T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right);$$

elles doivent être prises avec le signe +, puisque T' est de sens contraire à T.

Nous aurons donc les trois équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+Xds=0,\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Yds=0,\\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Zds=0. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Des équations (1) on tire les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} dT\,.\frac{dx}{ds}+Td\frac{dx}{ds}+Xds=0,\\ dT\,.\frac{dy}{ds}+Td\frac{dy}{ds}+Yds=0,\\ dT\,.\frac{dz}{ds}+T\,d\frac{dz}{ds}+Zds=0. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Multipliant ces dernières respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et ajoutant, en ayant égard aux relations :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\, d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

il vient :

$$d\mathrm{T} = -(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

formule qui donnera *la tension* T *en un point du fil*, en fonction des coordonnées de ce point, lorsque le second membre sera intégrable.

Si nous multiplions les équations (2) respectivement par $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$, et si nous ajoutons, il vient :

$$\mathrm{T}\left\{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}$$
$$+ \left(\mathrm{X}d\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}d\frac{dy}{ds} + \mathrm{Z}d\frac{dz}{ds}\right)ds = 0,$$

ou bien, en désignant par ρ le rayon de courbure au point M, et par λ, μ, ν les angles qu'il fait avec les axes :

$$\frac{\mathrm{T}ds^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}(\mathrm{X}\cos\lambda + \mathrm{Y}\cos\mu + \mathrm{Z}\cos\nu)\, ds^2 = 0\,;$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{T}ds}{\rho} + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, \rho)\, ds = 0.$$

De cette formule on conclut que $\frac{\mathrm{T}ds}{\rho}$ est égal à *la composante normale de la force* Pds *qui sollicite l'élément* ds.

Enfin, si l'on multiplie les équations (2) respectivement par :

$$dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad dz\, d^2x - dx\, d^2z, \quad dx\, d^2y - dy\, d^2x,$$

et si l'on ajoute, il vient :

$$\mathrm{X}\,(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + \mathrm{Y}\,(dz\, d^2x - dx\, d^2z) + \mathrm{Z}\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0,$$

les autres termes se détruisant.

Cette dernière équation exprime *qu'en chaque point la force* Pds *est dans le plan osculateur à la courbe.*

367. Cas particulier. — Supposons le fil soumis à l'*action de la pesanteur* seule, et supposons qu'il soit *homogène*. Désignons par p le poids de l'unité de longueur du fil, l'axe des z étant dirigé suivant la verticale de bas en haut.

Nous aurons :

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = -p,$$

et les équations (1) deviennent alors :

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)-pds=0.$$

Des deux premières, on tire, en intégrant :

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=a,$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds}=b\,;$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},$$

et, par suite,

$$y=\frac{b}{a}x+k.$$

Il en résulte que *la projection de la courbe sur le plan des xy est une ligne droite,* et, par conséquent, *cette courbe est plane.*

REMARQUE. — On peut arriver directement au même résultat : en effet, les éléments *ds* sont les côtés d'un polygone funiculaire infinitésimal. Or, les poids des éléments étant des forces parallèles, le polygone infinitésimal sera dans un plan vertical passant par les deux points d'attache (nº **364**).

368. Puisque la courbe est une courbe plane, nous pouvons la rapporter à deux axes pris dans son plan, l'axe des x étant horizontal, et l'axe des y dirigé suivant la verticale, les y étant comptés positivement de bas en haut. On a les deux équations :

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0.$$

Ce sont les *équations d'équilibre d'un fil homogène pesant attaché par ses deux extrémités à deux points fixes.*

En intégrant ces équations, on a :

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \mathrm{A},$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds} = ps + \mathrm{B}.$$

Pour déterminer les constantes A et B, nous supposerons que l'on compte les arcs s à partir du point le plus bas de la courbe. Nous aurons évidemment en ce point, $s = 0$, et $\frac{dy}{ds} = 0$, puisque la tangente en ce point est parallèle à l'axe des x : il en résulte que $\mathrm{B} = 0$. D'ailleurs, en ce même point, $\frac{dx}{ds} = 1$; par conséquent, la constante A est la tension au point le plus bas : nous la désignerons par pc, c étant la longueur d'une portion du fil dont le poids pc est égal à la tension A au point le plus bas.

Nous aurons alors, en remplaçant les constantes par leurs valeurs :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T}\frac{dx}{ds} &= pc, \\ \mathrm{T}\frac{dy}{ds} &= ps; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}; \qquad (2)$$

or, de la formule :

$$ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right),$$

on tire :

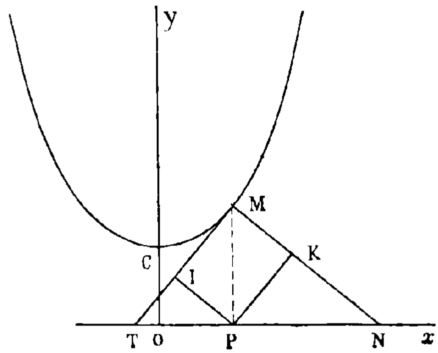
$$dx = \frac{cds}{\sqrt{c^2 + s^2}}, \qquad (3)$$

et, en intégrant :

$$x + \mathrm{K} = cl.(s + \sqrt{c^2 + s^2}).$$

Pour déterminer la constante K, nous supposerons que l'axe des y passe par le point le plus bas de la

Fig. 130.



courbe (fig. 130), sans du reste fixer l'origine. Il en résultera que l'on a $x = 0$, pour $s = 0$; par conséquent,

$$K = c\,l\,.\,c,$$

et, en remplaçant,

$$x = c\,l\,.\,\frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c}. \tag{4}$$

De cette équation on tire :

$$c e^{\frac{x}{c}} = s + \sqrt{c^2 + s^2}\,;$$

par conséquent,

$$\sqrt{c^2 + s^2} = c e^{\frac{x}{c}} - s,$$

d'où, en élevant au carré et réduisant, on tire :

$$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (5)$$

En éliminant s entre les équations (2) et (5), on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right), \qquad (6)$$

et, en intégrant,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) + K'.$$

Si l'on prend l'origine sur la verticale qui passe par le point le plus bas, en un point O, tel que l'on ait OC $= c$ (fig. 130), la constante K' est nulle, puisque l'on doit avoir $y = c$, pour $x = 0$.

Nous aurons donc pour l'équation de la courbe qu'affectera le fil :

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (7)$$

C'est l'équation de la *chaînette*.

369. Cette courbe jouit de plusieurs propriétés remarquables : nous allons en étudier quelques-unes.

D'abord, il est évident, d'après l'équation (7), que la courbe est *symétrique* par rapport à l'axe des y.

D'autre part, de l'équation (5) on tire :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

d'où, à cause de l'équation (7) :

$$y = c\,\frac{ds}{dx}. \tag{8}$$

Or, cette équation exprime qu'*en chaque point de la chaînette, la projection* MK *de l'ordonnée de la courbe sur la normale* MN *est constante et égale à c.*

On a, en effet (fig. 130),

$$\mathrm{MK} = \mathrm{MP}\ .\cos \mathrm{PMK} = y \cos \mathrm{T} = y\,\frac{dx}{ds} = c.$$

L'équation (2) nous donne :

$$s = c\,\frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Cette équation exprime que *la projection* MI *de l'ordonnée sur la tangente* MT *est égale à l'arc* CM, *compté à partir du point le plus bas de la courbe.*

En effet, on a (fig. 130) :

$$\mathrm{MI} = \mathrm{IP}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{IPM} = \mathrm{IP}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{T} = c\,\frac{dy}{dx} = s.$$

D'ailleurs, les équations (8) et (9) nous donnent :

$$y^2 - s^2 = c^2.$$

Cette équation exprime que *l'ordonnée y*, *l'arc* MC, *et l'ordonnée c du point le plus bas forment un triangle rectangle dont l'ordonnée y est l'hypothénuse.*

Des équations :

$$T\frac{dx}{ds} = pc, \tag{1}$$

$$y = c\,\frac{ds}{dx}, \tag{8}$$

on tire :

$$T = py.$$

Donc, *la tension en un point quelconque de la chaînette est proportionnelle à l'ordonnée de ce point.*

370. Remarque. — De l'équation (2) on tire :

$$ds = c\,d\,.\,\frac{dy}{dx},$$

ou bien, en remplaçant ds par sa valeur $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$:

$$dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = c\,d\,.\,\frac{dy}{dx}.$$

On trouve pour l'*équation différentielle de la chaînette :*

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{1}{c}. \tag{10}$$

371. PROPRIÉTÉ. — *Le rayon de courbure de la chaînette est égal à la normale* MN, *mais dirigé en sens contraire.*

En effet, le rayon de courbure est donné par la formule :

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et, en vertu de (10), on a :

$$\rho = c\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

Mais, de l'équation (8) on tire :

$$\frac{y^2}{c^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2};$$

par suite,

$$\rho = \frac{y^2}{c}.$$

D'autre part, on a :

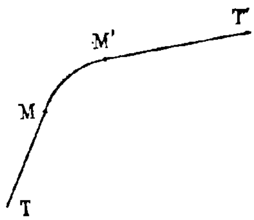
$$\mathrm{MN} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{y^2}{c}, \text{ et, par conséquent, } \rho = \mathrm{MN}.$$

Équilibre d'un fil appliqué sur une surface.

372. *Un fil est appliqué sur une surface, et sollicité par des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. On demande de trouver la position d'équilibre de ce fil.*

Soient $MM' = ds$ un élément du fil (fig. 131), et Pds la force agissant sur cet élément. Nous rendrons l'élément libre en introduisant la réaction Nds de la surface et les deux tensions T et T' aux deux extrémités M et M'.

Fig. 131.



L'élément ds libre est alors en équilibre sous l'action des forces Pds, Nds, T et T'. Par conséquent, les équations d'équilibre sont :

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds + Nds\cos\lambda = 0, \qquad (1)$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Yds + Nds\cos\mu = 0, \qquad (2)$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Zds + Nds\cos\nu = 0, \qquad (3)$$

λ, μ, ν étant les angles que fait avec les axes la normale à la surface :

$$F(x, y, z,) = 0. \qquad (4)$$

Les équations (1), (2) et (3) nous donnent :

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{dx}{ds} + \mathrm{T}\frac{d^2x}{ds^2} + \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\lambda = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{dy}{ds} + \mathrm{T}\frac{d^2y}{ds^2} + \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\mu = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{dz}{ds} + \mathrm{T}\frac{d^2z}{ds^2} + \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu = 0. \qquad (7)$$

Multipliant ces équations respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et ajoutant, en observant que l'on a :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$\cos\lambda\frac{dx}{ds} + \cos\mu\frac{dy}{ds} + \cos\nu\frac{dz}{ds} = 0,$$

il vient :

$$d\mathrm{T} + \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{T} = \mathrm{C} - \int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz). \qquad (8)$$

Cette équation servira à déterminer la tension T au point M.

Pour trouver la forme d'équilibre du fil, nous devons chercher une deuxième équation à joindre à l'équation (1).

