ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa
Salvatore Pincherle in Bologna
Giuseppe Jung in Milano
Corrado Segre in Torino

SERIE III. * TOMO XXVIII.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—

1919.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXVIII.° (SERIE III.ª)

ULISSE DINI.

Col più profondo dolore annunziamo ai lettori degli *Annali* la morte di **Ulisse Dini,** avvenuta in Pisa, sua città natale, il 28 dello scorso Ottobre. Quivi, nel giorno 30 successivo, un immenso stuolo di cittadini, di amici e di ammiratori, commossi per tanta perdita, ne accompagnarono fra solenni onoranze la salma al Camposanto monumentale, dove, per gratitudine ed ammirazione dei suoi concittadini, Egli riposa accanto ai grandi.

Nato in questa città il 14 Novembre 1845, Egli vi conseguì a 19 anni la laurea, col plauso dei maestri, in particolare degli illustri Betti e Mossotti, che al giovane allievo presagirono un grande avvenire. Dotato di un talento matematico di primo ordine e di prodigiosa attività di lavoro, Egli si fece ben presto conoscere per lavori originali importanti. Le sue prime ricerche appartengono al campo della geometria infinitesimale, dove sommi matematici italiani l'avevano preceduto, in particolare il geniale Beltrami, i cui lavori gli servirono indubbiamente di modello e di incitamento, e col quale si incontrò poi in alcuni studî, benchè fosse di dieci anni più giovane. A questo ramo dell'analisi applicata alla geometria, dove prima si affermò il suo valore matematico, Egli conservò poi sempre un grande amore, e nelle sue lezioni di geodesia all'Università, e nella assegnazione delle tesi agli alunni, ne promosse lo studio, seguendo con interesse lo sviluppo che queste teorie raggiunsero in seguito.

Ma la natura del suo ingegno che ad una singolare forza creatrice congiungeva, in raro accoppiamento, un acume critico di cui difficilmente trovasi l'eguale, doveva portarlo ben presto sulla nuova via, nella quale era destinato a stampare orme maggiori. Nella prefazione ai suoi celebri *Fondamenti* del 1878, Egli stesso racconta come già fin dal suo primo affacciarsi alla vita scientifica, e cioè nel 1865, era in lui sorto il dubbio che alcuni dei principii fondamentali dell'Analisi non presentassero, nei loro enunciati e nelle dimostrazioni, il perfetto rigore che è proprio della matematica. Quanto tali dubbî fossero legittimi tutti ora sanno; ma se ci riportiamo a quei tempi in cui, almeno fra noi, nessuno li aveva sollevati, apparirà quanto singolare fosse l'acume di questo giovane matematico che, vincendo l'abitudine contratta ai concetti intuitivi, ne prendeva a scrutare il fondamento logico. Ma più ancora è da ammirarsi che, sulla scorta soltanto di poche indicazioni contenute nelle Memorie degli allievi di Weierstrass venute a sua cognizione, Egli abbia potuto in poco tempo ricostruire su basi perfettamente solide i fondamenti dell'Analisi. E così nel 1877 apparvero, in litografie per gli studenti, quelle mirabili *Lezioni d'analisi infinitesimale*, sulle quali tanti allievi da allora in poi, in Italia e fuori, si sono formati e che oggi ancora, dopo la stampa recentemente avvenuta (1907-1915), trovano largo plauso e diffusione. Insieme ai già citati: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, che dopo 14 anni, e dopo la comparsa di molti altri lavori congeneri, conservavano ancora tanta vitalità da consigliarne la traduzione in lingua straniera, queste *Lezioni* del **Dini** ornano tutte le biblioteche di studenti e ricercatori.

Un altro trattato, forse ancora più importante per la genialità della ricerca, apparve nel 1880, quello: ***Sulla serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.*** Qui per la prima volta, insieme alle serie di FOURIER e sotto un punto generale di vista, vengono trattati in modo rigoroso altri sviluppi in serie, importantissimi per l'analisi e per la fisica matematica, ed in tale generalità che non è mai stata eguagliata, nonchè superata, da altri. Ma forse appunto questa grande generalità, e la non semplice forma dell'esposizione nocquero alla diffusione del libro, talchè in molte Memorie di matematici posteriori si trovano nuovamente risultati parziali già inclusi nei suoi generali.

Allo stesso periodo appartengono le ricerche pubblicate nel Vol. XVII degli *Annali* delle Università Toscane, in preparazione al progettato secondo Volume dell'Opera, che non potè mai essere pubblicato. Qui si trova la deduzione di nuovi sviluppi in serie da una formola, più generale di una data da ABEL, ed appartenente alla teoria che poi fu detta delle *equazioni integrali*, e di cui adunque il **Dini** è da riguardarsi come un precursore. Sull'argomento è ritornato il **Dini** in lezioni litografate del 1911, dove si contengono molti nuovi ed importanti risultati.

Insieme a questi trattati, le numerose e geniali Memorie d'Analisi pubblicate dal NOSTRO, delle quali daremo l'elenco completo in un prossimo fascicolo, ne hanno collocato il nome accanto a quelli dei nostri sommi. Auguriamo che esse vengano raccolte in Volumi, come già per le opere di BRIOSCHI, BETTI, CREMONA e BELTRAMI, e formino così il più bel monumento da erigersi alla sua memoria.

Ulisse Dini fu non solo un grande scienziato, ma insieme un maestro ed un educatore incomparabile; e nessuno dei suoi numerosi allievi potrà mai dimenticare il fascino che Egli esercitava col suo insegnamento efficace e suggestivo, e quanto amore agli studî ed allo stretto adempimento del dovere Egli sapeva ispirare col suo nobile esempio. Nella R. Scuola Normale Superiore che lo ebbe prima ad allievo, poi a maestro e a ben amato Direttore, Egli ha lasciato i più durevoli ricordi di devozione e di affetto.

La sua attività veramente prodigiosa ebbe campo d'esplicarsi anche fuori della scuola: nelle pubbliche amministrazioni, nelle due Camere e nel Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione, acquistandosi Egli dappertutto, colle doti eccelse della mente e dell'animo, un'ampia ed indiscussa autorità, che Egli volse particolarmente a beneficio dell'insegnamento e delle istituzioni della città natale tanto diletta al suo cuore.

Nella Direzione di questi *Annali*, alla quale appartenne fino dal 1891, Egli lascia un grande vuoto, come grande e sincero è il rimpianto di tutti i cultori della Scienza per tanta perdita.

Il male crudele che lo ha abbattuto, mentre cogli anni non sembrava subire diminuzione alcuna la sua molteplice attività, ha tolto alla patria uno dei figli che più l'amavano e l'onoravano.

Nè a Lui che, fino dal principio della guerra mondiale scatenata dalla cupidigia di barbari aggressori, riconobbe la via segnata all'Italia dalla sua storia e dal diritto e, pur trepidando nelle prove dolorose, ne seguì con fede costante le vicende, è stato concesso di vederne completa la fine gloriosa.

Possa l'Italia nostra, sorta a più grandi destini, produrre ancora dei figli simili a Lui, che ne tengano alto il nome e l'onore nelle gare fra le libere genti!

Pisa, 1.° Novembre 1918.

Per la Direzione LUIGI BIANCHI.

Sopra una classe di funzioni che comprendono come caso particolare le funzioni cilindriche.

(*Di* Filippo Sibirani, *a Pavia.*)

Considero un'equazione differenziale lineare d'ordine k

$$A_{1,k}\, x^k\, y^{(k)} + A_{2,k}\, x^{k-1}\, y^{(k-1)} + \cdots + A_{k,k}\, x\, y' + (A_{k+1,k} + x^k)\, y = 0 \qquad (1)$$

ove i coefficienti $A_{i,k}$ sono certe funzioni razionali di grado $i-1$ in un parametro ν, la quale per $k=2$ si riduce alla ben nota equazione

$$x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0,$$

soddisfatta dalla funzione cilindrica di prima specie $J^\nu(x)$.

Dell'equazione (1) determino (§ 3) un sistema fondamentale di integrali nell'ipotesi che le radici dell'equazione determinante non differiscano per numeri interi. Uno di questi integrali è una funzione $L_{\nu,k}(x)$, che per $k=2$ si riduce a $J^\nu(x)$; la funzione $x^{-\nu} L_{\nu,k}(x)$ è trascendente intera sia rispetto ad x sia rispetto a ν e se ν è un intero positivo tale è anche $L_{\nu,k}$; di $L_{\nu,k}$ dò, per valori molto grandi di $|\nu|$, l'espressione approssimata

$$\frac{x^\nu}{k^\nu\, \Gamma(\nu+1)\, \Gamma(2\nu+1) \ldots \Gamma((k-1)\nu+1)}\, \theta$$

ove $|\theta|$ tende ad 1 al tendere di ν all'infinito.

Determino (§ 6) nel caso di $\nu = 0$ un sistema fondamentale di integrali; uno di essi è della forma $L_{0,k}(x) . \log x + M_1(x)$, ove $M_1(x)$ è una trascendente intera, e si riduce per $k=2$ alla funzione Y^0 che Neumann (*) chiama complementare della funzione J^0 di Bessel.

(*) *Théorie der Besselschen Functionen*, § 17, Leipzig, Teubner, 1867.

Al § 7 introduco una classe di polinomi $H_{n,k}$ di grado n in $\frac{1}{x}$ i quali comprendono per $k=2$ le funzioni cilindriche O^n di NEUMANN; al § 8 dò lo sviluppo di $\frac{1}{y-x}$ mediante le funzioni $H_{n,k}(y)\,L_{n,k}(x)$ e da ciò deduco (§ 9) lo sviluppo in serie di funzioni $L_{n,k}(x)$ per una funzione $f(x)$ regolare in un cerchio di centro il punto $x=0$, lo sviluppo in serie di funzioni $H_{n,k}(x)$ per una funzione regolare fuori di un cerchio di centro $x=0$, lo sviluppo in serie di funzioni $L_{n,k}(x)$, $H_{n,k}(x)$ per una funzione regolare in una corona circolare limitata da due cerchi di centro $x=0$. In particolare dò (§ 10) lo sviluppo di una potenza intera e positiva di x in serie di funzioni $L_{n,k}(x)$ e lo sviluppo di una potenza intera negativa di x in serie di funzioni $H_{n,k}(x)$.

Al § 11 integro mediante le funzioni $L_{0,k}$ le equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_k} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k);$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_k} + u = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

e altri due tipi che si possono ricondurre ai precedenti.

Al § 12 integro mediante le stesse funzioni $L_{0,k}$ le equazioni lineari del tipo

$$\sum_{i=0}^{p} a_{p-i}\,\frac{\partial^{ki} u}{\partial x_1^i\,\partial x_2^i \ldots \partial x_k^i} = \begin{cases} 0 \\ K(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{cases}$$

e sistemi di equazioni lineari contenenti le derivate parziali della forma precedente, a coefficienti costanti.

Al § 13 considero un'equazione alle derivate parziali del 2.° ordine che contiene come casi particolari quelli considerati da NEUMANN e NIELSEN e di cui si dànno ∞^2 integrali particolari mediante le funzioni J^0, Y^0.

Dò infine al § 14 un'espressione integrale di $L_{n,k}$ mediante $L_{0,k}$.

Il lavoro può considerarsi il primo passo in una estensione della teoria delle funzioni cilindriche, rivestente, mi sembra, un carattere più generale delle molte fatte finora.

§ 1. — Alcune identità.

Premettiamo alcune identità che ci saranno utili nel seguito.

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} x^{\overline{k}} &= x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1) = \\ &= x^k - s_{1,k}\, x^{k-1} + s_{2,k}\, x^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} s_{k-1,k}\, x \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

indicando con $s_{h,k}$ la somma di tutti i prodotti di h fattori presi fra i numeri $1, 2, \dots, k-1$.

Posto

$$c_{k,q} = \frac{1}{q!} \Delta^q 0^k \ (*),$$

fra i numeri $c_{k,q}$ passa la relazione

$$c_{k,q} = q\, c_{k-1,q} + c_{k-1,q-1}$$

che permette di calcolarli rapidamente.

Sussistono le relazioni

$$\sum_{p=i+q}^{k} (-1)^{p-i-q} c_{k,p} \binom{p}{i} s_{p-i-q,p-i} = \binom{k}{q} c_{k-q,i} \qquad (3)$$

e

$$\sum_{i=1}^{p} c_{p,i}\, m^{\overline{i}} = m^p . \qquad (4)$$

Indicheremo con $\sigma_{h,k}$ la somma di tutti i prodotti di h fattori presi fra i k numeri $-1, -1+k, -1+2k, \dots, -1+(k-1)k$ e porremo $\sigma_{0,k} = 1$; sarà allora

$$\left.\begin{aligned} \prod_{i=0}^{k-1} \Big(z - \nu(1-ik)\Big) &= \sigma_{0,k}\, z^k + \sigma_{1,k}\, \nu\, z^{k-1} + \sigma_{2,k}\, \nu^2 z^{k-2} + \dots \\ &\dots + \sigma_{k-1,k}\, \nu^{k-1} z + \sigma_{k,k}\, \nu^k . \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(*) Con $\Delta^q 0^k$ si intende la differenza q-esima dei primi termini della successione 0^k, 1^k, $2^k, \dots$

§ 2. — Un'equazione differenziale lineare e la sua equazione determinante.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare d'ordine k

$$A_{1,k}\, x^k\, y^{(k)} + A_{2,k}\, x^{k-1}\, y^{(k-1)} + \cdots + A_{k,k}\, x\, y' + (A_{k+1,k} + x^k)\, y = 0, \tag{1}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} &A_{r,k} = \sigma_{0,k}\, c_{k,k+1-r} + \sigma_{1,k}\, c_{k-1,k+1-r}\, \nu + \sigma_{2,k}\, c_{k-2,k+1-r}\, \nu^2 + \cdots + \sigma_{r-1,k}\, c_{k+1-r,k+1-r}\, \nu^{r-1} \\ &\qquad\qquad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots, k) \\ &A_{k+1,k} = \sigma_{k,k}\, \nu^k \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e ν è un numero qualsivoglia.

L'equazione determinante di codesta equazione, indicando con r l'incognita, è

$$A_{1,k}\, \overline{r^k} + A_{2,k}\, \overline{r^{k-1}} + A_{3,k}\, \overline{r^{k-2}} + \cdots + A_{k-1,k}\, \overline{r^2} + A_{k,k}\, r + A_{k+1,k} = 0. \tag{7}$$

Se si sostituiscono le espressioni (6) per $A_{i,k}$ e si ordina per le potenze di ν, la (7), in virtù della (4), diventa

$$\sigma_{0,k}\, r^k + \sigma_{1,k}\, \nu\, r^{k-1} + \sigma_{2,k}\, \nu^2\, r^{k-2} + \cdots + \sigma_{k-1,k}\, \nu^{k-1}\, r + \sigma_{k,k}\, \nu^k = 0 \tag{8}$$

le cui radici, come mostra la (5), sono

$$\nu,\quad \nu(1-k),\quad \nu(1-2k), \ldots,\quad \nu(1-(k-1)\,k). \tag{9}$$

§ 3. — Integrale generale dell'equazione (1) nell'ipotesi che i numeri (9) non differiscano per numeri interi.

Se nessuna coppia di numeri (9) differisce per un intero, si hanno k integrali dell'equazione (1) costituenti un sistema fondamentale, sviluppabili in serie di potenze della forma

$$y_p = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(p)}\, x^{\nu(1-pk)+s} \qquad (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k-1) \tag{10}$$

Designamo con ρ_p il numero $\nu(1-p\,k)$; per determinare i coefficienti

$a_s^{(p)}$ sostituiamo nella (1) la serie (10); avremo

$$\left.\begin{aligned} & A_{1,k}\sum_0^\infty a_s^{(p)}(s+\rho_p)^{\overline{k}}\,x^{s+\rho_p}+A_{2,k}\sum_0^\infty a_s^{(p)}(s+\rho_p)^{\overline{k-1}}\,x^{s+\rho_p}+\cdots \\ & \cdots+A_{k,k}\sum_0^\infty a_s^{(p)}(s+\rho_p)\,x^{s+\rho_p}+A_{k+1,k}\sum_0^\infty a_s^{(p)}\,x^{s+\rho_p}+\sum_0^\infty a_s^{(p)}\,x^{s+\rho_p+k}=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Il coefficiente di x^{ρ_p} è

$$a_0^{(p)}\left[A_{1,k}\,\rho_p^{\overline{k}}+A_{2,k}\,\rho_p^{\overline{k-1}}+\cdots+A_{k,k}\,\rho_p+A_{k+1,k}\right]$$

che è nullo perchè ρ_p è radice della (7); perciò $a_0^{(p)}$ può essere qualunque.

Il coefficiente di x^{ρ_p+s}, ove s non sia multiplo di k, è

$$a_s^{(p)}\left[A_{1,k}(\rho_p+s)^{\overline{k}}+A_{2,k}(\rho_p+s)^{\overline{k-1}}+\cdots+A_{k,k}(\rho_p+s)+A_{k+1,k}\right]$$

che non è nullo perchè ρ_p+s non è radice della (7); ne segue che, dovendo lo sviluppo (11) essere identicamente nullo, sarà

$$a_s^{(p)}=0 \quad \text{per} \quad s \not\equiv 0 \pmod k.$$

Se $s=h\,k$, il coefficiente di x^{ρ_p+hk} è

$$a_{hk}^{(p)}\left[A_{1,k}(\rho_p+h\,k)^{\overline{k}}+A_{2,k}(\rho_p+h\,k)^{\overline{k-1}}+\cdots+A_{k,k}(\rho_p+h\,k)+A_{k+1,k}\right]+a_{(h-1)k}^{(p)}$$

e poichè il coefficiente dev'essere nullo, si avrà

$$a_{hk}^{(p)}=\frac{-a_{(h-1)k}^{(p)}}{A_{1,k}(\rho_p+h\,k)^{\overline{k}}+A_{2,k}(\rho_p+h\,k)^{\overline{k-1}}+\cdots+A_{k+1,k}}=$$

$$=\frac{(-1)^h\,a_0^{(p)}}{\prod\limits_{q=1}^{h}\left\{A_{1,k}(\rho_p+q\,k)^{\overline{k}}+A_{2,k}(\rho_p+q\,k)^{\overline{k-1}}+\cdots+A_{k+1,k}\right\}}.$$

Poichè il primo membro della (7) coincide con il primo membro della (8), ricordando la (5), si ha che il denominatore dell'ultima frazione può scriversi

$$\prod_{q=1}^{h}\prod_{i=0}^{k-1}\left\{(i-p)\,\nu+q\right\}k=k^{hk}\prod_{i=0}^{k-1}\left\{(i-p)\,\nu+h\right\}^{\overline{h}}$$

onde

$$a_{hk}^{(p)} = \frac{(-1)^h a_0^{(p)}}{k^{hk} \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ (i-p)\nu + h \right\}^{\overline{h}}} .$$

Infine, se dīamo ad $a_0^{(p)}$ il valore

$$a_0^{(p)} = \frac{1}{k^{\nu(1-pk)}\Gamma(-p\nu+1)\Gamma(-(p-1)\nu+1)\ldots\Gamma(-\nu+1)\Gamma(\nu+1)\ldots\Gamma((k-1-p)\nu+1)},$$

avremo per l'equazione (1) i k integrali seguenti, costituenti un sistema fondamentale,

$$\left. \begin{array}{c} y_p = \sum_{h=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^h \left(\dfrac{x}{k}\right)^{\nu(1-pk)+hk}}{\Gamma(-p\nu+h+1)\Gamma(-(p-1)\nu+h+1)\ldots\Gamma(-\nu+h+1)h!\Gamma(\nu+h+1)\ldots\Gamma((k-1-p)\nu+h+1)} \\ (p=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ k-1). \end{array} \right\} \qquad (12)$$

§ 4. — Le funzioni $L_{\nu,k}(x)$ che comprendono come caso particolare le funzioni cilindriche $J^\nu(x)$.

Se nella (12) facciamo $p=0$, abbiamo la funzione

$$L_{\nu,k}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \left(\dfrac{x}{k}\right)^{\nu+hk}}{h!\,\Gamma(\nu+h+1)\,\Gamma(2\nu+h+1)\ldots\Gamma((k-1)\nu+h+1)} \qquad (13)$$

la quale per $k=2$ diviene

$$L_{\nu,2} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu+2h}}{h!\,\Gamma(\nu+h+1)},$$

che è la funzione cilindrica di prima specie $J^\nu(x)$.

Se ν è un intero positivo, la $L_{\nu,k}(x)$ è funzione trascendente intera, sia considerata quale funzione di x, sia considerata quale funzione di ν; la stessa proprietà compete alla funzione $x^{-\nu} L_{\nu,k}(x)$ anche se ν non è intero; se ν non è intero, $x=0$ è punto di diramazione e $L_{\nu,k}(x)$ è funzione ad un numero di valori finito o infinito a seconda che ν è razionale o irrazionale.

Diamo esplicitamente l'espressione dei coefficienti della (1) nei casi di $k=3$, $k=4$, $k=5$.

Per $k=3$ si ha

$$A_{1,3}=1,\ A_{2,3}=6\nu+3,\ A_{3,3}=3\nu^2+6\nu+1,\ A_{4,3}=-10\nu^3;$$

per $k=4$, è

$$A_{1,4}=1,\ A_{2,4}=20\nu+6,\ A_{3,4}=110\nu^2+60\nu+7,$$

$$A_{4,4}=100\nu^3+110\nu^2+20\nu+1,\ A_{5,4}=-231\nu^4;$$

per $k=5$, è

$$A_{1,5}=1,\ A_{2,5}=45\nu+10,\ A_{3,5}=685\nu^2+270\nu+25,$$

$$A_{4,5}=3915\nu^3+2055\nu^2+315\nu+15,$$

$$A_{5,5}=4930\nu^4+3915\nu^3+685\nu^2+45\nu+1,\ A_{6,5}=-9576\nu^5.$$

§ 5. — Espressione asintotica di $L_{\nu,k}(x)$ per valori molto grandi di $|\nu|$.

Se $|\nu|$ è molto grande, ma ν non è alcun numero intero negativo, nè frazionario negativo di denominatore minore di k, ed $|x|$ rimane inferiore ad un numero assegnato, si ha per $L_{\nu,k}(x)$ la seguente espressione asintotica

$$L_{\nu,k}(x)=\frac{x^\nu}{k^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(2\nu+1)\ldots\Gamma((k-1)\nu+1)}\,\theta$$

con

$$|\theta|<e^{\frac{|x|^k}{k^k\,|(\nu+1)(2\nu+1)\ldots((k-1)\nu+1)|}}.$$

Infatti si ha

$$L_{\nu,k}(x)=\frac{x^\nu}{k^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(2\nu+1)\ldots\Gamma((k-1)\nu+1)}\times$$

$$\times\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\left(\dfrac{x}{k}\right)^{hk}}{h!\prod\limits_{i=1}^{k-1}(i\nu+1)(i\nu+2)\ldots(i\nu+h)}.$$

Ora è

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \left(\frac{x}{k}\right)^{hk}}{h!\prod_{i=1}^{k-1}(i\nu+1)(i\nu+2)\dots(i\nu+h)} \right| <$$

$$< \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{k}\right|^{hk}}{h!\,|(\nu+1)(2\nu+1)\dots((k-1)\nu+1)|^h} =$$

$$e = \frac{|x|^k}{k^k\,|(\nu+1)(2\nu+1)\dots((k-1)\nu+1)|}$$

e di più

$$\lim_{|\nu|=\infty} |\theta| = 1.$$

Se in particolare $k=2$, per $|\nu|$ grandissimo e ν non intero negativo si ha l'espressione asintotica di $J^\nu(x)$

$$J^\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}(1+\varepsilon)$$

con

$$|\varepsilon| < e^{\frac{|x^2|}{4\,|\nu+1|}} - 1$$

formula che dà per $|\varepsilon|$ un valore più piccolo di quello indicato da N. Nielsen (*)

$$\frac{e^{\frac{|x^2|}{4}} - 1}{|\nu+1|}.$$

Osserviamo che per $\nu > 0$ e per x positivo minore di

$$k\sqrt[k]{(\nu+h+1)(2\nu+h+1)\dots((k-1)\nu+h+1)}$$

dal termine in $x^{\nu+hk}$ in poi i valori assoluti dei termini della serie $L_{\nu,k}(x)$ vanno decrescendo, onde il resto della serie relativo al termine indicato è, in valore assoluto, minore di

$$\frac{x^{\nu+hk}}{h!\prod_{i=1}^{k-1}\Gamma(i\nu+h+1)}$$

(*) N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*. Teubner, 1904, pag. 7.

§ 6. — Integrazione dell'equazione (1) nel caso di $\nu = 0$.

Nel caso di $\nu = 0$ l'equazione (1) diviene

$$\Phi(y) = x^k y^{(k)} + c_{k,k-1} x^{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + c_{k,1} x y' + x^k y = 0 \tag{14}$$

e la sua equazione determinante

$$r^k = 0.$$

Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari del tipo di Fuchs, in questo caso si ha un solo integrale fondamentale regolare nell'origine; nel nostro caso esso è

$$L_{0,k} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^h \left(\frac{x}{k}\right)^{hk}}{(h!)^k} . \tag{15}$$

Possiamo osservare che se ν è l'intero n, i k integrali (12) coincidono all'infuori d'un fattore numerico:

$$y_0 = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \left(\frac{x}{k}\right)^{n+hk}}{h!\,(h+n)!\,(h+2n)!\ldots(h+(k-1)n)!} \tag{16}$$

$$y_p = (-1)^{np} y_0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, k-1),$$

come si vede facilmente se si ha riguardo alle note proprietà della funzione Γ allorchè l'argomento è un numero intero negativo.

Tornando all'equazione (14), un altro integrale è della forma

$$L_{0,k}(x) . \log x + M_1(x),$$

ove $M_1(x)$ è una serie regolare nell'origine che metteremo sotto la forma

$$M_1(x) = \sum_0^{\infty} a_i^{(1)} \left(\frac{x}{k}\right)^i .$$

Sostituendo nella (14) abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \Phi(L_{0,k}(x)) \log x + \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} \sum_{p=r+1}^{k} (-1)^{p-r+1} c_{k,p} \binom{p}{r} (p-r-1)! \right\} + \\ + \sum_{i=k}^{\infty} (i^k a_i^{(1)} + k^k a_{i+k}^{(1)}) \left(\frac{x}{k}\right)^i + H_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ove con H_1 intendiamo la somma dei termini di $\Phi(M_1)$ dei gradi inferiori a k. Il primo addendo è manifestamente nullo; il secondo, per la (3), si può scrivere

$$k \sum_{r=1}^{k-1} x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} c_{k-1,r}$$

od anche

$$k \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h\,!)^k} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk} \sum_{r=1}^{k-1} c_{k-1,r} (h\,k)^r$$

ed infine, per la (4):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h k^k h^{k-1}}{(h\,!)^k} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk}.$$

Dovendo essere il primo membro dello sviluppo (17) identicamente nullo, si deduce che $a_0^{(1)}$ è un numero qualunque, ogni coefficiente $a_i^{(1)}$ con i non divisibile per k è nullo, e

$$h^k a_{hk}^{(1)} + a_{(h-1)k}^{(1)} + \frac{(-1)^h h^{k-1}}{(h\,!)^k} = 0$$

per qualunque h.

Prendendo $a_0^{(1)} = 0$, si trae

$$a_{hk}^{(1)} = \frac{(-1)^{h+1} \sum_{1}^{h} \frac{1}{i}}{(h\,!)^k};$$

onde l'integrale in parola è

$$U_2 = L_{0,k}(x) \log x + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1} \sum_{1}^{h} \frac{1}{i}}{(h\,!)^k} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk}. \tag{18}$$

Osserviamo poi che la funzione $M_1(x)$ soddisfa all'equazione

$$\Phi(M_1(x)) + k \sum_{r=1}^{k-1} c_{k-1,r}\, x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} = 0. \tag{19}$$

Un terzo integrale è della forma

$$U_3 = M_2(x) + 2 \log x \,.\, M_1(x) + \log^2 x \,.\, L_{0,k}(x), \tag{20}$$

ove $M_2(x)$ è una funzione regolare nell'origine che metteremo sotto la forma

$$M_2(x) = \sum_{0}^{\infty} a_i^{(2)} \left(\frac{x}{k}\right)^i.$$

Osserviamo che è

$$\frac{d^p (\log^2 x\, L_{0,k}(x))}{d x^p} = \log^2 x \frac{d^p L_{0,k}}{d x^p} + 2 \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \binom{p}{r} (r-1)!\, \frac{d^{p-r} L_{0,k}}{d x^{p-r}} \cdot \frac{\log x}{x^r} +$$

$$+ 2 \sum_{r=2}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} \frac{s_{r-2,r}}{x^r} \frac{d^{p-r} L_{0,k}}{d x^{p-r}}.$$

Sostituendo (20) nella (14) si ha

$$\log^2 x\, \Phi(L_{0,k}) + 2 \log x \left\{ \Phi(M_1) + \sum_{r=1}^{k-1} k\, c_{k-1,r}\, x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} \right\} +$$

$$+ 2k \sum_{r=1}^{k-1} c_{k-1,r}\, x^r \frac{d^r M_1}{d x^r} +$$

$$+ k^2 \sum_{r=1}^{k-2} x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} c_{k-2,r} + \sum_{i=k}^{\infty} (i^k a_i^{(2)} + k^k a_{i-k}^{(2)}) \left(\frac{x}{k}\right)^i + H_2 = 0,$$

ove H_2 è la somma dei termini di $\Phi(M_2)$ di grado inferiore a k.

Tanto il primo quanto il secondo addendo (tenendo conto della (19)) sono nulli; ordinando il terzo e quarto addendo per le potenze di $\frac{x}{k}$ e tenendo presente la (3) si ha

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2k\, a_{hk}^{(1)} h^{k-1} k^{k-1} + k(k-1)\, a_{hk}^{(0)} h^{k-2} k^{k-2}) \left(\frac{x}{k}\right)^{hk} +$$

$$+ \sum_{i=k}^{\infty} (i^k a_i^{(2)} + k^k a_{i-k}^{(2)}) \left(\frac{x}{k}\right)^i + H_2 = 0;$$

e, mettendo per $a_{hk}^{(1)}$, $a_{hk}^{(0)}$ i valori noti dei coefficienti rispettivamente di $M_1(x)$ e $L_{0,k}(x)$,

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h!)^k} \left[\left(h^{k-2} - 2 h^{k-1} \sum_{1}^{h} \frac{1}{i} \right) k^k - h^{k-2} k^{k-1} \right] \left(\frac{x}{k}\right)^{hk} +$$

$$+ \sum_{i=k}^{\infty} (i^k a_i^{(2)} + k^k a_{i-k}^{(2)}) \left(\frac{x}{k}\right)^i + H_2.$$

Dovendo lo sviluppo precedente essere identicamente nullo, si deduce che gli $a_i^{(2)}$ per i non divisibile per k sono nulli e quando i è multiplo di k si ha

$$h^k a_{hk}^{(2)} + a_{k(h-1)}^{(2)} + \frac{(-1)^h}{(h!)^k} \left\{ h^{k-2} \left(1 - 2h \sum_{1}^{h} \frac{1}{i} \right) - \frac{h^{k-2}}{k} \right\} = 0$$

da cui si deduce, posto $a_0^{(2)} = 0$

$$a^{(2)}_{hk} = \frac{(-1)^h}{(h\,!)^k} \left\{ 2 \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\sum_{r=1}^{i} \frac{1}{r}}{i} \right) - \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{k} \sum_{1}^{h} \frac{1}{i^2} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^h}{(h\,!)^k} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i} \right)^2 + \frac{1}{k} \sum_{1}^{h} \frac{1}{i^2} \right\}.$$

È così determinata la funzione $M_2(x)$; osserviamo che essa soddisfa all'equazione differenziale

$$\Phi(M_2) + 2k \sum_{1}^{k-1} c_{k-1,r}\, x^r \frac{d^r M_1}{d x^r} + k^2 \sum_{r=1}^{k-2} c_{k-2,r}\, x^r \frac{d^r L_{0,k}}{d x^r} = 0.$$

Collo stesso procedimento si trova un quarto integrale della forma

$$U_4 = M_3(x) + 3 \log x\, M_2(x) + 3 \log^2 x\, M_1(x) + \log^3 x\, L_{0,k}(x)$$

ove $M_3(x)$ è una serie regolare nell'origine

$$M_3(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a^{(3)}_{hk} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk},$$

e, posto $a_0^{(3)} = 0$, si ha per i coefficienti l'espressione

$$a^{(3)}_{hk} = \frac{(-1)^{h+1}}{(h\,!)^k} \left\{ \left(\sum_{1}^{h} \frac{1}{i} \right)^3 + \frac{3}{k} \left(\sum_{1}^{h} \frac{1}{i^2} \right) \left(\sum_{1}^{h} \frac{1}{i} \right) + \frac{2}{k^2} \sum \frac{1}{i^3} \right\}$$

$$a_i^{(3)} = 0 \quad \text{per} \quad i \not\equiv 0 \pmod{k}.$$

I coefficienti $a^{(3)}_{hk}$, $a^{(2)}_{hk}$, $a^{(1)}_{hk}$, $a^{(0)}_{hk}$ soddisfano alla equazione

$$k^k \left(h^k a^{(s)}_{hk} + a^{(s)}_{(h-1)k}\right) + \sum_{n=1}^{s} \binom{s}{n} k^n a^{(s-n)}_{hk} h^{k-n} k^{k-n} = 0. \tag{21}$$

Introducendo le successive funzioni

$$M_s(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a^{(s)}_{hk} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk}$$

col dedurne i coefficienti dalla (21), si deducono gli altri $k-4$ integrali

$$U_{s+1}(x) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} \log^r x\, M_{s-r}(x) \tag{22}$$

facendo qui $s = 4, 5, \ldots, k-1$, ed avendo posto $M_0 = L_{0,k}$.

Per dimostrare quanto abbiamo asserito, osserviamo che gli integrali U_2, U_3, U_4, trovati sono della forma (22); di più osserviamo che M_1, M_2 soddisfano all'equazione

$$\Phi(M_s) + \sum_{q=1}^{s} \overline{k^q} \binom{s}{q} \sum_{r=1}^{k-q} c_{k-q,r}\, x^r \frac{d^r M_{s-q}}{d x^r} = 0 \tag{23}$$

rispettivamente per $s=1$, $s=2$.

Ammettiamo dunque che le i funzioni date dalla (22) per $s=0$, $s=1, \ldots$, $s=i-1$ siano integrali della (14) e quindi le (21) e (23) verificate per $s=1$, $2, \ldots, i-1$ e la (21) anche per $s=i$; allora dico che

$$M_{i+1} = \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \log^r x\, M_{i-r}(x)$$

è pure integrale della (14).

Cominciamo col notare che è

$$d^p(z \log^n x) = \frac{d^p z}{dx^p} \log^n x +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \overline{n^q} \log^{n-q} x \sum_{r=q}^{p} (-1)^{r+q} \binom{p}{r} s_{r-q,r} \frac{1}{x^r} \frac{d^{p-r} z}{dx^{p-r}}$$

onde

$$\Phi(\log^n x\, M_{i-n}(x)) = \log^n x\, \Phi(M_{i-n}) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k} \left[c_{k,p} \sum_{q=1}^{n} \left\{ \overline{n^q} \log^{n-q} x \sum_{r=0}^{p-q} (-1)^{p-r+q} \binom{p}{r} s_{p-r-q,p-r}\, x^r \frac{d^r M_{i-n}}{d x^r} \right\} \right] =$$

$$= \log^n x\, \Phi(M_{i-n}) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \left[\overline{n^q} \log^{n-q} x \sum_{r=1}^{k-q} \left\{ x^r \frac{d^r M_{i-n}}{d x^r} \sum_{p=r+q}^{k} (-1)^{p-r+q} \binom{p}{r} s_{p-r-q,p-r}\, c_{k,p} \right\} \right] (*)$$

ed infine per la (3)

$$\Phi(\log^n x\, M_{i-n}(x)) = \log^n x\, \Phi(M_{i-n}) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \left\{ \overline{n^q} \binom{k}{q} \log^{n-q} x \sum_{r=1}^{k-q} c_{k-q,r}\, x^r \frac{d^r M_{i-n}}{d x^r} \right\}.$$

(*) Abbiamo omesso l'addendo per $r=0$ perchè identicamente nullo.

Si ricava allora

$$\Phi(U_{i+1}) = \Phi(M_i) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{i} \left[\binom{i}{n} \left\{ \log^n x \,.\, \Phi(M_{i-n}) + \sum_{q=1}^{n} \binom{n}{q} k^q \log^{n-q} x \sum_{r=1}^{k-q} c_{k-q,r}\, x^r \frac{d^r M_{i-n}}{d x^r} \right\} \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{i} \left\{ \log^{i-s} x \binom{i}{s} \left[\Phi(M_s) + \sum_{q=1}^{s} \binom{s}{q} k^q \sum_{r=1}^{k-q} c_{k-q,r}\, x^r \frac{d^r M_{s-q}}{d x^r} \right] \right\} (*) \,.$$

I coefficienti di $\log^{i-s} x$ per $s = 1, 2, \ldots, i-1$ sono nulli perchè si è ammesso che la (23) sia verificata per questi valori dell'indice s, onde risulta

$$\Phi(U_{i+1}) = \Phi(M_i) + \sum_{q=1}^{i} \binom{i}{q} k^q \sum_{r=1}^{k-q} x^r \frac{d^r M_{i-q}}{d x^r} c_{q-k,r} \,. \tag{24}$$

Perchè sia U_{i+1} integrale della (14) è dunque necessario e basta che la (23) sia verificata per $s = i$. Orbene il secondo membro della (24) può scriversi, avendo riguardo alla (4),

$$\Phi(M_i) + \sum_{q=1}^{i} \binom{i}{q} \bar{k^q} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk} a_{hk}^{(i-q)} h^{k-q} k^{k-q} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{hk} \left[k^k \left(h^k a_{hk}^{(i)} + a_{(h-1)k}^{(i)} \right) + \sum_{q=1}^{i} \binom{i}{q} k^{\bar{q}} a_{hk}^{(i)} h^{k-q} k^{k-q} \right]$$

e, poichè la (21) è supposta vera anche per $s = i$, il secondo membro è nullo.

Dunque la (23) è verificata anche per $s = i$ ed U_{i+1} è integrale della (14).

L'integrale generale della (14) è

$$y = \sum_{m=0}^{k-1} \left\{ \log^m x \sum_{p=m}^{k-1} \binom{p}{m} C_{p+1} M_{i-m}(x) \right\}$$

ove le C_p sono k costanti arbitrarie.

Possiamo notare che le funzioni M_i sono trascendenti intere.

(*) Applicando la relazione $\binom{i}{s-q} \binom{i-s+q}{q} = \binom{i}{s}$.

§ 7. — Una classe di polinomi che comprendono come caso particolare le funzioni cilindriche O^n di Neumann.

Se è

$$n = k\,l + r, \quad 0 \leqq r < k,$$

vogliamo vedere se si può determinare un polinomio di grado $n+1$ in $\frac{1}{x}$ della forma

$$H_{n,k}(x) = b_{0,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{r+1} + b_{1,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+r+1} + b_{2,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{2k+r+1} + \cdots + b_{l,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{n+1} \tag{25}$$

soddisfacente alla condizione che il prodotto

$$L_{p,k}(x)\, H_{n,k}(x) \tag{26}$$

non contenga termini in $\frac{1}{x}$ tutte le volte che $n -- p$.

Poichè è chiaro che per $p > n$, il prodotto (26) non può contenere termini in $\frac{1}{x}$, nè può contenerne quando p non sia congruo ad n rispetto al modulo k, la condizione imposta si riduce a quella di essere nulla la somma dei coefficienti di $\frac{1}{x}$ nel prodotto (26) quando p sia minore di n e congruo ad n rispetto a k, cioè sia della forma $s\,k + r$ con $s < l$. In definitiva gli $l+1$ coefficienti della (25) debbono soddisfare alle l equazioni lineari omogenee

$$\sum_{m=s}^{l} \frac{(-1)^{m-s}\, b_{m,n}}{\prod\limits_{q=0}^{k-1} \left\{ q\,(s\,k + r) + m - s \right\}!} = 0 \qquad (s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ l-1). \tag{27}$$

Il sistema si riduce al sistema non omogeneo di l equazioni fra le l incognite $\frac{b_{m,n}}{b_{l,n}}$ $(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ l-1)$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=s}^{l-1} (-1)^{m-s} \frac{1}{\prod\limits_{q=0}^{k-1} \left\{ q\,(s\,k + r) + m - s \right\}^{\overline{m-s}}} \frac{b_{m,n}}{b_{l,n}} + \\ &\quad + \frac{(-1)^{l-s}}{\prod\limits_{q=0}^{k-1} \left\{ q\,(s\,k + r) + l - s \right\}^{\overline{l-s}}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

il quale è manifestamente normale.

La funzione $H_{n,k}(x)$ può prendere la forma

$$H_{n,k}(x) = b_{l,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{n+1}\left\{1 + \frac{b_{l-1,n}}{b_{l,n}}\left(\frac{x}{k}\right)^{k} + \frac{b_{l-2,n}}{b_{l,n}}\left(\frac{x}{k}\right)^{2k} + \cdots + \frac{b_{0,n}}{b_{l,n}}\left(\frac{x}{k}\right)^{lk}\right\} \tag{29}$$

ove $b_{l,n}$ è arbitrario ed i coefficienti del polinomio fra parentesi sono le soluzioni del sistema (28).

Per $k = 1$ le soluzioni del sistema (28) sono

$$\frac{b_{m,n}}{b_{l,n}} = \frac{1}{l - m!}\,.$$

Per $k = 2$ le soluzioni dello stesso sistema sono

$$\frac{b_{m,n}}{b_{l,n}} = \frac{1}{(l-m)!\,(n-1)^{\overline{l-m}}}$$

e la funzione $H_{n,2}$ coincide con la funzione cilindrica O^n di NEUMANN se si prende $b_{l,n} = \frac{n!}{4}\left(l\right.$, massimo intero contenuto in $\left.\frac{n}{2}\right)$ per $n > 0$ e $b_{0,0} = \frac{1}{2}$.

Per $k > 2$ si constata facilmente che è

$$\left|\frac{b_{m,n}}{b_{l,n}}\right| < \frac{1}{(l-m)!}$$

ciò che ci permette di asserire che

$$\left.\begin{aligned} |H_{n,k}(x)| &< \left|b_{l,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{n+1}\right|\left\{1 + \left|\frac{x}{k}\right|^{k} + \frac{1}{2!}\left|\frac{x}{k}\right|^{2k} + \cdots + \frac{1}{l!}\left|\frac{x}{k}\right|^{lk}\right\} < \\ &< \left|b_{l,n}\left(\frac{k}{x}\right)^{n+1}\right| e^{\left|\frac{x}{k}\right|^{k}}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

disuguaglianza che ci sarà utile tosto.

§ 8. — SVILUPPO DI $\frac{1}{y-x}$ MEDIANTE LE FUNZIONI $H_{n,k}(y)$, $L_{n,k}(x)$.

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, H_{n,k}(y)\, L_{n,k}(x) \tag{31}$$

ove è

$$\alpha_n = \frac{1}{k\, b_{l,n}} \cdot n!\,(2n)!\,(3n)!\ldots((k-1)n)! \qquad \left(l = E\left(\frac{n}{k}\right)\right). \tag{32}$$

Supponiamo y fisso e x variabile, nel piano complesso, nell'interno del cerchio di centro $x = 0$ e raggio $R = |y|$. Dimostriamo che

la serie (31) *è uniformemente convergente in ogni cerchio di centro* $x = 0$ *e raggio inferiore à* R.

Poniamo $|x| = \rho$; per ipotesi $\rho < R$.

Per la (30) è

$$|H_{n,k}(y)| < b_{l,n} \left(\frac{k}{R}\right)^{n+1} e^{\left(\frac{R}{k}\right)^k};$$

ed è poi

$$|L_{n,k}(x)| < \left(\frac{\rho}{k}\right)^n \frac{1}{n!(2n)!\dots((k-1)n)!} \left\{ 1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{k}\right)^{hk} \frac{1}{\prod_{p=1}^{h} (n+p)(2n+p)\dots((k-1)n+p)} \right\} <$$

$$< \left(\frac{\rho}{k}\right)^n \frac{1}{n!(2n)!\dots((k-1)n)!} \sum_0^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{\rho}{k}\right)^{hk} =$$

$$= \left(\frac{\rho}{k}\right)^n \frac{1}{n!(2n)!\dots((k-1)n)!} e^{\left(\frac{\rho}{k}\right)^k}$$

epperò

$$|\alpha_n H_{n,k}(y) L_{n,k}(x)| < \frac{1}{R} \cdot e^{\left(\frac{R}{k}\right)^k + \left(\frac{\rho}{k}\right)^k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n. \tag{33}$$

La serie che ha per termine n-esimo il secondo membro della (33) è convergente per l'ipotesi $\rho < R$, e poichè la (33) vale per ogni x per cui sia $|x| < \rho$, è dimostrato l'asserto.

Essendo la (31) convergente uniformemente, possiamo ordinarla per le potenze di x. Il coefficiente di $\left(\frac{x}{k}\right)^{lk+r}$ è

$$\sum_{s=0}^{l} (-1)^{l-s} \frac{H_{sk+r,k}(y)\, \alpha_{sk+r}}{\prod_{q=0}^{k-1} \left\{ q(sk+r) + l - s \right\}!} =$$

$$= \sum_{p=0}^{l} \left(\frac{k}{y}\right)^{r+pk+1} \sum_{s=p}^{l} (-1)^{l-s} \frac{b_{p,sk+r}\, \alpha_{sk+r}}{\prod_{q=0}^{k-1} \left\{ q(sk+r) + l - s \right\}!} =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \sum_{p=0}^{l} \left(\frac{k}{y}\right)^{r+pk+1} \sum_{s=p}^{l} (-1)^{l-s} \frac{b_{p,sk+r}}{b_{s,sk+r}} \cdot \frac{1}{\prod_{q=0}^{k-1} \left\{ q(sk+r) + l - s \right\}^{\overline{l-s}}}.$$

Se si tien conto delle equazioni analoghe alle (28) a cui soddisfano i rapporti $\frac{b_{p,sk+r}}{b_{s,sk+r}}$ si ha per $p = 0, 1, 2, \ldots, l-1$

$$\sum_{s=p}^{l} \frac{(-1)^{l-s}}{\prod_{q=0}^{k-1} \left\{ q(sk+r)+l-s \right\}^{\overline{l-s}}} \frac{b_{p,sk+r}}{b_{s,sk+r}} = 0 \ (*).$$

Ne consegue che il coefficiente di x^{lk+r} è $\frac{1}{y^{lk+r+1}}$. Dunque la serie (31) si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{y^{n+1}}$$

la quale per $|x| < |y|$ rappresenta

$$\frac{1}{y-x}.$$

La dimostrazione precedente mostra ancora che per x fisso e per y variabile, la serie (31) è convergente uniformemente in qualunque area esterna al cerchio di centro $y = 0$ e raggio uguale ad $|x|$.

Si conclude:

Se $|y| = R$ ed x è variabile nel piano complesso, vale lo sviluppo

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_{n,k}(y) L_{n,k}(x) \tag{34}$$

convergente uniformemente in ogni area contenuta nel cerchio di centro $x = 0$

(*) Ciò è conseguenza della proposizione:

Se gli $\frac{l(l+1)}{2}$ numeri x_{ij} soddisfano alle $\frac{l(l+1)}{2}$ equazioni

$$x_{ij} + a_{j,j+1} x_{i,j+1} + a_{j,j+2} x_{i,j+2} + \ldots + a_{j,i-1} x_{i,i-1} + a_{j,i} = 0$$

$$\begin{pmatrix} j = 0, 1, 2, \ldots, i-1 \\ i = 1, 2, 3, \ldots, l \end{pmatrix}$$

soddisfano ancora alle l equazioni

$$x_{l,j} + a_{l-1,l} x_{l-1,j} + a_{l-2,l} x_{l-2,j} + \ldots + a_{j-1,l} x_{j+1,j} + a_{j,l} = 0$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, l-1).$$

e raggio R; ed è valido lo sviluppo

$$\frac{1}{x-y}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\, L_{n,k}(y)\, H_{n,k}(x) \tag{34'}$$

convergente uniformemente in ogni area esterna al cerchio di centro $x=0$ e raggio R; i coefficienti α_n sono dati dalla (32).

§ 9. — Sviluppo di una funzione $f(x)$ in serie delle funzioni $L_{n,k}(x)$ e $H_{n,k}(x)$.

Sia $f(x)$ una funzione regolare nei punti interni e di contorno di un cerchio C di centro $x=0$. Se y è un punto del contorno di C e x è un punto interno, il teorema di Cauchy dà

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)\uparrow}\frac{f(y)\,dy}{y-x}. \tag{35}$$

Nelle ipotesi poste è $|x|<|y|$; basta sostituire allora in (35) lo sviluppo (34) per aver dimostrato che

per una funzione $f(x)$ regolare nei punti interni e di contorno di un cerchio C di centro $x=0$, vale lo sviluppo in serie

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\, L_{n,k}(x) \tag{36}$$

ove

$$\beta_n=\frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C)\uparrow}H_{n,k}(y)\, f(y)\, dy$$

sviluppo convergente uniformemente in ogni area contenuta in C.

Si supponga $f(x)$ regolare nei punti esterni e di contorno di un cerchio C di centro $x=0$; se y è un punto del contorno ed x è esterno, vale la formola (35) in cui l'integrazione è compiuta nel senso opposto, onde essendo $|x|>|y|$ sostituendo la (34') in (35) si dimostra che

per una funzione $f(x)$ regolare nei punti esterni e di contorno di un cerchio C di centro $x=0$ vale lo sviluppo

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\gamma_n\, H_{n,k}(x) \tag{37}$$

ove

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C)\uparrow} L_{n,k}(y)\, f(y)\, dy,$$

sviluppo convergente uniformemente in ogni area esterna a C.

Infine sia $f(x)$ funzione regolare in una corona circolare limitata dai due cerchi C_1 e C_2 di centro $x=0$ (C_1 contenuto in C_2) e nei punti del contorno; pel teorema di CAUCHY

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)\uparrow} \frac{f(y)\, dy}{x-y} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_2)\uparrow} \frac{f(y)\, dy}{y-x}$$

e sostituendo nel primo integrale lo sviluppo (34') e nel secondo lo sviluppo (34), si dimostra che

per una funzione $f(x)$ regolare nei punti interni e di contorno di una corona circolare limitata da due cerchi C_1 e C_2 di centro $x=0$ (C_1 contenuto in C_2), vale lo sviluppo

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \beta_n L_{n,k}(x) + \sum_0^{\infty} \gamma_n H_{n,k}(x)$$

ove

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C_2)\uparrow} H_{n,k}(y)\, f(y)\, dy$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C_1)\uparrow} L_{n,k}(y)\, f(y)\, dy,$$

sviluppo convergente uniformemente in ogni area contenuta nella corona circolare.

§ 10. — SVILUPPI SPECIALI.

Analogamente a quanto fa NEUMANN (*) per le funzioni cilindriche J^n, O^n, possiamo dare gli sviluppi della potenza intera positiva di x per le funzioni $L_{n,k}(x)$ e della potenza intera negativa di x per le funzioni $H_{n,k}(x)$.

Sia $0 \leq r \leq k-1$; osserviamo che $H_{n,k}(y)\, y^{ks+r}$ è una funzione razionale intera di y se $n \leq ks+r-1$, mentre se $n > ks+r-1$ è somma di due

(*) L. c., pag. 39, 40.

funzioni razionali intere l'una in y e l'altra in $\frac{1}{y}$, nella seconda delle quali il termine in $\frac{1}{y}$ esiste solo se n è della forma $kp+r$ con $p \geq s$. Ne consegue che se n soddisfa a quest'ultima condizione,

$$\frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C)\uparrow} H_{n,k}(y)\, y^{ks+r}\, dy = \frac{b_{s,kp+r}}{b_{p,kp+r}} k^{sk+r} \prod_{i=1}^{k-1} \left\{ i(kp+r) \right\}!$$

ed in ogni altro caso il detto integrale è nullo. Allora per la (36) si deduce che

$$x^{ks+r} = k^{ks+r} \sum_{p=s}^{\infty} \left\{ \frac{b_{s,pk+r}}{b_{p,pk+r}} \prod_{i=1}^{k-1} \left\{ i(kp+r) \right\}! \right\} L_{kp+r,k}(x).$$

Osserviamo ora che nel prodotto $L_{n,k}(y)\, y^{-(sk+r)}$ s'ha un termine in $\frac{1}{y}$ se e solo se n è della forma $pk+r-1$ con $0 \leq p \leq s$; se n soddisfa a questa condizione

$$\frac{\alpha_n}{2\pi i}\int_{(C)\uparrow} L_{n,k}(y)\, y^{-(ks+r)}\, dy = \frac{1}{k^{ks+r}\, b_{p,kp+r-1} \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ s-p+(kp+r-1)i \right\}^{\overline{s-p}}}$$

mentre l'integrale suddetto è nullo per tutti gli altri valori di n.

Ne consegue per la (37) che è

$$x^{-(ks+r)} = k^{-(ks+r)} \sum_{p=0}^{s} \frac{1}{b_{p,kp+r-1} \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ s-p+i(kp+r-1) \right\}^{\overline{s-p}}} H_{kp+r-1,k}(x).$$

Si può notare che se è

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} A_p\, x^{kp+r} \qquad (0 \leq r \leq k-1),$$

nella (36) sarà

$$\beta_n = 0 \qquad \text{se} \qquad n \not\equiv r \pmod{k}$$

e

$$\beta_{lk+r} = \prod_{i=1}^{k-1} \left\{ i(kl+r) \right\}! \cdot \sum_{s=0}^{l} \frac{b_{s,kl+r}}{b_{l,kl+r}} k^{sk+r} A_s;$$

compaiono quindi nello sviluppo di $f(x)$ solo le L_{lk+r} $(l = 0, 1, 2, \ldots)$.

L'ultima formula permette di ritrovare subito il noto sviluppo di sen x e di cos x per le funzioni cilindriche e di determinare, ad es., gli sviluppi delle funzioni $\cos x + \cosh x$, $\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x$, $\cosh x - \cos x$, $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x$ rispettivamente mediante le funzioni $L_{4l,4}(x)$, $L_{4l+1,4}(x)$, $L_{4l+2,4}(x)$, $L_{4l+3,4}(x)$ e di qui gli sviluppi di $\cos x$, $\cosh x$ mediante le funzioni $L_{2p,4}$ e quelli di $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{senh} x$ mediante le funzioni $L_{2p+1,4}(x)$.

Al § 6 abbiamo determinato l'integrale generale dell'equazione (14). Le funzioni $M_i(x)$ che ivi compaiono sono serie ordinate per le potenze di $\left(\frac{x}{k}\right)^k$; possono quindi essere espresse in serie di funzioni $L_{hk,k}(x)$.

In particolare per $M_1(x)$ si ha lo sviluppo

$$M_1(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} (i\,h\,k)! \sum_{m=1}^{h} \left(\frac{(-1)^{h+1} b_{m,hk}}{(m!)^k\, b_{h,hk}} \sum_{1}^{m} \frac{1}{i} \right) \right\} L_{hk,k}(x)$$

il quale per $k = 2$ diventa

$$2 \sum_{h=1}^{\infty} h\, J^{2h}(x) \sum_{m=1}^{h} \frac{(-1)^{h+1} (h+m-1)^{\overline{2m-1}}\, s_{m-1,m+1}}{(m!)^3} =$$

$$= 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1} J^{2h}(x)}{h}$$

che è lo sviluppo della funzione che Neumann indica con E^0 (*) e che sommata a $J^0 \log(x)$ dà luogo alla funzione Y^0 che lo stesso dice complementare della funzione J^0 di Bessel, e che è un integrale dell'equazione di Bessel linearmente indipendente da J^0.

§ 11. — Integrazione delle equazioni $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_k} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_k} + u = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e di altri due tipi mediante le funzioni $L_{0,k}$.

Se f è funzione delle k variabili $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ e

$$\zeta_1^{(0)},\quad \zeta_2^{(0)}, \ldots,\quad \zeta_k^{(0)} \tag{38}$$

(*) L. c., pag. 45.

sono k valori speciali assunti dalle variabili, denotiamo, per brevità, con

$$\Big[f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)\Big]_r$$

la somma delle 2^r espressioni che si ottengono a sostituire in tutti i modi possibili a 0, a 1, a 2,... ad r degli argomenti $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ i valori (38), ogni f essendo preceduta dal segno $+$ o dal segno $-$ a seconda che il numero degli argomenti sostituiti è pari o dispari (*).

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_k$ k variabili indipendenti e $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ k valori speciali delle variabili; indichi $\varphi_{(h)}$ una funzione delle $k-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_k$. Siano

$$\varphi_{(1)}, \quad \varphi_{(2)}, \ldots, \quad \varphi_{(k)}$$

k funzioni soddisfacenti alle $k(k-1)$ condizioni

$$(\varphi_{(h)})_{x_l=x_l^{(0)}} = (\varphi_{(l)})_{x_h=x_h^{(0)}} \qquad \left(\begin{matrix} h \\ l \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots, k\Big). \tag{39}$$

Allora la funzione

$$u = \sum_{h=1}^{k} \Big[\varphi_{(h)}(x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_k)\Big]_{h-1} \tag{40}$$

soddisfa alle k condizioni

$$(u)_{x_i=x_i^{(0)}} = \varphi_{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k). \tag{41}$$

D'altra parte, essendo ciascuna delle $\varphi_{(i)}$ funzione di $k-1$ variabili, è evidentemente

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_k} = 0. \tag{42}$$

Si conclude che la (40) è la soluzione della (42) la quale soddisfa alle condizioni (41); codesta soluzione è unica.

(*) Ad es., se

$$k=3,\ r=3,\ \text{è}\ [f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)]_3 = f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - f(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2, \zeta_3) -$$
$$- f(\zeta_1, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3) - f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3^{(0)}) + f(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3) + f(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2, \zeta_3^{(0)}) +$$
$$+ f(\zeta_1, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3^{(0)}) - f(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3^{(0)}).$$

Se è data l'equazione

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k), \tag{43}$$

l'integrale di essa che per $x_i = x_i^{(0)}$ si riduce a $\varphi_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ si può porre sotto la forma

$$u = u_1 + u_2$$

dove u_1 sia la funzione soddisfacente la (42) e alle predette condizioni iniziali e u_2 una soluzione particolare di (43) che si annulla per

$$x_i = x_i^{(0)} \; (i = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Si ha poi manifestamente

$$u_2 = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\,t_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\,t_2 \ldots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} \lambda(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, d\,t_k;$$

così la (43) è integrata.

Sia data l'equazione

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} + u = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k). \tag{44}$$

Se si pone

$$u = v + \sum_{h=1}^{k} \left[\varphi_{(h)}\right]_{h-1}$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} + v = G(x_1, x_2, \ldots, x_k) \tag{45}$$

posto

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) - \sum_{h=1}^{k} \left[\varphi_{(h)}\right]_{h-1}$$

ed allora per avere la soluzione della (44) che per $x_i = x_i^{(0)}$ si riduce a $\varphi_{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, basta trovare la soluzione della (45) che si annulla per $x_i = x_i^{(0)}$.

Ora se si pone mente che

$$L_{0,k}\left(k \sqrt[k]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_k}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h x_1^h x_2^h \ldots x_k^h}{(h!)^k}$$

si vede tosto che $L_{0,h}(k\sqrt[k]{x_1 . x_2 \dots x_k})$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} + v = 0 \tag{46}$$

e si riduce per $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ uguale ad 1; sarà allora

$$L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)\dots(x_k-\alpha_k)}\right)$$

la soluzione della (46) la quale si riduce eguale ad 1 se $x_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Consideriamo ora la funzione

$$\left.\begin{aligned} v(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \dots \\ \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)\, L_{0,h}\left(k\sqrt[k]{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)\dots(x_k-\alpha_k)}\right) d\alpha_k . \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Derivando rispetto ad x_1 si ha

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \frac{\partial L_{0,k}}{\partial x_1} d\alpha_k +$$

$$+ \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} d\alpha_3 \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(x_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)\, d\alpha_k$$

ed allora si deduce (*)

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \frac{\partial^k L_{0,k}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} d\alpha_k +$$

$$+ G(x_1, x_2, \dots, x_k) = -v + G(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

perchè $L_{0,k}$ soddisfa alla (46).

(*) Derivando rapporto ad x_2 si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \frac{\partial^2 L_{0,k}}{\partial x_1 \partial x_2} d\alpha_k +$$

La (47) è dunque la soluzione della (45) che si annulla per

$$x_i = x_i^{(0)} \; (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si conclude che se v è la funzione (47), la soluzione dall'equazione (46) che per $x_i = x_i^{(0)}$ si riduce a $\varphi_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ è

$$u = v + \sum_{h=1}^{k} \Big[\varphi_{(h)}\Big]_{h-1}.$$

Osserviamo che è

$$\frac{\partial^k L_{0,k}\left(k \sqrt[k]{w_1(x_1) \,.\, w_2(x_2) \ldots w_k(x_k)}\right)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_k} =$$

$$= - L_{0,k}\left(k \sqrt[k]{w_1(x_1) \,.\, w_2(x_2) \ldots w_k(x_k)}\right) w'_1(x_1)\, w'_2(x_2) \ldots w'_k(x_k);$$

allora se è data l'equazione

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_k} + a_1(x_1)\, a_2(x_2) \ldots a_k(x_k) \,.\, u = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) \tag{48}$$

la soluzione di essa che per $x_i = x_i^{(0)}$ si riduce a $\varphi_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ è data da

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \ldots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\, L_{0,k}\left(k\left[\prod_{i=1}^{k} \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} a_i(t_i)\, dt_i\right]^{\frac{1}{k}}\right)$$

ove è

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) -$$

$$- a_1(\alpha_1)\, a_2(\alpha_2) \ldots a_k(\alpha_k) \sum_{h=1}^{k} \Big[\varphi_{(h)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k\Big]_{h-1}.$$

$$+ \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\alpha_2 \ldots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(\alpha_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k) \left(\frac{\partial L_{0,k}}{\partial x_1}\right)_{\alpha_2 = x_2} d\alpha_k +$$

$$+ \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} d\alpha_3 \int_{x_4^{(0)}}^{x_4} d\alpha_4 \ldots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} G(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k)\, d\alpha_k$$

ma $\left(\frac{\partial L_{0,k}}{\partial x_1}\right)_{\alpha_2 = x_2} = 0$ onde il secondo addendo viene a mancare. Di qui la formola del testo.

Si abbia ancora l'equazione

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^k z}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_k}+\sum_{i=1}^{k}A_i(x_i)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_{i-1}\,\partial x_{i+1}\ldots\partial x_k}+\\&+\Big\{(-1)^k(k-1)A_1(x_1)A_2(x_2)\ldots A_k(x_k)+B_1(x_1)B_2(x_2)\ldots B_k(x_k)\Big\}z+\\&+C(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_k)=0.\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

Mediante la sostituzione

$$z=e^{-\sum\limits_{i=1}^{k}\int A_i(x_i)\,dx_i}\,.\,\zeta$$

l'equazione (49) diviene

$$\frac{\partial^k\zeta}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_k}+B_1(x_1)\,B_2(x_2)\ldots B_k(x_k)\,\zeta+$$
$$+e^{\sum\limits_{i=1}^{h}\int A_i(x_i)dx_i}\,C(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_k)=0$$

che è del tipo (48), epperò si integra col metodo indicato.

§ 12. — Integrazione delle equazioni lineari

$$\sum_{i=0}^{p}a_{p-i}\frac{\partial^{ki}u}{\partial x_1^i\,\partial x_2^i\ldots\partial x_k^i}=\begin{cases}0\\K(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_k)\end{cases}$$

E DI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI CONTENENTI LE DERIVATE DELLA FORMA PRECEDENTE, A COEFFICIENTI COSTANTI, MEDIANTE LE FUNZIONI $L_{0,k}$.

Sia data l'equazione

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^{kp}u}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\ldots\partial x_k^p}+a_1\frac{\partial^{k(p-1)}u}{\partial x_1^{p-1}\partial x_2^{p-1}\ldots\partial x_k^{p-1}}+\\&+a_2\frac{\partial^{k(p-2)}u}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2^{p-2}\ldots\partial x_k^{p-2}}+\cdots+a_p\,u=0\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

e cominciamo col determinarne la soluzione che soddisfa alle condizioni

$$\frac{\partial^{km}u}{\partial x_1^m\,\partial x_2^m\ldots\partial x_k^m}=M_m\quad(m=0,\,1,\ldots,\,p-1)\tag{51}$$

per $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2,\ldots,$ $x_k=\alpha_k$, essendo M_m p numeri prefissati.

La funzione

$$L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{\theta\,(x_1-\alpha_1)\,(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right)$$

soddisfa all'equazione (50) se θ soddisfa all'equazione

$$\theta^p - a_1\,\theta^{p-1} + a_2\,\theta^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}\,a_{p-1}\,\theta + (-1)^p\,a_p = 0. \tag{52}$$

Se le radici $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ della (52) sono tutte diverse, la funzione

$$\sum_{r=1}^{p} A_r\,u_r$$

ove si pone

$$u_r = L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{\theta_r\,(x_1-\alpha_1)\,(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right)$$

soddisfa alla (50), e poichè

$$\left(\frac{\partial^{ks}\,u_r}{\partial x_1^s\,\partial x_2^s\ldots\partial x_k^s}\right)_{x_1=\alpha_1} = \left(\frac{\partial^{ks}\,u_r}{\partial x_1^s\,\partial x_2^s\ldots\partial x_k^s}\right)_{x_2=\alpha_2} = \cdots =$$

$$= \left(\frac{\partial^{ks}\,u_r}{\partial x_1^s\,\partial x_2^s\ldots\partial x_s^k}\right)_{x_k=\alpha_k} = (-1)^s\,\theta_r^s$$

soddisferà pure alle condizioni (51) se i numeri A_r sono scelti in modo da soddisfare al sistema normale di equazioni lineari

$$\left.\begin{array}{c} A_1\,\theta_1^s + A_2\,\theta_2^s + \cdots + A_p\,\theta_p^s = (-1)^s\,M_s \\ (s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p-1). \end{array}\right\} \tag{53}$$

Se l'equazione (52) ha radici multiple, il sistema (53) non è normale. Sia

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_q \qquad \theta_r \neq \theta_s \qquad \text{per } r > q,\ s > q.$$

Se si indica con $F(\theta)$ il primo membro della (52) e si pone

$$u = L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{\theta\,(x_1-\alpha_1)\,(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right)$$

si ha identicamente

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^{kp}\,u}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\ldots\partial x_k^p} + a_1\,\dfrac{\partial^{k(p-1)}\,u}{\partial x_1^{p-1}\,\partial x_2^{p-1}\ldots\partial x_k^{p-1}} + a_2\,\dfrac{\partial^{k(p-2)}\,u}{\partial x_1^{p-2}\,\partial x_2^{p-2}\ldots\partial x_k^{p-2}} + \cdots \\ \cdots + a_p\,u = F(\theta)\cdot u. \end{array}\right\} \tag{54}$$

Derivando s volte rapporto a θ si ha

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^{kp}\left(\frac{\partial^s u}{\partial \theta^s}\right)}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\ldots\partial x_k^p}+a_1\,\frac{\partial^{k(p-1)}\left(\frac{\partial^s u}{\partial \theta^s}\right)}{\partial x_1^{p-1}\,\partial x_2^{p-1}\ldots\partial x_k^{p-1}}+\cdots\\ \cdots+a_p\,\frac{\partial^s u}{\partial \theta^s}=\sum_{m=0}^{s}\frac{d^m F}{d\,\theta^m}\,\frac{\partial^{s-m} u}{\partial\,\theta^{s-m}}.\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Ora se si pone in luogo di θ la radice θ_1 di multiplicità q della (52) ed è $s<q$, il secondo membro della (55) è nullo; ciò mostra che oltre alla funzione

$$u_1=L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{\theta_1\,(x_1-\alpha_1)\,(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right)$$

soddisfano alla (50) le altre $q-1$ funzioni

$$u_2=\frac{\partial u_1}{\partial\,\theta_1},\quad u_3=\frac{\partial^2 u_1}{\partial\,\theta_1^2},\ldots,\quad u_q=\frac{\partial^{q-1} u_1}{\partial\,\theta_1^{q-1}}$$

insieme con le u_{q+1}, $u_{q+2},\ldots,u_p$ del caso precedente.

Allora se si prendono i numeri A soddisfacenti al sistema

$$A_1\,\theta_1^s+A_2\,s\,\theta_1^{s-1}+A_3\,s^{\overline{2}}\,\theta_1^{s-2}+\cdots+A_q\,s^{\overline{q-1}}\,\theta_1^{s-q+1}+A_{q+1}\,\theta_{q+1}^s+A_{q+2}\,\theta_{q+2}^s+\cdots$$
$$\cdots+A_p\,\theta_p^s=(-1)^s M,$$
$$(s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p-1)$$

dove θ_1 innalzato ad esponente negativo deve essere rimpiazzato dallo zero, la

$$\sum_{r=1}^{p} A_r\,u_r$$

è la soluzione della (50) che soddisfa alle condizioni (51).

Sia data ora l'equazione

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^{kp} u}{\partial x_1^p\,\partial x_2^p\ldots\partial x_k^p}+a_1\,\frac{\partial^{k(p-1)} u}{\partial x_1^{p-1}\,\partial x_2^{p-2}\ldots\partial x_k^{p-1}}+\cdots+\\ +a_p\,u=K(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_k).\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

Sia

$$U\left((x_1-\alpha_1)\,(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)\right)$$

la soluzione dell'equazione (56) in cui a secondo membro abbiamo posto lo zero e soddisfacente alle condizioni

$$\frac{\partial^{km} U}{\partial x_1^m \partial x_2^m \dots \partial x_k^m} = 0$$
$$(m = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ p-2)$$
$$\frac{\partial^{k(p-1)} U}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2^{p-1} \dots \partial x_k^{p-1}} = 1$$

per $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2, \dots,$ $x_k = \alpha_k$. Allora la funzione

$$u = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\,\alpha_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\,\alpha_2 \dots \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)\, U((x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) \dots (x_k - \alpha_k))\, d\,\alpha_k$$

soddisfa all'equazione (56) e alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^r u}{\partial x_1^r}\right)_{x_1 = x_1^{(0)}} = \left(\frac{\partial^r u}{\partial x_2^r}\right)_{x_2 = x_2^{(0)}} = \dots = \left(\frac{\partial^r u}{\partial x_k^r}\right)_{x_k = x_k^{(0)}} = 0 \text{ (*)} \tag{57}$$
$$(r = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ p-1).$$

Finalmente si abbia l'equazione

$$\frac{\partial^{kp} z}{\partial x_1^p \partial x_2^p \dots \partial x_k^p} + a_1 \frac{\partial^{k(p-1)} z}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2^{p-1} \dots \partial x_k^{p-1}} + \dots + a_p z = H \tag{58}$$

ove H può essere o lo zero o una funzione di $x_1, x_2, \dots, x_h$ e si voglia l'integrale che soddisfa alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^h z}{\partial x_i^h}\right)_{x_i = x_1^{(0)}} = \varphi_{i,h}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \tag{59}$$
$$\begin{pmatrix} i = 1,\ 2, \dots,\ k \\ h = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ p-1 \end{pmatrix}$$

supposto

$$\left(\frac{\partial^r \varphi_{s,h}}{\partial x_i^r}\right)_{x_i = x_i^{(0)}} = \left(\frac{\partial^h \varphi_{i,r}}{\partial x_s^h}\right)_{x_s = x_s^{(0)}}.$$

Sia $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ una funzione che soddisfa alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^h \Phi}{\partial x_i^h}\right)_{x_i = x_i^{(0)}} = \varphi_{i,h} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \dots k \\ h = 0,\ 1 \dots p-1 \end{pmatrix}$$

che si può sempre costruire.

(*) Cfr. SIBIRANI, *Sull'integrazione di un tipo di equazioni alle derivate parziali* (Periodico di Matematica, 1913), § 3.

Se si pone

$$z = u + \Phi$$

e si indica con Ω il primo membro della (58) calcolato per $z = \Phi$, l'equazione (58) diventa

$$\frac{\partial^{kp} u}{\partial x_1^p \partial x_2^p \dots \partial x_k^p} + a_1 \frac{\partial^{k(p-1)} u}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2^{p-2} \dots \partial x_k^{p-1}} + \dots + a_p u = H - \Omega$$

della quale basta determinare la soluzione u per cui

$$\left(\frac{\partial^h u}{\partial x_i^h}\right)_{x_i = x_i^{(0)}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, k \\ h = 1, 2, \dots, p-1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione desiderata in u la sappiamo trovare, come prima abbiamo fatto vedere.

Se si ha il sistema

$$\frac{\partial^k z_r}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} + a_{r,1} z_1 + a_{r,2} z_2 + \dots + a_{r,k} z_n = \chi_r (x_1, x_2, \dots x_k)$$
$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

ove $a_{r,1}, a_{r,2}, \dots, a_{r,n}$ sono delle costanti, mediante successive derivazioni si riconduce la sua integrazione a quella di equazioni del tipo (58) già considerato.

Ed analogamente avviene per il sistema della forma

$$\sum_{h=0}^{p} \sum_{s=1}^{q} a_{r,h,s} \frac{\partial^{kh} z_s}{\partial x_1^h \partial x_2^h \dots \partial x_k^h} = \chi_r (x_1, x_2, \dots, x_k)$$
$$(r = 1, 2, \dots, q)$$

ove le a sono costanti.

§ 13. — ∞^2 INTEGRALI PARTICOLARI DI UN'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 2.° ORDINE.

Si consideri l'equazione

$$\sum_{i=1}^{p} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{p-2}{p} \cdot \frac{1}{x_i - \alpha_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} + k^2 \left(r^{2k-2} - \frac{n^2}{r^2} \right) u = 0 \tag{60}$$

ove è

$$r = \sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \dots (x_p - \alpha_p)^2}.$$

Posto

$$v = r^k$$

si consideri u funzione composta delle x_i per il tramite della v; essendo allora

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{d u}{d v} k r^{k-2} (x_i - \alpha_i)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 u}{d v^2} k^2 r^{2(k-2)} (x_i - \alpha_i)^2 + \frac{d u}{d v} \left\{ k (k-2) r^{k-4} (x_i - \alpha_i)^2 + k r^{k-2} \right\}$$

la (60) diviene

$$k^2 r^{2k-2} \left\{ \frac{d^2 u}{d v^2} + \frac{1}{v} \frac{d u}{d v} \right\} + k^2 \left(r^{2k-2} - \frac{n^2}{r^2} \right) u = 0$$

o anche dividendo per $k^2 r^{2k-2}$

$$\frac{d^2 u}{d v^2} + \frac{1}{v} \frac{d u}{d v} + \left(1 - \frac{n^2}{v^2} \right) u = 0$$

la quale, riguardando v come variabile indipendente, è un'equazione di Bessel, il cui integrale generale è, colle nostre notazioni,

$$u = c_1 L_{0,2} (v) + c_2 U_2 (v).$$

Ne consegue che

$$u = c_1 L_{0,2} \left(\left[\sum_1^p (x_i - \alpha_i)^2 \right]^{\frac{k}{2}} \right) + c_2 U_2 \left(\left[\sum_1^p (x_i - \alpha_i)^2 \right]^{\frac{k}{2}} \right)$$

dà ∞^2 integrali particolari della (60).

Per $k = 1$, $n = 0$, $p = 2$ si ha l'equazione considerata da Neumann (*); per $k = 1$, $p = 2$, n qualunque, si ha l'equazione considerata da Nielsen (**).

(*) L. c., pag. 50.
(**) L. c., pag. 141.

§ 14. — Un'espressione di $L_{n,k}(x)$ mediante $L_{0,k}(x)$.

La funzione

$$L_{n,k}\left(k\sqrt[k]{x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \ldots x_k}\right) x_1^{-\frac{n}{k}} x_2^{\frac{k-1}{k}n} x_3^{\frac{2k-1}{k}n} \ldots x_k^{\frac{k(k-1)-1}{k}n} =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h x_1^h x_2^{h+n} x_3^{h+2n} \ldots x_k^{h+(k-1)n}}{h!\,(h+n)!\,(h+2n)! \ldots (h+(k-1)n)!}$$

soddisfa manifestamente all'equazione

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_k} + z = 0;$$

essa prende per $x_1 = 0$ il valore

$$\frac{x_2^n x_3^{2n} \ldots x_k^{(k-1)n}}{n!\,(2n)! \ldots ((k-1)n)!}$$

mentre per $x_i = 0 \, (i = 2, 3, \ldots, k)$ prende il valore 0. Ma una tale funzione, per quanto abbiamo visto al § 11, può porsi sotto la forma

$$\frac{x_2^n x_3^{2n} \ldots x_k^{(k-1)n}}{n!\,(2n)! \ldots ((k-1)n)!} - \int_0^{x_1} d\alpha_1 \int_0^{x_2} \alpha_2^n \, d\alpha_2 \int_0^{x_3} \alpha_3^{2n} \, d\alpha_3 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_k} \alpha_k^{(k-1)n} \frac{L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right)}{n!\,(2n)! \ldots ((k-1)n)} d\alpha_k$$

onde

$$n!\,(2n)! \ldots ((k-1)n)!\, L_{n,k}\left(k\sqrt[k]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_k}\right) x_1^{-\frac{n}{k}} x_2^{\frac{k-1}{k}n} x_3^{\frac{2k-1}{k}n} \ldots$$

$$\ldots x_k^{\frac{(k-1)k-1}{k}n} = x_2^n x_3^{2n} \ldots x_k^{(k-1)n} - \int_0^{x_1} d\alpha_1 \int_0^{x_2} \alpha_2^n \, d\alpha_2 \int_0^{x_3} \alpha_3^{2n} \, d\alpha_3 \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_k} \alpha_k^{(k-1)n} L_{0,k}\left(k\sqrt[k]{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)\ldots(x_k-\alpha_k)}\right) d\alpha_k.$$

Se poniamo

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{x}{k}, \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{k} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

la formula precedente diviene

$$n!\,(2n)!\ldots((k-1)\,n)!\,L_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{k}\right)^n -$$

$$- x^{\frac{-k(k-1)+2}{2}n}\, k^{-(k+n)} \int_0^x d\beta_1 \int_0^x \beta_2^n\, d\beta_2 \int_0^x \beta_3^{2n}\, d\beta_3 \ldots \int_0^x \beta_k^{(k-1)n}\, L_{0,k}\left(k \sqrt[k]{(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_k)}\right)$$

la quale esprime $L_{n,k}$ mediante $L_{0,k}$.

Pallanza, estate 1917.

Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche.

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

Questa Nota si propone di portare qualche contributo alla teoria delle serie algebriche di gruppi di punti di una curva algebrica. Poichè la considerazione di una serie algebrica γ_n^1 di indice ν sopra una curva C di genere p è intimamente legata a quella della corrispondenza (n, ν) che viene indotta fra C ed una curva C' birazionalmente identica a γ_n^1, abbiamo cercato di approfondire lo studio delle corrispondenze algebriche fra due curve distinte, partendo dalle formule di Hurwitz che ne dànno la rappresentazione mediante gli integrali abeliani di 1.ª specie. Queste formule, com'è noto, associano alle due operazioni, che conducono da un punto di ciascuna delle due curve agli omologhi dell'altra, due matrici di numeri interi: nel n.º 2 vien data la dimostrazione delle relazioni che legano gli elementi di una matrice con quelli dell'altra. Usando poi dei procedimenti già adoperati per le corrispondenze fra i punti di una curva (*), si espone l'interpretazione geometrica delle dette formule di Hurwitz e si ritrova, per questa via, un interessante teorema dovuto al Severi. In seguito, si considerano le corrispondenze *laterali* della data, cioè le corrispondenze simmetriche che si hanno sulle due curve quando, su ciascuna di esse, si prendano come omologhi due punti che corrispondono allo stesso punto dell'altra, e si trova fra le loro valenze una relazione semplicissima, da cui segue immediatamente la formula di Zeuthen. Vengono poi studiate le curve contenenti due involu-

(*) Cfr. Rosati: a) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due* (Annali di Matematica, Tomo XXV, Serie III, 1915); b) *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* (Atti della R. Accademia di Torino, Vol. 51, 1916); c) *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (ibid., vol. 53, 1917).

Designeremo queste Note, nei richiami ulteriori, rispettivamente con *C.*, *C. P.*, e *V.*

zioni irrazionali, cioè le curve che sono immagini di corrispondenze fra due curve distinte, o trasformate razionali di tali immagini; e dall'esame della configurazione degli *assi* dei sistemi regolari riducibili che le involuzioni stesse individuano, si deduce la proprietà che *se le due involuzioni non sono componenti di una medesima involuzione, la curva possiede un'infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili.*

Intorno a questo risultato se ne raccolgono alcuni altri, fra cui l'osservazione che una involuzione di genere > 1 è individuata dai due sistemi regolari riducibili che essa determina sulla curva.

Infine si mettono in relazione le valenze delle corrispondenze laterali di una data corrispondenza con quelle che, sulla curva immagine, posseggono le corrispondenze ottenute moltiplicando l'una per l'altra le due involuzioni in essa esistenti.

1. Fra due curve C e C' dei generi p e ϖ $(p \geq \varpi)$ si abbia una corrispondenza algebrica (n, ν); T indichi l'operazione che conduce da un punto x di C' agli n punti $y' y'' \dots y^n$ omologhi di C, e T^{-1} l'operazione, inversa di T, che conduce da un punto y di C ai ν punti omologhi $x' x'' \dots x^\nu$ di C'. Sulla curva C avremo una serie algebrica γ_n^1 di indice ν descritta dai gruppi G_n omologhi di un punto x variabile su C', ed una serie analoga γ_ν^1 di indice n avremo sulla curva C' (*). Con gli stessi simboli C e C' indicheremo pure le superficie di Riemann relative alle due curve.

Fissati allora su C e su C' due sistemi di retrosezioni $(\sigma_i\, \sigma_{p+i})$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ e $(\tau_i\, \tau_{\varpi+i})$ $(i = 1, 2, \dots, \varpi)$, e indicando con $u_1 u_2 \dots u_p$ gli integrali normali di 1.ª specie di C, con $v_1 v_2 \dots v_\varpi$ quelli di C', con a_{ik} il periodo di u_i lungo il ciclo σ_{p+k} e con τ_{ik} il periodo di v_i lungo il ciclo $\tau_{\varpi+k}$, si hanno le relazioni di Hurwitz

$$u_k(y') + \dots + u_k(y^n) = \sum_{i=1}^{i=\varpi} \pi_{ki} v_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p) \tag{1}$$

nelle quali le π_k sono costanti dipendenti dall'origine delle integrazioni e

(*) Nel caso in cui il gruppo G_n, omologo di x, è omologo anche di altri $\varepsilon - 1$ punti di C', la γ_ν^1 è composta con una involuzione I_ε e la γ_n^1 ha l'indice $\frac{\nu}{\varepsilon}$. Possiamo tuttavia considerare la γ_n^1 come avente l'indice ν, contando ε volte ogni suo gruppo. Lo stesso dicasi invertendo le due curve.

le π_{kl} soddisfano alle $2p\varpi$ uguaglianze

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} g_{il}\, a_{ki} \\ &\sum_{i=1}^{i=\varpi} \pi_{ki}\tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} G_{il}\, a_{ki} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p \\ l = 1, 2, \ldots, \varpi \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

in cui i numeri h, g, H, G sono interi. Eliminando in esse le π_{kl} si ottengono fra i periodi a_{ik} τ_{ik} le $p\varpi$ relazioni bilineari

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=\varpi} h_{ki}\,\tau_{il} + \sum_{i=1}^{i=\varpi}\sum_{m=1}^{m=p} g_{mi}\, a_{km}\,\tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} G_{il}\, a_{ki} \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, p;\quad l = 1, 2, \ldots, \varpi). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La matrice $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$ si chiamerà *matrice della operazione T.*

2. Per l'operazione T^{-1} valgono formule analoghe alle (1) (2) (3):

$$v_k(x') + \cdots + v_k(x^\nu) = \sum_{i=1}^{i=p} \overline{\pi}_{ki}\, u_i(y) + \overline{\pi}_k \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\pi}_{kl} = h'_{kl} + \sum_{i=1}^{i=\varpi} g'_{il}\,\tau_{ki} \\ &\sum_{i=1}^{i=p} \overline{\pi}_{ki}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum_{i=1}^{i=\varpi} G'_{il}\,\tau_{ki} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \varpi \\ l = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \right\} \tag{2'}$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} h'_{ki}\, a_{il} + \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{m=1}^{m=\varpi} g'_{mi}\,\tau_{km}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum_{i=1}^{i=\varpi} G'_{il}\,\tau_{ki}. \tag{3'}$$

Ora è importante determinare il modo con cui, nota la matrice di T, si deduce quella di T^{-1}. Indicando perciò con $y'\, y'' \ldots y^n$ e con $y'_0\, y''_0 \ldots y^n_0$ i punti di C corrispondenti per la T ad un punto variabile x e ad un punto fisso x_0 della curva C', con y e y_0 un punto variabile e un punto fisso di C, si consideri con Hurwitz (*) il prodotto

$$C(x\,y) = \prod_{r=1}^{r=n} \frac{\vartheta\,[u_i(y) - u_i(y^r) - c_i]}{\vartheta\,[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i]\;\vartheta\,[u_i(y) - u_i(y^r_0) - c_i]},$$

(*) Hurwitz, ***Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*** (Math. Annalen, Bd. 28, 1886, § 3).

in cui le trascendenti ϑ sono costruite coi periodi degli integrali normali u_i e le costanti c_i sono scelte in guisa che la funzione $\vartheta[u_i(y_1) - u_i(y_2) - c_i]$ della coppia di punti $y_1\, y_2$ della curva C, come funzione della sola y_1 (o della sola y_2) si annulla del 1.° ordine per $y_1 = y_2$ (o per $y_2 = y_1$) e in $p-1$ punti dipendenti solo dalle costanti c_i.

Se $\bar{y}$ è un punto fissato sulla superficie di Riemann C, la $C(x\bar{y})$ è funzione del punto x scorrente sulla superficie di Riemann C'. Si faccia percorrere ad x su C' un ciclo lineare σ: i punti $y'\,y''\ldots y^n$ si permutano fra loro, e se diciamo y^s il punto in cui va y^r a circolazione compiuta, dando ad r i valori $1, 2, \ldots, n$, anche s acquista, in altro ordine, gli stessi valori. Per effetto del ciclo σ, $u_i(y^r)$ diviene $u_i(y^s) + \lambda_1^s a_{i1} + \cdots + \lambda_p^s a_{ip} + \mu_i^s$, in cui λ_i e μ_i rappresentano numeri interi, onde se per brevità poniamo

$$\vartheta_{1r} = \vartheta[u_i(\bar{y}) - u_i(y^r) - c_i], \quad \vartheta_{2r} = \vartheta[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i],$$
$$\vartheta_{3r} = \vartheta[u_i(\bar{y}) - u_i(y_0^r) - c_i],$$

si vede che ϑ_{3r} è costante, mentre $\vartheta_{1r}\, \vartheta_{2r}$ si trasformano rispettivamente in

$$\vartheta_{1s} \cdot e^{2\pi i \left\{ \sum_i^{1\ldots p} \lambda_i^s [u_i(\bar{y}) - u_i(y^s) - c_i] - \frac{1}{2} \sum_{ik}^{1\ldots p} \lambda_i^s \lambda_k^s a_{ik} \right\}}$$

e in

$$\vartheta_{2s} \cdot e^{2\pi i \left\{ \sum_i^{1\ldots p} \lambda_i^s [u_i(y_0) - u_i(y^s) - c_i] - \frac{1}{2} \sum_{ik}^{1\ldots p} \lambda_i^s \lambda_k^s a_{ik} \right\}};$$

la funzione $C(x\bar{y})$ acquista dunque il fattore

$$e^{2\pi i \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i^s [u_i(\bar{y}) - u_i(y_0)]} = e^{2\pi i \sum_{i=1}^{i=p} [u_i(y) - u_i(y_0)] \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_i^s}.$$

Si osservi ora che la somma $\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{i1} + \cdots + \lambda_p^s a_{ip} + \mu_i^s)$, rappresentando l'accrescimento di $\sum_{r=1}^{r=n} u_i(y^r)$ per effetto del ciclo σ, è uguale al valore dell'integrale u_i esteso al ciclo σ' omologo di σ per la T.

Si supponga dapprima che σ sia un ciclo omologo a zero, poi che coincida coi cicli $\tau_l\, \tau_{\varpi+l}$ costituenti la coppia di retrosezioni $(\tau_l\, \tau_{\varpi+l})$: corrispondentemente alle tre ipotesi, si avrà

$$\sigma' \sim 0, \quad \sigma' \sim h_{1l}\, \sigma_1 + \cdots + h_{pl}\, \sigma_p + g_{1l}\, \sigma_{p+1} + \cdots + g_{pl}\, \sigma_{2p},$$
$$\sigma' \sim H_{1l}\, \sigma_1 + \cdots + H_{pl}\, \sigma_p + G_{1l}\, \sigma_{p+1} + \cdots + G_{pl}\, \sigma_{2p}$$

e quindi

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = h_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} g_{il} a_{ki},$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = H_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} G_{il} a_{ki}$$

cioè

$$\sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = 0, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = g_{\varepsilon l}, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = G_{\varepsilon l}.$$

Risulta da ciò che la $C(x\,\bar{y})$ sulla superficie di Riemann C', resa semplicemente connessa mediante le retrosezioni $(\tau_l\ \tau_{\varpi+l})$, è funzione uniforme; e che inoltre, se si indicano con C^+ e con C^- i valori che essa assume in punti corrispondenti dei bordi positivo o negativo di ciascun taglio, si ha lungo τ_l:

$$C^+ = C^- e^{2\pi i \sum_{k=1}^{k=p} g_{kl}[u_k(y) - u_k(y_0)]}, \tag{4}$$

e lungo $\tau_{\varpi+l}$:

$$C^+ = C^- e^{2\pi i \sum_{k=1}^{k=p} G_{kl}[u_k(y) - u_k(y_0)]}. \tag{5}$$

Poichè la funzione $C(x\,\bar{y})$ ammette degli zeri del 1.° ordine nei punti $x'x''\ldots x^\nu$ omologhi di $\bar{y}$ nella T^{-1} e dei poli del 1.° ordine nei punti $x'_0 x''_0 \ldots x_0^\nu$ omologhi di y_0, applicando alla funzione $v_k(x)\, d\log C(x\,\bar{y})$ il teorema di Cauchy, si avrà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\tau v_k\, d\log C(x\,\bar{y}) = \sum_{r=1}^{r=\nu} \left\{ v_k(x^r) - v_k(x_0^r) \right\},$$

l'integrale essendo esteso al contorno τ della superficie C' resa semplicemente connessa. L'integrale si determina facilmente tenendo presenti le (4) e (5); onde la formula precedente diviene

$$\sum_{i=1}^{i=p} \left\{ u_i(\bar{y}) - u_i(y_0) \right\} \left(G_{ik} - \sum_{l=1}^{l=\varpi} g_{il}\, \tau_{kl} \right) = \sum_{r=1}^{r=\nu} \left\{ v_k(x^r) - v_k(x_0^r) \right\}. \tag{6}$$

Confrontando la (6) con la (1') e con la prima delle (2') si deduce

$$h'_{kl} = G_{lk} \qquad g'_{kl} = -g_{lk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi);$$

ma allora, sommando le (3) con le (3'), si ottiene

$$\sum_{i=1}^{i=\varpi} (h_{ki} - G'_{ik})\,\tau_{li} = H_{kl} + H'_{lk} \quad (k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi),$$

e perciò si avrà

$$G'_{kl} = h_{lk} \qquad H'_{kl} = -H_{lk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi).$$

Si ha dunque la proprietà:

Se $\begin{Vmatrix} h_{kl} & g_{kl} \\ H_{kl} & G_{kl} \end{Vmatrix}$ *è la matrice della operazione T, quella della operazione* T^{-1} *è* $\begin{Vmatrix} G_{lk} & -g_{lk} \\ -H_{lk} & h_{lk} \end{Vmatrix}$ $(h = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi)$ (*),

3. Delle formole (1) (2) (3) può darsi una interpretazione geometrica analoga a quella che abbiamo esposta altrove nel caso delle corrispondenze fra i punti di una curva (**).

Si osservi perciò che ad ogni ciclo σ descritto da un punto x su C' la T fa corrispondere un ciclo σ' di C, dovuto alla sostituzione che, per effetto del ciclo σ, si produce sui punti $y' y'' \ldots y^n$ omologhi di x, e che un integrale di 1.ª specie di C dà origine, sommandone i valori nei punti $y' y'' \ldots y^n$, ad un integrale di 1.ª specie di C'.

Considerando allora i due spazi S_{2p-1} $S_{2\varpi-1}$ rappresentativi delle due curve ed in essi i rispettivi spazi dei periodi $S_{p-1} = \alpha$ $S_{\varpi-1} = \tau$, corrispondenti ai fissati sistemi di retrosezioni, possiamo dire che la T associa ad un punto razionale di $S_{2\varpi-1}$ un punto razionale di S_{2p-1} e ad un iperpiano della stella (α) un iperpiano della stella (τ).

Indichiamo ora con $x_i\,\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$ le coordinate omogenee di punto e di iperpiano in S_{2p-1}, con $y_i\,\eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2\varpi)$ quelle di punto e di iperpiano in $S_{2\varpi-1}$ e con $\bar\xi_1\,\bar\xi_2 \ldots \bar\xi_p$ e $\bar\eta_1\,\bar\eta_2 \ldots \bar\eta_\varpi$ le coordinate entro le stelle (α) e (τ) di due iperpiani delle stelle stesse, assunti in esse come elementi di riferimento gli iperpiani $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p$ e $\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_\varpi$ immagini degli integrali normali. Siano inoltre r e q le caratteristiche delle matrici $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$

(*) Nella citata Memoria di Hurwitz questa proprietà è solamente enunciata e nel solo caso di corrispondenze fra i punti di una curva. Abbiamo perciò creduto utile darne la dimostrazione.

(**) Rosati, *C.*, § 1.

e $\| \pi_{rs} \|$; escludendo il caso che la corrispondenza data sia a valenza zero, si avrà $0 < r \leq 2\varpi$, $0 < q \leq \varpi$.

È chiaro allora che la corrispondenza indotta da T fra i cicli delle due curve si traduce nelle relazioni lineari

$$\left.\begin{aligned} \rho\, x_i &= h_{i1}\, y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\, y_\varpi + H_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \\ \rho\, x_{p+i} &= g_{i1}\, y_1 + \cdots + g_{i\varpi}\, y_\varpi + G_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + G_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

che definiscono in S_{2p-1} uno spazio ρ' di dimensione $r-1$. Tale spazio, se è $r = 2\varpi$, è riferito collinearmente ad $S_{2\varpi-1}$; se invece è $r < 2\varpi$, è riferito collinearmente ad una stella di $S_{2\varpi-1}$, avente per centro uno spazio ρ'' di dimensione $2\varpi - 1 - r$; i punti razionali di ρ'' sono immagini dei cicli di C' che hanno per omologhi su C dei cicli nulli. L'omografia Ω definita dalle (7) si dirà *immagine* di T.

La corrispondenza indotta da T fra gli integrali di 1.ª specie delle due curve si traduce in una trasformazione proiettiva Π della stella (α) nella stella (τ), definita dalle relazioni lineari

$$\sigma\, \overline{\eta}_i = \pi_{1i}\, \overline{\xi}_1 + \pi_{2i}\, \overline{\xi}_2 + \cdots + \pi_{pi}\, \overline{\xi}_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi);$$

essa è tale che esiste un $S_{p-1+q} = \alpha'$, uscente da α, centro di una stella d'iperpiani che hanno nella stella (τ) l'omologo indeterminato, mentre l'omologo di ogni altro iperpiano di (α) passa costantemente per un $S_{2\varpi-1-q} = \tau'$ uscente da τ, spazio che viene a coincidere con τ quando è $q = \varpi$.

Alla trasformazione proiettiva Ω se ne associ un'altra, che diremo Ω^{-1}, operante sugli iperpiani di S_{2p-1} e di $S_{2\varpi-1}$, rappresentata dalla sostituzione trasposta della (7);

$$\begin{aligned} \rho\, \eta_i &= h_{1i}\, \xi_1 + \cdots + h_{pi}\, \xi_p + g_{1i}\, \xi_{p+1} + \cdots + g_{pi}\, \xi_{2p} \\ \rho\, \eta_{\varpi+i} &= H_{1i}\, \xi_1 + \cdots + H_{pi}\, \xi_p + G_{1i}\, \xi_{p+1} + \cdots + G_{pi}\, \xi_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi); \end{aligned}$$

per essa ogni iperpiano di S_{2p-1} uscente da ρ' ha l'omologo indeterminato, mentre l'omologo di ogni altro iperpiano di S_{2p-1} descrive in $S_{2\varpi-1}$ la stella di centro ρ''.

Ciò posto, è facile vedere che il significato geometrico delle relazioni (1) (2) (3) di Hurwitz consiste in ciò che Π *è una trasformazione proiettiva subordinata in* Ω^{-1}.

Ed invero i primi membri delle (2) per un fissato valore di k sono le coordinate in $S_{2\tilde{\omega}-1}$ dell'iperpiano che corrisponde ad α_k nella proiettività Π, mentre i secondi membri sono le coordinate dell'omologo di α_k in Ω^{-1}; dando a k i valori 1, 2,..., p, l'asserto resta provato.

4. Da quanto precede discende facilmente la seguente proprietà:

Fra le caratteristiche r e q delle matrici $\left\| \begin{matrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{matrix} \right\|$ *e* $\| \pi_{rs} \|$ *relative alla operazione T sussiste la relazione $r = 2q$, e alla T vengono associati due sistemi regolari riducibili: uno ∞^{p-q-1} della curva C, costituito dagli integrali che dànno somma costante nei gruppi della serie γ_n^1; l'altro ∞^{q-1} di C', generato dalle somme degli integrali di C nei gruppi della serie stessa* (*).

Si supponga anzitutto $q = \varpi$. In tal caso lo spazio τ', inviluppo degli iperpiani omologhi in Π degli iperpiani della stella (α), coincide con τ; si vede allora che dovrà essere $r = 2\varpi$, perchè, se fosse $r < 2\varpi$, esisterebbe in $S_{2\tilde{\omega}-1}$ uno spazio ρ'' di dimensione $2\varpi - 1 - r \geq 0$, inviluppo degli iperpiani omologhi in Ω^{-1} di ogni iperpiano di S_{2p-1}, il quale, per essere Π subordinata in Ω^{-1}, dovrebbe giacere in τ. Ciò è assurdo, perchè ρ'' è uno spazio razionale e τ non può contenere alcun punto reale.

Sia ora $q < \varpi$. Lo spazio razionale ρ', inviluppo degli iperpiani di S_{2p-1} che per la Ω^{-1} hanno in $S_{2\tilde{\omega}-1}$ l'omologo indeterminato, dovrà, sempre per essere Π subordinata in Ω^{-1}, giacere in α'; donde segue, in virtù di una proprietà nota (**), che

$$r \leq 2q. \tag{8}$$

Per la stessa ragione dovrà lo spazio razionale ρ'', di dimensione $2\varpi - 1 - r \geq 0$, essere contenuto in τ'; ed allora, per la stessa proprietà, si avrà

$$2\varpi - r \leq 2\varpi - 2q. \tag{9}$$

Dalle disuguaglianze (8) (9) segue allora $r = 2q$.

Lo spazio α', contenente uno spazio razionale ρ' di dimensione $2q - 1$, è centro di una stella immagine di un sistema regolare riducibile ∞^{p-q-1} della curva C; e lo spazio τ', contenendo uno spazio razionale ρ'' di dimen-

(*) Nel caso $q = \tilde{\omega} < p$, e nell'altro $q = \tilde{\omega} = p$ uno od entrambi i sistemi coincidono col rispettivo sistema totale d'integrali. Tuttavia, per non complicare l'enunciato del teorema continuiamo, anche nei casi suddetti, a parlare di sistemi regolari riducibili.

(**) Rosati, *C.*, § 2.

sione $2(\varpi - q) - 1$, è centro di una stella immagine di un sistema regolare riducibile della curva C'. Ed è chiaro, per l'ufficio che i detti spazi hanno nella proiettività Π, che i sistemi regolari medesimi hanno le proprietà contenute nell'enunciato.

5. D'ora innanzi diremo *asse* di un sistema regolare riducibile (*) lo spazio razionale contenuto nel centro della stella d'iperpiani immagine del sistema.

Nel n.° precedente abbiamo visto che l'operazione T individua due sistemi regolari riducibili, uno ∞^{q-1} della curva C' e l'altro ∞^{p-q-1} della curva C; gli assi $\overline{R}_{2(\tilde{\omega}-q)-1}$ R_{2q-1} dei due sistemi si chiameranno *primo* e *secondo asse* della operazione T.

Poichè la matrice $\begin{Vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$ di T^{-1} ha la stessa caratteristica $2q$ di quella di T (**), la T^{-1} avrà per primo asse un $R_{2(p-q)-1}$ di S_{2p-1} e per secondo asse un $\overline{R}_{2q-1}$ di $S_{2\tilde{\omega}-1}$, ed essi saranno assi di due sistemi regolari riducibili ∞^{q-1} $\infty^{\tilde{\omega}-q-1}$, appartenenti rispettivamente alle curve C e C'. L'omografia Ω', immagine di T^{-1}, la quale è definita dalle formule

$$\rho\, y_i = G_{1i} x_1 + \cdots + G_{pi} x_p - H_{1i} x_{p+1} - \cdots - H_{pi} x_{2p}$$

$$\rho\, y_{\tilde{\omega}+i} = - g_{1i} x_1 - \cdots - g_{pi} x_p + h_{1i} x_{p+1} + \cdots + h_{pi} x_{2p}$$

trasforma collinearmente la stella di centro $R_{2(p-q)-1}$ nello spazio $\overline{R}_{2q-1}$.

Dal fatto che i sistemi regolari riducibili, aventi per assi i primi assi di T e di T^{-1} hanno la stessa dimensione $q-1$, segue subito la proprietà, osservata dal Comessatti (***), che le somme indipendenti date dagli integrali di C nei gruppi della serie γ^1_n sono tante quante le somme indipendenti che gli integrali di C' dànno nei gruppi della serie γ^1_ν.

(*) Denominazione introdotta dal prof. Scorza nella sua importante Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Tomo XLI, 1916).

(**) Invero, con una permutazione di righe e di colonne ed uno scambio delle righe nelle colonne la matrice $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$ diviene $\begin{Vmatrix} G_{ki} & g_{ki} \\ H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$; e da questa, mutando il segno alle prime p righe ed alle prime $\tilde{\omega}$ colonne, si ottiene l'altra $\begin{Vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$. Ora è chiaro che le suddette operazioni lasciano invariata la caratteristica della matrice.

(***) Comessatti, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendiconti di Palermo, Tomo XXXVI, 1913).

Nel seguito diremo che una corrispondenza (n, ν) fra due curve $C\, C'$ è di *rango* q, quando le matrici delle relative operazioni T e T^{-1} hanno la caratteristica comune $2q$.

Data fra due curve C e C' una corrispondenza (n, ν) di rango q, restano individuati sulla curva C due sistemi regolari riducibili ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1}; l'asse del primo è definito dalle formule

$$\begin{aligned} \rho\, x_i &= h_{i1}\, y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\, y_\varpi + H_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \\ \rho\, x_{p+i} &= g_{i1}\, y_1 + \cdots + g_{i\varpi}\, y_\varpi + G_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + G_{i\varpi}\, y_{2\varpi}\,, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

quello del secondo dalle equazioni

$$\begin{aligned} G_{1i}\, x_1 + \cdots + G_{pi}\, x_p - H_{1i}\, x_{p+1} - \cdots - H_{pi}\, x_{2p} &= 0 \\ -g_{1i}\, x_1 - \cdots - g_{pi}\, x_p + h_{1i}\, x_{p+1} + \cdots + h_{pi}\, x_{2p} &= 0. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi)$$

Ora è importante notare che questi due spazi razionali R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ sono l'uno polare dell'altro nel sistema nullo fondamentale Λ della curva C; da ciò si deduce, in virtù di una nota proprietà (*), che essi sono indipendenti. In modo analogo si vede che sono indipendenti, perchè polari l'uno dell'altro nel sistema nullo fondamentale Λ' della curva C', gli assi $\overline{R}_{2q-1}$ $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ dei due sistemi regolari riducibili individuati sulla curva C'.

Si consideri ora su C la corrispondenza $T^{-1}\, T$ nella quale un punto y ha per omologo il gruppo costituito dai ν gruppi della serie γ^1_n uscenti da y (**); l'omografia razionale $\Omega'\, \Omega$, che ne è l'immagine, è singolare e ammette, per l'indipendenza notata degli spazi $\overline{R}_{2q-1}$ ed $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$, come primo e secondo spazio singolare rispettivamente $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1}. Analogamente, per la indipendenza degli spazi R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$, si riconosce che l'omografia $\Omega\, \Omega'$, immagine della corrispondenza $T\, T^{-1}$ della curva C', è, nell'ipotesi $q < \omega$, singolare, ed ammette come primo e secondo spazio singolare $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ ed $\overline{R}_{2q-1}$. Allora, chiamando Σ la serie algebrica della curva C i cui gruppi si ottengono dall'insieme dei ν gruppi di γ^1_n uscenti da un punto y variabile su C, e Σ' la serie della curva C' ottenuta nello stesso modo dalla γ^1_ν, vediamo che il sistema regolare riducibile di asse R_{2q-1} è costituito

(*) Rosati, C., nota al n.° 8.

(**) Le corrispondenze fra i punti di una curva che consideriamo in questa Nota sono tali che il gruppo omologo di un punto può contenere una o più volte il punto stesso.

dagli integrali che dànno somma costante sia nei gruppi della serie γ_n^1, sia nei gruppi della serie Σ. Si ha cioè la proprietà, dovuta al SEVERI (*), secondo cui *la serie* Σ *e la serie* γ_n^1 *della curva* C (e lo stesso dicasi per le serie Σ' e γ_ν^1 della curva C') *sono di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.*

6. Diremo corrispondenze *laterali* della corrispondenza data (n, ν) le corrispondenze simmetriche S ed S' delle curve C e C' ottenute rispettivamente assumendo come omologhi due punti di C appartenenti allo stesso gruppo della serie γ_n^1 e due punti di C' appartenenti allo stesso gruppo della serie γ_ν^1.

Indicando con I la corrispondenza identica tanto su C come su C', si hanno le relazioni

$$T^{-1}\, T = \nu I + S \qquad T\, T^{-1} = n I + S', \tag{10}$$

dalle quali e dall'osservazione fatta in fine del n.º precedente si deduce che lo spazio $R_{2(p-q)-1}$ e, quando è $q < \varpi$, lo spazio $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ sono per le omografie immagini di S e di S' spazi fondamentali di punti uniti corrispondenti alle radici $-\nu$ e $-n$ delle rispettive equazioni caratteristiche ed hanno come coniugati gli spazi R_{2q-1} ed $\overline{R}_{2q-1}$. In altri termini, chiamando *dimensione* di una valenza il numero degli integrali indipendenti del sistema lineare associato ad essa, possiamo dire che *le corrispondenze* S *ed* S' *posseggono le valenze* ν *ed* n *delle rispettive dimensioni* $p-q$ *e* $\varpi - q$.

7. Si faccia ora l'ipotesi $\nu = 1$; si supponga cioè che C' sia l'immagine di una involuzione K di ordine n e genere ϖ della curva $C\,(p > \varpi)$, e K indichi pure la corrispondenza della curva C nella quale un punto ha per omologo il gruppo della detta involuzione uscente da esso. Le relazioni precedenti assumono in tal caso la forma

$$T^{-1}\, T = K = I + S \qquad T\, T^{-1} = n I,$$

e l'omografia $\Omega\,\Omega'$, immagine di $T\,T^{-1}$, diviene l'omografia identica. Dovrà quindi essere $q = \varpi$, e la $\Omega'\,\Omega$, immagine di K, è un'omografia singolare i

(*) SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, Serie III, tomo XII, 1905, n.º 1).

cui spazi singolari (1.° e 2.°) sono un $R_{2(p-\varpi)-1}$ e un $R_{2\varpi-1}$ polari l'uno dell'altro nel sistema nullo Λ; e nel 2.° di questi essa dovrà subordinare l'omografia identica. Inoltre, poichè dalla relazione $K^2 = nK$ si deduce che l'equazione minima (*) della corrispondenza K è $z^2 - nz = 0$, si vede che le radici dell'equazione caratteristica dell'omografia immagine di K corrispondenti agli spazi fondamentali $R_{2(p-\varpi)-1}$ ed $R_{2\varpi-1}$ sono rispettivamente 0 ed n. Segue di qui che la corrispondenza S ha per immagine un'omografia coi due soli spazi fondamentali $R_{2(p-\varpi)-1}\, R_{2\varpi-1}$, corrispondenti alle radici -1 ed $(n-1)$ dell'equazione caratteristica; cioè la S possiede le due sole valenze 1 ed $(1-n)$ delle rispettive dimensioni $p-\varpi$ e ϖ (**).

8. Ritornando al caso generale, si indichi con $(c_r\, l'_s)$ il prodotto della colonna r^{ma} della matrice di T per la riga s^{ma} della matrice di T^{-1} $(r,\ s=1,\ 2,\ldots,\ 2p)$, e con $(c'_r\, l_s)$ il prodotto della colonna r^{ma} della matrice di T^{-1} per la riga s^{ma} della matrice di T $(r,\ s=1,\ 2,\ldots,\ 2\varpi)$. L'omografia $\Omega'\Omega$, immagine di $T^{-1}\,T$, sarà allora definita dalle equazioni

$$\rho x'_i = (c_i\, l'_1)\, x_1 + (c_i\, l'_2)\, x_2 + \cdots + (c_i\, l'_{2p})\, x_{2p} \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ 2p),$$

e la $\Omega\Omega'$, immagine di $T\,T^{-1}$, dalle altre

$$\rho y'_i = (c'_i\, l_1)\, y_1 + (c'_i\, l_2)\, y_2 + \cdots + (c'_i\, l_{2\varpi})\, y_{2\varpi} \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ 2\varpi);$$

la prima è, come abbiamo visto, un'omografia singolare avente $A_1 = R_{2(p-q)-1}$ ed $A_2 = R_{2q-1}$ come 1.° e 2.° spazio singolare; la seconda è pure, nell'ipotesi $q < \varpi$, singolare, con gli spazi singolari $B_1 = \overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ e $B_2 = \overline{R}_{2q-1}$.

La Ω riferisce collinearmente la stella (B_1) allo spazio A_2; segando la detta stella con B_2, nasce un'omografia ω fra gli spazi B_2 ed A_2. In modo analogo dall'omografia Ω', immagine di T^{-1}, nasce un'omografia ω' fra gli spazi A_2 e B_2. Ora è chiaro che le omografie $\Omega'\Omega$ ed $\Omega\Omega'$ subordinano rispettivamente entro gli spazi A_2 e B_2 le omografie non singolari $\omega'\omega$ ed $\omega\omega'$; e poichè è $\omega'\omega = \omega^{-1}(\omega\omega')\,\omega$, si deduce che tali omografie subordinate sono proiettivamente identiche ed hanno perciò la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti. D'altra parte, dovendo le corrispondenze simmetriche $T^{-1}\,T$ e $T\,T^{-1}$ possedere valenze tutte semplici e reali (***), la $\omega'\omega$ e

(*) Rosati, *C. P.*, n.° 11.
(**) Rosati, *C. P.*, n.° 17.
(***) Rosati, *V.*, n.° 8.

la $\omega\,\omega'$ saranno omografie generali, con gli spazi fondamentali tutti reali. Risulta da ciò che l'equazione caratteristica di $\Omega'\,\Omega$ ammette, oltre la radice O di molteplicità $2\,(p-q)$, delle radici reali $-\rho_1\ -\rho_2\ldots\ -\rho_l$ di molteplicità $2\,q_1\ 2\,q_2\ldots\ 2\,q_l$, e che l'equazione caratteristica di $\Omega\,\Omega'$, oltre alla radice O di molteplicità $2\,(\varpi-q)$, ammette radici reali $-\rho'_1\ -\rho'_2\ldots\ -\rho'_l$ proporzionali alle prime e delle stesse molteplicità. Sarà inoltre $q_1+q_2+\cdots+q_l=q$, e corrispondentemente alle radici $-\rho_i\ -\rho'_i$ le omografie $\omega'\,\omega$ ed $\omega\,\omega'$ posseggono due spazi fondamentali reali $S_{2q_i-1}\ \overline{S}_{2q_i-1}$, appoggiati agli spazi α e τ dei periodi lungo spazi di dimensione q_i-1. Osservando poi che

$$-2\,q_1\,\rho_1-2\,q_2\,\rho_2-\cdots-2\,q_l\,\rho_l=(c_1\,l'_1)+(c_2\,l'_2)+\cdots$$
$$\cdots+(c_{2p}\,l'_{2p})=2\sum_i^{1\ldots p}\sum_k^{1\ldots\varpi}(h_{ik}\,G_{ik}-H_{ik}\,g_{ik})$$
$$-2\,q_1\,\rho'_1-2\,q_2\,\rho'_2-\cdots-2\,q_l\,\rho'_l=(c'_1\,l_1)+(c'_2\,l_2)+\cdots$$
$$\cdots+(c'_{2\varpi}\,l_{2\varpi})=2\sum_i^{1\ldots p}\sum_k^{1\ldots\varpi}(h_{ik}\,G_{ik}-H_{ik}\,g_{ik}),$$

si deduce che $\rho_i=\rho'_i\ (i=1,\,2,\ldots,\,l)$.

Dunque le corrispondenze $T^{-1}\,T$ e $T\,T^{-1}$ posseggono oltre ad una eventuale valenza nulla, uguali valenze semplici e reali, ciascuna delle quali ha per le due corrispondenze la stessa dimensione.

Infine, dalle relazioni (10) del n.° 6 si trae che *la corrispondenza S possiede, oltre alla valenza semplice ν di dimensione $p-q$, le valenze semplici e reali $r_1=\rho_1+\nu,\ldots,r_l=\rho_l+\nu$ di dimensioni $q_1\,q_2\ldots q_l$ (essendo $q_1+q_2+\cdots+q_l=q$), e che la corrispondenza S', oltre alla valenza semplice n di dimensione $\varpi-q$, possiede le valenze semplici e reali $r'_1=\rho_1+n,\ldots,r'_l=\rho_l+n$ delle stesse dimensioni $q_1\,q_2\ldots q_l$.*

Osservazione. La proprietà dimostrata conduce immediatamente alla formula di Zeuthen. Se infatti y e y' sono i numeri dei punti di diramazione della corrispondenza $(n,\,\nu)$ sulle due curve C e C', od anche i numeri delle coincidenze delle corrispondenze laterali S' ed S, si avrà (*)

$$y'=2\,\nu\,(n-1)+2\,\nu\,(p-q)+2\,(\nu+\rho_1)\,q_1+\cdots$$
$$\cdots+2\,(\nu+\rho_l)\,q_l=2\,\nu\,(n+p-1)+2\,(\rho_1\,q_1+\cdots+\rho_l\,q_l)$$
$$y=2\,n\,(\nu-1)+2\,n\,(\varpi-q)+2\,(n+\rho_1)\,q_1+\cdots$$
$$\cdots+2\,(n+\rho_l)\,q_l=2\,n\,(\nu+\varpi-1)+2\,(\rho_1\,q_1+\cdots+\rho_l\,q_l);$$

(*) Rosati, V., n.° 9.

da cui, sottraendo, si ottiene

$$y - y' = 2\,n\,(\varpi - 1) - 2\,\nu\,(p - 1).$$

Le precedenti uguaglianze dicono inoltre che il difetto di equivalenza z delle due serie algebriche $\gamma_n^1\,\gamma_\nu^1$ è espresso, in funzione delle valenze delle corrispondenze $T^{-1}\,T$ e $T\,T^{-1}$, mediante la formula

$$z = -\rho_1\,q_1 - \cdots - \rho_l\,q_l = \sum_i^{1\ldots p} \sum_k^{1\ldots\varpi} (h_{ik}\,G_{ik} - H_{ik}\,g_{ik}).$$

9. Facciamo ora alcune altre considerazioni che saranno utili per ciò che diremo fra breve.

Mantenendo ai simboli i significati stabiliti nei n.[i] precedenti, si eseguiscano i prodotti $\Omega\,\Lambda$ ed $\Omega'\,\Lambda'$. Si ottengono allora due trasformazioni reciproche: una della stella (B_1) nella stella (A_1) rappresentata dalle formule

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\xi_i &= -g_{i1}\,y_1 - \cdots - g_{i\varpi}\,y_\varpi - G_{i1}\,y_{\varpi+1} - \cdots - G_{i\varpi}\,y_{2\varpi} \\ \rho\,\xi_{p+i} &= \quad h_{i1}\,y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\,y_\varpi + H_{i1}\,y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\,y_{2\varpi}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

l'altra della stella (A_1) nella stella (B_1) rappresentata dalle altre

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\eta_i &= -g_{1i}\,x_1 - \cdots - g_{pi}\,x_p + h_{1i}\,x_{p+1} + \cdots + h_{pi}\,x_{2p} \\ \rho\,\eta_{\varpi+i} &= -G_{1i}\,x_1 - \cdots - G_{pi}\,x_p + H_{1i}\,x_{p+1} + \cdots + H_{pi}\,x_{2p}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

E poichè la sostituzione (12) è la trasposta della (11), queste reciprocità, che diremo pure *immagini* di T e di T^{-1}, saranno l'una inversa dell'altra. Se dunque λ e λ' indicano i sistemi nulli (non singolari) ottenuti segando Λ e Λ' con gli spazi $A_2 = R_{2q-1}$ e $B_2 = \overline{R}_{2q-1}$, ed $\omega\;\omega'$ le omografie di cui si è detto al n.° precedente, $\omega\,\lambda$ ed $\omega'\,\lambda'$ rappresentano due reciprocità (non degeneri), l'una inversa dell'altra, fra gli spazi A_2 e B_2; si ha cioè $\omega\,\lambda = \lambda'\,\omega'^{-1}$.

La reciprocità $\Omega'\,\Omega\,\Lambda$, immagine della corrispondenza simmetrica $T^{-1}\,T$, è un sistema nullo singolare avente per spazio singolare $R_{2(p-q)-1}$; la sua sezione con A_2 è $\omega'\,\omega\,\lambda = \omega'\,\lambda'\,\omega'^{-1}$, cioè il trasformato di λ' mediante ω'^{-1}.

Analogamente si vede che il sistema nullo immagine di $T\,T^{-1}$ si ottiene proiettando da $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ il sistema nullo di B_2 trasformato di λ mediante la ω^{-1}.

Nel caso $\nu = 1$, cioè nel caso in cui la serie γ_n^1 è una involuzione di genere ϖ, si ha $q = \varpi$, $\Lambda' = \lambda'$, $\omega = \Omega = \omega'^{-1}$ e, come facilmente si vede,

$\lambda = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$. In questo caso dunque l'omografia Ω, immagine di T, trasforma il sistema nullo Λ' fondamentale di C' nel sistema nullo sezione di Λ col 2.° asse $R_{2\varpi-1}$ dell'involuzione.

10. Data sopra una curva C di genere p una serie algebrica γ_n^1 (irriducibile) di indice ν e di genere ϖ, due suoi gruppi $G\,G'$ si diranno *concatenati* se possono riguardarsi come estremi di una serie di gruppi, tale che due gruppi consecutivi di essa abbiano almeno un punto comune.

Due gruppi concatenati ad un terzo sono tra loro concatenati.

Una serie tale che due suoi gruppi qualunque siano sempre concatenati, si dirà *transitiva; intransitiva* se il detto fatto non si verifica (*). Se il gruppo generico G di una serie intransitiva è concatenato con altri $h - 1$ (≥ 0) gruppi, si dirà h il suo *grado di intransitività*. Una involuzione è una serie intransitiva che ha 1 per grado di intransitività. Una serie i cui gruppi sono parzialmente contenuti nei gruppi di una involuzione è intransitiva.

La serie γ_n^1 sia intransitiva di grado $h > 1$ d'intransitività, e siano G_1 $G_2 \ldots G_{h-1}$ i gruppi concatenati con un suo gruppo generico G; i punti appartenenti ai gruppi $G\,G_1 \ldots G_{h-1}$ sono in numero di $k = \dfrac{h\,n}{\nu}$ e costituiscono un gruppo il quale, al variare di G, descrive una involuzione J_k; ed è chiaro che se γ_n^1 è composta con una involuzione, anche J_k è composta con la stessa involuzione. Sia ora C' una curva, di genere ϖ, birazionalmente identica a γ_n^1. Fra le due curve C e C' intercede una corrispondenza (n, ν) e su C' resta individuata una serie algebrica γ_n^1; questa ha l'indice n ed è birazionalmente identica a C quando γ_n^1 è semplice; se invece γ_n^1 è composta con una involuzione θ_ε, la γ_n^1 ha l'indice $\dfrac{n}{\varepsilon}$ ed è birazionalmente identica a θ_ε. I punti della curva C' che hanno per omologhi i gruppi $G\,G_1 \ldots G_{h-1}$ formano un gruppo il quale, al variare di G, descrive un'involuzione J_h; le due involuzioni $J_k\,J_h$ sono birazionalmente identiche. Se $\overline{G_k}$ e $\overline{G_h}$ sono due gruppi omologhi delle due involuzioni $J_k\,J_h$, il gruppo di γ_ν^1 omologo di un punto di $\overline{G_k}$ è contenuto in $\overline{G_h}$, onde la serie γ_ν^1, contenuta parzialmente in una involuzione, è intransitiva. Osservando poi che due gruppi di γ_ν^1 sono

(*) Queste denominazioni sono state, in un caso analogo, adoperate dal compianto professore R. Torelli nella Nota: *Osservazioni di Geometria sopra una varietà algebrica* (Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 1911).

o no concatenati quando sono omologhi di punti appartenenti o no allo stesso gruppo $\overline{G}_k$, si deduce che, se γ^1_n è semplice, il grado di intransitività di γ^1_ν è k; quando invece γ^1_n è composta con una involuzione θ_ε, poichè a due punti coniugati in θ_ε corrisponde lo stesso gruppo di γ^1_ν, il grado di intransitività di questa serie è $\frac{k}{\varepsilon}$.

Una corrispondenza (n, ν) fra due curve $C\,C'$ si dirà poi *transitiva* o *intransitiva* secondochè sono transitive o intransitive le due serie $\gamma^1_n\,\gamma^1_\nu$ che vengono indotte da essa sulle due curve.

11. Si consideri ora la curva Γ, di genere π, immagine della corrispondenza data, cioè la curva i cui punti rappresentano le coppie di punti omologhi della corrispondenza stessa. Indichiamo con θ e τ le corrispondenze $(1, \nu)$ ed $(1, n)$ che intercedono fra C e Γ, e fra C' e Γ, e siano $K\,K'$ le due involuzioni di ordine ν ed n, birazionalmente identiche a C ed a C', esistenti su Γ. È chiaro inversamente che una curva Γ contenente due involuzioni $K\,K'$ degli ordini ν ed n, e dei generi p e ϖ, non composte con una stessa involuzione, è immagine di una corrispondenza (n, ν) fra due curve di generi p e ϖ, birazionalmente identiche a K e a K'.

Nello spazio rappresentativo $S_{2\pi-1}$ di Γ si avranno due assi M ed N, di dimensioni rispettive $2(\pi-p)-1$ e $2p-1$, relativi all'involuzione K, e due assi P e Q di dimensioni $2(\pi-\varpi)-1$ e $2\varpi-1$, relativi all'involuzione K': vogliamo ora studiarne la configurazione.

Si osservi perciò che l'omografia immagine di θ trasforma gli assi A_1 e A_2 dell'S_{2p-1} rappresentativo di C in due assi A^*_1 e A^*_2 contenuti nell'asse N ed in esso complementari, e che questi vengono trasformati nei primi dall'omografia immagine di θ^{-1} (n.° 7); analogamente l'asse Q contiene due assi $B^*_1\,B^*_2$ in esso complementari, corrispondenti a B_1 e B_2 nell'omografia immagine di τ, mentre questi corrispondono a quelli nell'omografia immagine di τ^{-1}.

Su Γ si considerino poi due serie algebriche di ordine $n\nu$: la prima, che diremo KK', è generata dall'insieme dei gruppi di K' uscenti dai punti di un gruppo variabile di K; la seconda, che diremo $K'K$, è generata dall'insieme dei gruppi di K uscenti dai punti di un gruppo variabile di K'. È chiaro che la prima serie è composta con l'involuzione K', la seconda con l'involuzione K. Con gli stessi simboli KK' e $K'K$ intendiamo inoltre di rappresentare le due corrispondenze di Γ nelle quali un punto x ha per omologo il gruppo della 1.ª o della 2.ª serie che nascono rispettivamente dal gruppo di K o dal gruppo di K' uscente da x. Tali corrispondenze sono manifestamente l'una inversa dell'altra e si hanno le relazioni

$$KK' = \theta^{-1}\, T^{-1}\, \tau \qquad K'K = \tau^{-1}\, T\, \theta.$$

Dalla prima di queste si deduce che l'omografia singolare immagine di KK' ha per 1.º spazio singolare lo spazio di $S_{2\pi-1}$ luogo dei punti il cui omologo per l'omografia immagine di θ^{-1} o è indeterminato o è giacente nello spazio A_1, e per 2.º spazio singolare quello corrispondente a B_2 nell'omografia immagine di τ. Il 1.º è dunque lo spazio $(M A^*_1)$, di dimensione $2(\pi - q) - 1$, congiungente M con A^*_1; il 2.º è lo spazio B^*_2. Analogamente l'omografia immagine di $K'K$ ha per 1.º spazio singolare l'$R'_{2(\pi-q)-1} = (P B^*_1)$ e per 2.º spazio singolare A^*_2.

Gli integrali dei sistemi regolari riducibili aventi per assi B^*_2 e A^*_2 hanno la proprietà di dar somma costante nei gruppi delle serie KK' e $K'K$; dunque:

I sistemi regolari riducibili rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche KK' e $K'K$ hanno la stessa dimensione $\pi - q - 1$, se q è il rango della corrispondenza di cui è immagine la curva sostegno delle due involuzioni.

Si osservi ora che ogni punto di N è unito nell'omografia immagine di K (n.º 7); un tale punto avrà dunque l'omologo indeterminato nell'omografia immagine di KK' quando e soltanto quando sarà indeterminato il suo omologo nell'omografia immagine di K'. Questa considerazione dice che lo spazio A^*_1 è l'intersezione di N con P; analogamente B^*_1 sarà l'intersezione di Q con M. D'altra parte il 2.º spazio singolare dell'omografia immagine di KK' è quello che nell'omografia immagine di K' corrisponde allo spazio congiungente N con P; e poichè in questa omografia ogni spazio uscente da P ha per corrispondente la sua traccia nello spazio Q (n.º 7), segue che B^*_2 è l'intersezione di Q con lo spazio (NP) congiungente N con P; ed analogamente A^*_2 sarà l'intersezione di N con lo spazio (MQ) congiungente M con Q.

Risulta allora che gli spazi (MA^*_1) e B^*_2, singolari per l'omografia immagine di KK' (e lo stesso dicasi per quelli dell'omografia immagine di $K'K$), sono tra loro indipendenti. Invero, poichè B^*_1 è contenuto in M, lo spazio che congiunge M, A^*_1, B^*_2 contiene $Q = (B^*_1\, B^*_2)$ e quindi A^*_2, intersezione di $(M\,Q)$ con N. L'asserto è dunque provato, perchè M, A^*_1, A^*_2 appartengono ad $S_{2\pi-1}$.

Si noti infine che gli spazi M ed N, e così pure P e Q, sono l'uno polare dell'altro nel sistema nullo Λ^* fondamentale di Γ. E poichè l'omografia immagine di θ trasforma il sistema nullo Λ di C in quello che si ottiene segando con N il sistema nullo Λ^* (n.° 9), segue che A^*_1 A^*_2 sono spazi polari l'uno dell'altro nel detto sistema nullo sezione e quindi sono l'uno polare dell'altro rispetto a Λ^* gli spazi $(M\,A^*_1)$ e A^*_2. Analogamente sono polari rispetto a Λ^* gli spazi $(P\,B^*_1)$ e B^*_2.

12. Dall'esame della configurazione degli assi delle due involuzioni K e K', abbiamo dedotto che i due sistemi regolari riducibili $\infty^{\pi-q-1}$ di assi A^*_2 e B^*_2 sono entrambi complementari di quello ∞^{q-1} avente per asse lo spazio $(M\,A^*_1)$. Se dunque i due sistemi regolari suddetti non sono coincidenti, se cioè non coincidono i loro assi A^*_2 e B^*_2, essi appartengono, in virtù di un teorema di SEVERI (*), ad una infinità (discontinua) di sistemi regolari della stessa dimensione. Si ha dunque la proprietà:

Se i sistemi regolari riducibili rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche $K\,K'$ e $K'\,K$ sono distinti, essi appartengono ad una infinità discontinua di sistemi regolari della stessa dimensione.

13. Supponiamo ora che gli spazi A^*_2 e B^*_2 coincidano; in tal caso coincideranno anche gli spazi $(M\,A^*_1)$ e $(P\,B^*_1)$ polari dei primi rispetto al sistema nullo Λ^*, e le omografie singolari immagini delle corrispondenze $K\,K'$ e $K'\,K$ avranno gli stessi spazi singolari. Ricerchiamo ora quali omografie essi inducono nel loro secondo spazio singolare. Si osservi perciò che nell'omografia immagine di K ogni punto non giacente in M ha per omologo la sua proiezione fatta dal centro M sullo spazio N, e che nell'omografia immagine di K' ogni punto esterno a P ha per omologo la sua proiezione fatta dal centro P nello spazio Q (n.° 7).

Ne segue che ogni punto comune agli spazi N e Q è unito nelle omografie immagini di $K\,K'$ e di $K'\,K$. Dunque, nell'ipotesi che A^*_2 e B^*_2 coincidano, le suddette omografie subordinano nel loro 2.° spazio singolare l'o-

(*) SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXIII, serie 5.ª, 1914, Nota II, n.° 4). — SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann, ecc.* (l. c., Parte I, n.° 41).

mografia identica. Le due corrispondenze KK' e $K'K$, inverse l'una dell'altra, posseggono allora la valenza 0 rispetto al sistema regolare riducibile avente per asse $A^*_2 = B^*_2$ ed una ulteriore valenza intera, che dovrà essere la medesima per entrambe, rispetto al sistema regolare riducibile di asse $(MA^*_1) = (PB^*_1)$. Applicando allora un teorema che abbiamo dimostrato altrove (*), si deduce che le dette corrispondenze sono equivalenti (in particolare coincidenti); si ha cioè

$$KK' - K'K \equiv 0.$$

Dunque la differenza dei gruppi omologhi di un punto x nelle corrispondenze KK' e $K'K$ descrive (al variare di x) una serie lineare (virtuale). E poichè il gruppo corrispondente ad x in KK' non varia quando x percorre un gruppo di K, si deduce che i gruppi corrispondenti in $K'K$ ai punti di uno stesso gruppo di K sono equivalenti (in particolare coincidenti); cioè sono equivalenti i gruppi della serie $K'K$ contenenti uno stesso gruppo dell'involuzione K. Sulla curva C, immagine di K, i gruppi della serie $K'K$ sono dalla θ^{-1} trasformati nei gruppi della serie γ^1_n contati ν volte; la serie stessa è dunque tale che due suoi gruppi aventi un punto comune dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti; più in generale, se G_n e G'_n sono due gruppi concatenati di γ^1_n, sarà $\nu G_n \equiv \nu G'_n$. Si deduce allora che la serie γ^1_n è intransitiva, chè altrimenti, dovendo i suoi gruppi ripetuti ν volte dare origine a gruppi equivalenti, sarebbero essi stessi equivalenti, e la corrispondenza $(n\nu)$ fra le due curve C e C' sarebbe a valenza zero, cioè sarebbe $q = 0$.

Rileviamo intanto il risultato:

La curva immagine di una corrispondenza transitiva, che non sia a valenza zero, possiede una infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili.

Sempre nell'ipotesi che gli spazi $A^*_2\, B^*_2$ coincidano, indichiamo con h il grado di intransitività di γ^1_n e con k quello di γ^1_ν. Dovrà essere $k\nu = hn$ e sulle curve C e C' si avranno due involuzioni J_k ed J_h degli ordini k ed h, birazionalmente identiche e tali che, se $\overline{G_k}$ e $\overline{G_h}$ sono due loro gruppi corrispondenti, due punti appartenenti ad uno dei due gruppi hanno per omo-

(*) Rosati, *V.*, n.° 8. L'ulteriore valenza intera posseduta dalle due corrispondenze KK' e $K'K$ è poi facile a determinarsi. Infatti, poichè nel caso che stiamo esaminando si ha $(KK')^2 \equiv K^2K'^2 = \nu K \,.\, nK' = n\nu \,.\, KK'$, l'equazione minima a cui soddisfano le corrispondenze stesse sarà $z^2 - n\nu z = 0$, dal che si deduce che esse posseggono le valenze 0, $-\nu n$.

loghi nella corrispondenza (n, ν) due gruppi concatenati ed appartenenti all'altro (n.° 10). Sulla curva Γ alle coppie di punti omologhi appartenenti ai gruppi $\overline{G_k}$ e $\overline{G_h}$ corrisponde un gruppo di $k\nu = h n$ punti, il quale descrive, al variare di $\overline{G_k}$ e di $\overline{G_h}$, una involuzione L, trasformata di J_k mediante la corrispondenza θ e di J_h mediante la τ. La involuzione L, birazionalmente identica a J_k ed a J_h, è manifestamente composta con le due involuzioni K e K'. Si determini il genere dell'involuzione L, o, ciò che è lo stesso, delle involuzioni $J_k\, J_h$. Indichiamo perciò con u un integrale di 1.ª specie della curva C, con G un gruppo generico della serie γ_n^1, con $G_1\, G_2 \ldots G_{h-1}$ i gruppi della serie stessa concatenati con G; se $\overline{G_k}$ è il gruppo dell'involuzione J_k contenente $G\, G_1 \ldots G_{h-1}$, si ha la congruenza

$$u(G) + u(G_1) + \cdots + u(G_{h-1}) \equiv \nu\, u(\overline{G}_k),$$

nella quale $u(G)$, $u(G_1) \ldots$ rappresentano le somme, determinate a meno di periodi di u, dei valori che l'integrale u possiede nei punti dei gruppi $G, G_1, \ldots$

Da essa si deduce l'altra

$$\nu\, u(G) + \nu\, u(G_1) + \cdots + \nu\, u(G_{h-1}) \equiv \nu^2\, u(\overline{G}_k),$$

e poichè, come sopra si è visto, i gruppi $G\, G_1 \ldots G_{h-1}$ dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti, si avrà

$$h\nu \,.\, u(G) \equiv \nu^2 \,.\, u(\overline{G}_k).$$

Segue di qui che, al variare con continuità di G e quindi di $\overline{G_k}$, un integrale u che dia somma costante nei punti del gruppo variabile $\overline{G_k}$ deve dare somma costante nei punti del gruppo G e viceversa. Ma gli integrali indipendenti che dànno somma costante nei punti del gruppo variabile G sono in numero di $p - q$, dunque il genere di J_k e quindi di L è q. Si ha dunque la proprietà:

Se i due sistemi riducibili $\infty^{\pi - q - 1}$ rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche $K K'$ e $K' K$ sono coincidenti, le due involuzioni K e K' sono componenti di una stessa involuzione di genere q, la quale è di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.

Osservazione I. Un caso in cui si verificano le condizioni dell'ultimo enunciato si ha quando le due involuzioni K e K' sono *permutabili*, cioè quando ogni gruppo di $n\nu$ punti costituito dai gruppi di K' uscenti dai punti di un gruppo di K può pensarsi anche costituito dai gruppi di K

uscenti dai punti di un gruppo di K'. Le due serie algebriche KK' e $K'K$ sono allora coincidenti e si riducono ad una involuzione di ordine $n\nu$. Si ottiene questo caso considerando due curve C e C' contenenti due involuzioni J_n ed J_ν di genere q birazionalmente identiche, cioè due curve che siano trasformate razionali di una stessa curva di genere q. Chiamando omologhi un punto di C ed uno di C' quando appartengono a gruppi omologhi delle due involuzioni, viene stabilita fra le due curve una corrispondenza (n, ν) e la curva Γ immagine della corrispondenza contiene due involuzioni permutabili K e K', degli ordini ν ed n.

Osservazione II. È facile provare che i risultati precedenti valgono anche nel caso, finora escluso, in cui le due involuzioni K e K' siano composte con una medesima involuzione I_ε di ordine ε e di genere π'. Considerando infatti la curva $\bar{\Gamma}$ immagine di I_ε, essa sarà sostegno di due involuzioni $\bar{K}$ e $\bar{K}'$ degli ordini $\nu' = \frac{\nu}{\varepsilon}$ ed $n' = \frac{n}{\varepsilon}$ e dei generi p e ϖ, non composte con una terza.

La $\bar{\Gamma}$ è dunque immagine di una corrispondenza (n', ν') fra due curve C e C' dei generi p e ϖ; e se questa corrispondenza è di rango q, le due serie algebriche $\bar{K}\bar{K}'$ e $\bar{K}'\bar{K}$ sono di livello costante per due sistemi regolari riducibili $\infty^{\pi'-q-1}$. Indicando con θ la corrispondenza $(1, \varepsilon)$ che intercede fra le due curve $\bar{\Gamma}$ e Γ, l'omografia immagine di θ trasforma lo spazio $S_{2\pi'-1}$ rappresentativo di $\bar{\Gamma}$ nel 2.° asse $R_{2\pi'-1}$ dell'involuzione I_ε (n.° 7), e gli assi A^*_2 e B^*_2 dei due sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le due serie $\bar{K}\bar{K}'$ e $\bar{K}'\bar{K}$ in due assi R_{2q-1} R'_{2q-1} contenuti in $R_{2\pi'-1}$. Ma ora è facile vedere, servendosi delle relazioni $KK' = \theta^{-1}\bar{K}\bar{K}'\theta$, $K'K = \theta^{-1}\bar{K}'\bar{K}\theta$, che questi due assi sono i secondi spazi singolari delle omografie immagini delle corrispondenze KK' e $K'K$, cioè gli assi dei due sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le serie KK' e $K'K$. Questi sistemi hanno dunque la dimensione $\pi - q - 1$ e coincidono quando, e solo quando, coincidono i sistemi analoghi della curva $\bar{\Gamma}$. Se sono distinti, essi apparterranno ad una infinità discontinua di sistemi regolari $\infty^{\pi-q-1}$, i cui assi sono gli omologhi, nell'omografia immagine di θ, di quelli dei sistemi esistenti su $\bar{\Gamma}$; se sono coincidenti, le due involuzioni $\bar{K}$ e $\bar{K}'$ della curva $\bar{\Gamma}$ e quindi le due involuzioni K e K' di Γ saranno componenti di una stessa involuzione di genere q.

14. Studiando la configurazione degli assi delle due involuzioni K e K', abbiamo visto che lo spazio (MQ) sega N in A^*_2 e che lo spazio (NP) sega

Q in B^*_2. Si deduce da ciò che l'intersezione dei secondi assi N e Q delle due involuzioni coincide con l'intersezione dei due spazi A^*_2 e B^*_2. Indicando con $R_{2\varepsilon-1}$ tale intersezione, dovrà dunque essere $0 \leq \varepsilon \leq q$. Supposto allora che il 2.° asse Q di K' sia contenuto nel 2.° asse N di K, dovrà essere $q = \varpi$, i due spazi A^*_2 e B^*_2 coincideranno in N, e le due involuzioni saranno componenti di una stessa involuzione di genere ϖ. Tale involuzione, nell'ipotesi $\varpi > 1$, dovrà essere la K' stessa, cioè K' è composta con K. Si ha dunque il risultato:

Se gli assi omonimi di due involuzioni irrazionali, nessuna delle quali è ellittica, si appartengono, una delle involuzioni è composta con l'altra.