A cet effet, multiplions les équations (5) et (6) respectivement par $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$, et retranchons, il vient :

$$T\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3} + X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} + N\left(\cos\lambda\frac{dy}{ds} - \cos\mu\frac{dx}{ds}\right) = 0. \tag{9}$$

On a de même :

$$T\frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{ds^3} + Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds} + N\left(\cos\mu\frac{dz}{ds} - \cos\nu\frac{dy}{ds}\right) = 0, \tag{10}$$

$$T\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3} + Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds} + N\left(\cos\nu\frac{dx}{ds} - \cos\lambda\frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{11}$$

Cela posé, multiplions ces dernières équations respectivement par $\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, et ajoutons, il viendra :

$$\begin{aligned}
&T\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3}\right) + T\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{ds^3}\right) \\
&+ T\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right) \\
&+ \frac{\partial F}{\partial x}\left(Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds}\right) \\
&+ N\left\{\frac{\partial F}{\partial z}\left(\cos\lambda\frac{dy}{ds} - \cos\mu\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\cos\mu\frac{dz}{ds} - \cos\nu\frac{dy}{ds}\right)\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\cos\nu\frac{dx}{ds} - \cos\lambda\frac{dz}{ds}\right)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Or, il est facile de voir, en remplaçant $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs que le coefficient de N est nul, et, par conséquent, cette dernière équation se réduit à la suivante :

$$\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\,\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3} + \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\,\frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{ds^3}$$

$$+ \mathrm{T}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\,\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\left(\mathrm{X}\frac{dy}{ds} - \mathrm{Y}\frac{dx}{ds}\right)$$

$$+ \frac{\partial \mathrm{F}}{dx}\left(\mathrm{Y}\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\partial \mathrm{F}}{dy}\left(\mathrm{Z}\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}\frac{dz}{ds}\right) = 0. \quad (12)$$

Cette équation (12), jointe à l'équation (4) donnera la forme d'équilibre du fil.

373. Pour déterminer *la réaction normale de la surface*, ou *la pression exercée par le fil sur cette surface*, nous multiplierons les équations (5), (6) et (7) respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et nous ajouterons; nous aurons l'équation :

$$\mathrm{T}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cos\lambda + \frac{d^2y}{ds^2}\cos\mu + \frac{d^2z}{ds^2}\cos\nu\right)$$

$$+ (\mathrm{X}\cos\lambda + \mathrm{Y}\cos\mu + \mathrm{Z}\cos\nu) + \mathrm{N} = 0,$$

qui servira à déterminer N.

Cette dernière équation peut être mise sous une autre forme que nous allons chercher. En désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe, et par λ_1, μ_1, ν_1 les angles qu'il fait avec les axes, on a :

$$\cos\lambda_1 = \rho\,\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\mu_1 = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\nu_1 = \rho\,\frac{d^2z}{ds^2},$$

et l'équation précédente devient :

$$\frac{T}{\rho}(\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1)$$
$$+ (X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu) + N = 0.$$

Or, en désignant par η l'angle que fait le rayon de courbure de la courbe avec la normale à la surface, on a :

$$\cos\eta = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1 ;$$

d'autre part, si θ est l'angle que fait la force P avec la normale à la surface, on a :

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = P\cos\theta,$$

et il vient alors :

$$\frac{T}{\rho}\cos\eta + P\cos\theta + N = 0,$$

équation qui donnera la pression $-Nds$ exercée par un élément ds du fil sur la surface.

374. Cas particuliers. — 1° Si les forces qui sollicitent le fil sont nulles, on aura : $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; par suite,

$$T = C ;$$

d'autre part, on a :

$$-N = \frac{C}{\rho}\cos\eta.$$

Donc, *la tension en chaque point est constante, et la pression exercée par chaque élément du fil est proportionnelle à cette tension constante, et en raison inverse du rayon de courbure.*

2° *Si la force aux différents points du fil est normale à la surface,* on a :

$$X = P\cos\lambda = PV\frac{\partial F}{\partial x},$$

$$Y = P\cos\mu = PV\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$Z = P\cos\nu = PV\frac{\partial F}{\partial z},$$

en posant,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

L'équation (8) nous donne encore :

$$T = C.$$

D'ailleurs, l'équation (12) se réduit à son premier terme, et il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(dz\,d^2y - dy\,d^2z) + \frac{\partial F}{\partial y}(dx\,d^2z - dz\,d^2x)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial z}(dy\,d^2x - dx\,d^2y) = 0.$$

Or, les coefficients de cette équation sont ceux du plan osculateur, et en les désignant par A, B, C, on a :

$$A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y} + C \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Cette dernière équation, jointe à l'équation :

$$F(x, y, z) = 0,$$

nous donnera la forme du fil.

Il est facile de voir que l'équation :

$$A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y} + C \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

exprime que *la normale à la surface est dans le plan osculateur de la courbe*. Donc, le plan osculateur de la courbe est normal à la surface. Cette courbe jouit de la propriété d'être la plus courte que l'on puisse mener sur la surface entre deux quelconques de ses points : c'est *une ligne géodésique*.

3° Si nous supposons *le fil libre,* nous aurons $N = 0$, et les équations (1), (2) et (3) deviennent alors :

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0,$$

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0,$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0;$$

ce sont les équations que nous avons trouvées précédemment (n° **366**).

Les équations (8), (9) et (10) nous donnent :

$$X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} + T\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds^3} = 0,$$

$$Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds} + T\frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{ds^3} = 0,$$

$$Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds} + T\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3} = 0.$$

Il est facile de s'assurer que ces trois équations se réduisent à deux qui sont celles de la courbe d'équilibre.

4° *Si le fil est libre et soumis à l'action de la pesanteur seule*, on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g, \quad N = 0,$$

et les équations (1), (2) et (3) nous donnent :

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - g\,ds = 0.$$

5° *Si le fil libre est sollicité par des forces normales à ce fil*, les équations d'équilibre sont :

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0.$$

La force étant normale au fil, on a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

et l'équation (8) nous donne :

$$T = const.$$

Les équations d'équilibre deviennent alors :

$$Td\left(\frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0,$$

$$Td\left(\frac{dy}{ds}\right) + Yds = 0,$$

$$Td\left(\frac{dz}{ds}\right) + Zds = 0\,;$$

d'où, en élevant au carré, et ajoutant, en observant que l'on a :

$$\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2},$$

il vient :

$$T^2\,\frac{ds^2}{\rho^2} = P^2ds^2,$$

d'où :

$$T = P\rho.$$

ou bien :

$$P = \frac{T}{\rho}.$$

Donc, quelle que soit la force normale au fil, la forme du fil est telle que *la force est en raison inverse du rayon de courbure.*

Remarque. — Si la force P est constante, on a $\rho = const.$, et, par conséquent, la courbe est un arc de cercle.

CHAPITRE VIII.

Principe des vitesses virtuelles.

375. Considérons un système de points matériels quelconques, soumis à certaines conditions, et supposons ce système transporté de la position qu'il occupe dans une position infiniment voisine qui satisfasse à toutes les conditions données. On appelle *déplacement virtuel* ou *vitesse virtuelle* d'un point quelconque, la droite qui joint la première position de ce point à la seconde. Le mot *virtuel* indique que ce déplacement est seulement possible, mais il n'a pas réellement lieu, et l'on n'a pas à considérer les forces qui seraient capables de produire ce mouvement.

On appelle *moment virtuel* ou *travail virtuel d'une force le produit de la valeur absolue de cette force par la projection sur sa direction du déplacement virtuel de son point d'application.*

On est convenu de considérer la projection comme *positive* ou *négative*, selon qu'elle est dirigée à partir du point M d'application de la force dans le même sens que la force ou en sens contraire, c'est-à-dire suivant que l'angle formé par la direction de la force avec le déplacement est aigu ou obtus.

Le *moment virtuel* est *positif* ou *négatif*, suivant que la projection du déplacement est positive ou négative. Il est nul, si le déplacement est perpendiculaire à la direction de la force.

D'après cela, si l'on désigne par P la force appliquée à un point M, par δs le déplacement virtuel de ce point, par $(P, \delta s)$ l'angle compris entre ces deux directions, le travail virtuel de la force P est :

$$P \,.\, \delta s \cos(P, \delta s).$$

Ce travail sera positif ou négatif suivant que l'angle $(P, \delta s)$ est aigu ou obtus.

Remarque. — Il est évident que l'expression $P \,.\, \delta s \cos(P, \delta s)$ peut être mise sous la forme :

$$P \cos(P, \delta s) \,.\, \delta s,$$

et, sous cette forme, on voit que *le moment virtuel de la force* P *est égal au produit de la vitesse virtuelle multipliée par la projection de la force suivant la direction du déplacement.*

376. Le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer, en général, de la manière suivante :

Si des forces en nombre quelconque se font équilibre sur un système de points matériels, assujettis à des conditions données, la somme des moments virtuels de toutes ces forces est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système.

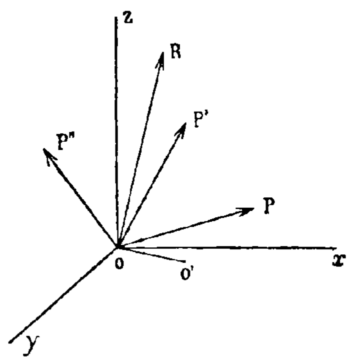
Réciproquement, *si la somme des moments virtuels est nulle, le système sera en équilibre.*

Nous démontrerons d'abord ce principe pour le cas d'un point unique.

377. Théorème. — *Étant donné un nombre quelconque de forces* P, P', P'',... *concourantes, le moment virtuel de la résultante de ces forces est égal à la somme algébrique des moments virtuels des composantes.*

Soient R la résultante des forces P, P', P'',... appliquées à un même point O (fig. 132), et OO' $= \delta s$ un déplacement virtuel quelconque de ce point. Soient a, a', a'',...

Fig. 132.



les angles que les forces P, P', P'',... font avec le déplacement OO', et θ l'angle de R avec ce déplacement.

Nous aurons (n° **222**) :

$$R\cos\theta = P\cos a + P'\cos a' + P''\cos a'' + \cdots;$$

par conséquent,

$$R\delta s\cos\theta = P\delta s\cos a + P'\delta s\cos a' + P''\delta s\cos a'' + \cdots$$

Or, en désignant par δr, δp, $\delta p'$,... les projections de δs sur les forces R, P, P',... cette équation nous donne :

$$R\delta r = P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \ldots = \Sigma P\delta p,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

378. Pour que les forces P, P', P'',... se fassent équilibre, il faut et il suffit que l'on ait R = 0, et, par conséquent, il vient :

$$\Sigma P\delta p = 0. \qquad (1)$$

Donc, *pour que des forces appliquées à un point matériel libre se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments virtuels de ces forces soit nulle pour un déplacement virtuel quelconque.*

REMARQUE. — Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la force P suivant les axes, par δx, δy, δz les projections de δs sur ces axes, le moment virtuel de la force P sera égal (n° **377**) à la somme des moments virtuels de ses composantes, et nous aurons :

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

L'équation (1) devient alors :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \qquad (2)$$

Cette équation (2) nous donne immédiatement les *trois équations d'équilibre d'un point libre* (n° **220**). En effet, elle peut être mise sous la forme :

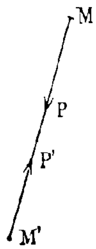
$$\delta x \,.\, \Sigma X + \delta y \,.\, \Sigma Y + \delta z \,.\, \Sigma Z = 0\,;$$

d'où l'on tire, puisque δx, δy, δz sont arbitraires comme δs,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

379. Considérons maintenant deux points M et M' (fig. 133), soumis respectivement à l'action de deux forces égales et directement opposées P et P' et cherchons la somme des travaux virtuels de ces forces pour un déplacement très petit du système de ces deux points. Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées rectangulaires des deux points M et M' (fig. 133), r la distance de ces deux points, nous aurons :

Fig. 133.