La proprietà inversa è di immediata dimostrazione: basta infatti osservare che, se K e K' sono due involuzioni (irrazionali) di una curva Γ e K è composta con K', ogni integrale che dia somma costante nei gruppi di K' deve dare somma costante nei gruppi di K.

Nel caso particolare che K e K' abbiano lo stesso genere $\varpi > 1$, l'ipotesi che gli assi dell'una coincidano con quelli dell'altra conduce alla conseguenza che le due involuzioni coincidono; dunque:

Sopra una curva Γ due involuzioni distinte dello stesso genere $\varpi > 1$ non possono essere di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.

15. Dell'ultima proposizione, la quale afferma che *sopra una curva Γ una involuzione di genere $\varpi > 1$ è individuata dai suoi assi*, diamo anche la seguente semplice dimostrazione diretta.

Siano K_n e K_ν due involuzioni della curva Γ, degli ordini n e ν e dello stesso genere $\varpi > 1$, aventi gli assi in comune; esse dànno origine a due corrispondenze (speciali) aventi rispettivamente le valenze $0 - n$, $0 - \nu$ rispetto ai medesimi sistemi d'integrali riducibili. Ma allora le corrispondenze νK_n ed $n K_\nu$, avendo rispetto a quei due sistemi complementari le stesse valenze $0 - n\nu$, saranno equivalenti, cioè si avrà $\nu K_n - n K_\nu \equiv 0$. Dunque, se $G_n G'_n$ e $G_\nu G'_\nu$ sono i gruppi di K_n e di K_ν uscenti da due punti qualunque P e P' di Γ, sarà $\nu G_n - n G_\nu \equiv \nu G'_n - n G'_\nu$. Supposto ora che P e P' appartengano allo stesso gruppo G_ν, si avrà $G_\nu = G'_\nu$; ed allora dalla equivalenza precedente discende $\nu G_n \equiv \nu G'_n$. Cioè due gruppi di K_n uscenti da due punti coniugati in K_ν dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti. Così pure due gruppi di K_ν uscenti da due punti coniugati in K_n dànno origine, ripetuti n volte, a gruppi equivalenti. Siano ora C e C' due curve, di genere ϖ, birazionalmente identiche alle due involuzioni K_ν e K_n.

Se si assumono come omologhi due punti di C e C' immagini di due gruppi di K_ν e di K_n uscenti da uno stesso punto di Γ, e supposto che le due involuzioni siano composte con la stessa involuzione K_ε ($\varepsilon \geqq 1$), si avrà fra le due curve C e C' una corrispondenza di indici $n' = \frac{n}{\varepsilon}$ e $\nu' = \frac{\nu}{\varepsilon}$. Proveremo che è $n' = \nu' = 1$, dal che seguirà che le due involuzioni coincidono.

Ed invero, supposto $\nu' > 1$ e quindi anche $n' > 1$ (*), sulle due curve C e C' si avranno due serie $\gamma'_{n'}$ e $\gamma'_{\nu'}$, e, per la proprietà precedentemente osservata, due punti appartenenti ad uno stesso gruppo di ciascuna di esse, dànno origine, ripetuti $n\nu$ volte, a gruppi equivalenti. Ma allora le due serie dovranno essere intransitive (altrimenti seguirebbe $\varpi = 0$) e sulle due curve C e C' si avranno due involuzioni $J_k\, J_h$ birazionalmente identiche, i cui gruppi sono generati dai gruppi delle due serie concatenati con un gruppo variabile; e le due involuzioni hanno inoltre la proprietà che due punti appartenenti ad uno stesso gruppo dànno origine, ripetuti $n\nu$ volte, a gruppi equivalenti. Indicando allora con x_1 un punto generico di C, con $x_2 \ldots x_h$ gli ulteriori punti del gruppo di J_h uscente da x_1 e con $u(x)$ un integrale di 1.ª specie qualsiasi di C, si avrà

$$u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_h) = \frac{n\nu\, u(x_1) + \cdots + n\nu\, u(x_h)}{n\nu} =$$

$$= \frac{h\, n\nu\, u(x_1) + m_1\,\omega_1 + \cdots + m_{2\varpi}\,\omega_{2\varpi}}{n\nu},$$

in cui $m_1 \ldots m_{2\varpi}$ sono numeri interi e $\omega_1 \ldots \omega_{2\varpi}$ i periodi normali di $u(x)$.

Poichè al variare con continuità di x_1 gli *interi* $m_1 \ldots m_{2\varpi}$ restano fissi, dall'uguaglianza precedente si deduce che un integrale il quale dia somma costante nei punti del gruppo variabile $(x_1\, x_2 \ldots x_h)$ deve ridursi ad una costante, cioè l'involuzione J_h non è di livello costante per alcun integrale di C. Ciò porta alla conseguenza $\varpi = 1$ contraria all'ipotesi, e l'asserto è dunque provato.

16. Vogliamo ora mettere in relazione le valenze delle corrispondenze laterali della data corrispondenza (n, ν) con quelle che sulla curva immagine di essa hanno le corrispondenze KK' e $K'K$.

(*) Ricordiamo che una corrispondenza unirazionale fra due curve dello stesso genere $\varpi > 1$ è, per una osservazione di Weber (*Journal für Math.*, t. 76, 1873), birazionale.

Si riprendano perciò le uguaglianze

$$K K' = \theta^{-1} T^{-1} \tau \qquad K' K = \tau^{-1} T \theta$$

stabilite al n.° 11 e si moltiplichino fra loro membro a membro. Tenendo conto che $KK = \nu K$, $K'K' = nK'$, $\theta\theta^{-1} = \nu I$, $\tau\tau^{-1} = nI$, si ottengono le altre

$$n . K K' K = n . \theta^{-1} T^{-1} T \theta \qquad \nu . K' K K' = \nu . \tau^{-1} T T^{-1} \tau,$$

dalle quali si deduce

$$K K' K = \theta^{-1} T^{-1} T \theta \qquad K' K K' = \tau^{-1} T T^{-1} \tau. \tag{13}$$

Si osservi poi che le due corrispondenze KK' e $K'K$, l'una inversa dell'altra, soddisfano alla stessa equazione minima; e questa, per il fatto che le corrispondenze stesse sono speciali, deve mancare di termine noto. Indichiamo con

$$\psi(z) = z^{l+1} + a_1 z^l + \cdots + a_l z = 0$$

questa equazione ($l \geq 1$) e vediamo come da essa si deducono le equazioni minime delle corrispondenze simmetriche $KK'K$ e $K'KK'$.

Eseguendo perciò le successive potenze di $(KK'K)$, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{array}{c} (KK'K) = K . (K'K), \quad (KK'K)^2 = \nu K . (K'K)^2, \\ (KK'K)^3 = \nu^2 K (K'K)^3, \ldots, \quad (KK'K)^{l+1} = \nu^l K (K'K)^{l+1} \end{array}\right\} \tag{14}$$

dalle quali subito si deduce

$$(KK'K)^{l+1} + \nu a_1 (KK'K)^l + \cdots + \nu^l a_l (KK'K) =$$
$$= \nu^l K . \left\{ (K'K)^{l+1} + a_1 (K'K)^l + \cdots + a_l (K'K) \right\} \equiv 0.$$

La corrispondenza $(KK'K)$ soddisfa dunque all'equazione $\psi\left(\frac{Z}{\nu}\right) = 0$, ottenuta trasformando $\psi(z) = 0$ mediante la trasformazione $Z = \nu z$. Proviamo ora che ogni altra equazione a cui soddisfi $(KK'K)$ ha il grado $\geq l + 1$, dal che seguirà che $\psi\left(\frac{Z}{\nu}\right) = 0$ è l'equazione minima di $(KK'K)$. Sia infatti

$$z^{m+1} + b_1 z^m + \cdots + b_m z = 0$$

una tale equazione ($m \geq 1$), mancante pure di termine noto perchè $(KK'K$

è una corrispondenza speciale; si avrà allora l'equivalenza

$$(KK'K)^{m+1} + b_1 (KK'K)^m + \cdots + b_m (KK'K) \equiv 0,$$

la quale, in virtù delle (14), diviene

$$K \left\{ \nu^m (K'K)^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^m + \cdots + b_m (K'K) \right\} \equiv 0.$$

Segue di qui che la corrispondenza

$$U = \nu^m (K'K)^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^m + \cdots + b_m (K'K),$$

funzione razionale di $(K'K)$, ha per immagine un'omografia singolare, il cui 1.° spazio singolare contiene il 2.° spazio singolare dell'omografia immagine di K, cioè lo spazio N. E poichè la corrispondenza stessa può scriversi sotto la forma $U = (K'K) \left\{ \nu^m (K'K)^m + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^{m-1} + \cdots + b_m I \right\}$, il 1.° spazio della omografia stessa dovrà contenere anche il 1.° spazio singolare dell'omografia immagine di $(K'K)$, cioè lo spazio (PB^*_1). Siccome N e (PB^*_1) appartengono ad $S_{2\pi-1}$, la U deve avere per immagine un'omografia nulla, e la $(K'K)$ soddisfa quindi all'equazione

$$\nu^m z^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 z^m + \cdots + b_m z = 0.$$

Dovrà dunque essere $m \geq l$, il che prova quanto sopra abbiamo asserito.

Siano ora $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ le valenze reali che posseggono le corrispondenze $T^{-1}T$ e TT^{-1} oltre alle eventuali valenze nulle. Poichè, in forza delle relazioni (13), le corrispondenze $KK'K$ e $K'KK'$ della curva Γ si ottengono rispettivamente trasformando mediante θ la $T^{-1}T$ della curva C e mediante τ la TT^{-1} della curva C', si deduce, applicando un teorema noto (*), che l'equazione minima di $KK'K$ ammette le radici $0, \nu\rho_1, \ldots, \nu\rho_l$, e quella di $K'KK'$ le radici $0, n\rho_1, \ldots, n\rho_l$. Ma allora le radici dell'equazione $\psi(z) = 0$ saranno i numeri reali $0, \rho_1, \ldots, \rho_l$ e questi numeri saranno le valenze delle corrispondenze KK' e $K'K$.

Determiniamo ora le dimensioni di queste valenze.

Poichè le omografie immagini di KK' e di $K'K$ sono tali che il 2.° spazio singolare dell'una è indipendente dal 1.° dell'altra, dalla relazione

(*) Rosati, *C. P.*, n.° 18.

$KK'.K'K = n.KK'K$ si deduce che l'omografia immagine di $KK'K$ ha comune il 1.° spazio singolare con quella immagine di KK' ed il 2.° con quella immagine di $K'K$. Tali spazi sono dunque rispettivamente (MA^*_1) e A^*_2. Riprendendo le notazioni del n.° 8, si ricordi che l'omografia $\omega'\omega$, subordinata in A_2 dall'omografia immagine di $T^{-1}T$, ammette gli spazi fondamentali reali $S_{2q_1-1}\, S_{2q_2-1} \dots S_{2q_l-1}$; dicendo dunque $S^*_{2q_1-1}\, S^*_{2q_2-1} \dots S^*_{2q_l-1}$ gli spazi di A^*_2 che corrispondono ai primi nell'omografia immagine di θ, saranno questi gli spazi fondamentali dell'omografia subordinata in A^*_2 da $KK'K$. Se infine si osserva che ogni punto di A^*_2, essendo unito nell'omografia immagine di K (n.° 7), sarà unito nell'omografia immagine di $KK'K$ quando e solo quando è unito in quella immagine di $K'K$, si deduce che i detti spazi $S^*_{2q_1-1} \dots S^*_{2q_l-1}$ sono pure fondamentali per l'omografia subordinata in A^*_2 dall'omografia immagine di $K'K$, e che quindi le valenze $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_l$ di $K'K$ (e lo stesso può dirsi delle valenze di KK') hanno le dimensioni rispettive $q_1\, q_2 \dots q_l$. Si ottiene dunque il risultato:

Le valenze reali che le corrispondenze $T^{-1}T$ e TT^{-1} hanno oltre la eventuale valenza nulla sono uguali e della stessa dimensione di quelle che sulla curva immagine della corrispondenza (n, ν) appartengono alle corrispondenze KK' e $K'K$.

Osservazione. Nel caso in cui gli assi $A^*_2\, B^*_2$ coincidono, le corrispondenze KK' e $K'K$ posseggono oltre la valenza nulla, la sola valenza $-\nu n$ (Cfr. la nota al n.° 13), onde, se q è il rango della corrispondenza (n, ν), il difetto di equivalenza delle due serie γ^1_n e γ^1_ν sarà $z = n\nu q$. Le corrispondenze laterali S ed S' hanno allora, oltre alle eventuali valenze ν ed n, una sola ulteriore valenza, di dimensione q, che per la S ha il valore $\nu(1-n)$ e per S' il valore $n(1-\nu)$. Si ha dunque la proprietà: *Se le corrispondenze laterali S ed S' di una corrispondenza (n, ν) di rango q posseggono, oltre alle eventuali valenze ν ed n, più di una ulteriore valenza, la curva immagine della corrispondenza contiene una infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili di dimensione $q-1$.*

Pisa, marzo 1918.

Sul calcolo approssimato degli integrali definiti.

(*Memoria postuma di* ULISSE DINI (*).)

1. Ci proponiamo, in questa breve Nota, di dare in modo semplice alcune formule per il calcolo approssimato degli integrali definiti che comprendono quelle comuni delle tangenti, dei trapezî e di SIMPSON ed altre, che dànno ancora una maggiore approssimazione nel calcolo delle aree, degli archi, ecc.

Premettiamo perciò l'osservazione seguente:

Essendo $y = f(x)$ una funzione finita qualsiasi atta all'integrazione tra α e β, se s'intende scomposto l'intervallo $\alpha\beta$ in n intervalli parziali δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ con una legge qualsiasi, l'integrale definito $\int_\alpha^\beta y\,dx$ sarà sempre il limite della somma $\sum \delta_s \bar{y}_s$ al crescere indefinito di n per l'impiccolire indefinito degli intervalli δ_s, essendo $\bar{y}_s$ un numero qualsiasi compreso tra i limiti inferiore e superiore di y nell'intervallo corrispondente δ_s.

Intercaliamo ora in ciascun intervallo δ_s $i_s - 1$ nuovi punti di divisione, il cui numero potrà anche variare da intervallo ad intervallo, senza però superare mai un numero finito i, ed indichiamo con $r_{s-1,0}$, $r_{s-1,1}$, $r_{s-1,2}, \ldots,$ r_{s-1,i_s} dei numeri (positivi o negativi) qualsiansi, sempre inferiori numericamente ad un numero finito r, e la cui somma λ_s si supporrà sempre discosta

(*) In omaggio alla venerata memoria del Senatore **Ulisse Dini** pubblichiamo quest'ultimo lavoro, ritrovato già pronto per la stampa fra le sue carte manoscritte. Le semplici ed eleganti ricerche qui esposte interesseranno, ne siamo sicuri, i lettori di questi *Annali,* come tutto quello che è uscito dalla penna del compianto Maestro. Alla Memoria fa seguito una brevissima Nota, di natura ancora più elementare, scritta dal DINI pei suoi allievi nel corso di calcolo infinitesimale. LA DIREZIONE.

NB. Le poche Note a piè di pagina segnate (N.) sono dovute al collega prof. NICOLETTI.

da zero non meno di un certo numero λ, e con $y_{s-1,0}, y_{s-1,1}, \ldots, y_{s-1,i_{s-1}}$ indichiamo i valori di y negli $i_s - 1$ nuovi punti di divisione intercalati nell'intervallo δ_s e con $y_{s-1,0} = y_{s-1}$ e $y_{s-1,i_s} = y_{s,0} = y_s$ i valori della stessa funzione y negli estremi inferiore e superiore dello stesso intervallo δ_s. Avremo:

$$\frac{\delta_s}{\lambda_s}\left\{ r_{s-1,0}\, y_{s-1,0} + r_{s-1,1}\, y_{s-1,1} + \cdots + r_{s-1,i_s}\, y_{s-1,i_s} \right\} = \delta_s \bar{y}_s +$$

$$+ \frac{\delta_s}{\lambda_s}\left\{ r_{s-1,0}\,(y_{s-1,0} - \bar{y}_s) + r_{s-1,1}\,(y_{s-1,1} - \bar{y}_s) + \cdots + r_{s-1,i_s}\,(y_{s-1,i_s} - \bar{y}_s) \right\}$$

e nel secondo membro la quantità tra parentesi sarà numericamente inferiore ad $(i_s + 1)\, r\, D_s$, essendo D_s l'oscillazione di y nell'intervallo δ_s; e quindi si potrà scrivere

$$\Sigma \frac{\delta_s}{\lambda_s}\left\{ r_{s-1,0}\, y_{s-1,0} + r_{s-1,1}\, y_{s-1,1} + \cdots + r_{s-1,i_s}\, y_{s-1,i_s} \right\} =$$

$$= \Sigma\, \delta_s\, \bar{y}_s + \eta\, \frac{r\,(i+1)}{\lambda}\, \Sigma\, \delta_s\, D_s,$$

essendo η un numero compreso tra -1 ed 1; dal che evidentemente risulta che, sotto le condizioni poste, *l'integrale definito* $\int_\alpha^\beta y\, d\, x$ *potrà sempre riguardarsi anche come il limite della somma:*

$$\Sigma \frac{\delta_s}{\lambda_s}\left\{ r_{s-1,0}\, y_{s-1,0} + r_{s-1,1}\, y_{s-1,1} + \cdots + r_{s-1,i_s}\, y_{s-1,i_s} \right\}. \qquad (1)$$

2. In particolare quindi, supponendo che le δ_s siano tutte uguali tra loro ed indicandole con δ, e così siano pure uguali tra loro e ad i i numeri i_s e le $r_{s-1,0}, r_{s-1,1}, \ldots, r_{s-1,i_s}$ siano le stesse per ogni intervallo δ_s per modo che possano indicarsi più semplicemente con $r_0, r_1, \ldots, r_i$, e la loro somma sia un numero λ diverso da zero, *l'integrale definito* $\int_\alpha^\beta y\, d\, x$ *potrà riguardarsi come il limite della somma:*

$$\frac{\delta}{\lambda} \sum_1^n \left\{ r_0\, y_{s-1,0} + r_1\, y_{s-1,1} + r_2\, y_{s-1,2} + \cdots + r_i\, y_{s-1,i} \right\} \qquad (2)$$

per $n = \infty$; per modo che per un valore approssimato dello stesso integrale definito potrà prendersi la somma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{\lambda}\Big\{ r_0\, y_\alpha + r_1\,(y_{\alpha,1} + y_{1,1} + y_{2,1} + \cdots + y_{n-1,1}) + \\ + r_2\,(y_{\alpha,2} + y_{1,2} + y_{2,2} + \cdots + y_{n-1,2}) + \cdots \\ \cdots + r_{i-1}\,(y_{\alpha,i-1} + y_{1,i-1} + \cdots + y_{n-1,i-1}) + \\ + (r_i + r_0)\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + r_i\, y_\beta \Big\} ;\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

o più particolarmente ancora, supponendo che anche gli intervalli δ siano divisi in i parti uguali ciascuna a $\frac{\delta}{i}$, ciò che corrisponde a dividere l'intervallo $(\alpha\,\beta)$ in $n\,i$ parti uguali, prendendole poi a gruppi ciascuno di i, e supponendo $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ avremo per valori approssimati del nostro integrale $\int_\alpha^\beta y\,d\,x$ le varie espressioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{\lambda}\sum_1^n (r_0\, y_{s-1} + r_1\, y_s), \quad \frac{\delta}{\lambda}\sum_1^n (r_0\, y_{s-1} + r_1\, y_{s-1,1} + r_2\, y_s), \\ \frac{\delta}{\lambda}\sum_1^n (r_0\, y_{s-1} + r_1\, y_{s-1,1} + r_2\, y_{s-1,2} + r_3\, y_s), \ldots\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

la prima delle quali per $r_0 = r_1 = 1$, $\lambda = 2$ ci dà la formula dei trapezî; la seconda per $r_0 = r_2 = 0$, $r_1 = 2$, $\lambda = 2$ dà quella delle tangenti, per $r_0 = r_1 = 1$, $r_2 = 4$ ci dà quella conosciuta sotto il nome di formola di SIMPSON, sebbene fosse stata trovata prima da CAVALIERI, come rilevò il PEANO, etc....

3. Per trovare ora il grado di approssimazione che si ha nel calcolo dell'integrale con queste varie espressioni, lo determineremo per ogni termine della espressione più generale (1) in confronto all'integrale relativo all'intervallo corrispondente δ_s; e, profittando della circostanza che sono arbitrarie tanto le suddivisioni dell'intervallo δ_s in i_s intervalli parziali, che può farsi con legge qualsiasi, quanto le $r_{s-1,p}$, tratteremo prima il caso in cui, fissate in un modo qualsiasi le suddivisioni dell'intervallo δ_s, si cercherà di determinare le $r_{s-1,p}$ in modo che per quella suddivisione si abbia la maggiore approssimazione, e poi, lasciando indeterminato anche il modo di fare la suddivisione dell'intervallo δ_s in i_s intervalli parziali, cercheremo come questa dovrà farsi per avere una approssimazione anche maggiore.

Per semplicizzare le nostre formule faremo le indicate ricerche per il primo termine della (1), indicando:

a) con δ l'intervallo corrispondente;

b) con i e λ i numeri i_s e λ_s corrispondenti a questo intervallo, con che non si esclude che questi numeri possano anche variare da intervallo ad intervallo;

c) con $(r_0 y_\alpha + r_1 y_{\alpha,1} + r_2 y_{\alpha,2} + \cdots + r_{i-1} y_{\alpha,i-1} + r_i y_{\alpha,i}) \frac{\delta}{\lambda}$ il termine stesso e con $\alpha_1 \delta$, $\alpha_2 \delta, \ldots, \alpha_{i-1} \delta$ i tratti da α ai vari punti della suddivisione dell'intervallo δ o questi stessi punti, nei quali s'intende che i valori di y siano $y_{\alpha,1}\, y_{\alpha,2} \ldots y_{\alpha,i-1}$, essendo così $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ numeri frazionarî positivi, successivamente crescenti, tutti inferiori ad 1, che saranno fissati avanti o risulteranno poi determinati con quella legge che vorremo e che potranno variare essi pure da intervallo ad intervallo;

ed infine indicando

d) con $\alpha_i \delta$ $(\alpha_i = 1)$ l'estremo superiore del nostro intervallo δ e con $y_{\alpha,i} = y_{\alpha+\delta}$ il valore di y in questo estremo.

4. Osserveremo che, se si pone $\int_\alpha^x y\, dx = F(x)$, l'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\, dx$ sarà $F(\alpha+\delta)$; e quindi ammesso che y abbia le derivate determinate e finite almeno fino a quelle dell'ordine $i+p+1$, che considereremo nelle nostre formule, sviluppando $F(\alpha+\delta)$ colla formula di Taylor, avremo:

$$\left.\begin{aligned} \int_\alpha^{\alpha+\delta} y\, dx &= \delta\, y_\alpha + \frac{\delta^2}{\pi(2)} y'_\alpha + \frac{\delta^3}{\pi(3)} y''_\alpha + \cdots \\ &\cdots + \frac{\delta^i}{\pi(i)} y_\alpha^{(i-1)} + \frac{\delta^{i+1}}{\pi(i+1)} y_\alpha^{(i)} + \cdots + \frac{\delta^{i+p+1}}{\pi(i+p+1)} y_\alpha^{(i+p)} + \sigma \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

essendo σ una quantità che diviene infinitesima con δ di ordine superiore ad $i+p+1$.

D'altra parte il termine

$$(r_0 y_\alpha + r_1 y_{\alpha,1} + r_2 y_{\alpha,2} + \cdots + r_{i-1} y_{\alpha,i-1} + r_i y_{\alpha,i}) \frac{\delta}{\lambda} \tag{6}$$

che abbiamo detto di considerare, sviluppandone le varie sue parti colla formula di Taylor, coll'osservare che si ha ora in generale $y_{\alpha,h} = y(\alpha + \alpha_h \delta)$, potrà scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta y_\alpha + (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \cdots + \alpha_{i-1} r_{i-1} + \alpha_i r_i) \frac{\delta^2}{\pi(1)} \frac{y'_\alpha}{\lambda} + \\
&+ (\alpha_1^2 r_1 + \alpha_2^2 r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^2 r_{i-1} + \alpha_i^2 r_i) \frac{\delta^3}{\pi(2)} \frac{y''_\alpha}{\lambda} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ (\alpha_1^i r_1 + \alpha_2^i r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^i r_{i-1} + \alpha_i^i r_i) \frac{\delta^{i+1}}{\pi(i)} \frac{y_\alpha^{(i)}}{\lambda} + \\
&+ (\alpha_1^{i+1} r_1 + \alpha_2^{i+1} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+1} r_{i-1} + \alpha_i^{i+1} r_i) \frac{\delta^{i+2}}{\pi(i+1)} \frac{y_\alpha^{(i+1)}}{\lambda} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ (\alpha_1^{i+p} r_1 + \alpha_2^{i+p} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+p} r_{i-1} + \alpha_i^{i+p} r_i) \frac{\delta^{i+p+1}}{\pi(i+p)} \frac{y_\alpha^{(i+p)}}{\lambda} + \sigma_1,
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

essendo σ_1 di un ordine di piccolezza superiore a quello di δ^{i+p+1}; e quindi l'errore che si commetterà calcolando l'integrale definito $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,dx$ colla espressione approssimata precedente (6), invece che colla formula esatta (5), risulterà dalla differenza delle due espressioni (5) e (7); e poichè in questa differenza il termine δy_α sparisce, l'errore stesso sarà maggiore o minore a seconda dei valori che saranno scelti per le $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_i$ o per le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ e non sarà mai inferiore all'ordine di piccolezza di δ^2 (*).

Evidentemente, supponendo fissato δ e dati $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ e profittando della indeterminazione di tutte o di alcune delle $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{i-1}, r_i$, potremo far risultare questo errore dell'ordine di piccolezza di δ^{i+2} almeno, quando le stesse quantità si determinino (ciò che vedremo ora che potrà sempre farsi) in modo che risultino uguali i coefficienti nelle due espressioni (5) e (7) fino a quelli di δ^{i+1} inclusivo, cioè in modo che si abbiano le i equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \cdots + \alpha_{i-1} r_{i-1} + \alpha_i r_i &= \frac{\lambda}{2}, \\
\alpha_1^2 r_1 + \alpha_2^2 r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^2 r_{i-1} + \alpha_i^2 r_i &= \frac{\lambda}{3},
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(*) Cioè avrà un ordine di piccolezza non inferiore a δ^2 (N.).

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1^3 r_1 + \alpha_2^3 r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^3 r_{i-1} + \alpha_i^3 r_i = \dfrac{\lambda}{4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^i r_1 + \alpha_2^i r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^i r_{i-1} + \alpha_i^i r_i = \dfrac{\lambda}{i+1}, \end{array}\right\} \quad (8)$$

e quando questo avvenga, l'errore sarà dell'ordine di δ^{i+2} ed avrà per termine principale

$$\left(\alpha_1^{i+1} r_1 + \alpha_2^{i+1} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+1} r_{i-1} + \alpha_i^{i+1} r_i - \frac{\lambda}{i+2}\right) \frac{\delta^{i+2}}{\lambda \pi (i+1)} y_a^{(i+1)} \quad (9)$$

a meno che questo termine non sia zero, ciò che appunto avverrà quando insieme alle (8) si abbia come conseguenza di queste anche l'equazione successiva che verrà dall'uguagliare anche i coefficienti di δ^{i+2} nelle due espressioni (5) e (7); nel qual caso, come in generale quando risultino soddisfatte successivamente anche le $p-1$ equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1^{i+1} r_1 + \alpha_2^{i+1} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+1} r_{i-1} + \alpha_i^{i+1} r_i = \dfrac{\lambda}{i+2}, \\ \alpha_1^{i+2} r_1 + \alpha_2^{i+2} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+2} r_{i-1} + \alpha_i^{i+2} r_i = \dfrac{\lambda}{i+3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{i+p-1} r_1 + \alpha_2^{i+p-1} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+p-1} r_{i-1} + \alpha_i^{i+p-1} r_i = \dfrac{\lambda}{i+p}, \end{array}\right\} \quad (10)$$

cioè le $p-1$ equazioni successive all'ultima delle precedenti (8) che vengono come queste dall'uguagliare i coefficienti nelle espressioni (5) e (7) fino a quello di δ^{i+p}, l'errore sarà dell'ordine di piccolezza di δ^{i+p+1} ed avrà per suo termine principale l'espressione:

$$\left(\alpha_1^{i+p} r_1 + \alpha_2^{i+p} r_2 + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+p} r_{i-1} + \alpha_i^{i+p} r_i - \frac{\lambda}{i+p+1}\right) \frac{\delta^{i+p+1}}{\lambda \pi (i+p)} y_a^{(i+p)}, \quad (11)$$

che poi trasformeremo in un'altra molto più semplice.

5. Si osservi ora che il determinante Δ del sistema di equazioni lineari (8) si trasforma subito nell'altro

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots & 1 \cdots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_h \cdots & \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \cdots & \alpha_h^2 \cdots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} \cdots & \alpha_h^{i-1} \cdots & \alpha_{i-1}^{i-1} & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix},$$

nel quale il determinante che vi figura è quello di Vandermonde, per modo che si ha

$$\Delta = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \prod_{h,k} (\alpha_h - \alpha_k) \quad \text{con} \quad h > k,$$

e Δ è sempre diverso da zero; quindi le stesse equazioni (8) determinano sempre uno ed un solo sistema di valori per le $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i$ che hanno per denominatore l'espressione precedente.

Il numeratore poi di queste quantità si ottiene colla regola nota, e ad es. quello D_h di r_p potrà trasformarsi nell'altro:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i}{\alpha_h} \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots & \frac{1}{2} \cdots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \frac{1}{3} \cdots & \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \cdots & \frac{1}{4} \cdots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-2} \cdots & \frac{1}{i+1} \cdots & \alpha_{i-1}^{i-1} & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix},$$

e poichè alla colonna h ai termini $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{i+1}$ possono evidentemente sostituirsi gli integrali $\int_0^1 z\,dz$, $\int_0^1 z^2\,dz, \dots$, $\int_0^1 z^i\,dz$, l'espressione stessa può scriversi

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i}{\alpha_h} \lambda \int_0^1 z\,\Delta_h(z)\,dz,$$

con

$$\Delta_h(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & z \ldots & \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots & z^2 \ldots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} \ldots & z^{i-1} \ldots & \alpha_{i-1}^{i-1} & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

e sviluppando il nuovo determinante di VANDERMONDE $\Delta_h(z)$, che viene a figurare sotto il segno integrale, si vede subito che se si introduce la funzione $\varphi(z)$ che si annulla per i valori $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i (= 1)$ di z, che corrispondono ai punti della suddivisione ed ai punti estremi dell'intervallo δ d'integrazione, cioè se si pone:

$$\varphi(z) = z(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{i-1})(z-1), \tag{12}$$

si riesce ad avere l'espressione semplice:

$$r_h = \frac{\lambda}{\varphi'(\alpha_h)} \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{z-\alpha_h}\, dz, \tag{13}$$

pel valore di r_h, con $h = 1, 2, \ldots, i-1, i$, intendendo che $\alpha_i = 1$.

Così trovati $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_i$, basta osservare che deve essere

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{i-1} + r_i = \lambda$$

e che per una formola nota si ha:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{z\,\varphi'(0)} + \sum_1^i \frac{1}{\varphi'(\alpha_h)} \frac{1}{z-\alpha_h}, \tag{14}$$

per dedurne subito che

$$r_0 = \frac{\lambda}{\varphi'(0)} \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{z}\, dz,$$

ciò che permette di dire che anche r_0 può aversi dalla formula (13), intendendo che sia $\alpha_0 = 0$; ed ora in generale si può dire anche che, onde nell'espressione approssimata (6) dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\sigma} y\,dx$ manchi qualche termine, ad es., il termine che contiene r_h, bisognerà che sia $\int_0^1 \frac{\varphi(z)}{z-\alpha_h}\, dz = 0$, potendo h avere tutti i valori $0, 1, 2, \ldots, i-1, i$.

6. Trovata ora questa formula per i valori di $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_i$, per determinare l'errore corrispondente (9) od (11), osserviamo che quando i valori delle quantità stesse r_h, anzichè sotto la formula semplice (13), alla quale li abbiamo ridotti, si prenderanno sotto la forma $\frac{D_h}{\Delta}$, come vengono dall'applicazione immediata della formula di CRAMER, si vede subito che, calcolando la quantità tra parentesi nella espressione (9) con questi valori $\frac{D_h}{\Delta}$ delle r_h si trova che essa non è che lo sviluppo del determinante di ordine $i+1$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{i-1} & \alpha_i & \frac{\lambda}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_i^2 & \frac{\lambda}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i+1} & \alpha_2^{i+1} & \ldots & \alpha_{i-1}^{i+1} & \alpha_i^{i+1} & \frac{\lambda}{i+2} \end{vmatrix},$$

fatto questo sviluppo per i termini dell'ultima linea e diviso per Δ e cambiato di segno; quindi sostituendovi agli elementi dell'ultima colonna gli integrali $\lambda \int_0^1 z\,dz$, $\lambda \int_0^1 z^2\,dz, \ldots, \lambda \int_0^1 z^{i+1}\,dz$, si vede subito che la stessa quantità sarà uguale a $-\lambda \int_0^1 \varphi(z)\,dz$ e si trova quindi intanto che se l'integrale $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$ non è nullo, quando si prende per valore dell'integrale $\int_0^{\alpha+\delta} y\,dx$ la somma (6), nella quale le $r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i$ abbiano i valori dati dalle (13), l'errore che si commetterà avrà per termine principale

$$\frac{-\delta^{i+2}}{\pi(i+1)} y_\alpha^{(i+1)} \int_0^1 \varphi(z)\,dz;$$

mentre se l'integrale $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$ sarà nullo, il detto errore sarà di un ordine di piccolezza superiore a quello di δ^{i+2}.

Supponendo ora, in modo generale, che dai valori trovati $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_i$ per mezzo delle (8) risultino soddisfatte anche le $p-1$ equazioni (10), prendiamo a considerare il sistema di i equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1^p r_1 + \alpha_2^p r_2 + \cdots + \alpha_h^p r_h + \cdots + \alpha_{i-1}^p r_{i-1} + \alpha_i^p r_i = \dfrac{\lambda}{p+1} \\
\alpha_1^{p+1} r_1 + \alpha_2^{p+1} r_2 + \cdots + \alpha_h^{p+1} r_h \cdots + \alpha_{i-1}^{p+1} r_{i-1} + \alpha_i^{p+1} r_i = \dfrac{\lambda}{p+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_1^{i+p-1} r_1 + \alpha_2^{i+p-1} r_2 + \cdots + \alpha_h^{i+p-1} r_h + \cdots + \alpha_{i-1}^{i+p-1} r_{i-1} + \alpha_i^{i+p-1} r_i = \dfrac{\lambda}{i+p}
\end{array}\right\} \quad (15)$$

che è costituito dalle ultime $i-(p-1)$ equazioni (8) e dalle (10), ed osserviamo che anche queste equazioni ammetteranno per $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_i$ un solo sistema di valori che le soddisfano, perchè, come ora vedremo, il loro determinante sarà diverso da zero e quindi questi valori, pure presentandosi sotto forma diversa, saranno precisamente gli stessi valori che soddisfano un tempo alle (8) ed alle (10).

Ora, indicando con $\overline{\Delta}$ il determinante del sistema delle equazioni (15), basta sopprimere dalle singole colonne i fattori $\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{i-1}^p, \alpha_i^p$ e portarli esternamente a moltiplicare per vedere che esso si riduce alla espressione $\alpha_1^p \alpha_2^p \ldots \alpha_{i-1}^p \alpha_i^p \prod_{h,k} (\alpha_h - \alpha_k)$ con $h > k$ ed è diverso da zero; quindi sarà $r_h = \dfrac{\overline{D}_h}{\overline{\Delta}}$, essendo $\overline{D}_h$ il determinante ottenuto colla solita regola di Cramer, e così collo stesso processo usato sopra si troverà che la quantità dentro parentesi nell'espressione (11) sarà

$$-\frac{1}{\overline{\Delta}}\begin{vmatrix}
\alpha_1^p & \alpha_2^p & \ldots & \alpha_i^p & \dfrac{\lambda}{p+1} \\
\alpha_1^{p+1} & \alpha_2^{p+2} & \ldots & \alpha_i^{p+1} & \dfrac{\lambda}{p+2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_1^{i+p} & \alpha_2^{i+p} & \ldots & \alpha_i^{i+p} & \dfrac{\lambda}{p+i+1}
\end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{\overline{\Delta}} \int_0^1 \Omega_p(z)\, dz$$

con

$$\Omega_p = \begin{vmatrix}
\alpha_1^p & \alpha_2^p & \ldots & \alpha_i^p & z^p \\
\alpha_1^{p+1} & \alpha_2^{p+1} & \ldots & \alpha_i^{p+1} & z^{p+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_1^{i+p} & \alpha_2^{i+p} & \ldots & \alpha_i^{i+p} & z^{i+p}
\end{vmatrix},$$

e sviluppando nel solito modo il determinante sotto l'integrale, questa espressione si ridurrà alla forma $-\lambda\int_0^1 z^{p-1}\varphi(z)\,dz$; e poichè questo procedimento si applica a tutti i sistemi di equazioni che si hanno dal sistema (15) col darvi successivamente a p i valori 1, 2, 3,..., p, si vede che in corrispondenza di ognuna delle equazioni (10) che risulti successivamente soddisfatta (dopo le (8)) risulteranno zero successivamente gli integrali $\int_0^1\varphi(z)\,dz$, $\int_0^1 z\varphi(z)\,dz$, $\int_0^1 z^2\varphi(z)\,dz,\ldots$, $\int_0^1 z^{p-2}\varphi(z)\,dz$; e si vede altresì che, se l'integrale seguente $\int_0^1 z^{p-1}\varphi(z)\,dz$ non sarà zero, il solito errore nel calcolo approssimato dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,dx$ per mezzo della (6) avrà per termine principale

$$-\frac{\delta^{i+p+1}}{\pi(i+p)}y_\alpha^{(i+p)}\int_0^1 z^{p-1}\varphi(z)\,dz.$$

7. Ottenuti questi risultati, avremmo già tutti gli elementi che occorrono per giudicare del grado di approssimazione che si ha prendendo la somma (6) come valore dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,dx$. Ma per rendere le cose, almeno in certi casi, alquanto più semplici, vogliamo anche trasformare le formule ottenute coll'introdurvi la funzione $\psi(z)$, di grado $i-1$ in z, data dalla formula:

$$\psi(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{i-1}) \tag{16}$$

che si annulla soltanto per i valori $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}$ di z corrispondenti ai punti della suddivisione, invece di quella $\varphi(z)$ di grado $i+1$, data dalla (12), la quale, oltrechè per questi valori $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}$ corrispondenti ai punti della suddivisione si annulla anche per i valori 0 ed 1, corrispondenti ai punti estremi α, $\alpha+\delta$ dell'intervallo $(\alpha, \alpha+\delta)$.

Per questo osserviamo che, avendosi ora $\varphi(z)=z(z-1)\psi(z)$, la formula (13) per i valori 1, 2, 3,..., $i-1$ di h si muta nell'altra:

$$r_h=\frac{1}{\alpha_h(\alpha_h-1)\psi'(\alpha_h)}\int_0^1\frac{z(z-1)\psi(z)}{z-\alpha_h}\,dz \ (*)$$

(*) È qui fatto $\lambda=1$, ed ugualmente nel seguito (N.).

e siccome si ha evidentemente

$$z(z-1) = (z-\alpha_h)(z-1) + \alpha_h(z-1) =$$
$$= (z-\alpha_h)z + (z-\alpha_h)(\alpha_h - 1) + \alpha_h(\alpha_h - 1)$$

sarà

$$\left.\begin{aligned} r_h = \frac{1}{\alpha_h(\alpha_h-1)\psi'(\alpha_h)} \int_0^1 z\,\psi(z)\,dz + \frac{1}{\alpha_h\psi'(\alpha_h)} \int_0^1 \psi(z)\,dz + \\ + \frac{1}{\psi'(\alpha_h)} \int_0^1 \frac{\psi(z)}{z-\alpha_h}\,dz, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

sempre per $h = 1, 2, 3, \ldots, i-1$; mentre per $h = 0$ o $\alpha_h = 0$, avremo:

$$r_0 = -\frac{1}{\psi(0)} \int_0^1 (z-1)\,\psi(z)\,dz$$

e per $h = i$, $\alpha_i = 1$, avremo:

$$r_i = \frac{1}{\psi(1)} \int_0^1 z\,\psi(z)\,dz$$

cioè:

$$\left.\begin{aligned} r_0 = -\frac{1}{\psi(0)} \int_0^1 z\,\psi(z)\,dz + \frac{1}{\psi(0)} \int_0^1 \psi(z)\,dz; \\ r_i = \frac{1}{\psi(1)} \int_0^1 z\,\psi(z)\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

In generale poi avremo:

$$\int_0^1 z^g\,\varphi(z)\,dz = \int_0^1 z^{g+1}(z-1)\,\psi(z)\,dz = \int_0^1 z^{g+2}\,\psi(z)\,dz - \int_0^1 z^{g+1}\,\psi(z)\,dz;$$

talchè si può dire che se risulteranno successivamente nulle le differenze

$$\int_0^1 z^2\,\psi(z)\,dz - \int_0^1 z\,\psi(z)\,dz,$$

$$\int_0^1 z^3\,\psi(z)\,dz - \int_0^1 z^2\,\psi(z)\,dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 z^p\,\psi(z)\,dz - \int_0^1 z^{p-1}\,\psi(z)\,dz$$

(con $p \geqq 2$) che corrispondono ai precedenti integrali

$$\int_0^1 \varphi(z)\, d z, \int_0^1 z\, \varphi(z)\, d z, \ldots, \int_0^1 z^{p-2}\, \varphi(z)\, d z,$$

e la differenza seguente

$$\int_0^1 z^{p+1}\, \psi(z)\, d z - \int_0^1 z^p\, \psi(z)\, d z,$$

che corrisponde all'integrale $\int_0^1 z^{p-1}\, \varphi(z)\, d z$, non sarà zero, l'errore avrà per termine principale

$$\frac{-\delta^{i+p+1}}{\pi\,(i+p)}\, y_\alpha^{(i+p)} \left\{ \int_0^1 z^{p+1}\, \psi(z)\, d z - \int_0^1 z^p\, \psi(z)\, d z \right\}.$$

In particolare quindi, quando gli integrali $\int_0^1 \psi(z)\, d z$ e $\int_0^1 z\, \psi(z)\, d z$ siano nulli, nel qual caso ed allora soltanto r_0 ed r_i saranno zero insieme, avremo più semplicemente

$$r_h = \frac{1}{\psi'(h)} \int_0^1 \frac{\psi(z)}{z - \alpha_h}\, d z \tag{19}$$

per $h = 1, 2, 3, \ldots, i-1$; e se, al tempo stesso saranno nulli anche gli integrali successivi $\int_0^1 z^2\, \psi(z)\, d z$, $\int_0^1 z^3\, \psi(z)\, d z, \ldots, \int_0^1 z^p\, \psi(z)\, d z$ l'integrale seguente $\int_0^1 z^{p+1}\, \psi(z)\, d z$ non sarà zero, il solito errore avrà per termine principale

$$\frac{-\delta^{i+p+1}}{\pi\,(i+p)}\, y_\alpha^{(i+p)} \int_0^1 z^{p+1}\, \psi(z)\, d z.$$

8. Si può ora osservare che, cambiando z in $\frac{1}{2} + t$, l'integrale $\int_0^1 \varphi(z)\, d z$ si muta nell'altro $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(t)\, d t$, essendo $\varphi_1(t) = \varphi\left(\frac{1}{2} + t\right)$ ed in questo, come in generale in tutti gli integrali $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \theta(t)\, d t$, dove $\theta(t)$ è una funzione razionale di t, si potranno conservare soltanto i termini $\bar{\theta}(t)$ di

$\theta(t)$, nei quali t ha il grado pari e tralasciare senz'altro quelli di grado dispari, perchè questi saranno identicamente zero e l'integrale si ridurrà all'altro $2\int_0^{\frac{1}{2}} \overline{\theta}(t)\, d\, t$.

Osservando quindi in particolare che se i punti della suddivisione fatta nell'intervallo δ sono due a due equidistanti dagli estremi, per modo cioè che sia $\alpha_h = 1 - \alpha_{i-h}$ o $\frac{1}{2} - \alpha_h = \alpha_{i-h} - \frac{1}{2}$, la funzione $\varphi_1(t)$ nel caso di i pari diviene la funzione dispari di t

$$\varphi_1(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left[t^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)^2\right] \cdots \left[t^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_{\frac{i}{2}-1}\right)^2\right] t$$

per i dispari diviene la funzione pari di t

$$\varphi_1(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left[t^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)^2\right] \cdots \left[t^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_{i-1}\right)^2\right],$$

si può senz'altro affermare che nel caso di i pari, l'integrale $\int_0^1 \varphi(z)\, d\, z$ sarà zero; e siccome i valori di t che corrispondono a $z = \alpha_h$ ed a $z = \alpha_{i-h}$ sono $\alpha_h - \frac{1}{2}$ ed $\alpha_{i-h} - \frac{1}{2}$ e quindi sono uguali e di segno contrario, basta osservare che col porre $z = \frac{1}{2} + t$, si ha $\varphi'(z) = \varphi'_1(t)$ per dedurne subito che nel caso di i pari si ha $\varphi'(\alpha_h) = \varphi'(\alpha_{i-h})$ e nel caso di i dispari si ha invece $\varphi'(\alpha_h) = -\varphi'(\alpha_{i-h})$. D'altra parte, avendosi per tutti i valori $0, 1, 2, \ldots, i-1, i$ di h

$$\frac{\varphi(z)}{z - \alpha_h} = \frac{\varphi_1(t)}{t + \frac{1}{2} - \alpha_h} = \frac{\left(t - \left(\frac{1}{2} - \alpha_h\right)\right)\varphi_1(t)}{t^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_h\right)^2},$$

per l'osservazione fatta sopra sugli integrali $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \theta(t)\, d\, t$ si vede che gli integrali $\int_0^1 \frac{\varphi(z)}{z - \alpha_h}\, d\, z$, che figurano nelle espressioni (13) dei coefficienti r_h

si riducono, per i pari, agli integrali

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t\,\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_h\right)^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t\,\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_{i-h}\right)^2};$$

per i dispari agli altri

$$-\left(\frac{1}{2}-\alpha_h\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_h\right)^2} = \left(\frac{1}{2}-\alpha_{i-h}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_{i-h}\right)^2},$$

quindi, avuto riguardo alle (13) ed alle osservazioni fatte sopra intorno ai valori di $\varphi'(\alpha_h)$ e $\varphi'(\alpha_{i-h})$ si può senz'altro affermare che: *quando*, come abbiamo supposto, *i punti della suddivisione fatta dell'intervallo δ sono a due a due equidistanti dagli estremi, i valori dei coefficienti r_h, r_{i-h} corrispondenti ai punti estremi ed a quelli equidistanti dagli estremi sono uguali tra loro;* nel caso di i pari si ha (*):

$$r_h = r_{i-h} = \frac{2}{\varphi'_1\left(\alpha_h-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t\,\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_h\right)^2} \tag{20}$$

con $h=0,\ 1,\ldots,\ \frac{i}{2}$, essendo:

$$\varphi_1(t) = \left(t^2-\frac{1}{4}\right)\left[t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)^2\right]\ldots\left[t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_{\frac{i}{2}-1}\right)^2\right]t; \tag{21}$$

per i dispari si ha invece

$$r_h = r_{i-h} = \frac{2\alpha_h-1}{\varphi'_1\left(\alpha_h-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1(t)\,dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_h\right)^2} \tag{22}$$

con $h=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{i-1}{2}$, essendo ora:

$$\varphi_1(t) = \left(t^2-\frac{1}{4}\right)\left[t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)^2\right]\ldots\left[t^2-\left(\frac{1}{2}-\alpha_{\frac{i-1}{2}}\right)^2\right]. \tag{23}$$

E nel caso di i pari, essendo $\int_0^1 \varphi(z)\,dz = 0$, per quanto trovammo nei

(*) È fatto anche qui $\lambda = 1$ (N.).

paragrafi precedenti, si può dire che il solito errore avrà per termine principale

$$-2\frac{\delta^{i+3}}{\pi(i+2)}y_\alpha^{(i+2)}\int_0^{\frac{1}{2}}t\,\varphi_1(t)\,dt$$

con $\varphi_1(t)$ dato dalla (21), se non sarà zero anche l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}t\,\varphi_1(t)\,dt$, mentre nel caso di i dispari il termine principale dell'errore sarà:

$$-2\frac{\delta^{i+2}}{\pi(i+1)}y_\alpha^{(i+1)}\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_1(t)\,dt\,,$$

con $\varphi_1(t)$ data dalla (23) se non sarà zero l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_1(t)\,dt$.

9. Quando poi invece della $\varphi_1(t)$ si voglia introdurre la funzione $\psi_1(t)=\psi_1\left(\frac{1}{2}+t\right)$, corrispondente alla $\psi(z)$ di cui nel paragrafo precedente, basterà valersi delle formole dello stesso paragrafo, come qui ci siamo valsi delle (13), od anche potremo valerci di quelle che ora abbiamo dato col sostituirvi al posto di $\varphi_1(t)$ la funzione $\left(t^2-\frac{1}{4}\right)\psi_1(t)$.

Scendiamo ora a casi particolari col supporre $i=2$, $i=3$, $i=4$ e le suddivisioni fatte in parti uguali tra loro:

1.°) $i=2$, $\alpha_1=\frac{1}{2}\cdot$ Avremo $\varphi_1(t)=\left(t^2-\frac{1}{4}\right)t$ e quindi, per le formule precedenti (20) sarà

$$r_0=r_2=\frac{2}{\varphi'_1\left(-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}}t^2\,dt=\frac{1}{6}\,,$$

$$r_1=\frac{2}{\varphi'_1(0)}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)dt=\frac{3}{2}\,,$$

ed il termine (4) diventerà $\frac{\delta}{6}(y_\alpha+4y_1+y_{\alpha+\delta})$, cioè si ritrova la formula di SIMPSON, per la quale l'errore avrà come termine principale

$$-\frac{2\,\delta^5}{\pi(4)}y_\alpha^{\mathrm{IV}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)t^2\,dt,$$

cioè:

$$\frac{\delta^5}{\pi(4)\,\pi(5)}\,y^{\text{IV}} = \frac{\delta^5}{2880}\,y_\alpha^{\text{IV}},$$

come trovò il Peano con altri processi.

2.°) $i = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. Avremo $\varphi_1(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{36}\right)$ e quindi per la formula (22) avremo:

$$r_1 = r_3 = -\frac{1}{\varphi'_1\left(-\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{36}\right) d\,t = \frac{1}{8},$$

$$r_1 = r_2 = -\frac{1}{3\,\varphi'_1\left(-\frac{1}{6}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) d\,t = \frac{3}{8}$$

ed il termine (6) diverrà:

$$\frac{1}{8}\left(y_\alpha + 3\,(y_1 + y_2) + y_{\alpha+\delta}\right) \tag{24}$$

e l'errore avrà per termine principale

$$-2\,\frac{\delta^5}{\pi(4)}\,y_\alpha^{\text{IV}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{36}\right) d\,t =$$

$$= -\frac{2\,\delta^5}{\pi(4)}\,y_\alpha^{\text{IV}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^4 - \frac{5}{18}\,t^2 - \frac{1}{144}\right) d\,t = \frac{\delta^5}{270\,\pi(4)}\,y_\alpha^{\text{IV}} = \frac{\delta^5}{6480}\,y_\alpha^{\text{IV}}$$

e quindi si avrà una approssimazione molto maggiore di quella che dà la formula di Simpson.

3.°) $i = 4$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$. Avremo:

$$\varphi_1(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{16}\right) t$$

e quindi per la formola (20) avremo:

$$r_0 = r_4 = \frac{2}{\varphi'_1\left(-\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{16}\right) t^2\, d\,t = \frac{7}{90},$$

$$r_1 = r_3 = \frac{2}{\varphi'_1\left(-\frac{1}{4}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{16}\right) t^2\, d\,t = \frac{16}{45},$$

$$r_2 = \frac{2}{\varphi'_1(0)} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{16}\right) d\,t = \frac{2}{15},$$

ed il termine (6) diverrà:

$$\frac{\delta}{90}\,(7\,y_\alpha + 32\,(y_1 + y_3) + 12\,y_2 + 7\,y_{\alpha+\delta}), \tag{25}$$

ed il solito errore avrà il termine principale:

$$-2\,\frac{\delta^7}{\pi(6)}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{16}\right) t^2\, d\,t =$$

$$= \frac{\delta^7}{4\,\pi(6)\,.\,42}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} = \frac{30\,\delta^7}{\pi(4)\,\pi(7)}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} = \frac{\delta^7}{\pi(4)\,\pi(7)}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}},$$

che col cambiamento della derivata quarta di y nella derivata sesta viene da quello che si ha nel caso della formula di Simpson, moltiplicandolo per $\frac{\delta^2}{42}$.

10. I risultati ottenuti mostrano che la formula di Simpson-Cavalieri e le altre ora trovate (24) e (25) pel calcolo approssimato degli integrali $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,d\,x$ sono quelle che danno la maggiore approssimazione quando l'intervallo δ di integrazione si suddivide in 2, 3, 4 parti uguali tra loro; e così altre formule per approssimazioni anche maggiori potrebbero subito aversi nel caso delle suddivisioni dell'intervallo in un numero maggiore di parti uguali.

Quando poi non si fissi che queste suddivisioni dell'intervallo δ in un numero determinato i di parti debbano farsi in parti uguali, ma si lasci indeterminato il modo di farlo, allora determinandolo opportunamente, possono aversi formule di approssimazione anche maggiore, perchè possono determinarsi i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ in modo che non solo l'integrale $\int_0^1 \varphi(z)\,d\,z$, ma anche gli integrali $\int_0^1 z\,\varphi(z)\,d\,z$, $\int_0^1 z^2\,\varphi(z)\,d\,z, \ldots, \int_0^1 z^{p-2}\,\varphi(z)\,d\,z$, con $p \leqq i$, siano successivamente zero, nel qual caso — quando questi integrali siano tutti zero, — il solito errore è dell'ordine di piccolezza di δ^{i+p+1} ed ha come termine principale

$$-\frac{\delta^{i+p+1}}{\pi(i+p)} y_\alpha^{(i+p)} \int_0^1 z^{p-1} \varphi(z)\, d\, z.$$

Cambiamo perciò z in $\frac{1+t}{2}$, con che gl'integrali precedenti, che possono tutti comprendersi nell'unico $\int_0^1 z^k \varphi(z)\, d\, z$, con $k=0, 1, 2, \ldots$, all'infuori del fattore $\frac{1}{2^{k+1}}$ si riducono tutti alla forma

$$\int_{-1}^1 (1+t)^k F(t)\, d\, t \quad \text{dove} \quad F(t) = \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right),$$

e $F(t)$ dovendo annullarsi per $t=-1$ e per $t=1$, perchè $\varphi(z)$ si annulla per $z=0$ e per $z=1$; ed osserviamo che introducendo le note funzioni di LEGENDRE X_k per le quali si ha sempre

$$\int_{-1}^1 X_m(t)\, X_n(t)\, d\, t = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n$$

e

$$\int_{-1}^1 X_n^2\, d\, t = \frac{2}{2n+1},$$

le funzioni $F(t)$ ed $(1+t)^k$ possono sempre porsi sotto la forma:

$$F(t) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_i X_i + a_{i+1} X_{i+1}, \tag{26}$$

$$(1+t)^k = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_k X_k, \tag{27}$$

colle a_s e b_s quantità costanti, ed a_{i+1}, e b_k diverse da zero, e precisamente:

$$a_{i+1} = \frac{\pi(i+1)}{2^{i+1}.1.3.5\ldots(2i+1)}; \quad b_k = \frac{\pi(k)}{1.3.5\ldots(2k-1)} \text{ (*)} \tag{28}$$

(*) Siccome il termine di grado più alto $i+1$ in $F(t)$ e quello di grado k in $(1+t)^k$ sono rispettivamente $\frac{t^{i+1}}{2^{i+1}}$ e t^k, i coefficienti a_{i+1}, b_k di X_{i+1} e X_k nelle formule (26) e (27) e quindi basterà ammettere che siano successivamente soddisfatte le condizioni $\int_0^1 \varphi(z)\,dz = 0$, $\int_0^1 z\,\varphi(z)\,dz = 0, \ldots,$ $\int_0^1 z^k \varphi(z)\,dz = 0$, per dedurne successivamente $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \ldots$; e concluderemo dapprima che k non potrà superare il numero i, perchè se potesse essere $k > 1\; j + 1$, ne dedurremmo anche $a_{i+1} = 0$, il che è inammissibile.

Neppure potrà essere $k = i$, oppure $k = i - 1$, perchè per $k = i$ o per $k = i - 1$ si avrebbe $F(t) = a_{i+1} X_{i+1}$, o $F(t) = a_i X_i + a_{i+1} X_{i+1}$ e non rimarrebbero soddisfatte le condizioni $F(1) = 0$, $F(-1) = 0$; quindi il valore massimo che potrà avere k sarà $k = i - 2$ ed allora avremo:

$$F(t) = a_{i-1} X_{i-1} + a_i X_i + a_{i+1} X_{i+1};$$

e perchè possa aversi $F(1) = F(-1) = 0$, si vede subito che dovrà essere $a_i = 0$, $a_{i-1} = -a_{i+1}$, per modo che sarà $F(t) = a_{i+1}(X_{i+1} - X_{i-1})$ con a_{i+1} dato dalla prima delle formule (28); e allora i valori delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ risulteranno determinati in corrispondenza delle radici $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h, \ldots,$ β_{i+1}, diverse da -1 e $+1$, della equazione $X_{i+1} - X_{i-1} = 0$, o $\int_{-1}^t X_i\,dt = 0$, perchè, come è noto, si ha $X_{i+1} - X_i = (2i+1)\int_{-1}^t X_i\,dt$; e verrà precisamente $\alpha_h = \frac{1}{2} + \frac{\beta_h}{2}$.

Ed in questo caso il termine principale del solito errore sarà:

$$-\frac{\delta^{2i+1}}{\pi(2i)} y_\alpha^{(2i)} \int_0^1 z^{i-1} \varphi(z)\,dz =$$

$$= -\frac{\delta^{2i+1}}{2^i \pi(2i)} y_\alpha^{(2i)} a_{i+1} \int_{-1}^1 (1+t)^{i-1}(X_{i+1} - X_{i-1})\,dt$$

---

vengono ad essere rispettivamente

$$\frac{2i+3}{2^{i+1}} \int_{-1}^1 t^{i+1} X_{i+1}\,dt \quad \text{e} \quad \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 t^k X_k\,dt;$$

e quindi basta ricordare che dalla teoria delle funzioni X_n si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 X_m t^m\,dt = \frac{\pi(m)}{1.3.5\ldots(2m+1)}$$

per dedurne subito i valori scritti sopra di a_{i+1} e di b_k.

e facendo un'integrazione per parti col ricordare che

$$X'_{i+1} - X'_{i-1} = (2\,i + 1)\,X_i\,,$$

diverrà:

$$\frac{\delta^{2i+1}}{2^i\,\pi\,(2\,i)}\,y_\alpha^{(2i)}\,\frac{a_{i+1}}{i}\,(2\,i+1)\int_{-1}^{1}(1+t)^i\,X_i\,d\,t =$$

$$= \frac{\delta^{2i+1}}{2^i\,\pi\,(2\,i)}\,y_\alpha^{(2i)}\,\frac{a_{i+1}}{i}\,(2\,i+1)\int_{-1}^{1} t^i\,X_i\,d\,t\,,$$

potendo trascurare senz'altro gli altri termini che si otterrebbero sviluppando $(1+t)^i$ perchè, dando luogo ad intervalli tutti della forma $\int_{-1}^{1} t^m\,X_i\,d\,t$, con $m < i$, sono uguali a zero.

Ricordando quindi che si ha, come dicemmo in nota:

$$\int_{-1}^{1} t^i\,X_i\,d\,t = \frac{2\,\pi\,(i)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\,i+1)}$$

ed avendo riguardo alla prima delle formule (28), si vede che il detto termine principale dell'errore prende la forma

$$\frac{\delta^{2i+1}}{2^{2i}\,\pi\,(2\,i)}\left(\frac{\pi\,(i)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\,i+1)}\right)^2\frac{(i+1)\,(2\,i+1)}{i}\,y_\alpha^{(2i)}$$

od anche, con facilissimi calcoli:

$$\frac{\delta^{2i+1}}{\pi\,(2\,i)}\left(\frac{\pi\,(i)^2}{\pi\,(2\,i+1)}\right)^2\frac{(i+1)\,(2\,i+1)}{i}\,y_\alpha^{(2i)}\,;$$

od infine:

$$\delta^{2i+1}\,\frac{\pi\,(i)^4}{\pi\,(2\,i)^3}\,\frac{i+1}{i\,(2\,i+1)}\,y_\alpha^{(2i)}\,. \tag{29}$$

11. Quanto poi ai coefficienti r_h che figurano nella solita formula (6) del valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,d\,x$, si può osservare che per le (13) ora avremo:

$$r_h = r_{i-h} = \frac{1}{\varphi'(\alpha_h)}\int_0^1 \frac{\varphi(z)\,d\,z}{z-\alpha_h} = \frac{1}{2\,F'(\beta_h)}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)}{t-\beta_h}\,d\,t,$$

essendo ora $\beta_h = 2\,\alpha_h - 1$ la radice della $F(t) = 0$ o della $X_{i+1} - X_{i-1} = 0$, che corrisponde ad α_h; e poichè:

$$F'(t) = a_{i+1} \left\{ X'_{i+1}(t) - X'_{i-1}(t) \right\} = (2i+1)\, a_{i+1} X_i(t),$$

sarà:

$$r_h = r_{i-h} = \frac{1}{2(2i+1) X_i(\beta_h)} \int_{-1}^{1} \frac{X_{i+1}(t) - X_{i-1}(t)}{t - \beta_h}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2(2i+1) X_i(\beta_h)} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{X_{i+1}(t) - X_{i+1}(\beta_h)}{t-\beta_h}\, dt - \int_{-1}^{1} \frac{X_{i-1}(t) - X_{i-1}(\beta_h)}{t - \beta_h}\, dt \right\}$$

ovvero

$$r_h = r_{i-h} = \frac{1}{(2i+1) X_i(\beta_h)} \left\{ R_{i+1}(\beta_h) - R_{i-1}(\beta_h) \right\}$$

essendo

$$R_n(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{X_n(x) - X_n(y)}{x - y}\, dx$$

la nota funzione intera in y che figura nelle funzioni sferiche di 2.ª specie e per la quale si ha, come è noto:

$$R_n(y) = \frac{2n-1}{n} X_{n-1}(y) + \frac{2n-5}{3(n-1)} X_{n-3}(y) + \frac{2n-9}{5(n-2)} X_{n-5}(y) + \cdots$$

Per questa avremo dunque:

$$R_{i+1}(\beta_h) - R_{i-1}(\beta_h) = \frac{2i+1}{i+1} X_i(\beta_h) - (2i-3) \left\{ \frac{1}{i-1} - \frac{1}{3i} \right\} X_{i-2}(\beta_h) -$$

$$- (2i-7) \left\{ \frac{1}{3(i-2)} - \frac{1}{5(i-1)} \right\} X_{i-4}(\beta_h) + \cdots$$

$$= \frac{2i+1}{i+1} X_i(\beta_h) - \sum_m (2i - 4m + 1) \left\{ \frac{1}{(2m-1)(i-m)} - \right.$$

$$\left. \cdot - \frac{1}{(2m+1)(i-m+1)} \right\} X_{i-2m}(\beta_h) =$$

$$= \frac{2i+1}{i+1} X_i(\beta_h) -$$

$$- (2i+1) \sum_m \frac{2i - 4m + 1}{(2m+1)(2m-1)(i-m)(i-m+1)} X_{i-2m}(\beta_h),$$

e quindi infine:

$$\left.\begin{aligned} r_h = r_{i-h} &= \frac{1}{i+1} - \frac{2i-3}{3i(i-1)} \frac{X_{i-2}(\beta_h)}{X_i(\beta_h)} - \\ &\qquad - \frac{2i-7}{5.3.(i-1)(i-2)} \frac{X_{i-4}(\beta_h)}{X_i(\beta_h)} - \dots \\ &= \frac{1}{X_i(\beta_h)} \left\{ \frac{1}{i+1} X_i(\beta_h) - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_m \frac{2i-4m+1}{(2m+1)(2m-1)(i-m+1)(i-m)} X_{i-2m}(\beta_h) \right\}, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

intendendo che nella somma $\sum_m$ debbano tralasciarsi tutti i termini per i quali le X avrebbero indice negativo.

12. Così, supponendo $i = 2$, il termine principale (29) dell'errore viene ad essere

$$\frac{\delta^5}{\pi(4)\,\pi(5)} y_a^{IV},$$

e si ha $r_0 = r_2 = \frac{1}{6}$, $r_1 = \frac{2}{3}$, come appunto deve essere perchè si ricade sulla formula di Simpson.

Supponendo invece $i = 3$ e ricordando che:

$$X_3 = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t, \quad X_4 - X_2 = 7 \int_{-1}^{t} X_3 \, dt,$$

e quindi

$$X_4 - X_2 = \frac{7}{8} \left\{ 5(t^4 - 1) - 6(t^2 - 1) \right\} = \frac{7}{8} (t^2 - 1)(5t^2 - 1)$$

si vede che le radici della equazione $X_4 - X_2 = 0$ sono le quattro

$$\beta_0 = -1, \quad \beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta_3 = 1,$$

alle quali corrispondono per le α_0, α_1, α_2, α_3 i valori

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \alpha_3 = 1,$$

e quindi per le formule precedenti si ha:

$$r_0 = r_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}; \quad r_1 = r_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\,\frac{X_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{X_3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

e l'espressione (6) si riduce all'altra:

$$\frac{1}{12}\left\{ y_\alpha + 5\,(y_{\alpha+\alpha_1\delta} + y_{\alpha+\alpha_2\delta}) + y_{\alpha+\delta} \right\}, \tag{31}$$

che dà il valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,dx$ con un errore il cui termine principale è:

$$\delta^7 \cdot \frac{\pi\,(3)^4}{\pi\,(6)^3}\,\frac{4}{3\,.\,7}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} = \frac{\delta^7}{2^2\,.\,3^3\,.\,4^2\,.\,5^3\,.\,7}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} = \frac{2}{5}\,\frac{\delta^7}{\pi\,(5)\,\pi\,(7)}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}} =$$
$$= \frac{\delta^7}{1.512000}\,y_\alpha^{\mathrm{VI}}.$$

13. Osserviamo ora, che se, contentandoci di una approssimazione minore, invece di richiedere che siano zero tutti gli integrali $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$, $\int_0^1 z\,\varphi(z)\,dz, \ldots, \int_0^1 z^{i-2}\,\varphi(z)\,dz$, si richiede che lo siano soltanto i primi $k+1$, con $k < i-2$, allora nella (26) risulteranno zero soltanto i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_{i-1}$ corrisponderanno, mediante la relazione $\alpha_h = \frac{1+\beta_h}{2}$, alle radici $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ diverse da -1 e da 1 della equazione

$$a_{k+1}\,X_{k+1} + a_{k+2}\,X_{k+2} + \cdots + a_{i+1}\,X_{i+1} = 0,$$

nella quale a_{i+1} ha il valore dato dalla prima delle (28) e per i coefficienti devono sussistere le due relazioni

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{i+1} = 0,$$
$$a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \cdots \pm a_{i+1} = 0,$$

perchè l'equazione stessa abbia anche le radici 1 e -1, per modo che vi restano dei coefficienti arbitrarî.