$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \qquad (3)$$

Nous considérerons les forces P et P' comme positives ou négatives suivant qu'elles tendent à rapprocher ou à séparer les deux points d'application. Par conséquent, les cosinus directeurs de la force P sont :

$$-\frac{x - x'}{r}, \quad -\frac{y - y'}{r}, \quad -\frac{z - z'}{r},$$

et le travail virtuel de cette force P sera :

$$-\frac{P}{r}\left\{(x - x')\,\delta x + (y - y')\,\delta y + (z - z')\,\delta z\right\} :$$

de même, le travail virtuel de la force P' égale et directement opposée à P sera :

$$\frac{P'}{r}\left\{(x - x')\,\delta x' + (y - y')\,\delta y' + (z - z')\,\delta z'\right\}.$$

Nous aurons donc pour la somme des moments virtuels de ces deux forces, en observant que $P = P'$, l'expression suivante :

$$-\frac{P}{r}\left\{(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')\right\}.$$

Or, de la formule (3) on tire :

$$r\delta r=(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z');$$

par conséquent, la somme des moments virtuels des deux forces P et P' est égale à :

$$-P\delta r.$$

On voit que cette somme sera nulle, si la distance r est constante.

Donc, *dans tout déplacement virtuel pour lequel la distance* MM' *ne variera pas, la somme des moments virtuels des deux forces* P *et* P' *est nulle.*

Cette propriété aura lieu lorsque les deux points sont unis par un lien rigide, ou lorsqu'ils sont liés par un fil flexible et inextensible, ce fil étant tendu, et restant tendu pendant le déplacement virtuel considéré. Elle cesse d'avoir lieu si les deux points sont unis par un fil élastique, ce fil s'allongeant ou se raccourcissant pendant le déplacement virtuel.

Théorème des moments virtuels pour un système matériel quelconque.

380. Nous avons vu précédemment (n° **244**) que les forces qui sollicitent un système de points matériels sont de deux espèces : elles sont *intérieures* ou *extérieures*. Les forces intérieures sont celles qui émanent de points faisant partie du système ; les forces extérieures émanent, au contraire, de points matériels extérieurs au système.

On divise aussi les forces en *forces directement appliquées* et *forces de liaisons*. Nous allons définir ce que l'on entend par *forces de liaisons*.

En général, les divers points d'un système ne sont pas indépendants les uns des autres : leurs coordonnées sont assujetties à remplir certaines conditions, à satisfaire à certaines équations auxquelles on donne le nom de *liaisons*. Ainsi, certains points du système peuvent être assujettis à rester à des distances invariables les uns des autres ; certains points peuvent être assujettis à rester sur des courbes fixes ou des surfaces fixes ; certaines parties du système peuvent être assujetties à rester en contact les unes avec les autres.

Ces conditions sont exprimées par des équations entre les coordonnées des points du système et constituent ce que l'on appelle les *liaisons*. Ces liaisons équivalent à des forces.

En effet, si l'on supprime une liaison, le système prendra un mouvement différent de celui qu'il aurait pris si la liaison avait subsisté : l'état de repos ou de mouvement du système sera modifié. Or, il est évident que l'on pourra ramener le système à son état primitif, en appliquant certaines forces aux différents points de ce système. Ces forces s'appellent *forces de liaisons :* elles peuvent être intérieures ou extérieures, suivant les cas. Lorsqu'une liaison est remplacée par une force, cette force devient une force directement appliquée.

381. Considérons maintenant un système quelconque de points matériels sur lesquels agissent des forces données. Ces points peuvent être *libres*, ou *soumis à des liaisons*. Or, en substituant aux liaisons les forces qui peuvent en tenir lieu, le système pourra être considéré comme composé d'un certain nombre de points matériels *libres* sur lesquels agissent les forces données, et les forces de liaisons, c'est-à-dire les forces inconnues provenant des liaisons entre les points ou des obstacles extérieurs au système.

Pour que chacun des points du système soit en équilibre, il faut (n° **378**) que la somme des moments virtuels de *toutes les forces intérieures et extérieures* qui agissent sur lui soit nulle pour un *déplacement virtuel quelconque* de ce point.

Si l'on fait la somme des équations semblables obtenues pour chacun des points du système, on en conclut que, *dans tout système matériel en équilibre, la somme des moments virtuels de toutes les forces intérieures et extérieures qui sollicitent les différents points est nulle pour tout déplacement virtuel quelconque.*

Il est évident que ce théorème ne serait d'aucune utilité à cause de l'impossibilité de déterminer *a priori* les forces de liaisons. Mais, on peut, comme nous allons nous en assurer, éliminer les forces inconnues, de manière que l'équation ne renferme plus que les moments virtuels des forces motrices données. Il suffit, pour cela, de prendre parmi tous les déplacements infiniment petits que l'on peut attribuer aux différents points matériels, ceux qui sont *compatibles avec les liaisons du système*, et alors les liaisons disparaîtront d'elles-mêmes.

Nous allons définir ce que l'on entend par un déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système. C'est un déplacement qui doit être possible sans altérer les liaisons du système; en d'autres termes, les équations de liaisons doivent être vérifiées par les différents points du système, non-seulement dans sa position actuelle, mais aussi dans celle qui correspond au déplacement. Si donc les équations de liaisons sont vérifiées par les coordonnées (x, y, z), (x', y', z'),... des différents points du système, elles doivent être vérifiées aussi, et *au même instant*, par les coordonnées :

$$(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z), \quad (x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z'), \ldots$$

de ces mêmes points après le déplacement.

382. Démontrons maintenant que, *si l'on considère des déplacements compatibles avec les liaisons, les forces qui tiennent lieu de ces liaisons disparaîtront d'elles-mêmes.*

1° Si certains points sont unis par des liens rigides, la distance de deux points ne varie pas, et, par suite, la somme des moments virtuels des forces provenant des liaisons de ces points est nulle (n° **379**). Par conséquent, ces forces n'entreront pas dans l'équation des moments virtuels.

2° Si un point M du système est assujetti à rester sur une surface fixe, la réaction de la surface est normale à cette surface, et le déplacement du point étant dans le plan tangent, le moment virtuel de cette réaction est nul. Il en sera de même pour tous les points assujettis à demeurer sur des surfaces fixes. Il en est aussi de même pour tous les points assujettis à demeurer sur des courbes fixes. Donc, les réactions de ces obstacles n'entreront pas dans l'équation des moments.

3° Si un point est assujetti à demeurer sur une surface faisant partie du système, et mobile avec lui, la réaction N de la surface est encore normale à la surface. Mais, le déplacement δs n'est pas, en général, perpendiculaire à cette réaction : en effet, on doit alors combiner le déplacement du point sur la surface, avec le déplacement de la surface, et δs peut être considéré comme la résultante d'une vitesse relative du point M, tangente à la surface, et d'une vitesse d'entraînement due au mouvement de la surface. Or, la projection δn de δs sur la normale se réduit à la projection de la vitesse d'entraînement, et le moment virtuel $N\delta n$ restera dans l'équation des moments. Mais, le point exerce sur la surface une pression N' égale et contraire à la réaction N ; la vitesse du point d'application de cette pression est évidemment égale à la vitesse d'entraînement. Par conséquent, le moment virtuel de la pression N' est $N'\delta n' = N\delta n$; ces deux moments virtuels égaux et de signes contraires se détruiront dans l'équation des moments virtuels. Il en serait de même pour tous les points assujettis à demeurer sur des surfaces mobiles.

4° Enfin, si deux corps s'appuient l'un contre l'autre, il en résulte des pressions normales égales et opposées, dont les moments virtuels égaux et de signes contraires, disparaîtront de l'équation des vitesses virtuelles.

Il résulte donc de cette discussion que, dans tout système matériel soumis à des conditions analogues à celles que nous venons d'examiner, et *pour tout déplacement virtuel compatible avec ces liaisons*, la somme des moments virtuels des forces de liaisons inconnues est nulle ; par conséquent, si l'équilibre a lieu, la somme des moments virtuels *des forces motrices* sera nulle, et l'on aura :

$$\Sigma P \delta p = 0.$$

383. Réciproquement, *si la somme des moments virtuels est nulle pour tous les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons, le système est en équilibre.*

En effet, si les forces appliquées au système ne se font pas équilibre, ce système prendra un certain mouvement *compatible avec les liaisons*, et l'on pourrait empêcher ce mouvement en appliquant à chacun des points du système, dans la direction opposée à celle où il tend à se mouvoir, une force Q d'une intensité convenable. Le système étant alors en équilibre, nous aurons, d'après ce qui précède (n° **382**) :

$$\Sigma P \delta p + \Sigma Q \delta q = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$\Sigma P \delta p = 0 ;$$

par conséquent, on a :

$$\Sigma Q \delta q = 0.$$

Mais, chaque force Q étant directement opposée au déplacement virtuel δq de son point d'application, les moments virtuels $Q \delta q$ sont tous négatifs. Par conséquent, l'équation $\Sigma Q \delta q = 0$ est impossible, et, par suite, l'hypothèse que nous avons faite était absurde, et le système proposé était en équilibre sous l'action des forces P seulement.

384. Nous aurons donc le théorème suivant qui constitue le *principe des vitesses virtuelles :*

THÉORÈME. — *Pour qu'un système de points matériels, soumis à des liaisons quelconques, et sollicités par des forces motrices quelconques soit en équilibre, sous l'action de ces forces, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments virtuels de ces forces soit nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système.*

Si donc on désigne par P l'une quelconque des forces motrices, et par δp la projection sur sa direction du déplacement virtuel δs de son point d'application, la *condition nécessaire et suffisante* de l'équilibre est :

$$\Sigma P \delta p = 0,$$

le signe Σ se rapportant à toutes les forces motrices.

REMARQUE. — Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la force P, par x, y, z les coordonnées de son point d'application, l'équation précédente pourra être remplacée par la suivante :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

385. Nous allons voir maintenant comment le principe des vitesses virtuelles peut donner les *conditions d'équilibre d'un système quelconque, soumis à des liaisons données.*

Soient :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots L_k = 0, \qquad (1)$$

k équations données entre les coordonnées des n points qui composent le système : ce sont les *équations de liaisons.*

L'équation d'équilibre est :

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \tag{2}$$

les déplacements δx, δy, δz,... étant compatibles avec les liaisons du système.

Or, pour exprimer que les déplacements sont compatibles avec les liaisons, nous devons exprimer que, si les coordonnées x, y, z,... des différents points satisfont aux équations (1), il en sera de même des coordonnées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$,... Nous devrons donc avoir les équations de condition :

$$L_1 + \delta L_1 = 0, \quad L_2 + \delta L_2 = 0, \ldots L_k + \delta L_k = 0\,;$$

ces équations devant être vérifiées en même temps que les équations (1), on a :

$$\delta L_1 = 0, \quad \delta L_2 = 0, \ldots \delta L_k = 0.$$

Par conséquent, les variations δx, δy, δz,... doivent satisfaire aux k équations :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L_1}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial L_1}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0, \\
\dfrac{\partial L_2}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial L_2}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L_2}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial L_2}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial L_k}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L_k}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial L_k}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0.
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Ce sont ces équations (3) qui *expriment que les déplacements des différents points sont compatibles avec les liaisons du système.*

Nous les appellerons les *équations de compatibilité.*

Si de ces équations (3) on tire les valeurs de k variations, et qu'on les substitue dans l'équation (2), on obtiendra une équation renfermant $3n - k$ variations indéterminées. Comme cette dernière équation doit être vérifiée pour toutes les valeurs de ces $3n - k$ indéterminées, il faudra que les coefficients de chacune d'elles soient nuls séparément. Nous aurons ainsi $3n - k$ équations, *nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système.* En les joignant aux k équations données (1), nous aurons $3n$ équations entre les $3n$ coordonnées des différents points du système et les forces données. Ces équations pourront servir à déterminer les positions des n points du système, de manière que l'équilibre ait lieu, ou bien les positions d'un certain nombre de points, ainsi que les grandeurs et les directions d'un certain nombre de forces.

386. Observons que l'opération que nous venons de faire, revient à éliminer k variations entre les équations (2) et (3). Or, cette élimination peut se faire par la *méthode des multiplicateurs.* A cet effet, on multiplie les équations (3) par des facteurs indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, puis on ajoute à l'équation (2) : on égalera à zéro les coefficients des k variations que l'on veut éliminer, et l'on aura ainsi k équations pour déterminer les k facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$. On égalera ensuite à zéro les coefficients des $3n - k$ autres variations qui sont *arbitraires.* On voit donc que l'on doit égaler à zéro les coefficients des $3n$ variations; k des équations ainsi obtenues serviront à déterminer les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, et en substituant ces valeurs dans les $3n - k$ autres équations, on aura les conditions d'équilibre.

REMARQUE. — Cette méthode présente l'avantage de faire connaître les *efforts produits par les liaisons*, et les forces capables de remplacer les équations de liaisons.

Nous aurons, en effet, les $3n$ équations suivantes :

$$X + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x} = 0,$$

$$Y + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y} = 0,$$

$$Z + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial z} = 0,$$

$$X' + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x'} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x'} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x'} = 0,$$

. . . .

. . . .

Or, ces équations sont précisément les mêmes que celles que l'on obtiendrait si les équations de liaisons (2) n'existaient pas, c'est-à-dire si tous les points *étaient libres*, et si l'on appliquait :

1° Au point M (x, y, z) :
une force ayant pour composantes :

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z},$$

une force ayant pour composantes :

$$\lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z}, \text{ etc.}$$

2° Au point M′ (x', y', z') :
une force ayant pour composantes :

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x'}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y'}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z'},$$

une force ayant pour composantes :

$$\lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x'}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y'}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z'}, \text{ etc.}$$

et ainsi de suite.

On voit que la force, appliquée au point M, et qui tient lieu de l'équation $L_1 = 0$, est normale à la surface qui aurait pour équation $L_1 = 0$, dans laquelle on ne regarderait que x, y, z comme variables ; de même, la force, appliquée en M′, est normale à la surface qui aurait pour équation $L_1 = 0$, en ne considérant que x', y', z' comme variables, et ainsi de suite.

On connaît donc ainsi en grandeur et direction les forces qui pourraient remplacer les liaisons.

Applications.

387. Équilibre d'un point matériel assujetti a demeurer sur une surface. — Soient X, Y, Z les composantes de la résultante des forces qui sollicitent le point, et :

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface.

En désignant par δx, δy, δz les projections du déplacement virtuel sur les axes, on a l'équation d'équilibre :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 ;$$

d'ailleurs, les déplacements δx, δy, δz doivent satisfaire à l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

En éliminant entre ces équations l'une des variations, par exemple δz, il vient :

$$\left(X\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y = 0 ;$$

cette équation devant être vérifiée, quels que soient δx, et δy, se décompose en deux, savoir :

$$X\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$Y\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial y} = 0 ;$$

on en tire, comme précédemment (n° **226**) :

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

d'où l'on conclut que, pour qu'il y ait équilibre, il faut que *la résultante des forces appliquées soit dirigée suivant la normale à la surface.*

388. Équilibre d'un point matériel assujetti a demeurer sur une courbe. — Soient :

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$f(x, y, z) = 0,$$

les équations de la courbe, et X, Y, Z les composantes de la résultante des forces qui sollicitent le point.

L'équation d'équilibre est :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0\,;$$

les équations de compatibilité sont :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

De ces trois équations on tire :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation que nous avons trouvée précédemment (n° **227**).

389. Équilibre d'un solide invariable. — Proposons-nous d'appliquer le principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forme invariable, soumis à l'action de forces données, et d'ailleurs *entièrement libre*.

D'après ce que nous avons vu (nº **111**), le déplacement d'un corps peut toujours être ramené à un mouvement de translation et un mouvement de rotation. Nous allons donc considérer séparément ces deux mouvements, qui sont d'ailleurs *indépendants l'un de l'autre.*

L'équation d'équilibre du système est :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Or, si nous considérons d'abord le mouvement de translation, les déplacements virtuels des différents points sont égaux et parallèles. Nous aurons donc :

$$\delta s = \delta s' = \delta s'' = \dots \dots$$

et ces déplacements sont parallèles. Il s'ensuit que les projections de tous ces déplacements sur chacun des axes sont égales, et, par suite,

$$\delta x = \delta x' = \delta x'' = \dots \dots$$

$$\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots \dots$$

$$\delta z = \delta z' = \delta z'' = \dots \dots$$

L'équation des moments virtuels peut donc être mise sous la forme suivante :

$$\delta x \,.\, \Sigma X + \delta y \,.\, \Sigma Y + \delta z \,.\, \Sigma Z = 0.$$

Or, le déplacement commun δs étant arbitraire, il en est de même de ses projections δx, δy, δz, et, par conséquent, l'équation précédente nous donne les trois équations :

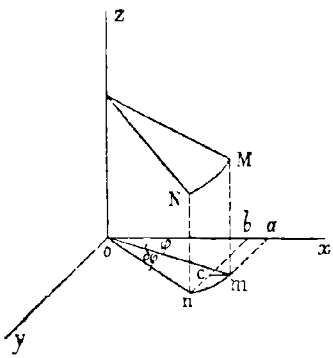
$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Ce sont les équations d'*équilibre de translation.*

Si nous considérons, en second lieu, le mouvement de rotation, il s'effectue autour d'un axe passant par le point O, et nous pouvons décomposer cette rotation en trois rotations autour des trois axes coordonnés.

Considérons d'abord la rotation autour de l'axe des z (fig. 134) : en vertu de cette rotation, le point M du corps décrira un arc infiniment petit MN sur un parallèle perpendiculaire à OZ, parallèle qui se projette en vraie grandeur sur le plan des xy. Nous aurons donc :

Fig. 134.



$$MN = mn = \delta s.$$

Tous les points du corps décriront des arcs infiniment petits perpendiculaires à OZ.

L'équation des moments virtuels étant :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

nous aurons à déterminer les projections δx, δy, δz de MN sur les axes. Or, il est évident que $\delta z = 0$, puisque δs est dans un plan perpendiculaire à OZ : d'autre part, en posant $Om = r$, et en désignant par φ l'angle mOx, l'angle mOn sera égal à $\delta\varphi$, et nous aurons :

$$\delta x = ab = mc = mn \sin\varphi = r\delta\varphi \,.\, \sin\varphi,$$

$$\delta y = nc = mn \cos\varphi = r\delta\varphi \,.\, \cos\varphi.$$

Si nous observons qu'en vertu de la rotation $\delta\varphi$, la coordonnée x du point M diminue, le déplacement δx est négatif, et nous aurons :

$$\delta x = - r \sin \varphi \, \delta \varphi,$$

$$\delta y = r \cos \varphi \, \delta \varphi.$$

D'ailleurs, on a aussi :

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

et, par conséquent,

$$\delta x = - y \delta \varphi,$$

$$\delta y = x \delta \varphi.$$

En substituant dans l'équation des moments virtuels, il vient :

$$\Sigma (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) \, \delta \varphi = 0,$$

et comme $\delta \varphi$ est le même pour tous les points du corps, et que, d'ailleurs, il est arbitraire, on a :

$$\Sigma (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0.$$

En opérant de la même manière pour les rotations autour des axes des x et des y, on trouve les deux équations :

$$\Sigma (\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = 0,$$

$$\Sigma (\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x) = 0.$$

Ces trois dernières équations sont les équations d'*équilibre de rotation* (n° **301**).

Remarque. — On peut encore obtenir les six équations d'équilibre d'un corps solide de la manière suivante :

Reprenons l'équation des moments virtuels :

$$\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0\,;$$

le mouvement le plus général d'un corps pouvant être déterminé par une translation et une rotation, nous aurons évidemment pour la vitesse d'un point M du corps :

$$v_x = u_x + qz - ry,$$

$$v_y = u_y + rx - pz,$$

$$v_z = u_z + py - qx,$$

en désignant par u_x, u_y, u_z les composantes de la vitesse de translation, et par p, q, r les composantes de la vitesse de rotation.

Or, si nous remplaçons dans l'équation des moments virtuels, δx, δy, δz par les composantes de la vitesse du point M dans le mouvement virtuel considéré, il vient :

$$\Sigma\{X(u_x + qz - ry) + Y(u_y + rx - pz) + Z(u_z + py - qx)\} = 0;$$

mais, les composantes u_x, u_y, u_z, p, q, r *étant des quantités indépendantes de* x, y, z, on peut les faire sortir du signe Σ, et il viendra[1] :

1. Il est, en effet, évident que ces composantes sont les mêmes pour tous les points du corps, la translation et la rotation étant les mêmes pour tous ces points.

$$u_x \Sigma X + u_y \Sigma Y + u_z \Sigma Z + p\Sigma (Zy - Yz) + q\Sigma (Xz - Zx) + r\Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

D'ailleurs, les six quantités u_x, u_y, u_z, p, q, r étant arbitraires, on en conclut les six équations :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma (Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

Réciproquement, si ces équations sont vérifiées, l'équation :

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

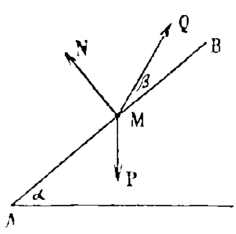
sera vraie pour tout mouvement virtuel du corps solide.

Par conséquent, les six équations qui précèdent sont les *conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces appliquées à un corps solide libre.*

390. Problème. — *Un point matériel* M, *posé sur un plan incliné est sollicité par une force* P, *et maintenu en équilibre par une force* Q, *faisant un angle* β *avec le plan. On demande de déterminer la force* Q *et la pression du point* M *sur le plan.*

Soit α l'inclinaison du plan AB sur l'horizon (fig. 135).

Fig. 135.