14. Aggiungiamo infine che quando nelle nostre formule, invece della solita funzione $\varphi(z)$ si introduca la funzione $\psi(z)$ del § 7 e si richieda che siano zero i due integrali $\int_0^1 \psi(z)\,dz$, $\int_0^1 z\,\psi(z)\,dz$, ciò che porterà che nella (6) vengano a mancare r_0 ed r_1 ed insieme a questi due integrali siano successivamente zero anche alcuni degli altri $\int_0^1 z^2\,\psi(z)\,dz$, $\int_0^1 z^3\,\psi(z)\,dz, \ldots,$ $\int_0^1 z^k\,\psi(z)\,dz$, allora facendo ancora $z = \frac{1+t}{2}$ ed indicando con $F_1(t)$ la funzione $\psi\left(\frac{1+t}{2}\right)$ potremo porre questa funzione $F_1(t)$ sotto la forma:

$$F_1(t) = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_{i-1} X_{i-1},$$

essendo ora

$$c_{i-1} = \frac{\pi(i-1)}{2^{i-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2i-3)}$$

e quindi osservando che si avrà:

$$\int_0^1 z^k\,\psi(z)\,dz = \frac{1}{2^{k+1}} \int_0^1 (1+t)^k F_1(t)\,dt,$$

si vedrà subito che anche in questo caso k non potrà superare $i-2$ e per $k = i-2$ avremo:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{i-2} = 0, \quad F_1(t) = c_{i-1} X_{i-1}.$$

Ne segue che, quando debbano essere zero tutti gli integrali $\int_0^1 \psi(z)\,dz$, $\int_0^1 z\,\psi(z)\,dz$, $\int_0^1 z^2\,\psi(z)\,dz, \ldots,$ $\int_0^1 z^{i-2}\,\psi(z)\,dz$, le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ dovranno corrispondere, mediante la formula

$$\alpha_h = \frac{1+\beta_h}{2}$$

alle radici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}$ della equazione $X_{i-1} = 0$, ed allora insieme a $r_0 = r_i = 0$, avremo per le (17) del § 7:

$$r_h = \frac{1}{\psi'(\alpha_h)} \int_0^1 \frac{\psi(z)}{z-\alpha_h}\,dz = \frac{1}{2\,X'_{i-1}(\gamma_h)} \int_{-1}^1 \frac{X_{i-1}(t)}{t-\gamma_h}\,dt,$$

e poichè si ha:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{X_{i-1}(t)}{t-\gamma_h}\,d\,t=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{X_{i-1}(t)-X_{i-1}(\gamma_h)}{t-\gamma_h}\,d\,t=R_{i-1}(\gamma_h)=$$
$$=\frac{2\,i-3}{i-1}\,X_{i-2}(\gamma_h)+\frac{2\,i-7}{3\,(i-2)}\,X_{i-4}(\gamma_h)+\frac{2\,i-11}{5\,(i-3)}\,X_{i-6}(\gamma_h)+\cdots$$

si avrà:

$$r_h=r_{i-h}=\frac{1}{X'_{i-1}(\gamma_h)}\left\{\frac{2\,i-3}{i-1}\,X_{i-2}(\gamma_h)+\frac{2\,i-7}{3\,(i-2)}\,X_{i-4}(\gamma_4)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\,i-11}{5\,(i-3)}\,X_{i-6}(\gamma_h)+\cdots\right\}. \qquad (32)$$

E così la espressione (6) pel valore approssimato dell'integrale $\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} y\,d\,x$ si ridurrà ora alla seguente:

$$(r_1\,y_1+r_2\,y_2+\cdots+r_{i-1}\,y_{i-1})\,\delta,$$

dove le $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}$ verranno determinate da queste formule, col farvi $h=1, 2, \ldots, i-1$, essendo le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}$ le radici dell'equazione $X_{i-1}=0$ e $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ i valori di y nei punti $\alpha+\alpha_1\,\delta$, $\alpha+\alpha_2\,\delta, \ldots, \alpha+\alpha_{i-1}\,\delta$, le α_h essendo legate alle γ_h dalla formula $\alpha_h=\frac{1+\gamma_h}{2}$.

Ed il solito errore avrà per termine principale:

$$-\frac{\delta^{2i-1}}{\pi\,(2\,i-2)}\,y_\alpha^{(2i-2)}\int_0^1 z^{i-1}\,\psi(z)\,d\,z=-$$
$$-\frac{\delta^{2i-1}}{2^i\,\pi\,(2\,i-2)}.y_\alpha^{(2i-2)}\,c_{i-1}\int_{-1}^{1}(1+t)^{i-1}\,X_{i-1}(t)\,d\,t=-$$
$$-\frac{\delta^{2i-2}}{2^i\,\pi\,(2\,i-2)}\,y_\alpha^{(2i-2)}\,c_{i-1}\int_{-1}^{1}t^{i-1}\,X_{i-1}\,d\,t,$$

e tenuto conto del valore di c_{i-1} e di quello dell'integrale $\int_{-1}^{1} t^{i-1}\,X_{i-1}\,d\,t$, questo termine potrà scriversi sotto la forma

$$-\frac{\delta^{2i-1}}{2^{2i-2}\,\pi\,(2\,i-2)}\,y_\alpha^{(2i-2)}\left\{\frac{\pi\,(i-1)}{1.3.5\ldots(2\,i-3)}\right\}^2\frac{1}{2\,i-1}=-$$
$$-\frac{\delta^{2i-1}}{2\,i-1}\,\frac{\pi\,(i-1)^4}{\pi\,(2\,i-2)^3}\,y_\alpha^{(2i-2)}.$$

15. Per $i = 3$, osservando che

$$X_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}, \quad X'_2 = 3t, \text{ e } \gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

si avrà:

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2},$$

e l'espressione (6) si ridurrà all'altra semplicissima $\frac{1}{2}\left(y_{\alpha+\alpha_1\delta} + y_{\alpha+\alpha_2\delta}\right)$ per mezzo della quale si avrà il valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta} y\,dx$ con un errore il cui termine principale sarà

$$-\frac{2}{3} \frac{\delta^6}{\pi(4)\,\pi(5)} y_\alpha^{\text{VI}},$$

che è i $\frac{2}{3}$ di quello che si ha colla formula di Simpson.

Per $i = 4$, siccome

$$X_0 = 1, \quad X_1 = t, \quad X_2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2},$$

$$X_3 = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t = \frac{t}{2}(5t^2 - 3), \quad X'_3 = \frac{15}{2} t^2 - \frac{3}{2},$$

sarà

$$\gamma_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

e per le formule precedenti (32) sarà:

$$r_1 = r_3 = \frac{1}{3}\left\{\frac{5}{3}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\right\} = \frac{5}{18},$$

$$r_2 = -\frac{2}{3}\left\{-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right\} = \frac{8}{18},$$

e la formula (6) si riduce all'altra:

$$\frac{1}{18}\left\{5(y_1 + y_2) + 8y_2\right\},$$

essendo y_1, y_2, y_3 i valori di y nei punti

$$\alpha + \alpha_1 \delta, \quad \alpha + \alpha_2 \delta, \quad \alpha + \alpha_3 \delta,$$

con

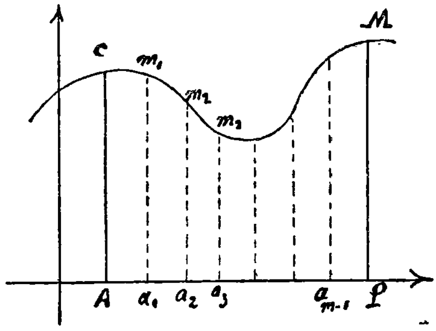
$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{5}}}{2};$$

ed il solito errore avrà per termine principale:

$$\frac{-\delta^7}{7} \frac{\pi(3)^4}{\pi(6)^3} y_\alpha^{(VI)} = -\frac{3}{10} \frac{\delta^7}{\pi(5)\pi(7)} y_\alpha^{(VI)}.$$

Calcolo approssimato delle aree

1. Si abbia una curva posta tutta al di sopra dell'asse delle x e proponiamoci di trovare alcune formole che diano un valore approssimato della solita area compresa tra due ordinate AC e PM, la curva e l'asse delle x.



1.° Si scomponga la distanza AP in m parti uguali, ciascuna a $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2n}$ (essendo $OA = \alpha$, $OP = \beta$) coi punti A, a_1, $a_2, \ldots, a_{m-1}$, P e si indichino con y_α, y_1, $y_2, \ldots, y_{m-1}$, y_β le ordinate della curva corrispondenti a questi punti.

L'area A, come è noto, sarà data dall'integrale $\int_\alpha^\beta y\,dx$ ed un primo suo valore approssimato sarà dato dalla formula:

$$A_1 = \delta(y_\alpha + y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}) = (\beta - \alpha)\frac{\Sigma y_s}{m}, \qquad (1)$$

come già trovammo nella prima lezione del calcolo integrale; e questo può dirsi il valore *approssimato della media*.

2.° Dopo aver diviso AP in m parti si divida ciascuna parte per metà, formando così intervalli uguali ciascuno a $\frac{\delta}{2}$.

Intendendo di calcolare l'integrale $\int_\alpha^\beta y\,dx$ col mezzo di questa nuova divisione colla solita somma $\Sigma\,\delta_s f_s$, cioè colle δ_s uguali ciascuna a $\frac{\delta}{2}$, si potrà prendere per f_s nel 1° intervallo y_α, nel 2° e nel 3° il valore y_1 di y nel punto a_1 comune ai due intervalli; nel 4° e nel 5° il valore y_2 di y nel punto a_2 comune ai due intervalli, nel 6° e 7° y_3;... e così si avrà:

$$\Sigma\,\delta_s f_s = \frac{\delta}{2}\left\{y_\alpha + 2\,y_1 + 2\,y_2 + \cdots + 2\,y_{m-1} + y_\beta\right\},$$

e quindi un secondo valore approssimato A_2 dell'area sarà

$$A_2 = \frac{\delta}{2}\left\{y_\alpha + 2\,y_1 + 2\,y_2 + \cdots + 2\,y_{m-1} + y_\beta\right\}, \tag{2}$$

e poichè questa formula corrisponde precisamente alla somma dei trapezî che si ottengono tirando le corde $C m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$,... si usa di dirla *la formula dei trapezî o di Bezout* che la dette.

3.° Supponendo di dividere l'intervallo AP in un numero pari $2\,n$ di parti ciascuna uguale a δ, nella solita somma $\Sigma\,\delta_s f_s$ prendiamo per f_1 ed f_2 il valore y_1 di y nel punto a_1 comune al 1° e 2° intervallo, per f_3 ed f_4 il valore y_3 di y nel punto a_3 comune al 3° e 4° intervallo, ecc....; si vede subito che si avrà:

$$\Sigma\,\delta_s f_s = 2\,\delta\left\{y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}\right\},$$

e quindi un altro valore approssimato A_3 della nostra area sarà:

$$A_3 = 2\,\delta\left\{y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}\right\}, \tag{3}$$

e questo si usa chiamarlo il valore approssimato col metodo delle *tangenti*, perchè può considerarsi come la somma delle aree dei trapezî che si ottengono conducendo le tangenti alla curva nei punti m_1, m_3,..., corrispondenti alle ordinate dei punti medi tra C ed m_2, tra m_2 ed m_4, ecc.

4.° Supponendo ancora che la divisione dell'intervallo AP si faccia in $2\,n$ parti ciascuna uguale a δ, ognuna di queste parti si suddivida in p parti uguali a $\frac{\delta}{p}$.

Preso allora ad es. il primo intervallo doppio 2δ, cioè quello da A ad a_2 ed indicati con $a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_p (= a_1)$ i punti della suddivisione dell'intervallo da A ad a_1, e con $a''_1, a''_2, \dots, a''_{q+1}, \dots, a''_{p-1}, a''_p (= a_2)$ (con $p \geqq q+1$) quelli della suddivisione dell'intervallo da a_1 ad a_2, potremo intendere fatta nell'intervallo da A ad a_2 una divisione degli intervalli da A ad a'_1, da a'_1 ad a''_{q+1} e da a''_{q+1} ad a_2 e per la parte della somma $\sum \delta_s f_s$ corrispondente a questa nuova divisione potremo prendere

$$(a'_1 - \alpha)\, y_\alpha + (a''_{q+1} - a'_1)\, y_1 + (a_2 - a''_{q+1})\, y_2$$

ovvero

$$\frac{\delta}{p} \left\{ y_\alpha + (p+q)\, y_1 + (p-q-1)\, y_2 \right\}.$$

Lo stesso potendo farsi per ogni divisione doppia successiva, si vede subito che per la intera somma $\sum \delta_s f_s$, o ciò che è lo stesso, per un altro valore approssimato A_4 dell'integrale potremo prendere:

$$\left.\begin{aligned} A_4 = \frac{\delta}{p} \Big\{ & y_\alpha + (p+q)(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ & + (p-q)(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + (p-q-1)\, y_\beta \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove p è un numero intero qualunque.

Supponendo $p = 2$, $q = 1$, si ha la formula:

$$A'_4 = \frac{\delta}{2} \left\{ y_\alpha + 3(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}) + (y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) \right\}, \tag{5}$$

e supponendo invece $p = 3$, $q = 1$, si ha

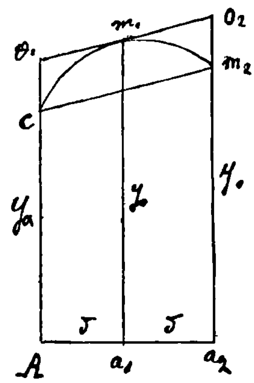
$$\left.\begin{aligned} A''_4 = \frac{\delta}{3} \Big\{ & y_\alpha + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ & + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + y_\beta \Big\}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

per $p = 4$, $q = 2$ si ha invece

$$\left.\begin{aligned} A'''_4 = \frac{\delta}{4} \Big\{ & y_\alpha + 6(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ & + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2}) + y_\beta \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

La (6) è conosciuta sotto il nome di *formula di Simpson*, sebbene fosse data prima da Cavalieri e nella pratica si applica spessissimo.

Questa formola di Simpson si troverebbe anche sostituendo alle porzioni di curva da C ad m_2, da m_2 ad m_4, da m_4 ad $m_6, \ldots$ gli archi delle parabole (che sono sempre determinate) coi diametri relativi alle corde $A m_2$, $m_2 m_4$, $m_4 m_6, \ldots$ paralleli all'asse delle y e prendendo l'area della nuova linea così formata.



Sia infatti $C s_1 m_1 s_2 m_2$ la parabola che ha per diametro $m_1 a_1$; l'area del segmento parabolico $C s_1 m_1 s_2 m_2$ sarà i $\frac{2}{3}$ del parallelogramma $C \theta_1 \theta_2 m_2$, cioè:

$$\frac{2}{3} \delta_1 \left(m_1 a_1 - \frac{y_\alpha + y_2}{2} \right) = \frac{2}{3} \delta_1 \left(y_1 - \frac{y_\alpha + y_2}{2} \right).$$

L'area del trapezio $C m_2 a_2 A$ è data da

$$2 \delta \frac{y_2 + y_\alpha}{2} = \delta_1 \frac{y_2 + y_\alpha}{2};$$

l'area parabolica è quindi:

$$\frac{1}{3} \delta_1 \frac{y_2 + y_\alpha}{2} + \frac{2}{3} \delta_1 y_1 = \frac{\delta_1}{6} \left\{ y_\alpha + 4 y_1 + y_2 \right\}.$$

Essendo $\delta_1 = 2 \delta$, perchè $\delta_1 = A a_2$, torna

$$\frac{\delta}{3} \left\{ y_\alpha + 4 y_1 + y_2 \right\}.$$

2. Resta ora a trovarsi quale grado di approssimazione nella determinazione delle aree si ha con queste formule, e per questo procederemo come segue:

Supposto che $y = f(x)$ sia l'equazione della nostra curva, la solita area di essa fra α ed x sarà l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\, dx$, che indicheremo con $\varphi(x)$; e quindi, fermandoci dapprima a considerare le aree corrispondenti ad una parte δ o a due parti 2δ, quando l'intervallo da α a β o da α ad x si divide in parti ciascuna uguale a δ, si vede che le aree stesse saranno rispettivamente:

$$\varphi(\alpha + \delta) - \varphi(\alpha) = \delta \varphi'(\alpha) + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} \varphi''(\alpha) + \frac{\delta^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \frac{\delta^4}{4!} \varphi^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots =$$
$$= \delta f(\alpha) + \frac{\delta^2}{2} f'(\alpha) + \frac{\delta^3}{6} f''(\alpha) + \frac{\delta^4}{24} f'''(\alpha) + \cdots$$

$$\varphi(\alpha + 2\delta) - \varphi(\alpha) = 2 \delta f(\alpha) + 2 \delta^2 f'(\alpha) + \frac{4}{3} \delta^3 f''(\alpha) + \frac{2}{3} \delta^4 f'''(\alpha) + \cdots,$$

ed a queste formule potremo anche sostituire le solite formule di TAYLOR abbreviate.

Evidentemente dunque, quando ci si valga della formula (1) per avere il valore approssimato della nostra area, si avrà un errore ε_1 che non supererà $\frac{m}{2}\delta^2 |f'|$ o $\frac{\beta-\alpha}{2}|f'|\delta$, essendo $|f'|$ il massimo valore assoluto della derivata di $f(x)$ tra α e β.

Valendosi invece della formula (2) si osserverà che l'area approssimata corrispondente al primo intervallo δ viene data da $(y_\alpha + y_1)\frac{\delta}{2}$ cioè da $\frac{\delta}{2}\left\{ f(\alpha) + f(\alpha+\delta) \right\}$ od anche da

$$\delta f(\alpha) + \frac{\delta^2}{2} f'(\alpha) + \frac{\delta^3}{4} f''(\alpha) + \frac{\delta^4}{12} f'''(\alpha) + \cdots$$

e l'errore per questa parte dell'area viene evidentemente ad essere

$$-\frac{1}{12}\delta^3 f''(\alpha) - \frac{\delta^4}{12} f'''(\alpha) - \cdots$$

e fermandoci al 3° ordine, l'errore ε_2 per l'intera area viene ad essere minore di $\frac{\beta-\alpha}{12}|f''|\delta^2$, essendo $|f''|$ il massimo valore assoluto della derivata seconda di $f(x)$ tra α e β.

Invece per la formula (3) siccome pel primo intervallo doppio 2δ l'area approssimata è data da $2\delta y_1$ o da

$$2\delta f(\alpha+\delta) = 2\delta f(\alpha) + 2\delta^2 f'(\alpha) + \delta^3 f''(\alpha) + \cdots,$$

mentre l'area esatta è $\varphi(\alpha + 2\delta) - \varphi(\alpha)$, l'errore ε_3 non supererà $2n\delta^2|f'|$, o $(\beta-\alpha)\delta|f'|$, essendo ancora $|f'|$ il massimo valore assoluto della derivata di $f(\alpha)$ tra φ e β (*).

(*) Qui è occorsa nel testo una leggera svista. Siccome

$$\left[\varphi(\alpha+2\delta) - \varphi(\alpha)\right] - 2\delta f(\alpha+\delta) = \frac{1}{3}\delta^3 f''(\alpha) + \ldots$$

e quindi

$$\varepsilon_3 < 2n \cdot \frac{\delta^3}{3}|f''| = \frac{1}{3}\delta^2(\beta-\alpha)|f''|,$$

si deve parlare del massimo valore assoluto della derivata *seconda*, e modificare il coefficiente come è scritto sopra (N.).

Infine, per la formula (4), si osserverà che nel primo intervallo doppio $2\,\delta$ l'area approssimata viene data da:

$$\frac{\delta}{p}\left\{ f(\alpha) + (p+q)\, f(\alpha+\delta) + (p-q-1)\, f(\alpha + 2\,\delta) \right\},$$

e quindi da:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{p}\left\{ f(\alpha) + (p+q)\left[f(\alpha) + \delta\, f'(\alpha) + \frac{\delta^2}{2} f''(\alpha) + \right.\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\delta^3}{6} f'''(\alpha) + \frac{\delta^4}{24} f^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots \right] +\\
&\qquad\qquad + (p-q-1)\left[f(\alpha) + 2\,\delta\, f'(\alpha) + 2\,\delta^2 f''(\alpha) + \right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. + \frac{4}{3}\,\delta^3 f'''(\alpha) + \frac{2}{3}\,\delta^4 f^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots \right]\right\} =\\
&= \frac{\delta}{p}\left\{ 2\,p\, f(\alpha) + (3\,p - q - 2)\,\delta\, f'(\alpha) + \right.\\
&\qquad + \frac{5\,p - 3\,q - 4}{2}\,\delta^2 f''(\alpha)\left(\frac{3}{2}\,p - \frac{7}{6}\,q - \frac{4}{3}\right)\delta^3 f'''(\alpha) +\\
&\qquad\left. + \left(\frac{17}{24}\,p - \frac{15}{24}\,q - \frac{2}{3}\right)\delta^4 f^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots \right\} =\\
&= 2\,\delta\, f(\alpha) + \left(3 - \frac{q+2}{p}\right)\delta^2 f'(\alpha) + \left(\frac{5}{2} - \frac{3\,q+4}{2\,p}\right)\delta^3 f''(\alpha) +\\
&\qquad + \left(\frac{3}{2} - \frac{7\,q+8}{6\,p}\right)\delta^3 f'''(\alpha) + \left(\frac{17}{24} - \frac{15\,q+16}{24\,p}\right)\delta^4 f^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots
\end{aligned}$$

e l'errore dell'area corrispondente a questo intervallo $\varphi(\alpha + 2\,\delta) - \varphi(\alpha)$ per la formula scritta sopra sarà:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{q+2}{p} - 1\right)\delta^2 f'(\alpha) + \left(\frac{3\,q+4}{2\,p} - \frac{7}{6}\right)\delta^3 f''(\alpha) + \left(\frac{7\,q+8}{6\,p} - \frac{5}{6}\right)\delta^4 f'''(\alpha) +\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{15\,q+16}{24\,p} - \frac{53}{120}\right)\delta^5 f^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \cdots
\end{aligned}$$

e sull'area totale si avrà un errore che non supererà la somma di questi errori.

Nel caso $p = q + 2$ l'errore sulla parte dell'area corrispondente all'intervallo doppio 2δ è dunque

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p}\right)\delta^3 f''(\alpha) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p}\right)\delta^4 f'''(\alpha) + \left(\frac{11}{60} - \frac{7}{12p}\right)\delta^5 f^{IV}(\alpha) + \cdots,$$

e incomincia col 3° ordine e nell'area intera col secondo; ma per $p = 3$ (e quindi $q = 1$), cioè nel caso della formula di Simpson, il primo termine dell'errore sulla intera area incomincia solo al IV° ordine ed è in valore assoluto minore di

$$\frac{n\delta^5}{90} f^{IV} \quad \text{o} \quad \frac{\beta - \alpha}{180}\delta^4 |f^{IV}|,$$

essendo $|f^{IV}|$ il massimo valore assoluto di $f^{IV}(x)$ tra α e β.

[Se si tratta di una pàrte sola è $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$ e l'errore è minore di un valore assoluto di $\frac{(\beta-\alpha)^5}{180 \cdot 16} f^{IV} = \frac{(\beta-\alpha)^5}{4!\,5!} |f^{IV}|$ come trova Peano con altro processo].

È questa la ragione per la quale si usa spesso la formula di Simpson pel calcolo delle aree.

Nel caso poi di $p = 4$, $q = 2$, si ottiene sull'area corrispondente all'intervallo doppio 2δ un errore $= \frac{1}{12}\delta^3 f''(\alpha) + \frac{1}{12}\delta^4 f'''(\alpha) + \cdots$ e per l'intera area il primo termine dell'errore sarà numericamente inferiore a

$$\frac{n}{12}\delta^2 f'' = \frac{\beta - \alpha}{24}\delta^2 f'',$$

essendo al solito f'' il massimo valore assoluto di $f''(x)$ tra α e β.

Si intende che queste formole, oltrechè pel calcolo approssimato delle aree, servono anche per quello degli integrali definiti.

Per maggiori sviluppi vedi il Cap. XIV del *Calcolo Integrale* e segnatamente i risultati contenuti al § 220 a pag. 331 e segg.

Sopra la derivazione dei canali.

(*Memoria della Dott.ª* Giuseppina Banzi, *a Pavia.*)

Il prof. Cisotti in una Memoria (*) si è occupato del seguente problema: Dato un canale rettilineo (*canale principale*) a sponde verticali e fondo orizzontale, da una delle sue sponde, ad es. dalla sinistra, si stacca un secondo canale pure rettilineo (*canale derivato*). Si tratta di studiare la ripartizione delle acque nei due canali; il prof. Cisotti determina una notevole formula che risolve il problema su accennato.

Al medesimo risultato è pervenuto, in seguito, il dott. Boverio, trattando (**) lo stesso problema con procedimento diverso da quello tenuto dal prof. Cisotti.

Nelle Memorie sopra citate, il problema è trattato in due dimensioni, e questa ipotesi, unita all'altra che il moto avvenga senza vortici, consente l'impiego della rappresentazione conforme; si suppone inoltre che il movimento sia ovunque stazionario, ed infine che il liquido (fluido incomprimibile, omogeneo, la cui densità costante si assume uguale ad 1) non solo bagni, ma scorra effettivamente lungo le pareti, tanto del canale principale, quanto di quello derivato. In modo preciso si suppone che il movimento avvenga in questo modo: tra i vari filetti, quello che proviene dall'infinito a monte del canale principale e va a battere contro il punto P_2 (vedi fig. 1) — *filone spartiacque* — rimane ivi momentaneamente arrestato, indi si scinde in due filetti, che scorrendo l'uno lungo la parete ϖ_2 del canale principale, l'altro lungo la sponda μ_2 del canale derivato, si protendono indefinitamente a valle dei medesimi; il filetto che proviene dall'infinito a monte scorrendo

(*) U. Cisotti, *Sopra la derivazione dei canali* [Zeitschrift für Mathematik und Physik, 59. Band (1911), 2. Heft, pp. 137-151].

(**) E. Boverio, *Sopra la derivazione dei canali* [Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1917), pp. 124-134].

lungo la parete ϖ_1 arrivato in P_1 cambia bruscamente direzione per scorrere poi fino a valle lungo la parete μ_1 del canale derivato; infine il filetto che proviene a monte del canale principale scorrendo lungo ϖ, continua a scorrere fino a valle lungo la parete stessa. La massa d'acqua che trovasi tra il filone spartiacque e $\varpi_1 + \mu_1$ va pertanto a formare la corrente del canale derivato e la massa d'acqua rimanente continua a scorrere nel canale principale.

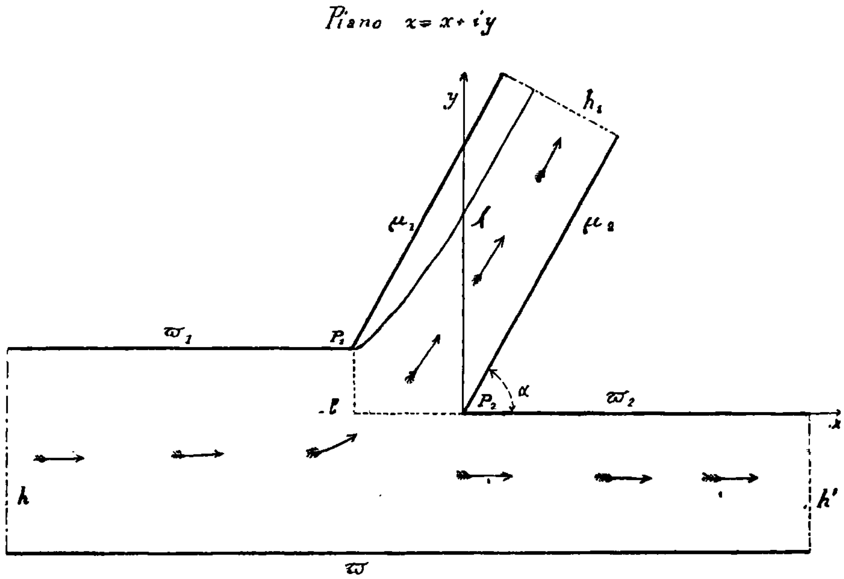


Fig. 1.

Notoriamente in un brusco cambiamento di direzione, quando l'angolo supera i 180°, la velocità diviene infinita. Ciò accade, nelle ipotesi ammesse, nel punto P_1. In P_2 invece, punto di arresto del filone, la velocità si annulla.

Nel campo del moto P_1 è l'unico punto in cui la velocità diviene infinita e ciò implica che per l'interpretazione fisica del fenomeno, bisogna escludere un intorno del punto stesso. Ci si può chiedere se questa difficoltà, che del resto ha un interesse puramente locale, può essere rimossa. In realtà l'esperienza mostra che in un brusco cambiamento di direzione, in un canale, o in un tubo, il liquido non segue immediatamente la parete rigida, ma se ne scosta, interponendo fra la parete rigida e la massa in movimento, una regione di liquido che non partecipa al movimento della massa stessa.

Partendo da questa osservazione, io mi son proposta di riprendere il problema trattato dal prof. CISOTTI, introducendo la seguente ipotesi: Il filetto liquido, che proviene dall'infinito a monte del canale principale, scorrendo lungo la parete ϖ_1 e arriva in P_1, non cambia bruscamente direzione per seguire la parete μ_1 (come nello studio del prof. CISOTTI), ma staccandosi da P_1 va a formare una linea libera λ che si estende indefinitamente a valle del canale derivato, con direzione asintotica parallela alle sponde del canale stesso. Il liquido nel canale derivato continua a scorrere tra λ e μ_2, mentre tra λ e μ_1 il liquido rimane in quiete (regione di *acqua morta*).

Il problema, naturalmente, per la presenza della linea libera λ, si complica alquanto, anche per il fatto che la linea libera stessa ha, a priori, una forma incognita. Tuttavia, applicando metodi, ormai ben noti, in analoghi tipi di questioni, si arriva a ridurre il problema alle quadrature, nonchè a stabilire una notevole formola generale fra le costanti del problema.

Per maggior generalità suppongo che il canale principale abbia a valle una larghezza diversa che a monte.

Ho approfondito infine i casi particolari in cui l'angolo di derivazione che il canale principale forma col derivato, considerati ciascuno nel senso delle rispettive correnti, è di: 45°, 60°, 90°.

§ 1. — POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Come sistema di riferimento, assumiamo nel piano del moto, una coppia di assi cartesiani ortogonale che abbia: origine in P_2, l'asse x coincidente con la sponda ϖ_2 e diretto nel senso della corrente e l'asse y diretto verso il canale derivato.

Indichiamo poi con:

α l'angolo di derivazione,
h la larghezza del canale principale a monte,
h' » » » » » » valle,
h_1 » » » » derivato,
$-l$ l'ascissa del punto P_1,
q la portata del canale principale a monte,
q' » » » » » » valle,
q_1 » » » » derivato,

c il valore della velocità dei filetti liquidi all'infinito a monte del canale principale,

c' il valore della velocità dei filetti liquidi all'infinito a valle del canale principale,

c_1 il valore della velocità dei filetti liquidi all'infinito del canale derivato.

Con ciò risultano evidenti le seguenti relazioni:

$$q = c\,h \qquad q' = c'\,h' \qquad q = q' + q_1 \tag{1}$$

Equazioni indefinite. — Chiamiamo ora u e v le componenti secondo gli assi della velocità di un generico punto P. Per essere il moto irrotazionale esisterà un potenziale di velocità $\varphi\,(x, y)$ ed una funzione di corrente $\psi\,(x, y)$, funzioni armoniche, coniugate, regolari nel campo limitato dalle linee ϖ, $\varpi_2 + \mu_2$, $\varpi_1 + \lambda$; definite ciascuna, a meno di una inessenziale costante additiva, dalle due equazioni ai differenziali totali:

$$d\,\varphi = u\,d\,x + v\,d\,y; \qquad d\,\psi = -\,v\,d\,x + u\,d\,y. \tag{2}$$

Introduciamo la variabile complessa:

$$z = x + i\,y;$$

allora posto

$$\omega = u - i\,v; \qquad f = \varphi + i\,\psi; \tag{3}$$

queste per le (2), risultano funzioni di z e le (2) stesse si riassumono nell'unica equazione, caratteristica dei moti piani irrotazionali:

$$\frac{d\,f}{d\,z} = w. \tag{4}$$

Sia inoltre p il valore della pressione di una generica particella fluida.

Le tre equazioni idrodinamiche di Eulero, in assenza di forze esterne, si compendiano nella relazione:

$$p = -\frac{1}{2}\,|\,w\,|^2 + \text{cost.} \tag{5}$$

D'altra parte, poichè per ipotesi nella regione compresa tra λ e μ_1 il liquido è in quiete, ivi la pressione ha valore costante.

Chiamando quindi con p_1 questo valore, per la continuità della pressione attraverso λ, in tutti i punti di questa è:

$$p = p_1$$

e la costante arbitraria del secondo membro della (5) risulta:

$$p_1 + \frac{1}{2} w^2.$$

Siccome poi il valore della velocità all'infinito del canale derivato si è chiamato c_1 deve essere:

$$w = c_1, \qquad \text{su } \lambda; \tag{6}$$

con ciò l'espressione che dà la pressione diviene

$$p = p_1 + \frac{1}{2} (c_1^2 - w^2). \tag{7}$$

Questa relazione unitamente alla (4) esaurisce le equazioni indefinite del moto in questione.

Condizioni ai limiti. — Si tratta di esprimere che i tre rami del contorno del campo: ϖ, $\varpi_1 + \lambda$, $\varpi_2 + \mu_2$ sono linee di flusso: ciò viene, come è noto, tradotto analiticamente dal fatto che su ciascuna di queste linee la funzione ψ deve mantenere valore costante; e poichè vi è flusso tra linea e linea, questa costante è diversa su ciascuno dei tre rami stessi.

Perciò se la costante additiva a meno della quale (mediante la seconda delle (2)) è definita la ψ, si assume in modo che sia $\psi = 0$ nel punto di coordinate 0, $-h'$, si ha intanto:

$$\psi = 0, \qquad \text{su } \varpi. \tag{8}$$

Inoltre, avendo chiamato q e q_1 le portate a monte e a valle del canale principale, poichè la portata tra due linee di flusso è data dalla differenza fra i corrispondenti valori di ψ, si ha pure:

$$\left.\begin{array}{lll} \psi = q, & \text{sopra} & \varpi_1 + \lambda, \\ \psi = q', & \text{»} & \varpi_2 + \mu_2. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Le (6), (8) e (9) esauriscono le condizioni al contorno del campo del moto.

Concludendo, il problema considerato è ridotto alla determinazione di una linea λ e di una funzione di variabile complessa $f = \varphi + i\psi$, regolare al finito, tale che la sua parte immaginaria soddisfi alle (8), (9) e tale che la sua derivata prima rispetto z (funzione uniforme nel campo del moto, finita e continua anche sul contorno ad eccezione del punto P_2) sopra la incognita linea λ soddisfi alla (6).

§ 2. — Introduzione della funzione ausiliaria $\omega(z)$.

Poniamo col Levi-Civita (*)

$$w = c_1 e^{-i\omega} \tag{10}$$

colla determinazione $\omega = 0$, per $w = c_1$.

Allora, posto

$$\omega = \vartheta + i\tau, \tag{11}$$

si ha:

$$|w| = c_1 e^{\tau}, \tag{12}$$

$$\frac{w}{|w|} = e^{-i\vartheta}. \tag{13}$$

La prima di queste dice che τ è il logaritmo neperiano del rapporto a c_1 della velocità in un generico punto z del campo del moto; la seconda che ϑ è l'angolo che la direzione della velocità forma con la direzione positiva dell'asse delle x; esso va contato fra $-\pi$ e π, positivamente nel verso $x \to y$ partendo dalla direzione positiva dell'asse delle x.

Dalle (12) e (6) e dalla (13), tenuto conto delle ipotesi fatte, risulta:

$$\left.\begin{array}{lll} \tau = 0, & \text{sopra} & \lambda, \\ \vartheta = 0, & \text{»} & \varpi, \ \varpi_1, \ \varpi_2, \\ \vartheta = \alpha, & \text{»} & \mu_2. \end{array}\right\} \tag{14}$$

(*) Levi-Civita, *Scia e leggi di resistenza* [Circolo matematico di Palermo, t. XXIII (1907), pp. 1-37].

§ 3. — Ricorso ad una nuova variabile.

Essendo il campo del moto semplicemente connesso, esso si può rappresentare conformemente su di un'altra area semplicemente connessa di un altro piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$; per es. nel semicerchio

$$|\zeta| \leq 1 \qquad \eta \geq 0.$$

La relazione tra z e ζ che permette tale rappresentazione è a priori incognita, ma pel momento basta sfruttarne l'esistenza. Allora le funzioni f e ω considerate nei §§ precedenti si possono senz'altro riferire alla nuova variabile ζ nell'accennato semicerchio. Vedremo tra poco che le condizioni cui debbono soddisfare f e ω nel piano z trasportate nel semicerchio le determinano.

Siccome poi dalla (4), tenuto conto della (10), risulta:

$$\frac{df}{dz} = c_1 e^{-i\omega}, \tag{15}$$

da cui:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{e^{i\omega}}{c_1} \frac{df}{d\zeta}; \tag{16}$$

una volta note f e ω nel piano ζ, questa relazione mediante una quadratura conduce alla cercata relazione tra z e ζ.

Cerchiamo dunque di eseguire l'accennato cambiamento di variabile in modo che il campo del moto venga rappresentato dal detto semicerchio nel piano ζ, così che le porzioni di contorno del piano z costituite da pareti rigide abbiano per corrispondenti degli archi della semicirconferenza e la linea libera λ venga rappresentata dal diametro.

Precisamente (v. fig. 2) in modo che ai punti P_1 P_2 e al punto all'infinito

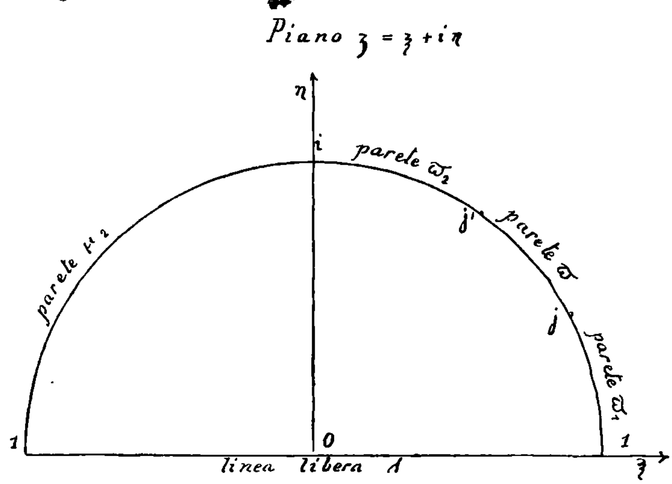


Fig. 2.

del canale derivato corrispondano rispettivamente i punti $1, i, -1$ della semicirconferenza, poichè, come è noto, è sempre possibile fra due aree in corrispondenza conforme far corrispondere a tre punti del contorno dell'una, tre punti del contorno dell'altra arbitrariamente prefissati. Ai punti all'infinito a monte e a valle del canale principale dovranno corrispondere due punti j, j' della semicirconferenza compresi tra 1 e i.

Pertanto: la parete ϖ_1 risulta rappresentata dall'arco $1j$; la parete ϖ dall'arco jj'; la parete ϖ_2 dall'arco $j'i$; la parete μ_2 del canale derivato dall'arco $i-1$, e infine il pelo libero λ dal diametro $-1\ 1$.

Ciò premesso, riferiamo le funzioni $f = \varphi + i\psi$ e $\omega = \vartheta + i\tau$ al semicerchio detto.

Per la f, il trasporto delle condizioni (8) e (9) implica che si debba avere:

$$\left.\begin{array}{lll} \psi = q, & \text{sul diametro } 1, -1 \text{ e sull'arco } 1\,j, \\ \psi = 0, & \text{sull'arco } j\,j', \\ \psi = q', & \text{»} \quad j' - 1. \end{array}\right\} \tag{17}$$

In tal modo la funzione ψ risulta completamente determinata e, a meno di una inessenziale costante additiva, lo è pure la coniugata φ e di conseguenza la f.

Quanto alla ω, per le (14), si deve avere:

$$\left.\begin{array}{lll} \tau = 0, & \text{sul diametro } 1 - 1, \\ \vartheta = 0, & \text{sull'arco } 1\,i, \\ \vartheta = \alpha, & \text{»} \quad i - 1. \end{array}\right\} \tag{18}$$

E anche la ω risulta, in tal modo, determinata.

§ 4. — Le funzioni $f(\zeta)$ e $\omega(\zeta)$.

La determinazione delle funzioni $f(\zeta)$ e $\omega(\zeta)$ rientra in un campo ormai ben noto di ricerche (*) (**).

(*) T. Boggio, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* [Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 47mo, 1911-12].

(**) U. Cisotti, *Vene fluenti* [Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, t. XXV, I sem., 1908, pp. 22-26].

Esse sono:

$$f(\zeta) = -\frac{q}{\pi}\log\frac{(1+\zeta)^2}{(1-\zeta j)(1-\zeta \bar{j})} + \frac{q'}{\pi}\log\frac{(1+\zeta)^2}{(1-\zeta j')(1-\zeta \bar{j}')} + i q \tag{19}$$

dove $\bar{j}$, $\bar{j}'$ sono i valori coniugati di j, j', e:

$$\omega(\zeta) = i\frac{\alpha}{\pi}\log\frac{\zeta - i}{\zeta + i} - \frac{\alpha}{2}, \tag{20}$$

con la determinazione $\omega = 0$ per $\zeta = 1$.

§ 5. — Relazione fra ζ e z.

Dalla (19) derivando si ha:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} = &-\frac{q}{\pi}\left(\frac{j}{1-\zeta j} + \frac{\bar{j}}{1-\zeta \bar{j}} + \frac{2}{1+\zeta}\right) + \\ &+ \frac{q'}{\pi}\left(\frac{j'}{1-\zeta j'} + \frac{\bar{j}'}{1-\zeta \bar{j}'} + \frac{2}{1+\zeta}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

e dalla (20) si deduce:

$$e^{\omega} = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}};$$

perciò dalla (16) integrando, e notando che $j \cdot \bar{j} = 1$, $j' \cdot \bar{j}' = 1$ e che al punto $\zeta = i$ corrisponde $z = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} z = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{c \cdot \pi}\Bigg[&-q\int_i^{\zeta}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{\bar{j}-\zeta} - q\int_i^{\zeta}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j-\zeta} + \\ &+ q'\int_i^{\zeta}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{\bar{j}'-\zeta} + q'\int_i^{\zeta}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j'-\zeta} - \\ &- 2(q-q')\int_i^{\zeta}\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\xi}{1+\zeta}\Bigg]. \end{aligned} \tag{22}$$

Si osservi che le funzioni integrande degli integrali dell'espressione precedente diventano infiniti d'ordine $\frac{\alpha}{\pi}$ per $\zeta = i$, ma poichè per evidenti ragioni di possibilità fisica del problema è $\alpha < \pi$, gli integrali stessi hanno valore determinato e finito per $\zeta = i$. Il 2.°, il 4.° e il 5.° integrale diventano invece infiniti per ζ tendente rispettivamente a j, j' e a -1. Sono questi i valori di ζ corrispondenti ai tre punti all'infinito del campo del moto (a monte del canale principale, a valle del medesimo, a valle del canale derivato). Escludendo quindi degli intorni abbastanza piccoli di questi tre punti, gli integrali della espressione precedente hanno sempre valore determinato e finito nel semicerchio.

La precedente formula (22) stabilisce la cercata relazione tra z e ζ, e si può dire costituisca l'integrale generale del problema.

Infatti mediante essa risulta definito il campo del moto; la distribuzione delle velocità nel campo stesso risulta determinata dalla (20) quando si tenga presente la (10), mediante la formula seguente:

$$w = c_1 \, e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} . \tag{23}$$

Alle costanti complesse j e j' che compariscono nella (22) si possono sostituire delle espressioni equivalenti che contengono costanti fisiche.

A tale scopo ricordiamo che ai due punti j e j' corrispondono i due punti all'infinito a monte e a valle del canale principale, le cui velorità, parallele all'asse reale, hanno i valori c e c'.

Risulta quindi:

$$\text{per } \zeta = j \qquad w = w = c,$$

$$\text{per } \zeta = j' \qquad w = w = c',$$

e per la (23) si ha:

$$c = c_1 \, e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{j - i}{j + i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} ; \qquad c' = c_1 \, e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{j' - i}{j' + i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} , \tag{24}$$

ossia

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = i \, \frac{j - i}{j + i} ; \qquad \left(\frac{c'}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = i \, \frac{j' - i}{j' + i} . \tag{24'}$$

dalle quali si ricava:

$$\left.\begin{aligned} j &= i\,\frac{1 - i\left(\dfrac{c}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + i\left(\dfrac{c}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}, \\ j' &= i\,\frac{1 - i\left(\dfrac{c'}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + i\left(\dfrac{c'}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

sono queste appunto le espressioni che si volevano determinare.

§ 6. — Relazioni fra le costanti del problema.

Rammentiamo che il lato fisico interessante del problema consiste (vedi Introduzione) nella determinazione della distribuzione delle acque provenienti dal canale principale a monte, le quali si bipartiscono in parte nel canale principale a valle, in parte in quello derivato.

D'altra parte gli elementi caratteristici del problema sono i valori c e c' della velocità a monte e a valle del canale principale, il valore c_1 della velocità a valle del canale derivato, le larghezze h e h' a monte e a valle del primo, la proiezione l sull'asse delle x dell'apertura del secondo, nonchè l'inclinazione α del canale derivato rispetto al principale. Ma fra questi evidentemente sono a ritenersi come prefissati solamente c, h, h', l, α, mentre risultano incognite c' e c_1.

È necessario quindi determinare due relazioni fra gli elementi stessi affinchè la distribuzione delle acque nei due canali risulti perfettamente determinata.

Una di queste relazioni si può stabilire facilmente, applicando lo stesso criterio di cui si è valso il Boverio (*).

(*) Boverio E., loco citato (**), pag. 95.

Osservo perciò che la (4) si può scrivere:

$$\frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = w, \tag{26}$$

e che $\frac{d\zeta}{dz}$ non si annulla entro il campo del moto perchè la rappresentazione conforme tra il campo del moto e il semicerchio del piano ζ non ha punti singolari; perciò dalla (26) scende $\frac{df}{d\zeta} = 0$ per $w = 0$, il che implica (vedi Introduzione e § 3), per $\zeta = i$.

Ora per la (21) si ha:

$$-q\left\{\frac{j}{1-ij} + \frac{\bar{j}}{1-i\bar{j}} + \frac{2}{1+i}\right\} + q'\left\{\frac{j'}{1-ij'} + \frac{\bar{j}'}{1-i\bar{j}'} + \frac{2}{1+i}\right\} = 0,$$

dalla quale tenendo presenti le (25) si ricava la seguente notevole relazione fra le portate e le velocità:

$$-q\left\{\frac{1+\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} + 1\right\} + q'\left\{\frac{1+\left(\frac{c'}{c_1}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2\left(\frac{c'}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} + 1\right\} = 0, \tag{27}$$

questa, tenendo conto delle (1), si può scrivere:

$$-ch\left\{\frac{1+\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} + 1\right\} + c'h'\left\{\frac{1+\left(\frac{c'}{c_1}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2\left(\frac{c'}{c_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} + 1\right\} = 0. \tag{27'}$$

La seconda relazione si ottiene dalla (22) ponendo in essa $\zeta = 1$ e uguagliando la parte reale del secondo membro a $-l$; anzi è da notarsi che per il modo col quale si è pervenuti alla (22), avendosi lungo ϖ il dz puramente reale, il che è quanto dire $dy = 0$ e quindi $y = \text{cost.} = h - h'$, la parte immaginaria della (22) quando si sia posto $\zeta = 1$, deve uguagliare automaticamente $h \quad h'$.

Perciò la seconda relazione è la seguente:

$$\left.\begin{aligned}-l+i(h-h') = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{c_1\pi}\Bigg[& -q\int_i^1\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j-\zeta}-q\int_i^1\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j-\zeta}+\\ & +q'\int_i^1\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j'-\zeta}+q'\int_i^1\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{j'-\zeta}-\\ & -2(q-q')\int_i^1\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{1+\zeta}\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

In particolare, la precedente relazione diventa

per $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{aligned}-l= & \frac{h}{\pi}\left\{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2+1\right\}\log\frac{c_1-c}{c_1+c}-\frac{h'}{\pi}\left\{\left(\frac{c'}{c_1}\right)^2+1\right\}\log\frac{c'-c}{c'+c}-\\ & -2\frac{h}{\pi}\left\{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2-1\right\}\operatorname{artg}\frac{c_1}{c}+2\frac{h'}{\pi}\left\{\frac{c'}{c_1}-1\right\}\operatorname{artg}\frac{c_1}{c'}+\\ & +h\left(\frac{c}{c_1}\right)^2-h'\left(\frac{c'}{c_1}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{2\log(\sqrt{2}-1)+\pi\right\}\left(h\frac{c}{c_1}-h'\frac{c'}{c}\right);\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

per $\alpha=\frac{\pi}{3}$:

$$\left.\begin{aligned}-l=\frac{1}{\pi}\Bigg[& h\left(\frac{c}{c_1}\right)^2\left\{\log\left(1-\frac{c}{c_1}\right)-\log\left\{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2+\frac{c}{c_1}+1\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\operatorname{artg}\frac{\sqrt{3}\frac{c}{c_1}}{2+\frac{c_1}{c}}\right\}+\\ & +h\left\{\log\left(\frac{c_1}{c}-1\right)-\log\left\{\left(\frac{c_1}{c}\right)^2+\frac{c_1}{c}+1\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\operatorname{artg}\frac{\sqrt{3}\frac{c_1}{c}}{2+\frac{c}{c_1}}\right\}+\\ & -h'\left(\frac{c'}{c_1}\right)^2\left\{\log\left(1-\frac{c'}{c_1}\right)-\log\left\{\frac{c'}{c_1}+\frac{c'}{c_1}+1\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\operatorname{artg}\frac{\sqrt{3}\frac{c'}{c_1}}{2+\frac{c_1}{c'}}\right\}-\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned}&-h'\left\{\log\left(\frac{c_1}{c'}-1\right)-\log\left\{\left(\frac{c_1}{c'}\right)^2+\frac{c_1}{c'}+1\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\,\mathrm{artg}\,\frac{\sqrt{3}\,\frac{c_1}{c'}}{2+\frac{c'}{c_1}}\right\}+\\&+2\left(\log 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)\left(h\frac{c}{c_1}-h'\frac{c'}{c}\right)\Bigg];\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

per $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}&-l=\frac{h}{\pi}\left\{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2+1\right\}\log\frac{c_1-c}{c_1+c}-\frac{h'}{\pi}\left\{\left(\frac{c'}{c_1}\right)^2+1\right\}\log\frac{c_1-c'}{c_1+c'}+\\&+h\frac{c}{c_1}-h'\frac{c'}{c_1}\,.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Ciascuna di queste, in ognuno dei casi particolari considerati, assieme alla (27') determina in modo completo le costanti incognite, e con esse la questione della distribuzione delle acque nei due canali.

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri archimedei e loro polari.

(*Di* Giovanni Sansone, *Zona di Guerra.*)

In due Note del prof. L. Bianchi della R. Accademia dei Lincei (*) sono state studiate le divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e alcuni gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti a tali divisioni. Conseguentemente in due miei lavori pubblicati negli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (**), analogamente a quanto si opera nello spazio euclideo, ho determinato i gruppi di sostituzioni lineari propriamente discontinui di cui il poliedro fondamentale è una piramide, una doppia piramide, un poliedro regolare dello spazio iperbolico. Lo scopo propostomi nella presente Nota è di completare le ricerche con lo studio delle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri archimedei o nei loro polari. La natura delle nuove divisioni ha reso la ricerca dei poliedri che possono effettuarle più laboriosa in confronto alle precedenti; la determinazione aritmetica dei gruppi corrispondenti ad alcune di queste divisioni, propriamente dei gruppi di cui i coefficienti delle sostituzioni che li compongono appartengono a un campo quadratico imaginario, è stata da me fatta con i metodi già adoperati nei precedenti lavori.

Nel n.° 1 provo l'esistenza di 15 tipi di poliedri semiregolari nello spazio non euclideo, nei n.ᵢ 2, 3, 4 provo che esistono solo 2 poliedri archimedei a vertici impropri, cubo-ottaedro, icosidodecaedro, e un poliedro a vertici propri, cubo tronco, che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico; nel n.° 5 do la costituzione aritmetica del gruppo corrispondente al cubo-ottaedro.

(*) L. Bianchi, *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari. — Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non euclideo in tetraedri e ottaedri regolari.* Atti Accademia Lincei, 1893-1909.

(**) G. Sansone, *Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e in tetraedri. — Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi e doppie piramidi.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, annate 1911-1917.

Nel n.° 6 assai semplicemente provo l'esistenza di soli cinque poliedri polari degli archimedei utilizzabili per le divisioni in esame, doppia piramide triangolare, rombo-ottaedro, rombo-dodecaedro, poliedri polari del rombicubo ottaedro e del cubo simo; nei n.[i] 6, 7, 8 determino la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti alle prime tre di quest'ultime divisioni.

Esistenza nello spazio iperbolico di 15 tipi di poliedri archimedei.

1. Dicesi *poliedro archimedeo* quello che ha angoloidi eguali contenuti da facce regolari di più sorta. La rappresentazione Beltrami-Klein dello spazio iperbolico S entro una sfera limite S' dà un modo semplice di costruire tutti i poliedri P archimedei di S. Infatti P deve avere in questa rappresentazione per imagine un poliedro a facce piane con angoloidi tutti di egual numero di spigoli, ed è chiaro, che la discussione elementare ordinaria per classificare i poliedri archimedei nei 15 tipi (*) rimane immutata in questo caso. Risulta da tale discussione che chiamando con n il numero degli spigoli di ogni angoloide contenuto da α facce a latere, β facce b latere, γ facce c latere, ecc., con v e f rispettivamente il numero dei vertici e delle facce del poliedro, i valori che possono assumere n, α, β, $\gamma, \ldots$; a, b, $c, \ldots$; v, f sono i seguenti:

n	α	β	γ	a	b	c	v	f	Denominazione del poliedro
3	1	2		n	4		$2n$	$n+2$	prisma regolare a facce laterali quadrate,
3	1	2		3	6		12	8	tetraedro-tronco,
3	1	2		3	8		24	14	cubo-tronco,
3	1	2		3	10		60	32	dodecaedro tronco,
3	1	2		4	6		24	14	ottaedro-tronco,
3	1	2		5	6		60	32	icosaedro-tronco,
3	1	1	1	4	6	8	48	26	cubo-ottaedro-tronco,
3	1	1	1	4	6	10	120	62	icosidodecaedro-tronco,
4	3	1		3	n		$2n$	$2n+2$	
4	3	1		4	3		24	26	rombicubo-ottaedro,
4	2	2		3	4		12	14	cubo-ottaedro,
4	2	2		3	5		30	32	icosidodecaedro,
4	1	2	1	3	4	5	60	62	rombicosidodecaedro,
5	4	1		3	4		24	38	cubo-simo,
5	4	1		3	5		60	92	dodecaedro-simo.

(*) V. ad esempio: R. Baltzer, *Elementi di matematica*. Parte 5ª, *Stereometria*. Traduzione prof. L. Cremona, pp. 121-127.

Ad ognuno dei precedenti sistemi di valori, fissata la lunghezza dello spigolo del poliedro, corrisponde nello spazio ordinario uno e un solo poliedro regolare archimedeo P'; il poliedro P' è inscrivibile in una sfera. È chiaro allora che se nello spazio S' si prende un poliedro regolare archimedeo P' col centro nel centro O della sfera limite e tutto interno a questa sfera o al massimo inscritto in essa, il poliedro obiettivo è esso stesso archimedeo e regolare. Inversamente si abbia un poliedro archimedeo P regolare di S, il poliedro imagine P' in S' ammetterà un gruppo G finito di movimenti (sostituzioni lineari sopra una variabile complessa), che riporta P' in sè; il gruppo G per le ricerche di Klein sui gruppi finiti di movimenti è il trasformato per mezzo di una sostituzione lineare γ di un gruppo Γ relativo a un poliedro regolare ordinario inscritto in S', quindi se trasformiamo G e il poliedro P' con γ^{-1}, G si muta in Γ e P' in un poliedro esso stesso archimedeo regolare con centro nel centro della sfera limite. Segue quindi: ***Esistono nello spazio iperbolico 15 tipi di poliedri archimedei regolari, e in ogni tipo si hanno infiniti poliedri differenti per l'ampiezza dei diedri che variano in modo continuo fra limiti determinati.***

Il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro con vertici propri e angoli diedri retti sono i soli poliedri archimedei regolari a vertici impropri che effettuano una divisione regolare dello spazio iperbolico.

2. Se si vuole che attorno al poliedro P di S collocando aderenti per le facce altrettanti poliedri eguali a P e così di seguito indefinitamente ne risulti riempito una e una sola volta lo spazio S, bisogna aggiungere la condizione necessaria e sufficiente che l'angolo diedro di P abbia per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero qualunque. Facilmente si prova che il poliedro P non può avere angoloidi con 5 spigoli; resta perciò da esaminare i poliedri regolari archimedei con angoloidi tutti trispigoli o tetraspigoli. Ci occuperemo ora dei poliedri P con vertici tutti a distanza infinita; nel seguente n.° 3 studieremo i poliedri P con vertici tutti a distanza finita.

Si consideri intanto la rappresentazione conforme di S entro una sfera limite Σ con la quale le rette e i piani di S hanno per imagine i circoli e le sfere ortogonali a Σ; per ottenere in Σ un poliedro archimedeo regolare, basterà inscrivere in esso un ordinario poliedro archimedeo regolare P con i vertici tutti trispigoli o tetraspigoli, e per i circoli di intersezione delle facce di P con Σ condurre le sfere s normali a Σ; il poliedro Π a facce sferiche che le sfere s limitano internamente a Σ effettuerà una divisione regolare di Σ se i suoi diedri hanno per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero. Ora le sfere s hanno i loro centri nei vertici del poliedro P' circoscritto a Σ polare di P, onde gli angoli diedri di Π relativi a uno stesso vertice V sono i supplementi degli angoli piani racchiusi dai raggi che da V vanno ai vertici della faccia p di P' tangente a Σ nel punto V. Geometricamente la faccia p si costruisce nel seguente modo. Siano VV_1, VV_2, VV_3, (VV_4) gli spigoli di P uscenti da V, p è il poligono che sul piano tangente a Σ in V vi determinano i piani tangenti a Σ in V_1, V_2, V_3, (V_4). Il poligono p è simile al poligono T_1, T_2, T_3, (T_4) polare del poligono V_1, V_2, V_3 (V_4) per rispetto al cerchio c passante per V_1, V_2, V_3, (V_4). In questa similitudine al punto V corrisponde il centro O' di c (e la congiungente VO' passa per O); quindi il poliedro Π effettua una divisione regolare di Σ allora e allora soltanto che gli angoli $T_1\widehat{O}T_2$; $T_2\widehat{O}T_3$; $T_3\widehat{O}T_1$ $(T_1\widehat{O}T_2$; $T_2\widehat{O}T_3$; $T_3\widehat{O}T_4$; $T_4\widehat{O}T_1)$ abbiano per misura $\pi - \frac{\pi}{n}\cdot$ Esamineremo separatamente quando si presenta questa circostanza sia che Π abbia vertici trispigoli o tetraspigoli.

Se Π ha tutti i vertici trispigoli, siccome esso si ottiene da un poliedro P con una faccia a latera e due b latere, oppure con una faccia a latera, una b latera e una c latera, i diedri dell'angoloide di vertice V debbono avere per misura rispettivamente $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; oppure $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$; in ogni caso uno solo degli angoli $T_1\widehat{O}T_2$, $T_2\widehat{O}T_3$, $T_3\widehat{O}T_1$ è retto, sia ad es. $T_1\widehat{O}T_2$. Ora si consideri in un punto V_3 arbitrario del quadrante di c determinato dall'angolo $T_1\widehat{O}T_3$ (v. fig. 1) la tangente a c, e dai punti T_1 e T_2 che questa tangente determina sui lati dell'angolo $T_1\widehat{O}T_2$ si conducano le ulteriori tangenti T_1L, T_2M a c; T_1L e T_2M sono parallele, il lato V_1V_2 passa quindi per O', cioè la faccia VV_1V_2 di P dovrebbe passare per il centro O di Σ, il che è assurdo. Quindi ***non esiste nessun poliedro archimedeo regolare a vertici trispigoli che effettui la divisione regolare di*** Σ.

Nel caso che Π sia relativo a un poliedro P con vertici quadrangolari, i diedri di Π debbono essere, come facilmente si prova, retti, cioè deve aversi (v. fig. 2):

$$T_1\widehat{O}T_2 = T_2\widehat{O}T_3 = T_3\widehat{O}T_4 = T_4\widehat{O}T_1 = \frac{\pi}{2},$$

ossia, come si vede subito geometricamente, $V_1\,V_2\,V_3\,V_4$ è un rettangolo, ovvero ogni angoloide di P deve avere due facce opposte a latere e due opposte b latere, ciò si ha soltanto per il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro.

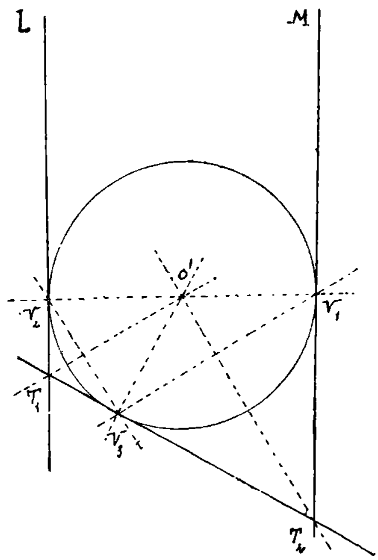


Fig. 1.

Concludendo: *Esistono due soli poliedri archimedei a vertici impropri che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico; essi sono il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro regolare con angoli diedri retti.*

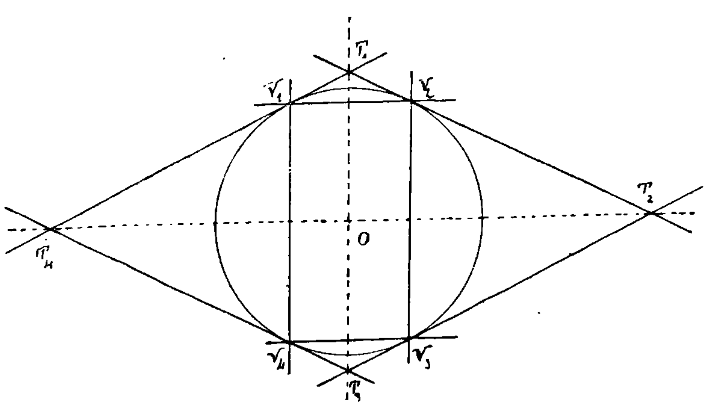


Fig. 2.

Nel n.° 4 daremo la struttura aritmetica del gruppo propriamente discontinuo avente per campo fondamentale un cubo-ottaedro.

Il cubo tronco a vertici propri con angoli solidi aventi per misura $\frac{\pi}{2}$ *se essi sono formati da una faccia di 8 lati e una di 3 lati, e per misura* $\frac{\pi}{4}$ *se formati da due facce di 8 lati, è l'unico poliedro archimedeo regolare a vertici propri che effettua una divisione regolare di S.*

3. La costruzione di un poliedro archimedeo regolare di Σ a vertici propri può effettuarsi nel seguente modo. Consideriamo un ordinario poliedro archimedeo P regolare interno a Σ e le sfere s normali a Σ ognuna delle quali passi per i vertici di P appartenenti a una stessa faccia. Il poliedro Π a facce sferiche che le s limitano internamente a Σ è un poliedro regolare archimedeo a vertici propri di Σ. Ora se il poliedro Π effettua una divisione regolare di Σ, esso deve avere i suoi angoloidi trispigoli; se tali angoloidi sono formati da una faccia a latera e due b latere i diedri possono avere per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$ con n intero $n \geqq 2$; oppure $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}$; se invece ogni angoloide è formato da una faccia a latera, una b latera, una c latera i diedri dell'angoloide debbono avere per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$; oppure $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$.

Le seguenti considerazioni ci permetteranno di vedere per ognuno dei poliedri da esaminare quali siano fra i precedenti sistemi di valori quelli che possibilmente possono assumersi come misura degli angoli diedri del poliedro.

Siano Γ e Γ' due circonferenze concentriche e Γ interna a Γ'; C un punto interno a Γ (v. fig. 3). Sia HK il diametro di Γ per C ed LM la corda per C ortogonale a HK e AB, DE siano due corde di Γ per C tali che O sia interno all'angolo $D\widehat{C}B$, e gli angoli $D\widehat{C}O$, $B\widehat{C}O$ acuti o uno al più retto. Consideriamo il cerchio $\Gamma^{(2)}$ passante per AB ortogonale a Γ' e i punti P e Q in cui la retta OC incontra $\Gamma^{(2)}$; è subito visto allora che il cerchio $\Gamma^{(3)}$ ortogonale a Γ' passante per i punti D e E passa anche per i punti P e Q. Infatti i punti O e C sono di egual potenza rispetto a $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, quindi OC è l'asse radicale di $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$; ma OC incontra $\Gamma^{(2)}$ nei punti P e Q, essi sono perciò di $\Gamma^{(3)}$. Siano ora $O^{(2)}$ e $O^{(3)}$ i centri di $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, è $O^{(2)}O^{(3)}$ ortogonale a OC, e se N è il loro punto d'incontro, N è il centro del cerchio ortogonale a Γ passante per L ed M. Si ha pure che $O^{(3)}$ è il punto in cui il diametro di Γ normale a $D\,E$ incontra $O^{(2)}N$. Sia ora $E'\,D'$ una corda di Γ per C e il raggio $C\,D'$ interno all'angolo $D\widehat{C}O$, è: $\overline{E'D'} > \overline{E\,D}$ e $D\widehat{C}B > D'\widehat{C}B$; chiamando con $O^{(4)}$ il centro del cerchio $\Gamma^{(4)}$ ortogonale a Γ passante per i punti D' e E' è $\overline{N\,O^{(4)}} > \overline{N\,O^{(3)}}$, quindi $O^{(2)}\widehat{P}O^{(4)} > O^{(2)}\widehat{P}O^{(3)}$; ma gli angoli $O^{(2)}\widehat{P}O^{(4)}$, $O^{(2)}\widehat{P}O^{(3)}$ sono i supplementi degli angoli λ' e λ for-

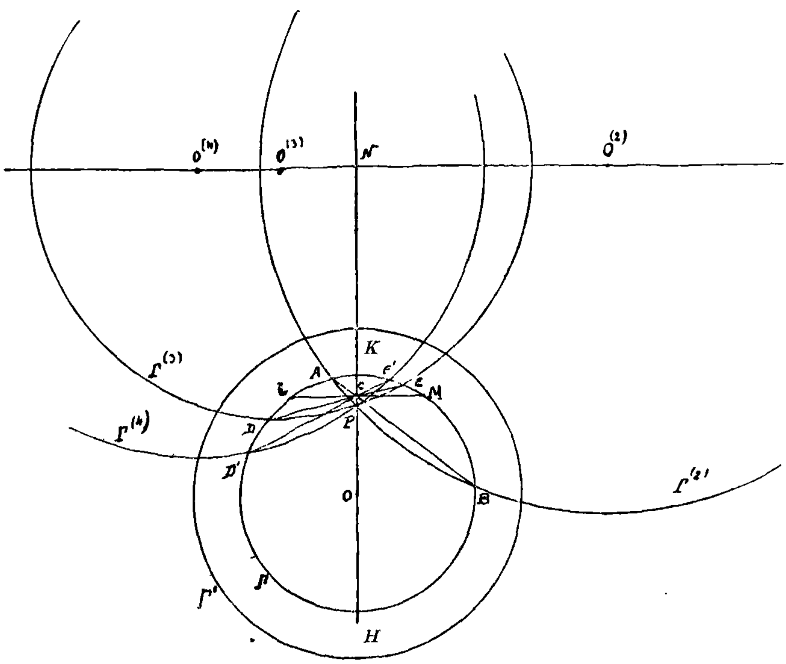


Fig. 3.

mati rispettivamente dai due cerchi $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, quindi $\lambda > \lambda'$; concludiamo perciò che se l'angolo $D\widehat{C}B$ diminuisce, diminuisce anche l'angolo λ dei due cerchi $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$.

Analogamente sia $\overline{A\,B}$ una corda di una sfera Σ di centro O, α, β, β' tre semipiani con origine $\overline{A\,B}$ tali che O sia interno sia all'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ che all'angolo $\widehat{\alpha\beta'}$. Dai cerchi di intersezione dei piani α, β, β' con Σ si facciano passare le sfere s, s_1, s_2 normali a una sfera Σ' concentrica a Σ ed esterna ad essa; segue allora che essendo $\widehat{\alpha\beta} > \widehat{\alpha\beta'}$ è anche $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$. Tanto in questo caso che nel precedente si è tacitamente definito per angolo di due cerchi (sfere) ortogonali a un cerchio Γ' (sfera Σ') la porzione di piano (spazio) esterna ai due cerchi (alle due sfere) e interna a Γ' (Σ').

Consideriamo ora un poliedro archimedeo inscritto in una sfera Σ di cui uno spigolo sia AB, e sia α il piano di una delle facce del poliedro passante per $\overline{AB}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots$ gli altri piani delle facce del poliedro seganti il piano α lungo uno spigolo del poliedro. Per i cerchi di intersezione dei piani $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ con Σ si conducano le sfere $s, s_1, s_2, \ldots$ normali a una sfera Σ' concentrica di Σ ed esterna a Σ; è evidente che se ad es. $\widehat{\alpha\beta_1} > \widehat{\alpha\beta_2}$ è anche $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$. Infatti se per AB conduciamo due semipiani β'_1, β'_2 aventi per origine $\overline{AB}$ e tali che $\widehat{\alpha\beta'_1} = \widehat{\alpha\beta_1}$; $\widehat{\alpha\beta'_2} = \widehat{\alpha\beta_2}$ è $\widehat{\alpha\beta'_1} > \widehat{\alpha\beta'_2}$; conducendo ora dai cerchi di intersezione di β'_1 e β'_2 con Σ le sfere s'_1 e s'_2 normali a Σ' è anche $\widehat{s s'_1} > \widehat{s s'_2}$ per l'osservazione già premessa; ma $\widehat{s s'_1} = \widehat{s s_1}$; $\widehat{s s'_2} = \widehat{s s_2}$ quindi $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$ c. v. p. Da ciò segue che se dai vertici appartenenti a una stessa faccia di un poliedro P inscritto in una sfera Σ conduciamo le sfere s ortogonali a una sfera Σ' concentrica di Σ ed esterna a essa, gli angoli che le s formano tra loro, considerati come si è avanti detto, sono tra loro nelle stesse relazioni di eguaglianza e disuguaglianza che i diedri del poliedro P.

Ciò premesso, in questo paragrafo noi esamineremo i poliedri P generatori di Π i cui angoloidi siano formati da una faccia a latera e due facce b latere; cominciamo anzi dal considerare il caso che P sia un prisma retto regolare a facce laterali quadrate. Se le due basi di P sono triangolari, allora gli spigoli laterali di Π debbono avere per misura $\frac{\pi}{n}$ con $n \geqq 3$ e quelli alle basi $\frac{\pi}{2}$. Un tale poliedro non può esistere; per vederlo basta rappresentare Π in Σ in guisa che uno dei vertici della base sia il centro della sfera limite. Supponiamo allora che la base di Π abbia un numero n di lati $\geqq 5$; in questo caso gli angoli solidi alla base di Π debbono avere per misura $\frac{\pi}{3}$, i laterali $\frac{\pi}{2}$. I centri delle sfere s facce laterali di Π sono in un piano diametrale e i vertici di un poligono regolare di n lati, chiamando con 1 la loro distanza da O centro di Σ, il raggio di una sfera s è $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$ e il raggio di Σ, $\sqrt{1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}}$.

Ora la congiungente i centri di due sfere una faccia laterale di Π e l'altra base di Π è ortogonale al piano α che da O proietta uno spigolo della base di P, ma l'angolo che la congiungente O col centro di una faccia laterale forma con α è $\frac{\pi}{n}$, ne segue che i centri delle sfere basi distano da O di $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}$. Se r è il raggio di una sfera base, le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} &1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}=\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{n}-r^2,\\ &\frac{1}{\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}}=2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}+r^2+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\,r, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

esprimono rispettivamente che le sfere basi sono ortogonali a Σ e l'angolo di una sfera base e una laterale è $\frac{\pi}{3}$. Eliminando r fra le (1) si ha per $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$ l'equazione:

$$6\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{n}-6\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}+1=0$$

da cui

$$\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

Facilmente si verifica che la (2) non è soddisfatta da valori interi di n; segue quindi che al prisma retto regolare a facce laterali quadrate non corrisponde nessun poliedro a vertici propri che effettui una divisione regolare di Σ.

Esaminiamo ora se esistono poliedri regolari tronchi a vertici propri che effettuano una divisione regolare di Σ. Indicheremo con A_f un ordinario poliedro regolare archimedeo, ove f rappresenta il numero delle facce del poliedro platonico P_f che genera A_f; le facce a latere e $2b$ latere le indicheremo rispettivamente con f_a e f_{2b}; P_f ha tutte le sue facce f_b b latere e i loro piani coincidono con i piani delle facce $2b$ latere di A_f, anzi f_{2b} si ottiene da f_b considerando il poligono regolare di $2b$ lati di cui b lati sono sovrapposti ai b lati di f_b. Si osservi ancora che essendo $a < 2b$, il diedro che due facce $2b$ latere di Π formano tra loro è minore del diedro formato da una faccia a latera e una $2b$ latera. Indicheremo ancora con O il centro di A_f e P_f e r il raggio della sfera circoscritta ad A_f. Noi abbiamo da risolvere il seguente problema: Costruire, quando è possibile, una sfera Σ di centro O e raggio $r' > r$ in modo che conducendo dai vertici di ogni faccia f_a, f_{2b} di A_f le sfere s_a, s_{2b} ortogonali a Σ, due sfere s_{2b} si tagliano sotto angolo $\frac{\pi}{n}$, una s_a tagli le s_{2b} adiacenti sotto angolo $\frac{\pi}{2}$.

Le sfere s_{2b} segano Σ in cerchi Γ i cui piani determinano un poliedro P'_f omotetico di P_f rispetto ad O; osservando allora che una sfera ortogonale a Σ e a una sfera s_{2b} deve avere il suo centro su una faccia di P'_f concludiamo che i centri delle sfere s_a sono i vertici di P'_f e tali vertici essendo esterni a Σ lo sono anche per rispetto ai cerchi Γ. Consideriamo ora una faccia p_b di P'_f e i suoi b vertici P, Q, $R, \ldots$ I piani che da O proiettano PQ, $QR, \ldots$ passano per gli spigoli di A_f. Chiamando con r_b, a_b, O' il raggio, l'apotema e il centro di p_b è per l'osservazione fatta r_b maggiore del raggio r di Γ; se da P conduciamo le tangenti PA e PB a Γ, la sfera s_a che ha il suo centro in P ha per raggio PA ed incontra la sfera s_{2b} passante per Γ in un cerchio passante per i punti A e B; ma il piano di questo cerchio passa anche per O, esso è quindi il piano OAB che con gli analoghi relativi ai vertici Q, $R, \ldots$ determina sul piano della faccia f_b il poligono f_{2b}; dovendo la stessa cosa verificarsi per il poligono P, Q, $R, \ldots$ deduciamo subito la costruzione di Γ fissati i punti P, Q, $R, \ldots$ (v. fig. 4). Sia t il cerchio inscritto a p_b; P', Q', $R', \ldots$ i punti di contatto di t con i lati di p_b; P'', Q'', $R'', \ldots$ i punti medi degli archi $P'Q'$, $Q'R', \ldots$ In P'' si tiri la tangente a t e chiamando con A e B i punti che essa ha in comune col cerchio di centro O e raggio $\overline{O'P}$, il cerchio Γ ha per raggio $O'A$. Se L e M sono i punti in cui Γ incontra PQ, per L e M passa un altro cerchio Γ' intersezione di Σ con un'altra sfera s'_{2b} e l'angolo dei due cerchi Γ e Γ', essendo Σ ortogonale a s_{2b} e s'_{2b}, è eguale all'angolo di tali sfere, cioè è $\frac{\pi}{n}$.

Possiamo allora facilmente stabilire la relazione che lega il numero 2θ misura della sezione normale del diedro di P_f e $\frac{\pi}{n}$. Sia N il punto in cui il raggio $\overline{O'Q'}$ incontra la tangente al cerchio Γ nel punto L, è $\overline{O'N}$ eguale a $\overline{O'P}$ come si deduce subito dal confronto dei due triangoli rettangoli

$O'AP$, $O'LN$. Col triangolo rettangolo $LQ'N$ si consideri l'analogo $LQ'N'$ relativo al cerchio Γ'; è

$$N'\widehat{Q'}N = 2\,\theta; \qquad N'\widehat{L}N = \frac{\pi}{n}. \tag{2}$$

Ora da

$$\overline{NN'} = 2\,\overline{LN}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n} = 2\,\overline{NQ'}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

si ha:

$$\overline{NQ'}\,\mathrm{sen}\,\theta = \overline{LN}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}; \tag{3}$$

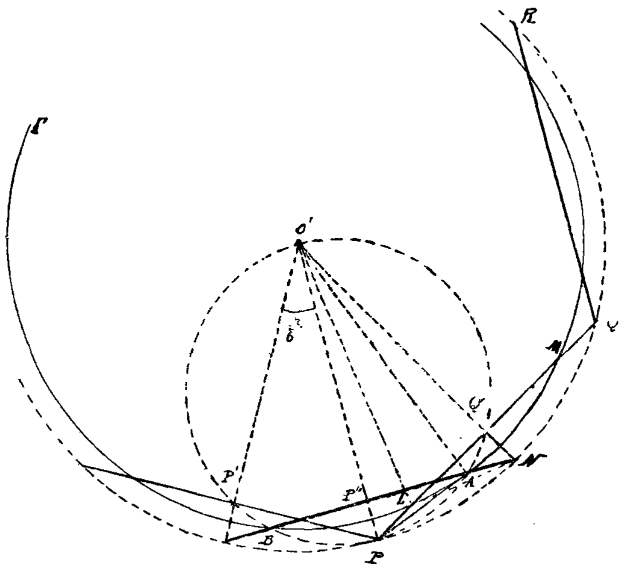


Fig. 4.

ma $\overline{LN} = \overline{PA} = \sqrt{r_b\,(r_b - a_b)}$; $\overline{NQ'} = r_b - a_b$, quindi:

$$\sqrt{\frac{r_b - a_b}{r_b}}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}. \tag{4}$$

Ora essendo $a_b = r_b \cos\frac{\pi}{b}$, è $\frac{r_b - a_b}{r_b} = 1 - \cos\frac{\pi}{b} = 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{b}$, la (4) diviene:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2b}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}. \tag{I}$$

Inversamente se esiste un poliedro platonico P'_f per il quale il numero b dei lati di ogni faccia e la misura 2θ della sezione normale del suo diedro soddisfano alla (I), essendo n un conveniente numero intero, allora costruendo su ogni faccia di P'_f il cerchio Γ nel modo suindicato e la sfera Σ di centro O passante per i cerchi Γ, il poliedro limitato dalle sfere s_{2b} passanti per i cerchi Γ e ortogonali a Σ e dalle sfere s_a con centro nei vertici di P'_f e normali a Σ, è un poliedro A_f a vertici propri per il quale due sfere s_{2b} se si tagliano formano un angolo avente per misura $\frac{\pi}{n}$, e una s_a è ortogonale alle s_{2b} adiacenti.

Sia ad esempio $f=6$, quindi $b=4$, cioè P_6 è un cubo. Si ha allora $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e la (I) diviene:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n},$$

quindi $n=4$. Ne concludiamo: *Esiste nello spazio iperbolico un cubo tronco a vertici propri con angoli solidi aventi per misura $\frac{\pi}{4}$ se formati da due facce di 8 lati, e angoli solidi retti se formati da una faccia di 3 lati e una di 8 lati.*

La costruzione di tale poliedro può effettuarsi nel seguente modo. Sulle congiungenti il centro O di un cubo con i centri delle facce si prendano dei punti O' distanti da O di $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ e sulle congiungenti di O con i vertici i punti O'' distanti da O di $\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Le 6 sfere con centro nei punti O' di raggio $\sqrt[4]{2}$ e le 8 sfere con centro nei punti O'' e raggio $\sqrt[4]{2}\,(\sqrt{2}-1)$ sono ortogonali alla sfera di centro O e raggio 1 e vi determinano internamente un cubo-tronco a vertici propri i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{4}$. Si omettono per brevità le verifiche.

Si dimostra che l'equazione (I) non può verificarsi per i valori $f=4$, 8, 12, 20.

Ad esempio nel caso $f=4$ è $b=3$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2b}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ e la (I) diviene:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{5}$$

Ora si ha sen $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{6}}$; sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{6}}$; sen $\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} < \frac{1}{\sqrt{6}}$, cioè la (5) non si verifica per valori interi di n.

Per l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro la (I) diviene rispettivamente:

$$\text{a)}\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \text{b)}\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}; \qquad \text{c)}\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{6}},$$

e nessuna di esse può verificarsi con n intero. Resta pertanto dimostrato che *fra i poliedri con una faccia a latera e due b latere il cubo tronco a vertici propri è il solo che possa effettuare una divisione regolare dello spazio iperbolico.*

Nello spazio iperbolico non esistono cubi-ottaedri tronchi nè icosidodecaedri tronchi i cui diedri abbiano per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero (*).

4. Si consideri un ordinario cubo-ottaedro-tronco P che per comodità riferiremo a una terna di assi coordinati ortogonali avente l'origine nel centro O di P, essendo gli assi x, y, z ortogonali a tre facce ottagonali di P (v. fig. 5); supporremo ancora che una faccia ottagonale di P disti da O di $3-\sqrt{2}$. Se dai vertici di ogni faccia ottagonale, esagonale, quadrangolare di P facciamo passare le sfere s_8, s_6, s_4 normali a una sfera Σ di raggio r e centro O che contenga P nel suo interno, si ottiene in Σ un cubo-ottaedro tronco Π a facce sferiche; se Π opera una divisione regolare di Σ è necessario e sufficiente per l'osservazione premessa nel n.° 3 che due sfere s_4 e s_6 siano normali, che una s_4 tagli le s_8 adiacenti secondo angoli aventi per misura $\frac{\pi}{3}$, una s_6 le s_8 adiacenti secondo angoli aventi tutti per misura $\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{\pi}{5}$.

Il punto $A \equiv (1;\ \sqrt{2}-1;\ 3-\sqrt{2})$ è un vertice di P. Per A passano tre sfere s_8, s_6, s_4 di centro O_8, O_6, O_4 e raggio r_8, r_6, r_4; ponendo

$$O_8 \equiv (0,\ 0,\ d_8); \qquad O_6 \equiv (d_6,\ d_6,\ d_6); \qquad O_4 \equiv (d_4,\ 0,\ d_4),$$

(*) Essi sono i soli poliedri archimedei a vertici triangolari con 1 faccia a latera, 1 b latera, 1 c latera.

avremo:

$$r_8^2 = d_8^2 - r^2 ; \qquad r_6^2 = 3\, d_6^2 - r^2 ; \qquad r_4^2 = 2\, d_4^2 - r^2 ; \tag{6}$$

e d'altra parte è:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{O_4 O_8}^2 = d_4^2 + (d_4 - d_8)^2 ; \qquad \overline{O_6 O_8}^2 = 2\, d_6^2 + (d_6 - d_8)^2 ; \\ \qquad\qquad \overline{O_4 O_6}^2 = 2\,(d_4 - d_6)^2 + d_6^2 . \end{array}\right\} \tag{7}$$

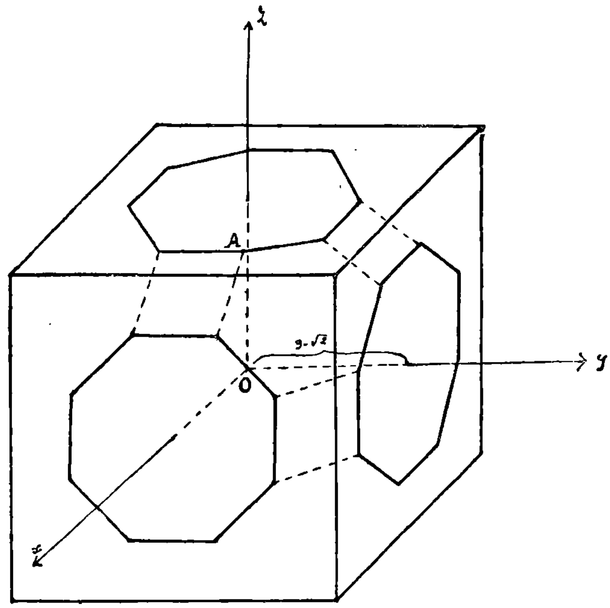


Fig. 5.

Tenendo conto che le sfere s_8, s_6, s_4 passano per A si ha subito:

$$2\,(3 - \sqrt{2})\, d_8 = 6\, d_6 = 2\,(4 - \sqrt{2})\, d_4 = r^2 + (15 - 8\sqrt{2}). \tag{8}$$

Per l'ortoganalità delle sfere s_4 e s_6 si ha:

$$\overline{O_4 O_6}^2 = r_4^2 + r_6^2 ,$$

ovvero per le (6) e (7):

$$2\, d_4\, d_6 = r^2 ; \tag{9}$$

ma dalle (8) si ha:

$$12\,(4 - \sqrt{2})\, d_4\, d_6 = \left[r^2 + (15 - 8\sqrt{2}) \right]^2 ,$$

e sostituendo nella (9)

$$r^2 - \sqrt{6\,(4-\sqrt{2})}\; r + (15 - 8\sqrt{2}) = 0. \tag{10}$$

Tenendo conto di quest'ultima le (8) dànno:

$$d_4 = r\sqrt{\frac{3}{4\,.\,7}\,(4+\sqrt{2})}\,; \qquad d_8 = r\sqrt{\frac{3}{2\,.\,7^2}\,(32+13\sqrt{2})}\;\cdot \tag{11}$$

Ora le sfere s_4 e s_8 si debbono tagliare con un angolo avente per misura $\frac{\pi}{3}$, cioè deve essere:

$$\overline{O_4\,O_8}^{\,2} = r_4^2 + r_8^2 + r_4\,r_8\,,$$

e dalle (6 e (7):

$$d_4\,d_8 = r^2 - \sqrt{(d_8^2 - r^2)\,(2\,d_4^2 - r^2)},$$

e dalle (11) si ha infine:

$$\frac{3}{14}\,(3+\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{14}\sqrt{34 - 12\sqrt{2}}\,,$$

ovvero:

$$34 - 12\sqrt{2} = 43 - 30\sqrt{2}\,,$$

che è assurda.

Non esiste perciò nessun cubo-ottaedro tronco che possa effettuare una divisione regolare di Σ.

Analogamente sia P un icosidodecaedro-tronco di centro O (v. fig. 6) riferito a una terna di assi ortogonali con origine in O di cui l'asse z sia normale a una faccia di 10 lati di P e il piano xz normale a uno spigolo di tale faccia. I simboli Σ, r, s_{10}, s_6, s_4, r_{10}, r_6, r_4, O_{10}, O_6, O_4 conservino il solito significato. Se esiste un icosidodecaedro-tronco che divide regolarmente Σ dovremo supporre necessariamente che una sfera s_4 sia ortogonale alle s_6 adiacenti e tagli le s_8 adiacenti secondo un angolo avente per misura $\frac{\pi}{3}$, che una s_6 e una s_{10} se si tagliano formino un diedro avente per misura $\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{\pi}{5}$. Proveremo che scelto P, nel nostro caso con le apoteme delle facce di 10 lati eguali ad 1, comunque si scelga Σ le condizioni precedenti non possono verificarsi. Infatti al poliedro P appartiene il vertice A di coordinate:

$$A \equiv \left(1;\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{10};\quad \left(1+4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{10}\right)\operatorname{tang}\theta\right) \equiv \left(x_0,\ y_0,\ z_0\right),$$

ove 2θ indica la misura della sezione normale del diedro di un dodecaedro.

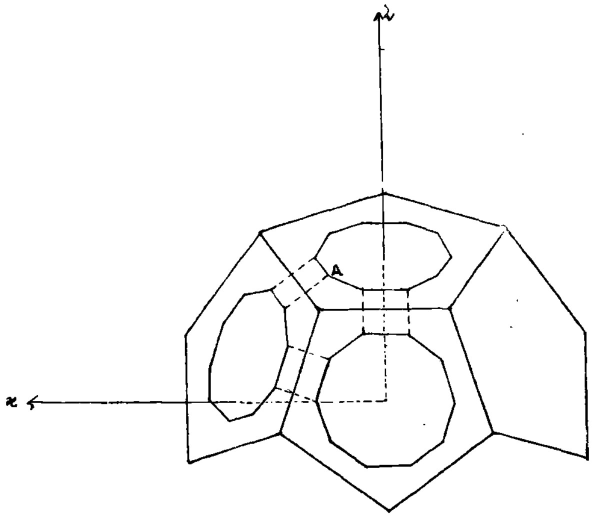


Fig. 6.

È

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}\,.$$

I centri O_{10}, O_6, O_4 delle 3 sfere che passano per A abbiano rispettivamente le coordinate:

$$O_{10} \equiv (0,\ 0,\ d_{10});\quad O_6 \equiv \left(d_6;\quad d_6\operatorname{tang}\frac{\pi}{5}\ ;\quad d_6\operatorname{tang}\theta\right);\quad O_4 \equiv (d_4,\ 0,\ d_4\operatorname{tang}\theta),$$

è allora:

$$r_{10}^2 = d_{10}^2 - r^2;\quad r_6^2 = d_6^2\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{5}+\operatorname{tang}^2\theta\right) - r^2;\quad r_4^2 = d_4^2(1+\operatorname{tang}^2\theta) - r^2, \tag{12}$$

ed ancora:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{O_4 O_6}^2 &= (d_6 - d_4)^2\ (1+\operatorname{tang}^2\theta) + d_6^2\operatorname{tang}\frac{\pi}{5}\,,\\
\overline{O_6 O_{10}}^2 &= d_6^2\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{5}\right) + (d_6\operatorname{tang}\theta - d_{10})^2,\\
\overline{O_4 O_{10}}^2 &= d_4^2 + (d_4\operatorname{tang}\theta - d_{10})^2.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Tenendo conto che le sfere s_{10}, s_6, s_4 passano per A si ha:

$$\left.\begin{aligned} 2\,d_{10}\,z_0 = 2\,d_6\left(x_0 + y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5} + z \operatorname{tang}\theta\right) = 2\,d_4\,(x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta) = \\ = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + r^2. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Essendo le due sfere s_4 e s_6 ortogonali si ha:

$$\overline{O_4\,O_6}^2 = r_4^2 + r_6^2,$$

e per le (12) e (13):

$$r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2\,r \cos\theta \sqrt{(x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta)\left(x_0 + y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5} + z_0 \operatorname{tang}\theta\right)} = \\ = 2\,r\,D,$$

con:

$$D = \cos\theta \sqrt{(x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta)\left(x_0 + y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5} + z_0 \operatorname{tang}\theta\right)} = \sqrt{\frac{21\sqrt{5} + 15}{10}},$$

e le (14) diventano:

$$d_{10} = \frac{r\,D}{z_0}; \quad d_4 = r\,\frac{D}{x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta}; \quad d_6 = r\,\frac{D}{x_0 + y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5} - z_0 \operatorname{tang}\theta}. \quad (15)$$

Ma il diedro formato dalle sfere s_4 e s_{10} ha per misura $\frac{\pi}{3}$, deve essere allora:

$$\overline{O_4\,O_{10}}^2 = r_4^2 + r_{10}^2 + r_4\,r_{10},$$

ovvero per le (12) e (13):

$$2\,d_4\,d_{10} \operatorname{tang}\theta = 2\,r^2 - \sqrt{(d_{10}^2 - r^2)\left(\frac{d_4^2}{\cos^2\theta} - r^2\right)},$$

da cui per le (15):

$$\left.\begin{aligned} (D^2 - z_0^2)\left[D^2 - (x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta)^2 \cos^2\theta\right] = \\ = 4\cos^2\theta\left[z_0\,(x_0 + z_0 \operatorname{tang}\theta) - D^2 \operatorname{tang}\theta\right]^2. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ma avendosi:

$$z_0 (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta) - D^2 \operatorname{tang} \theta = D^2 - (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta)^2 \cos^2 \theta = \frac{17\sqrt{5} - 35}{10},$$

la (16) diviene:

$$D^2 - z_0^2 = 4 \cos^2 \theta \left[z_0 (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta) - D^2 \operatorname{tang} \theta \right],$$

ovvero sostituendo:

$$21\sqrt{5} - 35 = 48\sqrt{5} - 104$$

che è assurda.

Quindi nessun icosidodecaedro-tronco può effettuare una divisione regolare di Σ.

Costituzione aritmetica del gruppo propriamente discontinuo avente per poliedro fondamentale un cubo-ottaedro a vertici impropri.

5. Si consideri il gruppo G^0 ottenuto ampliando con la riflessione $z' = z_0$ il gruppo G di sostituzioni a determinante $D = \pm 1$,

$$z' = \frac{(4a \pm 1 + 2 i a_1 \sqrt{2}) z + (2b + i b_1 \sqrt{2})}{2 (2c + i c_1 \sqrt{2}) z + (4d \pm 1 + 2 i d_1 \sqrt{2})}.$$

Proveremo che G^0 ha per poliedro fondamentale un cubo-ottaedro a vertici impropri. Le sostituzioni ellittiche di G^0 se $D = 1$ si hanno se $a_1 = - d_1$ e $(4a \pm 1) + (4d \pm 1)$ in valore assoluto minore di 2, ma corrispondendosi nei due termini della somma i segni + e i segni —, quest'ultima condizione non può verificarsi. Se $D = -1$ si hanno sostituzioni ellittiche ancora se $a_1 = - d_1$ e $4(a + d)$ in valore assoluto minore di 2, quindi $a + d = 0$, cioè le sostituzioni ellittiche di G^0 hanno periodo 2, onde se due sfere (piani) di riflessione di G^0 si tagliano, esse sono ortogonali.

Troviamo ora l'espressione analitica delle riflessioni di G^0.

Se $D = 1$ un movimento di 2ª specie di G^0 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{\left[(4a \pm 1) + 2 i a_1 \sqrt{2}\right] z_0 + i b_1 \sqrt{2}}{2 i c_1 \sqrt{2}\, z_0 + \left[(4a \pm 1) - 2 i a_1 \sqrt{2}\right]},$$

le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{4a \pm 1}{2c_1\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1\sqrt{2}}\right)^2, \tag{17}$$

con

$$(4a \pm 1)^2 + 8a_1^2 + 4b_1c_1 = 1. \tag{18}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (18) $a = a_1 = 0$, hanno perciò per equazione:

$$\eta = \frac{b_1\sqrt{2}}{2},$$

con b_1 intero qualunque.

Se $D = -1$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{\left[i(4a \pm 1) + 2a_1\sqrt{2}\right] z_0 + 2ib}{4icz_0 + \left[-i(4a \pm 1) + 2a_1\sqrt{2}\right]},$$

con

$$(4a \pm 1)^2 + 8a_1^2 + 8bc = 1, \tag{19}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{4a \pm 1}{4c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4c}\right)^2. \tag{20}$$

I piani di riflessione si hanno per $c = 0$, quindi $a = a_1 = 0$, hanno perciò per equazione:

$$\xi = b,$$

con b intero qualunque.

Ora il poliedro determinato dai 4 piani di riflessione:

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e dalle 10 sfere di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2, \quad \left[c_1 = 2;\ a_1 = 1;\ a = 0;\ b_1 = -1;\ (18)\right],$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2, \quad \left[c_1 = 2;\ a_1 = 1;\ a = -1;\ b_1 = -2;\ (18)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{4^2},\quad\left[c_1=1;\ a=0;\ a_1=0;\ b=0;\ (20)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{3}{4}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{4^2},\quad\left[c=1;\ a=-1;\ a_1=0;\ b=-1;\ (20)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4^2},\quad\left[c=1;\ a=0;\ a_1=-1;\ b=-1;\ (20)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4^2},\quad\left[c=1;\ a=-1;\ a_1=-1;\ b=-2;\ (20)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{3}{8}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{8^2},\quad\left[c=2;\ a=1;\ a_1=-1;\ b=-1;\ (20)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{8^2},\quad\left[c=2;\ a=1;\ a_1=-1;\ b=-1\ (20)\right],$$

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2,\quad\left[c_1=1;\ a_1=0;\ a=0;\ b_1=0;\ (18)\right],$$

$$\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2,\quad\left[c_1=1;\ a_1=1;\ a=0;\ b_1=-2;\ (18)\right],$$

è un cubo ottaedro Π_{14} a diedri retti e i cui vertici impropri hanno per coordinate (v. fig. 7):

$$V_1\equiv(0,0,0);\quad V_2\equiv(1,0,0);\quad V_3\equiv\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\quad V_4\equiv\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_5\equiv\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3\sqrt{2}},0\right);\quad V_6\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_7\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3\sqrt{2}},0\right);\quad V_8\equiv\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_9\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\quad V_{10}\equiv\left(\frac{1}{2},0,0\right);\quad V_{11}\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right);\quad V_{12}=\infty.$$

Si osservi che nessuna sfera (piano) di riflessione penetra in Π_{14} lungo uno spigolo essendo il periodo delle sostituzioni ellittiche di G_0 due.

Proveremo ora che nessuno dei vertici $V_i\,(i=1,2,\ldots,11)$ è interno a una sfera di riflessione.

Infatti perchè i vertici $V_1, V_2,\ldots, V_{11}$ siano interni a una sfera (17) dovrebbero verificarsi in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$8\,a_1^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$
$$8\,(c_1 - a_1)^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$
$$8\,(c_1 - a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1)\Big]^2 < 1,$$
$$8\,a_1^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1\Big]^2 < 1,$$

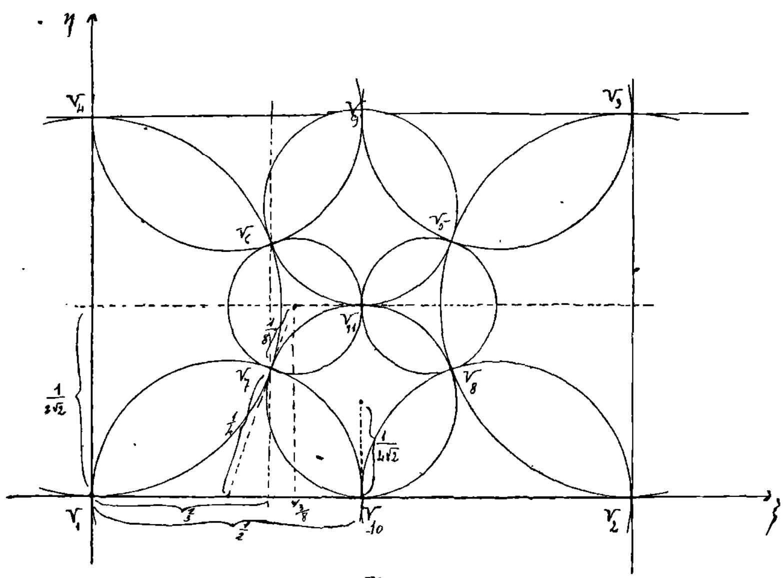


Fig. 7.

$$8\,(2\,c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[4\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$
$$8\,(c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[4\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$
$$8\,(c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$
$$8\,(2\,c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1\Big]^2 < 9,$$
$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1)\Big] < 1,$$
$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$
$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + \Big[c_1 + (4\,a \pm 1)\Big]^2 < 1.$$

Delle precedenti diseguaglianze le prime quattro e la 9ª e 10ª avendo nel 1° membro in uno dei termini il quadrato di un numero dispari e l'altro termine pari sono manifestamente impossibili; per la 5ª, 6ª, 7ª, 8ª diseguaglianza osserviamo che essendo il 2° termine del 1° membro dispari è necessariamente eguale ad 1, onde il 1° termine deve essere eguale a 0; si deduce allora che c_1 deve essere multiplo di 3, ma allora il 2° termine della diseguaglianza che è il quadrato della somma di due numeri multipli di 3 non può essere eguale a 1; infine per l'ultima deve aversi

$$c_1 = 2\,a_1 = -(4\,a \pm 1)$$

eguaglianze, che non sono possibili in numeri interi.

Analogamente perchè i vertici V_1, $V_2, \ldots, V_{11}$ siano interni a una sfera (20) deve aversi rispettivamente:

$$(4\,a \pm 1)^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$

$$(4\,c - 4\,a \pm 1)^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$

$$(4\,c - 4\,a \pm 1)^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$

$$(4\,a \pm 1)^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$

$$\Big[8\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(2\,c + 3\,a_1)^2 < 9,$$

$$\Big[4\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(2\,c + 3\,a_1)^2 < 9,$$

$$\Big[4\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(c + 3\,a_1)^2 < 9,$$

$$\Big[8\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(c + 3\,a_1)^2 < 9,$$

$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$

$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$

$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 2\,(c + 2\,a_1)^2 < 1.$$

Esse non possono sussistere come si prova ripetendo parola a parola il ragionamento precedente.

Ora i 24 movimenti di 1ª specie che riportano Π_{14} in sè, formano un gruppo G_{24}; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix}1; & 0\\ 0; & 1\end{pmatrix}=1;\quad \begin{pmatrix}0; & \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ i\sqrt{2}; & -i\sqrt{1}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1; & 1\\ 2; & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}i\sqrt{2}; & \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ +i\sqrt{2}; & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1; & -1\\ -i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1+i\sqrt{2}; & -i\sqrt{2}\\ 2; & -(1+i\sqrt{2})\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1-i\sqrt{2}; & -1\\ -i\sqrt{2}; & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-1-i\sqrt{2}; & -\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -2; & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1-i\sqrt{2}; & -1\\ -2i\sqrt{2}; & -(1-i\sqrt{2})\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1; & -\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -2; & 1+i\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1-i\sqrt{2}; & -1-\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -i\sqrt{2}; & i\sqrt{2}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-i\sqrt{2}; & -1-\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1; & \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -i\sqrt{2}; & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0; & \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -i\sqrt{2}; & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2; & -1+\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ 2-i\sqrt{2}; & -1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1; & -1+\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ 2-i\sqrt{2}: & -2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-1-i\sqrt{2}; & -\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -2-i\sqrt{2}; & i\sqrt{2}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}i\sqrt{2}; & \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ 2+i\sqrt{2}; & -1-i\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1; & -1+\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ 0; & -1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1; & 0\\ 2-i\sqrt{2}; & -1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1-i\sqrt{2} & i\sqrt{2}\\ -2-i\sqrt{2}; & 1+i\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1-i\sqrt{2}; & -1-\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -2i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-2; & 1-\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ -2+i\sqrt{2}; & 2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}i\sqrt{2}; & 1+\dfrac{1}{i\sqrt{2}}\\ 2+i\sqrt{2}; & -i\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

di cui la 1ª sostituzione rappresenta l'identità, le successive 9 sostituzioni i 9 movimenti a periodo 4 di G_{24}, le altre 8 sostituzioni gli otto movimenti a periodo 3 di G_{24} ed infine le ultime 6 sostituzioni le sei rotazioni a periodo 2 di G_{24}; nessuno di questi ventiquattro movimenti ad eccezione dell'identità è di G^0.

I 24 movimenti di 2ª specie che riportano Π_{14} in sè si ottengono moltiplicando i movimenti del gruppo G_{24} per la riflessione:

$$z' = -z_0 + 1,$$

che non è di G^0. Effettuando il prodotto il 3° e 4° coefficiente delle espressioni analitiche dei 24 movimenti si cambiano nei loro coniugati; si verifica allora che anch'essi non appartengono a G^0. Segue quindi che G^0 *ha per poliedro fondamentale un cubo ottaedro a vertici impropri.*

Esistono 5 divisioni regolari dello spazio iperbolico con poliedri polari degli archimedei.

6. I poliedri in esame hanno facce eguali con angoloidi regolari di vario numero di spigoli. Essi si possono ancora distribuire in 15 tipi e corrispondono alle soluzioni di cui al n.° 1 scambiando v con f, le facce a latere con gli angolí solidi di a spigoli, ecc. Per le nostre ricerche interessano solo i poliedri i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{m}$ con m intero, il che, come si è già detto, porta di conseguenza che gli angoloidi dei poliedri in esame possono essere soltanto triangolari e quadrangolari, circostanza che avviene soltanto per i poliedri corrispondenti alle seguenti soluzioni:

n	α	β	a	b	v	f	Denominazione poliedro
3	1	2	3	4	5	6	Doppia piramide triangolare
4	3	1	3	4	10	8	Rombo ottaedro
4	3	1	4	3	26	24	Polare rombicuboottaedro
4	2	2	3	4	14	12	Rombo dodecaedro
5	4	1	3	4	38	24	Polare cubo simo.

Ognuno di tali poliedri ha vertici quadrangolari; se effettua quindi una divisione regolare dello spazio iperbolico ha *retti* tutti i diedri concorrenti nei vertici quadrangolari (vertici impropri), sono di conseguenza retti tutti i diedri del poliedro e perciò i suoi vertici triangolari debbono esser propri. È subito visto ora che ad ognuna delle precedenti soluzioni corrisponde un poliedro a diedri retti. Sia infatti P un ordinario poliedro archimedeo di centro O e spigolo l di cui il polare sia un poliedro corrispondente a una delle 5 soluzioni precedenti. Si considerino le sfere s aventi il loro centro nei vertici di P e di raggio $l\sqrt{2}$; ognuna di tali sfere passa per il centro di una faccia quadrata di P. Ora tutte le s così costruite sono normali alla sfera Σ di centro O tangente alle facce quadrangolari di P, e ogni s è normale alle altre sfere s adiacenti.

Il poliedro a facce sferiche interno a Σ ed esterno alle s è un poliedro dello spazio iperbolico a diedri retti e avente le caratteristiche di cui le precedenti soluzioni. Nei n.[i] 7, 8, 9 daremo la costituzione aritmetica dei gruppi della doppia piramide, del rombo-ottaedro e del rombo-dodecaedro.

Gruppo della doppia piramide.

7. Nella nota 2ª del mio lavoro: « Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi e doppie piramidi » (*) si dimostra che il gruppo G^0 delle sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + 2\beta}{\gamma z_0 + \delta}; \quad \alpha\delta - 2\beta\gamma = 1,$$

con α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$ ha per poliedro fondamentale una doppia piramide triangolare a diedri retti formata dai 4 piani (v. fig. 8):

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = 1;$$

e dalle due sfere:

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 1;$$

tale poliedro ha le caratteristiche della 1ª soluzione del n.° 6.

(*) *Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa,* 1917.

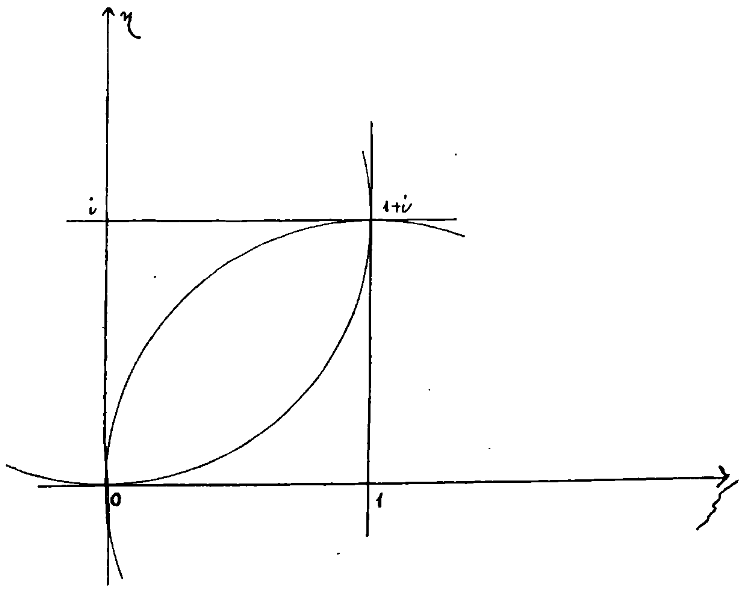


Fig. 8.

GRUPPO ROMBO-OTTAEDRO.

8. Si considerino tutte le sostituzioni di 1ª specie a determinante 1

$$\Omega_1)\quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{2\gamma + \delta}, \quad \begin{cases} D = \alpha\delta - 2\beta\gamma = 1, \\ \alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

e le altre di 1ª specie a determinante 2

$$\Omega_2)\quad z' = \frac{2\alpha z + \beta}{2\gamma z + 2\delta}, \quad \begin{cases} \dfrac{D}{2} = 2\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ \alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

con α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$. Proveremo subito che esse formano un gruppo G.

Infatti da:

$$\begin{pmatrix} \alpha; & \beta \\ 2\gamma; & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha'; & \beta' \\ 2\gamma'; & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + 2\gamma\beta'; & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ 2(\alpha\gamma' + \gamma\delta'); & \delta\delta' + 2\beta\gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A; & B \\ 2C; & D \end{pmatrix},$$

si deduce che se:

$$a) \qquad \alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2); \quad \alpha' + \delta' \equiv \beta' + \gamma' \equiv 0 \ (\text{mod. } 2);$$

è anche:

$$\alpha\,\alpha' \equiv \delta\,\delta' \ (\text{mod. } 2); \quad \beta\,\alpha' + \delta\,\beta' \equiv \gamma\,\delta' + \alpha\,\gamma' \ (\text{mod. } 2);$$

e quindi:

$$b) \qquad A + D \equiv B + C \equiv 0 \ (\text{mod. } 2).$$

Analogamente da:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha; & \beta \\ 2\gamma; & 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha'; & \beta' \\ 2\gamma'; & 2\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha\alpha' + \gamma\beta'; & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ 2(\alpha\gamma' + \gamma\delta'); & \beta\gamma' + 2\delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A; & B \\ 2C; & D \end{pmatrix};$$

si ha ancora che se sono vere le a) è anche:

$$\gamma\,\beta' \equiv \beta\,\gamma' \ (\text{mod. } 2); \quad \beta\,\alpha' + \delta\,\beta' \equiv \gamma\,\delta' + \alpha\,\gamma' \ (\text{mod. } 2);$$

cioè sono vere le b).

Così pure da:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\gamma; & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha'; & \beta' \\ 2\gamma'; & 2\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha\alpha' + \gamma\beta'); & 2\beta\alpha' + \delta\beta' \\ 2(\alpha\gamma' + 2\gamma\delta'); & 2(\beta\gamma' + \delta\delta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A; & B \\ 2C; & 2D \end{pmatrix}.$$

si ha ancora che se sono vere le a) è anche:

$$\alpha\,\alpha' + \gamma\,\beta' \equiv \delta\,\delta' + \beta\,\gamma' \ (\text{mod. } 2); \quad \delta\,\beta' \equiv \alpha\,\gamma' \ (\text{mod. } 2);$$

cioè sono vere le b).

Si prova infine che moltiplicando una sostituzione Ω_2 per una sostituzione Ω_1 se ne ha una del tipo Ω_2; segue quindi che le sostituzioni date formano gruppo, anzi che:

$$\Omega_1 \times \Omega_1 = \Omega_1; \quad \Omega_2 \times \Omega_2 = \Omega_1; \quad \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_2 \times \Omega_1 = \Omega_2.$$

Dimostreremo che *il gruppo G ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per poliedro fondamentale un rombo-ottaedro.*

Se $D = 1$ le sostituzioni ellittiche del gruppo si hanno per $\alpha + \delta = 0, \pm 1$, ma essendo $\alpha\,\delta \equiv 1$ (mod. 2), è solo possibile $\alpha + \delta = 0$, e quindi le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2. Analogamente per $D = 2$, le sostituzioni ellittiche si hanno per $(\alpha + \delta)\sqrt{2}$ reale in valore assoluto minore di 2, ma essendo $\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{2}$, segue che la circostanza in esame si presenta se $\alpha + \delta = 0$, cioè anche per $D = 2$ le sostituzioni ellittiche hanno periodo 2. Ne concludiamo che se duè sfere (piani) di riflessione di G_0 si tagliano, sono ortogonali.

Se $D = 1$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + i\,b_1}{2\,i\,c_1\,z_0 + (a_1 - i\,a_2)},$$

con

$$b_1 \equiv c_1 \pmod{2}, \quad a_1^2 + a_2^2 + 2\,b_1\,c_1 = 1, \tag{21}$$

e le corrispondenti sfere di una riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2\,c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2\,c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\,c_1}\right)^2. \tag{22}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (21):

$$a_1 = \pm 1; \quad a_2 = 0; \quad c_1 = 0; \quad b_1 = 2\,l; \quad (l \text{ intero arbitrario}),$$
$$a_1 = 0; \quad a_2 = \pm 1; \quad c_1 = 0; \quad b_1 = 2\,m; \quad (m \text{ intero arbitrario}),$$

essi hanno quindi per equazione:

$$\xi = l, \quad \eta = m.$$

Se $D = 2$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{\sqrt{2}\,(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + \dfrac{i\,b_1}{\sqrt{2}}}{i\,\sqrt{2}\,c_1\,z_0 + \sqrt{2}\,(a_1 - i\,a_2)},$$

con

$$b_1 = c_1 \pmod{2}; \quad 2\,(a_1^2 + a_2^2) + b_1\,c_1 = 1, \tag{23}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2\,c_1^2}. \tag{24}$$

Dalla 2ª delle (23) segue che c_1 è un numero intero dispari, quindi per $D = 2$ non si hanno piani di riflessione.

Si consideri del prisma determinato dai 4 piani di riflessione:

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = 1$$

la porzione esterna alle 4 sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = 1; \quad a_1 = a_2 = 0; \quad (24)\right)$$

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -1; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad (24)\right)$$

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -1; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 0; \quad (24)\right)$$

$$(\xi - 1)^2 + (\eta - 1)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -3; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 1; \quad (24)\right).$$

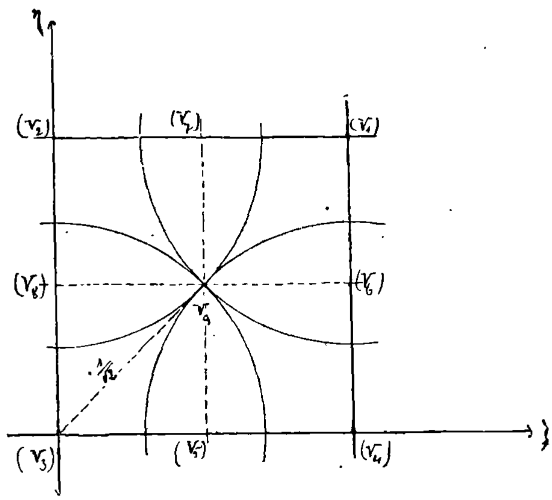


Fig. 9.

Si ottiene un ottaedro P (fig. 9) che ha tutte le caratteristiche della 2ª soluzione del n.° 6.

È chiaro che nessuna sfera (piano) di riflessione può attraversare P lungo uno spigolo, essendo le sostituzioni ellittiche di G^0 a periodo 2.

I vertici di P sono:

$$V_1 \equiv \left(1; \ 1; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_2 \equiv \left(0; \ 1; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_3 \equiv \left(0; 0; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_4 \equiv \left(1; \ 0; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2}; \ 0; \ \frac{1}{2}\right); \quad V_6 \equiv \left(1; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}\right);$$

$$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2}; \ 1; \ \frac{1}{2}\right); \quad V_8 \equiv \left(0; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}\right); \quad V_9 \equiv \left(\frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}; \ 0\right); \quad V_{10} = \infty;$$

e noi proveremo che nessuno di essi può essere interno a una sfera di riflessione. Infatti perchè i vertici V_1, $V_2, \cdots$, V_9 siano interni a una sfera di riflessione (22) debbono verificarsi in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
(2c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 + 2c_1^2 &< 1, \\
a_2^2 + (2c_1 + a_1)^2 + 2c_1^2 &< 1, \\
a_2^2 + a_1^2 + 2c_1^2 &< 1, \\
(2c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + 2c_1^2 &< 1, \\
(c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + c_1^2 &< 1, \\
(2c_1 - a_2)^2 + (c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1, \\
(c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1, \\
a_2^2 + (c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1, \\
(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + a_1)^2 &< 1.
\end{aligned}$$

Le prime otto sono impossibili essendo $|c_1| \geqq 1$, per l'ultima dovrebbe aversi $c_1 = -a_1 = a_2$ e la seconda delle (21) diviene:

$$2c_1^2 + 2b_1 c_1 = 1,$$

che è assurda.

Analogamente perchè i vertici V_1, $V_2, \cdots$, V_9 siano interni a una sfera (24) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}
2(c_1 - a_2)^2 + 2(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1, \\
2a_2^2 + 2(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1, \\
2a_2^2 + 2a_1^2 + c_1^2 &< 1, \\
2(c_1 - a_2)^2 + 2a_1^2 + c_1^2 &< 1, \\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4a_1^2 + c_1^2 &< 2, \\
4(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 + c_1^2 &< 2, \\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 2, \\
4a_2^2 + (c_1 + 2a_1)^2 + c_1^2 &< 2, \\
(c_1 - 2a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 &< 2.
\end{aligned}$$

Le prime 4 sono impossibili essendo $|c_1| \geqq 1$; dalla 5ª, 6ª, 7ª, 8ª diseguaglianza si ha $c_1 = 1$ e $1 + 2a_1 = 0$ oppure $1 - 2a_2 = 0$, ciò che non può essere; per l'ultima, avendo $c_1 - 2a_2$ e $c_1 + 2a_1$ la stessa parità, deve essere $c_1 = 2a_2 = -2a_1$, e la seconda delle (23) diventa:

$$4a_1^2 - 2a_1 b_1 = 1,$$

che non può essere.

I movimenti di 1ª specie che riportano P in sè formano un gruppo G_8 ed hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix}1; & 0\\ 0; & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1; & -i\\ 0; & -i\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1; & -(1+i)\\ 0; & -1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1; & -1\\ 0; & i\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & -\frac{1}{2}\\ 1; & -\frac{1+i}{2}\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & \frac{1}{2}\\ 1; & -\frac{1+i}{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & \frac{1-2i}{2}\\ 1; & -\frac{1+i}{2}\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & -\frac{1+2i}{2}\\ 1; & -\frac{1+i}{2}\end{pmatrix};$$

e nessuno di essi, ad eccezione dell'identità, è di G^0.

I movimenti di 2ª specie che riportano P in sè si ottengono ampliando G_8 con la riflessione $z' = -z_0 + 1$; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix}-i; & i\\ 0; & i\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1+i; & 0\\ 0; & 1-i\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1; & i\\ 0; & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1-i; & 2i\\ 0; & 1+i\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & \frac{i}{2}\\ 1; & \frac{-1+i}{2}\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & \frac{i-2}{2}\\ 1; & \frac{-1+i}{2}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & -\frac{2-i}{2}\\ 1; & \frac{-1+i}{2}\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}; & -\frac{i}{2}\\ 1; & \frac{-1+i}{2}\end{pmatrix};$$

e nessuno di essi appartiene a G^0. Segue che G^0 *ha per poliedro fondamentale un rombo-ottaedro.*

Gruppo rombo-dodecaedro.

9. Si considerino tutte le sostituzioni di 1ª specie a determinante 1:

$$\begin{cases} \Omega_1 \sim z_1 = \dfrac{\alpha z + 2\beta}{2\gamma z + \delta}, \\ \alpha\delta - 4\beta\gamma = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega_2 \sim z_1 = \dfrac{2\alpha z + \beta}{\gamma z + 2\delta}, \\ 4\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{cases}$$

con

$$\alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2},$$

e α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$. Si prova facilmente che tali sostituzioni formano un gruppo G. Così ad es. si ha:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha; & \beta \\ \gamma; & 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha'; & \beta' \\ \gamma'; & 2\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha\alpha' + \gamma\beta'; & 2(\beta\alpha' + \delta\beta') \\ 2(\alpha\gamma' + \gamma\delta'); & \beta\gamma' + 4\delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A; & 2B \\ 2C; & D \end{pmatrix};$$

e da:

$$\alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}; \qquad \alpha' + \delta' \equiv \beta' + \gamma' \equiv 0 \pmod{2},$$

segue:

$$\gamma\beta' \equiv \gamma'\beta \pmod{2}; \qquad \beta\alpha' + \delta\beta' \equiv \gamma\delta' + \alpha\gamma' \pmod{2},$$

cioè:

$$A + D \equiv B + C \equiv 0 \pmod{2}.$$

In generale si ha:

$$\Omega_1 \times \Omega_1 = \Omega_2 \times \Omega_2 = \Omega_1; \qquad \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_2 \times \Omega_1 = \Omega_2.$$

Si ampli il gruppo G con la riflessione $z' = z_0$; si ha un gruppo G^0, che noi proveremo ha per poliedro fondamentale un rombo-dodecaedro. Infatti dalla condizione $\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{2}$ si trova subito che se una sostituzione Ω_1 o Ω_2 è ellittica ha il periodo 2, onde se due sfere (piani) di riflessione si tagliano sono ortogonali.

Un movimento Ω_1 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + 2 i b_1}{2 i c_1 z_0 + (a_1 - i a_2)},$$

con:

$$b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{2}; \qquad a_1^2 + a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 1; \tag{25}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2 c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2 c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2 c_1}\right)^2. \tag{26}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (25):

$$a_1 = \pm 1; \quad a_2 = 0; \qquad b_1 = 2 l; \quad (l \text{ intero arbitrario});$$

$$a_1 = 0; \qquad a_2 = \pm 1; \quad b_1 = 2 m; \quad (m \text{ intero arbitrario});$$

hanno cioè per equazione:

$$\xi = 2 l; \quad \eta = 2 m.$$

Un movimento Ω_2 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{2 (a_1 + i a_2) z_0 + i b_1}{i c_1 z_0 + 2 (a_1 - i a_2)},$$

con:

$$b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{2}; \quad 4 (a_1^2 + a_2^2) + b_1 c_1 = 1; \tag{27}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{2 a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2 a_1}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}. \tag{28}$$

Non vi sono piani di riflessione perchè per la 2^a delle (27) si ha che c_1 è dispari.

La porzione di prisma interna ai quattro piani di riflessione (fig. 10):

$$\xi = 0; \quad \xi = 2; \quad \eta = 0; \quad \eta = 2;$$

ed esterna alle 8 sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \left[a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = c_1 = 1; \quad (28)\right],$$

$$(\xi - 2)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \left[a_2 = 1; \quad a_1 = 0; \quad c_1 = 1; \quad b_1 = -3; \quad (28)\right],$$

$$\left(\xi-2\right)^2+\left(\eta-2\right)^2+\zeta^2=1, \quad \left[a_2=1;\ -a_1=1;\ c_1=1;\ b_1=-7;\ (28)\right],$$

$$\xi^2+\left(\eta-2\right)^2+\zeta^2=1, \quad \left[a_2=0;\ a_1=-1;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (28)\right],$$

$$\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=2;\ a_1=-1;\ c_1=1;\ b_1=-1;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{3}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=2;\ a_1=-3;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-1\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=1;\ a_1=-2;\ c_1=1;\ b_1=-1;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\eta-1\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=3;\ a_1=-2;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (26)\right];$$

forma un rombododecaedro P di cui la 4ª soluzione del n.° 6.

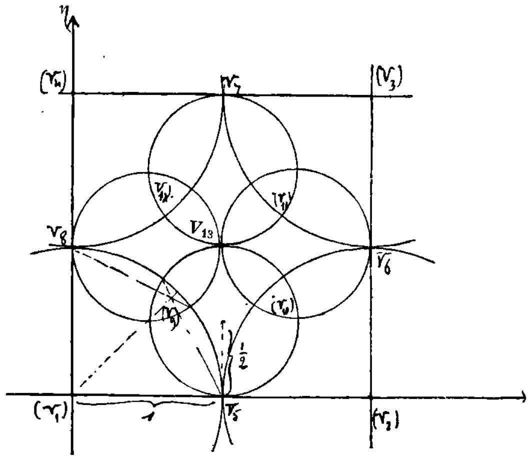


Fig. 10.

Proveremo che G^0 ha per poliedro fondamentale P.

Si osservi che essendo le sostituzioni ellittiche di G^0 a periodo 2, nessuna sfera (piano) di riflessione penetra in P lungo uno spigolo.

Proveremo ora che i vertici di P non possono essere interni ad alcuna sfera di riflessione. I vertici di P sono:

$$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1);\quad V_2\equiv(2,\ 0,\ 1);\quad V_3\equiv(2,\ 2,\ 1);\quad V_4\equiv(0,\ 2,\ 1);$$
$$V_5\equiv(1,\ 0,\ 0);\quad V_6\equiv(2,\ 1,\ 0);\quad V_7\equiv(1,\ 2,\ 0);\quad V_8\equiv(0,\ 1,\ 0);$$

$$V_9 \equiv \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \quad V_{10} \equiv \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \quad V_{11} \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$V_{12} \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right); \quad V_{13}(1, 1, 0); \quad V_{14} = \infty.$$

Perchè i vertici $V_1, V_2, \cdots, V_{13}$ siano interni a una sfera (26) debbono essere soddisfatte in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
a_2^2 + a_1^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + (4c_1 + a_1)^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
a_2^2 + (4c_1 + a_1)^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + a_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + (4c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
a_2^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
(4c_1 - 3a_2)^2 + (4c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(8c_1 - 3a_2)^2 + (4c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(4c_1 - 3a_2)^2 + (8c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(8c_1 - 3a_2)^2 + (8c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(2c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1.
\end{aligned}$$

Le prime 4 diseguaglianze non possono sussistere essendo $|c_1| \geq 1$; la 5^a, la 6^a, la 7^a e la 8^a non possono sussistere perchè dovendosi annullare nel 1^o membro ognuno dei termini ne seguirebbe che a_1 e a_2 debbono essere numeri pari contrariamente alla 2^a eguaglianza (25); dalla 9^a, 10^a, 11^a, 12^a segue $c_1 = 1$, ed avendo a_1 e a_2 differente parità uno dei primi due termini del 1^o membro deve essere eguale a 1, l'altro annullarsi, in ogni caso i numeri 4 o 8 debbono essere multipli di 3 e ciò è assurdo; dall'ultima perchè si verifichi segue:

$$-a_1 = a_2 = 2c_1,$$

cioè a_1 e a_2 sono pari, il che non può essere.

Analogamente perchè i vertici $V_1, V_2, \cdots, V_{13}$ siano interni a una sfera (28) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}
4a_2^2 + 4a_1^2 + c_1^2 &< 1,\\
4(c_1 - a_2)^2 + 4a_1^2 + c_1^2 &< 1,\\
4(c_1 - a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
4a_2^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4a_1^2 &< 1,\\
4(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 &< 1,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
4a_2^2 + (c_1 + 2a_1)^2 &< 1,\\
4(c_1 - 3a_2)^2 + 4(c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 &< 9,\\
4(2c_1 - 3a_2)^2 + 4(c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 &< 9,\\
4(c_1 - 3a_2)^2 + 4(2c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 &< 9,\\
4(2c_1 - 3a_2)^2 + 4(2c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 &< 9,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 &< 1.
\end{aligned}$$

Ancora le prime 4 non possono sussistere essendo $|c_1| \geqq 1$; la 5ª, 6ª, 7ª, 8ª non possono sussistere perchè dovendosi annullare ognuno dei termini del 1° membro segue che c_1 è pari contrariamente alla 2ª eguaglianza delle (27); per la 9ª, 10ª, 11ª, 12ª essendo c_1 dispari segue $c_1 = 1$, e quindi per la possibilità di ciascuna di esse deve verificarsi rispettivamente in numeri interi uno dei sistemi:

$$\begin{cases} 1 - 3a_2 = 1, \\ 1 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 3a_2 = -1, \\ 1 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 3a_2 = 1, \\ 2 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 3a_2 = -1, \\ 2 + 3a_1 = 0, \end{cases}$$

e ciascuno di essi non può verificarsi in numeri interi.

Infine per l'ultima deve aversi $c_1 = 2a_2 = -2a_1$, cioè c_1 pari, ciò che si è visto non può essere.

I movimenti di 1ª specie che riportano P in sè formano un gruppo G_{24}; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i; & 2(1-i) \\ 0; & 1-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & 2(1-i) \\ 0; & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i; & -2(1-i) \\ 0; & 1+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} (1+2i)\,i; & (1-2i)\,i \\ i; & -i; \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i; & -(2+i) \\ -i; & -(1-i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & (1-2i)\,i \\ i; & -(1+2i)\,i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+i; & -(1+2i) \\ 1; & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i; & -1-2i \\ 1; & -(1+i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & -(1+2i) \\ 1; & -(2+i) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2i}; & \frac{1+i}{2i} \\ \frac{1-i}{2i}; & -\frac{1+i}{2i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2i}; & +\frac{1+i}{2i} \\ \frac{1-i}{2i}; & -\frac{1-i}{2i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2+i}{1+i}; & -\frac{2+3i}{1+i} \\ \frac{1}{1+i}; & -\frac{1}{1+i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+i}; & \frac{2+3i}{1+i} \\ -\frac{1}{1+i}; & \frac{2+i}{1+i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{1-i}; & \frac{-3i}{1-i} \\ \frac{1}{1-i}; & -\frac{2+i}{1-i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\frac{2+i}{1-i}; & \frac{3i}{1-i} \\ -\frac{1}{1-i}; & \frac{1+2i}{1-i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{1+i}; & \frac{2-3i}{1+i} \\ \frac{1}{1+i}; & \frac{-i}{1+i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{i}{1+i}; & \frac{2-3i}{1+i} \\ \frac{1}{1+i}; & -\frac{1+2i}{1+i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+i; & -(1+4i) \\ 1; & -(2+i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -3 \\ 1; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -3i \\ -i; & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i); & 1 \\ i; & 1-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -(1+i); & 3i \\ -1; & 1+i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+2i; & 1-4i \\ 1; & -(1+2i) \end{pmatrix};$$

di cui la 1ª sostituzione rappresenta l'identità, le successive 9 sostituzioni i 9 movimenti a periodo 4 di G_{24}, le successive 8 sostituzioni gli 8 movimenti a periodo 3 di G_{24}, ed infine le ultime 6 sostituzioni le 6 rotazioni a periodo 2; nessuno di questi 24 movimenti ad eccezione dell'identità appartiene a G^0.

Moltiplicando ora il gruppo G_{24} per la riflessione:

$$z' = -z_0 + 2 = \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} z_0$$

che non appartiene a G_0 si ottengono altri 24 movimenti di 2ª specie che riportano P in sè. Osservando che effettuando i prodotti il terzo e quarto coefficiente di ogni sostituzione si cambiano nei loro coniugati moltiplicati per i, ne segue che le sostituzioni di G_{24} che ridotte a determinante 1 non hanno il 3° e 4° coefficiente intero, moltiplicate per la riflessione $z' = -z_0 + 2$, conservano il 3° e 4° coefficiente non intero, ci restano allora da esaminare delle nuove quelle che provengono dai prodotti:

$$\begin{pmatrix} -i; & 2(1+i) \\ 0; & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1; & 2i \\ 0; & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1+i; & -2+i \\ i; & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i); & 3 \\ -1; & 1-i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i; & -1+2i \\ 1; & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-i); & -i \\ i; & -(1+i) \end{pmatrix};$$

e nessuna delle sostituzioni rappresentata di tali prodotti appartiene a G^0.

Resta pertanto dimostrato che G^0 ha per poliedro fondamentale un rombo-dodecaedro.

Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque.

(*Di* Anita Carpanese, *a Calice al Cornoviglio.*)

INTRODUZIONE.

Il prof. Levi-Civita nella sua Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana* (*) ha introdotto ed illustrato la nozione di parallelismo in una varietà V_n a metrica qualsiasi, definendo come parallele due direzioni spiccate da due punti infinitamente vicini P, P' se (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo rispetto all'elemento lineare PP') formano lo stesso angolo con ogni direzione fissa spiccata da P (o da P') ed appartenente a V_n.

Anche qui si introduce la nozione di parallelismo in una varietà V_n qualunque, ma partendo da un punto di vista diverso.

Si suppongono date a priori n forme differenziali, lineari, indipendenti

$$\psi_i = \sum_1^n{}_r \lambda_{i/r}\, d\, x_r$$

e si assume come quadrato dell'elemento lineare della varietà

$$d\, s^2 = \sum_1^n{}_i \psi_i^2 .$$

Con questa impostazione si riconosce che ad ogni punto P di V_n si coordina un'ennupla di direzioni mutuamente ortogonali.

Si definisce poi il parallelismo ricorrendo, con opportuno algoritmo, alla condizione che fra gli intorni di 1° ordine di due punti infinitamente vicini P e P' passi tale corrispondenza da conservare distanze ed angoli.

(*) Vedi *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XLII (1917).

Ponendo in tal modo la nozione di parallelismo rimane ovviamente acquisito che l'angolo formato da due generiche direzioni uscenti da un medesimo punto, è anche l'angolo formato dalle loro parallele in un altro punto qualunque; e considerando un caso particolare delle equazioni di parallelismo si stabiliscono le equazioni delle geodetiche, che vengono così illuminate sotto altro punto di vista.

Con facile e spontanea applicazione di proprietà note delle ennuple ortogonali si ritrova poi la proprietà geometrica assunta dal Levi-Civita come definizione di parallelismo. Questa proprietà geometrica è agile ed espressiva perchè, come ha mostrato lo stesso Levi-Civita, conduce rapidamente alle equazioni differenziali del parallelismo. Essa appare per altro estrinseca rispetto alla V_n, perchè fa intervenire lo spazio euclideo (ad un numero conveniente di dimensioni) in cui la V_n stessa può sempre supporsi immersa.

Già il prof. Severi (*) ha mostrato come si possa ricondurre il parallelismo nella varietà V_n al parallelismo sopra una certa superficie geodetica, determinata dai dati della questione, ossia come si possa attribuire forma geometrica intrinseca alla definizione di parallelismo in V_n. Orbene è facile riconoscere che anche questo risultato del Severi si può ricavare, senza nessun calcolo, come corollario della originaria definizione del Levi-Civita.

Infine si introducono i differenziali d'ordine superiore delle forme ψ, e col loro mezzo vien fatto di definire e di interpretare nel modo più rapido e conciso tutti gli invarianti di curvatura nella varietà.

A dir vero le espressioni finali e l'interpretazione sono già state assegnate dal prof. Ricci (**), ma col procedimento qui esposto si evita di far intervenire, sia pure soltanto provvisoriamente, i simboli di Riemann.

§ 1.

Determinazione metrica di una V_n per mezzo di n forme lineari.

1. Interpretiamo n variabili indipendenti x_r come coordinate generali di un punto P in una varietà V_n. Un sistema di differenziali dx_r caratterizza con ciò il passaggio da P ad un punto vicinissimo P'.

(*) Cfr. *Sulla curvatura delle superficie e varietà.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917).

(**) Cfr. *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni.* Memorie dei XL, Serie III, t. XII (1899), pag. 74.

Prendiamo a considerare n forme differenziali, lineari, indipendenti

$$\psi_i = \sum_r^n {}_1 \lambda_{i/r}\, d\, x_r \,. \tag{1}$$

L'indipendenza si rispecchia nella circostanza formale che si suppone diverso da zero il determinante dei coefficienti

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{1/1} & \lambda_{1/2} \dots & \lambda_{1/n} \\ \lambda_{2/1} & \lambda_{2/2} \dots & \lambda_{2/n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n/1} & \lambda_{n/2} \dots & \lambda_{n/n} \end{vmatrix}$$

Le forme ψ_i si considerano invarianti rispetto ad arbitrari cambiamenti di variabili indipendenti, e quindi se ci riferiamo a generiche, nuove variabili y, e poniamo

$$\mu_{i/p} = \sum_r^n {}_1 \lambda_{i/r} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \qquad (i,\ p = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

abbiamo

$$\psi_i = \sum_{rp}^n {}_1 \lambda_{i/r} \frac{\partial x_r}{\partial y_p}\, d\, y_p = \sum_p^n {}_1 \mu_{i/p}\, d\, y_p \,.$$

2. Imaginiamo posta in V_n una determinazione metrica, assumendo come espressione del quadrato dell'elemento lineare $P P'$

$$d\, s^2 = \sum_i^n {}_1 \psi_i^2 \,. \tag{2}$$

Si riconosce senza difficoltà che con questa impostazione (risguardando cioè date a priori le n forme ψ_i, e definendo, in base ad esse, il $d\, s^2$ quale somma dei loro quadrati), non soltanto si introduce la misura delle distanze e degli angoli in V_n, ma si coordina altresì ad ogni punto P un'ennupla di direzioni mutuamente ortogonali.

Infatti ove si ponga

$$\psi_1 = 0 \dots \psi_{i-1} = 0 \quad \psi_{i+1} = 0 \dots \psi_n = 0 \tag{3}$$

la matrice di questo sistema di $n - 1$ equazioni lineari ed omogenee nei differenziali $d x_r$ ha per caratteristica $n-1$ (*), e quindi vengono definite le $d x_r$ a meno di un fattore di proporzionalità.

Indicando con $\lambda_i^{(r)}$ gli elementi reciproci (**) degli elementi $\lambda_{i/r}$ si ha più precisamente

$$d x_r = \rho_i \lambda_i^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Nelle (3), ed in conseguenza nelle (4), l'indice i può prendere tutti i valori da 1 ad n, perchè le forme ψ sono n, e quindi dalle (4) stesse risulta intanto che ad ogni punto P corrispondono n direzioni.

Osserviamo che, tenendo presenti le (3) e le (4), si ottiene

$$d s_i^2 = \psi_i^2 = \rho_i^2 .$$

Così si ha anche l'interpretazione di ρ_i, ed allora le (4) diventano

$$\frac{d x_r}{d s_i} = \lambda_i^{(r)}. \tag{4'}$$

Le quantità $\lambda_i^{(r)}$ si chiamano i parametri della direzione i.

3. Rimane da provare che le n direzioni uscenti da P sono mutuamente ortogonali. A tal uopo ricordiamo che, essendo $d s^2 = \sum_{rs}^{n} {}_1 \, a_{rs} \, d x_r \, d x_s$ l'espressione del quadrato dell'elemento lineare della varietà, e ponendo per brevità $d s^2 = Q$, la condizione di ortogonalità di due direzioni (d) e (d'), corrispondenti agli incrementi d e d', è

$$\sum_{1}^{n} {}_i \, \frac{\partial Q}{\partial (d x_i)} \, d' x_i = 0.$$

Quando il quadrato dell'elemento lineare ha l'espressione (2) si riconosce facilmente che la suddetta condizione diventa

$$\sum_{1}^{n} {}_i \, \psi_i \, \psi'_i = 0,$$

(*) Infatti se la caratteristica fosse minore di $n-1$ sarebbero zero tutti i minori d'ordine $n-1$ della matrice, che sono pure minori del determinante Λ, e quindi sviluppando questo determinante secondo gli elementi dell'i^{esima} riga si otterrebbe zero, contro l'ipotesi che sia $\Lambda \neq 0$.

(**) Si chiamano elementi reciproci i complementi algebrici divisi per il determinante.

essendo ψ' la stessa forma ψ riferita agli incrementi d' delle coordinate. Se ora si considerano due qualunque delle n direzioni uscenti da P, si vede che per esse è soddisfatta la condizione d'ortogonalità in virtù delle (3).

§ 2.

Covarianti bilineari delle forme fondamentali ψ.

1. Conveniamo di lasciare indeterminato il significato da attribuire a differenziali secondi del tipo

$$d\,d'x_r \qquad d'\,d\,x_r$$

e facciamo la convenzione, che ha carattere invariantivo di fronte ai cambiamenti di variabili, che per una stessa funzione del posto siano invertibili i simboli d e d' (*), che cioè si abbia

$$d\,d' = d'\,d.$$

Accanto alle forme ψ_i consideriamo le forme

$$\psi'_i = \sum_s{}_1^n \lambda_{i/s}\, d'x_s \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{1'}$$

ed osserviamo che (quando si prenda per i differenziali secondi una definizione invariantiva), sono invarianti

$$d'\psi_i, \quad d\psi'_i$$

ed anche le forme bilineari del 1° ordine

$$\left.\begin{aligned} \chi_i = d'\psi_i - d\psi'_i = \sum_r{}_1^n d'\lambda_{i/r}\, dx_r - \sum_s{}_1^n d\lambda_{i/s}\, d'x_s = \\ = \sum_{rs}{}_1^n dx_r\, d'x_s \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r}\right) \end{aligned} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \right\} \tag{5}$$

(*) È sempre lecito risguardare nulli i differenziali secondi, ma non facciamo questa convenzione, perchè non ha carattere invariantivo.

ognuna delle quali costituisce il cosidetto *covariante bilineare* della corrispondente forma ψ_i.

2. Risolviamo ora le (1) rispetto alle $d x_r$. Per far questo moltiplichiamo i due membri per $\lambda_{i/p}$, sommiamo rispetto all'indice i, e teniamo presenti le relazioni, che passano fra gli elementi reciproci $\lambda_{i/r}$, $\lambda_i^{(r)}$

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, \lambda_{i/r}\, \lambda_i^{(s)} = \varepsilon_{rs} \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

col solito significato delle ε_{rs} (0 per $r \neq s$, 1 per $r = s$).