Donnons au point M un déplacement virtuel δs compatible avec les liaisons ; ce déplacement sera évidemment situé dans le plan incliné, et nous aurons :

$$P\delta s \cos (P, \delta s) + Q\delta s \cos (Q, \delta s) = 0.$$

Or, si le déplacement δs est perpendiculaire à P, l'angle $(P, \delta s) = 90°$, d'où $\cos (P, \delta s) = 0$, et, par suite, on a :

$$\cos (Q, \delta s) = 0 ;$$

donc, *la force* Q *doit être située dans le plan vertical normal au plan incliné.*

Prenons ensuite le déplacement virtuel suivant BA, nous aurons :

$$\cos(P, \delta s) = \sin\alpha, \quad \cos(Q, \delta s) = -\cos\beta,$$

et l'équation précédente nous donne :

$$P\sin\alpha - Q\cos\beta = 0\,;$$

d'où :

$$Q = \frac{P\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Pour déterminer la pression du point sur le plan, nous rendrons le point M *libre*, en introduisant la réaction normale N ; nous pouvons alors donner au point M un déplacement virtuel *quelconque*, par exemple suivant la normale MN au plan incliné : le travail virtuel de N sera $N\delta s$, et nous aurons pour l'équation des moments virtuels :

$$-P\delta s\cos\alpha + Q\delta s\sin\beta + N\delta s = 0\,;$$

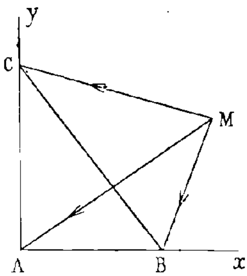
d'où l'on tire :

$$N = P\cos\alpha - Q\sin\beta = \frac{P\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

391. Problème. — *Un point* M *est sollicité vers trois points* A, B, C *par des forces respectivement égales à* mr, $m'r'$, $m''r''$, m, m', m'' *étant des coefficients constants,* r, r', r'' *les distances du point* M *aux trois points* A, B, C. *L'angle* BAC *est droit. On demande la position d'équilibre du point* M.

Prenons les droites AB et AC pour axes des x et des y (fig. 136), l'axe des z étant perpendiculaire au plan BAC, et posons :

Fig. 136.



$$AB = a, \quad AC = b.$$

Les composantes de la force qui attire le point M vers le point A sont[1] :

$$-mx, \; -my, \; -mz\,;$$

par conséquent, le moment virtuel de cette force est :

$$-m\,(x\delta x + y\delta y + z\delta z).$$

De même, le moment virtuel de la force qui attire le point M vers le point B est :

$$-m'\left\{(x-a)\,\delta x + y\delta y + z\delta z\right\},$$

et le moment virtuel de la force qui attire le point M vers le point C est :

$$-m''\left\{x\delta x + (y-b)\,\delta y + z\delta z\right\}.$$

Si nous égalons à zéro la somme des moments virtuels, et si nous posons $M = m + m' + m''$, il vient :

$$-M\,(x\delta x + y\delta y + z\delta z) + m'a\delta x + m''b\delta y = 0,$$

1. Les cosinus directeurs sont $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$, la force étant dirigée vers le point A.

ou bien :

$$(m'a - Mx)\,\delta x + (m''b - My)\,\delta y - Mz\delta z = 0. \quad (1)$$

Mais, le déplacement virtuel étant arbitraire, nous devrons égaler les trois coefficients à zéro, ce qui nous donne :

$$x = \frac{m'a}{m + m' + m''}, \quad y = \frac{m''b}{m + m' + m''}, \quad z = 0.$$

Ces équations déterminent la position d'équilibre du point M : l'équation $z = 0$ nous apprend que cette position est dans le plan BAC. Il résulte de ces formules que la position d'équilibre est précisément le centre de gravité du système A, B, C, ce qui était à prévoir (n° **324**).

Remarque. — Nous avons supposé le point M libre ; si ce point ne pouvait que se mouvoir dans un plan représenté par l'équation :

$$Ax + By + Cz = D, \qquad (2)$$

on en conclurait que les variations δx, δy, δz doivent satisfaire à l'équation de compatibilité :

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z = 0. \qquad (3)$$

En éliminant une variation entre les équations (1) et (3), et égalant à zéro les coefficients des deux autres, qui sont indéterminées, il vient, en ayant égard à l'équation (2) :

$$\frac{Mx - m'a}{A} = \frac{My - m''b}{B} = \frac{Mz}{C}$$

$$= \frac{M(Ax + By + Cz) - m'Aa - m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{MD - m'Aa - m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

En égalant chacun des trois premiers rapports au cinquième, nous aurons trois équations pour déterminer les valeurs de x, y, z correspondantes à la position d'équilibre.

Il n'est pas inutile de remarquer que les trois premiers rapports forment les équations d'une droite passant par le centre de gravité du système A, B, C, et perpendiculaire au plan (2). La position d'équilibre est cette perpendiculaire.

CHAPITRE IX.

Attraction des corps.

392. Les phénomènes astronomiques et physiques nous conduisent à reconnaître que tous les corps de la nature s'attirent : deux éléments infiniment petits s'attirent proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de leur distance.

D'après cela, l'action mutuelle de deux éléments infiniment petits dm et dm' sera donnée par l'expression :

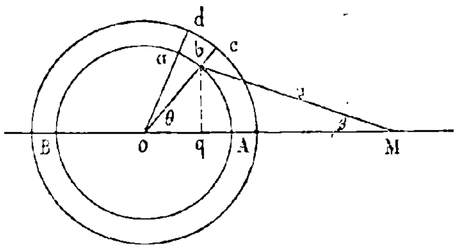
$$\frac{f dm\, dm'}{u^2},$$

en désignant par u la distance de ces deux éléments, et par f l'action exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

393. Proposons-nous d'abord de déterminer *l'attraction exercée par une couche sphérique homogène infiniment mince sur un élément dm', situé en un point* M *à une distance a du centre de la couche.*

Soient O le centre de la couche (fig. 137), $OM = a$ la distance du point attiré au centre de la couche. Par le centre et l'élément M menons un plan qui coupera la

Fig. 137.



couche sphérique suivant une section annulaire, et menons deux rayons Oad, Obc infiniment rapprochés l'un de l'autre.

Soient $Oa = r$, et $ad = bc = dr$ l'épaisseur de la couche; posons $bOM = \theta$, $bMO = \beta$, $bOa = d\theta$, et $bM = u$.

L'élément $abcd$ a pour surface $rd\theta dr$; en tournant autour de OM, la section annulaire engendrera la couche sphérique, et l'élément $abcd$ engendrera un anneau de cette couche. En vertu du théorème de Guldin (n° **339**), le volume de cet anneau est :

$$rd\theta\, dr \,.\, 2\pi \,.\, bq = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr.$$

D'ailleurs, un élément de cet anneau exerce sur l'élément dm' en M une attraction dirigée suivant bM, et égale à :

$$\frac{f dm\, dm'}{u^2}.$$

Mais les éléments de l'anneau sont symétriquement placés par rapport à OM. Si nous considérons deux éléments symétriques par rapport à OM, la résultante de leurs actions sur M sera dirigée suivant OM, et égale au double de la projection sur OM de l'une de ces actions. Cette résultante sera donc :

$$\frac{2f dm\, dm'}{u^2} \cdot \cos \beta.$$

L'action totale de l'anneau étant la résultante des actions de ses éléments, elle aura pour valeur :

$$\frac{2f dm'}{u^2} \cos \beta \cdot \frac{1}{2}\int dm = \frac{f dm'}{u^2} \cos \beta \int dm.$$ [1]

Or, le volume de l'anneau étant :

$$2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr,$$

sa masse sera, en désignant par ρ la densité,

$$2\pi \rho r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr,$$

---

1. Observons que nous ne devons prendre que $\frac{1}{2}\int dm$, parce que l'expression :

$$\frac{2 f dm'}{u^2} \cos \beta . dm$$

est la résultante des actions de deux éléments symétriques ; par conséquent, pour avoir l'action de la masse totale de l'anneau, nous ne devons prendre que la moitié de la masse de cet anneau.

et l'action de l'anneau sur le point M sera :

$$f\rho \frac{2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr}{u^2}\, dm' \,.\cos\beta.$$

Tous les anneaux élémentaires auront de même leur action dirigée suivant OM ; par conséquent, nous aurons l'action totale de la couche sphérique en intégrant l'expression précédente entre les limites de la couche, c'est-à-dire depuis $\theta = 0$, jusque $\theta = \pi$.

Mais, pour intégrer cette expression, nous devons lui faire subir une transformation. On a :

$$r^2 = a^2 + u^2 - 2au\cos\beta,$$

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

d'où :

$$\cos\beta = \frac{a^2 + u^2 - r^2}{2au},$$

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{udu}{ar};$$

d'ailleurs, de la deuxième formule on tire :

$$\text{pour } \theta = 0, \quad u = a - r,$$

$$\text{»} \quad \theta = \pi, \quad u = a + r.$$

Si donc nous désignons par I l'action totale de la couche, il vient :

$$I = 2\pi\rho f dm' \int_{a-r}^{a+r} \frac{r^2 dr}{u^2} \cdot \frac{a^2 + u^2 - r^2}{2au} \cdot \frac{udu}{ar},$$

ou bien, en observant que r et dr sont constants, puisque la couche est donnée :

$$I = \frac{\pi\rho f dm' \,.\, r dr}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du = 4\pi\rho f dm' \,.\, \frac{r^2 dr}{a^2}.$$

Or, $4\pi r^2$ est la surface intérieure de la couche, $4\pi r^2 dr$ son volume, et $4\pi\rho r^2 dr$ sa masse. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *L'action d'une couche sphérique homogène infiniment mince sur un point extérieur est égale à celle qu'exercerait la masse entière de cette couche concentrée à son centre.*

394. Si le point M où se trouve l'élément dm' est à l'intérieur de la couche, les limites de l'intégrale seront $r - a$ et $r + a$, et nous aurons :

$$I = \frac{\pi\rho f dm' \,.\, r dr}{a^2} \int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du = 0.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème. — *L'action d'une couche sphérique homogène infiniment mince sur un point situé à l'intérieur de cette couche est nulle.*

On peut encore énoncer cette propriété de la manière suivante :

PROPRIÉTÉ. — *En quelque point que l'on place la masse dm' à l'intérieur de la couche sphérique, elle est en équilibre.*

395. Pour obtenir l'action exercée par *une couche sphérique d'épaisseur finie*, comprise entre deux sphères de rayon R' et R, il suffira d'intégrer l'expression précédente entre ces deux limites, et nous aurons alors :

$$A = \frac{4\pi\rho f dm'}{a^2}\int_{R'}^{R} r^2 dr = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - R'^3) f dm'}{a^2}.$$

Or, $\frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - R'^3)$ est la masse de la couche sphérique, et nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'action exercée par une couche sphérique d'épaisseur finie sur un point extérieur est la même que si la masse entière de cette couche était concentrée à son centre.*

396. Pour obtenir l'action exercée *par une sphère entière* sur un point extérieur, il suffit de faire $R' = 0$, et il vient :

$$A = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3 f dm'}{a^2}.$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'action exercée par une sphère homogène sur un point extérieur est la même que si la masse entière de la sphère était concentrée à son centre.*

27

397. Si l'on veut déterminer l'*action exercée par une sphère sur un point placé à l'intérieur de cette sphère*, on divisera cette sphère en deux parties : l'une intérieure sera une sphère de rayon R' sur la surface de laquelle le point serait placé ; l'autre sera une couche sphérique d'épaisseur R — R'. L'action de cette dernière partie sur le point, qui sera intérieur à cette couche, est nulle. L'action totale de la sphère sur le point se réduira donc à l'action de la sphère de rayon R' sur le point dm' ; mais, ce point étant sur cette sphère, on a : $a = R'$, et, par suite, l'action de cette sphère sur le point est :

$$\frac{4}{3}\pi\rho f dm' \,.\, R' \,;$$

ce sera l'action exercée par la sphère entière sur le point intérieur.