Si ottiene allora (dopo aver scambiato p con r, ed i con h)

$$d x_r = \sum_{1}^{n}{}_h\, \psi_h\, \lambda_h^{(r)}. \qquad (r = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{6}$$

Analogamente risolvendo le (1') si ha

$$d' x_s = \sum_{1}^{n}{}_k\, \psi'_k\, \lambda_k^{(s)}. \qquad (s = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{6'}$$

Nelle (5) sostituiamo a $d x_r$ e $d' x_s$ le espressioni date dalle (6) e (6'), otteniamo

$$\chi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \psi_h\, \psi'_k \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, e_{ihk}\, \psi_h\, \psi'_k$$

avendo posto

$$e_{ihk} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)}. \tag{7}$$

Se in questa espressione si cambia h con k si vede che le e_{ihk} sono emisimmetriche rispetto ai due ultimi indici, cioè sono legate dalle relazioni

$$e_{ihk} + e_{ikh} = 0.$$

§ 3.

Digressione di Calcolo differenziale assoluto.

1. Facciamo ora, per il lettore cui è famigliare il calcolo differenziale assoluto del Ricci, alcune considerazioni sui simboli e_{ihk} introdotti colle (7).

Dalle formole di derivazione covariante si ha

$$\lambda_{i/rs} = \frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_p \begin{Bmatrix} r & s \\ & p \end{Bmatrix} \lambda_{i/p}$$

$$\lambda_{i/sr} = \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} - \sum_1^n{}_p \begin{Bmatrix} r & s \\ & p \end{Bmatrix} \lambda_{i/p}$$

E sottraendo membro a membro viene

$$\lambda_{i/rs} - \lambda_{i/sr} = \frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r}.$$

In virtù di queste ultime relazioni le (7) diventano

$$e_{ihk} = \sum_1^n{}_{rs} \lambda_{i/rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} - \sum_1^n{}_{rs} \lambda_{i/sr} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)}. \tag{8}$$

Ricordando le formole di definizione dei coefficienti di rotazione di Ricci

$$\gamma_{ihk} = \sum_1^n{}_{rs} \lambda_{i/rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)},$$

dalle (8) risulta

$$e_{ihk} = \gamma_{ihk} - \gamma_{ikh}, \tag{9}$$

e così si vede che le e_{ihk} si possono esprimere in modo semplice in termini delle γ_{ihk}.

2. È importante osservare che se si associano alle (9) le relazioni di emisimmetria rispetto ai due primi indici, a cui soddisfano le γ, cioè le identità

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{hik} = 0 \tag{10}$$

le γ_{ihk} rimangono univocamente definite in termini delle e_{ihk}.

Infatti, ruotando circolarmente gli indici si hanno dalle (9) le relazioni

$$e_{hki} = \gamma_{hki} - \gamma_{hik}\,, \tag{9'}$$

$$e_{kih} = \gamma_{kih} - \gamma_{khi}\,. \tag{9''}$$

Sommiamo la (9) con la (9′) e sottragghiamo la (9″). Viene

$$e_{ihk} + e_{hki} - e_{kih} = \gamma_{ihk} - \gamma_{ikh} + \gamma_{hki} - \gamma_{hik} - \gamma_{kih} + \gamma_{khi}\,,$$

ed in base alla (10) si semplifica in

$$2\,\gamma_{ihk} = e_{ihk} + e_{hki} - e_{kih}\,.$$

§ 4.

Differenziali di 2° ordine.

Ricordiamo che nel § 2 abbiamo visto che dall'invertibilità dei simboli d e d' risulta

$$d'\psi_i - d\,\psi'_i = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, e_{ihk}\, \psi_h\, \psi'_k\,. \tag{11}$$

Vogliamo ora dare per i differenziali secondi una determinazione invariantiva. A questo scopo poniamo $d'\psi_i$ eguale ad una forma bilineare nelle ψ, cioè poniamo

$$d'\,\psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \psi_h\, \psi'_k\,, \tag{12}$$

i coefficienti γ essendo n^3 funzioni del posto a priori arbitrarie (*), vincolate soltanto dal rendere soddisfatte le (11).

In questa forma bilineare non c'è niente che dipenda dalla scelta delle variabili di riferimento, quindi è invariante di fronte ai cambiamenti di variabili.

Accanto alle (12) abbiamo

$$d\,\psi'_i = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \psi'_h\, \psi_k = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \gamma_{ikh}\, \psi_h\, \psi'_k\,, \tag{12'}$$

(*) Vedremo in seguito che questi coefficienti γ coincidono coi coefficienti di rotazione di Ricci, e perciò li indichiamo fin d'ora con lo stesso simbolo.

e tenendo presente che devono essere soddisfatte le (11), si vede che deve essere

$$\gamma_{ihk} - \gamma_{ikh} = e_{ihk}. \tag{I}$$

Queste relazioni sono $n\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2}$. Delle γ ne rimangono quindi $n^3 - \frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$ a priori arbitrarie.

§ 5.

Condizione di rigidità.

Presa a considerare la forma bilineare

$$\Phi = \sum_1^n {}_i \psi_i \psi'_i$$

chiamiamo condizione di rigidità la condizione

$$d'' \Phi = 0$$

per ogni sistema di differenziali d, d', d'', cioè formalmente la condizione di invarianza, rispetto ad un generico operatore d'' della forma Φ.

In base alle (12) si ha

$$d'' \Phi = \sum_1^n {}_i (\psi'_i d'' \psi_i + \psi_i d'' \psi'_i) =$$

$$= \sum_1^n {}_{ihk} (\gamma_{ihk} \psi_h \psi'_i \psi''_k + \gamma_{ihk} \psi_i \psi'_h \psi''_k).$$

Scambiando nella seconda sommatoria i con h viene

$$d'' \Phi = \sum_1^n {}_{ihk} \psi'_i \psi_h \psi''_k (\gamma_{ihk} + \gamma_{hik}).$$

Da ciò risulta che la condizione necessaria e sufficiente affinchè s'annulli $d''\Phi$ è offerta dall'annullarsi dei coefficienti (*), cioè dalle relazioni

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{hik} = 0 \tag{II}$$

che comprendono come casi particolari, per $i = h$, le $\gamma_{iik} = 0$.

Queste relazioni sono $n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$, perchè all'indice k si possono dare tutti i valori da 1 ad n, e per la coppia ih si devono prendere tutte le combinazioni con ripetizione di n indici a due a due.

Osserviamo che il numero delle relazioni (II) è appunto eguale al numero delle γ, a priori arbitrarie, trovato nel paragrafo precedente.

§ 6.

Identità delle nostre γ coi coefficienti di rotazione di Ricci.

In questo paragrafo indichiamo, per maggior chiarezza, con γ^* i coefficienti di rotazione di Ricci, e ricordiamo che nel § 3 abbiamo visto che si ha

$$2\gamma^*_{ihk} = e_{ihk} + e_{hki} - e_{kih}.$$

Operando sulle (I) e (II) nello stesso modo con cui nell'ultima parte del § 3 abbiamo operato sulle (9) e (10) per ottenere le precedenti espressioni delle γ^*, si trova

$$2\gamma_{ihk} = e_{ihk} + e_{hki} - e_{kih}.$$

Dal confronto di questa relazione con la precedente risulta appunto che i coefficienti γ, che compariscono nelle (12), coincidono coi coefficienti di rotazione di Ricci.

(*) Basta osservare che abbiamo tre sistemi di differenziali, indipendenti l'uno dall'altro, e che per ogni sistema possiamo prendere eguali a zero tutti gli incrementi, uno eccettuato.

§ 7.

Parallelismo in V_n.

1. Nella varietà V_n ad ogni operatore d facciamo corrispondere una direzione (d), e ricordiamo che (come abbiamo visto nel § 1), assumendo la (2) come espressione del quadrato dell'elemento lineare, si coordina ad ogni punto P un'ennupla di direzioni mutuamente ortogonali.

Considerata una direzione (d) uscente da un punto P qualsiasi, posto

$$z_i\, d\, s = \psi_i \qquad (i = 1,\ 2, \cdots, n) \tag{13}$$

e tenuta presente la (2) si ha identicamente

$$\sum_1^n{}_i\, z_i^2 = 1$$

e si possono quindi considerare le z_i come coseni direttori della (d).

Osserviamo che dalle (13), (1), e (4') risulta

$$z_i = \frac{\psi_i}{d\, s} = \sum_1^n{}_r\, \lambda_{i/r}\, \lambda_i^{(r)}.$$

2. Siano P e Q due punti vicinissimi di una curva l qualsiasi in V_n, e (d) la direzione da essi determinata. Vogliamo definire il parallelismo di due direzioni (d') e (d'_Q) appartenenti a V_n, ed uscenti da P e da Q. All'uopo caratterizzeremo gli incrementi che devono subire i coseni z'_i relativi alla (d') per dar luogo ai coseni relativi alla direzione parallela (d'_Q), e ciò, adottando per i differenziali secondi delle ψ la caratterizzazione risultante dalla condizione di rigidità.

Posto

$$\psi'_i = z'_i\, d'\, s \tag{13'}$$

si ha

$$d\, z'_i = d\, \frac{\psi'_i}{d\ s} = \frac{d\, \psi'_i}{d'\, s}$$

essendo il $d' s$ costante per la condizione di rigidità.

In base alle (12') si ha

$$d\,z'_i = \frac{\sum_{hk}^{n} \gamma_{ihk}\, \psi'_h\, \psi_k}{d'\,s}.$$

Dividendo ambo i membri per $d\,s$, e tenendo presenti le (13) e le (13') viene

$$\frac{d\,z'_i}{d\,s} = \sum_{hk}^{n} \gamma_{ihk}\, z'_h\, z_k. \tag{14}$$

Queste sono le n equazioni fondamentali che definiscono il modo di variare dei coseni direttori lungo la linea l in base alla condizione che le direzioni individuate da questi coseni si mantengano parallele.

Data la curva l, i coseni z_k sono funzioni note dell'arco s di l, le γ_{ihk} sono funzioni note del posto, quindi sono noti i coefficienti di ogni z'_h, e le equazioni trovate sono quindi n equazioni differenziali ordinarie nelle altrettante quantità z'_i. Ne segue, in base ai noti teoremi di esistenza, che spiccata una direzione da un punto qualsiasi di l, rimangono determinate le direzioni parallele per ogni altro punto della curva.

Quando la linea l coincide con l'ennesima linea dell'ennupla ortogonale le z_k sono tutte nulle, ad eccezione di z_n che è 1, quindi, in questo caso particolare, le (14) assumono la forma

$$\frac{d\,z'_i}{d\,s} = \sum_{h}^{n} \gamma_{ihn}\, z'_h.$$

Come immediata conseguenza della condizione di rigidità, si ha la conservazione lungo l dell'angolo di due direzioni concorrenti, che si trasportano per parallelismo.

Le equazioni di parallelismo che abbiamo trovato sono già ridotte alla forma emisimmetrica, quindi sussistono tutte le proprietà di cui godono i sistemi differenziali di questo tipo, e che sono state anche rilevate dal Professore Levi-Civita nella sua Memoria citata nell'introduzione.

§ 8.

GEODETICHE.

In particolare supponiamo che nelle (14) z' coincida con z, ossia la direzione di cui si considera il trasporto per parallelismo è quella della linea l; allora le (14) assumono la forma

$$\frac{d z_i}{d s} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} z_h z_k . \tag{15}$$

Quando la linea l è conosciuta abbiamo visto che si hanno n equazioni nelle z'_i; invece quando il trasporto avviene lungo l'incognita curva l, le γ (che sono note soltanto come funzioni del posto) non si conoscono. Conviene allora associare alle (15) le identità

$$\frac{d x_r}{d s} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \lambda_i^{(r)} z_i \tag{16}$$

che si ottengono risolvendo le formole di definizione dei coseni

$$z_i = \sum_{1}^{n}{}_{r} \lambda_{i/r} \frac{d x_r}{d s} .$$

Le (15) e (16) definiscono complessivamente curve tali che la loro direzione in un punto qualsiasi è sempre parallela alla direzione iniziale. Curve siffatte si chiamano *geodetiche della varietà.*

Dalla condizione di rigidità risulta poi che queste curve hanno la proprietà di rendere stazionario l'integrale che dà la lunghezza dell'arco compreso fra due loro punti, e così si ritrova, per le geodetiche di una varietà qualunque, l'ordinaria definizione estremale.

§ 9.

Proprietà geometrica che caratterizza il parallelismo di direzioni spiccate da punti infinitamente vicini.

1. Siano P e P' due punti vicinissimi nella varietà V_n; ds' la loro distanza elementare; (d') la direzione da essi determinata; z'_i i coseni direttori della (d') rispetto all'ennupla ortogonale $1, 2, \ldots, n$ uscente da P. Per maggior chiarezza sarà bene contraddistinguere con apice le linee dell'ennupla uscente da P'.

Consideriamo l'angolo che la linea i, uscente da P, forma con la linea h', uscente da P', e poniamo (per $h \neq i$)

$$\widehat{h' i} = \frac{\pi}{2} - p_{hi}\, ds'$$

essendo p_{hi} una quantità finita. Allora $p_{hi}\, ds'$ si può manifestamente risguardare come $\cos \widehat{h' i}$ (*).

Supponiamo ora la varietà V_n immersa in uno spazio euclideo S_N ad un numero conveniente di dimensioni. Indichiamo (rispetto ad un generico sistema cartesiano di S_N) con $\alpha_{h\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ i coseni direttori della linea h spiccata da P, e con $\alpha_{h\nu} + d\alpha_{h\nu}$ gli analoghi coseni della h'. Si ha (per $i \neq h$)

$$p_{hi} = \sum_1^N{}_\nu \frac{d\alpha_{h\nu}}{ds'} \alpha_{i\nu}.$$

Indicando con λ' i parametri della direzione (d') si ha

$$z'_k = \sum_1^n{}_p \lambda_{k/p} \lambda'^{(p)}$$

da cui

$$\lambda'^{(r)} = \sum_1^n{}_k z'_k \lambda_k^{(r)}.$$

(*) Basta osservare che è $\cos \widehat{h' i} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p_{hi}\, ds'\right) = \operatorname{sen} p_{hi}\, ds'$.

Quindi

$$\frac{d\,\alpha_{h\nu}}{d\,s'}=\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial\,\alpha_{h\nu}}{\partial\,x_r}\,\lambda'^{(r)}=\sum_1^n{}_{rk}\,\frac{\partial\,\alpha_{h\nu}}{\partial\,x_r}\,\lambda_k^{(r)}\,z'_k$$

e designando al solito con s_k l'arco della linea k, si può porre

$$\frac{d\,\alpha_{h\nu}}{d\,s'}=\sum_1^n{}_k\,\frac{d\,\alpha_{h\nu}}{d\,s_k}\,z'_k.$$

Siccome (*)

$$\sum_1^N{}_\nu\,\alpha_{i\nu}\,\frac{d\,\alpha_{h\nu}}{d\,s_k}=\gamma_{hik}$$

così risulta in definitiva

$$p_{hi}=\sum_1^n{}_k\,\gamma_{hik}\,z'_k \tag{17}$$

e questo generalizza ovviamente l'espressione delle p, rilevata al § 13 della Memoria citata del Prof. Levi-Civita. Ivi si suppone (d') coincidente con n, donde $z'_1=z'_2=\ldots\quad=z'_{n-1}=0\quad z'_n=1$.

2. Per quanto precede il coseno c_{hi} dell'angolo $\widehat{h'i}$ vale (a meno di infinitesimi di 2° ordine)

$$1 \text{ per } h=i,\quad p_{hi}\,d\,s' \text{ per } h\neq i.$$

Se z_h sono i coseni di una generica direzione (d) rispetto all'ennupla $1', 2', \ldots, n'$ quelli relativi all'ennupla $1, 2, \ldots, n$ saranno

$$z^*_i=\sum_1^n{}_h\,c_{ih}\,z_h\,,$$

ossia

$$z^*_i=z_i+d\,s'\,\textstyle\sum'_h\,p_{hi}\,z_h$$

(Σ' significa che nel fare la somma da 1 ad n bisogna ommettere l'indice i).

Ricordando che è $\gamma_{hik}=-\gamma_{ihk}$ (e quindi in particolare $\gamma_{hhk}=0$), e tenendo presente la (17) si può scrivere

$$z^*_i=z_i-d\,s'\,\sum_1^n{}_{hk}\,\gamma_{ihk}\,z_h\,z'_k\,. \tag{18}$$

(*) Veggasi Ricci, ***Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.*** Memorie dei Lincei, 1896, pag. 294.

3. Sia (d) una generica direzione uscente da P di coseni direttori $z_i = \frac{\psi_i}{d\,s}$ (rispetto all'ennupla uscente da P). La parallela a (d) uscente da P' ha, rispetto all'ennupla $1'$, $2'$, ..., n', i coseni

$$z_i + d' z_i = z_i + \frac{1}{d\,s} d' \psi_i$$

essendo per la (12)

$$\frac{1}{d\,s} d' \psi_i = d\,s' \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} z_h z'_k .$$

Riportando codesti coseni $z_i + d' z_i$ all'ennupla 1, 2, ..., n mediante la formola (18) (in cui si sostituisca $z_i + d' z_i$ a z_i) si ha, a meno di termini di 2° ordine,

$$z^*_i = z_i .$$

Questa relazione ci dice che due direzioni parallele uscenti da P e P' formano lo stesso angolo con la linea i dell'ennupla, cioè con una generica direzione fissa di V_n.

E così si ritrova, come una proprietà del parallelismo definito nel § 7, la definizione di parallelismo data dal prof. Levi-Civita nella sua citata Memoria.

§ 10.

Teorema di Severi.

Dalla proprietà di due direzioni parallele, testè rilevata, si può dedurre la caratterizzazione intrinseca del parallelismo data dal Severi.

Le considerazioni che servono a raggiungere l'intento mi sono state suggerite dal prof. Levi-Civita, e sono le seguenti.

Siano P e P' due punti vicinissimi nella varietà V_n, (d') la direzione da essi determinata, (d) una direzione uscente da P, (δ) la direzione parallela uscente da P'.

Consideriamo le due geodetiche spiccate da P nelle direzioni (d) e (d'), e la superficie geodetica G da esse determinata. Consideriamo ancora una varietà σ ad m dimensioni, passante per P, e contenuta in V_n; supponiamo che σ contenga le due direzioni (d) e (d'), e sia del resto qualunque.

Indichiamo con τ l'iperpiano tangente a V_n in P, e con π l'iperpiano tangente a σ in P. Siccome σ è contenuta in V_n, π sarà contenuto in τ.

Osserviamo ora che se (δ) è parallela a (d) in V_n lo è anche in σ.

Infatti se le due direzioni (d) e (δ) sono parallele in V_n formano gli stessi angoli con ogni direzione fissa appartenente a τ, e quindi, a fortiori, formeranno gli stessi angoli con ogni direzione fissa di π.

Ciò premesso prendiamo per σ la superficie geodetica G, allora la parallela a (d) in V_n è anche parallela in G, e quindi il parallelismo nella varietà V_n è ricondotto al parallelismo sulla superficie G, determinata dai dati della questione. In questo consiste appunto il teorema di SEVERI.

Per le varietà a due dimensioni parallelismo equivale ad isogonalità, quindi la parallela ad una direzione (d) è determinata in modo unico, e si ha una caratterizzazione intrinseca del parallelismo.

§ 11.

DIFFERENZIALI D'ORDINE SUPERIORE.

Applicando ripetutamente le (12) rimangono definiti anche differenziali superiori del tipo $d'' d' \psi_i$, $d' d'' \psi_i$, il simbolo d'' dovendo naturalmente trattarsi alla stessa stregua di d' e d.

Consideriamo ora le espressioni

$$u_i = d' d'' \psi_i - d'' d' \psi_i. \tag{19}$$

Dalle (12) si ha

$$d' d'' \psi_i = d' \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} \psi_h \psi''_k =$$

$$= \sum_{hkp}^{n}{}_{1} \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial x_p} d' x_p \psi_h \psi''_k + \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} d' \psi_h \cdot \psi''_k + \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} \psi_h \cdot d' \psi''_k ,$$

$$d'' d' \psi_i = d'' \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} \psi_h \psi'_k =$$

$$= \sum_{hkp}^{n}{}_{1} \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial x_p} d'' x_p \psi_h \psi'_k + \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} d'' \psi_h \cdot \psi'_k + \sum_{hk}^{n}{}_{1} \gamma_{ihk} \psi_h \cdot d'' \psi'_k .$$

Dalle (12), dalle (6') e dalle (4') si ha ancora

$$d' d'' \psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hkq} \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial s_q} \psi_h \psi'_q \psi''_k + \sum_{1}^{n}{}_{hkpq} \gamma_{ihk} \gamma_{hpq} \psi_p \psi'_q \psi''_k + \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} \psi_h \cdot d' \psi''_k ,$$

$$d'' d' \psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hkq} \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial s_q} \psi_h \psi'_k \psi''_q + \sum_{1}^{n}{}_{hkpq} \gamma_{ihk} \gamma_{hpq} \psi_p \psi'_k \psi''_q + \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} \psi_h \cdot d'' \psi'_k$$

e sottraendo membro a membro dopo aver scambiato nelle due prime sommatorie q con k, viene

$$u_i = d' d'' \psi_i - d'' d' \psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hkq} \left(\frac{\partial \gamma_{ihq}}{\partial s_k} - \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial s_q} \right) \psi_h \psi'_k \psi''_q +$$

$$+ \sum_{1}^{n}{}_{hkpq} (\gamma_{ihq} \gamma_{hpk} - \gamma_{ihk} \gamma_{hpq}) \psi_p \psi'_k \psi''_q + \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} \psi_h (d' \psi''_k - d'' \psi'_k).$$

Tenendo presenti le (11) e le (9) l'ultima sommatoria diventa

$$\sum_{1}^{n}{}_{hkpq} \gamma_{ihk} (\gamma_{kqp} - \gamma_{kpq}) \psi_h \psi'_p \psi''_q$$

talchè, scambiando gli indici in modo che in ogni sommatoria comparisca il prodotto $\psi_h \psi'_k \psi''_q$, e ponendo

$$\gamma_{ih,qk} = \frac{\partial \gamma_{ihq}}{\partial s_k} - \frac{\partial \gamma_{ihk}}{\partial s_q} + \sum_{1}^{n}{}_{p} (\gamma_{pik} \gamma_{phq} - \gamma_{piq} \gamma_{phk}) + \sum_{1}^{n}{}_{p} \gamma_{ihp} (\gamma_{pqk} - \gamma_{pkq})$$

si ottiene infine

$$u_i = \sum_{1}^{n}{}_{hkq} \gamma_{ih,qk} \psi_h \psi'_k \psi''_q . \tag{20}$$

§ 12.

Forma quadrilineare di Riemann-Ricci e conseguente biquadratica J.

Giova ora considerare l'espressione

$$= \sum_{1}^{n}{}_{i} u_i \psi'''_i$$

in cui ψ''' è la stessa forma ψ riferita ad altri incrementi d''' delle variabili, arbitrari ed indipendenti dagli incrementi d, d', d'' precedentemente considerati.

Tenendo presenti le (20) si può subito scrivere

$$J = \sum_{1}^{n}{}_{ihkq} \gamma_{ih,qk} \psi_h \psi'_k \psi''_q \psi'''_i .$$

Di questa forma quadrilineare troveremo l'interpretazione geometrica nel caso particolare in cui i sistemi di differenziali indipendenti si riducano a due, coincidendo d con d' e d'' con d''', ossia nel caso che diventi la forma biquadratica

$$J = \sum_{1}^{n}{}_{ihkq} \gamma_{ih,qk} \psi'_h \psi'_k \psi''_q \psi''_i .$$

§ 13.

PARALLELOGRAMMOIDI SECONDO LEVI-CIVITA.
TRASPORTO DELLE COORDINATE E DELLE ψ.

1. Sia PQ un generico arco di geodetica nella nostra varietà V_n. Dai punti P e Q imaginiamo spiccate due altre geodetiche in direzioni parallele. Assumiamo su queste geodetiche due archi eguali

$$PP' = QQ' = d's,$$

e congiungiamo P' e Q' con un arco di geodetica. Otteniamo un quadrangolo geodetico che, secondo LEVI-CIVITA, chiameremo parallelogrammoide; e designeremo come base e soprabase i due lati opposti PQ e $P'Q'$.

2. Il sistema formato dalle equazioni delle geodetiche e dalle seguenti

$$d' x_r = \sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i^{(r)} \psi'_i \qquad d' \psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{ihk} \psi_h \psi'_k ,$$

consente di fare il trasporto lungo la geodetica spiccata da P, e che indicheremo con g, di una qualsiasi funzione

$$f\Big(P,\ (d)\Big)\ (*)\ \Big[\text{ossia } f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)\,(z_1,\ z_2,\dots,\ z_n)\Big]$$

del posto e di una direzione che si conserva parallela a se stessa (lungo g). In un così fatto trasporto lungo g il $d\,s^2$ rimane inalterato, perchè le equazioni di parallelismo sono state desunte in base alla condizione di rigidità.

In particolare, indicata con (d'') la direzione determinata dai due punti P e Q, e detti $(d''\,x_r)_{P'}$ i differenziali corrispondenti alla parallela a (d'') spiccata da P', si avrà (dallo sviluppo del Mac Laurin)

$$(d''\,x_r)_{P'} = d''\,x_r + d'\,d''\,x_r + \frac{1}{2}\,d'^2\,d''\,x_r + \cdots \tag{21}$$

dove d'' e d' hanno le determinazioni che loro competono in P.

3. Se una $f\Big(P,\ (d')\Big)$ è trasportata (lungo g) fino in P', divenendo $f\Big(P,\ (d'),\ s\Big)$

$$d''\,f\Big(P,\ (d'),\ s\Big)$$

vuol dire l'incremento che subisce f per il fatto che (s rimanendo inalterato) P si incrementa di $d''\,P$, e diventa quindi il punto Q, e (d') diviene la parallela a (d') spiccata da Q. Con ciò $f + d''\,f$ è (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo) quello che diventa f, quando si passa da P' a Q'.

Se in particolare f coincide colla coordinata x_r, ed indichiamo con $x_r^{(P')}$ il suo valore in P', abbiamo

$$x_r^{(P')} = x_r + d'\,x_r + \frac{1}{2}\,d'^2\,x_r + \cdots,$$

e

$$d''\,x_r^{(P')} = d''\,x_r + d''\,d'\,x_r + \frac{1}{2}\,d''\,d'^2\,x_r + \cdots$$

(*) Ad ogni valore dell'arco s corrisponde un punto di un'assegnata geodetica; supponiamo che sia fissata una legge secondo la quale ad ogni valore di s corrisponde una direzione; allora potremo considerare una funzione $f\Big(P,\ (d)\Big)$ del posto e di una direzione.

rappresentano (a meno di termini d'ordine superiore al I° rispetto all'operatore d'') gli incrementi $D x_r$ che subiscono le coordinate nel passaggio da P' a Q'. Il confronto colla (21) permette di scrivere

$$D x_r = (d'' x_r)_{P'} - \frac{1}{2} v^{(r)} \tag{22}$$

avendo posto

$$v^{(r)} = d' d'' d' x_r - d'' d'^2 x_r .$$

§ 14.

CURVATURA REIMANNIANA E SUA IMMEDIATA ESPRESSIONE MEDIANTE J.

Indicando con $\psi_i''^{(P')}$ le ψ relative al punto P' ed alla direzione (d''), si ha

$$\psi_i''^{(P')} = \sum_1^n {}_r (\lambda_{i/r})_{P'} (d'' x_r)_{P'}. \tag{23}$$

D'altra parte le ψ (relative al punto P' ed alla direzione $P' Q'$) mediante cui si esprime $\overline{P' Q'}^2$ sono

$$\Psi_i = \sum_1^n {}_r (\lambda_{i/r})_{P'} D x_r .$$

In virtù delle (22) e (23) si può scrivere

$$\Psi_i = \psi_i''^{(P')} - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_r (\lambda_{i/r})_{P'} v^{(r)}, \tag{24}$$

dove, a meno di infinitesimi del 3° ordine rispetto a $d's$, e del 2° rispetto a $d''s$, si può sostituire $\lambda_{i/r}$ a $(\lambda_{i/r})_{P'}$.

Tenendo presente che per una qualsiasi funzione delle x_i è $d'' d' = d' d''$, si ha identicamente

$$d' d'' \psi'_i - d'' d' \psi_i = \sum_1^n {}_r \lambda_{i/r} v^{(r)}. \tag{25}$$

Dalle (24), sempre a meno d'infinitesimi del 3° ordine rispetto a $d's$, consegue

$$\overline{P'Q'}^2 = \sum_1^n {}_i \Psi_i^2 = \sum_1^n {}_i \psi_i''^{(P')} - \sum_1^n {}_i \psi_i'' \sum_1^n {}_r \lambda_{i/r} v^{(r)};$$

e tenendo presente che nel passaggio da P a P' il $d's^2$ non si altera, ed in virtù delle (25) risulta infine

$$\overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 - \sum_1^n {}_i \psi_i'' (d'd''\psi'_i - d''d'\psi'_i).$$

La sommatoria che comparisce in quest'ultima espressione è la forma J considerata nel § 12 in cui d coincide con d', e d''' con d'', ossia è la forma biquadratica J. Si può dunque scrivere

$$\overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 - J. \tag{26}$$

Possiamo ora dare una caratterizzazione intrinseca della curvatura, esprimendola mediante J.

Costruiamo in V_n un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$, indichiamo con A la sua area, o più precisamente l'area di qualunque pezzo di superficie a due dimensioni, avente il parallelogrammoide per contorno e tendente a zero con esso, e facciamo il rapporto

$$K = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{A^2}.$$

Questo rapporto, che in virtù delle (26) diventa

$$K = \frac{J}{A^2},$$

costituisce la curvatura Riemanniana di V_n in P secondo la giacitura del parallelogrammoide.

Padova, maggio 1918.

Sur le Calcul des Variations dans l'espace.

(*Par* M. Nilos Sakellariou, *à Athènes.*)

Soit R une région connexe de l'espace à trois dimensions; nous adjoindrons à chaque élément linéaire dirigé situé à l'intérieur de R et caractérisé par ses coordonnées x, y, z et par les angles θ, φ, ψ, que cet élément fait avec la partie positive des axes ox, oy, oz, une fonction positive $V(x, y, z; \theta, \varphi, \psi)$.

Nous supposerons pour plus de simplicité que V est une fonction analytique et périodique de ces trois variables θ, φ, ψ avec la période 2π. Soit d'autre part:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad\qquad t_1 \leqq t \leqq t_2 \tag{1}$$

un arc de courbe rectifiable situé à l'intérieur de R et joignant deux points donnés P_1 et P_2 de cette région. L'intégrale:

$$\left.\begin{array}{c} I = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{V(x, y, z; \theta, \varphi, \psi)}\, d\, t, \\ \theta = \arc\cos \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \varphi = \arc\cos \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ \psi = \arc\cos \dfrac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{array}\right\} \tag{2}$$

a une valeur parfaitement définie, et représente le temps mis par un mobile pour passer de P_1 en P_2 le long de la courbe (1) avec la vitesse V qui correspond à l'élément linéaire parcouru en cet instant.

Le problème du Calcul des Variations dans l'espace est équivalent au problème des brachistochrones, c'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer la courbe rectifiable située dans R et joignant P_1 à P_2 pour laquelle le temps du parcours est le plus petit possible.

On pose:

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{V(x, y, z;\ \theta, \varphi, \psi)} = F(x, y, z;\ x', y', z') \tag{3}$$

et on voit par cette définition même que la fonction F doit satisfaire pour toutes les valeurs des x, y, z dans R et des x', y', z', qui ne sont pas nulles à la fois, à la condition d'homogénéité:

$$F(x, y, z;\ k x', k y', k z') = k F(x, y, z;\ x', y', z'), \qquad k > 0. \tag{4}$$

En vertu de la relation (3) nous aurons l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, z;\ x', y', z')\, d t. \tag{2'}$$

Il est souvent commode de prendre pour paramètre la longueur s de la courbe (1) à partir d'un de ses points; nous désignons dans ce cas la fonction F ainsi que ses dérivées partielles par les notations abrégées:

$$F(x, y, z;\ \cos\theta, \cos\varphi, \cos\psi) = F(x, y, z;\ \theta, \varphi, \psi) = F(\theta, \varphi, \psi) = F,$$

$$F_x(x, y, z;\ \cos\theta, \cos\varphi, \cos\psi) = F_x(x, y, z;\ \theta, \varphi, \psi) = F_x(\theta, \varphi, \psi) = F_x,$$

$$F_{x'x'}(x, y, z;\ \cos\theta, \cos\varphi, \cos\psi) = F_{x'x'}(x, y, z;\ \theta, \varphi, \psi) = F_{x'x'}(\theta, \varphi, \psi) = F_{x'x'}.$$

. . . .

De l'expression homogène (4) on déduit les formules suivantes:

$$F(\theta, \varphi, \psi) = \cos\theta\, F_{x'} + \cos\varphi\, F_{y'} + \cos\psi\, F_{z'}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \cos\theta\, F_{x'x} + \cos\varphi\, F_{y'x} + \cos\psi\, F_{z'x} \\ F_y &= \cos\theta\, F_{x'y} + \cos\varphi\, F_{y'y} + \cos\psi\, F_{z'y} \\ F_z &= \cos\theta\, F_{x'z} + \cos\varphi\, F_{y'z} + \cos\psi\, F_{z'z}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, F_{x'x'} + \cos\varphi\, F_{x'y'} + \cos\psi\, F_{x'z'} &= 0 \\ \cos\theta\, F_{y'x'} + \cos\varphi\, F_{y'y'} + \cos\psi\, F_{y'z'} &= 0 \\ \cos\theta\, F_{z'x'} + \cos\varphi\, F_{z'y'} + \cos\psi\, F_{z'z'} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

et après différentiation de (4) par rapport à $x, y, z;\ x', y', z'$ on trouve:

$$F_x(x, y, z;\ k x', k y', k z') = k F_x(x, y, z;\ x', y', z'), \ldots$$

$$F_{x'}(x, y, z;\ k x', k y', k z') = F_{x'}(x, y, z;\ x', y', z'), \ldots$$

Des équations (6') on tire facilement:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{F_{x'x'}F_{y'y'}-F^2_{x'y'}}{\cos^2\psi}=\dfrac{F_{x'x'}F_{z'z'}-F^2_{x'z'}}{\cos^2\varphi}=\dfrac{F_{y'y'}F_{z'z'}-F^2_{y'z'}}{\cos^2\theta}=\\ =\dfrac{F_{x'y'}F_{z'z'}-F_{x'z'}F_{y'z'}}{-\cos\theta\cos\varphi}=\dfrac{F_{x'z'}F_{y'y'}-F_{x'y'}F_{y'z'}}{-\cos\theta\cos\psi}=\\ \qquad=\dfrac{F_{y'z'}F_{x'x'}-F_{x'z'}F_{x'y'}}{-\cos\varphi\cdot\cos\psi}=F_1(x,\ y,\ z;\ \theta,\ \varphi,\ \psi).\end{array}\right\}\quad(7)$$

Cette fonction F_1 est analogue à la notation de WEIERSTRASS dans le problème qui correspond dans le plan. Si les trois fonctions (1), dans lesquelles t est remplacé par s, introduites dans l'intégrale considérée la rendent de valeur extrémum on trouve les trois équations suivantes:

$$F_{x'}=\int_{s_1}^{s_2}F_x\,ds+c_1\,,$$

$$F_{y'}=\int_{s_1}^{s_2}F_y\,ds+c_2\,,$$

$$F_{z'}=\int_{s_1}^{s_2}F_z\,ds+c_3\,,$$

et après différentiation on a les trois équations différentielles du second ordre qui correspondent à l'équation différentielle de LAGRANGE dans le problème respectif du plan (*):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{ds}F_{x'}-F_x=0,\\[2mm] \dfrac{d}{ds}F_{y'}-F_y=0,\\[2mm] \dfrac{d}{ds}F_{z'}-F_z=0.\end{array}\right\}\quad(8)$$

Par un raisonnement analogue à celui du problème correspondant dans le plan on trouve que la condition nécessaire de WEIERSTRASS pour un minimum est la suivante:

$$E(\theta,\ \varphi,\ \psi;\ \bar\theta,\ \bar\varphi,\ \bar\psi)\geqq 0 \quad (9)$$

(*) V. CH. MASON and G. BLISS, *The properties of curves in spaces which minimize a definite integral.* Transaction of the American math. Society, 9 (1908), p. 440.

où on a posé

$$E\Big(x(s),\ y(s),\ z(s);\ x'(s),\ y'(s),\ z'(s);\ \cos\bar\theta,\ \cos\bar\varphi,\ \cos\bar\psi\Big) = \\ = E(\theta,\ \varphi,\ \psi;\ \bar\theta,\ \bar\varphi,\ \bar\psi)$$

et

$$E = (\bar F_{x'} - F_{x'})\,\bar x' + (\bar F_{y'} - F_{y'})\,\bar y' + (\bar F_{z'} - F_{z'})\,\bar z',$$

si $\bar\theta$, $\bar\varphi$, $\bar\psi$ désignent les angles que fait avec les axes ox, oy, oz la direction positive de la tangente à une courbe C_1 au point d'intersection de cette courbe et de (1).

Si on écrit la fonction de WEIERSTRASS E comme il suit,

$$\left.\begin{aligned} E &= \bar F - F - (\bar x' - x')\,F_{x'} - (\bar y' - y')\,F_{y'} - (\bar z' - z')\,F_{z'} \\ &= \frac{1}{2}\Big[F_{x'x'}\,\xi^2 + F_{y'y'}\,\eta^2 + F_{z'z'}\,\zeta^2 + 2\,F_{x'y'}\,\xi\eta + 2\,F_{x'z'}\,\xi\zeta + 2\,F_{y'z'}\,\eta\zeta\Big] \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

où il est posé

$$\bar F = F(x,\ y,\ z;\ \bar x',\ \bar y',\ \bar z'),\quad \bar F_{x'} = F_{x'}(x,\ y,\ z;\ \bar x',\ \bar y',\ \bar z')$$

$$F_{x'x'} = F_{x'x'}(x,\ y,\ z;\ x' + \mu\,\xi,\ y' + \mu\,\eta,\ z' + \mu\,\zeta),\ldots$$

$$\bar x' - x' = \xi,\quad \bar y' - y' = \eta,\quad \bar z' - z' = \zeta;\qquad 0 < \mu < 1$$

il en résulte que dans le cas d'un minimum la forme quadratique (10) doit être positive ou nulle pour tout système de valeurs des x, y, z; x', y', z' correspondant sur la courbe (1) et pour toutes les valeurs des ξ, η, ζ. Si on désigne par Q la forme (10) on aura:

$$2\,Q = F_{x'x'}\,\xi^2 + F_{y'y'}\,\eta^2 + F_{z'z'}\,\zeta^2 + 2\,F_{x'y'}\,\xi\eta + 2\,F_{x'z'}\,\xi\zeta + 2\,F_{y'z'}\,\eta\zeta. \quad (10')$$

Nous employons maintenant la transformation de KRONECKER et le Hessien aura la forme suivante

$$\begin{vmatrix} F_{x'x'}, & F_{x'y'}, & F_{x'z'} \\ F_{y'x'}, & F_{y'y'}, & F_{y'z'} \\ F_{z'x'}, & F_{z'y'}, & F_{z'z'} \end{vmatrix},$$

qui est égal à zéro à cause des (6'). En supposant que la fonction F_1 soit différente de zéro, on peut résoudre par rapport à ξ, η, ζ le système des équations suivantes

$$F_{x'x'}\xi + F_{x'y'}\eta + F_{x'z'}\zeta = 0$$
$$F_{x'y'}\xi + F_{y'y'}\eta + F_{y'z'}\zeta = 0\,,$$

dont les premiers membres sont les dérivées partielles de (10′) par rapport à ξ, η, pour toute valeur arbitraire de ζ. Si ξ_1, η_1 désignent un système de ces valeurs des ξ, η, on aura:

$$2\,Q \equiv F_{x'x'}(\xi - \xi_1)^2 + 2\,F_{x'y'}(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1) + F_{y'y'}(\eta - \eta_1)^2 \tag{11}$$

et on peut mettre cette dernière forme sous la forme d'une somme de deux carrés. La forme (11) est positive si $F_1 > 0$, $F_{x'x'} > 0$, et par suite $F_{y'y'} > 0$ et $F_{z'z'} > 0$; la même est négative si $F_1 > 0$ et $F_{x'x'}$, $F_{y'y'}$, $F_{z'z'} < 0$. Dans le cas où $F_1 = 0$ et $F_{x'x'} \neq 0$, la forme (11) peut se mettre sous la forme d'un carré, d'où il résulte que les dérivées partielles de $2\,Q$ par rapport à ξ, η sont proportionnelles à la dérivée partielle de $2\,Q$ par rapport à ζ. Nous concluons de là, que ***les conditions de*** LEGENDRE ***pour un extrémum de l'intégrale I sont les suivantes***:

$$F_1 > 0,\quad F_{x'x'},\quad F_{y'y'},\quad F_{z'z'} > 0 \qquad \text{(min.)}$$
$$F_1 > 0,\quad F_{x'x'},\quad F_{y'y'},\quad F_{z'z'} < 0 \qquad \text{(max.)}.$$

Pour donner à ces conditions une forme géométrique, considérons le problème sous la forme initiale et traçons dans l'espace l'hodographe des vitesses V, c'est-à-dire le lieu des extrémités des vecteurs passant par un point de l'espace, égaux et parallèles aux vitesses V qui correspondent à un point fixe (x, y, z). Ce lieu est une surface fermée $(F > 0)$, qui varie avec le point (x, y, z) et nous l'appelons la ***figurative*** (*) du problème dans l'espace. Si nous appelons λ, μ, ν les coordonnées rectangulaires d'un point de la figurative on a par définition:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= V\cos\theta = \frac{\cos\theta}{F} \\ \mu &= V\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{F} \\ \nu &= V\cos\psi = \frac{\cos\psi}{F} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(*) A. HADAMARD, *Leçons su le Calcul des Variations* (1910), p. 90.

et par suite à cause de (3) l'équation de la figurative est de la forme:

$$F(x, y, z; \lambda, \mu, \nu) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{V} = 1. \tag{12'}$$

Soient $Q_1(\lambda, \mu, \nu)$, $\bar{Q}_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ deux points de la figurative, correspondant aux directions (θ, φ, ψ), $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})$ de deux éléments du point (x, y, z) de la courbe (1); les coordonnées du point $\bar{Q}_1$ sont:

$$\bar{\lambda} = \frac{\cos\bar{\theta}}{F(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})}, \quad \bar{\mu} = \frac{\cos\bar{\varphi}}{F(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})}, \quad \bar{\nu} = \frac{\cos\bar{\psi}}{F(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})}. \tag{12''}$$

Le plan tangent à la surface (12') au point Q_1 a pour équation

$$(X - \lambda) F_{x'}(x, y, z; \lambda, \mu, \nu) + (Y - \mu) F_{y'} + (Z - \nu) F_{z'} = 0 \tag{13}$$

dans laquelle X, Y, Z désignent les coordonnées courantes. À cause de la relation (4) on a:

$$\lambda F_{x'} + \mu F_{y'} + \nu F_{z'} = F \tag{13'}$$

et l'équation ci-dessus prend la forme

$$X F_{x'} + Y F_{y'} + Z F_{z'} = 1.$$

On voit par cette équation qu'aucun des plans tangents à la figurative ne passe par l'origine des coordonnées et si en un point de la courbe (1) il y a deux directions (θ, φ, ψ), $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})$ qui satisfont aux conditions:

$$\left.\begin{aligned} F_{x'}(\theta, \varphi, \psi) &= F_{x'}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \\ F_{y'}(\theta, \varphi, \psi) &= F_{y'}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \\ F_{z'}(\theta, \varphi, \psi) &= F_{z'}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

qui sont analogues aux conditions d'Erdmann-Weierstrass dans le problème du plan, les plans tangents à la figurative aux points Q_1, $\bar{Q}_1$ qui correspondent à ces directions coïncident.

Imaginons-nous maintenant le plan tangent à la figurative au point $Q_1(\lambda, \mu, \nu)$ et une droite $\bar{Q}_1 \bar{L}_1$ menée par le point $\bar{Q}_1$ et parallèle à $O_1 Q_1$ jusqu'au plan tangent, où O_1 désigne l'origine des coordonnées λ, μ, ν. Il est aisé de voir que l'on a:

$$\frac{\bar{Q}_1 \bar{L}_1}{O_1 Q_1} = \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}'_1}{O_1 \bar{Q}'_1} = 1 - \bar{\lambda} F_{x'} - \bar{\mu} F_{y'} - \bar{\nu} F_{z'},$$

si $O_1 Q'_1$, $\overline{Q}_1 \overline{Q}'_1$ désignent les distances de deux points O_1, $\overline{Q}_1$ au plan tangent. À cause de (12″) on pourra écrire:

$$\frac{\overline{Q}_1 \overline{L}_1}{O_1 Q_1} = \frac{F(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) - \cos\overline{\theta}\, F_{x'}(\theta, \varphi, \psi) - \cos\overline{\varphi}\, F_{y'} - \cos\overline{\psi}\, F_{z'}}{F(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \psi)} =$$

$$= \frac{E(x, y, z; \theta, \varphi, \psi; \overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi})}{F(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi})}.$$

On voit par cette dernière relation que la fonction E de WEIERSTRASS change de signe lorsqu'il y a des points de la figurative de part et d'autre du plan tangent. La condition de WEIERSTRASS ($E \geqq 0$) s'exprime donc dans cette interprétation géométrique en disant que le plan tangent doit être extrême de la figurative (*). On voit aussi que dans le cas où les conditions (14) sont remplies, on aura:

$$E(x, y, z; \theta, \varphi, \psi; \overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) = 0, \quad E(x, y, z; \overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}; \theta, \varphi, \psi) = 0$$

et à cause de la propriété d'homogénéité nous aurons encore:

$$E(x, y, z; \lambda, \mu, \nu; \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}) = 0, \quad E(x, y, z; \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}; \lambda, \mu, \nu) = 0,$$

ce qui signifie en langage géométrique que le plan tangent à la figurative au point $Q_1(\lambda, \mu, \nu)$ passe par le point $\overline{Q}_1(\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ et *vice-versa.*

Considérons maintenant ν comme une fonction de deux autres variables λ et μ déterminée par l'équation (12′) et posons:

$$p = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}, \quad q = \frac{\partial \nu}{\partial \mu}, \quad r = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda\, \partial \mu}, \quad t = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2};$$

la courbure totale de la figurative au point $Q_1(\lambda, \mu, \nu)$ est donnée par la formule:

$$\frac{r\,t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

et en introduisant dans cette formule les quantités $p, q, r, s, t,$ définies par

(*) V. C. CARATHÉODORY, *Sur les points singuliers du problème de Calcul des Variations dans le plan.* Annali di Matem. pura ed applicata (3), 21, 1913, p. 153.

où F_x, F_y, F_z; $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ sont fonctions des χ, ψ, ω; χ_s, ψ_s, ω_s, et $\overline{F}_{x'}$, $\overline{F}_{y'}$, $\overline{F}_{z'}$,... des χ, ψ, ω; $\cos\overline{\theta}$, $\cos\overline{\varphi}$, $\cos\overline{\psi}$. Le jacobien des équations (16) par rapport à s, $\cos\theta$, $\cos\overline{\varphi}$, $\cos\overline{\psi}$ est:

$$\begin{vmatrix} F_x - \overline{F}_{x'x}\cos\theta - \overline{F}_{x'y}\cos\varphi - \overline{F}_{x'z}\cos\psi, & -F_{x'x'}, & -\overline{F}_{x'y'}, & -\overline{F}_{x'z'} \\ F_y - \overline{F}_{y'x}\cos\theta - \overline{F}_{y'y}\cos\varphi - \overline{F}_{y'z}\cos\psi, & -\overline{F}_{y'x'}, & -\overline{F}_{y'y'}, & -\overline{F}_{y'z'} \\ F_z - \overline{F}_{z'x}\cos\theta - \overline{F}_{z'y}\cos\varphi - \overline{F}_{z'z}\cos\psi, & -\overline{F}_{z'x'}, & -\overline{F}_{z'y'}, & -\overline{F}_{z'z'} \\ 0 & 2\cos\overline{\theta}, & 2\cos\overline{\varphi}, & 2\cos\overline{\psi} \end{vmatrix}.$$

En multipliant la deuxième colonne par $\cos\overline{\theta}$, et en lui ajoutant les termes correspondants de la troisième et de la quatrième multipliés par $\cos\overline{\varphi}$, $\cos\overline{\psi}$ nous trouvons en vertu de (6'):

$$\frac{2}{\cos\overline{\theta}}\begin{vmatrix} F_x - \overline{F}_{x'x}\cos\theta - \overline{F}_{x'y}\cos\varphi - \overline{F}_{x'z}\cos\psi, & \overline{F}_{x'y'}, & \overline{F}_{x'z'} \\ F_y - \overline{F}_{y'x}\cos\theta - \overline{F}_{y'y}\cos\varphi - \overline{F}_{y'z}\cos\psi, & \overline{F}_{y'y'}, & \overline{F}_{y'z'} \\ F_z - \overline{F}_{z'x}\cos\theta - \overline{F}_{z'y}\cos\varphi - \overline{F}_{z'z}\cos\psi, & \overline{F}_{z'y'}, & \overline{F}_{z'z'} \end{vmatrix},$$

ce qui donne en développant à cause de (7) et (6)

$$\frac{2\overline{F}_1}{\cos\overline{\theta}}\Big[\Big(F_x - \big(\overline{F}_{x'x}\cos\theta + \overline{F}_{x'y}\cos\varphi + \overline{F}_{x'z}\cos\psi\big)\Big)\cos^2\overline{\theta} +$$
$$+\Big(F_y - \big(\overline{F}_{y'x}\cos\theta + \overline{F}_{y'y}\cos\varphi + \overline{F}_{y'z}\cos\psi\big)\Big)\cos\overline{\theta}\,.\cos\overline{\varphi} +$$
$$+\Big(F_z - \big(\overline{F}_{z'x}\cos\theta + \overline{F}_{z'y}\cos\varphi + \overline{F}_{z'z}\cos\psi\big)\Big)\cos\overline{\theta}\cos\overline{\psi}\Big] = -2\overline{F}_1\,\Omega,$$

où l'on pose:

$$\Omega = \cos\theta\, F_x(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) + \cos\varphi\, F_y(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) + \cos\psi\, F_z(\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) -$$
$$-\cos\overline{\theta}\, F_x(\theta, \varphi, \psi) - \cos\overline{\varphi}\, F_y(\theta, \varphi, \psi) - \cos\overline{\psi}\, F_z(\theta, \varphi, \psi).$$

En supposant que $\overline{F}_1 \neq 0$, $\Omega_0 \neq 0$, où Ω_0 est la valeur de Ω au point P_0, on peut résoudre les équations (16) d'une seule manière au voisinage du point $(s_0, a_0, b_0, \cos\overline{\theta}_0, \cos\overline{\varphi}_0, \cos\overline{\psi}_0)$ par rapport à s, $\cos\overline{\theta}$, $\cos\overline{\varphi}$, $\cos\overline{\psi}$ et ces solutions:

$$s = s(a, b), \quad \cos\overline{\theta} = \overline{\theta}(a, b), \quad \cos\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(a, b), \quad \cos\overline{\psi} = \overline{\psi}(a, b)$$

seront de classe C' au voisinage de $a=a_0$, $b=b_0$ et les conditions suivantes seront remplies:

$$\cos\bar\theta_0=\bar\theta(a_0, b_0),\quad \cos\bar\varphi_0=\bar\varphi(a_0, b_0),\quad \cos\bar\psi_0=\bar\psi(a_0, b_0),\quad s_0=s(a_0, b_0).$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite, si l'on a $\bar F_1>0$, on aura:

$$F_1\Big(\chi(s(a, b), a, b),\quad \psi(s(a, b), a, b),\quad \omega(s(a, b), a, b),$$
$$\bar\theta(a, b),\quad \bar\varphi(a, b),\quad \bar\psi(a, b)\Big)>0,$$

pour toutes les valeurs des quantités a, b, telles que

$$|a-a_0|<k,\quad |b-b_0|<l.$$

Si l'on pose encore:

$$F_{x'x'}(\theta, \varphi, \psi),\quad F_{y'y'}(\theta, \varphi, \psi),\quad F_{z'z'}(\theta, \varphi, \psi)\gtrless 0,$$
$$F_{x'x'}(\bar\theta, \bar\varphi, \bar\psi),\quad F_{y'y'}(\bar\theta, \bar\varphi, \bar\psi),\quad F_{z'z'}(\bar\theta, \bar\varphi, \bar\psi)\gtrless 0,$$

on peut intégrer le système suivant d'équations différentielles:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\bar x}{ds}=\cos\bar\theta,\quad \frac{d\bar y}{ds}=\cos\bar\varphi,\quad \frac{d\bar z}{ds}=\cos\bar\psi,\\
&\frac{d\bar\theta}{ds}=-\frac{d^2\bar x}{ds^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\bar\theta}},\quad \frac{d\bar\varphi}{ds}=-\frac{d^2\bar y}{ds^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\bar\varphi}},\\
&\frac{d\bar\psi}{ds}=-\frac{d^2\bar z}{ds^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\bar\psi}},
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

où les $\frac{d^2\bar x}{ds^2}$, $\frac{d^2\bar y}{ds^2}$, $\frac{d^2\bar z}{ds^2}$ sont exprimées en fonction des $\bar x$, $\bar y$, $\bar z$; $\bar x'$, $\bar y'$, $\bar z'$ à l'aide des équations (8) et de l'équation

$$\bar x'\bar x''+\bar y'\bar y''+\bar z'\bar z''=0$$

parce que entre les déterminants:

$$\begin{vmatrix}\bar F_{x'x'}, & \bar F_{x'y'}, & \cos\bar\theta\\ \bar F_{y'x'}, & \bar F_{y'y'}, & \cos\bar\varphi\\ \bar F_{z'x'}, & \bar F_{z'y'}, & \cos\bar\psi\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix}\bar F_{x'x'}, & \bar F_{x'z'}, & \cos\bar\theta\\ \bar F_{y'x'}, & \bar F_{y'z'}, & \cos\bar\varphi\\ \bar F_{z'x'}, & \bar F_{z'z'}, & \cos\bar\psi\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix}\bar F_{x'y'}, & \bar F_{x'z'}, & \cos\bar\theta\\ \bar F_{y'y'}, & \bar F_{y'z'}, & \cos\bar\varphi\\ \bar F_{z'y'}, & \bar F_{z'z'}, & \cos\bar\psi\end{vmatrix}$$

il y en a un au moins différant de zéro et aucun des dénominateurs des (17) n'est nul, parce que si l'on avait par exemple

$$\cos\bar{\theta} = \pm 1$$

d'apres les relations (6'), on aurait aussi $\bar{F}_{x'x'} = 0$.

Alors, on conclut qu'on peut construire une courbe $\bar{C}_{a,b}$ par le point P dans la direction $\cos\bar{\theta}$, $\cos\bar{\varphi}$, $\cos\bar{\psi}$, qui sera représentée par les équations:

$$\bar{x} = \bar{\chi}(s, a, b), \quad \bar{y} = \bar{\psi}(s, a, b), \quad \bar{z} = \bar{\omega}(s, a, b).$$

Le paramètre s sera pris sur cette courbe pour la valeur $s = s(a, b)$ qui correspond au point P et par suite nous aurons:

$$\bar{\chi}(s, a, b) = \chi_1(a, b), \quad \bar{\psi}(s, a, b) = \psi_1(a, b), \quad \bar{\omega}(s, a, b) = \omega_1(a, b)$$

où s est remplacé par $s(a, b)$ et l'on a:

$$\chi_1(a, b) = \chi(s(a, b), a, b), \quad \psi_1(a, b) = \psi(s(a, b), a, b),$$
$$\omega_1(a, b) = \omega(s(a, b), a, b).$$

Ainsi nous avons une courbe brisée $C_{a,b} + \bar{C}_{a,b}$ qui possède le point angulaire P et sur laquelle le paramètre varie continuellement. Si l'on considère les quantités a, b comme variables, on aura une famille de courbes brisées du problème, qui contient la solution $P_1 P_0 P_2$ pour les valeurs $a = a_0$, $b = b_0$.

Intégration des équations (8).

Comme on voit facilement, les équations (8) ne sont pas indépendantes entre elles. Pour les intégrer, nous considérons deux de ces équations, par exemple les deux premières, qui avec:

$$\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \cos^2\psi = 1,$$

forment le système suivant:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}F_{x'} - F_x = 0 \\ &\frac{d}{ds}F_{y'} - F_y = 0 \\ &x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

d'où l'on tire:

$$\left.\begin{aligned} F_{x'x'}x''+F_{x'y'}y''+F_{x'z'}z''+\cdots&=0\\ F_{y'x'}x''+F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''+\cdots&=0\\ x'\,x''+\;y'\,y''+\;z'\,z''\quad&=0.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Le déterminant:

$$\begin{vmatrix} F_{x'x'}, & F_{x'y'}, & F_{x'z'}\\ F_{x'y'}, & F_{y'y'}, & F_{y'z'}\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=F_1(\theta,\ \varphi,\ \psi)\cos\psi$$

du système (19) par rapport à x'', y'', z'' n'est pas égal à zéro, d'après le résultat (de la page 113) pour la fonction F_1 dans le cas d'extrémum, et par suite nous aurons:

$$x''=x(x,\ y,\ z;\ \theta,\ \varphi,\ \psi)$$
$$y''=y(x,\ y,\ z;\ \theta,\ \varphi,\ \psi)$$
$$z''=z(x,\ y,\ z;\ \theta,\ \varphi,\ \psi)$$
$$x'=\cos\theta=\frac{dx}{ds},\quad y'=\cos\varphi=\frac{dy}{ds},\quad z'=\cos\psi=\frac{dz}{ds}.$$

De ces dernières équations on trouve les intégrales suivantes:

$$x=x^{(1)}(s,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$
$$y=y^{(1)}(s,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad \text{où}\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$
$$z=z^{(1)}(s,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

et de plus si au point P_1 nous avons:

$$s=s_1;\quad x=x_1,\quad y=y_1,\quad z=z_1;$$
$$\theta=\theta_1,\quad \varphi=\varphi_1,\quad \psi=\psi_1;\quad \cos\theta=\cos\theta_1=\alpha_1,\ldots,$$

nous aurons:

$$x^{(1)}(s_1,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)=x_1,\quad y^{(1)}(s_1,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)=y_1,$$
$$z^{(1)}(s_1,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)=z_1,$$
$$x'_1=x_s^{(1)}(s_1,\ a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)=\cos\theta_1=\alpha_1,\ldots$$

Dans ce qui suit nous voulons réduire l'intégration des équations différentielles de LAGRANGE-EULER du problème considéré à l'intégration d'un système canonique d'équations différentielles, en employant la méthode de multiplicateurs de LAGRANGE. Nous supposons d'abord que le multiplicateur, qui correspond à la condition $x'^2+y'^2+z'^2-1=0$, soit désigné par $\frac{1}{2}\lambda$, ainsi que nous avons à regarder la fonction:

$$F(\theta, \varphi, \psi)+\frac{1}{2}\lambda(s)(x'^2+y'^2+z'^2-1)$$

au lieu de $F(\theta, \varphi, \psi)$ de l'intégral (2'). Alors, nous avons dans ce cas les équations suivantes au lieu des trois premières des (18):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}F_{x'}+\frac{d}{ds}\lambda x'-F_x&=0\\ \frac{d}{ds}F_{y'}+\frac{d}{ds}\lambda y'-F_y&=0\\ \frac{d}{ds}F_{z'}+\frac{d}{ds}\lambda z'-F_z&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

et encore:

$$x'^2+y'^2+z'^2-1=0.$$

Après la différentiation désignée nous trouvons:

$$\begin{aligned} F_{x'x'}x''+F_{x'y'}y''+F_{x'z'}z''+\lambda x''+x'\frac{d\lambda}{ds}+\cdots&=0\\ F_{y'x'}x''+F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''+\lambda y''+y'\frac{d\lambda}{ds}+\cdots&=0\\ F_{z'x'}x''+F_{z'y'}y''+F_{z'z'}z''+\lambda z''+z'\frac{d\lambda}{ds}+\cdots&=0 \end{aligned}$$

et de plus:

$$x'x''+y'y''+z'z'' \qquad\qquad =0.$$

Le déterminant de ces équations par rapport à x'', y'', z'', λ, est le suivant:

$$D=\begin{vmatrix} F_{x'x'}+\lambda, & F_{x'y'} & , F_{x'z'} & , x'\\ F_{y'x'} & , F_{y'y'}+\lambda, & F_{y'z'} & , y'\\ F_{z'x'} & , F_{z'y'} & , F_{z'z'}+\lambda, & z'\\ x' & , y' & , z' & , 0 \end{vmatrix},$$

qui est égal à

$$D = -F_1(\theta, \varphi, \psi) - \lambda \left[x'^2 (F_{y'y'} + F_{z'z'}) + y'^2 (F_{x'x'} + F_{z'z'}) + z'^2 (F_{x'x'} + F_{y'y'}) \right] +$$
$$+ 2\lambda (x' y' F_{x'y'} + x' z' F_{x'z'} + y' z' F_{y'z'}) - \lambda^2$$

à cause des (7). De cette dernière forme on voit que $D \neq 0$, si le multiplicateur λ est supposé positif et de plus

$$x' y' F_{x'y'} + x' z' F_{x'z'} + y' z' F_{y'z'} \leqq 0.$$

Cela posé, nous supposons que $D \neq 0$, et par suite nous pouvons écrire:

$$x'' = x_2(x, y, z;\ x', y', z', \lambda)$$
$$y'' = y_2(x, y, z;\ x', y', z', \lambda)$$
$$z'' = z_2(x, y, z;\ x', y', z', \lambda)$$
$$\lambda' = \lambda_2(x, y, z;\ x', y', z', \lambda),$$

qui avec:

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z'$$

forment un système d'équations différentielles (21). Supposons maintenant que nous avons une solution du système (20) qui l'est aussi du (21):

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad \lambda = \lambda(s) \qquad s_1 \leqq s \leqq s_2.$$

et posons:

$$u = F_{x'} + \lambda x', \quad u - (F_{x'} + \lambda x') = u_1 = 0$$
$$v = F_{y'} + \lambda y', \quad v - (F_{y'} + \lambda y') = v_1 = 0$$
$$w = F_{z'} + \lambda z', \quad w - (F_{z'} + \lambda z') = w_1 = 0$$
$$\omega_1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0.$$

Le Jacobien de ces équations par rapport à x', y', z', λ est égal à:

$$\frac{\partial(u_1, v_1, w_1, \omega_1)}{\partial(x', y', z', \lambda)} = 2D,$$

et d'après notre hypothèse nous tirons les x', y', z', λ d'une seule manière en fonction des x, y, z; u, v, w, de sorte que nous avons:

$$\begin{aligned} x' &= x^{(2)}(x, y, z; u, v, w) \\ y' &= y^{(2)}(x, y, z; u, v, w) \\ z' &= z^{(2)}(x, y, z; u, v, w) \\ \lambda &= \lambda^{(2)}(x, y, z; u, v, w) \end{aligned}$$

aux environs de l'ensemble:

$$\left.\begin{aligned} & x = x(s), \ y = y(s), \ z = z(s), \\ & x' = x'(s), \ y' = y'(s), \ z' = z'(s), \\ & u = u(s), \ v = v(s), \ w = w(s), \\ & \lambda = \lambda(s), \end{aligned}\right\} \ s_1 \leqq s \leqq s_2$$

qui donnent les identités suivantes:

$$\begin{aligned} & x^{(2)}(x, y, z; u, v, w)\, \lambda^{(2)}(x, y, z; u, v, w) + F_{x'}(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \equiv u \\ & y^{(2)}(x, y, z; u, v, w)\, \lambda^{(2)}(x, y, z; u, v, w) + F_{y'}(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \equiv v \\ & z^{(2)}(x, y, z; u, v, w)\, \lambda^{(2)}(x, y, z; u, v, w) + F_{z'}(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \equiv w \\ & x^{(2)}(x, y, z; u, v, w)^2 + y^{(2)}(x, y, z; u, v, w)^2 + z^{(2)}(x, y, z; u, v, w)^2 - 1 \equiv 0. \end{aligned}$$

En vertu des équations (20) nous avons;

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= F_x(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \\ \frac{dv}{ds} &= F_y(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \\ \frac{dw}{ds} &= F_z(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}), \end{aligned}$$

de sorte que les fonctions:

$$\left.\begin{aligned} & x = x(s), \ y = y(s), \ z = z(s) \\ & u = u(s), \ v = v(s), \ w = w(s) \end{aligned}\right\} \ s_1 \leqq s \leqq s_2$$

satisfont les équations différentielles:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dx}{ds}=x^{(2)}(x, y, z; u, v, w), & \dfrac{du}{ds}=F_x(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \\ \dfrac{dy}{ds}=y^{(2)}(x, y, z; u, v, w), & \dfrac{dv}{ds}=F_y(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \\ \dfrac{dz}{ds}=z^{(2)}(x, y, z; u, v, w), & \dfrac{dw}{ds}=F_z(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \\ \multicolumn{2}{c}{s_1 \leqq s \leqq s_2 .}\end{array}\right\} \quad (22)$$

Ces dernières équations se ramènent à la forme d'un système canonique d'équations différentielles.

En effet, nous posons:

$$H(s, x, y, z; u, v, w) = \cos\theta\,(F_{x'} + \cos\theta \,.\, \lambda) + \cos\varphi\,(F_{y'} + \lambda\cos\varphi) +$$

$$+ \cos\psi\,(F_{z'} + \lambda\cos\psi) - F(\theta, \varphi, \psi) - \frac{\lambda}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

et d'après la substitution:

$$x' = x^{(2)}(x, y, z; u, v, w)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

on aura:

$$H(s, x, y, z; u, v, w) = u\,x^{(2)} + v\,y^{(2)} + w\,z^{(2)} - F(x, y, z; x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) -$$

$$-\frac{\lambda}{2}(x^{(2)2} + y^{(2)2} + z^{(2)2}),$$

et ensuite:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = u\frac{\partial x^{(2)}}{\partial x} + v\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} + w\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x} - F_x - \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x} -$$

$$-\lambda x'\frac{\partial x^{(2)}}{\partial x} - \lambda y'\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \lambda z'\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x} = -F_x,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -F_y, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -F z.$$

D'une manière analogue nous trouvons:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = x^{(2)}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = y^{(2)}, \quad \frac{\partial H}{\partial w} = z^{(2)}.$$

Alors, nous pouvons écrire les équations suivantes au côté des (22):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial H}{\partial w}, \quad \frac{dw}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

c'est le système canonique demandé.

le 12 Juillet 1919.

Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema di permutabilità.

MEMORIA II.

(*Di* LUIGI BIANCHI, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Nel presente lavoro si semplificano e si completano le ricerche esposte nell'altra Memoria sull'argomento pubblicata nel Vol. XXVII di questi *Annali* (1918) (*).

Lo studio delle trasformazioni di RIBAUCOUR pei sistemi H di GUICHARD-DARBOUX ((M), §§ 23, 24) porta alla nozione dei sistemi n^{pli} ortogonali $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ con rotazioni *associate* β_{ik}, $\bar{\beta}_{ik}$, cioè tali che $\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$. Si stabilisce l'esistenza di particolari trasformazioni di RIBAUCOUR, indicate con T_m, mediante le quali da una coppia (β_{ik}, β_{ki}) di sistemi associati di rotazioni si passa ad altre tali coppie $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e si dimostra che per queste $\bar{T}_m$ sussiste un teorema *speciale* di permutabilità. Le attuali T_m costituiscono una generalizzazione delle trasformazioni indicate collo stesso simbolo in (M) (§§ 15, 16), alle quali si riducono nel caso particolare dei sistemi (E) che presentano la simmetria nelle rotazioni: $\beta_{ki} = \beta_{ik}$, $\beta'_{ki} = \beta'_{ik}$. Applicando questi risultati ai sistemi H di GUICHARD-DARBOUX, si ottiene per questi sistemi l'effettiva costruzione delle corrispondenti T_m (di cui l'esistenza erasi già stabilita in (M)), mediante l'integrazione di un sistema *lineare* ai differenziali totali, e si prova che anche in questo caso sussiste un teorema speciale di permutabilità. Si estendono poi, nei §§ 10, 11, i risultati ai sistemi H *generalizzati* che trovano i loro associati ancora in uno spazio euclideo, ma con un ds^2 indefinito.

Il seguito della Memoria è dedicato alle ricerche analoghe pei sistemi n^{pli}

(*) I richiami a questa Memoria saranno contrassegnati con (M).

ortogonali ***negli spazii a curvatura costante.*** È qui da osservare che, ammettendo questi spazii una rappresentazione conforme sull'euclideo, che conserva le varietà sferiche ed i circoli, risulta già a priori che le proprietà relative alle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali si trasportano dallo spazio euclideo a quelli di curvatura costante. Ma è interessante stabilirne le formole effettive, che offrono la più stretta analogia con quelle vigenti nello spazio euclideo e conducono per tal modo a nuove classi particolari notevoli di sistemi n^{pli} ortogonali, quali i *sistemi E* (§ 14), i *sistemi H* (§§ 17, 18), ed i *sistemi Q* (§§ 19, 20), per le cui trasformazioni di Ribaucour sussiste ancora un teorema speciale di permutabilità.

§ 1.

Le trasformazioni di Ribaucour per le rotazioni β_{ik}.