Remarque. — Les résultats précédents s'étendent au cas d'un corps composé de *couches sphériques et concentriques*, *dont la densité varie de l'une à l'autre suivant une loi quelconque*, mais de telle sorte que cette densité reste constante dans toute l'étendue d'une même couche.

En effet, si le point M est à l'intérieur du corps, la résultante des actions de chaque couche élémentaire étant nulle, l'action totale est aussi nulle. Si le point M est à l'extérieur du corps, chaque couche élémentaire agit comme si toute sa masse était concentrée à son centre ; par conséquent, l'action du corps entier sur ce point sera la même que si la masse totale de ce corps était concentrée à son centre.

398. Il est facile de calculer *l'action mutuelle de deux sphères extérieures l'une à l'autre*. Soient R et R' les rayons de ces deux sphères, a la distance des centres : Tous les points de la première sphère attirent une molécule de la seconde comme s'il étaient réunis au centre. On peut donc remplacer la première sphère par un point d'une masse égale à $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$. De la même manière, l'action exercée par la seconde sphère sur ce point est la même que si la masse $\frac{4}{3}\pi\rho' R'^3$ de cette seconde sphère était concentrée à son centre. Par conséquent, l'action mutuelle des deux sphères est :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3 \cdot \frac{4}{3}\pi\rho' R'^3 \cdot f}{a^2} = \frac{16}{9}\,\frac{\pi^2\rho\rho' f R^3 R'^3}{a^2}.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux sphères homogènes (ou composées de couches homogènes dont la densité varie d'une couche à l'autre) s'attirent comme deux molécules de mêmes masses que ces sphères et placées à leurs centres respectifs.*

La même propriété existe pour *deux sphères creuses composées de couches homogènes.*

Attraction d'un corps de forme quelconque sur un point matériel.

399. Considérons un corps de forme quelconque, rapporté à trois axes rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de ce corps, ρ la densité en ce point, f le coefficient d'attraction, c'est-à-dire l'action exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. L'action exercée par un élément dm de ce corps sur un élément dm', dont les coordonnées sont a, b, c, situé à une distance r de l'élément dm sera :

$$\frac{f dm dm'}{r^2}.$$

Or, on a :

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz,$$

et, par suite, l'action de dm sur dm' est :

$$\frac{f\rho\, dm' . dx\, dy\, dz}{r^2}.$$

Les composantes de cette action suivant les axes sont :

$$f\rho\, dm'\, dx\, dy\, dz \; . \frac{x - a}{r^3},$$

$$f\rho\, dm'\, dx\, dy\, dz \; . \frac{y - b}{r^3},$$

$$f\rho\, dm'\, dx\, dy\, dz \; . \frac{z - c}{r^3}.$$

Par suite, les composantes de l'action totale du corps sur l'élément dm' sont :

$$X = f dm' \int\int\int \frac{\rho\,(x - a)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

$$Y = f dm' \int\int\int \frac{\rho\,(y - b)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

$$Z = f dm' \int\int\int \frac{\rho\,(z - c)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

les intégrales se rapportant au volume entier du corps.

Il est évident qu'il suffira de changer les signes dans *le cas de la répulsion*.

400. Si *le point* où se trouve l'élément *dm' est extérieur au corps*, il est facile de s'assurer que les composantes X, Y, Z sont finies, et qu'elles s'expriment au moyen des dérivées partielles de la fonction :

$$V = \int \frac{dm}{r} = \int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r},$$

prises par rapport aux coordonnées a, b, c de l'élément dm'.

En effet, on a :

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\int\int \frac{\rho\,(x-a)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int\int\int \frac{\rho\,(y-b)\, dx\, dy\, dz}{r^3},$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \int\int\int \frac{\rho\,(z-c)\, dx\, dy\, dz}{r^3};$$

d'où :

$$X = f dm' \frac{\partial V}{\partial a},$$

$$Y = f dm' \frac{\partial V}{\partial b},$$

$$Z = f dm' \frac{\partial V}{\partial c}.$$

Cette fonction V est la *fonction potentielle* de l'élément par rapport à la masse attirante. On conclut de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les composantes de l'attraction d'un corps sur un point extérieur sont exprimées au moyen des dérivées partielles de la fonction potentielle par rapport aux coordonnées du point attiré.*

Par conséquent, le calcul se réduit à la détermination de la fonction V.

401. PROPRIÉTÉ. — *Dans le cas où le point attiré est extérieur, la somme des dérivées partielles du second ordre de la fonction* V *est nulle.*

En effet, on a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz \,.\, \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x-a}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz \,.\, \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{y-b}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz \,.\, \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{z-c}{r^3}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz \left\{ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x-a}{r^3}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{y-b}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{z-c}{r^3}\right) \right\}.$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x-a}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{y-b}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{z-c}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5};$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x-a}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{y-b}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{z-c}{r^3}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0.$$

On représente d'ordinaire le premier membre par la notation ΔV, en posant :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2},$$

et alors on a, pour le cas du point attiré extérieur,

$$\Delta V = 0.$$

C'est la *formule de Laplace*.

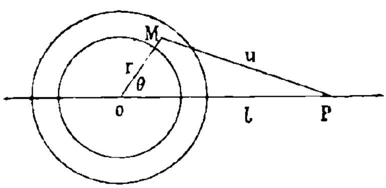
402. Les deux propriétés de la fonction V que nous venons de démontrer ont été établies en supposant finies les quantités sous le signe $\int$ dans les expressions de

X, Y, Z, ainsi que dans la fonction V, c'est-à-dire que nous avons supposé *le point attiré à l'extérieur du corps attirant*. Cette hypothèse nous a permis de différentier sous le signe $\int$. La formule de Laplace est évidemment encore applicable dans le cas d'un corps creux, le point attiré étant dans la cavité.

Lorsque *le point attiré fait partie du corps attirant*, la quantité sous le signe $\int$ devient infinie pour tous les points situés dans le voisinage du point attiré, et alors on ne peut plus opérer comme nous l'avons fait. Avant d'examiner ce cas, nous devons chercher la *fonction potentielle d'une couche sphérique homogène*.

Considérons donc une *couche sphérique homogène* comprise entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, de même centre O. Soient P le point attiré (fig. 138), $OP = l$ sa distance au centre O, θ l'angle que fait avec la droite OP le rayon qui va du centre O à un point M de la couche, φ l'angle que fait le plan MOP avec un plan fixe passant par OP, et u la distance MP. En désignant par ρ la densité de la couche, et par dv l'élément de volume au point M, on a, pour la fonction potentielle :

Fig. 138.



$$V = \int \frac{dm}{u} = \int \frac{\rho dv}{u};$$

en remplaçant dv par sa valeur :

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

il vient :

$$V = \rho r^2 dr \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{u} d\theta\, d\varphi ;$$

les limites de θ sont 0 et π, celles de φ sont 0 et 2π.

En effectuant l'intégration rélative à φ, on a :

$$V = 2\pi\rho r^2 dr \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{u} d\theta.$$

Pour effectuer cette dernière intégrale, nous devons la transformer. A cet effet, observons que l'on a :

$$u^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta,$$

d'où :

$$udu = rl\sin\theta\, d\theta,$$

et, par suite,

$$V = \frac{2\pi\rho r dr}{l} \int du.$$

Pour déterminer les limites de u, nous devons distinguer deux cas, suivant que le point P est extérieur ou intérieur à la sphère de rayon r.

Dans le premier cas, les limites de u sont $l - r$ et $l + r$, et il vient :

$$V = \frac{2\pi\rho r dr}{l} \int_{l-r}^{l+r} du = \frac{4\pi\rho r^2 dr}{l} = \frac{M}{l}, \qquad (1)$$

en désignant par M la masse de la couche. Donc, *la fonction potentielle de la couche sphérique pour un point extérieur est la même que si la masse de la couche était concentrée à son centre.*

Dans le second cas, les limites de u sont $r - l$ et $r + l$, et il vient :

$$V = \frac{2\pi\rho r dr}{l}\int_{r-l}^{r+l} du = 4\pi\rho r dr = \frac{M}{r}. \qquad (2)$$

Donc, *la fonction potentielle de la couche sphérique pour un point intérieur est constante, c'est-à-dire indépendante de la position du point* P.

403. Considérons maintenant *un point* P, *situé à l'intérieur d'une sphère homogène de rayon* r, *et à une distance du centre égale à* l.

Nous pouvons imaginer la sphère décomposée en couches homogènes concentriques. Pour les couches dont le rayon est moindre que l, le point P est extérieur ; nous devrons donc leur appliquer la formule (1) (n° **402**), et elles nous donneront une fonction potentielle égale à :

$$\frac{4\pi\rho}{l}\int_0^l r^2 dr = \tfrac{4}{3}\pi\rho l^2.$$

Pour les couches dont le rayon est plus grand que l, le point P est intérieur; nous appliquerons pour ces couches la formule (2) (n° **402**), et elles nous donneront une fonction potentielle égale à :

$$4\pi\rho\int_l^r r\,dr = 2\pi\rho\,(r^2 - l^2).$$

La fonction potentielle de la sphère entière est donc :

$$V = \frac{2\pi\rho}{3}(3r^2 - l^2).$$

Cela posé, si l'on veut calculer l'action de cette sphère sur le point P, on remarquera que les couches dont le rayon est plus grand que l n'exercent aucune action sur le point P, tandis que les couches dont le rayon est moindre que l agissent comme si elles étaient concentrées au centre O de la sphère. La résultante des actions est donc une force égale à :

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho f dm' . l,$$

et elle est dirigée suivant la droite OP ; elle a pour composantes suivant les axes :

$$-\tfrac{4}{3}\pi\rho f dm' . (a-\alpha), -\tfrac{4}{3}\pi\rho f dm' . (b-\beta), -\tfrac{4}{3}\pi\rho f dm' . (c-\gamma),$$

en désignant par a, b, c les coordonnées du point P, et par α, β, γ les coordonnées du centre de la sphère.

Il est évident que ces composantes sont égales au produit de fdm' par les dérivées partielles de la fonction potentielle V, prises respectivement par rapport aux coordonnées a, b, c du point P : il suffit, pour s'en assurer, d'observer que l'on a :

$$l^2 = (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2.$$

404. Ceci établi, nous allons démontrer que, *dans le cas où le point attiré par un corps de forme quelconque est situé à l'intérieur de la masse agissante, les composantes de la force sont égales aux dérivées partielles de la fonction potentielle* V, *multipliées par* fdm'.

Supposons la densité ρ constante, et décomposons la masse agissante en deux parties, savoir : une petite sphère, à l'intérieur de laquelle est situé le point P, et la partie restante. Soient V_1, V_2 les fonctions potentielles de ces deux parties, X_1, X_2 les composantes suivant l'axe des x des actions qu'elles exercent sur le point P. Nous aurons, puisque le point P ne fait pas partie du second corps (n° **400**) :

$$X_2 = fdm' \frac{\partial V_2}{\partial a};$$

d'autre part, on a aussi (n° **403**) :

$$X_1 = fdm' \frac{\partial V_1}{\partial a};$$

par conséquent,

$$X = X_1 + X_2 = fdm' \left(\frac{\partial V_1}{\partial a} + \frac{\partial V_2}{\partial a}\right) = fdm' \frac{\partial V}{\partial a},$$

et la propriété est démontrée.

405. Cherchons ensuite ce que devient, dans le cas d'un point situé à l'intérieur, la fonction :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}.$$

En décomposant le corps comme nous l'avons fait (n° **404**), nous avons, comme ci-dessus :

$$V = V_1 + V_2.$$

Or, le point P n'étant pas situé dans la partie extérieure à la sphère, on a (n° **401**) :

$$\Delta V_2 = 0.$$

Mais, pour la sphère, on a :

$$\frac{\partial V_1}{\partial a} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(a-\alpha),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial b} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(b-\beta),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial c} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho\,(c-\gamma);$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial a^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial b^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial c^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho.$$

Par conséquent,

$$\Delta V_1 = -4\pi\rho,$$

et, par suite,

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Telle est l'expression de ΔV dans le cas où le point attiré est à l'intérieur de la masse agissante, le corps étant supposé homogène.

Remarque. — *Si le corps attirant n'est pas homogène*, on a :

$$\Delta V = -4\pi\rho_p,$$

en désignant par ρ_p la densité du corps au point attiré P.

Cette formule dont nous donnerons dans la suite une démonstration rigoureuse pourrait être établie de la manière suivante :

La sphère enveloppant le point attiré P peut être prise aussi petite que l'on voudra, pourvu qu'elle contienne le point P. On peut la prendre assez petite pour que sa densité soit constante et égale à la densité ρ_p du corps au point P. Nous pourrons donc appliquer la démonstration précédente, et nous aurons alors :

$$\Delta V = -4\pi\rho_p.$$

Cette *formule* qui est due à Poisson, peut être regardée comme générale, pourvu que l'on convienne de faire $\rho_p = 0$ pour les points extérieurs à la masse agissante.

CHAPITRE X.

Notions sur le frottement.
Applications de la statique.

406. Jusqu'ici nous avons considéré les surfaces comme parfaitement polies, c'est-à-dire comme ne pouvant exercer en un de leurs points qu'une réaction dirigée suivant la normale en ce point. Il en résulte que, si deux corps solides sont appuyés l'un sur l'autre, et se trouvent en équilibre sous l'action des forces qui leur sont appliquées, l'introduction d'une force nouvelle viendra rompre l'équilibre.

L'expérience nous apprend que, dans la pratique, il n'en est pas ainsi. Dans la plupart des cas, on peut appliquer une force nouvelle sans que l'équilibre soit troublé : cette force sera plus ou moins grande selon la nature des corps en contact. Ainsi, la même force agit d'autant plus rapidement que les surfaces en contact sont mieux polies, et que la pression qu'elles exercent l'une sur l'autre est moindre. La cause de ce fait se trouve dans ce phénomène que les surfaces imparfaitement polies présentent des aspérités qui s'engrènent réciproquement, et cette pénétration est d'autant plus grande que la pression est plus grande. Il faut, pour vaincre cette résistance, une force capable de briser ces aspérités, une force que l'on appliquera à l'un des corps si l'autre est fixe, et à tous les deux en sens contraires, s'ils sont mobiles.

Par exemple, si un corps pesant est appuyé sur un plan incliné, le poids de ce corps tend à le faire glisser le long du plan incliné.

Théoriquement, le corps devrait glisser : mais, dans la pratique, on sait que l'on peut, sous une certaine inclinaison, appuyer un corps *librement* sur un plan incliné, sans qu'il obéisse à la force qui tend à le faire glisser. La force contraire qui retient le corps est une résistance qui se produit entre les surfaces en contact, qui dépend de ces surfaces, et de la pression normale au plan incliné. Pour vaincre cette résistance, ou pour faire glisser le corps, il faut un effort capable de briser ces aspérités. Cette résistance est celle du *frottement* : c'est le *frottement de glissement*. Elle est d'autant plus grande que les aspérités sont plus nombreuses, et la pression normale plus grande.

Les lois du frottement ont été établies par l'expérience par Coulomb et par le général Morin. Voici l'énoncé de ces lois :

Quand un corps mobile glisse sur une surface fixe, le frottement qu'il subit est une force tangentielle à la surface, et dirigée en sens contraire du mouvement. Cette force dépend de la nature des surfaces en contact. Elle est indépendante de leur étendue et de la vitesse de glissement ; enfin, elle est proportionnelle à la pression qui s'exerce normalement à ces surfaces.

Il est évident d'ailleurs, en vertu du principe de l'action et de la réaction, que la surface fixe sur laquelle le glissement a lieu subit un frottement égal et contraire.

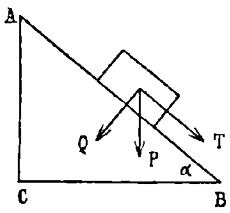
Il résulte des lois précédentes, que si N est la pression normale aux surfaces en contact, le frottement de glissement sera représenté par une force μN, normale à à la direction de N et agissant en sens contraire du mouvement. Le coefficient μ qui dépend de la nature des surfaces en contact, du degré de poli de ces surfaces, s'appelle *coefficient de frottement*. Ce coefficient se détermine par expérience.

On doit encore distinguer le *frottement statique* et le *frottement dynamique*. Le *frottement statique* est la résistance qu'il faut vaincre pour déterminer le commencement du mouvement : c'est le *frottement au départ* du corps. Le *frottement dynamique* est la résistance qu'il faut vaincre pendant toute la durée du mouvement. L'expérience a démontré que le frottement statique ou au départ, est toujours plus grand que le frottement dynamique.

407. Problème. — *Un corps pesant est posé sur un plan incliné : trouver sous quelle inclinaison du plan ce corps commencera à glisser.*

Soit P le poids du corps (fig. 139) : décomposons cette force en deux forces Q et T respectivement normale et parallèle au plan incliné AB. La pression normale est évidemment égale à la force Q : par conséquent, le frottement subi par le corps de la part du plan sera égal à μQ, et dirigé en sens contraire du mouvement. Le glissement ne pourra donc commencer que si la force T est égale à μQ, et nous aurons :

Fig. 139.



$$T = \mu Q ;$$

or, on a :

$$T = P \sin \alpha, \quad Q = P \cos \alpha,$$

d'où :

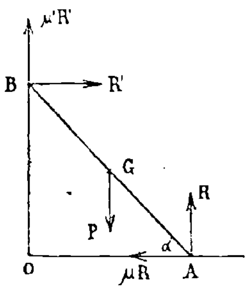
$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

REMARQUE. — Cette équation fournit un moyen pratique de déterminer le coefficient μ de frottement. Il suffit de rendre le plan AB mobile autour de l'horizontale B, de placer le corps sur le plan, et de déterminer l'angle α pour lequel le glissement commence.

408. PROBLÈME. — *Une barre pesante et homogène appuie ses extrémités l'une sur un plan horizontal, l'autre contre un plan vertical, et elle est perpendiculaire à l'intersection des deux plans. Trouver la position d'équilibre de cette barre.*

Soient AB = $2l$ la longueur de la barre (fig. 140), et P son poids appliqué en son milieu G, R et R′ les réactions des deux plans, normales à ces plans; les frottements en A et B seront μR et μ'R′, en supposant les deux plans de natures différentes.

Fig. 140.



En transportant toutes les forces au point O pris pour origine, nous aurons les équations :

$$R' - \mu R = 0,$$

$$R + \mu' R' - P = 0,$$

$$R' . 2l \sin \alpha + P l \cos \alpha - R . 2l \cos \alpha = 0.$$

Des deux premières on tire :

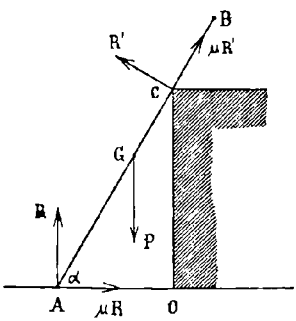
$$R = \frac{P}{1 + \mu\mu'}, \quad R' = \frac{\mu P}{1 + \mu\mu'};$$

en substituant dans la troisième, il vient :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}.$$

409. Problème. — *Une barre pesante et homogène est appuyée sur un plan horizontal et contre l'arète d'un mur vertical. Trouver la position d'équilibre.*

Fig. 141.



Soient $AB = 2l$ la longueur de la barre (fig. 141), P son poids appliqué en son milieu G, R et R' les réactions aux deux points A et C, et posons :

$$GC = x, \quad \text{et} \quad OC = h.$$

Transportant toutes les forces au point O pris pour origine, nous aurons les équations d'équilibre suivantes :

$$-\mu R + R' \sin \alpha - \mu R' \cos \alpha = 0,$$

$$R - P + R' \cos \alpha + \mu R' \sin \alpha = 0,$$

$$R\,(l + x) \cos \alpha - Px \cos \alpha - R'h \sin \alpha + \mu R'h \cos \alpha = 0.$$

D'ailleurs, on a :

$$h = (a + x) \sin \alpha.$$

Ces quatre équations serviront à déterminer R, R', α et x. Des deux premières on tire :

$$R' = \frac{\mu P}{(1 + \mu^2) \sin \alpha}, \quad R = \frac{P (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(1 + \mu^2) \sin \alpha};$$

en remplaçant R, R′ et x par leurs valeurs dans la troisième, il vient :

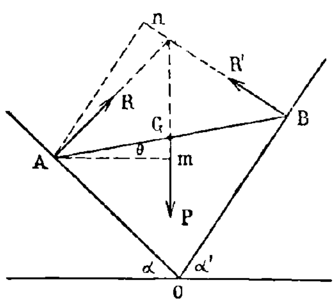
$$\mu h = l(1+\mu^2)\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

équation qui servira à déterminer l'angle α.

410. Problème. — *Une barre pesante et homogène s'appuie sur deux plans inclinés dans le plan vertical* AOB. *On demande la position d'équilibre, en n'ayant pas égard au frottement.*

Soient AB $= 2l$ la longueur de la barre (fig. 142), P son poids appliqué en son milieu G, α et α' les inclinaisons des deux plans, et désignons par θ l'angle inconnu BAm, par R et R′ les réactions des deux plans.

Fig. 142.



Transportant toutes les forces au point A pris pour origine, nous aurons les équations suivantes :

$$R\sin\alpha - R'\sin\alpha' = 0,$$

$$R\cos\alpha + R'\cos\alpha' - P = 0,$$

$$Pl\cos\theta - R' \,.\, 2l\cos(\alpha' - \theta) = 0.$$

Des deux premières on tire :

$$R = \frac{P\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

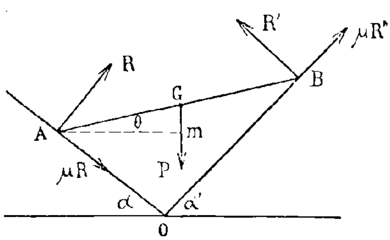
$$R' = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

La troisième nous donne alors :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \alpha'}.$$

Remarque. — Si l'on résout le même problème en tenant compte des frottements μR et μR' en A et B (fig. 143), on trouve les équations suivantes :

Fig. 143.



$$R \sin \alpha - R' \sin \alpha' + \mu R' \cos \alpha' + \mu R \cos \alpha = 0,$$

$$R \cos \alpha + R' \cos \alpha' + \mu R' \sin \alpha' - \mu R \sin \alpha - P = 0,$$

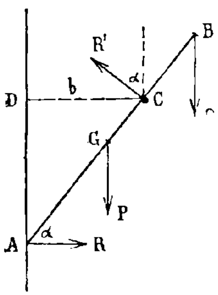
$$Pl \cos \theta - R' \,.\, 2l \cos(\alpha' - \theta) - \mu R' \,.\, 2l \sin(\alpha' - \theta) = 0,$$

lesquelles serviront à déterminer R, R' et θ.