Nelle formole stabilite in (M) per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n euclideo ad n dimensioni si distinguono quelle che concernono soltanto le rotazioni β_{ik} dalle altre in cui entrano in considerazione i coefficienti H_i^2 del ds^2, riferito ad un sistema n^{plo} ortogonale Σ cui appartengono quelle rotazioni. Le prime sono comuni a tutti i sistemi trasformati di Combescure di Σ e, dal punto di vista analitico, che qui vogliamo porre in rilievo, sono relative alle trasformazioni del sistema a derivate parziali caratteristico per le rotazioni (M) § 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} &= \beta_{il}\beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_{\lambda}^{(i,k)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Una *trasformazione di Ribaucour* delle β_{ik} in nuove soluzioni β'_{ik} del sistema (I) risulta individuata ogniqualvolta si assumano n funzioni (trasformatrici): $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soddisfacenti al sistema *completamente integrabile* delle equazioni di trasformazione:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\cdot\gamma_k \;(i \neq k). \tag{1}$$

Se si pone

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \qquad (2) \qquad\qquad \Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda, \qquad (3)$$

le formole che dànno le nuove rotazioni β'_{ik} sono le (40*) (M) § 7:

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i \Theta_k}{A}. \tag{4}$$

Verifichiamo in effetto che questi valori (4) delle β'_{ik} soddisfano alle relative equazioni (I):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} &= \beta'_{il} \beta'_{lk} \\ \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_k} &+ \sum_\lambda^{(i,k)} \beta'_{\lambda i} \beta'_{\lambda k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Per questo si cominci dall'osservare che, derivando la Θ_i data dalla (3) rapporto ad u_k ($k \neq i$), si ha

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda,$$

ossia per le (1)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda.$$

Eseguendo le derivazioni colle (I), (1), e raccogliendo i termini, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \gamma_k \left\{ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \right\} + \beta_{ki} \left\{ \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \beta_{ik}\gamma_i + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda \right\};$$

ma a destra il coefficiente di γ_k è nullo per la seconda delle (I) e quello di β_{ki}, secondo la (3), è Θ_k.

Dunque intanto le Θ_i, definite dalla (3), soddisfano al sistema differenziale

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k, \tag{6}$$

che è precisamente *l'aggiunto* del sistema (1). D'altra parte, se deriviamo rispetto ad u_i l'espressione (A) definita dalla (2), troviamo

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + 2 \sum_\lambda^{(i)} \gamma_\lambda \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial u_i} = 2\gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\},$$

o in fine

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \Theta_i. \tag{7}$$

Con queste formole (6), (7) si verifica subito che le β'_{ik}, definite dalle (4), soddisfano alle (5). E risulta anche facilmente che il passaggio inverso, dalle β'_{ik} alle β_{ik}, è una trasformazione della stessa natura, per la quale le funzioni trasformatrici γ_i debbono sostituirsi colle $\frac{\gamma_i}{A}$ e corrispondentemente le Θ_i con $-\frac{\Theta_i}{A}$.

§ 2.

Le formole del teorema generale di permutabilità.

Prendiamo un secondo sistema di funzioni trasformatrici, che indichiamo con $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$, onde avremo, come per le (1)

$$\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma'_k.$$

Applicando alle β_{ik} la nuova trasformazione ($\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$), e indicando con β''_{ik} le rotazioni trasformate, avremo per le (4)

$$\beta''_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma'_i \Theta'_k}{A'},$$

dove si è posto:

$$A' = \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda, \quad \Theta'_i = \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda.$$

Le formole del teorema di permutabilità, stabilite in (M) § 10, dimostrano che si ottiene un sistema ($\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$) di funzioni trasformatrici, pel passaggio dalle rotazioni β'_{ik} ad un quarto nuovo sistema di rotazioni $\overline{\beta}_{ik}$, ove si prenda

$$\Gamma_i = \frac{\tau \gamma_i}{A} + \gamma'_i, \tag{8}$$

quando la funzione τ sia determinata con una quadratura (che introduce una costante arbitraria) dalle condizioni:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\gamma'_i \Theta_i. \tag{9}$$

Attualmente, per la verifica analitica, è da osservarsi in primo luogo che le condizioni d'integrabilità di queste (9) sono identicamente soddisfatte, e che dalla derivazione delle (8) risulta subito per le precedenti

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik} \Gamma_k,$$

le quali formole provano che le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ sono in effetto funzioni trasformatrici per le β'_{ik}.

Se ora poniamo

$$B = \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda, \tag{10}$$

ne risulta derivando

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma_i \Theta'_i + \gamma'_i \Theta_i,$$

e per ciò la funzione

$$\tau' = -(\tau + 2B) \tag{11}$$

soddisfa alle equazioni analoghe alle (9)

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u_i} = -2\gamma_i \Theta'_i. \tag{9'}$$

Dunque le funzioni $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_n$ definite in analogia colle (9) da

$$\Gamma'_i = \frac{\tau' \gamma'_i}{A'} + \gamma_i \tag{12}$$

saranno funzioni trasformatrici pel passaggio dal sistema (β''_{ik}) di rotazioni ad uno nuovo. Secondo il teorema di permutabilità, quest'ultimo coincide coll'altro $(\overline{\beta}_{ik})$ sopra ottenuto trasformando il sistema (β'_{ik}) colla trasformazione

$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$. Queste proprietà confermiamo ora col calcolo effettivo delle $\overline{\beta}_{ik}$, secondo la formola (4):

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta'_{ik} - \frac{2\,\Gamma_i}{\sum\limits_\lambda \Gamma_\lambda^2}\left\{\frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta'_{\lambda k}\,\Gamma_\lambda\right\}. \tag{13}$$

Sostituendo per le Γ_i i valori (8) troviamo

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{A\,A' - \tau\,\tau'}{A},$$

ed anche la formola

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta'_{\lambda k}\,\Gamma_\lambda = \Theta'_k - \frac{\tau'\,\Theta_k}{A}, \tag{14}$$

onde la (13) si cangia nella formola definitiva

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2}{A\,A' - \tau\,\tau'}\left\{A\,\gamma'_i\,\Theta'_k + A'\,\gamma_i\,\Theta_k + \tau\,\gamma_i\,\Theta'_k + \tau'\,\gamma'_i\,\Theta_k\right\}. \tag{15}$$

Ora il secondo membro di questa resta manifestamente invariato se si scambiano le γ_i colle γ'_i, e perciò Θ_i con Θ'_i, A con A' e τ con τ', e ne risulta verificato il teorema di permutabilità.

§ 3.

Le rotazioni associate nei sistemi H di Guichard-Darboux.

Abbiamo chiamato sistemi H di Guichard-Darboux ((M) § 23) quei sistemi n^{pli} ortogonali dell'S_n, pei quali i coefficienti H_i^2 del ds^2 soddisfano alla condizione

$$\sum_\lambda H_\lambda^2 = \text{cost.}$$

Ora le rotazioni β_{ik} di siffatti sistemi soddisfano, oltre che alle equazioni generali (I), anche a quelle che ne derivano permutando ivi in ciascuna rotazione β_{ik} i due indici, onde il sistema differenziale per le rotazioni dei sistemi H si scrive

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} = 0 \\
&\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Si è visto (l. c.) che l'integrale generale (β_{ik}) delle (II) dipende da $n(n-1)$ *funzioni arbitrarie*, e che ad ogni sua soluzione (β_{ik}) corrispondono in particolare ∞^n sistemi H con quelle rotazioni, che si ottengono integrando il sistema (completo) di equazioni ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda. \tag{16}$$

Essendo le (II) simmetriche nelle rotazioni, ne risulta che, ponendo

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki},$$

anche le $\overline{\beta}_{ik}$ daranno le rotazioni per una classe di nuovi sistemi n^{pli} ortogonali, fra i quali si troveranno in particolare dei sistemi $\overline{H}$ di Guichard-Darboux, definiti dal sistema ai differenziali totali corrispondente alle (16)

$$\frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \overline{H}_k, \qquad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda. \tag{16*}$$

Diremo che le β_{ik} e le $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$ costituiscono un *sistema di rotazioni associate* (β_{ik}, β_{ki}); la ricerca di queste rotazioni associate dipende dall'integrazione del sistema differenziale (II). E diremo ancora *associati* due sistemi H, $\overline{H}$ di Guichard-Darboux che corrispondano, secondo le (16), (16*), il primo alle rotazioni β_{ik}, il secondo alle loro associate β_{ki}.

Come si è detto, i teoremi generali permettono di precisare l'esistenza ed il grado di arbitrarietà delle soluzioni (β_{ik}) delle (II). Le trasformazioni di Ribaucour ci daranno ora il modo di dedurre da una soluzione iniziale (β_{ik}) infinite nuove soluzioni (β'_{ik}) con operazioni che consistono soltanto nell'integrazione di un sistema *lineare* (completo) di equazioni ai differenziali totali. Per questo procediamo alla risoluzione del seguente problema: *Dato un sistema di rotazioni associate* β_{ik}, $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$, *trovarne uno nuovo* β'_{ik}, $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, *le cui rotazioni siano legate rispettivamente alle primitive da due trasformazioni di Ribaucour* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n)$.

§ 4.

Le trasformazioni T_m dei sistemi (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate.

Cominciamo dall'osservare che le $2n$ funzioni trasformatrici (associate) γ_i, $\overline{\gamma}_i$ debbono soddisfare alle equazioni di trasformazione

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}_k, \tag{17}$$

e posto come al § 1

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \quad \Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda$$

$$\overline{A} = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2, \quad \overline{\Theta}_i = \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda,$$

si ha, con notazioni di evidente significato, per la (4)

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i\Theta_k}{A}, \quad \overline{\beta}'_{ik} = \overline{\beta}_{ik} - \frac{2\overline{\gamma}_i\overline{\Theta}_k}{\overline{A}} = \beta_{ki} - \frac{2\overline{\gamma}_i\overline{\Theta}_k}{\overline{A}}.$$

Per ciò la condizione del problema enunciato, che debba aversi $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, porta che, per tutte le coppie i, k di indici diversi, si abbia

$$\frac{\Theta_i}{A\overline{\gamma}_i} = \frac{\overline{\Theta}_k}{\overline{A}\gamma_k}.$$

Ciò equivale a dire che, indicando con μ, $\overline{\mu}$ due convenienti fattori di proporzionalità, avremo per tutti i valori dell'indice i

$$\Theta_i = \mu\overline{\gamma}_i, \qquad \overline{\Theta}_i = \overline{\mu}\gamma_i, \tag{18}$$

e inoltre

$$\overline{\mu}A = \mu\overline{A}. \tag{18*}$$

Proviamo subito che questi due fattori μ, $\overline{\mu}$ sono di necessità due costanti m, $\overline{m}$, poichè, derivando le (18) rispetto ad una qualunque u_k, risulta per la (6)

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\mu\,\overline{\gamma}_i) = \beta_{ki}\,.\,\mu\,\overline{\gamma}_k, \qquad \frac{\partial}{\partial u_k}(\overline{\mu}\,\gamma_i) = \beta_{ik}\,.\,\overline{\mu}\,\gamma_k,$$

indi per le (17): $\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0$, $\frac{\partial \overline{\mu}}{\partial u_k} = 0$. Si osservi ora che, essendo A, $\overline{A}$ positive, queste due costanti m, $\overline{m}$ hanno lo stesso segno. Ma di più, senza scapito della generalità, possiamo supporle eguali, come risulta dal considerare che se si moltiplicano p. e. tutte le γ_i per un fattore costante b (senza alterare le $\overline{\gamma}_i$) ciò equivale a cangiare m, $\overline{m}$ rispettivamente in $\frac{m}{b}$, $b\,\overline{m}$, onde basta prendere $b^2 = \frac{m}{\overline{m}}$ per raggiungere lo scopo.

Otteniamo adunque la soluzione più generale del problema proposto assoggettando le $2n$ incognite $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ a soddisfare al sistema lineare ai differenziali totali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k, \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\,\overline{\gamma}_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,\overline{\gamma}_k, \qquad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} = m\,\gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\,\overline{\gamma}_\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

dove m rappresenta una costante arbitraria, e inoltre, secondo la (18*), alla equazione in termini finiti

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2. \tag{III*}$$

Ma dai calcoli stessi sopra eseguiti risulta che il sistema (III) ai differenziali totali è completamente integrabile. Di più, avendosi qui

$$\Theta_i = m\,\overline{\gamma}_i, \qquad \overline{\Theta}_i = m\,\gamma_i,$$

segue dalle (7) § 1: $\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma}_i$, e per ciò il sistema differenziale (III) possiede l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.}, \quad \text{o} \quad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 - \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = \text{cost.},$$

e basta quindi disporre dei valori iniziali delle γ_i, $\overline{\gamma}_i$ in guisa da annullare la costante del secondo membro perchè risulti soddisfatta anche la (III*).

Da tutto ciò si conclude: *Dato un sistema di rotazioni associate* (β_{ik}, β_{ki}) *se ne ottengono infiniti nuovi* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, *integrando il sistema lineare completo ai differenziali totali* (III), *nelle* $2n$ *funzioni incognite* $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$, *coll'aggiunta della condizione ai limiti* (III*); *le nuove rotazioni* β'_{ik} *si calcolano dalle formole*

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2m\gamma_i\overline{\gamma}_k}{A}. \tag{19}$$

Chiameremo T_m una tale trasformazione (di Ribaucour) che dal sistema di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) fa nascere il nuovo $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$. È manifesto che in questa T_m entrano (oltre la costante m) precisamente $2n-2$ costanti arbitrarie essenziali. Anche è da osservare che nel passaggio inverso da $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ a (β_{ik}, β_{ki}) le funzioni trasformatrici sono (§ 1)

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A}, \quad \overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\gamma}_i}{A},$$

e siccome si ha

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda = \frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} - \frac{\gamma_i}{A^2}\cdot 2m\gamma_i\overline{\gamma}_i + \sum_\lambda^{(i)}\left(\beta_{\lambda i} - \frac{2m\gamma_\lambda\overline{\gamma}_i}{A}\right)\frac{\gamma_\lambda}{A} =$$

$$= \frac{1}{A}m\overline{\gamma}_i - \frac{2m\overline{\gamma}_i}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = -\frac{m\overline{\gamma}_i}{A},$$

vediamo che: *la trasformazione inversa della* T_m *è una* T_{-m}.

§ 5.

Il teorema speciale di permutabilità per le T_m.

Ad un sistema di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) applichiamo due diverse trasformazioni T_m, $T_{m'}$, che lo cangino rispettivamente nei due sistemi di rotazioni associate $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, e supponiamo di più che *sia* $m'^2 \neq m^2$. Sussiste in questa ipotesi il teorema speciale di permutabilità:

Esiste uno ed un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ *di rotazioni associate, calcolabile in termini finiti, che è legato a* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ *da una* $T_{m'}$ *e a* $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ *da una* T_m.

Per dimostrarlo troviamo le formole effettive che individuano il quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ nel modo seguente. Indichiamo, come sopra, con $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ le funzioni trasformatrici per la T_m che da (β_{ik}, β_{ki}) conduce a $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e similmente con $(\gamma'_i, \overline{\gamma}'_i)$ quelle per la T'_m da (β_{ik}, β_{ki}) a $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$.

Sussisteranno allora la (III), (III*) per le $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ e le analoghe per le $(\gamma'_i, \overline{\gamma}'_i)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} &= \beta_{ik}\gamma'_k, & \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} &= m'\overline{\gamma}'_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda \\ \frac{\partial \overline{\gamma}'_i}{\partial u_k} &= \beta_{ki}\overline{\gamma}'_k, & \frac{\partial \overline{\gamma}'_i}{\partial u_i} &= m'\gamma'_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}'_\lambda \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

$$\sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{\gamma}'^2_\lambda. \tag{IV*}$$

Ora ai tre sistemi di rotazioni (β_{ik}), (β'_{ik}), (β''_{ik}) applichiamo il teorema generale di permutabilità (§ 2), sicchè le trasformatrici $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ pel passaggio dal sistema (β'_{ik}) al quarto $(\overline{\beta}_{ik})$ saranno date dalle (8) § 2:

$$\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i, \tag{20}$$

dove τ è definita con una quadratura dalla (9), la quale, essendo qui $\Theta_i = m\overline{\gamma}_i$, ci dà

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2m\gamma'_i\overline{\gamma}_i. \tag{21}$$

Similmente, indicando con $\overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2, \ldots, \overline{\Gamma}_n$ le analoghe trasformatrici dal sistema (β'_{ki}) associato a (β'_{ik}) all'altro $(\overline{\beta}_{ki})$ associato di $(\overline{\beta}_{ik})$, avremo per le formole stesse

$$\overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A} + \overline{\gamma}'_i, \tag{20*}$$

con $\overline{\tau}$ definito per una quadratura da

$$\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial u_i} = -2m\gamma_i\overline{\gamma}'_i. \tag{21*}$$

D'altra parte si passa, per ipotesi, dal sistema di rotazioni associate $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ all'altro $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ mediante una $T_{m'}$ e dovranno quindi sussistere per le Γ_i, $\overline{\Gamma}_i$ le relative formole di trasformazione (III), (III*) § 2; ma queste, per le verifiche già effettuate al § 2, si riducono soltanto alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda=m'\overline{\Gamma}_i\\ \frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta'_{i\lambda}\overline{\Gamma}_\lambda=m'\Gamma_i\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2=\sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2.\tag{23}$$

La prima delle (22), calcolata colla (14) § 2, osservando che qui

$$\Theta'_i=m'\overline{\gamma}'_i,\qquad \Theta_i=m\overline{\gamma}_i,$$

diventa

$$m'\overline{\gamma}'_i-\frac{\tau+2B}{A}m\overline{\gamma}_i=m'\left(\frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A}+\overline{\gamma}'_i\right),$$

e riducendo:

$$m\tau+m'\overline{\tau}=-2mB\quad (B=\sum_\lambda \gamma_\lambda\gamma'_\lambda).\tag{24}$$

Similmente calcolando la seconda delle (22), si ottiene l'altra

$$m'\tau+m\overline{\tau}=-2m\overline{B},\text{ con } \overline{B}=\sum_\lambda\overline{\gamma}_\lambda\overline{\gamma}'_\lambda.\tag{24*}$$

Ora, avendo supposto $m'^2 \neq m^2$, queste due equazioni risolute dànno

$$\left.\begin{aligned}\tau=\frac{2m}{m'^2-m^2}(mB-m'\overline{B})\\ \overline{\tau}=\frac{2m}{m'^2-m^2}(m\overline{B}-m'B),\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

e così, nell'ipotesi che sussista il teorema di permutabilità, risulta da queste formole determinato *in termini finiti* il quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik},\overline{\beta}_{ki})$.

§ 6.

Verifiche generali e caso singolare.

Bisogna ora dimostrare che i valori (25) di τ, $\bar{\tau}$ soddisfano rispettivamente alle (21), (21*), come anche alla (23). La prima cosa risulta subito da ciò che si ha (§ 2)

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma_i \Theta'_i + \gamma'_i \Theta_i = m' \gamma_i \bar{\gamma}_i + m \bar{\gamma}_i \gamma'_i,$$

e similmente

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial u_i} = m' \bar{\gamma}_i \gamma'_i + m \gamma_i \bar{\gamma}'_i,$$

onde, per le (25), risultano appunto verificate le (21), (21*). Quanto alla (23), si osservi che essendo per le (20), (20*)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{\tau^2}{A} + \frac{2B\tau}{A} + \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda$$

$$\sum_\lambda \bar{\Gamma}_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}^2}{A} + \frac{2\bar{B}\bar{\tau}}{A} + \sum_\lambda \bar{\gamma}'^2_\lambda,$$

la (23) equivale all'altra

$$\tau^2 - \bar{\tau}^2 + 2B\tau - 2\bar{B}\bar{\tau} = 0, \tag{26}$$

che per le (25) risulta un'identità.

A questo punto abbiamo dimostrato che, prendendo per τ, $\bar{\tau}$ i valori (25), le formole (20), (20*) fanno derivare dal sistema di rotazioni associate (β'_{ik}, β'_{ki}) un quarto sistema ($\bar{\beta}_{ik}$, $\bar{\beta}_{ki}$) *mediante una* $T_{m'}$. Sarà provato il teorema completo di permutabilità se dimostriamo in fine che questo quarto sistema ($\bar{\beta}_{ik}$, $\bar{\beta}_{ki}$) proviene a sua volta dal terzo (β''_{ik}, β''_{ki}) *mediante una* T_m. Per questo basta calcolare, secondo la (11) § 2, le quantità

$$\tau' = -(\tau + 2B), \qquad \bar{\tau}' = -(\bar{\tau} + 2\bar{B}),$$

ciò che dà per le (25)

$$\tau' = \frac{2\,m'}{m^2 - m'^2}\,(m'\,B - m\,\overline{B})$$

$$\overline{\tau}' = \frac{2\,m'}{m^2 - m'^2}\,(m'\,\overline{B} - m\,B),$$

le quali formole corrispondono perfettamente alle (25) stesse, scambiata m con m', onde risulta provato l'asserto.

Nelle verifiche ora eseguite per dimostrare il teorema di permutabilità è essenziale l'ipotesi che sia diversa da zero la quantità $m'^2 - m^2$, al denominatore delle (25). Ma anche nel caso *singolare* $m'^2 = m^2$, quando vi si aggiunga una nuova condizione necessaria, continua a sussistere il teorema stesso, come ora andiamo a dimostrare. Supponiamo per fissare le idee $m' = m$, poichè l'altro caso $m' = -m$ si riconduce a questo cangiando di segno tutte le γ'_i (cf. § 4). Riprendendo i calcoli al paragrafo precedente, vediamo dalle equazioni (24), (24*) che in tal caso, se il teorema di permutabilità delle due T_m deve ancora sussistere, dovrà necessariamente verificarsi la condizione $B = \overline{B}$, cioè

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda, \tag{27}$$

e le due (24), (24*) si riducono allora all'unica

$$\tau + \overline{\tau} = -2\,B, \tag{28}$$

soddisfatta la quale è pure verificata la (26). Ora nel caso attuale $m' = m$ si ha

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial u_i} = m\,(\gamma_i \overline{\gamma}'_i + \overline{\gamma}_i \gamma'_i)$$

e quindi $B - \overline{B} = \text{cost.}$, o

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda - \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda = \text{cost.}$$

Scelto adunque il primo sistema trasformato $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, potremo in infiniti modi disporre del secondo $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ in guisa che, annullandosi la costante del secondo membro nella equazione superiore, si trovi verificata la (27). Per abbreviare diremo allora che i due sistemi $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, derivati ambedue da (β_{ik}, β_{ki}) per una T_m, si trovano fra loro *in involuzione*. Supposta questa condizione soddisfatta, e legando τ, $\overline{\tau}$ fra loro colla (28), risultano le (21*) conseguenze delle (21), e quindi in tal caso avremo non più un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ del teorema di permutabilità, ma una serie ∞^1 di tali sistemi, dipendentemente dalla costante arbitraria che resta in τ. Concludiamo: *Nel caso singolare $m' = m$ il teorema di permutabilità per le trasformazioni T_m dei sistemi di rotazioni associate vale soltanto se i due sistemi $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, derivati ciascuno dall'iniziale (β_{ik}, β_{ki}) per una T_m, si trovano in involuzione, ed in questo caso, in luogo di un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$, se ne ha una serie semplicemente infinita.*

Osserviamo infine che $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ saranno ancora in involuzione rispetto a $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$, come pure (β_{ik}, β_{ki}), $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ in involuzione fra loro rispetto a $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, come rispetto a $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$.

§ 7.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H di Guichard-Darboux.

Si è già osservato, al § 3, che ad ogni sistema (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate appartengono infinite coppie $(H, \overline{H})$ di sistemi n^{pli} ortogonali di Guichard-Darboux *associati* e corrispondenti alle soluzioni: $H_1, H_2, \ldots, H_n$); $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, \overline{H}_n$ dei sistemi differenziali (16), (16*). Si consideri ora una trasformazione T_m che cangi le rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) nelle altre $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, mediante le funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$, soddisfacenti alle (III), (III*) § 4. La trasformazione T_m si può ora facilmente estendere alla coppia $(H, \overline{H})$ di sistemi H associati, che ne verrà convertita in un'altra tale coppia $(H', \overline{H}')$ corrispondente alle nuove rotazioni $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e questo in modo che H' sia trasformato di Ribaucour di H, medesimamente $\overline{H}'$ di $\overline{H}$. Per questo basterà completare le n funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ coll'aggiunta della $(n+1)^{ma}$ φ, e similmente le $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ con una nuova $\overline{\varphi}$, determinando, se sarà possibile, φ, $\overline{\varphi}$ in guisa che soddisfino alle equazioni di trasformazione ((M) § 6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H}_i \overline{\gamma}_i, \tag{29}$$

e insieme anche alle altre

$$\sum_\lambda H'^2_\lambda = \sum_\lambda H^2_\lambda, \qquad \sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda, \tag{30}$$

perchè allora i due sistemi H', $\overline{H}'$ trasformati saranno nuovamente della classe di Guichard-Darboux.

Ora si ha in generale ((M) § 6)

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\varphi}{A}\Theta_\lambda, \quad \overline{H}'_\lambda = \overline{H}_\lambda - \frac{2\overline{\varphi}}{A}\overline{\Theta}_\lambda,$$

e per ciò nel caso nostro

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2m\varphi}{A}\overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{H}'_\lambda = \overline{H}_\lambda - \frac{2m\overline{\varphi}}{A}\gamma_\lambda.$$

Ne deduciamo

$$\sum_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = \frac{4m\varphi}{A}(m\varphi - \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda),$$

$$\sum_\lambda (\overline{H}'^2_\lambda - \overline{H}^2_\lambda) = \frac{4m\overline{\varphi}}{A}(m\overline{\varphi} - \sum_\lambda \overline{H}_\lambda \gamma_\lambda),$$

e per soddisfare le (30) bisogna quindi prendere

$$\varphi = \frac{1}{m}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_\lambda \overline{H}_\lambda \gamma_\lambda. \tag{31}$$

Ma allora sono anche soddisfatte le (29), come risulta calcolando

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda = \overline{\gamma}_i \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda \right\} + H_i \left\{ \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} \overline{\gamma}_\lambda \right\}.$$

A destra il coefficiente di H_i, per la seconda delle (III) in prima linea, eguaglia $m\gamma_i$, e quello di $\overline{\gamma}_i$ è nullo per le (16), onde

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda = m H_i \gamma_i,$$

sicchè il valore (31) di φ verifica le (29), e similmente dicasi per $\overline{\varphi}$.

In riguardo alla trasformazione T_m di Ribaucour del sistema H in un nuovo H' (senza considerare gli associati), il risultato può dunque formularsi così: *Si determinino le* $2n$ *funzioni trasformatrici* $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ *in guisa da soddisfare alle equazioni* (III), (III*), *ed alle prime* n *si aggreghi la* $(n+1)^{ma}$ φ

data da

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda .$$

Dopo ciò la trasformazione di Ribaucour $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$, *applicata al sistema H di Guichard-Darboux, dà un nuovo sistema H′ pel quale*

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\, m\, \varphi}{A} \overline{\gamma}_\lambda .$$

È manifesto che queste trasformazioni di Ribaucour dei sistemi H dipendono da $2n - 1$ costanti arbitrarie (m inclusa). Ciò era già riconosciuto in (M) § 24; ma ora la costruzione effettiva risulta notevolmente semplificata, tutto riducendosi all'integrazione del sistema lineare (III).

In fine dimostriamo che per le trasformazioni T_m dei sistemi H sussiste il teorema speciale di permutabilità: *Se ad un sistema H di Guichard-Darboux sono contigui due nuovi H′, H″, per trasformazioni rispettive* T_m, $T_{m'}$ *con* $m'^2 \neq m^2$, *esiste un quarto sistema* $\overline{H}$ *perfettamente determinato, contiguo alla sua volta ad H′ per una* $T_{m'}$ *e ad H″ per una* T_m.

Siano γ_i, $\overline{\gamma}_i$, $\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda$ le funzioni trasformatrici per la T_m che da H conduce ad H', e medesimamente γ'_i, $\overline{\gamma}'_i$, $\varphi' = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda$ quelle per la $T_{m'}$ da H ad H''. Per le formole (20), (20*) § 5 abbiamo

$$\Gamma_\lambda = \frac{\tau\, \gamma_\lambda}{A} + \gamma'_\lambda , \quad \overline{\Gamma}_\lambda = \frac{\overline{\tau}\, \overline{\gamma}_\lambda}{A} + \overline{\gamma}'_\lambda ,$$

dove τ, $\overline{\tau}$ hanno i valori dati dalle (25) ibid. Ora, se alle n funzioni trasformatrici $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ aggiungiamo la $(n+1)^{\text{ma}}$ Φ del teorema generale di permutabilità data da ((M) § 10),

$$\Phi = \frac{\tau\, \varphi}{A} + \varphi' ,$$

sarà provato che il quarto sistema $\overline{H}$ dopo (H, H', H'') è ancora un sistema di Guichard-Darboux, se verifichiamo che Φ soddisfa alla sua volta alla equazione corrispondente alle (31)

$$\Phi = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H'_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda .$$

Ma questa si scrive

$$m'\left(\frac{\tau\varphi}{A}+\varphi'\right)=\sum_\lambda\left(H_\lambda-\frac{2\,m\,\varphi}{A}\overline{\gamma}_\lambda\right)\left(\frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_\lambda}{A}+\overline{\gamma}'_\lambda\right),$$

ossia sviluppando e riducendo

$$m'\tau+m\overline{\tau}=-2\,m\,\overline{B},$$

che coincide colla (24*) ed è quindi in effetto verificata.

Osserviamo anche qui il caso *singolare* $m'^2=m^2$, ove il teorema di permutabilità cade in difetto, a meno che i due sistemi H', H'' si trovino in involuzione, verificandosi la relazione $\sum_\lambda \gamma_\lambda\gamma'_\lambda=\pm\sum_\lambda\overline{\gamma}_\lambda\overline{\gamma}'_\lambda$.

In tal caso è facile vedere che l'intero fascio (H', H'') è composto di sistemi di Guichard-Darboux (*), e lo stesso accade del fascio coniugato del teorema generale di permutabilità (M) § 12.

§ 8.

Caso particolare dei sistemi E.

In una coppia di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) può darsi che si abbia in particolare $\beta_{ki}=\beta_{ik}$; allora siamo in presenza di sistemi E di cui trattano i §§ 14-16 in (M). Le trasformazioni studiate al § 15 (M) ed ivi indicate collo stesso simbolo T_m sono appunto casi particolari delle attuali e se ne ottengono assumendo le $\overline{\gamma}_i$ coincidenti colle relative γ_i.

(*) Un sistema generico del fascio corrisponde alle funzioni trasformatrici

$$c_1\gamma_i+c_2\gamma'_i,\quad c_1\overline{\gamma}_i+c_2\overline{\gamma}'_i,\quad c_1\varphi+c_2\varphi'\qquad (c_1,\ c_2 \text{ costanti})$$

e siccome, per le (31) (ove ora $m'=m$), si ha

$$c_1\varphi+c_2\varphi'=\frac{1}{m}\sum_\lambda H_\lambda\,(c_1\overline{\gamma}_\lambda+c_2\overline{\gamma}'_\lambda),$$

il sistema stesso è di Guichard-Darboux.

Ma, pur partendo da un sistema iniziale E, possiamo anche applicare una generale trasformazione:

$$T_m \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n)$$

senza che le seconde funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_i$ eguaglino le prime γ_i. Per tal modo otterremo dal sistema E coppie di rotazioni associate e *distinte* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$. Ora applichiamo ai tre sistemi di rotazioni (β_{ik}), (β'_{ik}), (β''_{ik}) il teorema generale di permutabilità (§ 2), e facilmente dedurremo dalla formola (15) ibid. che l'intero fascio a cui E appartiene è costituito di altrettanti sistemi (E) con $\overline{\beta}_{ik} = \overline{\beta}_{ki}$. Se infatti nella (15) poniamo le $\overline{\gamma}_i$ al posto delle γ'_i, dovremo fare

$$A' = A, \quad \Theta'_i = m\gamma_i, \quad \Theta_i = m\overline{\gamma}_i, \quad \tau' = -(\tau + 2B),$$

e quindi risulterà

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2m}{\tau^2 + 2B\tau + A^2} \left\{ A(\gamma_i \overline{\gamma}_k + \gamma_k \overline{\gamma}_i) + \tau \gamma_i \gamma_k + \tau' \overline{\gamma}_i \overline{\gamma}_k \right\},$$

espressione simmetrica nei due indici i, k.

Dimostriamo ora che nel fascio coniugato ad (E) le rotazioni si distribuiscono come le (β'_{ik}), (β'_{ki}) in coppie di rotazioni associate. E infatti, indicando con a, b due costanti arbitrarie, le funzioni

$$\Gamma_i = a\gamma_i + b\overline{\gamma}_i, \qquad \overline{\Gamma}_i = b\gamma_i + a\overline{\gamma}_i \tag{32}$$

soddisfano manifestamente (a causa di $\beta_{ki} = \beta_{ik}$) alle equazioni (III) § 4, ma anche alla (III*)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2,$$

giacchè il primo ed il secondo membro eguagliano l'espressione

$$(a^2 + b^2)A + 2abB.$$

Ora queste funzioni trasformatrici (32) corrispondono appunto alle rotazioni del secondo fascio, che risultano per tal modo distribuite in coppie associate. Si osservi che queste rotazioni associate coincidono solo per $a = b$, e perciò nel fascio coniugato esiste un solo sistema $\overline{E}$ corrispondente ad $a = b$, ossia alle trasformatrici

$$\Gamma_i = \overline{\Gamma}_i = \gamma_i + \overline{\gamma}_i.$$

Adunque nel caso attuale: *Dei due fasci coniugati del teorema di permutabilità uno è tutto composto di sistemi E, l'altro ne contiene uno solo $\overline{E}$, mentre gli altri dello stesso fascio si distribuiscono in coppie di sistemi di rotazioni associate.*

Osserviamo ancora che, per costruire questi particolari fasci coniugati, si può prendere ad arbitrio un sistema E del primo fascio ed un qualunque suo trasformato, per una T_m arbitraria, quale sistema $\overline{E}$ del fascio coniugato. E infatti, indicando con $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ le trasformatrici pel passaggio da E ad $\overline{E}$, avremo

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\Gamma_k\,, \quad \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} = m\,\Gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\Gamma_\lambda\,,$$

e basterà trovare $2n$ funzioni incognite $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ che soddisfino alle (III), (III*) e di più alle altre

$$\gamma_i + \overline{\gamma}_i = \Gamma_i\,.$$

Eliminando dalle (III) le $\overline{\gamma}_i = \Gamma_i - \gamma_i$, ne risulta per le γ_i il sistema differenziale

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k\,, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda = m\,(\Gamma_i - \gamma_i), \tag{33}$$

mentre la (III*) diventa

$$2\sum_\lambda \Gamma_\lambda\gamma_\lambda = \sum_\lambda \Gamma_\lambda^2\,. \tag{34}$$

Ora si riscontra subito che il sistema ai differenziali totali (33) è completamente integrabile, e inoltre ammette l'integrale quadratico

$$2\sum_\lambda \Gamma_\lambda\gamma_\lambda - \sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \text{cost.},$$

sicchè, per soddisfare anche alla (34), basta scegliere i valori iniziali delle γ_i in guisa da annullare in quest'ultima la costante del secondo membro.

§ 9.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI NELLO SPAZIO EUCLIDEO A ds^2 INDEFINITO.

Procediamo ora ad estendere, in un primo modo, la nozione di sistemi n^{pli} ortogonali a rotazioni associate prendendo a considerare, accanto all'ordinario spazio S_n euclideo, col ds^2 rappresentato dalla forma differenziale quadratica *definita positiva* nelle n variabili $x, y, \ldots, t$ ((M) § 1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \cdots + dt^2,$$

anche le altre forme indefinite

$$ds^2 = \varepsilon_1 dx^2 + \varepsilon_2 dy^2 + \cdots + \varepsilon_n dt^2, \tag{35}$$

dove ciascuna ε_i rappresenta l'unità, positiva o negativa; diremo che la (35) è la forma (a curvatura nulla) di *segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Se esprimiamo le n variabili $x, y, \ldots, t$ per n nuove $u_1, u_2, \ldots, u_n$, in guisa che la (35) conservi la forma canonica (ortogonale), potremo scrivere, per la legge d'inerzia

$$ds^2 = \varepsilon_1 H_1^2 du_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 du_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 du_n^2, \tag{36}$$

dove le H_i sono funzioni reali delle $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e la segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ è rimasta la stessa.

Le formole per l'equivalenza delle due forme differenziali (35), (36) si deducono subito analiticamente dalle ordinarie in (M)', nelle quali basterà cangiare H_i in $H_i\sqrt{\varepsilon_i}$. Così adunque, introducendo anche qui le *rotazioni* $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}$, il sistema differenziale per le β_{ik} sarà:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ &\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

e successivamente quello per le H_i conserverà la solita forma

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k. \tag{V*}$$

Le ***trasformazioni di Ribaucour*** per le rotazioni β_{ik} si otterranno, nel caso attuale, come segue (Cf. § 1).

Prendansi n funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ soddisfacenti al solito sistema differenziale

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k ,$$

e si consideri la quantità

$$A = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \gamma_\lambda^2 ; \tag{37}$$

che in seguito supporremo sempre ***diversa da zero***. Ponendo

$$\Theta_i = \varepsilon_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda ,$$

si troverà subito dalle (V)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k , \quad \frac{\partial A}{\partial u_i} = 2 \gamma_i \Theta_i . \tag{38}$$

Per le rotazioni β'_{ik} del sistema trasformato avremo la stessa formola (4) § 1

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2 \gamma_i \Theta_k}{A} , \tag{39}$$

compiendosi le verifiche nel medesimo modo. Se poi consideriamo un determinato *sistema n^{plo} ortogonale* nell'S_n indefinito corrispondente alla forma (36) del ds^2 colle rotazioni β_{ik}, avremo ∞^1 suoi trasformati di Ribaucour determinando, con una quadratura, una $(n+1)^{ma}$ funzione trasformatrice φ dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i , \tag{40}$$

ed assumendo i coefficienti H'_i del sistema trasformato dalla formola

$$H'_i = H_i - \frac{2 \varphi}{A} \Theta_i . \tag{41}$$

§ 10.

I SISTEMI H GENERALIZZATI.

Ritorniamo ora ai sistemi n^{pli} ortogonali dell'ordinario spazio S_n e chiamiamo sistemi H *generalizzati* di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ quei sistemi pei quali i coefficienti H_i^2 sono legati dalla relazione

$$\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost.} \tag{42}$$

Derivando questa rapporto ad u_i si ottiene

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda = 0 \tag{43}$$

e da questa derivata rapporto ad u_k segue

$$\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ki} H_k) + \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_\lambda) = 0,$$

e sviluppando

$$H_k \left\{ \varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} \right\} +$$
$$+ \beta_{ik} \left\{ \varepsilon_k \frac{\partial H_k}{\partial u_k} + \varepsilon_i \beta_{ki} H_i + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{k\lambda} H_\lambda \right\} = 0.$$

Ma il secondo termine è nullo per la (43) stessa, onde segue: *Le rotazioni* β_{ik} *di ogni sistema H di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *soddisfano al sistema differenziale*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} = 0 \\ &\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

Come nel caso particolare $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 1)$ del sistema (II) § 3, si dimostra che l'integrale generale (β_{ik}) del sistema (VI) dipende da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie. Ad ogni sua soluzione (β_{ik}) corrispondono ∞^n sistemi H di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, che si ottengono determinando le H_i dal sistema *completo* ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda. \tag{44}$$

Ora si osservi che, se si pone $\overline{\beta}_{ki} = \beta_{ik}$, le equazioni della prima e terza linea in (VI) si cangiano per le $\overline{\beta}_{ki}$ precisamente nelle (V) § 9 che caratterizzano le rotazioni dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n indefinito di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Di più le (VI) della seconda linea dimostrano che si ha

$$\frac{\partial \overline{\beta}_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \overline{\beta}_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \overline{\beta}_{i\lambda} \overline{\beta}_{k\lambda} = 0,$$

onde segue che fra i sistemi n^{pli} ortogonali dell'S_n indefinito colle rotazioni β_{ik}:

$$d s^2 = \varepsilon_1 \overline{H}_1^2 d u_1^2 + \varepsilon_2 \overline{H}_2^2 d u_2^2 + \cdots + \varepsilon_n \overline{H}_n^2 d u_n^2$$

ne esistono di quelli pei quali si ha

$$\overline{H}_1^2 + \overline{H}_2^2 + \cdots + \overline{H}_n^2 = \text{cost.} \tag{45}$$

E infatti le corrispondenti equazioni per le $\overline{H}_i$ si scrivono

$$\frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k} = \overline{\beta}_{ki} \overline{H}_k, \quad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \overline{\beta}_{i\lambda} \overline{H}_\lambda,$$

e formano un sistema completamente integrabile.

Da tutto ciò si raccoglie che: *i sistemi H di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, *nello spazio ordinario definito S_n, trovano i loro associati nello spazio indefinito di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *in quegli ordinari sistemi $\overline{H}$ che soddisfano alla relazione* (45) $\sum_\lambda \overline{H}_\lambda^2 = \textit{cost.}$

§ 11.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H generalizzati.

Possiamo ora riprendere le ricerche relative alle trasformazioni T_m degli ordinarii sistemi H (§§ 4 e segg.) ed estenderle ai nuovi sistemi H generalizzati.

Per questo, supposto di avere un sistema H di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ nello spazio definito, ed un suo associato $\overline{H}$ nell'indefinito, ai quali appartengano le rotazioni associate $(\beta_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$, soddisfacenti alle (V), cerchiamo di applicare ad $(H, \overline{H})$ due trasformazioni di Ribaucour, colle rispettive funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n; \overline{\varphi})$, in guisa che la coppia $(H, \overline{H})$ venga cangiata in un'altra coppia $(H', \overline{H}')$ di sistemi associati. Procedendo come al § 4, si troveranno intanto per le γ_i, $\overline{\gamma}_i$ le equazioni di trasformazione

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\,\overline{\gamma}_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} = m\,\gamma_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

le quali formano, a causa delle (VI), un sistema completo. Di più, se poniamo

$$A = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda^2, \qquad \overline{A} = \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2, \tag{46}$$

si ha $\dfrac{\partial A}{\partial u_i} = \dfrac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2m\gamma_i\overline{\gamma}_i$, e perciò il sistema (VII) possiede l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.}$$

Noi scegliamo i valori iniziali delle γ_i, $\overline{\gamma}_i$ in modo da annullare la costante del secondo membro per cui avremo anche

$$A = \overline{A}. \tag{VII*}$$

Ed ora indicando con β'_{ik}, $\overline{\beta}'_{ki}$ le nuove rotazioni trasformate dalla (4) § 1 e dalla (3) § 9 dedurremo

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma}_k}{A}, \quad \overline{\beta}'_{ik} = \overline{\beta}'_{ik} - \frac{2\,m\,\overline{\gamma}_i\,\gamma_k}{A},$$

da cui, essendo $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$, segue subito $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, il che significa che le nuove rotazioni $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ sono ancora associate. Ma ora di più, calcolando per quadrature le $(n+1)^{me}$ funzioni trasformatrici φ, $\overline{\varphi}$ dalle condizioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = H_i\,\gamma_i\,, \quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H}_i\,\overline{\gamma}_i\,, \tag{47}$$

pei coefficienti $H'_{\overline{\lambda}}$, $\overline{H}'_\lambda$ dei sistemi trasformati avremo

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\,m\,\varphi}{A}\,\overline{\gamma}_\lambda\,, \quad H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\,m\,\overline{\varphi}}{A}\,\gamma_\lambda\,,$$

e potremo determinare φ, $\overline{\varphi}$ in guisa da soddisfare alle (47) ed insieme alle altre

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H'^2_\lambda = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H^2_\lambda\,, \quad \sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda\,,$$

dopo di che lo scopo sarà manifestamente raggiunto. Per questo, siccome abbiamo

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H'^2_\lambda - \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H^2_\lambda = \frac{4\,m\,\varphi}{A}\,(m\,\varphi - \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H_\lambda\,\overline{\gamma}_\lambda)$$

$$\sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda - \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda = \frac{4\,m\,\overline{\varphi}}{A}\,(m\,\overline{\varphi} - \sum_\lambda \overline{H}_\lambda\,\gamma_\lambda),$$

basterà prendere φ, $\overline{\varphi}$ dalle formole seguenti:

$$\varphi = \frac{1}{m}\sum_\lambda \varepsilon_\lambda\,H_\lambda\,\overline{\gamma}_\lambda\,, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_\lambda \overline{H}_\lambda\,\gamma_\lambda\,, \tag{48}$$

valori coi quali, come subito si verifica, le (47) sono in effetto soddisfatte.

In fine osserviamo che il teorema *speciale* di permutabilità per le T_m dei sistemi H generalizzati continua a sussistere come nel caso ordinario, valendo considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte alla fine del § 7.

§ 20.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI DELLO SPAZIO S_n A CURVATURA COSTANTE.

Consideriamo lo spazio S_n a curvatura costante K e scriviamo $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$, dove sarà $\varepsilon = +1$ se K è positiva (spazio ellittico), e invece $\varepsilon = -1$ per K negativa (spazio iperbolico).

Prendiamo in S_n a coordinate le $n+1$ coordinate di WEIERSTRASS (*), che qui (per non moltiplicare le notazioni degli indici) denoteremo con

$$x,\ y,\ z, \ldots,\ t.$$

Queste sono legate fra loro dalla identità quadratica:

$$\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2 + \cdots) + t^2 = 1, \tag{49}$$

e il $d\,s^2$ è dato da

$$d\,s^2 = R^2(d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 + \cdots + \varepsilon\,d\,t^2). \tag{50}$$

Abbiasi ora nello spazio S_n un sistema n^{plo} $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di ipersuperficie ortogonali, a cui riferito lo spazio risulti

$$d\,s^2 = H_1^2\,d\,u_1^2 + H_2^2\,d\,u_2^2 + \cdots + H_n^2\,d\,u_n^2. \tag{51}$$

Le condizioni *necessarie e sufficienti* a cui debbono soddisfare H_1, $H_2, \ldots, H_n$ affinchè la forma differenziale (51) sia di curvatura Riemanniana costante $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$ si scrivono, introducendo anche qui le rotazioni β_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \frac{\varepsilon}{R^2} H_i H_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

(*) Vedi le mie *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, §§ 193, 194 che in seguito citeremo colla sola indicazione del Volume.

le quali si riducono naturalmente a quelle dello spazio euclideo ponendovi $\frac{1}{R^2}=0$. Introduciamo anche qui, in ogni punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dello spazio, l'n^{edro} principale relativo al sistema Σ, formato dalle direzioni (principali) delle linee di curvatura coordinate (u_1), $(u_2), \ldots, (u_n)$. Denotando con

$$X_i,\ Y_i, \ldots,\ T_i$$

i coseni di direzione della i^{ma} direzione principale (u_i), dal confronto delle (50), (51) abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}X_i,\quad \frac{\partial y}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}Y_i,\ldots,\quad \frac{\partial t}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}T_i, \tag{52}$$

indi per le relazioni d'ortogonalità

$$\left.\begin{array}{l} x X_i + y Y_i + \cdots + \varepsilon t T_i = 0 \\ X_i X_k + Y_i Y_k + \cdots + \varepsilon T_i T_k = \varepsilon_{ik} \quad (\varepsilon_{ik}=0 \text{ per } i \neq k,\ \varepsilon_{ii}=1). \end{array}\right\} \tag{53}$$

Le $n+1$ coordinate di Weierstrass $x, y, \ldots, t$ sono altrettante soluzioni del sistema differenziale di Weingarten (Vol. I, § 195):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k}=\sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u_\lambda}-\frac{\varepsilon a_{ik}}{R^2}\theta,$$

e nel caso nostro, avendosi $a_{ii}=H_i^2$, $a_{ik}=0$ (per $i \neq h$), dànno le equazioni fondamentali pei coseni X_i, $Y_i, \ldots$, che si scrivono

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}X_k,\quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i}=-\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}X_\lambda-\frac{\varepsilon H_i}{R}x, \tag{54}$$

e valgono analogamente per le altre coppie $(Y, y) \ldots (T, t)$.

§ 13.

Trasformazioni di Ribaucour e teorema di permutabilità.

Diamo ora le formole per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante (Cfr. prefazione). Senza ripetere qui le deduzioni analoghe a quelle svolte nei §§ 4, 5 (M) pel caso euclideo, ci basterà presentare le formole definitive, collocandoci dapprima dal punto di vista intrinseco. Prendiamo $n+1$ funzioni trasformatrici γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ assoggettate a soddisfare al sistema completamente integrabile

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R}. \tag{55}$$

Se poniamo

$$\Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H_i \varphi}{R}, \quad (56) \qquad A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 + \varepsilon \varphi^2, \quad (57)$$

derivando troviamo

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\Theta_k \; (i \neq k), \quad (58) \qquad \frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \Theta_i. \quad (59)$$

Ciò premesso, dalle funzioni trasformatrici ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ) risulterà definito un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ', trasformato di Ribaucour del sistema iniziale Σ, i cui elementi (indicati con accenti) si calcolano dalle formole

$$H'_i = H_i - \frac{2R\varphi}{A}\Theta_i \tag{60}$$

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i \Theta_k}{A}. \tag{61}$$

È facile verificare, servendoci delle equazioni precedenti, che questi valori H'_i, β'_{ik} soddisfano alle equazioni differenziali (VIII) e definiscono per ciò *intrinsecamente* un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ'. Ma se vogliamo costruire effettivamente Σ', come trasformato di Ribaucour di Σ, nella sua posizione nello spazio, dovremo ricorrere alle formule seguenti. Posto

$$\Omega_x = \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \varepsilon\varphi x, \quad \Omega_y = \sum_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda + \varepsilon \varphi y, \ldots, \quad \Omega_t = \sum_\lambda \gamma_\lambda T_\lambda + \varepsilon\varphi t,$$

e denotando con accenti gli elementi relativi a Σ', avremo per le formole richieste

$$x' = x - \frac{2\varphi}{A}\Omega_x, \quad y' = y - \frac{2\varphi}{A}\Omega_y, \ldots, \quad t' = t - \frac{2\varphi}{A}\Omega_t \tag{62}$$

$$X'_i = X_i - \frac{2\gamma_i\Omega_x}{A}, \quad Y'_i = X_i - \frac{2\gamma_i \Omega_y}{A}, \ldots, \quad T'_i = T_i - \frac{2\gamma_i\Omega_t}{A}. \tag{62*}$$

In fine osserveremo che i raggi $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ delle n ipersfere tangenti a Σ, Σ' si calcolano, nel caso ellittico, dalle formole

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}, \tag{63}$$

e nel caso iperbolico dalle altre

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}, \tag{63*}$$

nel quale ultimo caso la i^{ma} ipersfera avrà centro reale solo quando il valore assoluto del secondo membro risulta < 1.

Anche le formole pel teorema di permutabilità si scrivono in perfetta analogia con quelle del caso euclideo (§ 2). Supposti dedotti dal sistema Σ due nuovi sistemi Σ', Σ'' colle rispettive trasformazioni di Ribaucour

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi), \qquad (\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n; \varphi'),$$

si determini, con una quadratura, la funzione τ dalle formole

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\gamma'_i \Theta_i, \tag{64}$$

e ponendo

$$\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i, \quad \overline{\Phi} = \frac{\tau\varphi}{A} + \varphi', \tag{65}$$

si avranno le $n+1$ funzioni trasformatrici $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n; \Phi)$ pel passaggio dal sistema Σ' al quarto sistema $\overline{\Sigma}$ del teorema di permutabilità (Cf. § 2).

§ 14.

Trasformazioni T_m dei sistemi E negli spazii a curvatura costante.

Come nello spazio euclideo ((M) § 14), chiamiamo anche qui *sistemi E* quei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio curvo pei quali, con una scelta conveniente dei parametri u_i, si ha simmetria nelle rotazioni: $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. La ricerca di questi sistemi dipende dal sistema differenziale che si ottiene da (VIII) ponendovi $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, al quale si può dare la forma

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} H_k, \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta_{ik} = \beta_{ki}) \\ \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} + \dfrac{\varepsilon}{R^2} H_i H_k = 0.\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{IX})$$

Nello stesso modo come in (M) § 14 si dimostra che questi sistemi dipendono da $\frac{n(n+1)}{2}$ funzioni arbitrarie; la loro ricerca equivale al problema di ridurre il ds^2 dello spazio a curvatura costante alla forma caratteristica:

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} du_2^2 + \cdots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2,$$

dove Θ è una conveniente funzione delle u_i. Se ci proponiamo anche qui il problema di trovare trasformazioni di Ribaucour che cangino ogni sistema E in altri sistemi E', un'analisi perfettamente simile a quella usata in (M) § 15 dimostra che le condizioni necessarie e sufficienti consistono nel dover soddisfare le funzioni trasformatrici al seguente sistema *completo* di equazioni ai differenziali totali

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \dfrac{\varepsilon H_i \varphi}{R} = m\gamma_i \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \dfrac{H_i \gamma_i}{R},\end{array}\right\} \qquad (66)$$

dove m indica una costante arbitraria. Le corrispondenti trasformazioni si indicheranno ancora con T_m.

Per queste T_m sussiste, come nello spazio euclideo ((M) § 16), il teorema speciale di permutabilità, le cui formole stabiliamo nel modo seguente. Si consideri una seconda trasformazione $T_{m'}$, con $m'^2 \neq m^2$, le cui funzioni trasformatrici siano $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$; φ' e nelle formole (65) del teorema di permutabilità: $\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i$, $\Phi = \frac{\tau\varphi}{A} + \varphi'$ si cerchi di determinare τ in guisa che le Γ_i soddisfino alle equazioni di trasformazione che caratterizzano una trasformazione $T_{m'}$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H'_i \Phi}{R} = m'\Gamma_i.$$

Il calcolo effettivo per τ porge il valore seguente

$$\tau = -\frac{2m}{m+m'}\left\{\sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda + \varepsilon \varphi \varphi'\right\}, \tag{67}$$

e poichè questo valore di τ soddisfa in effetto alle relative equazioni (64), ne risulta dimostrato il teorema speciale di permutabilità per le T_m.

Si osservi che questi risultati generali possono applicarsi in particolare all'ordinaria geometria sferica (ponendo $n = 2$, $K = 1$), ove si tratta di ridurre l'elemento lineare sferico alla forma di Ribaucour

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v} dv^2.$$

(Cf. Darboux, *Systèmes orthogonaux*, 2ème Édition, Livre III, Chap. I).

§ 15.

Sistemi n^{pli} ortogonali associati negli spazii a curvatura costante.

La nozione di sistemi n^{pli} ortogonali associati (§§ 3 e 10) può ora ricevere la seguente nuova estensione. Consideriamo due spazii S_n, $\overline{S}_n$ colle rispettive curvature costanti

$$K = \frac{\varepsilon}{R^2}, \qquad \overline{K} = \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{R}^2},$$

e supponiamo di avere in S_n un sistema n^{plo} ortogonale Σ e in $\overline{S}_n$ un altro $\overline{\Sigma}$ tali che fra le loro rotazioni β_{ik}, $\overline{\beta}_{ki}$ abbiano luogo le relazioni $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$; diremo allora che $(\Sigma, \overline{\Sigma})$ formano una coppia di sistemi associati. Si riconosce l'effettiva esistenza di infinite coppie di sistemi associati aggregando alle equazioni fondamentali (VIII) per Σ le analoghe per $\overline{\Sigma}$, nell'ipotesi $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$. Così, indicando con un soprassegno le quantità relative a $\overline{\Sigma}$, si forma nelle $n(n+1)$ funzioni incognite H_i, $\overline{H}_i$, β_{ik} il sistema differenziale seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k\,,\quad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\overline{H}_k\\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk}\\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_{\lambda}^{(i,k)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\frac{\varepsilon}{R^2}H_iH_k=0\\
&\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}+\sum_{\lambda}^{(i,k)}\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}+\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{R}^2}\overline{H}_i\overline{H}_k=0.
\end{aligned}\right\}\tag{X}$$

Coi soliti procedimenti si dimostra che le condizioni d'integrabilità del sistema (X) sono identicamente soddisfatte e la sua soluzione generale (H_i, $\overline{H}_i$, β_{ik}) dipende quindi da $n\,(n+1)$ funzioni arbitrarie.

Ora, come al § 4 pel caso euclideo, possiamo stabilire l'esistenza di trasformazioni T_m di Ribaucour che cangiano una coppia (Σ, $\overline{\Sigma}$) di sistemi associati in S_n, $\overline{S}_n$ in altre coppie associate (Σ', $\overline{\Sigma}'$) dei medesimi spazii. Applicando il procedimento stesso del caso particolare al § 4, si vede che queste T_m dipendono dalla ricerca di $2n+2$ funzioni trasformatrici

$$(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n;\varphi),\quad (\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2,\ldots,\overline{\gamma}_n;\overline{\varphi}),$$

assoggettate a soddisfare al seguente sistema differenziale:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma_k\,,\quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+\frac{\varepsilon H_i\varphi}{R}=m\overline{\gamma}_i\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}=\frac{H_i\gamma_i}{R}\\
&\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}\overline{\gamma}_k\,,\quad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda+\frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{H}_i\overline{\varphi}}{\overline{R}}=m\gamma_i\,,\quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i}=\frac{\overline{H}_i\overline{\gamma}_i}{\overline{R}}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

e di più alla condizione ai limiti

$$A=\overline{A},\tag{68*}$$

dove è posto:

$$A=\sum_{\lambda}\gamma_\lambda^2+\varepsilon\varphi^2,\quad \overline{A}=\sum_{\lambda}\overline{\gamma}_\lambda^2+\overline{\varepsilon}\,\overline{\varphi}^2.$$

Ma in effetto il sistema lineare (68) è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$A-\overline{A}=\text{cost.},$$

onde valgono le solite considerazioni. Scelte le $2n+2$ funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i, \varphi, \bar{\varphi})$ conforme alle condizioni superiori, pei rispettivi sistemi trasformati Σ', $\bar{\Sigma}'$ si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned} H'_i &= H_i - \frac{2mR\varphi}{A}\bar{\gamma}_i, \quad \bar{H}'_i = \bar{H}_i - \frac{2m\bar{R}\bar{\varphi}}{A}\gamma_i \\ \beta'_{ik} &= \beta_{ik} - \frac{2m\gamma_i\bar{\gamma}_k}{A}, \quad \bar{\beta}'_{ik} = \bar{\beta}_{ik} - \frac{2m\bar{\gamma}_i\gamma_k}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

e siccome $\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$ ne risulta anche $\bar{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, cioè i due sistemi Σ', $\bar{\Sigma}'$ sono nuovamente associati, come si voleva.

§ 16.

Il teorema di permutabilità per le nuove T_m.

Per le trasformazioni T_m dei nuovi sistemi associati sussiste il teorema speciale di permutabilità del caso euclideo (§§ 5, 6), ciò che dimostriamo come segue. Dalla coppia iniziale $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ siano dedotte mediante due trasformazioni T_m, $T_{m'}$ (con $m'^2 \mid = m^2$) le due nuove coppie $(\Sigma', \bar{\Sigma}')$, $(\Sigma'', \bar{\Sigma}'')$. Per le funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i, \varphi, \bar{\varphi})$ della T_m valgono le (68), (68*) e medesimamente per le trasformatrici $(\gamma'_i, \bar{\gamma}'_i, \varphi', \bar{\varphi}')$ delle $T_{m'}$ le analoghe

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma'_k, \quad \frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda + \frac{\varepsilon H_i\varphi'}{R} = m'\bar{\gamma}'_i, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial u_i} = \frac{H_i\gamma'_i}{R} \\ &\frac{\partial\bar{\gamma}'_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\bar{\gamma}'_k, \quad \frac{\partial\bar{\gamma}'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\bar{\gamma}'_\lambda + \frac{\bar{\varepsilon}\bar{H}_i\bar{\varphi}'}{\bar{R}} = m'\gamma'_i, \quad \frac{\partial\bar{\varphi}'}{\partial u_i} = \frac{\bar{H}_i\bar{\gamma}'_i}{\bar{R}}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$A' = \bar{A}', \tag{70*}$$

dove:

$$A' = \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda + \varepsilon\varphi'^2, \qquad \bar{A}' = \sum_\lambda \bar{\gamma}'^2_\lambda + \bar{\varepsilon}\,\bar{\varphi}'^2.$$

Ora, colle formole del teorema generale di permutabilità al § 13, poniamo

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_i=\frac{\tau\gamma_i}{A}+\gamma'_i,\quad \Phi=\frac{\tau\varphi}{A}+\varphi'\\ \overline{\Gamma}_i=\frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A}+\overline{\gamma}'_i,\quad \overline{\Phi}=\frac{\overline{\tau}\,\overline{\varphi}}{A}+\overline{\varphi}',\end{aligned}\right\}\tag{71}$$

le funzioni τ, $\overline{\tau}$ essendo determinate per quadrature dalle rispettive formole

$$\frac{\partial\tau}{\partial u_i}=-2m\gamma'_i\overline{\gamma}_i,\quad \frac{\partial\overline{\tau}}{\partial u_i}=-2m\gamma_i\overline{\gamma}'_i,\tag{72}$$

e cerchiamo le ulteriori condizioni affinchè le $2n+2$ funzioni

$$\Gamma_i,\ \overline{\Gamma}_i,\ \Phi,\ \overline{\Phi}$$

siano le trasformatrici di una $T_{m'}$ applicata alla coppia $(\Sigma', \overline{\Sigma}')$. Per questo dovranno essere soddisfatte le relative equazioni:

$$\frac{\partial\Gamma_i}{\partial u_k}=\beta'_{ik}\Gamma_k,\quad \frac{\partial\Gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda+\frac{\varepsilon H'_i\Phi}{R}=m'\overline{\Gamma}_i,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}=\frac{H'_i\Gamma_i}{R}$$

$$\frac{\partial\overline{\Gamma}_i}{\partial u_k}=\beta'_{ki}\overline{\Gamma}_k,\quad \frac{\partial\overline{\Gamma}_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta'_{i\lambda}\overline{\Gamma}_\lambda+\frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{H}'_i\overline{\Phi}}{\overline{R}}=m'\Gamma_i,\quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial u_i}=\frac{\overline{H}'_i\overline{\Gamma}_i}{\overline{R}},$$

$$\sum_\lambda\Gamma_\lambda^2+\varepsilon\Phi^2=\sum_\lambda\overline{\Gamma}_\lambda^2+\overline{\varepsilon}\,\overline{\Phi}^2,$$

dove le H'_i, $\overline{H}'_i$, β'_{ik} hanno i valori (69). Calcolando queste condizioni mediante le formole superiori, si trova che esse si riducono alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned}m\tau+m'\overline{\tau}=-2mB\\ m'\tau+m\overline{\tau}=-2m\overline{B},\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

dove si è posto

$$B=\sum_\lambda\gamma_\lambda\gamma'_\lambda+\varepsilon\varphi\varphi',\quad \overline{B}=\sum_\lambda\overline{\gamma}_\lambda\overline{\gamma}'_\lambda+\overline{\varepsilon}\,\overline{\varphi}\,\overline{\varphi}'.\tag{73*}$$

Le (73) coincidono formalmente colle (24), (24*) § 5, e risolute dànno ancora

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{2m}{m'^2 - m^2}(m B - m' \bar{B}) \\ \bar{\tau} &= \frac{2m}{m'^2 - m^2}(m \bar{B} - m' B). \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Ma ora, derivando le espressioni (73*) di B, $\bar{B}$, si trova:

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = m \gamma'_i \bar{\gamma}_i + m' \gamma_i \bar{\gamma}'_i, \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial u_i} = m \gamma_i \bar{\gamma}'_i + m' \gamma'_i \bar{\gamma}_i,$$

e ne risulta che i valori (74) di τ, $\bar{\tau}$ soddisfano in effetto alle (72). Così è provato che, mediante questa trasformazione $T_{m'} \equiv (\Gamma_i, \bar{\Gamma}_i, \Phi, \bar{\Phi})$, la coppia associata $(\Sigma', \bar{\Sigma}')$ si cangia in una quarta $(\Omega, \bar{\Omega})$. Che poi quest'ultima si deduca a sua volta dalla terza $(\Sigma'', \bar{\Sigma}'')$ mediante una T_m si proverebbe come al § 6. Osserviamo in fine anche qui che nel caso singolare $m'^2 = m^2$, introducendo la nozione di sistemi in involuzione, si trovano le stesse proprietà come nel caso euclideo al § 6.

§ 17.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H negli spazii a curvatura costante.

Chiamiamo, anche negli spazii a curvatura costante, sistemi H (o sistemi di Guichard-Darboux) quei sistemi n^{pli} ortogonali pei quali (con una conveniente scelta dei parametri u_i) sussiste la relazione:

$$\sum_\lambda H_\lambda^2 = H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = a^2 \qquad (a \text{ costante}).$$

Il calcolo stesso eseguito in (M) § 23 dimostra che, nel caso attuale dello spazio S_n di curvatura $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$, i coefficienti H_i e le rotazioni β_{ik} di un sistema H debbono soddisfare al sistema differenziale seguente:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k,\quad \dfrac{\partial H_i}{\partial u_i}=-\sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}H_\lambda\\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk}\\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\dfrac{\varepsilon}{R^2}H_iH_k=0\\ \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}+\dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}=0.\end{array}\right\}\qquad \text{(XI)}$$

Coi soliti procedimenti (Cf. (M) § 23) si riconosce che questo sistema (XI) ammette una soluzione generale con $n(n-1)$ funzioni arbitrarie, e per ciò i sistemi H dello spazio a curvatura costante esistono nello stesso grado di generalità come nello spazio euclideo.

Ora è manifesto che se si pone $\bar{\beta}_{ik}=\beta_{ki}$, queste $\bar{\beta}_{ik}$, a causa delle equazioni della seconda e quarta linea in (XI), soddisfano alle equazioni caratteristiche (I) § 1 per le rotazioni dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio euclideo. Colla nozione di sistemi associati, introdotta al paragrafo precedente, possiamo dire che: ***Ogni sistema H dello spazio a curvatura costante ammette infiniti sistemi associati nello spazio euclideo** (tutti trasformati di Combescure l'uno dell'altro).*

Ed ora andiamo a dimostrare che pei sistemi H degli spazii a curvatura costante esistono trasformazioni T_m di Ribaucour come nel caso euclideo (§ 7). Le formole per queste T_m si dedurranno da quelle sviluppate nei due paragrafi precedenti ponendovi

$$\frac{1}{\bar{R}}=0,\quad \bar{H}_i=0,\quad \bar{\varphi}=0.$$

Valendo pel sistema trasformato Σ' le formole (69)

$$H'_\lambda=H_\lambda-\frac{2mR\varphi}{A}\bar{\gamma}_\lambda,$$

otterremo che questo sistema Σ' sia di nuovo un sistema H' di Guichard-Darboux, determinando φ in guisa che risulti: $\sum_\lambda H'^2_\lambda=\sum_\lambda H^2_\lambda$. Ora si ha per la precedente

$$\sum_\lambda(H'^2_\lambda-H^2_\lambda)=\frac{4mR\varphi}{A}\sum_\lambda\bar{\gamma}_\lambda\left(\frac{mR\varphi}{A}\bar{\gamma}_\lambda-H_\lambda\right)=\frac{4mR\varphi}{A}(mR\bar{\varphi}-\sum_\lambda H_\lambda\bar{\gamma}_\lambda),$$

e la nostra condizione dà per φ il valore

$$\varphi = \frac{1}{m R} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda . \tag{75}$$

D'altra parte si verifica subito che questo valore di φ soddisfa alle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R},$$

onde risulta stabilito, anche pei sistemi H dello spazio a curvatura costante, l'esistenza di trasformazioni T_m di Ribaucour, contenenti, oltre m, $2n-2$ costanti arbitrarie.

Da ultimo estendiamo anche a questo caso il teorema speciale di permutabilità al § 7, osservando che se nelle due trasformazioni T_m, $T_{m'}$ pel passaggio dal sistema H ai rispettivi sistemi H', H'' le funzioni trasformatrici sono

$$\text{per la } T_m) \qquad \gamma_i, \ \overline{\gamma}_i, \ \varphi = \frac{1}{m R} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda$$

$$\text{per la } T_{m'}) \qquad \gamma'_i, \ \overline{\gamma}'_i, \ \varphi' = \frac{1}{m' R} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda ,$$

dalle formole generali (71) al paragrafo precedente

$$\Phi = \frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'$$

risulta facilmente

$$\Phi = \frac{1}{m' R} \sum_\lambda H'_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda ,$$

ossia

$$m' R \left(\frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'\right) = \sum_\lambda \left(H_\lambda - \frac{2 m R \varphi}{A} \overline{\gamma}_\lambda\right) \left(\frac{\overline{\tau} \overline{\gamma}_\lambda}{A} + \overline{\gamma}'_\lambda\right) .$$

Ora questa, sviluppata, si scrive

$$m' \tau + m \overline{\tau} = - 2 m \overline{B}$$

e coincide colla seconda delle (73) la quale trovasi verificata.

§ 18.

I sistemi H generalizzati dello spazio a curvatura costante.

Come si è fatto al § 10 per lo spazio euclideo, così anche nello spazio S_n a curvatura costante chiamiamo sistema H *generalizzato* di segnatura $(\varepsilon_2, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ ogni sistema n^{plo} ortogonale le cui H_i soddisfino la relazione: $\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost.}$ Il calcolo stesso eseguito al § 10 prova che le H_i soddisferanno alle equazioni differenziali

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda = 0,$$

e le rotazioni β_{ik} alle ulteriori

$$\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0,$$

e colle solite considerazioni (cf. §§ 10 e 17) si stabilisce l'esistenza di questi sistemi H generalizzati. Ora andiamo a costruire anche qui le trasformazioni T_m di Ribaucour, le cui formole otteremo nel modo seguente. Indichino $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n; \varphi)$ $2n+1$ funzioni trasformatrici assoggettate a soddisfare al sistema lineare ai differenziali totali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H_i \varphi}{R} = m\,\overline{\gamma}_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R} \\ &\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda = m\,\gamma_i. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Questo è un sistema completo e possiede l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.},$$

avendo posto

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 + \varepsilon\,\varphi^2, \quad \overline{A} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2,$$

poichè ne risulta $\dfrac{\partial A}{\partial u_i} = \dfrac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2\,m\,\gamma_i\overline{\gamma}_i$. Al solito si assumeranno i valori ini ziali delle $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i, \varphi)$ in modo da soddisfare anche l'equazione ai limiti

$$A = \bar{A}. \tag{76*}$$

Dopo ciò, applichiamo al sistema H la trasformazione di Ribaucour $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi)$ (Cf. § 13), e pel sistema trasformato avremo per la (60) § 13

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2 m R \varphi}{A} \bar{\gamma}_\lambda ,$$

e questo sarà un nuovo sistema H' generalizzato colla stessa segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ se φ è determinata in guisa che si abbia $\sum\limits_\lambda \varepsilon_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = 0$. Ora si ha dalla precedente

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = \frac{4 m R \varphi}{A} (m R \varphi - \sum_\lambda H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda)$$

e ne risulta quindi per φ il valore

$$\varphi = \frac{1}{m R} \sum_\lambda \varepsilon_\lambda H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda \tag{77}$$

compatibile colle (70) perchè, derivando la (77) rapporto ad una qualunque u_i si ottiene per le (76) un'identità.