411. Problème. — *Une barre pesante et homogène* ACB *appuie son extrémité inférieure* A *contre un plan vertical, repose en* C *sur un point fixe, et porte un poids* Q *à son extrémité supérieure* B. *Trouver la position d'équilibre sans avoir égard au frottement.*

Soit AB $= 2l$ la longueur de la barre (fig. 144); posons CD $= b$, et AC $= x$, et désignons par R et R′ les réactions en A et C et par α l'inclinaison de la barre.

Fi



En prenant pour origine le point A nous aurons les équations d'équilibre suivantes :

$$R - R'\sin\alpha = 0,$$

$$R'\cos\alpha - P - Q = 0,$$

$$Pl\cos\alpha - R'x + Q \cdot 2l\cos\alpha = 0.$$

On a, en outre,

$$b = x\cos\alpha.$$

Des deux premières on tire :

$$R' = \frac{P + Q}{\cos\alpha}, \quad R = (P + Q)\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

substituant dans la troisième, et remplaçant x par sa valeur, il vient :

$$\cos\alpha = \left(\frac{b\,(P + Q)}{2l\left(\frac{P}{2} + Q\right)}\right)^{\frac{1}{3}};$$

on a aussi :

$$x = \frac{b}{\cos\alpha} = \left\{\frac{2lb^2\left(\frac{P}{2} + Q\right)}{P + Q}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Cas particulier. — Si la barre homogène est sans poids, on a : $P = 0$; d'où :

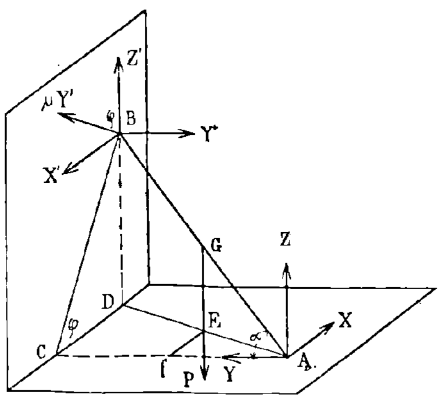
$$x = (2 l b^2)^{\frac{1}{3}}.$$

On voit que, dans ce cas, la valeur de x est indépendante de Q.

412. Problème. — *Une barre pesante et homogène est maintenue par une extrémité en un point* A *d'un plan horizontal, autour duquel elle est libre de tourner, et s'appuie obliquement par l'autre extrémité* B *contre une paroi verticale. Sa projection* BC *sur le plan vertical fait un angle* φ *avec la ligne de terre. On demande la valeur limite de l'angle* φ *pour laquelle le frottement en* B *empêchera la barre de glisser.*

Soient P le poids de la barre (fig. 145) appliqué en

Fig. 145.



son milieu G, $AB = l$ sa longueur ; posons $AC = a$, et l'angle $BAC = \alpha$. Nous aurons :

$$BC = \sqrt{l^2 - a^2}, \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{a}{l},$$

le triangle BAC étant rectangle en C.

Prenons le point A pour origine de trois axes rectangulaires. La réaction au point A peut être décomposée en trois composantes X, Y, Z suivant les axes ; au point B introduisons la réaction Y' normale au plan vertical. Nous aurons en B un frottement $\mu Y'$ suivant une direction perpendiculaire à BC, et qui aura pour composantes suivant les axes des x et des z :

$$X' = \mu Y' \sin \varphi,$$

$$Z' = \mu Y' \cos \varphi.$$

La barre étant en équilibre sous l'action des forces P, X, Y, Z, X', Y', Z', nous aurons à écrire les six équations d'équilibre. Les trois premières nous donnent :

$$X - \mu Y' \sin \varphi = 0, \tag{1}$$

$$Y - Y' = 0, \tag{2}$$

$$Z + \mu Y' \cos \varphi - P = 0. \tag{3}$$

Pour obtenir les équations des moments, nous transporterons toutes les forces au point A. Or, la force $X' = \mu Y' \sin \varphi$, appliquée en B, peut être transportée en D, en introduisant dans le plan des zx un couple $\mu Y' \sin \varphi . BD = \mu Y' \sqrt{l^2 - a^2} . \sin^2 \varphi$, qui sera négatif ; la force $\mu Y' \sin \varphi$, appliquée en D, ou en C, peut être transportée en A, en introduisant dans le plan des xy un couple négatif qui aura pour moment $\mu Y' \sin \varphi . AC = \mu Y' . a \sin \varphi$.

La force $Z' = \mu Y' \cos \varphi$, appliquée en B, ou en D, donne, en la transportant en C un couple négatif dans le plan des zx, dont le moment est $\mu Y' \cos \varphi . CD = \mu Y' \sqrt{l^2 - a^2} . \cos^2 \varphi$; et, en la transportant de C en A, elle donne un couple positif dans le plan des yz, dont le moment est $\mu Y' . a \cos \varphi$.

La force Y', appliquée en B, nous donne, en la transportant en D un couple positif dans le plan des yz, dont le moment est $Y'.BD = Y'\sqrt{l^2 - a^2}\sin\varphi$, et en la transportant de D en C ou en A, elle donne dans le plan des xy un couple positif dont le moment est $Y'.CD = Y'\sqrt{l^2 - a^2}.\cos\varphi$.

La force P, appliquée en G, peut être transportée en f, en engendrant un couple positif dans le plan des zx, dont le moment est $P.Ef = P.\frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}P\sqrt{l^2 - a^2}.\cos\varphi$, et en la transportant de f en A, elle donne un couple négatif dans le plan des yz, dont le moment est $P.fA = P.\frac{1}{2}a$.

Les trois équations des moments sont donc :

$$\mu Y' a \cos\varphi + Y'\sqrt{l^2 - a^2}\sin\varphi - \tfrac{1}{2}Pa = 0, \quad (4)$$

$$-\mu Y'\sqrt{l^2 - a^2}\sin^2\varphi - \mu Y'\sqrt{l^2 - a^2}\cos^2\varphi$$

$$+ \tfrac{1}{2}P\sqrt{l^2 - a^2}\cos\varphi = 0, \quad (5)$$

$$-\mu Y' a \sin\varphi + Y'\sqrt{l^2 - a^2}\cos\varphi = 0. \quad (6)$$

L'équation (6) nous donne :

$$\mu \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a} = \operatorname{tg}\alpha,$$

équation qui détermine l'angle φ.

De l'équation (5) on tire :

$$Y' = \frac{P\cos\varphi}{2\mu},$$

et, en vertu de (1) et (2) on a :

$$Y = Y' = \frac{P \cos \varphi}{2\mu},$$

$$X = \mu Y' \sin \varphi = \frac{P \sin 2\varphi}{4}.$$

Enfin, l'équation (3) nous donne :

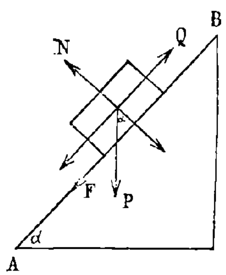
$$Z = \frac{P (1 + \sin^2 \varphi)}{2}.$$

Remarque. — Il est facile de s'assurer que l'équation (4) est une conséquence des autres.

413. Problème. — *Un corps pesant est appuyé sur un plan incliné, et sollicité par une force* Q *qui le maintient en équilibre. On demande de trouver l'intensité de la force* Q, *et la pression du corps sur le plan, en tenant compte du frottement.*

1° Supposons d'abord la *force* Q *parallèle au plan incliné* (fig. 146), et admettons que le corps soit sur le point de glisser de A vers B. Désignons par N la réaction normale du plan, et par F la force de frottement dirigée de B vers A, et égale à μN.

Fig. 146.



Décomposons les forces suivant deux axes respectivement parallèle et perpendiculaire au plan incliné, et nous aurons les équations d'équilibre :

$$N - P \cos \alpha = 0,$$

$$Q - P \sin \alpha - \mu N = 0.$$

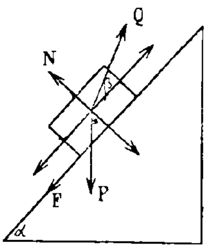
On en tire :

$$N = P \cos \alpha,$$

$$Q = P (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

2° Supposons, en second lieu, que *la force* Q *fasse un angle* β *avec le plan incliné* (fig. 147), et décomposons les forces comme dans le premier cas. Nous aurons les équations d'équilibre :

Fig. 147.



$$N + Q \sin \beta - P \cos \alpha = 0,$$

$$Q \cos \beta - P \sin \alpha - \mu N = 0.$$

On en tire :

$$Q = \frac{P (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

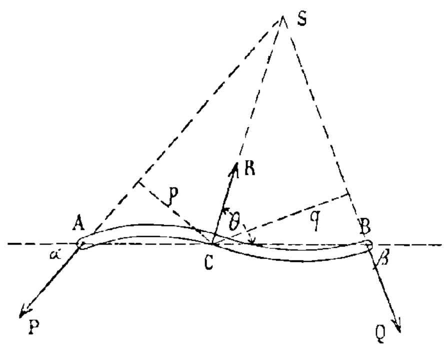
$$N = \frac{P \cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

Remarque. — Nous avons supposé que le corps glissait le long du plan incliné en montant ; s'il glissait en descendant, il suffirait de changer le signe du coefficient μ.

414. Levier. — Le levier est un solide de forme invariable mobile autour d'un point fixe C, appelé *point d'appui* (fig. 148), et sollicité par deux forces, une *résistance* Q, par exemple un poids à soulever, et une *puissance* P.

Proposons-nous de *trouver les conditions d'équilibre*, et *la charge sur le point d'appui*. Désignons par R la réaction du point fixe C. Il faut évidemment pour l'équilibre que les trois forces P, Q, R soient dans un même plan, puisque la résultante de P et Q doit être égale et directement opposée à la réaction R du point fixe. Donc, *la puissance et la résistance doivent être dans un même plan passant par le point d'appui.*

Fig. 148.



Il faut, en outre, que l'on ait la relation :

$$Pp = Qq,$$

c'est-à-dire que *les moments des deux forces par rapport au point d'appui* C *soient égaux.*

Quant à la réaction R du point d'appui, elle est donnée par la formule :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos S,$$

ou bien :

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (\alpha + \beta),$$

en désignant par α et β les angles des deux forces P et Q avec l'horizontale passant par le point C.

Pour déterminer la direction de R, nous désignerons par θ l'angle qu'elle fait avec l'horizontale, et nous aurons les deux équations d'équilibre :

$$P \sin \alpha - R \sin \theta + Q \sin \beta = 0,$$

$$P \cos \alpha - R \cos \theta - Q \cos \beta = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P \sin \alpha + Q \sin \beta}{P \cos \alpha - Q \cos \beta},$$

formule qui détermine l'angle θ.

FIN DU TOME PREMIER.