§ 19.

I sistemi Q degli spazii a curvatura costante.

Dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio euclideo studiati nei §§ 17-20 in (M) e indicati come *sistemi* Q diamo ora una doppia generalizzazione. In primo luogo trasportiamo la nozione allo spazio S_n a curvatura costante K, e in secondo luogo supponiamo che nella formola (68) § 17 (M) i coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_n$, invece che costanti, siano funzioni di una sola delle u, precisamente la c_i una funzione U_i della sola u_i. Chiamiamo adunque *sistema* Q nello spazio S_n a curvatura costante un sistema n^{plo} ortogonale che ammetta trasformazioni di Ribaucour le cui funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi$

soddisfino alle equazioni di trasformazione

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \, (*) \tag{78}$$

e siano legate fra loro dalla relazione quadratica

$$U_1 \gamma_1^2 + U_2 \gamma_2^2 + \cdots + U_n \gamma_n^2 + a \varphi^2 = 0, \tag{79}$$

dove U_i indica una funzione della sola u_i (ovvero una costante) ed a una costante arbitraria. È immediato che il sistema trasformato Q' appartiene alla medesima classe, poichè le funzioni trasformatrici inverse da Q' a Q verificano la medesima (79).

Per esaminare la questione dell'esistenza e del grado di arbitrarietà dei sistemi Q, cominciamo dal formare le conseguenze differenziali della (79). Derivando rapporto ad u_i, abbiamo

$$U_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} U_\lambda \gamma_\lambda + a H_i \varphi + \frac{1}{2} U'_i \gamma_i = 0 \quad \left(U'_i = \frac{d U_i}{d u_i}\right). \tag{80}$$

Derivando nuovamente rapporto ad u_k ($h \neq i$), si ottiene

$$U_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + U_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \beta_{ki} U'_k \gamma_k + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda k} U_\lambda \gamma_\lambda + \gamma_k \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda +$$
$$+ a \beta_{ki} H_k \varphi + a H_i H_k \gamma_k + \frac{1}{2} U'_i \beta_{ik} \gamma_k = 0,$$

ed eseguendo col raccogliere i termini

$$\gamma_k \left\{ U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda + \beta_{ki} U'_k + \frac{1}{2} \beta_{ik} U'_i + a H_i H_k \right\} +$$
$$+ \beta_{ki} \left\{ \beta_{ik} U_i \gamma_i + U_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda k} U_\lambda \gamma_\lambda + a H_k \varphi \right\} = 0.$$

Ma, per la (80) stessa, la quantità entro la seconda parentesi eguaglia $-\frac{1}{2} U'_k \gamma_k$, per cui la precedente resta:

$$U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda + \frac{1}{2} (U'_i \beta_{ik} + U'_k \beta_{ki}) + a H_i H_k = 0, \tag{81}$$

(*) Si avverta che la φ qui introdotta differisce pel fattore costante R dalla φ delle formole precedenti.

equazione simmetrica nei due indici i, k. Se combiniamo questa colla equazione generale (VIII) § 12

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_{\lambda}^{(i,h)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+K H_i H_k=0$$

possiamo risolvere rispetto alle derivate $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}$, $\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}$ (*) e ne risulta:

La determinazione dei sistemi Q, nello spazio a curvatura costante K, dipende dal seguente sistema differenziale nelle n^2 funzioni incognite (H_i, β_{ik}):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k\,,\quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk}\\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}=\sum_{\lambda}^{(i,k)}\frac{U_k-U_\lambda}{U_i-U_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\frac{K\,U_k-a}{U_i-U_k}H_i H_k-\frac{U'_i\beta_{ik}+U'_k\beta_{ki}}{2(U_i-U_k)}\,.\end{aligned}\right\}\quad \text{(XII)}$$

In modo analogo come in (M) § 18, si dimostra che questo sistema (di BOURLET-DARBOUX) è completamente integrabile e la sua soluzione generale dipende quindi da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie essenziali.

Inversamente, soddisfatte che siano le (XII), se alle equazioni (78) di trasformazione aggreghiamo le (80), ne risulta (supposte tutte le U_i diverse da zero) un sistema *completo* ai differenziali totali coll'integrale quadratico

$$\sum_{\lambda} U_\lambda \gamma_\lambda^2+a\,\varphi^2=\text{cost.},$$

e poichè possiamo annullare la costante del secondo membro, il sistema n^{plo} ortogonale è in effetto un sistema Q.

Un secondo aspetto dei sistemi Q si ha dal considerare che il ds'^2

(*) Qui si esclude il caso $U_i=U_k$ che si verifica soltanto se U_i, U_k si riducono alla medesima costante c. Se questa è diversa da zero (ciò che accade necessariamente per la (8_1) quando $a\,=|=0$), ne segue fra le H_i e le β_{ik} la relazione in termini finiti

$$\sum_{\lambda}^{(i,h)}(U_\lambda-c)\,\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+(a-Kc)\,H_i H_k=0.$$

In particolare se $n=3$ e supponiamo $U_1=U_2$, abbiamo

$$\frac{\beta_{31}\beta_{32}}{H_1 H_2}=\frac{Kc-a}{U_3-c}$$

e siccome il primo membro dà la curvatura (relativa) delle superficie $u_3=$ cost. vediamo che queste sono superficie a curvatura costante.

dato da

$$d s'^2 = \frac{H_1^2}{U_1} d u_1^2 + \frac{H_2^2}{U_2} d u_2^2 + \cdots + \frac{H_n^2}{U_n} d u_n^2 \tag{82}$$

viene ad appartenere allo spazio di curvatura costante $K' = a$. E infatti se si pone $H'_i = \frac{H_i}{\sqrt{U_i}}$ ne risulta $\beta'_{ik} = \sqrt{\frac{U_i}{U_k}} \cdot \beta_{ik}$, onde, in forza delle (81), sono soddisfatte le condizioni caratteristiche che assegnano alla forma differenziale (82) la curvatura Riemanniana costante a. La ricerca dei sistemi Q equivale quindi a quella di particolari rappresentazioni di uno spazio a curvatura costante sopra un altro (rappresentazioni normali uniformi se le U_i sono altrettante costanti) (*).

§ 20.

Le trasformazioni R_m dei sistemi Q.

I sistemi Q, per la loro definizione stessa, ammettono una notevole classe di trasformazioni di Ribaucour che vogliamo ora esaminare più da vicino.

Indicando con m una costante arbitraria (diversa però da zero), poniamo

$$V_i = \frac{1 - U_i}{m}, \quad b = \frac{K - a}{m},$$

onde sarà V_i una funzione della sola u_i, e b una nuova costante. Le equazioni differenziali (XII), caratteristiche pei sistemi Q, prendono la seguente forma, *affatto indipendente dalla costante m:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,h)} \frac{V_k - V_\lambda}{V_i - V_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K V_k - b}{V_i - V_k} H_i H_k - \frac{V'_i \beta_{ik} + V'_k \beta_{ki}}{2 (V_i - V_k)}, \end{aligned}\right\} \tag{XIII}$$

mentre invece la relazione quadratica (79) si scrive

$$\sum_\lambda (1 - m V_\lambda) \gamma_\lambda^2 + (K - m b) \varphi^2 = 0 \tag{83}$$

(*) Cf. la mia Nota pubblicata nel Vol. XXV dei *Rendiconti dei Lincei* (febbraio 1916).

ed implica la costante m. Ed il sistema *completo* ai differenziali totali che, insieme alla (83), determina la trasformazione, assume per la (80) la forma seguente:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma_k, \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\dfrac{1-m\,V_\lambda}{1-m\,V_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+\dfrac{K-m\,b}{1-m\,V_i}H_i\varphi=\dfrac{m\,V'_i\gamma_i}{2(1-m\,V_i)} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i}=H_i\gamma_i. \end{array}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

Come nel caso particolare considerato in (M), questa si dirà una *trasformazione* R_m del sistema Q in un altro Q', ed è immediato che la trasformazione inversa da Q' a Q è ancora una R_m.

Supponiamo ora di considerare una seconda trasformazione $R_{m'}$ $(m' \neq m)$, che cangi il sistema Q in un terzo Q'' e siano γ'_i, φ' le relative funzioni trasformatrici legate dalla relazione quadratica

$$\sum_\lambda (1-m'\,V_\lambda)\gamma'^2_\lambda+(K-m'\,b)\varphi'^2=0 \tag{83*}$$

e dalle equazioni differenziali (XIV)

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma'_k, \quad \dfrac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\dfrac{1-m'\,V_\lambda}{1-m'\,V_i}\beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda+\dfrac{K-m'\,b}{1-m'\,V_i}H_i\varphi'=\dfrac{m'\,V'_i\gamma'_i}{2(1-m'\,V_i)} \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial u_i}=H_i\gamma'_i. \end{array}\right\} \quad (84)$$

Dimostriamo che sussiste anche qui il teorema speciale di permutabilità ((M) § 20):

Esiste un quarto sistema $\overline{Q}$ legato a Q' da una $R_{m'}$, e invece a Q'' da una R_m.

Indicando con Γ_i, Φ le funzioni trasformatrici nel passaggio da Q' a $\overline{Q}$, avremo (§ 13)

$$\Gamma_i=\frac{\tau\gamma_i}{A}+\gamma'_i, \quad \Phi=\frac{\tau\varphi}{A}+\varphi', \tag{85}$$

dove τ verificherà le equazioni

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i}=-2\gamma'_i\left\{\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+K\,H_i\varphi\right\}. \tag{86}$$

Ora proviamo che si può soddisfare a queste condizioni e insieme alla relativa (83)

$$\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\Gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\Phi^2=0, \tag{87}$$

dopo di che la trasformazione da Q' a $\overline{Q}$ sarà appunto una $R_{m'}$. Ma, sostituendo i valori (85) nella (87), ne deduciamo

$$\frac{\tau^2}{A^2}\left\{\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\varphi^2\right\}+$$
$$+\frac{2\tau}{A}\left\{\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda+(K-m' b)\,\varphi\,\varphi'\right\}=0,$$

e siccome per la (83)

$$\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\varphi^2=(m-m)'\left\{\sum_{\lambda}V_\lambda\,\gamma_\lambda^2+b\,\varphi^2\right\}=$$
$$=\frac{m-m'}{m}\left\{\sum_{\lambda}\gamma_\lambda^2+K\,\varphi^2\right\}=\frac{(m-m')\,A}{m},$$

vediamo che ponendo

$$S=\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda+(K-m' b)\,\varphi\,\varphi', \tag{88}$$

ne risulta per τ il valore unico e determinato

$$\tau=\frac{2\,m\,S}{m'-m}. \tag{88*}$$

Dobbiamo ora provare che questo valore di τ soddisfa alle (86), cioè S alle altre

$$m\,\frac{\partial S}{\partial u_i}+(m'-m)\,\gamma'_i\left\{\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda+K\,H_i\,\varphi\right\}=0. \tag{89}$$

Ora, derivando la (88) rispetto ad u_i, risulta

$$\frac{\partial S}{\partial u_i}=\gamma_i\left\{\sum_{\lambda}^{(i)}(1-m' V_\lambda)\,\beta_{\lambda i}\,\gamma'_\lambda+(1-m' V_i)\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i}+(K-m' b)\,H_i\,\varphi'-\frac{m' V'_i\,\gamma'_i}{2}\right\}+$$
$$+\gamma'_i\left\{\sum_{\lambda}^{(i)}(1-m' V_\lambda)\,\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda+(1-m' V_i)\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+(K-m' b)\,H_i\,\varphi-\frac{m' V'_i\,\gamma_i}{2}\right\},$$

ed in questa l'espressione che moltiplica γ_i è nulla, a causa delle equazioni differenziali (84), dopo di che sostituendo nella (89) e sopprimendo il fattore

γ'_i, resta da verificare l'equazione

$$m\left\{\sum_\lambda^{(i)}(1-m'V_\lambda)\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+(1-m'V_i)\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+(K-m'b)H_i\varphi-\frac{m'_iV'_i\gamma_i}{2}\right\}+$$
$$+(m'-m)\left\{\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+KH_i\varphi\right\}=0.$$

Ma questa, riducendo, diventa

$$m'\left\{(1-mV_i)\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}(1-mV_\lambda)\beta_{\lambda i}\beta_\lambda+(K-mb)H_i\varphi-\frac{mV'_i\gamma_i}{2}\right\}=0,$$

ed è identicamente verificata, a causa delle equazioni differenziali (XIV). Si conclude quindi che assumendo per τ nelle (85) il valore

$$\tau=\frac{2m}{m'-m}\left\{\sum_\lambda(1-m'V_\lambda)\gamma_\lambda\gamma'_\lambda+(K-m'b)\varphi\varphi'\right\},\tag{90}$$

si ottiene in effetto una trasformazione $R_{m'}\equiv(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n;\Phi)$ del sistema Q' in un quarto sistema $\overline{Q}$.

Che in fine questo sistema $\overline{Q}$ provenga a sua volta da Q'' con una R_m vediamo calcolando la quantità analoga

$$\tau'=-(\tau+2B),$$

poichè ne segue

$$\tau'=\frac{2m'}{m-m'}\left\{\sum_\lambda(1-mV_\lambda)\gamma_\lambda\gamma'_\lambda+(K-mb)\varphi\varphi'\right\},$$

e questa è la formola (90) stessa ove si scambi Q' con Q'', indi m con m'.

INDICE DEI PARAGRAFI

Generalizzazione di alcuni punti della teoria delle equazioni integrali di Fredholm.

(*Di* Pia Nalli, *a Palermo.*)

È noto che, data in una forma geometrica di prima specie una proiettività reale non ellittica e non involutoria, ciascuno degli elementi uniti della proiettività può essere approssimato, iterando su un elemento qualunque della forma la proiettività data o la sua inversa.

Ho pensato che qualche cosa di simile potrà avvenire nel campo del calcolo funzionale.

Data l'operazione funzionale $F[\varphi(s)]$, che cosa succederà iterando sopra una funzione $\varphi(s)$ l'operazione F o la sua inversa, dato che questa inversa si possa definire?

Per il caso in cui si ha

$$F[\varphi(s)] = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

essendo $K(s, t)$ una funzione continua e simmetrica nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, la risposta si può trovare nei lavori del Vergerio (*).

Ponendo

$$F_1[\varphi(s)] = F[\varphi(s)],$$

$$F_n[\varphi(s)] = F\Big[F_{n-1}[\varphi(s)]\Big] \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

se è $F[\varphi(s)] \not\equiv 0$ esiste una costante c tale da avere

$$\lim_{n=\infty} \frac{F_{2n}[\varphi(s)]}{c^n} = f(s),$$

dove $f(s)$ è una funzione continua.

(*) A. Vergerio, *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-35].

La funzione $f(s)$ non è identicamente nulla e si possono dare due casi: o $f(s)$ soddisfa all'eguaglianza

$$\sqrt{c}\, f(s) = F[f(s)],$$

$\sqrt{c}$ essendo presa con segno conveniente, ovvero è $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$ e si ha

$$\sqrt{c}\, f_1(s) = F[f_1(s)],$$
$$-\sqrt{c}\, f_2(s) = F[f_2(s)].$$

Se consideriamo come identiche due funzioni che differiscono per una costante moltiplicativa, possiamo dire che nel primo caso $f(s)$ è un elemento unito nella corrispondenza funzionale $\psi(s) = F[\varphi(s)]$ — cioè nella corrispondenza che fa passare dalla funzione $\varphi(s)$ alla $\psi(s)$ — e nel secondo caso sono elementi uniti $f_1(s)$ ed $f_2(s)$.

Per l'operazione qui esaminata non è possibile definire l'operazione inversa, ossia l'operazione $G[\varphi(s)]$ tale da avere $G\Big[F[\varphi(s)]\Big] = \varphi(s)$.

Ho pensato di considerare l'operazione funzionale lineare più generale

$$F[\varphi(s)] = k(s)\,\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

dove $k(s)$ è limitata in (a, b), $K(s, t)$ è a quadrato sommabile nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, operazione per la quale, sotto certe condizioni, è possibile definire l'operazione inversa $G[\varphi(s)]$.

Definite le $F_n[\varphi(s)]$ e $G_n[\varphi(s)]$ analogamente a quanto si è fatto precedentemente, fissata $\varphi(s)$ può esistere una costante $c\,(d)$ tale che la successione di funzioni

$$\frac{F_{2n}[\varphi(s)]}{c^n}, \quad \left(\frac{G_{2n}[\varphi(s)]}{d^n}\right)$$

converga in media verso una funzione $f(s)$ $\Big(g(s)\Big)$ la quale o è un elemento unito nella corrispondenza $\psi(s) = F[\varphi(s)]$ ovvero è la somma di due elementi uniti.

Viene così messo in vista che nelle questioni del genere di quelle da me trattate il concetto di convergenza in media è quello che si presenta come il più adatto alla natura delle quistioni e solo in casi particolari può essere sostituito dal concetto di convergenza ordinaria.

Gli elementi uniti nella corrispondenza

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

sono le funzioni fondamentali nel senso di FREDHOLM relative al nucleo $K(s\, t)$: tale concetto viene così esteso ad una coppia di funzioni $K(s, t)$, $k(s)$.

E qui si presentano spontanee una quantità di domande quando si tengano presenti i risultati delle ricerche a cui ha dato impulso l'equazione di FREDHOLM a nucleo simmetrico.

Un nucleo simmetrico si può rappresentare per mezzo delle sue funzioni fondamentali nel senso di FREDHOLM.

Tale rappresentazione è suscettibile di una generalizzazione quando si generalizzino nel modo suddetto le funzioni fondamentali?

La risposta affermativa a tale domanda quando $k(s)$ prende un numero finito di valori si troverà nel presente lavoro, ma in generale la generalizzazione non è possibile. In generale, insieme alle funzioni fondamentali generalizzate bisognerà considerare le *funzioni differenziali fondamentali generalizzate*, estensione di quelle introdotte nella teoria dell'equazione singolare di FREDHOLM e che è necessario considerare qui anche nel caso di regolarità.

Diremo che una funzione $f(s, \lambda)$, a quadrato sommabile rispetto ad s nell'intervallo (a, b) e tale che $\int_a^b f^2(s, \lambda)\, ds$ rappresenti una funzione $\rho_0(\lambda)$ continua e limitata per λ variabile in $(-\infty, \infty)$, è una funzione differenziale fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ quando per ogni intervallo (λ, λ_2), ponendo

$$\Delta f(s, \lambda) = f(s, \lambda_2) - f(s, \lambda_1),$$

$$\int_a^b \lambda\, d_\lambda f(s, \lambda) = \lambda_2 f(s, \lambda_2) - \lambda_1 f(s, \lambda_1) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(s, \lambda)\, d\lambda,$$

si ha

$$k(s)\, \Delta f(s, \lambda) + \int_a^b K(s, t)\, \Delta f(t, \lambda)\, dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\, d_\lambda f(s, \lambda).$$

Per le equazioni singolari di FREDHOLM le funzioni differenziali fondamentali sono state introdotte in seguito alle ricerche sulle forme quadratiche ad infinite variabili. Anche nel caso più generale che stiamo esaminando trova applicazione la teoria delle forme quadratiche, come è accennato altrove nel presente lavoro.

Concludendo: i risultati finora da me ottenuti mi fanno ritenere che la teoria delle equazioni di FREDHOLM a nucleo simmetrico, sia regolari che singolari, è compresa in una teoria più generale alla quale conduce naturalmente la considerazione dell'operazione funzionale

$$F[\varphi(s)] = k(s)\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

I problemi nei quali ha trovato applicazione la teoria delle equazioni di FREDHOLM potranno in corrispondenza venire generalizzati.

Notiamo finalmente che alla teoria di cui sopra si riattacca quella dell'equazione integrale di terza specie

$$f(s) = k(s)\varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

che sarebbe forse più conveniente di considerare sotto la forma

$$f(s) = \lambda\left[k(s)\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt\right].$$

Richiamo brevemente alcune definizioni da me introdotte in alcune Note di recente pubblicazione ed alcuni risultati in esse contenuti (*).

Sia $K(s, t)$ una funzione reale definita nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, simmetrica ed a quadrato sommabile in detto dominio, e $k(s)$ una funzione reale, misurabile, limitata, definita in (a, b).

Definisco le funzioni

$$K^{(1)}(s, t),\quad K^{(2)}(s, t), \ldots,\quad K^{(n)}(s, t), \ldots$$

per mezzo delle relazioni

$$K^{(1)}(s, t) = K(s, t),$$

$$K^{(n)}(s, t) = k(s)K^{(n-1)}(s, t) + \int_a^b K(v, s)K^{(n-1)}(v, t)\,dv +$$

$$+ k^{n-1}(t)\,K(s, t) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

e chiamo $K^{(n)}(s, t)$ n^{esimo} *nucleo iterato di* $K(s, t)$ *per mezzo di* $k(s)$.

(*) P. NALLI, *Sulle equazioni integrali*, Note I, II, III, IV, V, VI, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Roma, 2° semestre 1918 e 1° semestre 1919.

$K^n(s, t)$ *è funzione simmetrica.*

Data una funzione $g_0(s)$ reale ed a quadrato sommabile in $(a\,b)$ definisco le funzioni

$$g_1(s),\quad g_2(s),\ldots,\quad g_n(s),\ldots$$

per mezzo delle relazioni

$$g_n(s) = k(s)\,g_{n-1}(s) + \int_a^b K(s,\ t)\,g_{n-1}(t)\,d\,t \quad (n = 1,\ 2,\ldots),$$

e chiamo $g_n(s)$ n^{esima} *iterata diretta di* $g_0(s)$ *relativa a* $K(s,\ t)$ *e* $k(s)$.

Sussiste la relazione

$$g_n(s) = k^n(s)\,g_0(s) + \int_a^b K^{(n)}(s,\ t)\,g_0(t)\,d\,t.$$

Se m, n ed r sono tre interi non negativi ed $r \leq n$, tra le iterate dirette di due funzioni $f_0(s)$ e $g_0(s)$ si ha la relazione

$$\int_a^b f_n(s)\,g_m(s)\,d\,s = \int_a^b f_{n-r}(s)\,g_{m+r}(s)\,d\,s. \tag{I}$$

Se una funzione $\varphi(s)$ che ha il quadrato del modulo sommabile in $(a,\ b)$ soddisfa alla relazione

$$[\mu - k(s)\,\varphi(s) = \int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,d\,t \;(*)$$

con μ costante, chiameremo $\varphi(s)$ *funzione fondamentale* e μ *costante caratteristica relative a* $K(s,\ t)$ *e* $k(s)$.

Se il prodotto $[\mu - k(s)]\,\varphi(s)$ non è nullo identicamente chiameremo $\varphi(s)$ funzione fondamentale *propria*, la diremo *impropria* nel caso contrario.

Una costante caratteristica la diremo *propria* se ad essa corrisponde almeno una funzione fondamentale propria, *impropria* nel caso contrario.

Per due funzioni fondamentali $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$ corrispondenti a costanti caratteristiche distinte si ha

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,d\,(s) = 0. \tag{II}$$

(*) Avvertiamo una volta per sempre che una eguaglianza tra funzioni la intendiamo soddisfatta quasi dappertutto, fatta cioè eventualmente eccezione per un insieme di punti di misura nulla (misura lineare o superficiale a seconda dei casi).

Le costanti caratteristiche sono reali e formano un insieme numerabile.

Una funzione fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ lo è anche relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ e corrisponde alla costante μ^n.

Una funzione $\varphi(s)$ fondamentale relativamente a $K^n(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ, o è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrisponde ad uno dei valori reali di $\sqrt[n]{\mu}$ (e si presenta questo caso se n è dispari o se è $\mu = 0$) ovvero (e questo può succedere se n è pari) $\varphi(s)$ è la somma di due funzioni $\varphi'(s)$ e $\varphi''(s)$ fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti rispettivamente alle costanti $\pm\sqrt[n]{\mu}$.

Se μ è una costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ esiste una ed una sola funzione reale $\Gamma(s t)$ a quadrato sommabile nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ soddisfacente all'eguaglianza

$$[\mu - k(s)]\ \Gamma(s, t) = \int_a^b K(v, s)\, \Gamma(v, t)\, d v$$

tale che, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente a μ, si abbia

$$[\mu - k(s)]\, \varphi(s) = \int_a^b \Gamma(t, s)\, \varphi(t)\, d t.$$

In particolare sarà

$$[\mu - k(s)]\ \Gamma(s, t) = \int_a^b \Gamma(v, s)\, \Gamma(v, t)\, d v. \tag{III}$$

Chiameremo $\Gamma(s, t)$ *funzione caratteristica relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$, *corrispondente alla costante* μ.

Se $\Gamma_1(s, t)$, $\Gamma_2(s, t), \ldots$ sono funzioni caratteristiche distinte relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t)$$

converge in media nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ (*), cioè esiste una funzione $H(s, t)$ reale ed a quadrato sommabile nel detto dominio per la quale

(*) E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, Tome 144, 1er semestre 1907, pp. 1022-1024.

si ha

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b\int_a^b\left[H(s,\,t)-\sum_{n=1}^{m}\Gamma_n(s,\,t)\right]^2 ds\,dt=0.$$

Si ha

$$\int_a^b\int_a^b H^2(s,\,t)\,ds\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b\Gamma_n^2(s,\,t)\,ds\,dt$$

e

$$\int_a^b\int_a^b K^2(s,\,t)\,ds\,dt\geqq\int_a^b\int_a^b H^2(s,\,t)\,ds\,dt.$$

Se $\Gamma(s,\,t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s,\,t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ ed n è dispari, la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s,\,t)$ e $k^n(s)$ corrispondente a μ^n è

$$\Gamma(s,\,t)\sum_{i=0}^{n-1}\mu^i k^{n-i-1}(t).$$

Se n è pari, condizione necessaria e sufficiente perchè μ^n sia una costante caratteristica propria relativa a $K^{(n)}(s,\,t)$ e $k^n(s)$ è che la funzione

$$\Gamma(s,\,t)\sum_{i=0}^{n-1}\mu^i k^{n-i-1}(t)+\Gamma'(s,\,t)\sum_{i=0}^{n-1}(-\mu)^i k^{n-i-1}(t),$$

(dove con $\Gamma'(s,\,t)$ denotiamo la funzione caratteristica relativa a $K(s,\,t)$ e $k(s)$ corrispondente a $-\mu$, se questa è una costante caratteristica propria, e poniamo $\Gamma'(s,\,t)\equiv 0$ nel caso contrario) non sia identicamente nulla. Quando la detta funzione non è nulla identicamente essa è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s,\,t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ^n.

Scopo principale del presente lavoro è di dimostrare il teorema seguente: *se per qualche valore di n la successione delle somme parziali della serie formata con le funzioni caratteristiche relative a $K^{(n)}(s,\,t)$ e $k^n(s)$ converge in media verso $K^{(n)}(s,\,t)$ nel dominio $a\leqq s\leqq b$, $a\leqq t\leqq b$, lo stesso accadrà per $n=1$, e quindi per qualunque n.*

---

1. Sia $n>1$ e indichiamo con $R_1(s,\,t)$, $R_2(s,\,t)$,... le funzioni caratteristiche relative a $K^{(n)}(s,\,t)$ e $k^n s$, corrispondenti rispettivamente alle costanti λ_1, λ_2,...

Supponiamo che nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_m R_m(s,\ t)$$

converga in media verso $K^{(n)}(s,\ t)$, ciò che indichiamo nel seguente modo

$$K^{(n)}(s,\ t) \sim \sum_m R_m(s,\ t).$$

Denotiamo con $\mu_1, \mu_2, \ldots$ le costanti caratteristiche proprie relative a $K(s,\ t)$ e $k(s)$ che sono radici n^{esime} delle λ_m e con $\Gamma_1(s,\ t)$, $\Gamma_2(s,\ t), \ldots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Da quanto abbiamo premesso risulta che si può porre

$$K^{(n)}(s,\ t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\ t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu_m^i k^{n-i-1}(t). \tag{1}$$

Dimostreremo che *se n è dispari si avrà*

$$K(s,\ t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\ t),$$

e se n è pari: o vale ancora la relazione precedente, ovvero si ha

$$K(s,\ t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\ t) + \sum_m \Delta_m(s,\ t)$$

dove $\Delta_m(s,\ t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s,\ t)$ e $k(s)$ corrispondente ad una costante μ'_m, diversa da tutte le μ_m, ed è

$$[\mu'_m + k(t)]\, \Delta_m(s\, t) \equiv 0.$$

Poniamo

$$K(s,\ t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\ t) + P(s,\ t):$$

sarà, per qualunque m,

$$\int_a^b P(v,\ s)\, \Gamma_m(v,\ t)\, d\, v \equiv 0. \tag{2}$$

Ricordiamo la formula

$$K^{(n+1)}(s\ t) = k(s)\, K^{(n)}(s\ t) + \int_a^b K(v,\ s)\, K^{(n)}(v,\ t)\, d\, v + k^n(t)\, K(s,\ t).$$

Abbiamo, per la (2),

$$\int_a^b K(v,\,s)\,K^{(n)}(v,\,t)\,dv \sim \sum_{i,j}\sum_{p=0}^{n-1} \mu_j^p\,k^{n-p-1}(t)\int_a^b \Gamma_i(v,\,s)\,\Gamma_j(v,\,t)\,dv$$

e, per le (II) e (III),

$$\int_a^b K(v,\,s)\,K^{(n)}(v,\,t)\,dv \sim \sum_m [\mu_m - k(s)]\,\Gamma_m(s,\,t)\sum_{i=0}^{n-1}\mu_m^i\,k^{n-i-1}(t),$$

quindi possiamo scrivere

$$K^{(n+1)}(s,\,t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\,t)\sum_{i=0}^{n}\mu_m^i\,k^{n-i}(t) + k^n(t)\,P(s,\,t). \tag{3}$$

Ma si può anche scrivere

$$K^{(n+1)}(s,\,t) = k(s)\,K^{(n)}(t,\,s) + \int_a^b K(v,\,s)\,K^{(n)}(v,t)\,dv + k^n(t)\,K(t,\,s)$$

e siccome, per la (III), $[\mu_m - k(s)]\ \Gamma_m(s,\,t)$ è funzione simmetrica di s e t, avremo

$$K^{(n+1)}(s,\,t) \sim \sum_m \Gamma_m(t,\,s)\left\{k(s)\sum_{i=0}^{n-1}\mu_m^i\,k^{n-i-1}(s) + [\mu_m - k(t)]\sum_{i=0}^{n-1}\mu_m^i\,k^{n-i-1}(t) + k^n(t)\right\} +$$
$$+ k^n(t)\,P(t,\,s)$$

cioè

$$K^{(n+1)}(s,\,t) \sim \sum_m \Gamma_m(t,\,s)\sum_{i=0}^{n}\mu_m^i\,k^{n-i}(s) + k^n(t)\,P(t,\,s).$$

Confrontando questa con la (3), per la simmetria di $K^{(n+1)}(s,\,t)$, concludiamo

$$k^n(s)\ P(s,\,t) = k^n(t)\ P(s,\,t). \tag{4}$$

2. Supponiamo dapprima n dispari. La (4) ci dà

$$k(s)\,P(s,\,t) = k(t)\,P(s,\,t): \tag{5}$$

faremo vedere che è $P(s,\,t) \equiv 0$.

Infatti, supposto che ciò non sia, si può porre

$$P(s,\,t) \sim \sum_n \lambda_n \sum_{m=1}^{m_n} \chi_m^{(n)}(s)\,\sigma_m^{(n)}(t), \tag{6}$$

dove le $\chi_m^{(n)}(s)$, quando si fanno variare m ed n, formano un sistema ortogonale nell'intervallo (a, b) ed un altro ne formano le $\sigma_m^{(n)}(s)$, le λ_n sono costanti positive distinte (*).

La (5) ci darà dunque

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b P(s, t)\,k(t)\,\sigma_m^{(n)}(t)\,dt = \lambda_n\,k(s)\,\chi_m^{(n)}(s)\\ \int_a^b P(s, t)\,k(s)\,\chi_m^{(n)}(s)\,ds = \lambda_n\,k(t)\,\sigma_m^{(n)}(t).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Facciamo, per esempio, $n = 1$ e per semplicità sopprimiamo l'apice (1) e indichiamo m_1 con p.

Per le (7) si avrà

$$k(s)\,\chi_i(s) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,\chi_r(s)\,; \quad k(s)\,\sigma_i(s) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,\sigma_r(s),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

dove le a_{ir} sono costanti (*). Essendo

$$a_{ir} = \int_a^b k(s)\,\chi_i(s)\,\chi_r(s)\,ds,$$

il determinante formato con le a_{ir} è simmetrico.

Esso è diverso da zero.

Infatti, supponiamolo nullo: potremo determinare p costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ non tutte nulle, in modo che, ponendo

$$\chi(s) = \sum_{r=1}^{p} \alpha_r\,\chi_r(s)\,, \quad \sigma(s) = \sum_{r=1}^{p} \alpha_r\,\sigma_r(s),$$

si abbia $k(s)\,\chi(s) = 0$, $k(s)\,\sigma(s) = 0$. Sarà anche

$$\int_a^b P(s, t)\,\sigma(t)\,dt = \lambda_1\,\chi(s), \quad \int_a^b P(s, t)\,\chi(s)\,ds = \lambda_1\,\sigma(t),$$

e, per la (2),

$$\int_a^b \Gamma_m(s, t)\,\chi(s)\,ds = 0,$$

(*) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I. Teil: *Entwicklung willkürlichen Funktionen nach Systemen vorgeschriebener* [Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), pp. 433-476].

quindi

$$\int_a^b K^{(n)}(s, t)\,\chi(t)\,dt = 0,$$

che si può scrivere

$$k^n(s)\,\chi(s) + \int_a^b K^n(s, t)\,\chi(t)\,dt = 0,$$

cioè $\chi(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ e corrisponde alla costante zero, sarà perciò

$$k(s)\,\chi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\chi(t)\,dt = 0,$$

cioè

$$\int_a^b K(s, t)\,\chi(t)\,dt = 0.$$

Ma è

$$\int_a^b K(s, t)\,\chi(t)\,dt = \int_a^b P(t, s)\,\chi(t)\,dt = \lambda_1\,\sigma(s),$$

quindi sarà $\sigma(s) = 0$, il che non è possibile.

Il determinante formato con le a_{ir} è dunque diverso da zero.

Sia ora

$$x_i = \sum_{r=1}^{p} b_{ri}\,y_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

una sostituzione lineare ortogonale che riduce la forma quadratica

$$\sum_{i,r} a_{ir}\,x_i\,x_r$$

alla forma canonica $\sum_{j=1}^{p} \rho_j\,y_j^2$: le ρ_j saranno tutte diverse da zero.

Avremo

$$\rho_n\,b_{ni} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,b_{nr} \qquad (n = 1, 2, \ldots p;\quad i = 1, 2, \ldots, p)$$

e

$$\sum_{r=1}^{p} b_{nr}\,b_{mr} = \begin{cases} 0\ (n \neq m) \\ 1\ (n = m) \end{cases}.$$

Se ora poniamo

$$\psi_n(s) = \sum_{i=1}^{p} b_{ni}\,\sigma_i(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots, p),$$

le $\psi_n(s)$ formeranno un sistema ortogonale equivalente a quello delle $\sigma_n(s)$.

Dalle relazioni

$$k(s)\,\sigma_i(s) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,\sigma_r(s),$$

moltiplicando la relazione generica per b_{ni} e sommando membro a membro le p relazioni ottenute, si ha

$$k(s)\,\psi_n(s) = \sum_{r=1}^{p} \sigma_r(s) \sum_{i=1}^{p} a_{ir}\,b_{ni},$$

cioè, essendo $a_{ir} = a_{ri}$,

$$k(s)\,\psi_n(s) = \rho_n \sum_{r=1}^{p} b_{nr}\,\sigma_r(s),$$

e finalmente

$$k(s)\,\psi_n(s) = \rho_n\,\psi_n(s).$$

Se poniamo

$$\varphi_n(s) = \sum_{i=1}^{p} b_{ni}\,\chi_i(s)$$

sarà

$$k(s)\,\varphi_n(s) = \rho_n\,\varphi_n(s)$$

e

$$\sum_{n=1}^{p} \chi_n(s)\,\sigma_n(t) = \sum_{n=1}^{p} \varphi_n(s)\,\psi_n(t).$$

Si può quindi supporre senz'altro che le $\chi_i(s)$ e le $\sigma_i(s)$ soddisfino ad eguaglianze del tipo

$$[\rho_i - k(s)]\,\chi_i(s) = 0, \qquad [\rho_i - k(s)]\,\sigma_i(s) = 0,$$

dove le ρ_i sono costanti non nulle, sostituendo, ove occorra, alle $\chi_i(s)$ ed alle $\sigma_i(s)$ rispettivamente le $\varphi_i(s)$ e le $\psi_i(s)$.

Avremo dunque

$$[\rho_i^n - k^n(s)]\,\chi_i(s) = 0$$

che insieme all'eguaglianza

$$\int_a^b K^{(n)}(s, t)\,\chi_i(t)\,dt = 0$$

ci dà

$$[\rho_i^n - k^n(s)]\,\chi_i(s) = \int_a^b K^{(n)}(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t.$$

Da questa, essendo n dispari, si trae

$$[\rho_i - k(s)]\,\chi_i(s) = \int_a^b K(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t, \quad \int_a^b K(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t = 0,$$

cioè $\sigma_i(s) = 0$, contrariamente al supposto.

3. Supponiamo ora n pari. Faremo vedere che se $P(s,\ t)$ non è identicamente nulla esiste almeno una costante caratteristica propria relativa a $K(s,\ t)$ e $k(s)$ diversa dalle $\mu_1,\ \mu_2, \ldots$

Dalla (4) si trae

$$k^2(s)\,P(s,\ t) = k^2(t)\,P(s,\ t).$$

Supposta $P(s,\ t)$ non identicamente nulla si può scrivere la (6) e quindi si conclude, analogamente a quanto si è detto al numero precedente,

$$k^2(s)\,\chi_i(s) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,\chi_r(s)\,; \quad k^2(s)\,\sigma_i(s) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\,\sigma_r(s).$$

Il determinante simmetrico formato con le a_{ir} è diverso da zero, perchè si è visto al numero precedente che le $k(s)\ \chi_i(s)$ sono linearmente indipendenti e quindi lo sono anche le $k^2(s)\ \chi_i(s)$.

Concludiamo dunque come al numero precedente che si può supporre senz'altro che le $\chi_i(s)$ soddisfino ad uguaglianze del tipo $[\rho_i - k^2(s)]\,\chi_i(s) = 0$, dove le ρ_i sono costanti positive.

Avremo dunque

$$[(\sqrt{\rho_i})^n - k^n(s)]\,\chi_i(s) = \int_a^b K^{(n)}(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t,$$

perchè ambo i membri hanno valore nullo.

Ed allora si possono dare due casi: o si ha

$$[\sqrt{\rho_i} - k(s)]\,\chi_i(s) = \int_a^b K(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t, \tag{8}$$

$\sqrt{\rho_i}$ essendo presa con segno conveniente, ed essendo

$$\int_a^b K(s,\ t)\,\chi_i(t)\,d\,t = \lambda_1\,\sigma_i(s)$$

$\sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$. Inoltre, essendo

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s)\, \chi_i(t)\, d\,t = 0,$$

$\sqrt{\rho_i}$ è diversa da tutte le μ_m.

Se la (8) non è soddisfatta, posto

$$u_i(s) = \sqrt{\rho_i}\, \chi_i(s) + k(s)\, \chi_i(s) + \int_a^b K(s, t)\, \chi_i(t)\, d\,t,$$

$$v_i(s) = -\sqrt{\rho_i}\, \chi_i(s) + k(s)\, \chi_i(s) + \int_a^b K(s, t)\, \chi_i(t)\, d\,t,$$

queste sono funzioni fondamentali relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_i}$ e $-\sqrt{\rho_i}$.

Si ha

$$u_i(s) = [\sqrt{\rho_i} + k(s)]\, \chi_i(s) + \lambda_1\, \sigma_i(s),$$

$$v_i(s) = [-\sqrt{\rho_i} + k(s)]\, \chi_i(s) + \lambda_1\, \sigma_i(s),$$

quindi

$$[\sqrt{\rho_i} - k(s)]\, u_i(s) = \lambda_1\, [\sqrt{\rho_i} - k(s)]\, \sigma_i(s),$$

$$[-\sqrt{\rho_i} - k(s)]\, v_i(s) = \lambda_1\, [-\sqrt{\rho_i} - k(s)]\, \sigma_i(s),$$

e di qui si vede che i due primi membri non possono essere entrambi nulli, cioè uno almeno dei due valori di $\sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Essendo poi

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s)\, \chi_i(t)\, d\,t = 0$$

sarà pure, per la (I),

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s)\, u_i(t)\, d\,t = 0, \quad \int_a^b \Gamma_m(t, s)\, v_i(t)\, d\,t = 0$$

e perciò la costante caratteristica propria che abbiamo trovata è diversa da tutte le μ_m.

Indichiamo con $\Delta_1(s, t), \Delta_2(s, t), \ldots$ le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ diverse dalle $\Gamma_m(s, t)$ e $\mu'_1, \mu'_2, \ldots$ le corrispondenti costanti caratteristiche. Qualunque siano m ed r si avrà

$$\int_a^b \Gamma_m(v,\ s)\,\Delta_r(v,\ t)\,d\,v = 0,$$

quindi

$$\int_a^b K^{(n)}(v,\ s)\,\Delta_r(v,\ t)\,d\,v = 0,$$

ma essendo

$$[\mu'_r - k(s)]\,\Delta_r(s,\ t) = \int_a^b K(v,\ s)\,\Delta_r(v,\ t)\,d\,v$$

sarà

$$[\mu'^n_r - k^n(s)]\,\Delta_r(s,\ t) = \int_a^b K^{(n)}(v,\ s)\,\Delta_r(v,\ t)\,d\,v$$

cioè

$$[\mu'^n_r - k^n(s)]\,\Delta_r(s,\ t) \equiv 0. \tag{9}$$

Ma è anche

$$[\mu'_r - k(s)]\,\Delta_r(s,\ t) = \int_a^b \Delta_r(v,\ s)\,\Delta_r(v,\ t)\,d\,v, \tag{10}$$

quindi, ponendo

$$\Phi_r(s,\ t) = \Delta_r(s,\ t)\sum_{i=0}^{n-1} \mu'^i_r\,k^{n-i-1}(t),$$

avremo dalla (9)

$$[\mu'^n_r - k^n(s)]\,\Phi_r(s,\ t) \equiv 0$$

e dalla (10)

$$[\mu'^n_r - k^n(s)]\,\Phi_r(s,\ t) = \int_a^b \Phi_r(v,\ s)\,\Phi_r(v,\ t)\,d\,v,$$

cioè

$$\int_a^b \Phi_r(v,\ s)\,\Phi_r(v,\ t)\,d\,v \equiv 0$$

e finalmente

$$\Phi_r(s,\ t) \equiv 0.$$

Sarà perciò anche

$$\Delta_r(s,\ t)\,[\mu'_r + k(t)] \equiv 0.$$

Potremo dunque scrivere

$$K^{(n)}(s,\ t) \sim \sum_m \Gamma_m(s,\ t)\sum_{i=0}^{n-1} \mu^i_m\,k^{n-i-1}(t) + \sum_m \Delta_m(s,\ t)\sum_{i=0}^{n-1} \mu'^i_m\,k^{n-i-1}(t),$$

ed allora, ponendo

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) + \sum_m \Delta_m(s, t) + Q(s, t),$$

sarà $Q(s, t) \equiv 0$, perchè altrimenti esisterebbe qualche costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ diversa dalle μ_m e dalle μ'_m.

Il teorema enunciato al n.° 1 è così completamente dimostrato.

4. Faremo ora vedere che il metodo esposto permette di calcolare tutte le μ'_m.

Si è trovato che si può porre

$$P(s, t) \sim \sum_i \nu_i \chi_i(s) \sigma_i(t)$$

dove le $\chi_i(s)$ e le $\sigma_i(s)$ formano due sistemi ortogonali, le ν_i sono costanti positive non necessariamente distinte e si ha $[\rho_i - k^2(s)]\chi_i(s) \equiv 0$, essendo le ρ_i costanti positive.

Uno almeno dei due valori $\pm\sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Facciamo vedere che relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ non esiste nessuna costante caratteristica propria diversa dalle μ_m e dalle $\pm\sqrt{\rho_i}$.

Infatti, sia μ una tale costante e $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria ad essa corrispondente. Sarà, per qualunque m,

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s)\varphi(t)\,dt = 0.$$

Inoltre essendo $\varphi(s)$ e $\chi_i(s)$ funzioni fondamentali relative a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$ corrispondenti alle costanti distinte μ^2 e ρ_i, sarà per qualunque i

$$\int_a^b \chi_i(s)\varphi(s)\,ds = 0,$$

quindi

$$\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

contro l'ipotesi che $\varphi(s)$ sia funzione fondamentale propria.

Le μ'_m *si devono* dunque *cercare tra le* $\pm\sqrt{\rho_i}$.

Ora supponiamo che sia

$$\rho_{i_1} = \rho_{i_2} = \cdots$$

e che queste siano tutte le ρ_i eguali a ρ_{i_1}.

Se tra le funzioni

$$u_{i_n}(s) = \sqrt{\rho_{i_1}}\,\chi_{i_n}(s) + k(s)\,\chi_{i_n}(s) + \nu_{i_n}\,\sigma_{i_n}(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dove $\sqrt{\rho_{i_1}}$ è presa con un certo segno, non c'è nessuna funzione fondamentale propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, se è cioè

$$[\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)]\,\sigma_{i_n}(s) \equiv 0$$

per qualunque n, allora o $\sqrt{\rho_{i_1}}$ è costante caratteristica impropria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ o è uguale a qualcuna delle ν_m: in altri termini $\sqrt{\rho_{i_1}}$ non è una μ'_m.

Infatti, si formi un sistema di funzioni ortogonale in (a, b): $h_1(s), h_2(s), \ldots$, equivalente al sistema delle $u_{i_n}(s)$: $h_r(s)$, essendo una combinazione lineare di un numero finito delle $u_{i_n}(s)$, è funzione fondamentale impropria corrispondente alla costante $\sqrt{\rho_{i_1}}$.

Supponiamo che questa sia una costante caratteristica propria e sia $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria ad essa corrispondente: possiamo porre

$$\varphi(s) = \lambda(s) + \psi(s) \tag{11}$$

con

$$\lambda(s) \sim \sum_n a_n h_n(s), \quad a_n = \int_a^b h_n(s)\,\varphi(s)\,d s.$$

Sarà

$$\int_a^b K(s, t)\,\lambda(t)\,d t = \sum_n a_n \int_a^b K(s, t)\,h_n(t)\,d t = \sum_n a_n\,[\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)]\,h_n(s),$$

cioè

$$\int_a^b K(s, t)\,\lambda(t)\,d t = [\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)]\,\lambda(s),$$

ma si ha anche

$$\sum_n a_n\,[\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)]\,h_n(s) \equiv 0,$$

quindi $\lambda(s)$ è funzione fondamentale impropria e $\psi(s)$ è funzione fondamentale propria.

Ma è chiaro che si avrà, per qualunque i,

$$\int_a^b \chi_i(s)\,\psi(s)\,d s = 0.$$

Ciò risulta dalla posizione (11) se i è uguale a qualche i_n, in caso contrario l'eguaglianza è ancora soddisfatta perchè $\chi_i(s)$ e $\psi(s)$ sono funzioni fondamentali relative a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$ corrispondenti alle costanti distinte ρ_i e ρ_{i_1}. Sarà perciò

$$\int_a^b P(s, t)\,\psi(s)\,ds = 0,$$

quindi per un conveniente m avremo

$$\int_a^b \Gamma_m(s, t)\,\psi(s)\,ds \not\equiv 0$$

e $\sqrt{\rho_{i_1}} = \mu_m$.

Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè* $\sqrt{\rho_i}$, *presa con un certo segno, sia una* μ'_m, *è che si possa trovare un intero* n $(= 0 \neq i)$ *tale da avere* $\rho_n = \rho_i$ *e* $[\sqrt{\rho_i} - k(s)]\,\sigma_n(s) \not\equiv 0$.

Conosciute le $\mu'_1, \mu'_2, \ldots$ si possono determinare le $\Delta_1(s, t), \Delta_2(s, t), \ldots$ (*).

5. Dal teorema del n.° 1 discende (**) che *se la funzione* $k(s)$ *prende un numero finito di valori, fatta eventualmente eccezione per valori presi complessivamente in un insieme di punti di misura nulla, la successione delle somme parziali della serie formata con le funzioni caratteristiche relative a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$ *converge in media verso* $K(s, t)$.

Chiamando $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \ldots$ queste funzioni caratteristiche, si ha cioè

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t). \tag{12}$$

Ma una funzione caratteristica $\Gamma_m(s, t)$ soddisfa all'eguaglianza

$$[\mu_m - k(s)]\,\Gamma_m(s, t) = \int_a^b \Gamma_m(v, s)\,\Gamma_m(v, t)\,dv$$

e quindi si può porre

$$\Gamma_m(s, t) \sim \sum_n [\mu_m - k(s)]\,\varphi_n^{(m)}(s)\,\varphi_n^{(m)}(t) \text{ (***)}$$

dove le $\varphi_n^{(m)}(s)$ al variare di n formano un sistema ortogonale in (a, b) e sono funzioni fondamentali proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti

(*) l. c., pag. 238. Nota III.

(**) l. c., pag. 238. Nota I.

(***) l. c., pag. 244.

alla costante μ_m. Ne viene che facendo variare tanto n che m le $\varphi_n^{(m)}(s)$ formano un sistema ortogonale in (a, b).

Tutte le volte che vale la (12) si può quindi porre

$$K(s, t) \sim \sum_n [\lambda_n - k(s)]\, \psi_n(s)\, \psi_n(t), \tag{13}$$

dove le λ_n sono costanti non necessariamente distinte e le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale in (a, b).

Se vale la (13) ed inoltre per ogni funzione $h(s)$ soddisfacente alle condizioni

$$\int_a^b h(s)\, \psi_n(s)\, ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

si ha $k(s)\, h(s) \equiv 0$ $\Big($il che avviene in particolare quando è $k(s) \equiv 0$ o quando $K(s, t)$ è un nucleo chiuso, cioè quando non esiste nessuna funzione $h(s)$ per cui è $\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt \equiv 0\Big)$ per ogni funzione $f(s)$ a quadrato sommabile in (a, b) sarà

$$k(s) f(s) + \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt \sim \sum_n \lambda_n a_n \psi_n(s) \tag{14}$$

con

$$a_n = \int_a^b f(s)\, \psi_n(s)\, ds.$$

La (14) generalizza lo sviluppo in serie di funzioni fondamentali secondo Fredholm dell'integrale $\int_a^b K(s, t) f(t)\, dt$.

Il fatto che la (14) è valida in condizioni molto larghe quando $k(s)$ prende un numero finito di valori, fà presumere che allora essa sia un caso particolare di una relazione più generale che valga in condizioni meno restrittive per la $k(s)$.

Il secondo membro della (14) è una serie di Fourier generalizzata: per ulteriori ricerche, che faremo conoscere in seguito, riteniamo si debba arrivare a concludere che sotto determinate condizioni, del resto molto larghe, il primo membro della (14) si possa mettere sotto forma della somma di una serie di Fourier generalizzata e di una serie in cui ogni termine è un integrale di Fourier generalizzato.

Una via per arrivare a questo risultato potrà trovarsi nella teoria delle forme quadratiche con infinite variabili. All'operazione funzionale rappresentata dal primo membro della (14) è legata la forma quadratica $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ con

$$a_{ij} = \int_a^b k(s)\, \varphi_i(s)\, \varphi_j(s)\, ds + \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, \varphi_i(t)\, \varphi_i(s)\, dt\, ds$$

dove $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \dots$ è un sistema di funzioni ortogonali in (a, b) e chiuso.

Per $k(s) \equiv 0$ si ritrova la forma quadratica della quale si sono serviti l'HILBERT ed i suoi allievi per lo studio dell'equazione di FREDHOLM di seconda specie a nucleo simmetrico, anche nel caso di singolarità.

Di tutto ciò intendiamo occuparci in altro lavoro (*).

6. Passeremo ora alla risoluzione dell'equazione funzionale

$$K^{(n)}(s, t) \equiv 0.$$

Risulta dai precedenti numeri che tale equazione può essere soddisfatta solo per n pari e quando è soddisfatta per un valore pari di n lo è per qualunque altro valore pari. Ci riduciamo quindi a risolvere la seguente equazione:

$$[k(s) + k(t)]\, K(s, t) + \int_a^b K(v, s)\, K(v, t)\, dv \equiv 0. \tag{15}$$

Se questa è soddisfatta risulta dal n.° 3 che si potrà porre

$$K(s, t) \sim \sum_n \lambda_n\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)$$

dove le λ_n sono costanti, le $\varphi_n(s)$ costituiscono un sistema ortogonale in (a, b) e si ha

$$[\rho_n - k^2(s)]\, \varphi_n(s) \equiv 0 \tag{16}$$

essendo le ρ_n costanti positive.

Se è $\lambda_n + \lambda_m \neq 0$ ed $n \neq m$ si ha

$$\int_a^b k(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi_m(s)\, ds = 0. \tag{17}$$

Ciò risulta subito dalla (15) moltiplicandola per $\varphi_n(s)\, \varphi_m(t)$ ed integrando nel quadrato $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$.

(*) Mentre correggo le bozze di stampa della presente Memoria, posso aggiungere che il lavoro è stato già pubblicato nel tomo XLIII dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Si è già visto che si possono dare due casi: o $\varphi_n(s)$ è funzione fondamentale propria relativa a $K(s,t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante $\sqrt{\rho_n}$, presa questa con segno conveniente, ovvero le due funzioni

$$\left.\begin{aligned} u_n(s) &= [\lambda_n + \sqrt{\rho_n} + k(s)]\,\varphi_n(s), \\ v_n(s) &= [\lambda_n - \sqrt{\rho_n} + k(s)]\,\varphi_n(s) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

sono fondamentali, corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_n}$ e $-\sqrt{\rho_n}$ ed una almeno è propria. Ma nel caso che stiamo esaminando possiamo dire di più: $u_n(s)$ e $v_n(s)$ se sono entrambe non nulle sono entrambe proprie.

Infatti si ha

$$[\sqrt{\rho_n} - k(s)]\,u_n(s) = \lambda_n [\sqrt{\rho_n} - k(s)]\,\varphi_n(s),$$

quindi se $u_n(s)$ fosse impropria si avrebbe $k(s)\,\varphi_n(s) = \sqrt{\rho_n}\,\varphi_n(s)$ e l'eguaglianza

$$\lambda_n\,\varphi_n(s) = \int_b^a K(s,\ t)\,\varphi_n(t)\,d\,t$$

si potrebbe scrivere

$$(\lambda_n + \sqrt{\rho_n})\,\varphi_n(s) = k(s)\,\varphi_n(s) + \int_a^b K(s,\ t)\,\varphi_n(t)\,d\,t,$$

cioè $\varphi_n(s)$ sarebbe funzione fondamentale, il che non può avvenire quando $u_n(s)$ e $v_n(s)$ sono entrambe non nulle.

Definite le $u_n(s)$ e $v_n(s)$ per mezzo delle (18) si ha

$$\int_a^b u_n(s)\,v_n(s)\,d\,s = 0$$

ed essendo $u_n(s)\,v_n(s) = \lambda_n[\lambda_n + 2\,k(s)]\,\varphi_n^2(s)$ avremo

$$\int_a^b k(s)\,\varphi_n^2(s)\,d\,s = -\frac{\lambda_n}{2}. \tag{19}$$

Abbiamo poi

$$\int_a^b u_n^2(s)\,d\,s = 2\,\rho_n + \lambda_n\sqrt{\rho_n}, \qquad \int_a^b v_n^2(s)\,d\,s = 2\,\rho_n - \lambda_n\sqrt{\rho_n},$$

quindi

$$4\,\rho_n \geqq \lambda_n^2$$

e l'uguaglianza si presenta quando una delle due funzioni $u_n(s)$, $v_n(s)$ è identicamente nulla, cioè quando $\varphi_n(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$.

La condizione $4\rho_n = \lambda_n^2$ è dunque necessaria e sufficiente perchè $\varphi_n(s)$ sia fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$: quando essa è soddisfatta $\varphi_n(s)$ corrisponde alla costante caratteristica $\frac{\lambda_n}{2}$.

7. Supponiamo che per un certo valore di n sia $4\rho_n > \lambda_n^2$.

Poniamo

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{4\rho_n - \lambda_n^2}}$$

prendendo, per esempio, per il radicale la determinazione positiva: faremo vedere che il nucleo $K(s, t)$ ammette come funzione fondamentale nel senso di Fredholm la funzione $\varphi'_n(s)$ definita dall'eguaglianza

$$\varphi'_n(s) = a_n \left[\frac{\lambda_n}{2} + k(s)\right] \varphi_n(s).$$

Essa corrisponde alla costante caratteristica, nel senso di Fredholm, $-\lambda_n$ e si ha

$$\int_a^b \varphi'^2_n(s)\, d\,s = 1, \quad [\rho_n - k^2(s)]\, \varphi'_n(s) \equiv 0. \tag{20}$$

Infatti la (15) ci dà

$$\int_a^b K(s, t)\, k(t)\, \varphi_n(t)\, d\,t = -\lambda_n [\lambda_n + k(s)]\, \varphi_n(s)$$

e per mezzo di questa si trova facilmente

$$\int_a^b K(s, t)\, \varphi'_n(t)\, d\,t = -\lambda_n\, \varphi'_n(s).$$

Tenendo poi conto della (19) si trova la prima delle (20) e la seconda discende subito dalla definizione di $\varphi'_n(s)$ e dalla (16).

$\varphi'_n(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$, ma non lo è relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, perchè è $4\rho_n > \lambda_n^2$.

In corrispondenza a $\varphi'_n(s)$ si trovano le due funzioni

$$u'_n(s) = [-\lambda_n + \sqrt{\rho_n} + k(s)]\, \varphi'_n(s)$$
$$v'_n(s) = [-\lambda_n - \sqrt{\rho_n} + k(s)]\, \varphi'_n(s)$$

fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_n}$ e $-\sqrt{\rho_n}$. Esse non sono linearmente indipendenti dalle $u_n(s)$ e $v_n(s)$ perchè si trova facilmente

$$u'_n(s) = b_n u_n(s), \quad v'_n(s) = -\frac{1}{b_n} v_n(s)$$

dove b_n è la radice quadrata positiva di

$$\frac{2\sqrt{\rho_n} - \lambda_n}{2\sqrt{\rho_n} + \lambda_n}.$$

8. Supponiamo ora che sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$ e per $n \leq p$ $4\rho_n > \lambda_n^2$, per $n > p$ o $\lambda_n \neq \lambda_1$ o $4\rho_n = \lambda_n^2$.

Potremo allora formare le funzioni $\varphi'_1(s), \varphi'_2(s), \ldots, \varphi'_p(s)$ le quali, per la (17), saranno ortogonali.

Se il nucleo $K(s, t)$ ammette una funzione $\varphi'(s)$ fondamentale nel senso di Fredholm, corrispondente alla costante $-\lambda_1$ e soddisfacente ad una condizione della forma $[\rho - k^2(s)]\varphi'(s) \equiv 0$ con $4\rho > \lambda_1^2$, $\varphi'(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi'_1(s), \varphi'_2(s), \ldots, \varphi'_p(s)$.

Infatti, se $\varphi'(s)$ è una tale funzione, la $\varphi(s)$ definita dall'eguaglianza

$$\varphi(s) = \left[-\frac{\lambda_1}{2} + k(s)\right]\varphi'(s)$$

è fondamentale nel senso di Fredholm e corrisponde alla costante λ_1, ed è $[\rho - k^2(s)]\varphi(s) \equiv 0$.

Sarà dunque

$$\varphi(s) = \sum_{\lambda_n = \lambda_1} c_n \varphi_n(s),$$

le c_n sono costanti e la somma è estesa ai valori di n che rendono $\lambda_n = \lambda_1$. Ma se n è tale che sia $4\rho_n = \lambda_n^2$ cioè $4\rho_n = \lambda_1^2$, è $\rho_n \neq \rho$, quindi

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_n(s)\, ds = 0,$$

come risulta subito dalle due eguaglianze

$$\rho\varphi(s) = k^2(s)\varphi(s), \quad \rho_n\varphi_n(s) = k^2(s)\varphi_n(s),$$

e quindi è $c_n = 0$.

Avremo dunque

$$\varphi(s) = \gamma_1 \varphi_{i_1}(s) + \gamma_2 \varphi_{i_2}(s) + \cdots + \gamma_r \varphi_{i_r}(s) \tag{21}$$

dove $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sono interi compresi tra i primi p ed è $\rho_{i_1} = \rho_{i_2} = \cdots = \rho_{i_r} = \rho$.

Essendo per $n \leq p$

$$\varphi_n(s) = a_n \left[-\frac{\lambda_n}{2} + k(s) \right] \varphi'_n(s),$$

dove a_n è la costante definita al numero precedente, la (21) si può scrivere

$$\left[-\frac{\lambda_1}{2} + k(s) \right] \left[-\varphi'(s) + \gamma'_1 \varphi'_{i_1}(s) + \gamma'_2 \varphi'_{i_2}(s) \cdots + \gamma'_r \varphi'_{i_r}(s) \right] \equiv 0$$

dove è $\gamma'_i = a_{i_i} \gamma_i$. Moltiplicando la precedente relazione per $\frac{\lambda_1}{2} + k(s)$ troviamo

$$\left(\rho - \frac{\lambda_1^2}{4} \right) \left[-\varphi'(s) + \gamma'_1 \varphi'_{i_1}(s) + \cdots + \gamma'_r \varphi'_{i_r}(s) \right] \equiv 0,$$

cioè $\varphi'(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi_n(s)$ con $n \leq p$.

Indichiamo con $j_1, j_2, \ldots, j_m$ gli interi n per i quali è $\lambda_n = -\lambda_1$ e $4\rho_n > \lambda_n^2$: per quanto si è visto si può dire che $\varphi_{j_h}(s)$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ è una combinazione lineare delle $\varphi'_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Viceversa, per una $\varphi'_i(s)$ si ha

$$\varphi'_i(s) = \sum_{\lambda_m = -\lambda_1} c_m \varphi_m(s);$$

ma se m è tale che sia $4\rho_m = \lambda_1^2$ sarà $\rho_m \neq \rho_i$, quindi $c_m = 0$, cioè $\varphi'_i(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi_{j_h}(s)$: ne viene che il sistema delle $\varphi_{j_h}(s)$ e quello delle $\varphi'_i(s)$ sono equivalenti, il che porta $m = p$ e

$$\sum_{r=1}^{p} \varphi_{j_r}(s) \varphi_{j_r}(t) = \sum_{r=1}^{p} \varphi'_r(s) \varphi'_r(t).$$

Concludendo: se una funzione simmetrica $K(s, t)$ soddisfa alla (15) si potrà porre

$$K(s, t) \sim \sum_i \alpha_i \chi_i(s) \chi_i(t) + \sum_i \beta_i [\psi_i(s) \psi_i(t) - \psi'_i(s) \psi'_i(t)] \tag{22}$$

dove le α_i e le β_i sono costanti tali che le serie $\sum_i \alpha_i^2$ e $\sum_i \beta_i^2$ risultino convergenti e le β_i sono positive, le funzioni

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ldots,\ \psi_1(s),\ \psi_2(s),\ldots,\ \psi'_1(s),\ \psi'^2(s),\ldots,$$

formano un sistema ortogonale ed inoltre si ha

$$\left[k(s)+\frac{\alpha_i}{2}\right]\chi_i(s)\equiv 0,\ [\mu_i^2-k^2(s)]\,\psi_i(s)\equiv 0,\ [\mu_i^2-k^2(s)]\,\psi'_i(s)\equiv 0,$$

μ_i essendo una costante positiva che soddisfa all'ineguaglianza $4\mu_i^2>\beta_i^2$.

Si ha ancora

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b k(s)\,\psi_i(s)\,\psi_j(s)\,ds=\begin{cases}-\dfrac{\beta_i}{2}\ (i=j)\\ 0\quad (i\neq j)\end{cases}\\
&\int_a^b k(s)\,\psi'_i(s)\,\psi'_j(s)\,ds=\begin{cases}\dfrac{\beta_i}{2}\ (i=j)\\ 0\quad (i\neq j)\end{cases}\\
&\int_a^b k(s)\,\psi_i(s)\,\psi'_j(s)\,ds=\begin{cases}\dfrac{(4\mu_i^2-\beta_i^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\ (i=j)\\ 0\qquad (i\neq j).\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Inversamente, se $K(s,\ t)$ ha la forma (22) e sono soddisfatte tutte le condizioni sopra enunciate, $K(s,\ t)$ è una funzione simmetrica che soddisfa alla (15).

Infatti, posto

$$P_i(s\,t)=\alpha_i\,\chi_i(s)\,\chi_i(t)\ ;\quad Q_i(s,\ t)=\beta_i\,[\psi_i(s)\,\psi_i(t)-\psi'_i(s)\,\psi'_i(t)]$$

essendo per $i\neq j$

$$\int_a^b P_i(v,\ s)\,P_j(v,\ t)\,dv\equiv 0,\quad \int_a^b Q_i(v,\ s)\,Q_j(v,\ t)\,dv\equiv 0$$

e, qualunque siano i ed j,

$$\int_a^b P_i(v,\ s)\,Q_j(v,\ t)\,dv\equiv 0$$

avremo

$$K^{(2)}(s,\ t)\sim\sum_i P_i^{(2)}(s,\ t)+\sum_i Q_i^{(2)}(s,\ t).$$

Ma è

$$P_i^{(2)}(s,\ t) = \alpha_i\,[k(s) + k(t) + \alpha_i]\,\chi_i(s)\,\chi_i(t),$$

ed essendo $\left[k(s) + \frac{\alpha_i}{2}\right]\chi_i(s) \equiv 0$, $P_i^{(2)}(s,\ t) \equiv 0$.

Tenendo poi conto delle (23) si trova facilmente

$$\int_a^b \int_a^b [Q_i^{(2)}(s,\ t)]^2\, d\,s\,d\,t = 0,$$

cioè $Q_i^{(2)}(s,\ t) \equiv 0$ e finalmente $K^{(2)}(s,\ t) \equiv 0$.

Si trova così il modo di costruire le più generali funzioni $k(s)$ e $K(s,\ t)$, la seconda simmetrica, soddisfacenti alla (15).

9. Dalla (22) poi si arriva facilmente alla relazione

$$K(s,\ t) \sim \sum_m \Delta_m(s,\ t) \tag{24}$$

che esprime $K(s,\ t)$ per mezzo delle funzioni caratteristiche $\Delta_m(s,\ t)$ relative ad essa ed a $k(s)$.

Si consideri il seguente sistema di funzioni

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s), \ldots,\quad U_1(s),\ U_2(s), \ldots,\quad V_1(s),\ V_2(s), \ldots, \tag{25}$$

dove poniamo

$$U_i(s) = \left[\frac{1}{\mu_i\,(2\,\mu_i + \beta_i)}\right]^{\frac{1}{2}} [\beta_i + \mu_i + k(s)]\,\psi_i(s),$$

$$V_i(s) = \left[\frac{1}{\mu_i\,(2\,\mu_i - \beta_i)}\right]^{\frac{1}{2}} [\beta_i - \mu_i + k(s)]\,\psi_i(s):$$

$\chi_i(s)$, $U_i(s)$, $V_i(s)$ sono funzioni fondamentali relativamente a $K(s,\ t)$ e $k(s)$ e corrispondono rispettivamente alle costanti $\frac{\alpha_i}{2}$, μ_i, $-\mu_i$.

Le (25) costituiscono un sistema ortogonale.

Si può scrivere

$$P_i(s,\ t) = \left[\frac{\alpha_i}{2} - k(s)\right] \chi_i(s)\,\chi_i(t)$$

e facilmente si trova

$$Q_i(s,\ t) = [\mu_i - k(s)]\,U_i(s)\,U_i(t) + [-\mu_i - k(s)]\,V_i(s)\,V_i(t),$$

e sostituendo queste espressioni di $P_i(s, t)$ e $Q_i(s, t)$ nella relazione

$$K(s, t) \sim \sum_i P_i(s, t) + \sum_i Q_i(s, t)$$

si trova per $K(s, t)$ una espressione della forma (13) equivalente alla (24).

Possiamo dare facilmente l'espressione di $\Delta_m(s, t)$, funzione caratteristica corrispondente ad una costante μ'_m.

Si ha

$$\Delta_m(s, t) \sim \sum_{\alpha_n = 2\mu'_m} \left[\frac{\alpha_n}{2} - k(s)\right] \chi_i(s)\, \chi_i(t) + \sum_{\mu_n = \mu'_m} [\mu_n - k(s)]\, U_i(s)\, U_i(t)$$

se è $\mu'_m > 0$; per $\mu'_m < 0$ la seconda somma deve essere sostituita da

$$\sum_{-\mu_n = \mu'_m} [-\mu_n - k(s)]\, V_i(s)\, V_i(t).$$

In entrambi i casi la prima somma contiene un numero finito di termini mentre la seconda ne può contenere infiniti.

Novembre 1918.